



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría de grafos na investigación de operacións

Yolanda Cobas Cornide

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoría de grafos na investigación de operacións

Yolanda Cobas Cornide

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Estadística e investigación operativa
Título: Teoría de grafos na investigación de operacións
Breve descrición do contido
Neste traballo estudarase a teoría de grafos que se utiliza en investigación de operacións analizando diversas técnicas e modelos diferentes aos xa estudados noutras materias da titulación.
Recomendacións
Outras observacións

Índice general

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Grafos: introducción	1
1.1. Grafos	1
1.2. Subgrafos	6
1.3. Representación matricial de grafos	7
1.4. Grao	9
2. Tipos de grafos	11
2.1. Definicións e resultados esenciais	11
2.2. Radio, diámetro e excentricidade	17
2.3. Parámetros asociados aos vértices e ás aristas	18
2.4. Árbores	19
3. Ciclos eulerianos y circuitos hamiltonianos	23
3.1. Ciclos eulerianos	23
3.2. Circuitos hamiltonianos	26
4. Grafos dirixidos	31
4.1. Definición e conceptos básicos	31
4.2. Matrices de incidencia	34
5. Grafos planos	37
5.1. Introducción	37
5.2. Fórmula de Euler	38
5.3. Mapas	40

6. Coloreando grafos	43
6.1. Introducción	43
6.2. Polinomio cromático	46
6.3. Teorema de Brooks	49
7. Un ejemplo con \mathbb{R}	51
Bibliografía	57

Resumo

Un dos principais obxetivos deste traballo é recompilar as nocións e resultados básicos da teoría de grafos que se utilizan especialmente na investigación de operacións. A teoría de grafos pode ser utilizada noutras ramas das matemáticas como pode ser a álgebra ou a topoloxía. Neste traballo centrámonos nas características e propiedades que se precisan principalmente na investigación de operacións. O estudo dos grafos realízase dende un punto de vista teórico, mencionando e describindo algúns dos principais problemas da investigación de operacións nos que se utilizan.

Abstract

One of the main objectives of this work is to compile the basic notions and results of graph theory that are used especially in operations research. Graph theory can be used in other branches of mathematics such as algebra or topology. In this paper we focus on the characteristics and properties that are mainly needed in operations research. The study of graphs is carried out from a theoretical point of view, mentioning and describing some of the main problems of operations research in which they are used.

Introdución

A investigación de operacións é unha das ramas máis modernas das matemáticas. Ten a súa orixe no século *XVIII* cos traballos de Euler, pero tivo un gran avance na Inglaterra da Segunda Guerra Mundial, cando un grupo de científicos ingleses encargábase do deseño de ferramentas cuantitativas para axudar na toma de decisións sobre a mellor utilización de materiais bélicos. Cando rematou a guerra, as técnicas desenroladas no sector militar pasaron a ser utilizadas tamén no civil.

A teoría de grafos precisa de conceptos de áreas tan diversas como a combinatoria, a álgebra, a topoloxía ou a investigación de operacións. Tivo os seus comezos na resolución de pasatempos e parecía pouco interesante a nivel matemático, pero agora xoga un papel fundamental dentro da resolución de problemas da investigación de operacións. Esta é utilizada en temas moi diversos, como telecomunicacións, redes neuronais, estudo de probabilidades ou planificación, debido a súa capacidade gráfica entre outras cousas.

Como veremos ao longo deste traballo, a teoría de grafos ten a súa orixe en 1736, cando o matemático Leonhard Euler comezou a estudar o Problema das Pontes de Königsberg. Este consistía en recorrer as sete pontes da cidade unha única vez e volver ao lugar de partida. Non foi ata 1878 cando se introduciu o termo “grafo” polo matemático inglés James Joseph Sylvester nun artigo sobre os diagramas moleculares e a súa relación coa álgebra. Un dos puntos clave da teoría de grafos é a coloración dos mesmos, que ten a súa orixe en 1852 cando Francis Guthrie, un matemático e botánico que foi alumno de Augustus de Morgan na Universidade de Londres ao igual que Sylvester, formulou a conxectura dos catro cores, pero a cal non foi capaz de demostrar. Foi en 1976 cando Ken Appel e Wolfgang Haken derón unha proba satisfactoria do mesmo, sendo este o primer gran resultado probado coa axuda dun ordenador.

Durante as últimas décadas, a teoría de grafos desenrolouse rapidamente grazas á aparición de estudos sobre problemas de optimización da vida cotiá en enxeñería e administración, como atopar a ruta máis curta nunha rede de tráfico, coordinar proxectos ou resolver problemas de oferta e demanda. Ademais, a aparición de sistemas informáticos cada vez máis eficientes permite resolver problemas máis custosos de forma máis rápida.

Neste traballo trátase de facer un estudo sobre as nocións e resultados esenciais dos grafos que son necesarias á hora de resolver problemas no ámbito da investigación de operacións, ademais de describir algúns dos problemas máis coñecidos neste campo.

No primeiro capítulo, introdúcense as definicións básicas como poden ser a definición de grafo, subgrafo ou matriz de adxacencia e matriz de incidencia, así como breves descripcións dalgúns tipos de grafos.

Nos seguintes dous capítulos fálase das cadeas que están presentes nun grafo e dos seus distintos tipos, os camiños, os ciclos e os circuitos, ademais de introducirse dous tipos concretos destas que teñen certo interese á hora de resolver problemas de investigación de operacións: os ciclos eulerianos e os circuitos hamiltonianos.

O capítulo posterior trata dos grafos dirixidos, e nel introdúcense as definicións tratadas xa nos capítulos anteriores para grafos non dirixidos pero orientadas a este tipo de grafos. A continuación, nos capítulos quinto e sexto trátanse os conceptos básicos do coloreado de grafos, así como os grafos planos, xa que foi neste tipo de grafos onde comezou o estudo do coloreado dos mesmos.

No derradeiro capítulo vese unha breve introducción á representación de grafos con R cuns exemplos sinxelos relacionados co tratado nos capítulos anteriores.

Ademais, ao longo do traballo indicaremos onde se poden atopar as demostracións dos resultados máis relevantes.

Capítulo 1

Grafos: introducción

Neste primeiro capítulo imos introducir a definición xeral de grafo así como grafos con certas características concretas, aínda que en capítulos posteriores se tratarán con máis profundidade. Tamén fálase de dous tipos de representación dos grafos, a gráfica e a matricial, que máis adiante utilizaremos como sexa conveniente en función da información que aportan. Ademais, introdúcense distintos conceptos relacionados cos grafos que é necesario coñecer para realizar un estudo dos mesmos e das súas propiedades.

1.1. Grafos

Comezamos presentando a definición de grafo á que nos referiremos durante todo o traballo.

Un **grafo** G é un par de conxuntos (V, E) , $V \neq \emptyset$, e E un conxunto de elementos da forma $e = \{v_i, v_j\}$, onde $v_i, v_j \in V$. Os elementos de V son denominados **vértices** e os elementos de E **aristas**, con puntos extremos v_i e v_j . As aristas da forma $\{v_i, v_i\}$ denomínanse **lazos**. En teoría de grafos se estudan os grafos finitos e os infinitos ¹, pero neste traballo imos a considerar só os grafos finitos.

Ademais, se a arista $\{v_i, v_j\}$ está presente no grafo G , dicimos que os vértices v_i e v_j son **adxacentes** e que a arista $\{v_i, v_j\}$ é **incidente** cos vértices v_i e v_j .

Os grafos poden escribirse graficamente mediante diagramas onde os vértices represéntanse por puntos (ou pequenos círculos) e unindo dous destes cunha línea débúxanse as aristas. A línea que une o punto que indica o vértice v_1 co punto que indica o vértice v_2 é a arista $\{v_1, v_2\}$.

¹Entendemos que un grafo é finito ou infinito cando o conxunto de vértices é finito, $|V| = n$ con $n \in \mathbb{N}$, ou infinito, $|V| = \infty$, respectivamente.

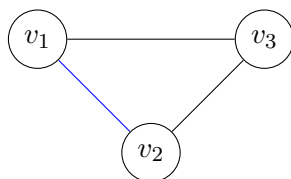
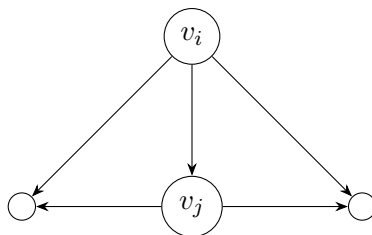


Figura 1.1: Grafo con conxunto de vértices $V=\{v_1, v_2, v_3\}$ e conxunto de aristas $E=\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\}$

Un tipo de grafo interesante no ámbito de investigación de operacións é o **grafo aleatorio**. Este consiste nun grafo cun conxunto finito de vértices no que as aristas que aparecen unen pares destes vértices de forma aleatoria. Podemos atopalos en grafos que representen, por exemplo, as vínculos nunha red social. É dicir, os vértices serían as persoas que son membros desa red social, e unha arista une dous vértices se esas dúas persoas están relacionadas dalgunha forma. A importancia destes grafos aleatorios ven dada pola posibilidade de que estes vínculos varíen ao longo do tempo. Neste traballo centraremonos nos grafos que non son aleatorios.

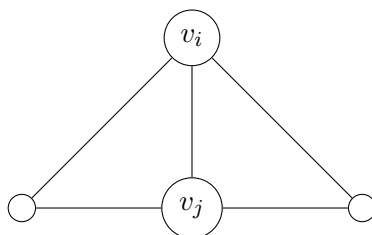
En función de como sexan as aristas dun grafo, é dicir, dos elementos de E , podemos distinguir tres tipos de grafos:

- **Grafos dirixidos:** son aqueles nos que $E \subset V \times V$, é dicir, cada arista é un par ordeado de vértices, a arista (v_i, v_j) comeza no vértice v_i e remata no vértice v_j .

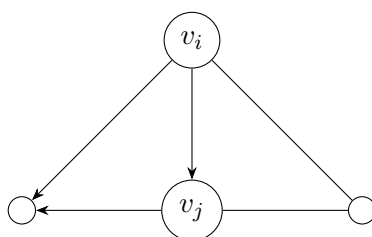


Aos grafos dirixidos dedicaremoslle un capítulo posteriormente no que se introducirán algunhas definicións e se extenderán outras que trataremos antes para grafos non dirixidos.

- **Grafos non dirixidos:** son aqueles nos que as aristas non son pares ordeados, é dicir, a arista (v_i, v_j) e a arista (v_j, v_i) son a mesma, e a representaremos por $\{v_i, v_j\}$.



- **Grafos mixtos:** son aqueles nos que algunhas aristas son pares ordeados de vértices e outras non.

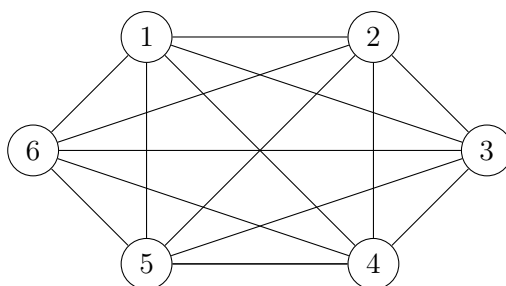


A partir de agora imos a referirnos simplemente a grafos dirixidos e non dirixidos.

A continuación introdúcense algúns grafos non dirixidos con características de certo interese. Moitas de estas definicións poden extenderse tamén para grafos dirixidos, pero trataremos esos casos no capítulo posterior dedicado aos mesmos:

En primeiro lugar, temos un grafo que contén todas as aristas posibles.

- **Grafo completo (K_n):** é un grafo con n vértices no que cada par de estos vértices é adxacente, é dicir, todas as aristas posibles están presentes.



O número máximo de aristas que pode haber nun grafo con n vértices é, no caso dun grafo non dirixido, $\frac{n(n-1)}{2}$, que son todas as posibles combinacións de elementos de $\{1, \dots, n\}$ tomados de dous en dous.

Deseguido, un grafo no que o conxunto de vértices está separado en dous subconxuntos e non existen aristas entre eles.

- **Grafo bipartito:** é un grafo $G = (V, E)$ onde o conxunto de vértices pódese separar en dous subconxuntos disxuntos, $V = V_1 \cup V_2$ e ademais non pode ocorrer que exista unha arista $e = \{v_i, v_j\}$ con $v_i, v_j \in V_1$ nin unha arista $e = \{w_i, w_j\}$ con $w_i, w_j \in V_2$, é dicir, non poden existir aristas que teñan ambos vértices en V_1 ou ambos en V_2 .

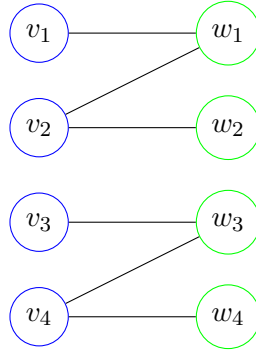


Figura 1.2: Un grafo bipartito onde o conxunto de vértices V sepárase en subconxuntos V_1 en cor azul e V_2 en cor verde.

Na seguinte definición mestúranse os dous anteriores, é dicir, o conxunto de vértices divídese en dous e están presentes todas as aristas posibles entre eles.

- **Grafo bipartito completo:** é un grafo bipartito no que todos os vértices de V_1 son adxacentes a todos os vértices de V_2 .

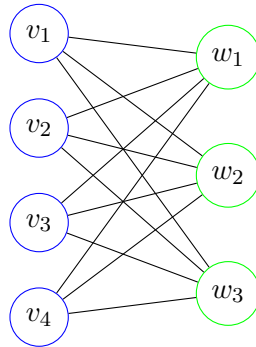


Figura 1.3: Un grafo bipartito completo onde o conxunto de vértices V sepárase en subconxuntos V_1 en cor azul e V_2 en cor verde e están presentes todas as aristas posibles entre os vértices de V_1 e V_2 .

A continuación presentamos un grafo que pode representarse nun plano sen que existan cruces entre as aristas. É utilizado habitualmente na teoría de grafos e dedicaráselle un capítulo máis adiante.

- **Grafo plano** é aquel que pode debuxarse nun plano sen que as súas aristas se corten.

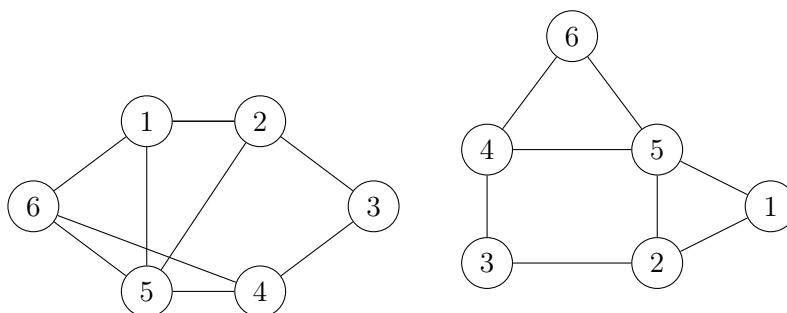
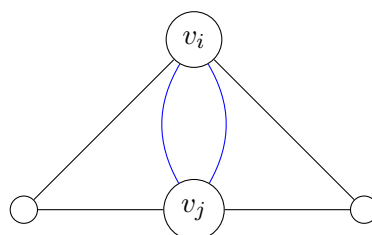


Figura 1.4: Os dous diagramas representan o mesmo grafo.

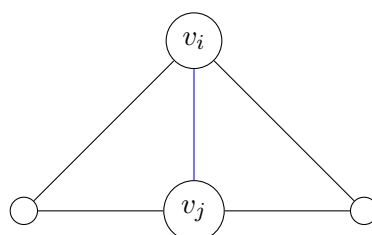
No tipo de grafo que se introduce a continuación vemos que entre dous vértices pode existir máis dunha arista.

- **Multigrafo:** é aquel no que cada par de vértices v_i, v_j pode estar conectado por máis dunha arista.



A partir do grafo anterior, mediante a substitución das aristas múltiples, constrúese o seguinte tipo de grafo.

- **Grafo subxacente dun multigrafo:** é o grafo que resulta ao reemplazar todas as aristas múltiples entre os nodos v_i e v_j por unha única arista.



Por último, un tipo de grafo que se constrúe a partir doutro dado, cos mesmos vértices pero modificando as aristas que están presentes nel.

- **Grafo complementario \overline{G}** : grafo que ten o mesmo conxunto de vértices que G pero onde estes son adxacentes se e só se non o son en G .

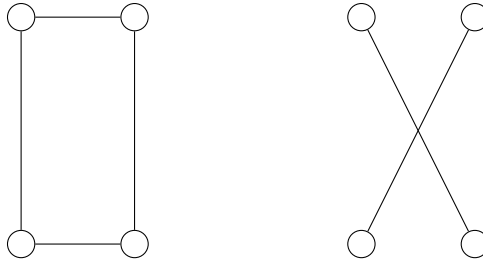
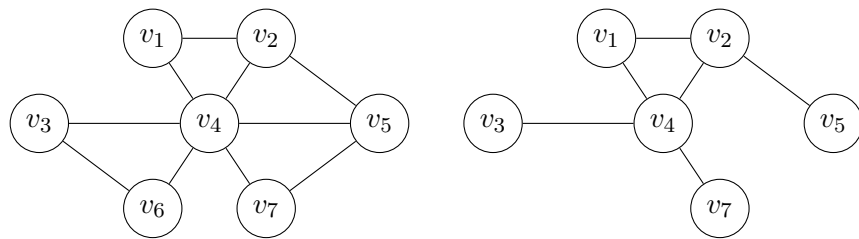


Figura 1.5: A esquerda un grafo G , e a dereita o seu grafo complementario, \overline{G}

1.2. Subgrafos

Nesta sección introdúcese un tipo de grafos que se constrúe a partir doutro, onde os vértices e as aristas son subconxuntos do grafo dado.

Dado un grafo $G = (V, E)$, un **subgrafo** G' de G é un grafo cuxo conxunto de vértices V' é un subconxunto dos de G , $V' \subset V$ e cuxo conxunto de aristas E' é un subconxunto das de G , $E' \subset E$. Trivialmente G é un subgrafo de él mesmo. Un subgrafo G' de G dise **propio** se G' é distinto de G



Exemplo 1.1.

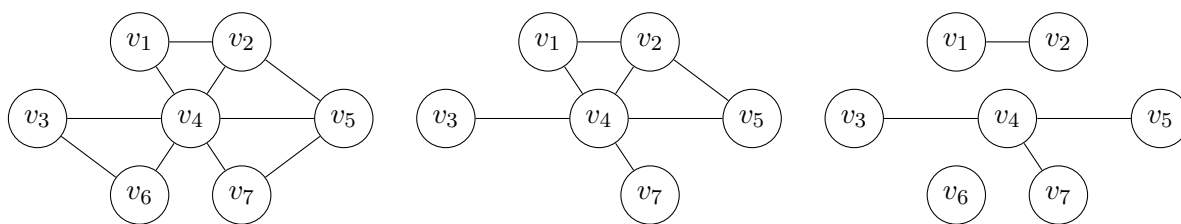
Figura 1.6: Un grafo G e un subgrafo G' de G

Dentro dos subgrafos, cabe destacar dous tipos, onde os conxuntos de vértices e aristas teñen que verificar unhas condicións dadas. Dado $G = (V, E)$ un grafo, se V' é un subconxunto de vértices de G , un **subgrafo inducido** por V' é o grafo formado por V' e polas aristas de G que unan dous vértices de V' , e denótase $G[V']$ ou $\langle V' \rangle$. Así mesmo, un **subgrafo de expansión** é un subgrafo $G' = (V', E')$ de G verificando $V' = V$ e as aristas

de E' son aristas de G que unen vértices de G' .

Moitas propiedades dos grafos son herdadas dos subgrafos, é dicir, un grafo ten dita propiedade se todos os seus subgrafos inducidos a teñen. Algúns exemplos de estas propiedades son: ser planos, ser completos, ser bipartitos, ...

Exemplo 1.2. Sexa G o grafo do exemplo 1.1, vemos a continuación un exemplo de subgrafo inducido por $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$ e un exemplo de subgrafo de expansión, nesa orde:



1.3. Representación matricial de grafos

Para a resolución de moitos problemas da investigación de operacións, vai ser de gran utilidade a representación matricial de grafos, que aporta información sobre estes de forma clara e resumida.

Dado $G = (V, E)$ un grafo, que pode ser dirixido ou non dirixido, con conxunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e con conxunto de aristas $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, podemos representar este grafo pola **matriz de adyacencia** A de orde $n \times n$ e con entradas a_{ij} :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \text{ é unha arista en } G \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Esta matriz pode recibir tamén o nome de **matriz "vértice-vértice"**.

Se o grafo G é dirixido, tamén pódese representar de forma matricial coa **matriz de incidencia** B que é unha matriz de orde $n \times m$ definida como:

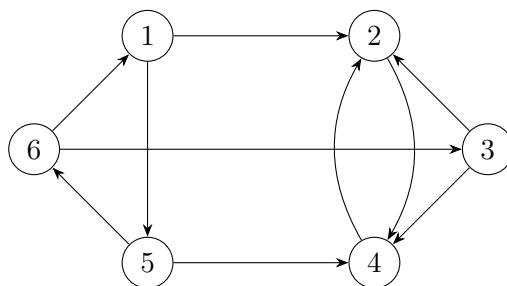
$$b_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ é o vértice final da arista } e_k \\ -1 & \text{se } i \text{ é o vértice inicial da arista } e_k \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Esta matriz pode recibir tamén o nome de **matriz "vértice-arista"**.

Exemplo 1.3. Neste exemplo imos representar dous grafos, un dirixido e outro non dirixido, e a resumir o contido do primeiro destes nas matrices de adyacencia e incidencia e

do segundo na matriz de adxacencia.

Sexa en primeiro lugar o grafo dirixido G :



Un grafo dirixido G

Representamos a información desta matriz

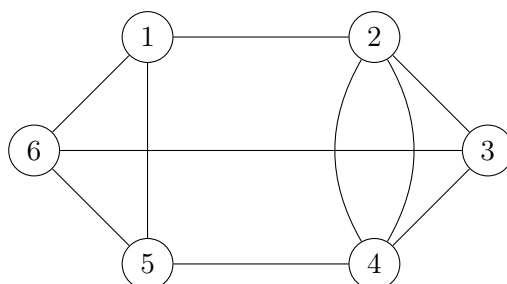
coa matriz de adxacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

coa matriz de incidencia

$$B_G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sexa agora o grafo non dirixido G' :



Un grafo non dirixido G'

Por ser non dirixido só podemos representar a súa información coa matriz de adxacencia:

$$A_{G'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4. Grao

Unha forma útil e sinxela de dar certa información sobre un grafo pode ser, facer referencia ao número de aristas que inciden en cada vértice, vendo así se é o mesmo para todos os vértices ou non, para iso introdúcese o concepto de grao.

Nun grafo G , sexa dirixido ou non, definimos o **grao** dun vértice v , $d(v)$, como o número de aristas que inciden nel. Utilizamos a notación $\delta(G)$ para referirnos ao menor dos graos de todos os vértices de G e $\Delta(G)$ para referirnos ao maior dos graos de todos os vértices de G .

Exemplo 1.4. Nestes dous grafos, un dirixido e outro non, o grao dos vértices v_1 e w_1 é 2, de v_2 e w_2 é 1 e de v_3 e w_3 é 3. Neste caso, $\delta = 1$ e $\Delta = 3$.

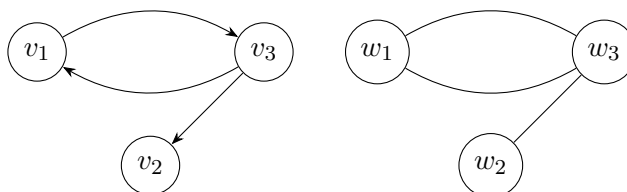


Figura 1.7: Un grafo dirixido con $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ e un grafo non dirixido con $V = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Cando todos os vértices dun grafo teñen o mesmo grao, dise que o grafo é **regular**.

Teorema 1.5. *En calquera grafo ou multigrafo $G = (V, E)$, a suma dos graos dos vértices é igual ao dobre do número de aristas.*

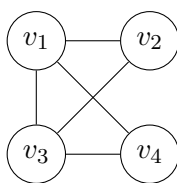
$$\sum d(v) = 2|E|$$

Demostración. Imos usar a matriz de incidencia e a suma das súas entradas. A suma das entradas da fila i é o grao do vértice v_i , $d(v_i)$, polo tanto $\sum d(v)$ é igual ao número de entradas da matriz de incidencia. A suma das entradas da columna k é 2, xa que cada

arista é incidente en dous vértices, en consecuencia, o número de entradas da matriz de incidencia é dúas veces o número de aristas, $2|E|$. [2] \square

Exemplo 1.6. A continuación exemplificamos o teorema anterior: Claramente os graos dos vértices do grafo non dirixido $G = (V, E)$ son: $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 2$, polo tanto $\sum_{i=1}^4 d(v_i) = 10$. Ademais o número de aristas, $|E|$, é 5. Polo tanto, verificase o resultado:

$$\sum_{i=1}^4 d(v_i) = 10 = 2 * 5$$

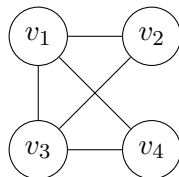


Grafo $G = (V, E)$

Corolario 1.7. Nun grafo, o número de vértices de grao impar é par.

Demostración. Usando o Teorema 1.5, $\sum d(v) = 2|E|$. Como a parte dereita é par, ao ser unha igualdade, a parte esquerda tamén debe sêlo e entón a suma dos graos de todos os vértices debe ser par, polo tanto se hai vértices de grao impar, ten que haber unha cantidade par deles. [1] \square

Exemplo 1.8. Utilizando o exemplo anterior, vemos que só hai dous vértices con grao impar son v_1 e v_3 de modo que hai un número par deles.



Capítulo 2

Tipos de grafos

Neste capítulo preséntanse os conceptos de cadeas, camiños, ciclos e circuitos, que na aplicación da teoría de grafos a problemas da vida cotidiana, son de gran importancia. Ademais introducimos algúns parámetros relacionados con estas definicións que permiten resumir a información que estes aportan a un grafo. Por último, preséntase o concepto de pesos, que é de vital necesidade cando se estudian problemas de análise de redes dos que veremos algún exemplo no vindeiro capítulo.

2.1. Definicións e resultados esenciais

Nesta primeira sección introducimos as definicións de cadeas, camiños, ciclos e circuitos así como algúns resultados sobre os mesmos aplicados a grafos non dirixidos, o caso de grafos dirixidos tratarase noutro capítulo.

Dado $G = (V, E)$ un grafo non dirixido, tomamos unha secuencia de aristas distintas de G , (e_1, e_2, \dots, e_r) , se existen vértices (v_0, v_1, \dots, v_r) de modo que, para $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, $e_k = (v_{k-1}, v_k)$, entón dicimos que a secuencia é unha **cadea**.

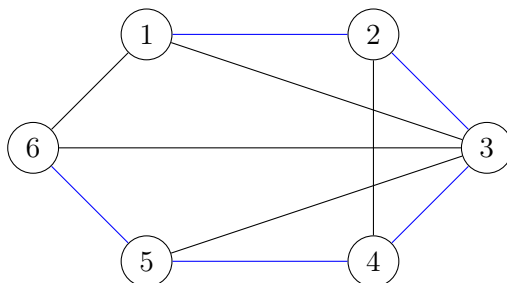
Se temos unha cadea que verifica $v_0 = v_r$, entón recibe o nome de **ciclo** ou **cadea pechada**. Unha cadea na que todos os vértices son distintos é un **camiño**. E ademais, unha cadea na que todos os vértices son distintos a excepción do primeiro e do último, $v_0 = v_r$, é un **circuito** ou **camiño pechado**.

En calquera das definicións anteriores, chámase **lonxitude** ao número de aristas que contén, l .¹

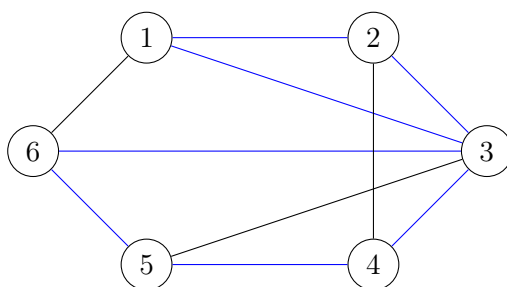
Exemplo 2.1. Dado un grafo $G = (V, E)$, exemplificamos as definicións anteriores:

¹Cando estemos a falar do problema do camiño máis curto esta non será a definición de lonxitude que se usará.

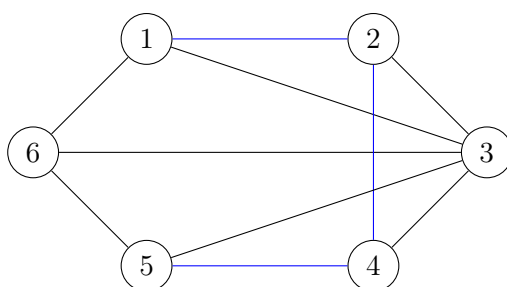
- Construimos unha cadea de v_1 a v_6 , $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$:



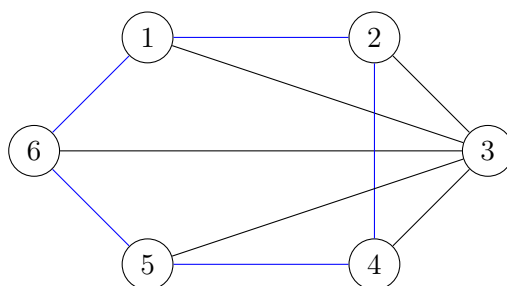
- Construimos un ciclo, $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_3, v_1\}$:



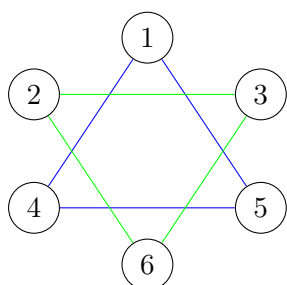
- Construimos un camiño, $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$:



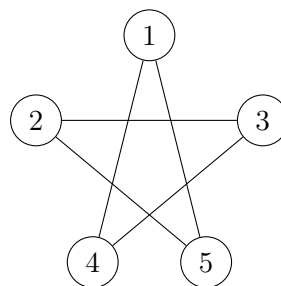
- Construimos un circuito, $\{v_2, v_1, v_6, v_5, v_4, v_2\}$:



Definición 2.2. Un grafo $G = (V, E)$ dise **conexo** se para cada par de vértices existe unha cadea que os une, é dicir, cada par de vértices están **conectados**. E se pola contra o conxunto de vértices V pode separarse en dous subconxuntos disxuntos $V = V_1 \cup V_2$ e non hai aristas entre ningún vértice de V_1 e ningún de V_2 e viceversa, decimos que o grafo é **non conexo**. Ademais, decimos que a **distancia** entre dous vértices que están conectados é a lonxitude da cadea máis corta que os une.



Un grafo non conexo



Un grafo conexo

A conexidade pode verse como unha relación de equivalencia no conxunto de vértices de G . As clases de equivalencia son as **compoñentes conexas** de G . As compoñentes conexas que conteñen un só vértice reciben o nome de **vértices illados**.

Ademais, falamos dun grafo **acíclico** cando este non contén ningún ciclo.

Dado un grafo $G = (V, E)$, se tomamos V' un subconxunto de vértices V , denotamos por $G \setminus V'$ ao grafo inducido por $V \setminus V'$, este grafo constrúese a partir de G eliminando todos os vértices de V' e todas as aristas incidentes neles.

Lema 2.3. *Un grafo conexo G con n vértices ten, ao menos, $n - 1$ aristas.*

Demostración. Demostramos o resultado por inducción en n . Supoñamos entón que G é un grafo conexo con $n \geq 2$ vértices (o caso $n = 1$ é trivial), tomamos un vértice v en G e consideramos o grafo $H = G \setminus v$ que pode ser non conexo.

Supoñamos que H ten as compoñentes conexas C_i con n_i vértices respectivamente ($i = 1, 2, \dots, k$), entón $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n - 1$. Por hipótese de inducción, o subgrafo de H inducido por C_i ten como mínimo $n_i - 1$ aristas. Ademais, v debe estar conectado en G con cada C_i polo menos por unha arista. Polo tanto, G contén como mínimo $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) + k = n - 1$ aristas. [1] \square

Lema 2.4. *Un grafo acíclico $G = (V, E)$ con $|V| = n$ ten como máximo $n - 1$ aristas.*

Demostración. Se $n = 1$ ou $E = \emptyset$ o resultado é trivial.

Vexamos o caso xeral, escollemos unha arista $e = \{v_i, v_j\}$ en G . Entón o grafo $H = G \setminus e$ ten unha compoñente conexas menos que G (nótese que non pode existir un camiño de v_i a v_j en H , xa que nese caso, o camiño máis a arista darían lugar a un ciclo). En consecuencia, H non pode descompoñerse en grafos conexas acíclicos H_1, H_2, \dots, H_k con $k \geq 2$.

Por inducción, podemos dicir que cada grafo H_i contén como máximo $n_i - 1$ aristas sendo n_i o número de vértices de H_i . Entón G contén, como moito,

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) + 1 = (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - (k - 1) \leq n - 1$$

aristas. [1] \square

Lema 2.5. *Dado G un grafo con n vértices, ningún deles illado, e $n - 1$ aristas con $n \geq 2$, entón G contén como mínimo dous vértices de grao 1.*

Demostración. Sexan v_1, \dots, v_n os vértices de G . A suma dos graos de todos os vértices de G é un número par, xa que:

$$d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) = 2|E| = 2(n - 1) \quad (2.1)$$

Polo tanto, o número de vértices de grao impar ten que ser par, xa que en caso contrario, a suma non sería par. Tomamos agora $\delta(G)$ e usando a ecuación 2.1 chegamos a que $n\delta(G) \leq 2(n - 1)$. En consecuencia, $\delta(G) \leq \lfloor \frac{2(n-1)}{n} \rfloor = \lfloor 2 - \frac{1}{n} \rfloor = 1$ (onde $\lfloor \dots \rfloor$ representa a parte enteira). Polo tanto, $\delta(G) = 1$ e polo menos hai un vértice con grao 1 (con grao impar) e como o número de vértices de grao impar ten que ser par, entón temos ao menos dous vértices de grao 1. \square

Teorema 2.6. *Dado un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$. Entón verificase que dous das seguintes condicións implican a terceira:*

a) G é conexo.

b) G é acíclico.

c) G ten $n - 1$ aristas.

Demostración. (a), (b) \Rightarrow (c) Polo Lema 2.3 ao ser G conexo ten como mínimo $n - 1$ aristas e polo Lema 2.4 ao ser G acíclico ten como máximo $n - 1$ aristas, en consecuencia, G ten exactamente $n - 1$ aristas.

(a), (c) \Rightarrow (b) Supoñamos que G contén un ciclo C e consideramos o grafo $H = G \setminus e$ sendo e calquer arista de C . Entón H é un grafo conexo con n vértices e $n - 2$ aristas e contradícese o Lema 2.3.

(b), (c) \Rightarrow (a) Polo lema 2.4, G non pode ter vértices illados, xa que omitir tal vértice daría lugar a un grafo acíclico con $n - 1$ vértices e $n - 1$ aristas. O Lema 2.5 implica que G ten un vértice de grao 1, entón $G \setminus v$ ² é acíclico con $n - 1$ vértices e $n - 2$ aristas. Por inducción, tense que $G \setminus v$ é conexo e, en consecuencia, G tamén o é. [1] \square

Teorema 2.7. *Se un grafo G contén unha secuencia de aristas que conecta dous vértices distintos, entón, contén un camiño que conecta eses dous vértices.*

Demostración. Supoñamos que existe unha secuencia de aristas que une os vértices v_0 e v_n ,

$$S_1 = (v_0, v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, \dots, v_n).$$

Dada esta secuencia, pode ocorrer que non conteña ningún vértice repetido e nese caso xa temos o camiño buscado. Pero pode pasar que conteña vértices repetidos, nese caso, escollemos un deses vértices, digamos $v_i = v_j$ con $i < j$ e construímos unha secuencia de aristas, S_2 , máis corta que S_1 :

$$S_2 = (v_0, v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n).$$

De novo, se esta secuencia non contén vértices repetidos, temos o camiño buscado e se si que os contén, construímos unha secuencia máis corta.

O proceso de construción de secuencias de aristas vai rematar nalgún momento, xa que cada secuencia é máis corta que a anterior e a lonxitude non pode ser menor que 1. Entón, para algunha secuencia S_k , temos que non se pode reducir máis e da lugar ao camiño que buscamos. [2] \square

Teorema 2.8. *Un grafo é bipartito se e só se non contén un circuíto de lonxitude impar.*

Demostración.

“ \Rightarrow ” Sexa $G = (V, E)$ un grafo bipartito con $V = V_1 \cup V_2$. Supoñamos que G contén un circuíto de lonxitude impar con $2k + 1$ vértices,

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_{2k+1})$$

onde cada vértice v_i é adxacente a v_{i+1} para $i = 1, 2, \dots, 2k$ e v_{2k+1} é adxacente a v_1 .

²A notación $G \setminus v$ fai referencia ao subgrafo de G inducido polo conxunto de vértices V' , estando V' formado por todos os vértices de G agás o vértice v .

Supoñamos entón que $v_i \in V_1$, entón necesariamente $v_{i+1} \in V_2$ por ser G bipartito. Se temos que $v_1 \in V_1$, verificase $v_2 \in V_2, v_3 \in V_1, \dots, v_{2k+1} \in V_1$ e entón $v_1 \in V_1$ e $v_{2k+1} \in V_1$, chegamos así a unha contradicción que ven de supoñer que o grafo contén circuitos de lonxitude impar.

“ \Leftarrow ” Supoñamos que $G = (V, E)$ é un grafo que non contén ningún circuito de lonxitude impar. Sen perda de xeneralidade, podemos supoñer que este grafo é conexo. Escollemos entón un vértice v de G de forma arbitraria e separamos o conxunto de vértices V en dous subconxuntos: V_1 conxunto de vértices cuxa distancia co vértice v é par e V_2 conxunto de vértices cuxa distancia co vértice v é impar. Trivialmente, $v \in V_1$ xa que a distancia de v a si mesmo é 0. A continuación, escollemos dous vértices de V_1 , v_{11} e v_{12} . Agora, denotamos por P o camiño máis corto dende v ata v_{11} , por Q o camiño máis corto dende v ata v_{12} e por u o último vértice que teñen en común os dous camiños P e Q . Como P e Q son os camiños máis cortos, as seccións destes que van de v a u teñen a mesma lonxitude. Como a lonxitude de P e Q é par, entón a lonxitude das seccións de dende u a v_{11} e dende u a v_{12} respectivamente, teñen a mesma paridade, polo tanto, o camiño dende v_{11} a u (recorrendo P en dirección contraria) a v_{12} (recorrendo Q) ten lonxitude par.

Se v_{11} e v_{12} son adxacentes, o camiño anterior xunto coa arista que une estes vértices da lugar a un circuito de lonxitude impar, chegando así a unha contradicción. Polo tanto, non pode haber dous vértices en V_1 que sexan adxacentes. Procedendo do mesmo xeito en V_2 chegamos a que tampouco pode haber vértices adxacentes neste conxunto e probamos así que o grafo G é bipartito. [2]

□

Lema 2.9. *Dado un grafo G verificando $\delta(G) \geq 2$, entón G contén un ciclo.*

Demostración. Sexa $G = (V, E)$ un grafo con $\delta(G) \geq 2$. Denotamos por P calquera camiño maximal ³ en G :

$$P = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

Como P é un grafo maximal, todos os vértices que son adxacentes a v_1 pertencen a $\{v_2, \dots, v_n\}$. Dado que $\delta(G) \geq 2$, o grao de todos os vértices é polo menos 2. Polo tanto, v_1 ten polo menos dous vértices adxacentes a él en P . Podemos entón formar un ciclo usando v_1 e v_i , onde v_i é calquera vértice adxacente a v_1 . □

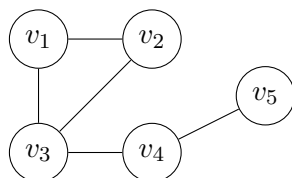
³Entendemos que un grafo é maximal con respecto a unha propiedade se non é posible agregar máis aristas de forma que se conserve esa propiedade.

2.2. Radio, diámetro e excentricidade

Presentamos agora algúns parámetros relacionados cos grafos que permiten resumir algunha información importante contida neles. Falamos só de grafos non dirixidos, pero estas definicións poden extenderse ao caso de grafos dirixidos.

Definición 2.10. Sexa G un grafo conexo e v un vértice de G . A **excentricidade** de v , $\varepsilon(v)$, é a máxima distancia dende v ata calquera outro vértice de G . O **diámetro** de G , $D = D(G)$, é o valor máximo da excentricidade de todos os vértices e, doutra banda, o **radio** de G , $R = R(G)$, é o mínimo da excentricidade de todos os vértices.

Exemplo 2.11. A continuación exemplifícanse os conceptos anteriores sobre un grafo non dirixido:



Vexamos as distancias de v_1 ao resto dos vértices: $D(v_1, v_2) = D(v_1, v_3) = 1$, $D(v_1, v_4) = 2$ e $D(v_1, v_5) = 3$. A excentricidade de v_1 é: $\varepsilon(v_1) = 3$. Se facemos o mesmo para todos os vértices temos que: Para v_2 : $D(v_2, v_1) = D(v_2, v_3) = 1$, $D(v_2, v_4) = 2$ e $D(v_2, v_5) = 3$. A excentricidade de v_2 é: $\varepsilon(v_2) = 3$. Para v_3 : $D(v_3, v_1) = D(v_3, v_2) = D(v_3, v_4) = 1$ e $D(v_3, v_5) = 2$. A excentricidade de v_3 é: $\varepsilon(v_3) = 2$. Para v_4 : $D(v_4, v_1) = 2$, $D(v_4, v_2) = 2$, $D(v_4, v_3) = D(v_4, v_5) = 1$. A excentricidade de v_4 é: $\varepsilon(v_4) = 2$. Para v_5 : $D(v_5, v_1) = D(v_5, v_2) = 3$, $D(v_5, v_3) = 2$ e $D(v_5, v_4) = 1$. A excentricidade de v_5 é: $\varepsilon(v_5) = 3$.

En consecuencia, o diámetro deste grafo é $D = 3$ e o radio é $R = 2$.

Teorema 2.12. Dado un grafo G , verificase:

$$R(G) \leq D(G) \leq 2R(G)$$

Demostración. Por definición, $D(G)$ é a máxima distancia entre calquera dous vértices en G . Supoñamos que son v_i e v_j con $i \neq j$ os vértices que verifican $D(v_i, v_j) = D(G)$ e que v_k é o vértice que verifica $\varepsilon(v_k) = R(G)$. Como R é a distancia entre dous vértices cúmplase necesariamente $R \leq D$. Por definición, $D(v_k, v_l) \leq \varepsilon(v_k) = R(G)$ para calquera vértice v_l . En consecuencia, $D(G) = D(v_i, v_j) \leq D(v_i, v_k) + D(v_k, v_j) \leq 2R(G)$. [2] \square

Definición 2.13. O **centro** $C(G)$ dun grafo G con radio R é o conxunto de vértices v de G que verifican $\varepsilon(v) = R$. O **contorno** dun grafo G $g(G)$, é a lonxitude do circuíto máis

curto contido en G e, do mesmo xeito, a **circunferencia** dun grafo G , $c(G)$, é a lonxitude do ciclo máis largo contido en G . Claramente, se estamos a falar de grafos acíclicos estes dous últimos conceptos non están definidos.

Exemplo 2.14. No grafo do exemplo anterior, cúmplase que $g(G) = c(G) = 3$. Ademais, $C(G) = \{v \in V \text{ tal que } \varepsilon(v) = R = 2\} = \{v_3, v_4\}$

Teorema 2.15. *Dado G un grafo que conteña ciclos. Tense:*

$$g(G) \leq 2D(G) + 1.$$

Demostración. Supoñamos $g(G) \geq 2D(G) + 2$. Consideremos o circuíto C de lonxitude $g(G)$ en G :

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_{g(G)}, v_1).$$

Supoñamos que $P = (v_1, w_2, w_3, \dots, w_t, v_{D(G)+2})$ é o camiño máis curto dende v_1 a $v_{D(G)+2}$. Pola definición de diámetro, P debe conter menos de $D(G) + 1$ aristas. Se P non contén ningún dos vértices $v_{D(G)+3}, v_{D(G)+4}, \dots, v_{g(G)}$, o circuíto:

$$v_1, w_2, w_3, \dots, w_t, v_{D(G)+2}, v_{D(G)+3}, v_{D(G)+4}, \dots, v_{g(G)}, v_1$$

ten lonxitude menor que $g(G)$. Doutro xeito, supoñamos que v_k é o vértice de menor índice de C que pertence a P . De novo,

$$v_1, w_2, w_3, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{g(G)}, v_1$$

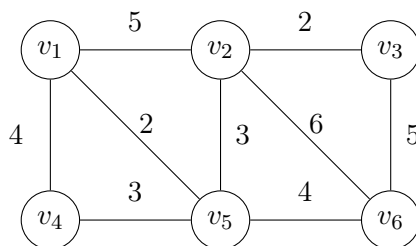
é un circuíto con lonxitude menor que $g(G)$. En calquera caso, chegamos a unha contradicción coa definición de $g(G)$. [2] □

2.3. Parámetros asociados aos vértices e ás aristas

En moitas aplicacións dos grafos vai ser necesario definir unha función positiva chamada **peso**, $w(v_i, v_j)$, asociada a cada arista (v_i, v_j) ou a cada vértice v_i . Por exemplo, nos problemas de fluxo en redes, estes parámetros poden representar o “custo” ou “beneficio” asociado ao paso do fluxo por ese vértice ou arista. Defínese o peso dunha cadea, ciclo, camiño ou circuíto como a suma dos pesos das aristas que os forman.

Definición 2.16. Dados dous vértices conectados v_i e v_j con $i \neq j$ dun grafo G , chámase **distancia ponderada** de v_i a v_j , $W(v_i, v_j)$, ao mínimo dos pesos de todas as cadeas que os unen. Este concepto está intimamente relacionado cun problema típico de investigación de operacións, o Problema do Camiño máis Curto, que presentamos máis adiante.

Exemplo 2.17. Sexa G un grafo con representación gráfica a que vemos a continuación. G ten como conxunto de vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e cada arista ten un peso asociado.



Neste exemplo, podemos ver que os pesos entre cada unha das aristas son: $w(v_1, v_2) = 5$, $w(v_1, v_4) = 4$, $w(v_1, v_5) = 2$, $w(v_2, v_3) = 2$, $w(v_2, v_5) = 3$, $w(v_2, v_6) = 6$, $w(v_3, v_6) = 5$, $w(v_4, v_5) = 3$ e $w(v_5, v_6) = 4$. Exemplificamos agora a distancia ponderada entre os vértices v_1 e v_6 , as posibles cadeas entre eles e os seus correspondentes pesos son: (v_1, v_2, v_3, v_6) con peso 12, (v_1, v_2, v_6) con peso 11, (v_1, v_2, v_5, v_6) con peso 12, (v_1, v_5, v_6) con peso 6, (v_1, v_5, v_2, v_6) con peso 11, $(v_1, v_5, v_2, v_3, v_6)$ con peso 12, (v_1, v_4, v_5, v_6) con peso 11, $(v_1, v_4, v_5, v_2, v_3, v_6)$ con peso 17, $(v_1, v_4, v_5, v_2, v_6)$ con peso 16. Polo tanto, a distancia ponderada, $W(v_1, v_6)$, é 6.

O **Problema do Camiño máis Curto** é un dos problemas máis coñecidos e estudados da teoría de grafos e consiste, como o propio nome indica, en atopar o camiño máis curto que una dous vértices dun grafo. Neste problema, cando nos referimos a camiño máis curto entendemos que a suma dos pesos das aristas que participan no camiño debe ser a mínima posible.

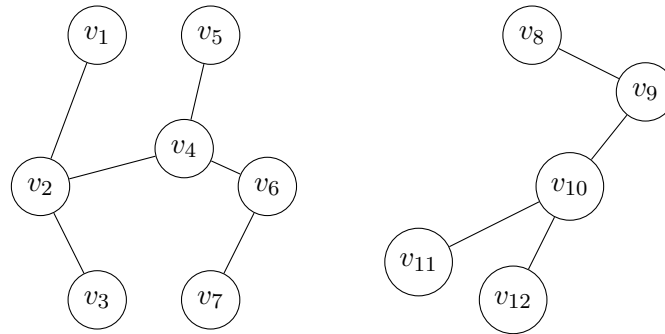
2.4. Árbores

Dentro dos grafos non dirixidos, hai un tipo deles, as árbores, que son de gran utilidade no ámbito da investigación de operacións.

Dado un grafo non dirixido G , dicimos que este grafo é unha **árbore** se é conexo e non contén ciclos. De acordo co teorema 2.6 unha árbore ten necesariamente $n - 1$ aristas.

Nunha árbore, chamamos **follas** aos vértices que teñen grao 1 e denominamos **bosque** a un grafo no cal as súas compoñentes conexas son árbores.

Exemplo 2.18. Representamos gráficamente un bosque con dúas árbores. A árbore 1 ten como follas os vértices v_1, v_3, v_5, v_7 e a árbore 2 ten como follas os vértices v_8, v_{11}, v_{12} .

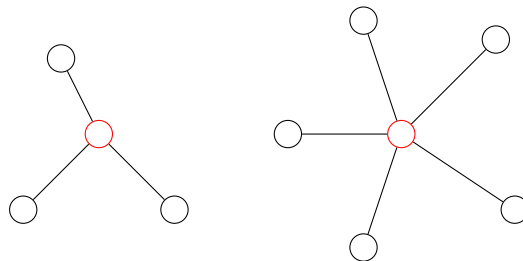


Definición 2.19. Unha **árbore de expansión** dun grafo G é unha árbore que é subgrafo de expansión de ese grafo G . Ademais, un **bosque maximal** é un grafo no que cada compoñente conexas é unha árbore de expansión.

Un problema clásico da investigación de operacións é o **Problema da árbore de expansión mínima**. Consiste en atopar unha árbore de expansión de modo que a suma dos pesos asociados as aristas que participan nel, sexa mínima.

Definición 2.20. Unha **estrela** é unha árbore cun vértice adxacente a todos os demais.

Nos grafos representados a continuación, debúxanse en vermello os vértices que son estrelas.



Proposición 2.21. Dado un grafo $G = (V, E)$ non dirixido, as seguintes propiedades son equivalentes:

- G é unha árbore.
- G é conexo e ten $n - 1$ aristas.
- G é acíclico e ten $n - 1$ aristas.
- G non ten ciclos e, se engadimos unha arista calquera, formarase un ciclo (e só un).
- G é conexo e, se eliminamos unha arista calquera, deixa de ser conexo.

f) Cada par de nodos de G están unidos por un único camiño.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Por definición de árbore, G é conexo e non ten ciclos e polo teorema 2.6 ten entón $n - 1$ aristas.

(a) \Rightarrow (c) Igual que antes, por definición de árbore, G é conexo e non ten ciclos e polo teorema 2.6 ten entón $n - 1$ aristas.

(a) \Rightarrow (d) Sexan v_i, v_j dous vértices de G , se engadimos a arista $e = \{v_i, v_j\}$ que os unen poden pasar dúas cousas: que os vértices foran adxacentes e entón ao engadir a arista formase un ciclo de lonxitude 2 ou que os vértices non foran adxacentes, e entón hai un único camiño que os une, así ao engadir esta nova arista o camiño pechase formando un ciclo.

(a) \Rightarrow (e) Sea $e = \{v_i, v_j\}$ a arista de G que eliminamos. Supoñamos que o grafo $G \setminus \{e\}$ é conexo, entón podemos atopar nel unha cadea que una v_i e v_j e, ao engadir a arista e de novo ao grafo, formariase un ciclo en G e chegamos así a unha contradicción con que G é unha árbore.

(a) \Rightarrow (f) Como G é unha árbore, é necesariamente conexo e polo tanto hai ao menos un camiño que une cada par de vértices. Supoñamos que hai máis dun camiño e cheguemos a unha contradicción. Se existen dous camiños distintos que unen dous vértices, e os conxectamos o resultado é un ciclo pero por ser G unha árbore non pode ter ciclos, polo tanto chegamos a unha contradicción con que en G hai vértices unidos por máis dun camiño.

(f) \Rightarrow (a) Supoñamos que cada par de vértices están conectados por un único camiño e vexamos que G é unha árbore. Verifícase que G é conexo porque cada par de vértices están unidos por unha cadea e, ademais, é acíclico xa que se existise un ciclo existirían dous vértices unidos por máis dun camiño. [8] \square

Corolario 2.22 (Teorema ou Fórmula de Cayley). *O número de bosques con n vértices e s , $1 \leq s \leq n$, compoñentes conexas ven dado por:*

$$F(n, s) = sn^{n-s-1}. \quad (2.2)$$

En particular, o número de árbores en n vértices é:

$$F(n, 1) = n^{n-2}. \quad (2.3)$$

Demostración. A demostración da ecuación 2.2 baséase na seguinte fórmula de recurrencia:

$$F(n, s) = \sum_{d=0}^{n-s} \binom{n-s}{d} F(n-1, s+d-1) \quad (2.4)$$

con $n \geq 1$ e $1 \leq s \leq n$, onde $F(1, 1) = 1$ e $F(n, 0) = 0$ para $n \geq 1$.

Para probar a ecuación 2.4 consideramos un bosque con n vértices, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, e s

compoñentes conexas e onde os vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ pertencen a compoñentes conexas distintas. Neste bosque o vértice v_1 debe ser de grao $d = 0, \dots, n-s$, é dicir, v_1 debe ser adxacente a d vértices en $\{v_{s+1}, \dots, v_n\}$. Chamemos a esos d vértices "secundarios". Podemos escoller d vértices secundarios entre os $n-s$ vértices de $\binom{n-s}{d}$ maneiras. Eliminamos agora o vértice v_1 e as d aristas incidentes nel. O grafo resultante é un bosque con conxunto de vértices $\{v_2, \dots, v_n\}$, $s+d-1$ compoñentes conexas e d vértices secundarios que pertencen todos a compoñentes conexas distintas. O número de esos bosques é $F(n-1, s+d-1)$. Se engadimos $\binom{n-s}{d}F(n-1, s+d-1)$ para todos os posibles valores de d , obtemos $F(n, s)$ e queda probada a ecuación 2.4.

Por indución a partir da ecuación 2.4 probamos a ecuación 2.2.

Se $n = 1$ entón 2.2 verificase trivialmente. Supoñamos agora que $F(n, s) = i(n-1)^{n-i-2}$ para $1 \leq i \leq n-1$ e $n > 1$. Entón, por 2.4,

$$F(n, s) = \sum_{d=0}^{n-s} \binom{n-s}{d} (s+d-1)(n-1)^{n-s-d-1} = sn^{n-s-1} \quad (2.5)$$

para $1 \leq s \leq n$ e $n > 1$. Na ecuación 2.5 podemos escribir $d \binom{n-s}{d} = (n-s) \binom{n-s-1}{d-1}$ para $d \geq 1$ e aplicando o teorema binomial queda probado 2.2. \square

Capítulo 3

Ciclos eulerianos y circuitos hamiltonianos

Neste capítulo falaremos de dous tipos de cadeas determinados, os ciclos eulerianos e os circuitos hamiltonianos. Ambos foron creados pola necesidade de resolver problemas da vida cotiá, como atravesar un número determinado de pontes ou viaxar entre unhas determinadas cidades, e constitúen hoxe en día unha ferramenta fundamental para resolver problemas da investigación de operacións.

3.1. Ciclos eulerianos

A cidade de Königsberg, chamada actualmente Kaliningrado, na antiga Prusia, estaba atravesada polo río Pregolya, que dividía dita cidade en catro partes. Para comunicar todas as partes da cidade construíronse sete pontes e moitos preguntáronse se era posible, partindo dunha das partes da cidade, percorrer todas as pontes unha única vez e chegar de novo ao punto de partida.

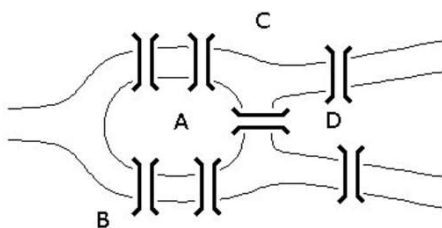
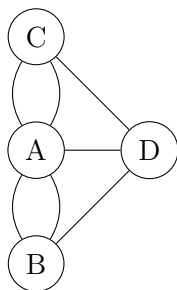


Figura 3.1: Esbozo do mapa de la ciudad de Königsberg

Os primeiros escritos sobre teoría de grafos foron publicados por Euler en 1736 e trataban precisamente desta cuestión, do **Problema das Pontes de Königsberg**.

Cunha primeira ollada xa parece imposible atravesar todas as pontes da forma mencionada antes. Por exemplo, supoñamos que comezamos na parte B da cidade que ten tres pontes, se usamos unha delas para entrar e a outra para saír de B , quédanos unha ponte sen usar: se a usamos para entrar nesta parte, xa non podemos saír a non ser que crucemos algunha ponte dúas veces, polo tanto, deberíamos acabar na parte B e se usamos esta terceira ponte para saír de B , esta debería ser necesariamente a parte na que comezamos. Este razoamento pódese aplicar ao resto de partes, A , C e D , xa que todas teñen un número impar de pontes, pero é imposible que todas as partes sexan a inicial ou a final.

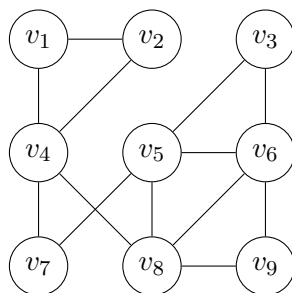
Resumimos agora graficamente a información do mapa das pontes de Königsberg, onde os vértices A , B , C e D correspóndense con cada unha das partes da cidade e as aristas representan as pontes que as unen. En consecuencia, pódese traducir a pregunta: somos capaces de, partindo dunha das partes da cidade, percorrer todas as pontes unha única vez e volver á parte inicial? en: podemos encontrar unha secuencia de aristas que pase por todas as aristas do multigrafo unha única vez e empece e remate no mesmo vértice? Un multigrafo que verifica esta condición recibe o nome de multigrafo euleriano.



Dado un grafo G non dirixido, unha **cadea euleriana** neste grafo é unha cadea que contén todas as aristas de G exactamente unha vez. Se esta cadea é pechada, é dicir, o primeiro e o último vértice coinciden, entón chámase **ciclo euleriano**. Un **grafo euleriano** é aquel que contén un ciclo euleriano.¹

Exemplo 3.1. Sexa $G = (V, E)$ o grafo dado a continuación, vexamos que é un grafo euleriano, xa que podemos atopar nel un ciclo euleriano, por exemplo, con vértice inicial e final v_1 . O ciclo euleriano sería: $\{v_1, v_4, v_7, v_5, v_3, v_6, v_9, v_8, v_6, v_5, v_8, v_4, v_2, v_1\}$

¹A definición de grafo euleriano pode extenderse ao caso dun multigrafo.



Lema 3.2. *Sexa G un grafo no que cada vértice é de grao par, entón este pode ser separado en ciclos onde ningún ciclo ten una arista en común con ningún outro.*

Demostración. Dado un grafo $G = (V, E)$ supoñamos que todos os vértices teñen grao par. Podemos formar un ciclo empezando nun vértice e percorrendo todos os vértices do grafo (como todos os vértices teñen grao par, se usamos unha arista para “entrar” nun vértice, sempre temos outra para “sair”). Como G é un grafo finito nalgún momento regresamos ao vértice inicial. Podemos denotar ese ciclo como C_1 .

Se eliminamos agora o ciclo C_1 do grafo (é dicir, eliminamos de G todas as aristas que participan no ciclo) obtemos un subgrafo G' . G' pode ser ou non conexo. Cada vértice de G' segue tendo grao par, xa que por cada vez que participou no ciclo eliminamos dúas aristas de G . Así un ciclo C_2 pode obterse do mesmo xeito que o anterior e o proceso repítese ata que non quedan máis aristas. \square

Teorema 3.3 (Teorema de Euler). *Un grafo conexo $G = (V, E)$ é euleriano se e só se todos os seus vértices teñen grao par.*

Demostración. Dado un grafo conexo $G = (V, E)$, para cada $m \geq 0$, establecemos como $S(m)$ a afirmación: G ten m aristas e todas elas teñen grao par, entón G é euleriano. Para probar este resultado procedemos por inducción en $S(m)$.

Se $m = 0$, $S(m)$ non ten aristas. Dado que G é conexo, a única forma de que un grafo conexo non teña aristas, é que só teña un vértice, que denotaremos por v_1 . Como $d(v_1) = 0$, que é par, G é euleriano.

Dado $k \geq 1$, supoñamos que se verifican $S(1), S(2), \dots, S(k-1)$, queremos entón probar $S(k)$. Sexa G un grafo conexo con k aristas e con todos os vértices de grao par. Como G é conexo non ten vértices aislados, polo tanto, $\delta(G) \geq 1$ e como o grao dos vértices ten que ser de grao par, $\delta(G) \geq 2$ e polo visto no Lema 2.9, G contén un ciclo, e o denominamos C . Construimos agora un subgrafo G' de G eliminando o ciclo C . G' pode ser ou non conexo. Podemos dicir que G' é a unión das compoñentes conexas G'_1, G'_2, \dots, G'_t . O grao de cada H_i con $i = 1 \dots t$ ten que ser par xa que os graos só poden ser 0 ou 2.

Aplicando a hipótese de inducción a cada H_i temos que $S(m_1), \dots, S(m_t)$, sendo m_i o número de aristas de H_i , e cada H_i vai ter un ciclo euleriano, que imos chamar C_i .

Estamos en situación de crear un ciclo euleriano en G unindo o ciclo C e os ciclos C_i . Comezamos en calquer vértice de C_i e atravesamos este ciclo ata chegar a algún H_i . Agora atravesamos C_i e continuamos por C ata chegar ao seguinte H_i .

Entón, séguese que G é euleriano e queda completado así o proceso de inducción de xeito que se verifica $S(m)$ para $m > 0$.

□

Un exemplo típico relacionado cos ciclos eulerianos é o **Problema do Carteiro Chino** (CPP). Este problema foi plantexado polo matemático chino Kwan Mei-Ko en 1960 nun artigo publicado nun diario chino e representa o traballo dun carteiro que ten que repartir a correspondencia pasando ao menos unha vez por cada rúa e volver ao oficina de correos intentando percorrer a menor distancia posible. Se representamos unha cidade cun grafo G no que cada arista é unha das rúas da cidade e ten un peso asociado que representa a distancia de dita rúa, este problema consiste en atopar a cadea pechada máis curta de forma que pase ao menos unha vez por cada arista do grafo, é dicir, consiste en atopar o ciclo euleriano con menor peso. Este problema pode formularse sobre grafos dirixidos, non dirixidos e tamén sobre grafos mixtos.

3.2. Circuitos hamiltonianos

En 1857 o matemático irlandés sir William Rowan Hamilton propuso un problema que consistía en viaxar a 20 cidades do mundo, situadas como os vértices dun dodecaedro regular, seguindo as aristas deste. Este problema recibe o nome de **Xogo do Icosaedro**.

Sexa G o grafo que representa un dodecaedro regular con conxunto de vértices V representando as cidades, $|V| = 20$. Este xogo consiste en, empezando nun vértice, atopar unha secuencia de aristas que pase por todos os vértices do grafo ao menos unha vez e regrese logo ao vértice inicial. Un grafo no que se pode atopar unha secuencia desa clase chámase grafo hamiltoniano.

Dado un grafo G , un **camiño hamiltoniano** é un camiño que contén todos os vértices de G ao menos unha vez. Se este camiño hamiltoniano verifica que o primeiro e o último vértice coinciden, entón recibe o nome de **circuíto hamiltoniano**. Un grafo que contén un circuíto hamiltoniano é un **grafo hamiltoniano**.

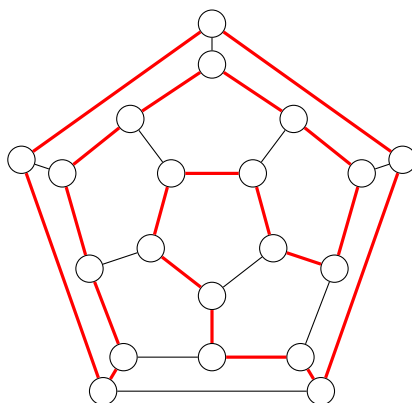
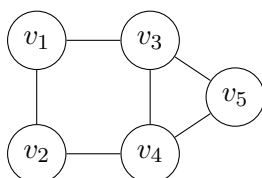


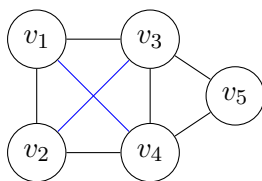
Figura 3.2: Un grafo G que representa un dodecaedro regular e ten sinalado en cor vermella un circuíto hamiltoniano

Definición 3.4. Dado un grafo G con n vértices, constrúese a **clausura** de G , $[G]$, do seguinte xeito: se G contén dous vértices non adxacentes v_i e v_j verificando $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ engadimos ao grafo a arista $\{v_i, v_j\}$ e repetimos este proceso ata que calesquera dous vértices non adxacentes verifiquen $d(v_i) + d(v_j) < n$. O grafo resultante é a clausura de G .

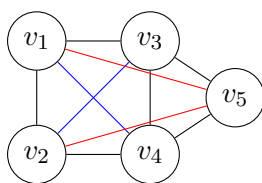
Exemplo 3.5. Vexamos como construír a clausura do grafo G con representación gráfica:



En primeiro lugar os graos dos vértices de G son: $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 2$. Construímos agora a clausura: empezamos vendo canto suman os graos de v_1 e dos vértices que non son adxacentes a él: $d(v_1) + d(v_4) = 5 \geq n = 5$ e $d(v_1) + d(v_5) = 4 \not\geq n$. Polo tanto, debemos engadir unha arista que una v_1 e v_4 . Facemos o mesmo para v_2 : $d(v_2) + d(v_3) = 5 = n$ e $d(v_2) + d(v_5) = 4 \not\geq n$. Polo tanto debemos engadir unha arista que una v_2 e v_3 . Así, xa temos a suma dos graos dos vértices non adxacentes en G . No seguinte debuxo representamos as dúas aristas que acabamos de engadir en cor azul.



Ao engadir estas novas aristas, temos que $d(v_1) + d(v_5) = 5 = n$ e $d(v_2) + d(v_5) = 5 = n$, polo tanto debemos engadir dúas novas aristas, unha que una v_1 e v_5 e outra que una v_2 e v_4 . No debuxo represéntanse en cor vermello.



Polo tanto, xa temos construída a clausura de G .

Teorema 3.6. *Un grafo $G = (V, E)$ é hamiltoniano se e só se a súa clausura $[G]$ é hamiltoniana.*

Demostración. É claro que se G é hamiltoniano a clausura $[G]$ tamén o é. Vexamos agora que se a clausura $[G]$ é hamiltoniana tamén o é G , para iso imos ver que engadir unha arista $e = \{v_i, v_j\}$ entre dous vértices v_i e v_j non adxacentes que verifican $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ non afecta ao carácter hamiltoniano do grafo. É dicir, que se $G + e$ é hamiltoniano, G tamén o é. Se $G + e$ contén un ciclo hamiltoniano, C , poden darse dous casos: que a arista e non participe no ciclo, e entón C é tamén un ciclo hamiltoniano en G , e que a arista e si participe no ciclo C , entón non é tan doado atopar un ciclo hamiltoniano en G , pero si hay un camiño hamiltoniano $C - e$ en G . Denotamos os vértices do camiño $C - e$ por $(u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$ en G . Como o camiño debe conter a todos os vértices de G , verificábase necesariamente que todos os vértices adxacentes a u e v pertencen ao camiño e como u e v non son adxacentes, os vértices adxacentes a eles teñen que pertencer a (v_1, \dots, v_{k-1}) . Consideramos agora un conxunto A formado polos vértices adxacentes a u , entón $A \subseteq (v_1, \dots, v_{k-1})$ e $|A| = d(u)$ e un conxunto B de vértices v_i verificando que v_{i-1} e v son adxacentes, entón $B \subseteq (v_1, \dots, v_k)$ e $|B| = d(v)$. Sendo entón A e B dous subconxuntos de (v_1, \dots, v_k) de tamaño $d(u)$ e $d(v)$ e como $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ necesariamente A e B son non disxuntos, existindo así un índice i para o cal v_i e u son adxacentes e v_{i-1} e v son adxacentes. Podemos construír así un ciclo hamiltoniano en G da forma:

$$(u, v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{k-1}, v_{k-2}, \dots, v_i, v_0)$$

□

Corolario 3.7. *Dado un grafo $G = (V, E)$ con $|V| = n$, $n \geq 3$. Se $d(v_i) + d(v_j) \geq n$ sendo v_i e v_j cualesquiera dous vértices non adxacentes de G , entón G é hamiltoniano.*

Demostración. Supoñamos que o resultado non se cumpre. Escollemos un número de vértices n calquera tal que sirva como contraexemplo e escollemos un grafo G con n vértices tal que o número de aristas sexa máximo entre os grafos que sirven como contraexemplos, é dicir, que se engadimos algunha arista máis ao grafo, este pasa a ser hamiltoniano. Tomamos dous vértices non adxacentes x e y . Pola condición de maximalidad de G , se engadimos a G a arista que une eses dous vértices temos un novo grafo G' que pasa a ser hamiltoniano. Entón, a arista que une x e y pertence a todos os circuitos hamiltonianos que se podan formar no grafo G' , xa que doutro modo, o ciclo tamén sería hamiltoniano en G . Por hipótese, $d(x) + d(y) \geq n$. Tomamos entón un ciclo hamiltoniano en G' , digamos:

$$x, v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, y$$

Se v_i é adxacente a x , entón v_{i-1} non pode ser adxacente a y , xa que se eso pasara teríamos:

$$x, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, y, v_{n-2}, v_{n-3}, \dots, v_i$$

que podería ser un ciclo hamiltoniano en G . Polo tanto, cada un dos vértices adxacentes a x en G teñen q ser precedidos no ciclo por vértices que non sexan adxacentes a y e ningún desos vértices pode ser y . Polo tanto, en G hai como mínimo $d(x) + 1$ vértices non adxacentes a y . Polo tanto, en G hai polo menos $d(x) + d(y) + 1$ vértices, entón:

$$d(x) + d(y) \leq n - 1$$

e chegamos a unha contradicción. [2]

□

Teorema 3.8. *Sexa $G = (V, E)$ un grafo bipartito con $|V| = n$, $V = V_1 \cup V_2$ e $|V_1| = m_1$ e $|V_2| = m_2$. G contén un circuito hamiltoniano só se $m_1 = m_2$ e contén un camiño hamiltoniano só se $|m_1 - m_2| \leq 1$.*

Demostración. Supoñamos que o grafo G contén un camiño hamiltoniano:

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

Ademais, supoñamos que $v_1 \in V_1$, necesariamente, $v_2 \in V_2$, $v_3 \in V_1$ e así sucesivamente. Como un camiño hamiltoniano ten que conter todos os vértices, tense que:

$$V_1 = \{v_1, v_3, \dots\} \text{ e } V_2 = \{v_2, v_4, \dots\}$$

Se n é par, os conxuntos V_1 e V_2 conteñen cada un $\frac{n}{2}$ elementos; se n é impar, $|V_1| = \frac{n+1}{2}$ e $|V_2| = \frac{n-1}{2}$. En ambos casos, tense que $|m_1 - m_2| \leq 1$.

Supoñamos agora que o grafo G contén un circuito hamiltoniano:

$$v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$$

se $v_1 \in V_1$, necesariamente $v_n \in V_2$, polo tanto $|V_1| = |V_2| = \frac{n}{2}$. [2] □

Un exemplo típico no que se emplean os circuítos hamiltonianos é o **Problema do Viaxante** (TSP). Este problema foi estudado por primera vez nos anos 1930s por matemáticos de Viena e de Harvard e consiste en, dada unha lista de cidades, atopar a ruta máis corta que permite visitar cada cidade ao menos unha vez e volver á cidade de orixe. Isto representase como un grafo G no que os vértices son as cidades e as aristas teñen un peso asociado que se corresponde ca distancia entre as cidades que une. Atopar unha solución a este problema equivale a atopar un circuítu hamiltoniano.

Capítulo 4

Grafos dirixidos

Neste capítulo falarase dos grafos dirixidos, xa definidos no Capítulo 1. Veremos algunhas definicións que antes só demos no caso de grafos non dirixidos, así como as propiedades máis importantes destes grafos.

4.1. Definición e conceptos básicos

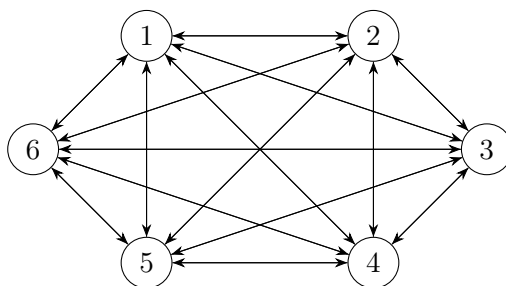
Como xa vimos previamente, un **grafo dirixido** é aquel no que $E \subset V \times V$, é dicir, cada arista é un par ordeado de vértices.

Dada unha arista $e = (v_i, v_j)$ denomínase **vértice inicial** ou **cola** a v_i e **vértice final** ou **cabeza** a v_j .

A continuación introdúcense algúns tipos de grafos dirixidos:

En primeiro lugar, un tipo de grafo no que están presentes todas as aristas.

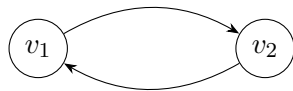
- **Grafo completo** : é un grafo no que cada par de vértices v_i e v_j están unidos por dous aristas (v_i, v_j) e (v_j, v_i) , é dicir, todos os aristas posibles están presentes.



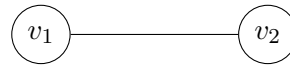
O número máximo de aristas que pode haber nun grafo con n vértices é, no caso dun grafo dirixido, $n(n - 1)$ se non se permiten lazos e n^2 se se permiten.

A partir dun grafo dirixido podemos construír un grafo non dirixido.

- **Grafo subxacente non dirixido dun grafo dirixido:** é o grafo que resulta de ignorar todas as direccións das aristas e considerando ao sumo unha arista entre cada par de vértices.



Un grafo dirixido G



O grafo subxacente non dirixido de G

A continuación presentamos un grafo no que o conxunto de vértices pode separarse en dous subconxuntos disxuntos.

- **Grafo bipartito:** é un grafo dirixido $G = (V, E)$ onde o conxunto de vértices pode separarse en dous subconxuntos disxuntos $V = V_1 \cup V_2$ e ademais non pode ocorrer que exista unha arista $e = (v_i, v_j)$ con $v_i, v_j \in V_1$ nin unha arista $e = (w_i, w_j)$ con $w_i, w_j \in V_2$, é dicir, non poden existir aristas que teñan ambos vértices en V_1 ou ambos vértices en V_2 , ademais, os vértices iniciais das aristas teñen que pertencer ao mesmo subconxunto, digamos V_i , e os vértices finais deben pertencer todos ao mesmo subconxunto, digamos V_j , pero distinto ao anterior, $i \neq j$.

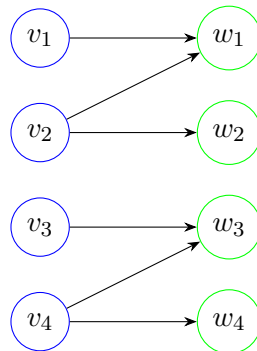


Figura 4.1: Un grafo bipartito dirixido onde o conxunto de vértices V sepárase en subconxuntos V_1 en cor azul e V_2 en cor verde.

Os grafos bipartitos son de gran utilidade no ámbito da investigación de operacións, sendo utilizados en problemas como, por exemplo, o problema de asignación ou o problema de transporte. Para a formulación destes dous problemas imos precisar duns parámetros asociados aos nodos ou as aristas, que se denominan pesos e aos

que lle dedicaremos unha sección máis adiante, estos pesos representarían os custos da realización de unha determinada tarefa. O **Problema de Asignación** consiste en dados un conxunto de recursos (persoas, máquinas, ...) e un conxunto de tarefas, atopar a forma de asignar a cada recurso unha tarefa de xeito que o custo sexa mínimo, asumindo que cada recurso debe destinarse unicamente a unha tarefa e que cada tarefa ten que ser realizada por un só dos recursos. Este problema é equivalente a atopar a asignación óptima con peso mínimo. O **Problema de Transporte** consiste, por exemplo, en enviar unhas unidades de produto dende un conxunto de orixes a un conxunto de destinos. Trátase de determinar o número de unidades que se debe enviar dende cada punto de orixe a cada punto de destino de xeito que o custo sexa mínimo.

No grafo bipartito que representamos a continuación, podemos exemplificar ambos problemas.

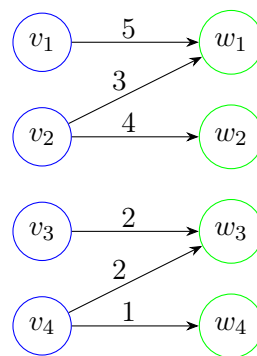


Figura 4.2: Un grafo bipartito onde o conxunto de vértices V sepárase en subconxuntos V_1 en cor azul e V_2 en cor verde e onde cada arista ten un parámetro asociado, o coste.

No problema de asignación o conxunto de vértices V_1 representaría o conxunto de recursos mentres que o conxunto V_2 serían as tarefas, ademais, as aristas unen cada recurso coa tarefa ou tarefas que este pode realizar e os pesos das aristas representan o custo que ten que un determinado recurso realice unha determinada tarefa. No problema de transporte sería practicamente o mesmo, o conxunto V_1 serían os orixes e o V_2 representaría os destinos, ademais, os pesos serían os custos de enviar o produto dun orixe a un destino.

Igual que no caso dos grafos non dirixidos, tamén podemos asociar parámetros ás aristas.

No caso dos grafos dirixidos, un **subgrafo** $G' = (V', E')$ dun grafo dirixido $G = (V, E)$ é

un grafo dirixido cuxo conxunto de vértices V' é un subconxunto dos de G e o conxunto de aristas E' son aristas de G que unen vértices de G' . Un **subgrafo de expansión** $G' = (V', E')$ dun grafo dirixido G é un subgrafo que verifica $V' = V$ e as aristas son aristas de G que unen vértices de G' .

Definición 4.1. Sexa (e_1, e_2, \dots, e_r) una secuencia de aristas distintas en G . Se existen vértices (v_0, v_1, \dots, v_r) tales que:

$$a_l = (v_{l-1}, v_l) \text{ para } l = 1, 2, \dots, r$$

dicimos que a secuencia é unha **cadena**. Se ademais todos os vértices son distintos, entón é un **camiño**. Se $v_0 = v_r$ entón é unha cadena pechada ou **ciclo**. Un camiño pechado é un **circuito**.

Ademais, dada a secuencia de vértices correspondente (v_0, v_1, \dots, v_n) pode pasar que (v_{i-1}, v_i) ou (v_i, v_{i-1}) con $i = 0, \dots, n$ sexa unha arista en G , no primeiro caso denomínase *arista cara diante* e no segundo caso *arista cara atrás*.

Definición 4.2. Se G un grafo dirixido, decimos que un vértice v_j é **accesible** dende un vértice v_i se existe unha secuencia de aristas (e_1, e_2, \dots, e_n) verificando $e_k = (v_{k-1}, v_k)$ con vértice inicial v_i e vértice final v_j . Cada vértice é accesible dende sí mesmo.

Un vértice chamase **raíz** se é accesible dende calquera outro vértice. Dicimos que un grafo é **conexo** se para cada par de vértices distintos existe unha cadea que os une.

Un grafo dirixido denomínase **árbol** se é conexo e non contén ciclos. Unha **árbore de expansión** dun grafo dirixido G é unha árbore que é subgrafo de expansión de G . Ademais, se G ten unha raíz r , decimos que G é unha **árbore dirixida**, ou **ramificación con raíz** r . Do mesmo xeito, un **bosque dirixido** é un grafo dirixido no que as súas compoñentes conexas son árbores dirixidas.

4.2. Matrices de incidencia

Unha particularidade dos grafos dirixidos en contraposición cos non dirixidos é, como vimos previamente, que a súa información pode resumirse en matrices de incidencia. Por ese motivo, nesta sección presentamos algúns resultados relacionados coas matrices de incidencia que axudan a caracterizar os grafo que representan.

Lema 4.3. Dado G un grafo dirixido con n vértices. A matriz de incidencia, B , de G ten rango como máximo $n - 1$.

Demostración. Ao sumar todas as filas de B chegamos a unha fila onde todas as entradas son 0. [1] \square

Teorema 4.4. *Un grafo dirixido G con matriz de incidencia B é un bosque se e só se as columnas de B son linealmente independentes.*

Demostración. Vexamos que G contén un ciclo se e só se as columnas de B son linealmente dependentes.

“ \Rightarrow ” Supoñamos que C é un ciclo en G con vértices $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ e aristas $\{e_1, \dots, e_k\}$, e as columnas de B que corresponden a esas aristas son c_1, c_2, \dots, c_k . Se tomamos $x_i = 1$ se e_i é unha arista “cara diante” e $x_i = -1$ se e_i é unha arista “cara atrás” no ciclo C (para $i = 1, \dots, k$), entón a combinación $x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_kc_k$ é igual a 0.

“ \Leftarrow ” Supoñamos que as columnas de B son linealmente dependentes. Entón dadas as columnas c_1, \dots, c_k de B e os enteros $x_1, \dots, x_k \neq 0$ tense que $x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_kc_k = 0$. Tomamos E' como o conxunto de aristas que corresponden as columnas c_1, \dots, c_k e V' o conxunto de vértices incidentes nas aristas de E' e escribimos o grafo $G' = (V', E')$. Tense entón que no grafo subxacente non dirixido correspondente todos os vértices teñen ao menos grao 2, e, polo lema 2.5 vemos que ningunha das compoñentes conexas do grafo subxacente non dirixido é un árbol, en consecuencia, todas as compoñentes conexas do grafo subxacente non dirixido conteñen ciclos e este grafo non dirixido non pode ser un bosque. [1] \square

Teorema 4.5. *Dado un grafo dirixido G con n vértices e p compoñentes conexas, entón a matriz de incidencia B de G ten rango $n - p$.*

Demostración. En consecuencia do Teorema 4.4, o rango de B é o número de aristas dun bosque maximal, T , contido en G . Se $p = 1$ verificase que T é unha árbore e ten exactamente $n - 1$ aristas, entón B ten rango $n - 1 = n - p$.

Supoñamos agora que $p \neq 1$. Entón G pode separarse nas súas compoñentes conexas e entón, T é unión disxunta de p árbores. Supoñamos que esos árbores teñen un número n_1, n_2, \dots, n_p de vértices respectivamente. Entón a matriz de incidencia B de G ten rango $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_p - 1) = n - p$. [1] \square

Definición 4.6. Unha matriz dise **unimodular** se é unha matriz de enteros cuxo determinante é $+1$ ou -1 . E unha matriz dise **totalmente unimodular** se é unha matriz de enteros para a cal cada submatriz cadrada ten determinante $0, +1$ ou -1 .

Teorema 4.7. *Dada B a matriz de incidencia dun grafo dirixido G . Entón B é totalmente unimodular.*

Demostración. Tomamos calquera submatriz cadrada, B' , de B con k filas e columnas. Usamos inducción en k . Se $k = 1$, B' vai ter determinante $0, +1$ ou -1 trivialmente. Tomamos agora $k \neq 1$. Se B' contén unha columna de ceros, entón $\det B' = 0$. Asumimos agora que todas as columnas de B' conteñen dúas entradas distintas de cero e, nese caso, B' define un grafo dirixido G' con k vértices e aristas. Entón, polo teorema 4.4 as columnas de B' son linealmente dependentes e de novo $\det B' = 0$. Por último, asumimos que hai unha columna de B' que ten exactamente unha entrada distinta de cero. Entón calculamos o determinante de B' expandíndoa con respecto a dita columna. Obtense entón un factor ± 1 multiplicado polo determinante dunha $((k-1) \times (k-1))$ -submatriz cadrada B'' , e o resultado seguese por inducción. [1] \square

Corolario 4.8. *Dado un grafo dirixido G con n vértices e $n-1$ aristas. Dada M a matriz construída a partir da matriz de incidencia, B , de G eliminando unha fila arbitrariamente. Se G é un árbol, entón $\det M = +1$ ou $\det M = -1$, noutro caso $\det M = 0$.*

Demostración. A fila que se elimina de B é necesariamente unha combinación lineal doutras filas de B . Polo teorema 4.5 M ten rango $n-1$ se e só se G é un árbol. E, en consecuencia do teorema 4.7, tense o resultado. [1] \square

Definición 4.9. Un **árbol de expansión** dun grafo dirixido G é un subgrafo T de G que verifica que $|T|$ é árbol de expansión de $|G|$.

Teorema 4.10. *Dada unha matriz M construída a partir da matriz de incidencia de G eliminando unha fila arbitraria, o número de árbores de expansión de G ven dado por $\det(MM^T)$.*

Demostración. Sexa n o número de vértices de G . Para calquera subconxunto S formado polos índices de $n-1$ columnas, denotamos por M_s á matriz formada polas $n-1$ columnas de M que corresponden a S . Entón temos que:

$$\det(MM^T) = \sum_S \det(M_s M_s^T) = \sum_S (\det M_s)^2$$

sendo a primeira igualdade consecuencia do teorema de Cauchy-Binet ¹. Polo corolario 4.8, $\det B_S \neq 0$ se e só se as aristas de G que corresponden a S forman un árbol, ademais, nese caso $(\det M_s)^2 = 1$ e tense o resultado. [1] \square

¹Pódese ver unha demostración do Teorema de Cauchy-Binet en [3]

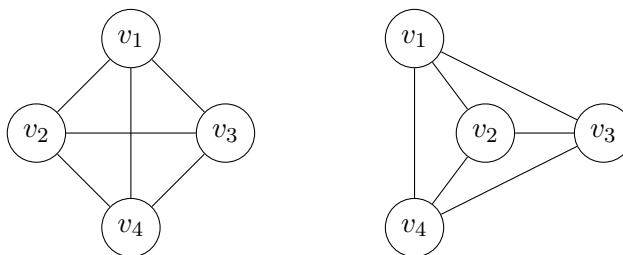
Capítulo 5

Grafos planos

Como xa vimos antes, algúns grafos contan coa propiedade de poder representarse sobre un plano sen que as súas aristas se corten, neste capítulo estudaremos algúns resultados sobre estos que teñen certo interese.

5.1. Introducción

Un grafo pode representarse gráficamente nun plano de distintas formas, por exemplo:

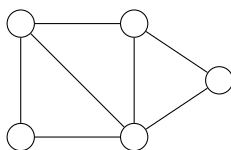


A información que conteñen ambas gráficas é a mesma, xa que representan o mesmo grafo, pero existe unha diferenza notable entre ambos: no da parte esquerda hai dúas aristas que se cortan, mentres que no da dereita non. Estes grafos que poden representarse nun plano sen que as súas aristas se corten reciben o nome de **grafos planos**. O **número de cruce** dunha representación gráfica dun grafo é o número de pares de aristas que se cortan. Nun grafo plano verificase necesariamente que o número de cruce é 0.

5.2. Fórmula de Euler

Xa estudamos parte da contribución do matemático alemán Leonhard Euler á teoría de grafos co problema dos pontes de Königsberg, pero esta non acabou ahí. Euler intentou, con éxito, establecer unha relación entre os vértices, as aristas e as caras dun grafo. Cando falamos de caras referímonos ás rexións nas que se divide o plano nunha representación gráfica dun grafo conexo. É preciso tamén definir unha cara exterior que se corresponde co plano exterior da representación.

Exemplo 5.1. Dado un grafo G con representación gráfica:



O número de vértices de este grafo é: $V = 5$, o número de aristas é: $E = 7$ e o número de caras é: $F = 4$, as tres rexións nas que divide o plano máis a cara exterior.

No ano 1750, Euler demostró o seguinte resultado, que dá a relación entre as aristas, os vértices e as caras dun grafo:

Teorema 5.2. *Dado un grafo G , supoñamos que a súa representación gráfica nun plano ten un número v de vértices, e de aristas e f de caras. Verifícase entón:*

$$v - e + f = 2$$

Demostración. Procedemos por inducción no número de aristas. Se $e = 0$ o grafo necesariamente ten $v = 1$ e $f = 1$, polo tanto se verifica o teorema. Se $e = 1$ ou $e = 2$ temos un camiño de $e + 1$ vértices e 1 cara. Supoñemos entón que o resultado se verifica para grafos con un número de aristas E ou menor, e tomamos entón $e = E + 1$. Se G é unha árbore, entón $v = e + 1$ e $f = 1$, polo tanto,

$$v - e + f = e + 1 - e + 1 = 2$$

xa que doutro xeito G contería un ciclo.

Escollemos unha das aristas que participa no ciclo, esta separa dúas caras (unha delas pode ser a cara exterior), polo tanto se eliminamos esta arista obtemos un novo grafo que ten unha cara e unha arista menos que o inicial. Tería entón E aristas e en termos do grafo orixinal,

$$v - (e - 1) + (f - 1) = 2$$

e séguese o resultado. [2]

□

Corolario 5.3. *Todas as representacións nun plano dun mesmo grafo plano conexo teñen o mesmo número de caras.*

Demostración. Supoñamos que o grafo ten e aristas e v vértices e que ten dúas representacións nun plano con número de caras f e f' respectivamente. Entón,

$$v - e + f = 2 = v - e + f'$$

de onde temos $f = f'$. [2] □

En consecuencia do corolario anterior, falamos das caras dun grafo e non das caras dunha representación nun plano.

Cando falamos de grafos planos podemos establecer unha serie de restriccións sobre o número de vértices, aristas e caras. Vexamos algunha a continuación:

Teorema 5.4. *Dado un grafo plano conexo G con e aristas, v vértices e f caras e no cal ningunha das compoñentes conexas ten menos de 3 vértices, verificase:*

$$3f \leq 2e$$

Demostración. O resultado se verifica claramente se $f = 1$ e $e = 2$, polo tanto podemos supoñer que cada cara de G ten 3 aristas. A *matriz de adyacencia arista-cara*, A , de G é unha matriz de dimensións $e \times f$ cuxas entradas a_{ij} veñen dadas por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a } i\text{-ésima arista pertence á fronteira da } j\text{-ésima cara} \\ 0 & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

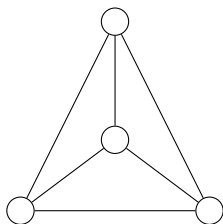
Denotamos por σ a suma de todas as entradas de A . Como cada arista pertence ao sumo a dúas caras de G , a suma das entradas de cada fila de A é ao sumo 2. Como hai un número e de filas verificase $\sigma \leq 2e$. E como cada cara ten como moito 3 aristas na súa fronteira cúmplase $3f \leq \sigma$ e en consecuencia seguese o resultado. [2] □

Teorema 5.5. *Dado un grafo plano conexo con un número v de vértices e e de aristas onde $v \geq 3$, verificase:*

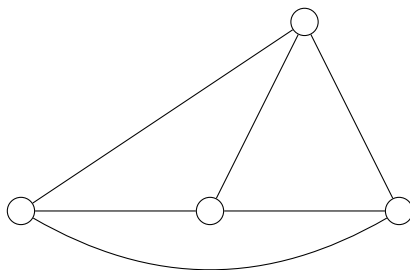
$$e \leq 3v - 6$$

Demostración. Supoñamos que o grafo ten un número f de caras. Polo Teorema 5.4, $3f \leq 2e$, logo $f \geq \frac{2e}{3}$. Polo Teorema 5.2 tense que $v - e + f = 2$, entón $v - e + \frac{2e}{3} \leq 2$. De onde se deduce que $3v - e \leq 6$ e queda probado o resultado. [2] □

Vexamos estes resultados aplicados agora a un exemplo. Sexa G un grafo plano conexo con representación gráfica:



O número de vértices é $v = 4$, o de aristas é $e = 6$ e o de caras é $f = 4$, polo tanto verificase a fórmula de Euler, $v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$. Ademais, tamén satisfácese o Teorema 5.4, $3f = 12 \leq 12 = 2e$, e o Teorema 5.5, $e = 6 \leq 6 = 3v - 6$. Se escribimos ademais outra representación nun plano do mesmo grafo vemos que o número de caras non varía:



Corolario 5.6. *Todos os grafos planos teñen, polo menos, un vértice de grao menor que 6.*

Demostración. Sexa G un grafo plano con n vértices, $n \geq 3$, e m aristas. Procedemos por redución ao absurdo. Supoñamos que todos os vértices de G , $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, teñen grao maior que 6, $d(v_i) \geq 6$ con $i = 1, \dots, n$. Sabemos que: $d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) \geq 2m$, en consecuencia, temos que: $2m = d(v_1) + d(v_2) + \dots + d(v_n) \geq 6n$. É dicir, $m \geq 3n \geq 3n - 6$ e chegamos a unha contradicción co Teorema 5.5. Polo tanto, ao menos un vértice de G ten que ter grao inferior a 6. \square

5.3. Mapas

Cando estamos a falar dun mapa referímonos comunmente a unha representación gráfica da Terra ou dunha parte dela, por exemplo, un mapa dun continente dividido en países ou un mapa dun país dividido en comunidades, provincias ou estados. Podemos recoller a información de calquer mapa nun grafo, por exemplo, un mapa de España dividido en

comunidades, asignámoslle un vértice a cada comunidade e unimos dous vértices por unha arista se as comunidades comparten unha fronteira.



Figura 5.1: Mapa de España dividido en comunidades.

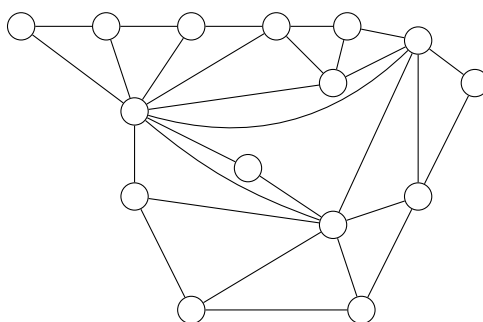


Figura 5.2: Grafo que representa o mapa de España

Francis Guthrie, un estudante de Hamilton, formuloulle ao mesmo a seguinte conxectura: os cartógrafos saben que calquer mapa (o que se entende como mapa en teoría de grafos) pode ser coloreado por catro cores ou menos, pero existe unha proba matemática de iso? Esta conxectura non pudo ser resolta por Guthrie nin polo seu irmán, que tamén era alumno de Hamilton. En 1859 o matemático Alfred Kempe publicou unha proba para este resultado, pero anos máis tarde, en 1890, Percy John Heawood descubriu unha falacia na proba de Kempe, xa que atopou un mapa onde a proba deste non funcionaba, e publicou unha versión menos restrictiva de este resultado, o Teorema das Cinco Cores, que dí que todo grafo plano pode ser coloreado con cinco cores. Pero, en 1976, Ken Appel e Wolfgang Haken da unha demostración para o resultado inicial, todo grafo plano pode ser coloreado con catro cores. Foron estes os inicios do que hoxe coñécese como coloreado de grafos, que estudaremos no capítulo seguinte.

Capítulo 6

Coloreando grafos

Como vimos no capítulo anterior, o feito de colorear un mapa dunha rexión co menor número de cores posible deu lugar ao que hoxe se coñece como coloreado de grafos. Neste capítulo introducimos este concepto así como algúns dos resultados máis significativos e definicións relacionadas co mesmo.

6.1. Introducción

A coloración de grafos é unha asignación de etiquetas, chamadas cores, a elementos dun grafo (vértices ou aristas).

Os primeiros resultados sobre coloración de grafos foron sobre grafos planos en coloración de mapas, como vimos no capítulo anterior.

Definición 6.1. Se $C = \{c_1, c_2, \dots\}$ é un conxunto de obxectos indefinidos chamados **cores**, unha C -**coloración**, ξ , dun grafo $G = (V, E)$ é unha aplicación:

$$\xi : V \longrightarrow C$$

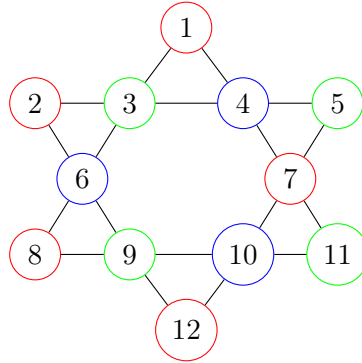
Os conxuntos $V_i = \{v \in V : \xi(v) = c_i\}$ son chamados **clases de cores**. Desta forma, unha coloración dun grafo pode ser definida como unha partición do conxunto de vértices, V , en clases de cores.

Unha **coloración adecuada** dun grafo G é aquela na que dous vértices adxacentes non poden pertencer á mesma clase de cor ou dous aristas que sexan incidentes nun mesmo vértice non poden pertencer á mesma clase de cor (en función de se estamos a colorear vértices ou aristas). Unha coloración adecuada se dice **n -coloración** se o conxunto C ten n elementos. Se un grafo G ten unha n -coloración chamase grafo **n -coloreado**.

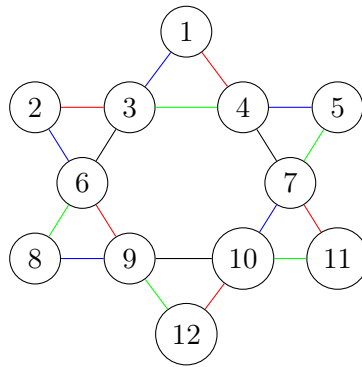
O **número cromático**, $\chi(G)$, dun grafo G é o número natural máis pequeno, n , para o cal existe unha n -coloración de G . Úsase a expresión “ G é n -cromático” para expresar $\chi(G) =$

n . Unha coloración de G en $\chi(G)$ cores se llama **minimal**. Claramente, G é n -coloreado para todo enteiro n verificando $n \geq \chi(G)$.

Exemplo 6.2. Neste exemplo preséntase un grafo G , primeiro cunha coloración adecuada para os vértices, o conxunto de cores é $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ onde: c_1 é vermello, c_2 é azul e c_3 é verde. Ademais, o número cromático é 3.



A continuación presentamos o mesmo grafo G pero neste caso cunha coloración adecuada para as aristas, o conxunto de cores é $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ onde: c_1 é vermello, c_2 é azul, c_3 é verde e c_4 é negro. Ademais, o número cromático é 4.



Teorema 6.3. Dado un grafo G , se Δ é o maior dos graos dos vértices de G , tense que:

$$\chi(G) \leq \Delta + 1$$

Demostración. Procedemos por inducción. Se G ten un único vértice, $\Delta = 0$, xa que o grafo non ten aristas, e entón este pode colorearse cun só cor e verificase o resultado. Supoñamos agora que o resultado verificase para un grafo con n vértices e vexamos que se cumpre tamén para un grafo con $n + 1$ vértices. Tomamos agora un grafo con $n + 1$ vértices e un vértice v de G . Consideramos o grafo $G' = G \setminus v$ que ten n vértices. Deste

modo, para todo vértice w de G' , o grao deste vértice en G' é menor ou igual que en G , xa que en G' o número de aristas incidentes en w é igual que en G ou en todo caso menor, xa que ao eliminar o vértice v podemos estar a eliminar alguna arista incidente en ambos. En consecuencia, $\Delta(G') \leq \Delta(G)$. Por hipótese de inducción temos que $\chi(G') \leq \Delta(G) + 1$. É dicir, exista unha coloración de G' con, ao sumo, $\Delta(G) + 1$ cores. Partindo desta coloración podemos obter unha coloración de G asignando un color ao vértice v . Como o grao de v é menos ou igual que $\Delta(G)$, este vértice ten ao sumo $\Delta(G)$ aristas incidentes nel, polo tanto hai, ao sumo $\Delta(G)$ cores que non podemos usar para colorear o vértice v . En consecuencia, se asignamos unha cor distinta deles conseguimos unha coloración de G con, ao sumo, $\Delta(G) + 1$ cores. \square

Sexa H calquer subgrafo de G verificase $\chi(H) \leq \chi(G)$. Se se cumpre $\chi(G') < \chi(G)$ para todo G' subgrafo propio de G decimos que o grafo G é **crítico** con respecto ao número cromático. Un grafo crítico G que ten número cromático $\chi(G) = n$ denomínase **n -crítico**.

Proposición 6.4. *Todo grafo G con número cromático n ten un subgrafo n -crítico.*

Demostración. Supoñamos que G non é un grafo n -crítico, polo tanto, debe conter un subgrafo propio G' tal que $\chi(G') = n$. Pode ocorrer entón que G' sexa n -crítico ou que conteña un subgrafo propio G'' que verifica $\chi(G'') = n$. Procedendo do mesmo xeito, temos construída unha secuencia de subgrafos G, G', G'', \dots de modo que todos teñen número cromático n . Esta secuencia debe terminar nalgún momento, xa que o grafo G é finito. En consecuencia, debe existir un subgrafo $G^{(k)}$ que sexa n -crítico. \square

Teorema 6.5. *Dado G un grafo n -crítico, verificase:*

$$\delta(G) \geq n - 1$$

Demostración. Supoñamos que G é un grafo n -crítico e v é un vértice calquera de G . Entón $G \setminus v$ é un subgrafo propio de G e en consecuencia, $\chi(G \setminus v) \leq n - 1$. Escollemos agora unha $(n - 1)$ -coloración, ϵ , de $G \setminus v$ e denotamos por $N(v)$ o conxunto de vértices adxacentes a v . Se $|N(v)| \leq n - 1$, hai unha cor da coloración ϵ que non é necesario utilizar para colorear os elementos de $N(v)$. Aplicamos esa cor a v e aplicamos ϵ a todos os demais vértices de G , en consecuencia, temos unha $(n - 1)$ -coloración de G pero eso non pode ocorrer, polo tanto, necesariamente $|N(v)| \neq n - 1$. Por tanto,

$$d_G(v) = |N(v)| \geq n - 1$$

para todo vértice v de G , e cumprese $\delta(G) \geq n - 1$. [2] \square

Teorema 6.6. *Dado G un grafo non crítico, verificase:*

$$\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') \text{ sendo } G' \text{ un subgrafo de } G\}$$

Demostración. Escollendo un subgrafo $\chi(G)$ -crítico G' de G , polo teorema 6.5 cúmplese

$$\chi(G) - 1 \leq \delta(G')$$

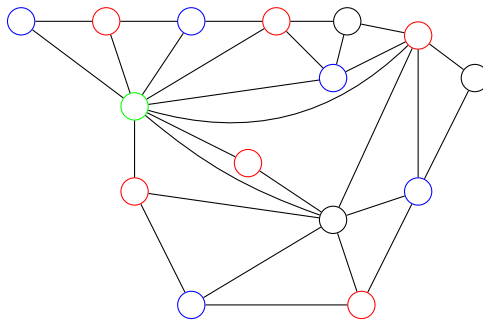
e claramente

$$\delta(G') \leq \max\{\delta(H) \text{ sendo } H \text{ un subgrafo de } G'\},$$

temos así o resultado. [2]

□

Como vimos no capítulo anterior, o inicio da coloración de grafos tivo lugar co Teorema dos Catro Cores, que dí que todo grafo plano pode colorearse con como máximo, catro cores. Vexamos agora como se verifica este teorema no grafo da Figura 5.3.



6.2. Polinomio cromático

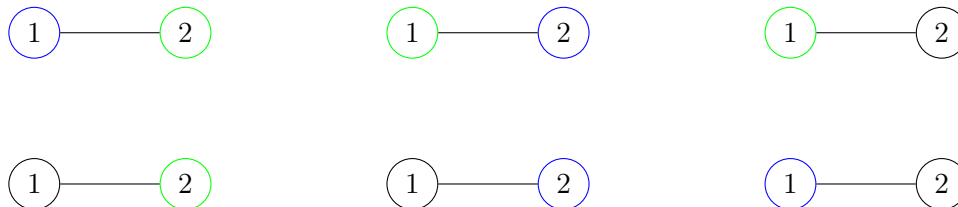
Nesta sección imos tratar a seguinte cuestión: dado un número k de cores, de cantas maneiras distintas somos capaces de colorear un grafo? Por exemplo, se temos o grafo



e un conxunto con 2 cores (azul e verde), poderíamos colorear este grafo de dúas formas distintas.



Se temos ese mesmo grafo pero un conxunto con 3 cores (azul, verde e negro), poderíamos colorear o grafo de 6 formas distintas.



O número de coloracións distintas que pode ter o grafo G con k cores denomínase **polinomio cromático** e denótase por $p_G(k)$ e o número desas coloracións nas que se utilizan os k cores denótase por $q_G(k)$. No cálculo do polinomio cromático pódense desprezarse as aristas múltiples. Se ocorre que $k < \chi(G)$ tense que $p_G(k) = 0$.

Exemplo 6.7. Neste exemplo imos calcular o polinomio cromático para un grafo completo con n vértices, K_n , e un conxunto de k cores. Supoñamos que os vértices están numerados, v_1, v_2, \dots, v_n . Ao primeiro dos vértices podemos asignarlle calquera das k cores, e polo tanto, para o segundo vértice quedan $k - 1$ cores, para o terceiro quedan $k - 2 \dots$. En consecuencia,

$$p_{K_n} = k(k - 1)(k - 2) \dots (k - n + 1) = \frac{k!}{(k-n)!} .$$

Teorema 6.8. Se G é unha árbore con n vértices, tense:

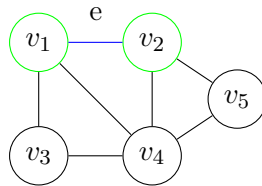
$$p_G(k) = k(k - 1)^{n-1}$$

Demostración. Supoñamos que G é un grafo que pode ser coloreado adecuadamente con k cores. Escollemos un vértice v_1 de G e temos k formas de colorealo. A continuación escollemos un vértice v_2 adxacente a v_1 e temos $k - 1$ formas de colorealo (podemos escoller calquer cor excepto a que utilizamos para v_1). Continuamos este proceso. Despois de ter coloreados t vértices escollemos un vértice v_{t+1} que non este coloreado pero que sexa adxacente a un que si o está, digamos v_i . O vértice v_{t+1} só pode ser adxacente a un vértice en G , xa que se o fora a máis formárase un ciclo e sería unha contradición con que G sexa unha árbore. Desta forma, v_{t+1} pode recibir calquera dos $k - 1$ cores distintos do que é utilizado para v_i . Continuamos este proceso ata que temos o grafo coloreado por completo. En resumo, temos k cores para elixir ao colorear o primeiro vértice e $k - 1$ cores para cada un dos outros $n - 1$ vértices, en consecuencia hai $k(k - 1)^{n-1}$ coloracións posibles. [2] □

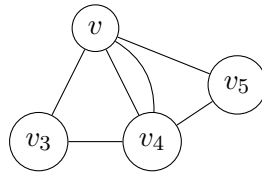
Definición 6.9. Dado G un grafo, introducimos un grafo G_e formado a partir de G . En primeiro lugar, identificamos a arista e e os vértices nos que é incidente, supoñamos v_i e

v_j . Para construir G_e eliminamos a arista e e os vértices v_i e v_j e engadimos no seu lugar un novo vértice, digamos v_k . Ademais, reemplazamos cada arista que une o vértice v_i con calquera outro vértice v_l por unha arista que una v_k e v_l e do mesmo xeito, cada arista que una o vértice v_j con calquera outro vértice v_l por unha arista que una v_k e v_l .

Veamos como construír un grafo G_e con un exemplo. Sexa o grafo G con representación gráfica:



Neste podemos ver a arista e representada en cor azul e os vértices v_1 e v_2 nos que é incidente en cor verde. Para construír G_e eliminamos os vértices v_1, v_2 e a arista e , e engadimos un novo vértice v . Ademais, cambiamos as aristas que inciden en v_1 ou en v_2 como describimos anteriormente e temos construído o grafo G_e con representación gráfica:



Teorema 6.10. *Para un grafo G e unha arista calquera e deste grafo, verificase*

$$p_G(k) = p_{G \setminus e}(k) - p_{G_e}(k),$$

sendo $G \setminus e$ o grafo construído a partir de G eliminando a arista e .

Demostración. Consideramos unha coloración adecuada de $G \setminus e$. Esta pode ser de dous tipos: un no que os dous vértices nos que incide e teñan o mesmo cor e outro no que estes vértices teñan distinto cor. As coloracións do primeiro tipo correspóndense coas coloracións adecuadas de G_e e as coloracións do segundo tipo correspóndense coas coloracións adecuadas de G . Entón,

$$p_{G \setminus e}(k) = p_{G_e}(k) + p_G(k),$$

e tense así o resultado. [2]

□

6.3. Teorema de Brooks

Para establecer a relación entre o polinomio cromático dun grafo e o maior de todos os graos dos vértices de este, formulouse o que hoxe é coñecido como Teorema de Brooks e que presentamos a continuación.

Dado un grafo $G = (V, E)$ e unha coloración adecuada de dito grafo, ξ , chamamos **cadea de Kempe** ao grafo G_{ij} con conxunto de vértices $\{v \in V \text{ tal que } \xi(v) = c_i \text{ ou } c_j\}$, sendo c_i e c_j dúas cores de ξ . Con outras palabras, se temos un grafo G , unha cadea de Kempe é un grafo inducido por todos os vértices de G que están coloreados con dúas cores dadas.

Teorema 6.11 (Teorema de Brooks). *Sexa G un grafo conexo que non é nin completo nin un ciclo de lonxitude impar, tense:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Demostración. Supoñamos que G é un grafo conexo que non é nin completo nin un ciclo de lonxitude impar con $|V| = n$, e supoñamos que $\Delta(G) = m$. Imos asumir que $m \geq 3$ xa que o único caso posible, se $m \leq 2$ é que o grafo sexa un camiño ou un ciclo, e nese caso verifícase $\chi(G) = \Delta(G) = 2$.

I) Supoñamos que G é un grafo non regular.

Escollemos un vértice v , verificando $d(v) < m$. Entón, $G \setminus v$ ten menos de n vértices e, por hipótese de inducción, este pode ser coloreado en $\Delta(G \setminus v) \leq \Delta(G)$ cores. De feito, $G \setminus v$ pode ser coloreado como moito con m cores. Dado que $d(v) < m$, haberá menos de m cores utilizados nos vértices adxacentes a v en G , entón, hai unha cor que non se usa en ningún destes vértices. Aplicando esa cor a v temos unha n -coloración para G .

II) Consideramos agora un grafo G regular de grao n e supoñemos que non pode colorearse de forma adecuada con n cores e procedemos por redución ao absurdo.

Escollemos un vértice v ; por inducción en $G \setminus v$ ten unha n -coloración ξ . Podemos asumir que os vértices adxacentes a v reciben os n cores (en caso contrario procedemos como no caso (I)). Chamaremos a estes vértices adxacentes a v : v_1, v_2, \dots, v_n e $\xi(v_i) = c_i$. Escollemos dous de esos vértices, v_i e v_j e consideramos a cadea de Kempe G_{ij} . Se v_i e v_j están na mesma componente conexa de G_{ij} , pódense intercambiar os cores c_i e c_j en todos os vértices da compoñente conexa á que pertence v_i e continúa sendo unha coloración adecuada, pero, nesta coloración non hai vértices de cor c_i adxacentes a v , polo tanto, v pode colorearse ca cor c_i .

Polo tanto, só necesitamos considerar o caso no que v_i e v_j pertencen á mesma compoñente conexa de G_{ij} , para cada i e j . Entón, para cada par de vértices v_i e v_j

adxacentes a v , existe un camiño P_{ij} dende v_i a v_k formado por vértices coloreados con c_i e c_j en ξ .

Imos comprobar agora que $P_{ij} = G_{ij}$. Supoñamos que v_i é de grao maior ou igual a 2 en G_{ij} . Entón, v_i ten dous vértices adxacentes de cor c_j , e hai un cor c_k que non colore a ningún vértice adxacente a v_i . Podemos recolorar v_i con c_k e v con c_i e temos unha n -coloración de G . Entón v_i , é igualmente para v_j , é de grao 1 en G_{ij} . Digamos que hai un vértice v_{i1} que é adxacente a v_i en G_{ij} ; entón $v_{i1} = v_2$ ou v_{i1} ten grao maior ou igual a 2 ou v_{i1} é adxacente a un único vértice v_{i2} en G_{ij} .

Se G_{ij} non é un camiño, ten que haber un vértice w de grao maior ou igual a 3 que sexa adxacente a v en G_{ij} . Se $\xi(w) = c_i$, entón w é adxacente a 3 vértices coloreados en c_i , entón, debe haber unha cor c_k que non coloree a ningún vértice adxacente a w . Podemos entón recolorar v_i con c_j , v_{i1} con c_i , v_{i2} con c_j , ..., w con c_k e v con calquera color agás c_i , dando así unha nova n -coloración de G . O caso $\xi(w) = c_j$ é similar a este.

Cada G_{ij} é un camiño dende v_i a v_j . Supoñamos que u pertence aos camiños G_{ij} e G_{ik} con $j \neq k$. Entón, $\xi(u) = c_i$ e, a menos que $u = x_i$, u ten dous vértices adxacentes coloreados ca cor c_j e dous con c_k . De novo, hai algún cor que non colore a ningún vértice adxacente a u e podemos recolorar o grafo. Polo tanto, as cadeas de Kempe só se intersecan nos vértices iniciais e finais.

Supoñamos agora que hai dous vértices v_i e v_j adxacentes a v pero que non son adxacentes entre eles en G , entón, tampouco son adxacentes en $G \setminus v$, e o camiño G_{ij} contén un vértice distinto de v_j , digamos w , adxacente a v_i con $\xi(v_i) = c_j$. Escollemos unha cor c_k (distinto de c_i e c_j) e intercambiamos as cores dos vértices de G_{ik} , entón agora, v_i colórese ca cor c_k . Consideramos a cadea de Kempe para esta nova coloración de $G \setminus v$. Claramente u pertence á jk -cadea¹, xa que é adxacente a v_i , que é o vértice final da jk -cadea. De igual forma, w pertence a ij -cadea. E isto contradí o dito no primeiro parágrafo.

Polo tanto, todos os vértices adxacentes a v son adxacentes entre eles. Como v é un vértice calquera de G e G é conexo, este debe ser un grafo completo. Pero isto contradí a hipótese do teorema. [2]

□

¹Cando falamos dunha ij -cadea facemos referencia a unha cadea que une os vértices v_i e v_j

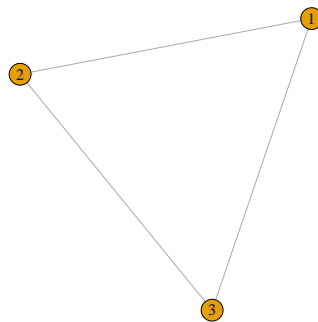
Capítulo 7

Un exemplo con R

Neste último capítulo imos ver unha forma de representar grafos coa ferramenta R. Iremos vendo como programar en R algúns dos grafos que hemos utilizado durante o traballo, sempre dunha forma o máis sinxela posible.

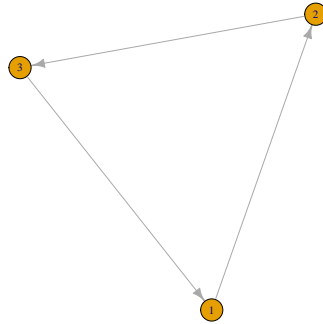
En primeiro lugar, debuxamos un grafo non dirixido e un dirixido: ambos grafos con 3 vértices que están numerados.

```
g1 <- graph( edges=c(1,2, 2,3, 3,1), n=3, directed=F )  
plot(g1)
```



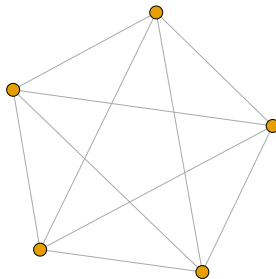
Para o grafo dirixido, usamos un código similar ao caso non dirixido coa diferenza de que cambiamos o parámetro "directed", é dicir, dirixido, de *F* (falso) a *T* (verdadeiro).

```
g2 <- graph( edges=c(1,2, 2,3, 3,1), n=3, directed=T )  
plot(g2)
```



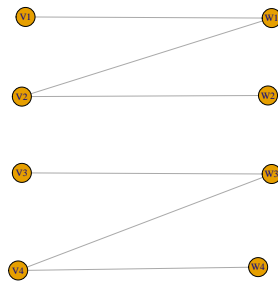
Implementamos a continuación un ejemplo de grafo completo con 5 vértices, que ten un comando sinxelo e específico:

```
g3 <- make_full_graph(5)
plot(g3, vertex.size=10, vertex.label=NA)
```



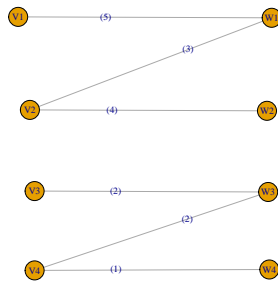
Un grafo bipartito representárase da seguinte forma, neste caso, na primeira liña de código establecemos as aristas e na segunda damoslles aos vértices o nome que desexamos, por exemplo os vértices que estan na columna da esquerda son os V_i e os da dereita os W_i con $i = 1 \dots 4$:

```
bipartito<-graph.formula(0--1,1--2,2--3,4--5,5--6,6--7)
V(bipartito)$label<-c("V1","W1","V2","W2","V3","W3","V4","W4")
plot(bipartito)
```



Además, podemos asignarlle as aristas uns parámetros, como pode ser o peso, vexamos como facelo sobre o exemplo anterior:

```
bipeso<-graph.formula(0--1,1--2,2--3,4--5,5--6,6--7)
V(bipeso)$label<-c("V1","W1","V2","W2","V3","W3","V4","W4")
E(bipeso)$label<-c("(5)","(3)","(4)","(2)","(2)","(1)")
plot(bipeso)
```



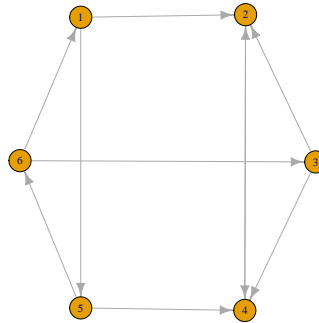
Como vimos antes, podemos definir un grafo a partir das matrices de adxacencia e incidencia, pero ao traballar en R, só podemos facelo a partir da matriz de adxacencia, vexamos como:

```
f1 <- c(0,1,0,0,1,0)
f2 <- c(0,0,0,1,0,0)
f3 <- c(0,1,0,1,0,0)
f4 <- c(0,1,0,0,0,0)
f5 <- c(0,0,0,1,0,1)
f6 <- c(1,0,1,0,0,0)
```

```

adx <- rbind(f1,f2,f3,f4,f5,f6)
gadx<-graph.adjacency(adx)
plot(gadx)

```



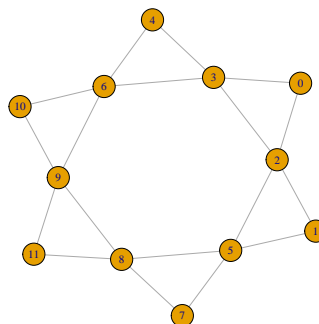
Neste caso, primeiro construímos a matriz de adxacencia por filas co comando *rbind* e logo construímos o grafo co comando *graph.adjacency*.

Por último, podemos colorear os grafos en R, xa sexan as aristas ou os vértices. Vexamos como podemos facelo: en primeiro lugar, supoñamos que temos un grafo calquera:

```

color<-graph.formula(0--2,0--3,1--2,1--5,2--5,2--3,3--4,3--6,4--6,
5--7,5--8,7--8,8--9,6--9,6--10,9--10,8--11,9--11)
plot(color)

```



Imos agora a colorear os vértices deste grafo:

Bibliografía

- [1] Jungnickle, Dieter, *Graphs, Networks and Algorithms*, 4th ed., Springer, New York, 2013
- [2] Wallis, W.D., *A Beginner's Guide to Graph Theory*, 2nd ed., Birkhäuser Boston
- [3] Hajós, G., *Über eine Konstruktion nicht n -färbbarer Graphen*, *Wiss. Z., Martin-Luther- Univ. Halle-Wittenb., Math.-Nat.wiss. Reihe* 10, 116–117 (1961)
- [4] Foulds, L.R., *Graph Theory-A Survey Of Its Use In Operations Research*, University of Canterbury, Christchurch, N.Z, 35–65 (1982)
- [5] Murga Díaz, Rosa María, *Coloración en grafos*, Universidad de Cantabria, Curso 2012-2013
- [6] <https://culturacientifica.com/2017/05/10/teorema-los-cuatro-colores-2-error-kempe-la-clave-la-prueba/>
- [7] <https://kateto.net/netscix2016.html>
- [8] Gonzalez Díaz, Julio, *Programación lineal y entera*, Universidade de Santiago de Compostela, 2018-2019