



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ármonicos e series de Fourier

Millán Lado Bascoy

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ármonicos e series de Fourier

Millán Lado Bascoy

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise matemática
Título: Armónicos e series de Fourier
Breve descrición do contido
Trátase de explorar a relación entre os armónicos das cordas vibrantes, particularmente en instrumentos musicais, e a orixe da teoría das series de Fourier.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Introducción histórica	1
1.1. Pitágoras	1
1.2. Euler y d'Alembert	2
2. Las ideas de Daniel Bernoulli	5
2.1. Bernoulli	5
2.2. Su artículo	5
3. La parte musical	9
3.1. Afinación pitagórica	9
3.2. Afinación natural	12
3.3. Temperamento igual	14
3.4. Comparación de las afinaciones	15
4. La parte matemática	21
4.1. Deducción de la ecuación de la cuerda vibrante	21
4.2. Solución de d'Alembert	23
4.3. Separación de variables	25
Bibliografía	29

Resumen

La música y las matemáticas están íntimamente relacionadas. La finalidad de este trabajo es explorar una pequeña parte de esta relación, centrándonos en los armónicos. Para ello haremos una introducción histórica, seguida de un resumen de un artículo escrito por Daniel Bernoulli, luego estudiaremos distintos tipos de afinación relacionadas con los armónicos y la afinación que se usa hoy en día y por último deduciremos la ecuación de la cuerda vibrante y veremos las solución de d'Alembert y la solución por separación de variables empleando series de Fourier.

Abstract

Music and mathematics are closely related. The purpose of this work is to explore a small part of this relationship, focusing on harmonics. For this we will make an historical introduction, followed by a summary of an article written by Daniel Bernoulli, then we will study different types of tuning related to harmonics and the tuning that is used nowadays and finally we will deduce the vibrating string equation and we will see the d'Alembert solution and the separation of variables solution using Fourier series.

Introducción

Las matemáticas y la música siempre han tenido una relación muy estrecha. Desde la Antigua Grecia, donde se empezó a teorizar con la armonía de las esferas; pasando por la Edad Media, época en la que la música, la aritmética, la geometría y la astronomía se enseñaban a la vez en el *quadrivium*; y finalmente en la actualidad, que se utilizan conjuntamente para la composición, el análisis, la acústica...

El objetivo principal de este TFG es el estudio de parte de esta relación entre matemáticas y música.

Para esto dividiremos el trabajo en 4 capítulos:

En el primer capítulo se hará una breve introducción histórica, centrándose en la Antigua Grecia y en los matemáticos Euler y d’Alembert.

El segundo capítulo está centrado en Bernoulli y su artículo titulado “Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l’Académie de 1747 et 1748”.

En el tercer capítulo se profundizará sobre 3 tipos de afinación: la afinación pitagórica, la afinación natural y el temperamento igual. También se hará un estudio con un espectrograma.

En el cuarto capítulo deduciremos la ecuación de la cuerda vibrante y comprobaremos que la solución que propone d’Alembert es igual a la solución que propone Bernoulli a este problema.

Capítulo 1

Introducción histórica

Los hallazgos musicales más antiguos encontrados hasta el día de hoy son instrumentos y representaciones que sobrevivieron al paso de los años. Desde la Edad de Piedra se construían instrumentos con huesos; más tarde, en el neolítico, se construyeron instrumentos idiófonos e instrumentos hechos con cerámica; y desde la Edad de Bronce se construyeron instrumentos de metal y de cuerda.

La región de Mesopotamia y países como China, Egipto e India desarrollaron tradiciones musicales propias, pero en este trabajo me centraré en Grecia, concretamente en la escuela pitagórica.

1.1. Pitágoras

Las palabras música y matemáticas vienen del griego. La primera viene de la palabra griega *musiké*, que significa “el arte de las musas”; y la segunda viene de la palabra *mathēmatiká*, que significa “conocimiento”. Estas dos disciplinas están íntimamente relacionadas.[3]

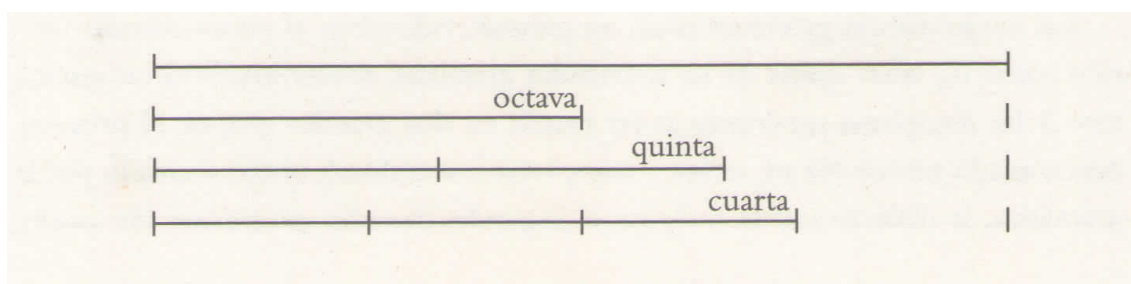
Pitágoras de Samos es considerado como el primer matemático puro. Nació en Samos sobre el año 570 a.C. Aparte de destacar en matemáticas, también hizo contribuciones a la filosofía, la teoría musical y la astronomía.[9]

Pitágoras de Samos fundó la escuela pitagórica en el siglo VI a.C. En esta escuela se estudiaba aritmética y música a la vez. Hacían diseños musicales, acústicos y astronómicos basados en las matemáticas. Ellos pensaban que los planetas producían vibraciones armónicas cuando se movían. Esto es lo que se conoce como la teoría de la armonía de las esferas.

En la escuela pitagórica se estudió el sonido que produce una cuerda atada a dos puntos cuando se toca. Lo que hacían con esta cuerda era cambiar su longitud. Cuanto más corta

era la cuerda más agudo era el sonido que escuchaban, y cuanto más larga era más grave era el sonido. Con la longitud justa podían obtener las notas musicales. Haciendo esto, se dieron cuenta que, con determinadas proporciones, podían obtener notas agradables para el oído.

Las primeras relaciones que obtuvieron fueron cuando pisaron por la mitad la cuerda, que se puede expresar como 2:1 y daba un intervalo de octava respecto de la nota original; cuando pisaban por un tercio de la cuerda, que se puede expresar como 3:2 y daba un intervalo de quinta respecto de la nota original; y cuando pisaban por un cuarto de la cuerda, que se puede expresar como 4:3 y daba un intervalo de cuarta respecto de la nota original.



Gracias a esto se llegó a una primera aproximación de los armónicos, que vendrían dados por:

$$\frac{n+1}{n}$$

Esta fórmula aproxima bastante bien los intervalos de segunda, cuarta, quinta y octava; pero los demás intervalos fallan un poco con respecto a los armónicos reales.[1]

Después de ver esta primera toma de contacto de los armónicos, daremos un salto temporal hasta el siglo XVIII y nos centraremos en los matemáticos Euler, d'Alembert y Bernoulli.

1.2. Euler y d'Alembert

Leonhard Euler nació en Basilea en el año 1707. Entró a la universidad a la edad de 14 años. Hasta ese momento, lo único que Euler había aprendido de matemáticas fue gracias a su padre, Paul Euler, ya que su escuela tenía muy poco dinero. Euler empezó a destacar pronto, y Johann Bernoulli, el padre de Daniel Bernoulli, se fijó en su potencial para ser un gran matemático. Acabó haciendo grandes contribuciones a muchos campos de las matemáticas y de la física, como son la trigonometría, la geometría, la teoría de números y el cálculo.[8]

Jean d'Alembert nació en París en el año 1717. Recibió una educación excelente desde pequeño. Al principio, sus estudios estuvieron bastante influenciados por los trabajos de Bernoulli y Newton. Fue pionero en el estudio de las ecuaciones diferenciales y de su empleo.[6]

Euler ya estaba examinando las vibraciones de una cuerda vibrante sin masa en 1749. Para encontrar una solución a este problema, d'Alembert y Euler empezaron a trabajar juntos y empezaron a desarrollar un método de integración para un sistema de ecuaciones diferenciales.

Entre estos dos matemáticos también hubo una disputa a raíz de una publicación del trabajo de d'Alembert en 1747 a la academia de Berlín. El motivo de esta disputa fue la naturaleza de las funciones arbitrarias que aparecen cuando se integran las ecuaciones en derivadas parciales.

Euler creía que las dos funciones arbitrarias estaban determinadas por las condiciones iniciales del problema. También creía que la forma inicial de la cuerda sería de la siguiente forma:

$$\alpha \sin \frac{\pi s}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi s}{a} + \gamma \sin \frac{3 \pi s}{a} \dots$$

Esta superposición de senos la propone en 1750 y tiene una forma muy parecida a la que propone Bernoulli más adelante.

Para d'Alembert, la expresión de Euler para la condición inicial era demasiado general. Él creía que el cálculo diferencial no se podía aplicar en curvas como la de Euler, sino que se tenía que aplicar en ecuaciones expresadas de una forma analítica.[10]

Estos dos grandes matemáticos hicieron grandes contribuciones para la resolución del problema de la cuerda fija, pero ahora nos centraremos en otro gran matemático: Daniel Bernoulli. Este matemático dio una sencilla solución al problema sin hacer uso de matemáticas complicadas.

Capítulo 2

Las ideas de Daniel Bernoulli

2.1. Bernoulli

Daniel Bernoulli nació en Groninga en el año 1700. Destacó en los campos de las matemáticas, la física y la medicina. Bernoulli ya estaba estudiando la mecánica de los cuerpos elásticos mientras vivía en San Petersburgo, entre 1727 y 1733. Él demostró que el movimiento de una cuerda se puede descomponer en infinitos movimientos armónicos simples de una manera sencilla.[7]

A Bernoulli no le convencía la solución que proponían d'Alembert y Euler, porque él pensaba que con algo más simple, como es una serie trigonométrica, se podría resolver el problema. Esto hizo que hubiera una discusión entre estos tres matemáticos que duraría décadas. Su idea de la solución del problema de la cuerda de extremos fijos está inspirada en sus conocimientos musicales.

En el año 1755 se publicó un artículo de Bernoulli titulado “*Reflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l’académie de 1747 et 1748*”. Lo que haremos a continuación será resumir los puntos básicos de este artículo.[2]

2.2. Su artículo

En este artículo, Bernoulli comienza diciendo que la primera persona que dio a conocer el número de vibraciones producidas por una cuerda uniforme con una longitud dada y en un tiempo determinado fue el matemático Brook Taylor, y para conocer este número habría que conocer previamente la curvatura que hace la cuerda en ese tiempo que esté vibrando. En las memorias de 1747 y 1748, los matemáticos d'Alembert y Euler dieron soluciones al problema de la cuerda de extremos fijos que requerían un análisis matemático

profundo y abstracto, pero Bernoulli opinaba que había que fijarse en la naturaleza de las vibraciones simples de la cuerda para poder deducir lo mismo que d'Alembert y Euler pero de una manera mucho más sencilla.

Para ello, Bernoulli nos recuerda que algunos músicos son capaces de diferenciar el tercer armónico y el quinto armónico cuando se toca una nota en una cuerda pulsada. El segundo armónico y el cuarto son más difíciles de escuchar, ya que son la misma nota pero en octavas más agudas. Lo mismo pasa cuando se tocan otros instrumentos que no tienen cuerdas, como pueden ser las campanas o los instrumentos de viento.

A partir de esto, Bernoulli es capaz de construir curvas a partir de una cuerda con extremos A y B. En la figura 1.1 se ve el dibujo publicado en el artículo. La primera figura se corresponde con el primer armónico, la segunda figura con el segundo armónico y así sucesivamente.

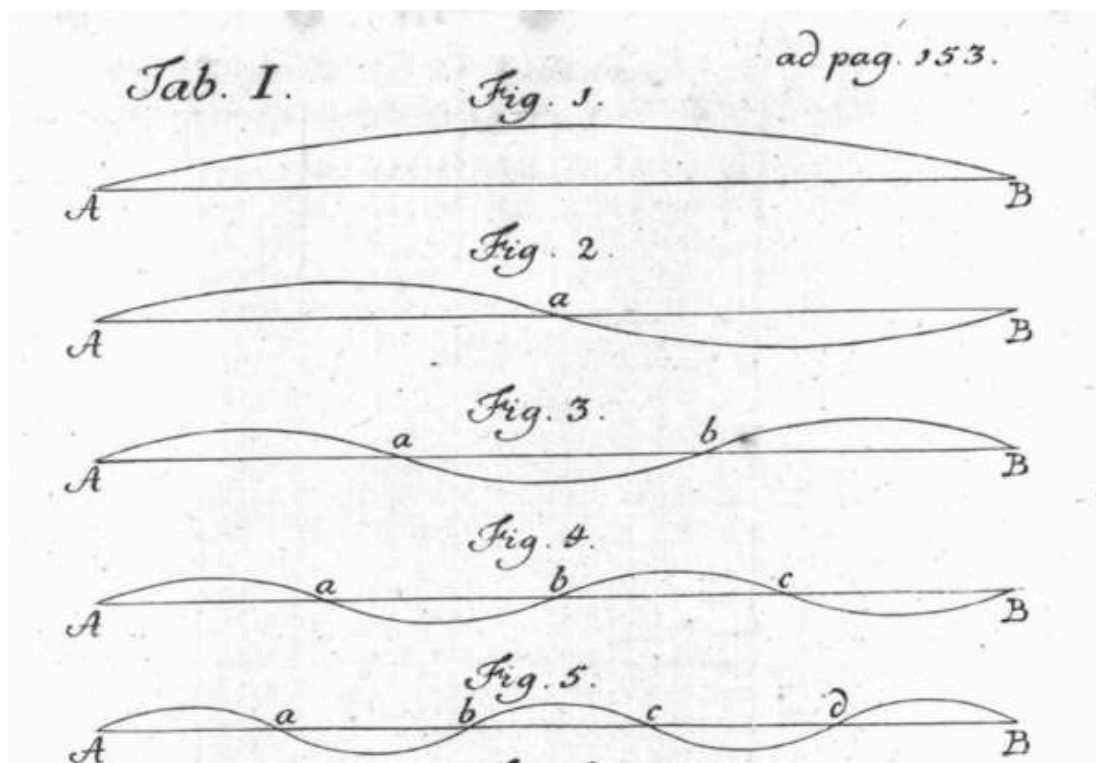


Figura 2.1: Los 5 primeros armónicos en una cuerda fija.

Las ideas expresadas en la figura del artículo de Bernoulli son las mismas que usaban

en la escuela pitagórica para hallar los diferentes armónicos usando una cuerda, pulsando en las letras minúsculas de las diferentes figuras, que se corresponden con los nodos, que son los puntos de la cuerda que se mantienen fijos, haciendo así que la vibración dé lugar a tonos más altos.

Después de esto, Bernoulli comienza a hablar de la figura 1.2, que ilustra la superposición de los dos primeros modos de vibración armónicos.

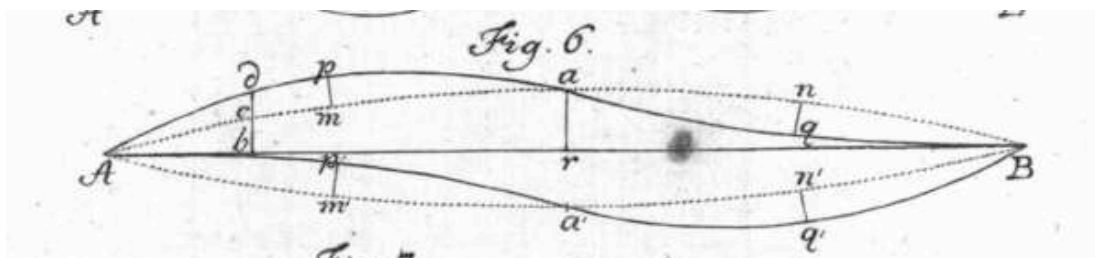


Figura 2.2: Superposición de armónicos

La curva A m a n B es la curva del primer armónico, y sobre esta se construye la curva A p a q B. Esta última curva es la más simple que hallaron d'Alambert y Euler. De la relación entre p m y a r se puede deducir que esta curva está formada por infinitos armónicos. Bernoulli enumera 4 propiedades:

- (1) Si cogemos el eje A r B, las vibraciones producidas en la curva A m a n B siguen la ley de vibraciones simples de la primera figura.
- (2) Cada punto de la curva A p a q B tiene un movimiento relativo con respecto al punto correspondiente de la curva A m a n B.
- (3) Cada punto en la primera figura produce una vibración, pero el mismo punto en la segunda figura produce dos vibraciones. Entonces, los puntos de la curva A m a n B terminarán sus vibraciones al mismo tiempo que los correspondientes puntos de la curva A p a q B.

Se pueden unir cualquiera de las vibraciones que produce la cuerda. No tienen por qué ser dos, como en la figura 6, se pueden unir tantas como se quiera. Todas estas uniones van a tener en común que el inicio y el final es un punto de reposo.

Lo que hace Bernoulli a continuación es comprobar si las curvas que encontró Euler están incluidas en lo que escribió él. Para esto escribirá las ecuaciones de las cuatro primeras curvas con la notación de Euler. Sea $a=AB$ la longitud de la cuerda y P_i la semicircunferencia del círculo de radio 1 unidad. Denotaremos por alfa a la amplitud de la primera

figura, beta a la de la segunda, gamma a la de la tercera, delta a la de la cuarta y x una abscisa. Las ecuaciones de las figuras son:

Fig. 1:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a}$$

Fig. 2:

$$y = \beta \sin \frac{2 \pi x}{a}$$

Fig. 3:

$$y = \gamma \sin \frac{3 \pi x}{a}$$

Fig. 4:

$$y = \delta \sin \frac{4 \pi x}{a}$$

Si combinamos estas 4 ecuaciones nos dará como resultado la siguiente ecuación:

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2 \pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3 \pi x}{a} + \delta \sin \frac{4 \pi x}{a}$$

Siendo alfa, beta, gamma y delta arbitrariamente positivas o negativas.

Así demuestra Bernoulli que, sin ningún cálculo complicado, su ecuación y la de Euler son la misma, y afirma que todas las curvas se van a comportar de esta manera.

Bernoulli acaba este artículo diciendo que su intención no es pelearse con Euler y d'Alembert. El problema que resolvieron ellos tiene bastante dificultad, y esto los convierte en personas admirables. Su intención solo era que la naturaleza de las vibraciones fuese explicada de una manera más sencilla y hará una segunda memoria para resolver nuevos problemas. XXVIII

Aunque Bernoulli alaba la inteligencia y la sabiduría de estos dos matemáticos, los comentarios que hace parecen que van con bastante sarcasmo. Los tres son grandes matemáticos, pero rivalizaban bastante entre ellos.

También es necesario decir que los resultados finales que se obtuvieron no fueron concluyentes, algunas veces los resultados que se presentaban tenían fallos, pero esta discusión no solo hizo que se avanzara bastante rápido en encontrar una solución al problema de la cuerda fija, sino que también se pudo avanzar en los campos de las matemáticas y de la física, ya que cada uno tenía su punto de vista y cada uno de los tres aportó información valiosa para el posterior desarrollo de las series de Fourier.

Una vez hecha esta introducción histórica, pasaremos a la parte musical de este trabajo, que tendrá como tema central la afinación.

Capítulo 3

La parte musical

La afinación fue, es y será siempre un quebradero de cabeza para los músicos. Un instrumento que está mal afinado va a sonar mal tocando solo o acompañado de más instrumentos. La afinación puede depender de varios factores, como son la construcción del instrumento, el material empleado y la temperatura ambiental.

Los armónicos y la afinación siempre estuvieron íntimamente relacionados. Las primeras escalas musicales que se empleaban para hacer música estaban basadas en los armónicos, pero a medida que pasaron los años se fueron adoptando otros tipos distintos de afinación. Hoy en día todavía siguen existiendo instrumentos con las afinaciones antiguas, pero son muy poco comunes.

En este capítulo nos centraremos en el estudio de tres tipos distintos de afinación que se dieron a lo largo de la historia: la afinación pitagórica, la afinación natural y el temperamento igual. Algunas ideas de este capítulo están basadas en el libro “La armonía es numérica”, de Javier Arbonés y Pablo Milrud.[1]

3.1. Afinación pitagórica

Como vimos previamente, la afinación ya fue objeto de estudio en la Antigua Grecia y en la escuela pitagórica ya empezaban a interesarse en la música y en los armónicos. Es en esta misma escuela donde surge la primera de las afinaciones que veremos: la afinación pitagórica.

Esta afinación está basada en la escala pitagórica. Para hacer la organización de esta escala lo que hacían era tomar los distintos sonidos y relacionarlos numéricamente entre ellos.

Empezaron partiendo de la nota Do, y a partir de aquí iban encadenando intervalos de quintas hacia la derecha y hacia la izquierda, es decir:

$$Do \Rightarrow Sol \Rightarrow Re \Rightarrow La \Rightarrow Mi \Rightarrow Si \Rightarrow Fa\sharp(1)$$

$$Solb \Leftarrow Reb \Leftarrow Lab \Leftarrow Mib \Leftarrow Sib \Leftarrow Fa \Leftarrow Do(2)$$

Esta disposición de las notas se llama círculo de quintas. Este diagrama es muy importante dentro de la música, ya que tiene muchas y diversas utilidades. Algunas de ellas son ordenar las notas, hacer acordes, aprender el orden de los sostenidos y de los bemoles y componer piezas.

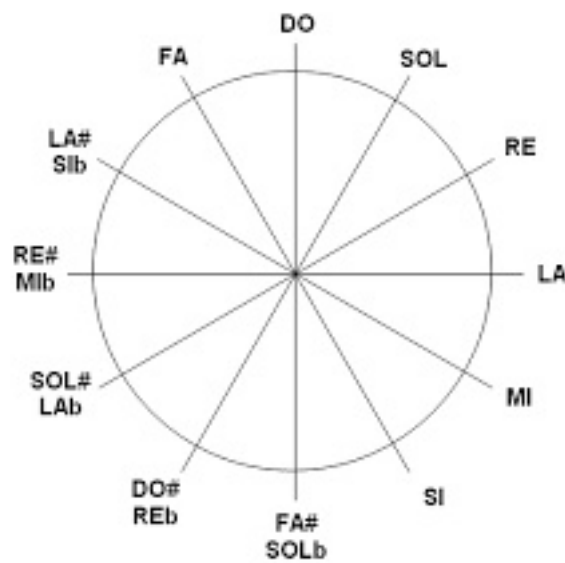


Figura 3.1: Círculo de quintas

Para calcular la afinación de las notas en una escala de una octava usaremos el círculo de quintas. Tomaremos como base la nota Do y a partir de ahí calcularemos las demás. Empezaremos con las notas de (1):

El Sol está situado una quinta por encima del Do, así que vendrá dado por la fracción $\frac{3}{2}$.

$$Sol = \frac{3}{2}$$

El Re está a una distancia de quinta ascendente del Sol, por lo que habrá que multiplicar la fracción del Sol por $\frac{3}{2}$, pero este Re que acabamos de calcular se pasa de la octava, así que tendremos que multiplicar por $\frac{1}{2}$ para bajarlo a la escala que estamos calculando:

$$Re = Sol * \frac{3}{2} * \frac{1}{2} = \frac{3}{2} * \frac{3}{2} * \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

La está a una quinta ascendente del Re. Como está en la misma octava solo habrá que multiplicar la fracción de Re por $\frac{3}{2}$:

$$La = Re * \frac{3}{2} = \frac{9}{8} * \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$$

De esta misma manera se pueden seguir calculando las notas que nos faltan de (1).

Para calcular las notas de (2) lo haremos de una forma análoga a lo que acabamos de hacer:

Partiendo otra vez del Do, el Fa está situado una cuarta por encima del Do, así que vendrá dado por la fracción $\frac{4}{3}$.

El Si bemol está una cuarta por encima del Fa y está en la misma octava, por lo que multiplicaremos Fa por $\frac{4}{3}$:

$$Sib = Fa * \frac{4}{3} = \frac{4}{3} * \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$$

Mi bemol está una cuarta por encima del Si bemol, por lo que multiplicaremos Si bemol por $\frac{4}{3}$. Al estar en la siguiente octava tendremos que multiplicar esto por $\frac{1}{2}$:

$$Mib = Sib * \frac{4}{3} * \frac{1}{2} = \frac{16}{9} * \frac{4}{3} * \frac{1}{2} = \frac{32}{27}$$

La siguiente tabla muestra las 12 notas con su respectiva fracción calculada de esta manera:

Nota	Relación de frecuencias
Do	1
Reb	$\frac{256}{243}$
Re	$\frac{9}{8}$
Mib	$\frac{32}{27}$
Mi	$\frac{81}{64}$
Fa	$\frac{4}{3}$
Solb	$\frac{1024}{729}$
Sol	$\frac{3}{2}$
Lab	$\frac{128}{81}$
La	$\frac{27}{16}$
Sib	$\frac{16}{9}$
Si	$\frac{243}{128}$
Do	2

Avanzando en sentido horario por el círculo de quintas, podemos llegar de un Do a otro Do. Si calculamos por este método la fracción que tendría el nuevo Do podemos observar que no es 1 (y debería serlo, porque es la misma nota). Este pequeño error es conocido como la coma pitagórica y la podemos calcular de la siguiente forma:

$$CP = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = 1,013643$$

Esta pequeña desafinación equivale a casi un cuarto de semitono.

Lo que hacían los pitagóricos era afinar 11 quintas, normalmente hacia la izquierda del Do hasta el Mi bemol y hacia la derecha del Do hasta el sostenido. Así dejaban una quinta mal afinada, en este caso la quinta que hay entre Sol sostenido y Mi bemol. Esta quinta es conocida como la quinta del lobo. La diferencia entre una quinta normal y la quinta del lobo es la coma pitagórica.

Como se puede ver, la afinación pitagórica está basada plenamente en intervalos de quinta justa, pero esto hace que otros intervalos queden desafinados, como son los intervalos de tercera.

Ahora pasaremos a ver el siguiente tipo de afinación: la afinación pura.

3.2. Afinación natural

La afinación natural es la afinación que mejor suena, ya que está basada en los armónicos de la nota fundamental que elijamos. De esta manera se puede obtener un sonido muy consonante.

El principal inconveniente que tiene la afinación natural es que no se puede modular o cambiar la tonalidad con el instrumento que tenga esta afinación a la hora de tocar, ya que los armónicos cambian según la nota que se toque, y tocar en otra tonalidad daría una sensación de desafinación.

Con esta afinación se consigue llegar a la escala más conocida y más relevante, la escala diatónica. Esta escala está formada por cinco tonos y dos semitonos. Si partimos de Do, las notas serían:

$$Do - Re - Mi - Fa - Sol - La - Si - Do$$

Los semitonos están entre las notas Mi - Fa y Si - Do. Entre las demás notas hay un tono.

Para calcular las fracciones de cada nota podemos observar la distribución de la serie armónica desde la nota Do:

También podemos calcular de esta forma las notas que no pertenecen a la escala diatónica de Do: *Re♭*, *Mi♭*, *Sol♭*, *La♭*, *Si♭*.

Nota	Relación de frecuencias
Re♭	$\frac{16}{15}$
Mi♭	$\frac{6}{5}$
Sol♭	$\frac{45}{32}$
La♭	$\frac{8}{5}$
Si♭	$\frac{16}{9}$

Todavía existen instrumentos que usan este tipo de afinación, como pueden ser las trompetas naturales o algunas gaitas.

Por último, veremos la afinación que más se usa en la actualidad: el temperamento igual.

3.3. Temperamento igual

Las anteriores afinaciones funcionaban muy bien en ciertos instrumentos, como pueden ser los cuernos o las trompetas, pero con la llegada de los instrumentos de teclado surgió la necesidad de adoptar una nueva forma de afinar.

También desempeñaban un buen papel a la hora de sonar un intervalo de quinta justa, cuarta justa u octava; pero daban problema con intervalos de tercera, de segunda de sexta y de séptima.

Así es como aparece el temperamento igual, que se basa en la división igual de una escala, dividiéndola en 12 semitonos iguales. Esta manera de afinar fue propuesta por teóricos a finales del s.XVI. Los teóricos más famosos fueron Vincenzo Galilei y Francisco de Salinas.

Años más tarde, Johann Sebastian Bach escribe *El clave bien temperado*, dos ciclos de fugas y preludios que exploran el temperamento igual, ya que están compuestas en las 24 tonalidades. Con la publicación de esta obra queda asentado el temperamento igual como la forma de afinar predominante.[4]

Para calcular el valor de las notas habrá que resolver un problema matemático sencillo. Llamémosle x a la relación de frecuencias. Sabemos que hay 12 semitonos en una octava y que una octava tiene el doble de frecuencia que la nota original. Entonces:

$$x^{12} = 2$$

$$x = \sqrt[12]{2}$$

A partir de aquí se puede hacer una tabla calculando la relación de frecuencias de todas las notas. Si tomamos la primera nota un Do, el resto de notas quedaría de la siguiente manera:

Nota	Relación de frecuencias
Do	$\sqrt[12]{2^0} = 1$
Re♭	$\sqrt[12]{2^1} = 1,0594$
Re	$\sqrt[12]{2^2} = 1,225$
Mi♭	$\sqrt[12]{2^3} = 1,189$
Mi	$\sqrt[12]{2^4} = 1,260$
Fa	$\sqrt[12]{2^5} = 1,335$
Sol♭	$\sqrt[12]{2^6} = 1,414$
Sol	$\sqrt[12]{2^7} = 1,498$
La♭	$\sqrt[12]{2^8} = 1,587$
La	$\sqrt[12]{2^9} = 1,682$
Si♭	$\sqrt[12]{2^{10}} = 1,781$
Si	$\sqrt[12]{2^{11}} = 1,888$
Do	$\sqrt[12]{2^{12}} = 2$

Una curiosidad es que, aunque con el temperamento igual notas como fa sostenido y sol bemol son iguales, no lo son para instrumentos que se usan hoy en día y que no usan este tipo de afinación, como el violín o la voz humana.

Ahora que vimos estos tres tipos de afinación, haremos una comparación para ver en qué se diferencian.

3.4. Comparación de las afinaciones

Lo primero que haremos para comparar las tres afinaciones será hacer una tabla recogiendo la relación entre las frecuencias de las notas de la escala diatónica.

Además, aparte de poner esta relación que previamente pusimos en las anteriores tablas, pondremos también los cents de cada nota.

El cent es una unidad logarítmica que sirve para medir la frecuencia de las notas con bastante precisión. Entre cada semitono hay 100 cents. Como es logarítmica, nos sirve para ver de forma lineal la diferencia entre las distintas frecuencias.

Si cogemos un número n , en este caso la n se corresponde con la relación de frecuencia, la fórmula para calcular los cents sería la siguiente:

$$c(n) = 1200 \log_2(n)$$

La tabla quedaría de la siguiente manera:

		Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Afinación Pitagórica	Relación proporcional	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
	Cents	0	203.91	407.82	498.04	701.95	905.86	1109.77	1200
Afinación natural	Relación proporcional	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
	Cents	0	203.91	386.31	498.04	701.95	884.35	1088.26	1200
Temperamento igual	Relación proporcional	1	1.112	1.260	1.334	1.498	1.681	1.887	2
	Cents	0	200	400	500	700	900	1100	1200

Las notas que más se aproximan entre ellas son Do en sus dos octavas, Sol y Fa. Re también es bastante parecida. Sin embargo, las notas Mi, La y Si difieren bastante entre las distintas afinaciones.

Una vez vistas estas tres afinaciones, vamos a ver qué pasa con los armónicos de cada una. Para ello usaremos un analizador de espectro, en este caso SPAN plus; y veremos los armónicos de un instrumento virtual generado por kontakt. El instrumento elegido fue un piano orquestal.

Las frecuencias que insertamos en el analizador de espectro para las notas para cada afinación son las siguientes:

	Afinación pitagórica	Afinación natural	Temperamento igual
Do	262	262	262
Mi	331.6	327.5	330.1
Sol	393	393	392.6

Las capturas que saquemos del analizador de espectro las pondremos al final de este capítulo, pero ahora nos dispondremos a describir los resultados obtenidos.

Lo que se ve en los espectrogramas son los armónicos de las notas Do, Mi y Sol (que son las que forman el acorde de Do mayor) sonando al unísono. Lo que está en verde oscuro son los picos máximos a los que llegan los armónicos y lo que está en verde claro es lo que estaba sonando cuando hicimos la captura. Los tres primeros picos grandes son los primeros armónicos de cada nota, por eso son los que suenan más fuerte; y los demás picos son los siguientes armónicos.

En el eje X está representada la frecuencia medida en hercios y en el eje Y está representada la intensidad medida en decibelios.

A la izquierda de los picos de los armónicos fundamentales el analizador de espectro también recoge sonido, posiblemente debido a la resonancia del piano, pero estos no son perceptibles al oído humano debido a que, al tener tan poca frecuencia no tienen la suficiente intensidad. Esto está representado en las curvas Fletcher Munson. Curiosamente, los dos picos pequeños que están a la izquierda del primer armónico de Do se corresponden con las notas Mi y Sol.

El acorde que más consonante suena es el de la afinación natural, pero el que estamos acostumbrados a escuchar hoy en día es el del temperamento igual. El acorde de la afinación pitagórica también suena bien, pero se hace extraño escuchar el Mi con una frecuencia tan alta. El acorde del temperamento igual no suena mal, pero podría considerarse que es el que peor suena de los tres.

La explicación de esto la argumentaremos mejor con una tabla con los armónicos de cada nota:

Afinación pitagórica			Afinación natural			Temperamento igual		
Do	Mi	Sol	Do	Mi	Sol	Do	Mi	Sol
262	331,6	393	262	327,5	393	262	330,1	392,6
524	663,2	786	524	655	786	524	660,2	782,5
786	994,8	1179	786	982,5	1179	786	990,3	1172,4
1048	1326,4	1572	1048	1310	1572	1048	1320,4	1562,3
1310	1658	1965	1310	1637,5	1965	1310	1650,5	1952,2
1572	1989,6	2358	1572	1965	2358	1572	1980,6	2342,1
1834	2321,2	2751	1834	2292,5	2751	1834	2310,7	2732
2096	2652,8	3144	2096	2620	3144	2096	2640,8	3121,9
2358	2984,4	3537	2358	2947,5	3537	2358	2970,9	3511,8
2620	3316	3930	2620	3275	3930	2620	3301	3901,7

En esta tabla están los 10 primeros armónicos de cada nota que se tocó con el instrumento virtual.

Cuando suena una nota sola, por ejemplo un Do, están sonando, en mayor o menor medida, sus armónicos a la vez. Esta superposición de armónicos es lo que le da el timbre al sonido. Pero no tienen por qué sonar todos los armónicos. Por ejemplo, cuando se toca una nota con un clarinete, por tener forma de tubo cerrado, solo suenan los armónicos impares.

Cuando se tocan dos o más notas a la vez, este conjunto de notas sonará mejor o peor dependiendo de la mezcla de sus armónicos. Cuanto más coincidan mejor sonará.

En nuestro caso, cuando tocamos el acorde de Do mayor con la afinación pitagórica coinciden 3 pares de armónicos. Estos pares son entre las notas Do y Sol, y tiene sentido, ya que la afinación pitagórica está basada en las quintas. En la afinación natural coinciden 6 pares de notas, motivo por el que suena mejor este acorde. En el temperamento igual no coincide ningún par de armónicos.

Aunque el temperamento igual sea el tipo de afinación que más se utilice, hay agrupaciones de cuerda o de voz que intentan tocar un poco más grave la tercera nota y un poco más aguda la quinta nota de la escala que estén tocando, para así parecerse un poco más a la afinación natural y sonar un poco mejor armónicamente.

Por último, mostraremos las capturas obtenidas con el analizador de espectro al tocar el acorde de Do mayor con las diferentes afinaciones:

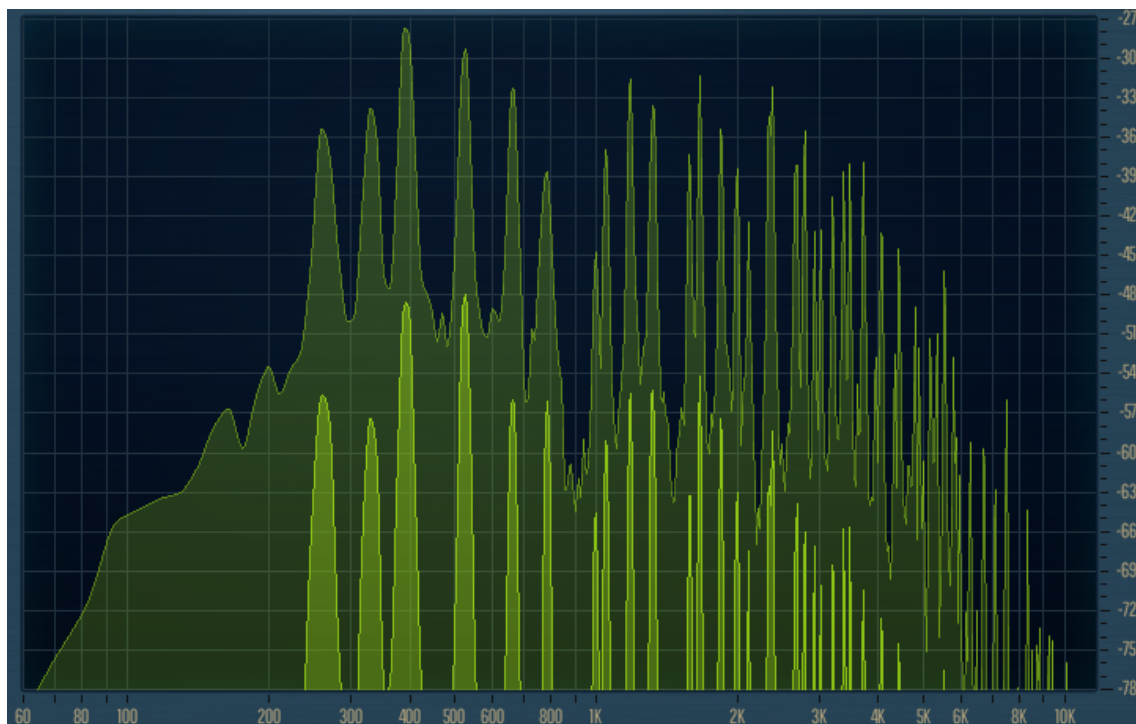


Figura 3.3: Espectrograma de la afinación piragórica

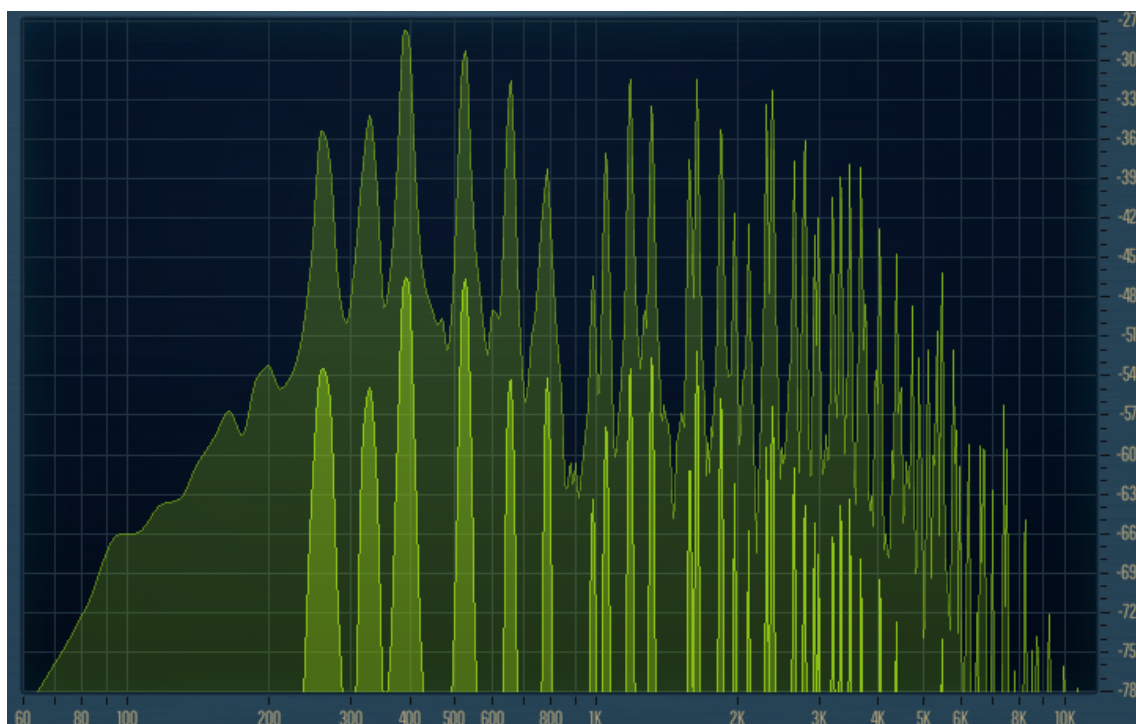


Figura 3.4: Espectrograma de la afinación pura

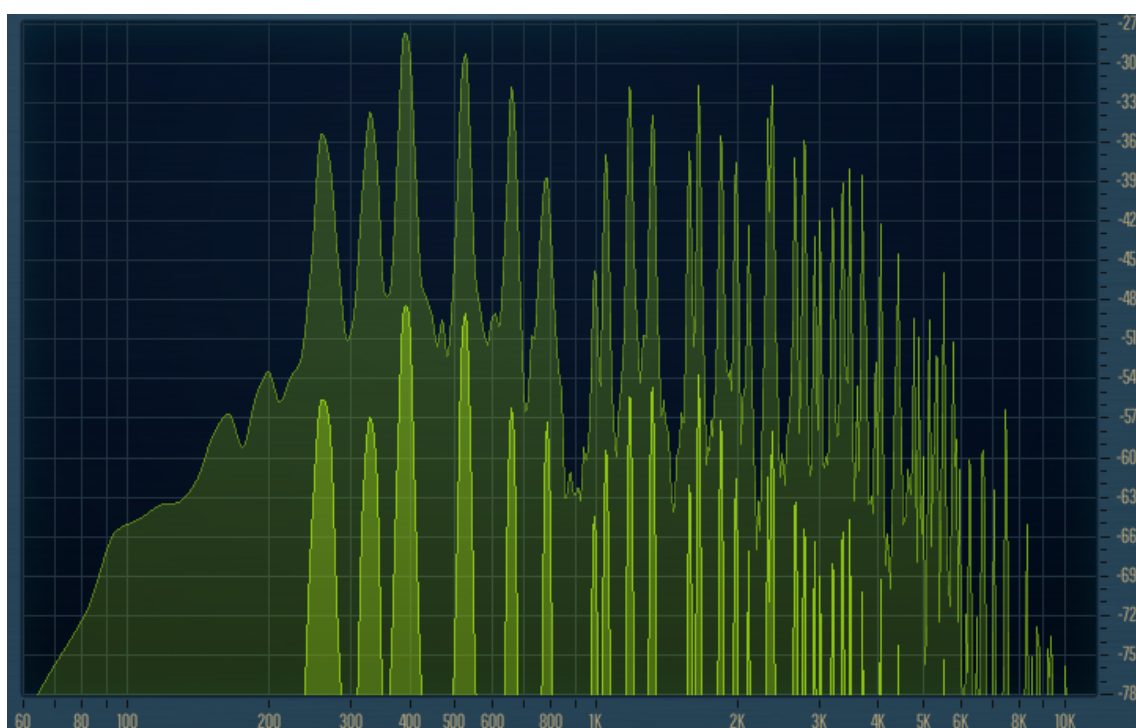


Figura 3.5: Espectrograma des temperamento igual

Capítulo 4

La parte matemática

En este último capítulo nos centraremos en la parte más matemática de este TFG. Este capítulo lo dividiremos en tres partes: la deducción de la ecuación de la cuerda vibrante, la solución de d'Alembert y la solución por separación de variables. Este capítulo está principalmente inspirado en el libro *Ecuaciones en derivadas parciales con series de fourier y problemas de contorno*, de Ricard Haberman.[5]

4.1. Deducción de la ecuación de la cuerda vibrante

La primera idea a tener en cuenta es que para que una cuerda vibre tiene que existir una tensión. Nosotros tomaremos una cuerda tensa en posición horizontal y estudiaremos el movimiento de cada una de sus partículas. Cuando una partícula de la cuerda esté en reposo, le llamaremos α a su coordenada x . Le llamaremos t al tiempo que transcurre mientras la cuerda está vibrando.

También vamos a suponer que la pendiente de la cuerda es muy pequeña, y así se podrá despreciar el desplazamiento horizontal v . El único desplazamiento que existirá en la cuerda será el desplazamiento vertical u , de aquí llegamos a que $x = \alpha$.

El desplazamiento vertical depende de x y de t :

$$y = u(x, t)$$

Tomaremos una sección infinitesimal de la cuerda que esté entre x y $x + \Delta x$. Vamos a suponer que conocemos la densidad de la cuerda, $\rho_0(x)$. De esto se deduce que la masa de la sección tomada es $\rho_0(x) \Delta x$.

Vamos a suponer también que la cuerda se puede doblar sin problemas, lo que implica que el resto de la cuerda va a ejercer una fuerza sobre los extremos puntos extremos de

la sección tiene una dirección tangencial respecto a la cuerda. Le llamaremos $T(x, t)$ a su magnitud. También existirá una fuerza gravitatoria que empujará a la cuerda hacia abajo. Para hallar las componentes de las tensiones le llamaremos θ al ángulo que hay entre la horizontal y la cuerda. θ va a depender de x y de t . La pendiente de la cuerda nos quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

El movimiento horizontal es despreciable por lo que la componente horizontal de la tensión la vamos a despreciar. La componente horizontal la calcularemos gracias a la segunda ley de Newton, $F = ma$. La masa será la calculada previamente, $\rho_0(x) \Delta x$; y la componente vertical de la aceleración es $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. El producto de esto será igual a la suma de la componente vertical de las fuerzas de tensión y la componente vertical de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Si le llamamos $T(x, t)$ a la tensión y $Q(x, t)$ a la componente vertical de la fuerza que actúa sobre el cuerpo por unidad de masa, obtendremos:

$$\rho_0(x) \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + \Delta x, t) \sin \theta(x + \Delta x, t) - T(x, t) \sin \theta(x, t) + \rho_0(x) \Delta x Q(x, t)$$

Si dividimos esto por Δx y tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, llegamos a que:

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \sin \theta(x, t)] + \rho_0(x) Q(x, t)$$

Sabemos que si θ es pequeño, entonces:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \approx \sin \theta$$

Teniendo esto en cuenta, la ecuación anterior nos quedará de la siguiente manera:

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho_0(x) Q(x, t)$$

La tensión $T(x, t)$ la podemos aproximar por una constante T_0 , ya que estamos suponiendo que θ es pequeño, y esto implica que el estiramiento de la cuerda va a ser muy parecido al estiramiento cuando la cuerda está totalmente horizontal, sin ninguna perturbación. Las vibraciones verticales de la cuerda quedarían así:

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho_0(x) Q(x, t)$$

Si consideramos la gravedad como la única fuerza vertical externa, tendremos que $Q(x, t) = g$. La gravedad es una fuerza muy pequeña si la comparamos con la tensión, por lo que la podemos despreciar, y la ecuación nos quedaría:

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Por último, le llamaremos c^2 a $\frac{T_0}{\rho_0}$, ya que c^2 tiene las dimensiones de la velocidad elevada al cuadrado. Obtenemos así la ecuación de ondas unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Siendo c constante si la cuerda es uniforme.

Ahora veremos la solución que obtuvo d'Alembert.

4.2. Solución de d'Alembert

Lo primero que haremos será factorizar la ecuación de ondas de dos formas diferentes:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

Si cogemos:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$w = \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x}$$

Esto nos generará dos ecuaciones de ondas de primer orden:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Si consideramos la función $w(x(t), t)$, que esté medida por un observador que se mueve, $x = x(t)$, por la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{d}{dt} w(x(t), t) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Si consideramos que la velocidad del observador es x :

$$c = \frac{dx}{dt}$$

Esto implicaría que:

$$\frac{dw}{dt} = 0$$

Entonces w se mantiene constante siendo c la velocidad.

Ahora definiremos las funciones P y Q . Dados x y t , estas funciones serán:

$$w = \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = P(x - ct)$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x + ct)$$

Si las combinamos obtendremos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[P(x - ct) + Q(x + ct)]$$

$$2c \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x + ct) - P(x - ct)$$

Y de aquí obtenemos:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Esta es la solución general de la ecuación de ondas unidimensional, donde F y G son funciones arbitrarias. $F(x-ct)$ representa una onda moviéndose hacia la derecha y que tiene una velocidad c , y $G(x+ct)$ una onda moviéndose hacia la izquierda y que tiene una velocidad $-c$.

Las condiciones iniciales que tomaremos para nuestro problema serán:

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

Estas condiciones nos indican la posición y la velocidad inicial de cada sección de la cuerda.

De estas condiciones llegamos a:

$$f(x) = F(x) + G(x)$$

$$\frac{g(x)}{c} = -\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dx}$$

Si derivamos la primera ecuación y se la sumamos a la segunda tenemos:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} + \frac{dG}{dx} \right)$$

Si integramos esto obtenemos:

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x} - k$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x} + k$$

La solución de d'Alembert se obtiene sustituyendo estas dos ecuaciones en la solución general:

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \left[\int_0^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^{x-ct} g(\bar{x}) d\bar{x} \right]$$

Y si la simplificamos nos queda:

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \left[\int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x} \right]$$

Esta sería la ecuación de ondas unidimensional y verifica las condiciones Dirichlet:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

Siendo L la longitud de la cuerda.

Podemos tomar la solución de la ecuación de ondas unidimensional con estas condiciones como la solución de la ecuación de la cuerda vibrante.

Ahora vamos a ver que esta solución también se puede poner como un producto de senos y cosenos.

4.3. Separación de variables

Recordemos la ecuación de ondas unidimensional:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Tomaremos también las condiciones iniciales que tomamos anteriormente y las condiciones Dirichlet:

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

Ahora usaremos el método de separación de variables:

$$u(x, t) = \phi(x)h(t)$$

En este caso, $\phi(x)$ depende solo de x y $h(t)$ depende solo de t . Si sustituimos esta ecuación en la ecuación de ondas unidimensional se obtiene:

$$\phi(x) \frac{d^2 h}{dt^2} = c^2 h(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2}$$

Dividiremos esto por $\phi(x)h(t)c^2$ para que la parte de la izquierda de la ecuación dependa solo de t , la parte de la izquierda dependa solo de ϕ y para que en el problema de autovalores resultante no esté c^2 .

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \lambda$$

λ es la constante de separación. Es una constante arbitraria y es negativa por conveniencia.

De la ecuación anterior podemos obtener dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi$$

De la primera ecuación, si $\lambda > 0$, se puede obtener una solución que solo depende del tiempo y que sea una combinación de senos y cosenos:

$$h(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin c\sqrt{\lambda}t$$

De las condiciones Dirichlet deducimos que:

$$\phi(0) = \phi(L) = 0$$

Y así obtenemos el siguiente problema de contorno:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h$$

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi(L) = 0$$

Y de aquí podemos comprobar que $\lambda > 0$, ya que:

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

De la solución que solo depende del tiempo y de este problema de contorno podemos sacar las soluciones de dos familias que serán producto de senos y cosenos, y podemos sustituir en la ecuación del método de separación de variables:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right)$$

Para que se cumplan las condiciones iniciales se tendrá que cumplir que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Siendo A_n los coeficientes de la serie de Fourier de senos $f(x)$ y $B_n \frac{n\pi c}{L}$ los coeficientes de la serie de Fourier de senos $g(x)$:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$B_n \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Queda así demostrado que la solución que propuso d'Alembert es igual que la solución que propuso Bernoulli.

Bibliografía

- [1] Arbonés, J. y Milrud, P., *La armonía es numérica: música y matemáticas*, Barcelona: RBA, (2011).
- [2] Bernouilli, D., *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748*, Hist. de l'Acad. Roy. de Berlin, **9** (1753).
- [3] Burkholder, J.P., Grout, D.J. y Palisca, C.V., *Historia de la música occidental*. Alianza Editorial, Madrid, séptima edición, 2008.
- [4] Fernández Hoyos, C., *Cualidad sonora y geometría. Una aproximación al análisis de "El Clave Bien Temperado" Vol. I (BWV 846-869), Johann Sebastian Bach*. (2021).
- [5] Haberman, R., *Ecuaciones en derivadas parciales con series de fourier y problemas de contorno*, 3ra Edición, Prentice Hall, México, (2003).
- [6] O'Connor, J. J. and Robertson, E. F., *Jean Le Rond d'Alembert*, MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews, Scotland, (1998, October) <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/DAlembert/>
- [7] O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. *Daniel Bernoulli*, MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews, Scotland, (1998, September) https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Daniel/
- [8] O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. *Leonhard Euler*, MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews, Scotland, (1998, September) <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/>
- [9] O'Connor, J. J. and Robertson, E. F. *Pythagoras of Samos*, MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews, Scotland, (1999, January) <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras/>

- [10] Oliveira, A. R. E., *D'Alembert and the Wave Equation: Its Disputes and Controversies*. *Advances in Historical Studies*, **9** (2020), 229-239.