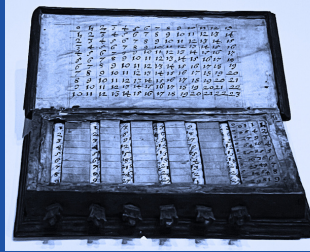
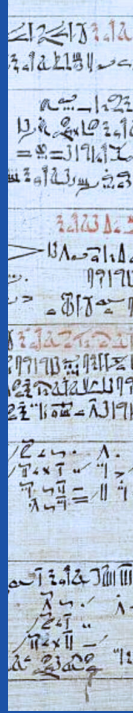
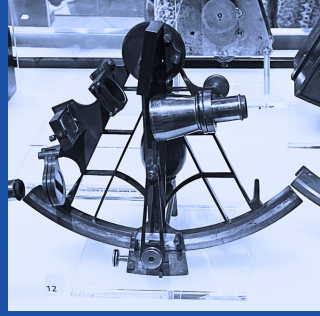
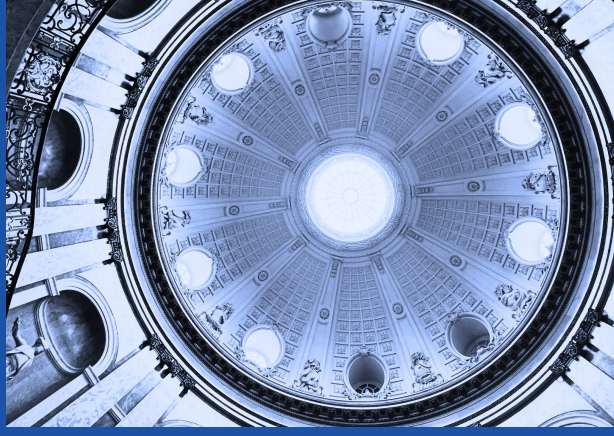


# ÁIS

# MATES





# Introdución

## Dirección da Revista

### ÍNDICE

#### *Actualidade*

- **Ordenadores de Origami** ..... 3

*Guillermo Arcos Salgado*

#### *Historia*

- *Deutsche Mathematik* ..... 4

*Santiago González Gómez*

#### *Sociedade*

- **Viví, unha inspiración e referente do cambio** ..... 6

*Francisco Estévez Lengua*

#### *Retos*

- **Retos de Sementeira** ..... 7

#### *Teoría*

- **A Ecuación Funcional de Cauchy**..... 8

*Ibai Otero Gómez*

- **O valor absoluto p-ádico** ..... 9

*Javier Polo Noche*

Estimadas e estimados lectores, agardamos que nos estedes lendo dende o voso ordenador, ou dende calquera outro dispositivo electrónico! Temos unha novidade moi importante para nós, proximamente sacaremos unha versión impresa dos tres primeiros números da revista!!

Temos que dar o noso máis sincero agradecemento á Secretaría Xeral de Política Lingüística da Xunta de Galicia, organismo a través do cal financian a impresión do caderniño que poderedes ter nas vosas mans.

Este traballo é froito de estudantes do Grao en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela, e dirixida á comunidade universitaria da mesma, así como a calquera recuncho das casa desas xente que se mostra interesadas por estas páxinas.

Como novidades, estamos ampliando as nosas fronteiras, nos seguintes tres meses poderedes ler a novas e novos redactores, que se foron animando a colaborar. Tomade iniciativa e animádevos a participar vós tamén! Seguiremos na mesma liña, con artigos interesantes sobre Historia das Matemáticas, Actualidade, Retos, Sociedade e Teoría.

## AGRADECEMENTOS

Queremos agradecer a todas as persoas colaboradoras na revista ata o momento: *Santiago González Gómez, Ignacio Garbayo Fernández, Carlos Cao López, Guillermo Arcos Salgado, Andrea Abad Montero, Francisco Estévez Lengua, Pedro Vidal Villalba, Sementeira, Javier Polo Noche, Ibai Otero Gómez*. En especial ás que fixeron posible que esta cuarta edición seguise adiante.

Así como tamén queremos agradecer á persoa que foi entrevistada: *María Victoria Otero Espinar*.

Dar unha forte aperta ás persoas que nos axudaron coa revisión lingüística da revista á profesora *Carmen Rodríguez* e ao profesor *Rafael Muñoz*.

Queríamos rematar esta introdución, cun verdadeiro recoñecemento ás persoas que nos apoian. Grazas de corazón por lernos, disfrutade desta revista tanto como facemos nós ao facela!

# Ordenadores de Origami

Guillermo Arcos Salgado

**A**lan Turing foi un matemático británico considerado un dos pais da computación e un dos precursores da informática moderna. En 1936 propuxo unha idea para un ordenador universal, isto é, (segundo o propio Turing) un ordenador capaz de computar calqueira secuencia computable. Consistía nunha ristra de ceros e uns cos cales unha máquina podería traballar movéndose a través deles e convertindo uns en ceros e ceros en uns seguindo unha serie de regras. Non obstante, non pretendía que esta idea fose práctica, pois verdadeiramente faría falta almacenamento ilimitado e probabilidade cero de falla. Aínda así, denominamos *Turing completo* a aqueles sistemas que teñen un poder computacional equivalente a esta máquina no caso hipotético de ter eses recursos. Por exemplo, todas as computadoras modernas son consideradas *Turing completas*.

En setembro do 2023, Inna Zakharevich da Cornell University e Thomas Hull da Franklin & Marshall College demostraron que calquera cousa que poidese ser computada, podía ser computada dobrando papel, isto é, que o origami é *Turing completo*.

Xa en 2021, Zakhaverich, topóloga alxébrica, comezara a pensar no problema, o cal excedía o seu ámbito sobre teoría de categorías ou topoloxía alxébrica. Entón pediu axuda a Hull, quen si se dedicara a estudar as matemáticas que hai detrás do origami. Así comezaron ambos a estudar o problema.

En primeiro lugar debían probar que se poden facer operacións lóxicas dobrando papel. As **operacións lóxicas** non son máis que expresións matemáticas que teñen como entrada e saída valores booleanos, isto é, verdadeiro ou falso. Para iso, determinaron o que eran as entradas e o que eran as saídas: distintas partes do propio papel. Para realizar as operacións deseñaron diagramas de liñas, chamados **patrón de pliegues**, que especifican por onde dobrar o papel.

Unha das operacións lóxicas que implementaron foi a de OR. O deseño das dobreces e o seu uso móstrase na imaxe.

A parte central do deseño indicada como *gadget* no debuxo, é a que realmente codifica a operación. Tras realizar as dobreces que se indican (unha volta polo medio, outra polo arredore, así fai o que ben baila, así fai o bailadore), obtense a saída correspondente ás entradas. Finalmente, formalizaron este proceso para obter probas rigorosas do que realmente se observaba.

En realidade, para conseguir o seu obxectivo só necesitaban catro operacións: AND, OR, NAND e NOR. O máis complexo, según Zakhaverich, foi construír os seus *gadgets* para que casaran perfectamente ao combinalos entre eles nun só papel. Mais ao final conseguírono demostrando así que o origami é *Turing completo*.

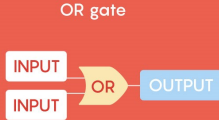
Vemos, polo tanto, a versatilidade que ten un papel: desde poder ser queimado para curar os chourizos ata poder ser

dobrado para facer un ordenador (eso si, cunha enorme cantidade del e moita paciencia).

**LOGIC GATES**

A logic gate is an operation that takes one or more binary inputs and produces a single output, based on a specified rule.

OR gate

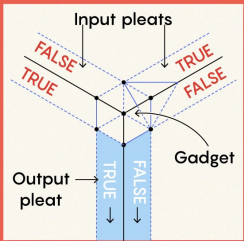


Inputs	Output
TRUE TRUE	TRUE
TRUE FALSE	TRUE
FALSE TRUE	TRUE
FALSE FALSE	FALSE

---

**ORIGAMI OR GATE**

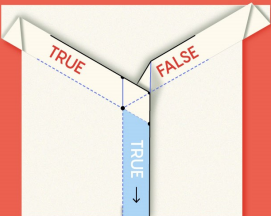
This "gadget," when folded, implements an OR logic gate. Solid lines crease towards you, dotted lines away from you. Black lines always fold, blue ones fold depending on the input.



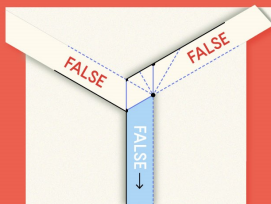

---

**FOLDING THE GATE**

If you only permit origami that folds flat, the folds in the input pleats and gadget will force the correct result to show in the output pleat.



Folded this way, the TRUE output pleat appears face up.



Folded this way, the FALSE output pleat appears.

## REFERENCIAS

- [1] QuantaMagazine, "How to Build an Origami Computer". <https://www.quantamagazine.org/how-to-build-an-origami-computer-20240130/>
- [2] Thomas C. Hull AND Inna Zakharevich, "Flat origami is Turing complete". <https://arxiv.org/abs/2309.07932>

# Deutsche Mathematik

Santiago González Gómez

“Querido amigo Wollstein: para cando recibas estas liñas, [...] teremos resolto o problema doutro xeito, do xeito do que continuamente tentaches disuadirnos... O que se fixo contra os xudeus nestes últimos meses xéranos a ben fundada ansiedade de que a partir de agora a nosa situación non vai ser aturable. Perdóanos, que seguimos dándoches traballo despois de mortos. Sei que farás todo o que che sexa posible (que seguramente non é moito). Perdóanos pola nosa deserción! Desexamos que ti e os teus vivades tempos mellores”. Así comezaba a última carta que Felix Hausdorff, un dos pais da topoloxía, lle escribiu ao seu avogado antes de suicidarse canda a súa muller e a súa cuñada por sobre-dose de barbitúricos. Os desexos de Hausdorff non se fixeron realidade, pois Wollstein acabaría morrendo en Auschwitz. O crimen cometido por todos eles? Seren xudeus na Alemaña nazi.

## DIE ARIER (OS ARIOS)

Tralo ascenso ao poder de Adolf Hitler no 1933, o tímido antisemitismo presente nas institucións científicas alemás converteuse en política de estado. As teorías xenofóbicas sobre as capacidades intelectuais non eran nada novo en moitos países de Occidente; por exemplo, o matemático Felix Klein dixera anos antes que as “razas nórdicas” eran particularmente boas na intuición espacial, mentres que as “latino-hebreas” eran mellores no sentido lóxico. Poucos meses despois da chegada dos nazis ao goberno, comezaron as protestas estudiantís contra os profesores xudeus. Un destes estudantes escribía ao matemático Edmund Landau, tras boicotear unha das súas conferencias: “a posibilidade de que transmitas aos teus oíntes as bases, a esencia das matemáticas, sen a coloración do teu carácter nacional, é tan pequena como certo é que un esqueleto sen carne non corre, senón que se cae a anacos”.



**Fig. 1:** Congreso da Academia Prusiana de Ciencia. Na primeira fila canda ao palco, o terceiro e o quinto pola esquerda son, respectivamente, Vahlen e Bieberbach.

Estes discursos tiveran pouco impacto académico, pero coa chegada do nazismo, era politicamente moi interesante

que se levasen á práctica. Paulatinamente, os xudeus foron expulsados de tódalas esferas do coñecemento, e aos profesores xudeus non só se lles prohibiu dar clase, senón tamén publicar e mesmo acceder ás bibliotecas universitarias. Pero a segregación non se quedou só nas persoas, se non que pasou ás ideas. Por exemplo, na física, moitos dos avances en relatividade (Albert Einstein) ou cuántica (Max Born) eran debidos a científicos xudeus. Estas novas teorías resultaban “incómodas” para os científicos arios, mesmo premios Nobel, que posuían unha longa carreira en Física e agora vían como avanzaba un novo paradigma que facía tremar todo o que sabían sobre a natureza. A *Deutsche Physik*, é dicir, a física oficial alemá promocionada polo goberno, preferiu ignorar estes novos descubrimentos en base á participación xudía neles.

Isto sucedeu tamén nas Matemáticas. En 1936, Theodor Vahlen e Ludwig Bieberbach puxeron en marcha o xornal *Deutsche Mathematik*, cuxo obxectivo era poder continuar as matemáticas “puras” de alemáns como o finado David Hilbert (quen traballara con colegas xudeus como Hermann Minkowski, feito que prefiriron ignorar). Isto quere dicir, por exemplo, descartar as heréticas teorías de Cantor (tamén de ascendencia xudía) sobre o infinito, a álgebra abstracta, ou os intentos de formalización das matemáticas con tódolos seus paradoxos (xa falamos da crise matemática da incompletitude no número anterior da revista) en favor dunha postura máis intuicionista, máis nórdica, se atendemos ás mencionadas teorías de Klein. En definitiva, de forma similar ao sucedido coa física, estes matemáticos aproveitaron a situación política para soterrar os aspectos das matemáticas que non eran do seu agrado e poder traballar baixo o paraugas ideolóxico de que só eran un intento de perversión xudeu da disciplina que amaban. A día de hoxe, isto sóanos totalmente retrógrado e anticientífico, pero debemos situarnos nun contexto histórico no que isto era visto como normal ou desexable por unha gran parte da poboación. Por moito que o antisemitismo viñera en gran medida do goberno, o apoio social existía por suposto no país e máis aló, cando non mediante colaboración activa, si de forma pasiva. O propio Bieberbach non era ningún descoñecido en Alemaña, senón que era un matemático recoñecido que daquela xa resolvera un dos Problemas de Hilbert, o análogo da época aos nosos actuais Problemas do Milenio. Tamén debemos entender esta iniciativa como unha fórmula oportunista. É máis, diversos ex-colegas do eminente Bieberbach, trala súa repentina conversión ao nazismo, opinaron que esta era un simple instrumento que usaba Bieberbach para tentar escalar na xerarquía matemática alemá; fose Bieberbach nazi convecido ou non, isto non impediu que se unise ás SA (Sección de Asalto, compañía

paramilitar), nin que delatase ante á Gestapo a matemáticos xudeus que acudían a pedirlle axuda.

Que dicir que non houbo moitas subscripcións ao xornal *Deutsche Mathematik* fóra de Alemaña, pero isto non evitou que os seus colaboradores si prosperasen socialmente no Reich. Na outra cara da moeda, centos de matemáticos xudeus non corrían a mesma sorte. Recollemos neste artigo o que sucedeu con algúns deles, a modo de pequena lista de Schindler da memoria matemática.

## DIE JUDEN (OS XUDEUS)

.Noether, Emmy.....  
Noether contribuíu matematicamente ás novas teorías físicas; por exemplo, sobre como as simetrías físicas xeran leis de conservación, e viceversa. Foi expulsada en 1933 da Universidade de Gotinga e pronto escapou aos Estados Unidos, onde morreu de causas naturais pouco despois. Un dos irmáns de Noether, Fritz, tamén matemático, escolleu emigrar á URSS; alí morreu en 1941 durante a Gran Purga estalinista.

.Hensel, Kurt.....  
Hensel é coñecido polo seu traballo nos números  $p$ -ádicos. Morreu por causas naturais en 1941 en Alemaña; os seus avós convertéronse xa ao cristianismo e posiblemente isto lle evitou sufrimentos maiores. Con todo, ata a súa morte, acolleu na súa casa a outros xudeus fuxidos.

.Levi-Civita, Tullio; Fubini, Guido.....  
Ambos xudeoitalianos; Levi-Civita é un dos pais da álgebra tensorial, e Fubini é coñecido polo seu teorema sobre integración en varias variables. O goberno de Italia tamén impulsou políticas antisemitas que resultaron na expulsión de Levi-Civita do seu posto na universidade. Acabou morrendo durante a guerra illado da comunidade matemática.

Fubini non quería saír de Italia, pero tiña dous fillos enxeñeiros, e non vía para eles futuro nun país cuxa política oficial era o antisemitismo. Marchou cara aos Estados Unidos, pero debido ao seu mal estado de saúde, morreu pouco despois.

.Schur, Issai.....  
A día de hoxe, Schur é coñecido pola súa descomposición matricial ou por diversos resultados en álgebra. Tan reputado era Schur que o seu posto de profesor foi defendido mesmo por Bieberbach, pero isto non evitou que fose expulsado da Universidade de Berlín. Tras ser despedido, Schur prometeulle á súa muller que, o día en que fose chamado a un campo de concentración pola Gestapo, se suicidaría. Dito día chegou, pero ela agochou a carta para evitar a súa morte e asistiu en representación do seu marido á cita coa policía. Eles preguntáronlle directamente por que seguían en Alemaña; o certo é que os Schur non tiñan o diñeiro para pagar as taxas que impuña o Reich á emigración. Non sabemos como acabaron conseguindo o diñeiro, pero o certo é que conseguiron deixar Alemaña en 1941. Schur, enfermo, morreu en Tel Aviv pouco despois.

.Lindenbaum, Adolf; Hosiasson, Janina.....  
O matrimonio Lindenbaum formou parte da escola lóxica polaca do período de entreguerras. Adolf e Janina fuxiron de Varsovia pouco despois do inicio da Segunda Guerra Mundial, pois Adolf non só era xudeu como Janina, senón

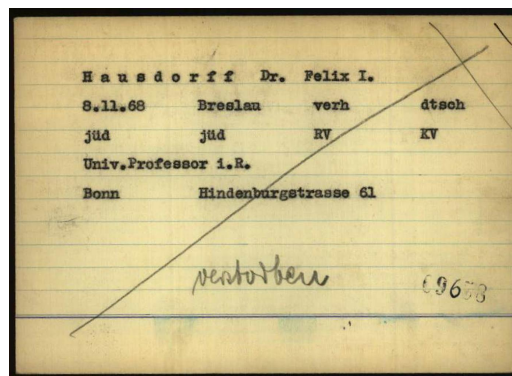


Fig. 2: Documento que acredita que Hausdorff é xudeu. En lapis está escrito *verstorben*: en alemán, “falecido”.

tamén comunista. Janina quedou en Vilna, mentres que Adolf separouse dela e proseguíu ata Byalystok, ambas cidades daquela polacas pero que pronto pasaron a mans soviéticas. En 1941, foron invadidas por Alemaña. Pérdese aquí o rastro dos Lindenbaum, pero sabemos que nese mesmo ano, Adolf foi levado polas autoridades alemás ás aforas da cidade. O mesmo lle ocorreu a Janina en 1942. Non se volveu saber deles.

.Hausdorff, Felix.....  
E volvemos a Hausdorff... Malia conservar o seu posto de traballo por un ano máis có resto, Hausdorff foi apartado finalmente e tivo que proseguir as súas investigacións con libros que lle eran levados clandestinamente. En 1941 comezou a levar a estrela de David amarela no peito. Informóuselle en varias ocasións de que unha deportación a Polonia ou o traslado a un campo de concentración era inminente. Cando finalmente lle chegou a notificación de que debía trasladarse ao campo de Endenich, suicidouse.

Os matemáticos que recollemos aquí son algúns suficientemente coñecidos como para, se cadra, encontrármolos ao longo da carreira, pero en cuxas vidas posiblemente non pensemos demasiado. É máis, moitos deles, grazas á súa posición “privilexiada” de profesores na preguerra, conseguiron xuntar os fondos para escapa do país. Pero moitos outros matemáticos poderían encher esta páxina: nomes menos coñecidos, polacos, franceses, húngaros, neerlandeses, alemáns, cada un coa súa historia, perdidos entre millóns dos seus concidadáns. Algúns sobreviviron, pero a meirande parte morreron en guetos ou campos de concentración e exterminio; destacamos Theresienstadt, Sachsenhausen, Auschwitz-Bikernau e Treblinka. En paz descansan.

## REFERENCIAS

- [1] GARCÍA NICIEZA, P. (2019), *Los fundamentos intuicionistas de la Deutsche mathematik: un intuicionismo racista y anacrónico*, Eikasía.
- [2] *Biographies - MacTutor History of Mathematics* (consultado 10/12/2023), enlace: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>.
- [3] *United States Holocaust Memorial Museum* (consultado 10/12/2023), enlace: <https://www.ushmm.org>.
- [4] *Arolsen Archives. National Center on Nazi Persecution* (consultado 10/12/2023), enlace: <https://arolsen-archives.org/en>.

# Viví, unha inspiración e referente do cambio

Francisco Estévez Lengua

Estamos coa profesora María Victoria Otero Espinar, é Catedrática de Análise Matemática. O seu traballo está adicado basicamente nas Ecuacións Diferenciais, Sistemas Dinámicas e Biomatemática, interesándose polas aplicacións das mesmas.

- F: Contanos un pouco sobre ti, como che veu a inspiración para adicarte as matemáticas?
- V: Cando era pequena, en cuarto de EGB, preguntáronme que quería ser de maior, e sen pensalo dixen "profesora de matemáticas". Sempre me gustaron ás matemáticas e dábanse moi ben. Cando rematei COU, tiña dúas posibilidades, estudar Arquitectura ou facer Matemáticas, decanteime por esta última. Tiven unha profesora que foi a miña inspiración. Era unha docente que en primeiro de BUP xa usaba unha linguaxe moi formal e a meirande parte do estudantado non levaba ben esas clases, pero para min esa linguaxe era moi natural.
- F: Como foi que o teu camiño te levou ás Ecuacións Diferenciais?
- V: Na asignatura de terceiro de licenciatura sobre ecuacións diferenciais, sacara bastante boa nota pero non me quedara a gusto, sentía que non estaba satisfeita co que aprendera e elexina en cuarto para matar a curiosidade. Eu viñen á Facultade cun obxectivo claro, ser profesora de Matemáticas nun instituto. Que pasou? Cando estaba a rematar a Licenciatura, un profesor, Gerardo Rodríguez López, propúxeme facer un traballo sobre iniciación a investigación e gustoume tanto que decidín quedarme para facer a tese. Marchei á Universidade de Niza para facer o doutorado, que estaba centrado no estudo de sistemas dinámicos discretos.
- F: Contame un pouco máis que fixeche despois do doutorado?
- V: Xusto ao comezar o doutorado, ofertárase unha plaza en Lugo. Ao rematalo obtiven por oposición unha praza de Titular a plaza de titular e despois, aínda que me acreditei para Catedrática por méritos, tiven que esperar moitos anos a que a USC sacara unha praza de Catedrática.
- F: Pero que hai facer para ser Catedrática?
- V: Primeiro hai que pasar unha acreditación nacional e despois a universidade ten que convocar a concurso una praza de Catedrático que consiste nun concurso de méritos e a presentación dun proxecto investigador. No meu caso: Teoría cualitativa de Ecuacións Diferenciais e en Diferencias e algúns problemas de Biomatemática. Por exemplo, actualmente estou traballando no estudo da resistencia dos antibióticos.
- F: Como afrontas eses proxectos, e dicir nótalos como unha carga?
- V: A verdade é que non. A mín gústame, aínda que é moi sacrificado, pero tenche que gustar e eu son feliz.
- F: Ao longo dos anos fuches tendo diferentes cargos, entre eles decana desta Facultade e na actualidade vicepresidenta da RSME. Como foi este proceso, que te levou a querer facelo?
- V: Inicialmente dediqueime exclusivamente á docencia e á investigación, pero chegado o momento, pensei que podía aportar algo máis á Universidade a través da xestión e como me xurdiron oportunidades, acepteinas. É bonito poñer o teu grao de area. A miña relación coa RSME ven de fai moitos anos. Impliqueime moito pois me parecía que se facían uns proxectos moi interesantes na promoción das Matemáticas en todas as facetas. Nesta Sociedade estanse facendo moitas actividades en calquera ámbito que te imaxines, para pór as Matemáticas no lugar que deberían estar. Por exemplo estamos traballando coa RAE, para incorporar termos matemáticos ao dicionario, co Museo Thyssen... É moito traballo, pero paga a pena.
- F: Por que das charlas sobre as Matemáticas?
- V: Son unha persoa moi interesada por levar as Matemáticas a calquera lado, entón sempre fago o posible por ir. Creo que é importante transmitir que esta rama é moi relevante desde diferentes puntos de vista: para facelas atractivas, e para que os que non as van estudar saiban que coñecerlas vai ser importante para eles. Para os que son xa matemáticos, que saiban que hai moitas saídas. A outros niveis, nas institucións é importante opinar para que tomen as mellores decisións.
- F: Para ti que son as matemáticas?
- V: Loxicamente é a base da miña vida. E a miña forma de vida, pero é máis que iso, para min son unha fonte de inspiración e motivación.
- F: Cres que as matemáticas aportan unha filosofía de vida?
- V: É algo que levamos inconscientemente. Os matemáticos temos un método de pensamento que vai estar en todo, que tamén implica unha forma diferente de tratar os temas. Axuda á toma de decisións pois analizamos ás implicacións de cada opción e intentamos elexir a óptima. Aínda que, claro, non sempre tomamos as decisións máis axeitadas pois ao plantexar o problema, intentamos escoller os puntos máis representativos pero esquecémonos dalgúns que pode ser decisivo.

# Retos Matemáticos



## TEORÍA

En matemáticas é indispensable saber traballar con expresións alxébricas e establecer relacións de igualdade que axuden a simplificar os problemas.

Destas, as máis simples pero tamén moi útiles son as polinómicas, xa sexan dunha ou varias variables. Para as olimpíadas é de especial interese saber manipular unha expresión polinómica e ser capaz de expresala como produto doutras máis pequenas, pois a miúdo pídesese atopar as solucións enteiras.

Unha factorización sinxela de aprender é o Simon's Favorite Factoring Trick (SFFT), aplicable a ecuacións do tipo:

$$xy + ax + by = c,$$

con  $a, b, c$  enteiros, co obxectivo de atopar as solucións enteiras  $(x, y)$  para a ecuación.

Se sacamos factor común progresivamente:

$$\begin{aligned} x(y+a) + by &= c \\ x(y+a) + b(y+a) - ba &= c \\ (x+b)(y+a) &= c + ab, \end{aligned}$$

## PROBLEMAS PROPOSTOS

1. Demostra que se  $2^n + 1$  é primo entón  $n$  é potencia de 2.
2. Probar que para todo enteiro positivo  $n$ , 2000 divide a:

$$121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n.$$

3. Chamamos a un enteiro  $n \in \mathbb{Z}^+$  un  $k$ -número se cumpre o seguinte:
  - a)  $n$  pode escribirse como produto de dous enteiros que distan  $k$  entre si.
  - b)  $n$  é  $k$  menos que un cadrado perfecto.

Atopar todos os  $k \in \mathbb{Z}^+$  para os que existen infinitos  $k$ -números.

Aclaración: un  $k$ -número debe ser da forma  $a(a+k)$  e  $b^2 - k$  ao mesmo tempo, para algún  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ .

4. Atopar todas as funcións  $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  que cumpren:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^+, \quad 2yf(f(x^2) + x) = f(x+1)f(2xy)$$

Nota:  $0 \notin \mathbb{Z}^+$

co cal reducimos o problema a igualar cada factor a distintas combinacións de divisores de  $c + ab$ .

Outra factorización con nome xorde de tratar de factorizar  $x^4 + y^4$ , pois pode escribirse como:

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2,$$

o cal é case unha diferenza de cadrados (enteiros), de coñecida factorización. Se tomamos  $\sqrt{2}y$  en lugar de  $y$ , temos

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy), \end{aligned}$$

que se coñece como a Identidade de Sophie Germaine.

### Problemas Relacionados

1. Hai exactamente 2005 pares ordenados  $(x, y)$  que son solucións de:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{N},$$

con  $x, y, N \in \mathbb{Z}^+$ . Probar que  $N$  é un cadrado perfecto.

2. Probar que  $n^4 + 4^n$  nunca é primo se  $n \geq 2$ .

Xa podes consultar as solucións dos problemas propostos do mes pasado escaneando ou premendo no seguinte QR:



# A Ecuación Funcional de Cauchy

Ibai Otero Gómez

As ecuacións funcionais son relacións de igualdade que definen funcións de maneira implícita. As incógnitas a resolver neste tipo de ecuacións son funcións que deben cumprir unha condición para todo punto do dominio. Un exemplo destas e unha das máis estudadas é a Ecuación Funcional de Cauchy, chamada así polo matemático francés de renome que atopou todas as solucións continuas da ecuación en 1821. Esta é unha función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Como se pode apreciar, parécese á condición que debe cumprir unha función para que sexa linear. Así, estas funcións en particular verifican a ecuación funcional. De feito, veremos que son todas as solucións continuas.

Empezaremos estudando o seu comportamento nos números naturais. Unha simple inducción amosa que

$$f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) + \dots + f(1) = nf(1)$$

Ademais, substituíndo  $x = y = 0$  na ecuación funcional chegamos a que  $f(0) = 0$ . Polo tanto, o valor da función nos naturais queda determinado unicamente por unha constante que fai o papel de "pendente" da recta na que quedan aliñados estes puntos. Este mesmo argumento amosa que  $f(nx) = nf(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . De xeito máis ou menos sinxelo podemos estender este resultado aos números enteiros e mesmo aos valores racionais. Así, tense o seguinte:

**Proposición 1.** Se  $f$  verifica a ecuación funcional de Cauchy, entón  $f$  é  $\mathbb{Q}$ -linear, é dicir,  $f(qx) = qf(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $q \in \mathbb{Q}$ .

Agora ben, implica isto que  $f$  é linear no sentido usual que coñecemos de linealidade en  $\mathbb{R}$  como espazo vectorial real? Se engadimos a hipótese de continuidade sobre  $f$ , isto queda asegurado grazas ao seguinte resultado.

**Teorema 1.** (da extensión continua) Unha función real continua queda determinada de forma única polos valores que toma sobre un subconxunto denso de  $\mathbb{R}$ .

Polo tanto, todas as funcións continuas que son solución da ecuación funcional son rectas parametrizadas unicamente pola súa pendente. É dicir,  $f(x) = mx$  con  $m \in \mathbb{R}$  forma o conxunto de solucións continuas. En 1875, Darboux probou que é suficiente asumir só continuidade nun punto para que estas sexan todas as solucións que cumpren a hipótese adicional. (Exercicio)

Parece entón que todas as solucións son da forma  $f(x) = mx$ , pois unha solución que non sexa desta forma non pode ser continua en ningún punto. É máis, pódese probar o seguinte teorema:

**Teorema 2.** Se  $f$  verifica a ecuación funcional de Cauchy, entón son equivalentes:

1.  $f$  é continua
2.  $f$  está acotada nun entorno de 0
3.  $f$  é monótona
4.  $f$  é medible

Este resultado é moi sorprendente. Como se pode ver, unha solución da ecuación funcional distinta das que xa coñecemos ten que ser moi estraña, nin sequera pode ser medible! Os lectores interesados poden consultar [1], onde se atopa unha proba elemental deste último feito usando o teorema de Lusin.

Non obstante, resulta que si existen solucións distintas ás anteriores! Este feito foi probado por Hamel en 1905 utilizando uns espazos vectoriais peculiares e o Teorema 3, de especial relevancia en todas as matemáticas.

**Teorema 3.** Todo espazo vectorial ten algunha base.

Hamel considerou unha base de  $\mathbb{R}$  entendido como  $\mathbb{Q}$ -espazo vectorial. Este espazo é de dimensión infinita, pero polo Teorema 3 podemos afirmar que ten unha base  $\mathcal{B}$ . É dicir, calquera elemento  $x \in \mathbb{R}$  pódese escribir de forma única como combinación  $\mathbb{Q}$ -linear finita de elementos de  $\mathcal{B}$ <sup>1</sup>:

$$x = q_1 b_1 + \dots + q_m b_m \text{ con } q_i \in \mathbb{Q} \text{ e } b_i \in \mathcal{B}$$

Agora ben, definamos  $f$  de forma arbitraria sobre os elementos de  $\mathcal{B}$ . Podemos facer o que se chama estender  $f$  por linealidade definindo para  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{B}$

$$f(x) = f\left(\sum_i q_i b_i\right) := q_1 f(b_1) + \dots + q_m f(b_m) = \sum_i q_i f(b_i)$$

Pódese comprobar que esta función cumpre a ecuación funcional e que as solucións que xa tiñamos atopadas podémolas agrupar dentro destas. Non obstante, deste xeito máis xeral podemos definir novas solucións que non tiveramos en conta ata agora. Basta definir por exemplo  $f(b_1) = ab_1$ ,  $f(b_2) = cb_2$  con  $a \neq c$  e de calquera xeito no resto de elementos da base para que a función non poida ser lineal.

Por último, amosamos un resultado curioso relativo a este tipo de funcións.

**Teorema 4.** Se  $f$  é unha función non continua que verifica a ecuación de Cauchy, entón o grafo de  $f$  é denso en  $\mathbb{R}^2$ .

**Demostración.** Sexa  $\Gamma$  o grafo de  $f$ . Como  $f$  non é continua, sabemos que  $\Gamma$  non é unha recta en  $\mathbb{R}^2$ . Polo tanto existen dous puntos  $u, v \in \Gamma$  linealmente independentes. Pola  $\mathbb{Q}$ -linealidade de  $f$ , tense que

$$\mathcal{A} := \{ru + sv, r, s \in \mathbb{Q}\} \subset \Gamma$$

Definimos agora unha aplicación  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$\alpha = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}$$

Esta aplicación é lineal e continua. Ademais  $\alpha(\mathbb{Q}^2) = \mathcal{A}$ . Como  $\mathbb{Q}^2$  é denso en  $\mathbb{R}^2$  e as aplicacións lineais invertibles envían subconxuntos densos en subconxuntos densos tense que  $\mathcal{A}$ , e polo tanto  $\Gamma$ , son densos en  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

<sup>1</sup>Aínda que usamos valores naturais para nomear algúns elementos da base, pódese probar que o cardinal de  $\mathcal{B}$  non é numerable.

## REFERENCIAS

- [1] Seirios. Additivity + measurability  $\implies$  continuity. Mathematics Stack Exchange. <https://math.stackexchange.com/q/318587> (version: 2018-01-30).
- [2] Christopher G.Small. *Functional Equations and How to Solve Them*. Springer, 2007.
- [3] Overview of basic facts about cauchy functional equation. mathstackexchange. <https://math.stackexchange.com/questions/423492>.
- [4] Cauchy's functional equation. wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s\\_functional\\_equation#](https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_functional_equation#). Accedido: 2023-10-12.

# O Valor Absoluto $p$ -ádico

Javier Polo Noche

Unha das primeiras cousas que se estudan en Introducción á Análise Matemática é o valor absoluto (usual) sobre  $\mathbb{R}$  e as súas propiedades. Estes conceptos e resultados son xeralizados e ampliados en moitas outras materias do Grao, como ben é coñecido para algunhas persoas e (aínda) descoñecido para outras. Porén, hai un valor absoluto que non se aborda na titulación e que posúe unha grande importancia na Teoría de Números: o valor absoluto  $p$ -ádico, que é o que trataremos de introducir neste breve artigo.

Dado un primo  $p$  denomínase valoración  $p$ -ádica en  $\mathbb{Z}$  á aplicación  $v_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ , onde para cada  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $v_p(x)$  é o único enteiro  $v$  que verifica que  $x = p^v n$ , con  $n$  e  $p$  enteiros coprimos únicos tamén. É posible estender esta definición a  $\mathbb{Q}^*$ , xa que todo racional pode ser escrito en forma de fracción irreducible  $\frac{x}{y}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$  e  $y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Así,  $v_p(\frac{x}{y}) = v_p(x) - v_p(y)$ . Por convenio  $v_p(0) = +\infty$ . Dados  $a, b \in \mathbb{Q}$ , a valoración  $p$ -ádica verifica as seguintes propiedades, cuxa demostración é sinxela e queda como exercicio:

- $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ .
- $v_p(a+b) \geq \min\{v_p(a), v_p(b)\}$ .

Lembremos agora a definición de valor absoluto.

**Definición 1.** Un valor absoluto sobre un corpo  $K$  é unha aplicación  $|\cdot| : \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  que cumpre:

1.  $|x| \geq 0$  para todo  $x \in K$  e  $|x| = 0 \iff x = 0$  (definida positiva).
2.  $|xy| = |x||y|$  para todo  $x, y \in K$ .
3.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  para todo  $x, y \in K$  (desigualdade triangular).

Ademais un valor absoluto dirase que é non arquimediano se verifica

4.  $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$  para calquera  $x, y \in K$ .

A condición de ser valor absoluto non arquimediano implica a terceira condición (desigualdade triangular) da definición xeral de valor absoluto.

Definimos a continuación o valor absoluto  $p$ -ádico sobre o corpo  $\mathbb{Q}$ .

**Definición 2** (Valor absoluto  $p$ -ádico). Dado  $x \in \mathbb{Q}$  defínese o valor absoluto  $p$ -ádico de  $x$  como  $|x|_p = p^{-v_p(x)}$  se  $x \neq 0$  y  $|0|_p = 0$ .

O valor absoluto  $p$ -ádico dun número será pequeno (respectivamente, grande) se a súa valoración  $p$ -ádica é grande (respectivamente, pequena), é dicir, se é “moi divisible” (respectivamente, “pouco divisible”) por  $p$ .

**Proposición 2.** O valor absoluto  $p$ -ádico  $|\cdot|_p$  verifica as propiedades para ser un valor absoluto sobre un corpo ( $\mathbb{Q}$ ), tratándose dun valor absoluto non arquimediano.

Para comprender ben un dos resultados importantes sobre o valor absoluto  $p$ -ádico cómpre pararnos previamente neste concepto: se  $K$  é un corpo e consideramos sobre el dous valores absolutos, dise que ditos valores absolutos son equivalentes se xeneran a mesma topoloxía métrica.

Antes de enunciar o devandito teorema imos establecer a seguinte notación:

- $|\cdot|_\infty$  refírese ao valor absoluto usual sobre  $\mathbb{Q}$ .
- O valor absoluto trivial sobre  $\mathbb{Q}$  é aquel que cumpre que  $|x| = 1$  se  $x \neq 0$  e  $|0| = 0$ .

Agora si, enunciamos o resultado.

**Teorema 5** (Ostrowski). Se  $|\cdot|$  é un valor absoluto non trivial  $\mathbb{Q}$ , entón é equivalente a algún  $|\cdot|_p$  con  $p$  primo ou infinito.

Para ir rematando, seguramente sexa coñecido polo lector que o corpo dos racionais non é completo respecto do valor absoluto usual e que a súa completación é o corpo dos números reais. Pois ben, tense que, fixado un primo  $p$ :

**Teorema 6.**  $\mathbb{Q}$  non é completo para o valor absoluto  $p$ -ádico.

Para o devandito  $p$ , a completación de  $\mathbb{Q}$  denótase por  $\mathbb{Q}_p$  e denomínase **corpo dos números  $p$ -ádicos**.

## REFERENCIAS

- [1] F. Q. Gouvêa,  *$p$ -adic Numbers. An Introduction*. Universitext, 3rd ed., Springer, Cham, 2020.
- [2] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*. Vol. 322 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [3] J. Polo Noche, *Teorema de Hasse Minkowski*. Tralalho de Fin de Grao, USC, 2023.
- [4] J.-P. Serre, *A course in arithmetic*. Graduate Texts in Mathematics, No. 7, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

*Euler foi un xenio das Matemáticas, pero aínda así, non tivo a sorte de ler Máis Mates antes de quedarse irremediamente cego. Gauss posiblemente se aburría moito entre clases, algo que podería ter remediado se se lle ocorrese inventar Máis Mates. Hipatia tampouco a tivo nas súas mans, pero seguro que gozaría das cónicas da portada. Se cadra Galois podería ter achado a fórmula de Máis Mates, pero morreu demasiado novo... E ti? Ti tes Máis Mates ao alcance da man!*

*Máis Mates é un proxecto en forma de revista do alumnado para o alumnado, o proxecto co que todos eses egrexios persoeiros soñarían. Cada mes, traémosvos novos artigos con pequenas anécdotas da historia das matemáticas, as últimas novas, entrevistas, pasatempos, pequenos petiscos en diversos temas que ao mellor non se tratan en profundidade na carreira... En definitiva, todo o que esperta a nosa curiosidade como alumnas e alumnos, e que quizais esperte tamén a túa!*

*Estamos aí para que desconectes na metade dunha dura sesión de estudo, ou para todo o que se che ocorra. Lenos, coméntanos, compártenos, escríbenos e colabora con nós!*



FACULDADE DE MATEMÁTICAS



*Accede á revista!*

*revistamaismates@gmail.com*

