



Traballo Fin de Grao

Predicción de retornos en activos financieros

Eugenia Covelo Beloso

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grao

Predicción de retornos en activos financieros

Eugenia Covelo Beloso

Julio, 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Estadística e Investigación Operativa
Título: Predicción de Retornos en Activos Financieros
Breve descripción del contenido
Uno de los principales problemas del entorno financiero es la predicción de diversos activos o mas específicamente la predicción de los retornos (beneficio/pérdida) esperados. Esto se hace habitualmente a través de modelos ARIMA Box-Jenkins que se combinan con modelos GARCH para predecir mediante los primeros el promedio a largo plazo y con los segundos la varianza condicional (volatilidad). Este es el objetivo de este trabajo, presentar los procedimientos estadísticos de predicción y realizar una aplicación con datos reales.
Recomendaciones
Soltura programando R
Otras observaciones

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Series de tiempo	1
1.1. Proceso de ruido blanco y paseo aleatorio	1
1.2. Estacionariedad de las series temporales	2
1.2.1. Series estacionarias	3
1.2.2. Series no estacionarias	4
1.2.3. Transformación de series no estacionarias en estacionarias	5
1.3. Series de retornos	7
2. Modelos Box-Jenkins para series estacionarias	9
2.1. Representación autorregresiva y de media móvil	9
2.2. Modelos para series estacionarias	11
2.2.1. El modelo autorregresivo, $AR(p)$	11
2.2.2. El modelo de media móvil, $MA(q)$	13
2.2.3. El modelo $ARMA(p, q)$	14
2.3. Modelos para series no estacionarias	15
2.3.1. El modelo $ARIMA(p, d, q)$	15
2.3.2. Procesos $ARIMA$ estacionales	16

2.4. Estimación de los parámetros de los modelos	17
3. Modelos de heterocedasticidad condicional	19
3.1. Modelos ARCH	20
3.1.1. El modelo ARCH(1)	21
3.1.2. El modelo ARCH(r)	23
3.1.3. Construcción de modelos ARCH	23
3.1.4. Limitaciones de los modelos ARCH	24
3.2. Modelos GARCH	25
3.2.1. El modelo GARCH(1,1)	25
3.2.2. El modelo GARCH(r, s)	26
3.2.3. Construcción de modelos GARCH	27
3.3. Modelos EGARCH	28
3.3.1. El modelo EGARCH(1, 1)	29
3.3.2. El modelo EGARCH(m, s)	29
3.4. Otros modelos heterocedásticos	29
4. Aplicación práctica	33
4.1. Análisis de la serie temporal	33
4.2. Ajuste de modelo Box-Jenkins	37
4.3. Ajuste de modelo de heterocedasticidad condicionada para la volatilidad	41
4.4. Ejemplo de predicción	50
5. Conclusiones finales	53
I. Código de R de la aplicación práctica	55
Bibliografía	61

Resumen

En el presente trabajo se exponen algunos procedimientos estadísticos utilizados para la predicción de los retornos en activos financieros. En el Capítulo 1 se introducen una serie de conceptos relacionados con el análisis de las series temporales y más detalladamente con las series de retornos.

En segundo lugar, en los Capítulos 2 y 3 se definen los modelos ARIMA Box-Jenkins y los modelos de heterocedasticidad condicional, respectivamente. La predicción de los retornos se hace combinando estos dos modelos, los primeros para predecir el promedio de la serie y los segundos para predecir la varianza condicional.

Por último, como puesta en práctica de la teoría descrita a lo largo del trabajo, en el Capítulo 4 se realiza una predicción utilizando datos reales de una serie de retornos.

Abstract

The following project outlines various statistical procedures used to predict the returns on financial assets. Chapter 1 introduces a series of concepts related to the analysis of time series and in particular, of return series.

Secondly, Chapters 2 and 3 define the ARIMA Box-Jenkins models and the conditional heteroskedasticity models, respectively. The prediction of returns is obtained by combining these two models, the former to predict the average of the series, and the latter to predict the conditional variance.

Lastly, in order to put into practice the theory described throughout this project, Chapter 4 performs a prediction of a return series using real data.

Introducción

A lo largo de este trabajo vamos a tratar de pronosticar o predecir el comportamiento de una serie de tiempo utilizando distintas técnicas, para ello es necesario comenzar definiendo algunos conceptos relacionados con las series temporales.

Lo habitual cuando tenemos un conjunto de observaciones es suponer que forman un conjunto de variables aleatorias mutuamente independientes, y el orden de éstas no suele tener mayor importancia. La característica distintiva de las series temporales es que ahora el orden es fundamental y existe dependencia entre las observaciones, es decir, el valor de la variable en el instante t puede depender de sus valores pasados.

Muchos conjuntos de datos en la práctica suelen aparecer como series de tiempo, los precios diarios de las acciones, la cantidad de lluvia caída en una región, las tasas de natalidad, etc.

Capítulo 1

Series de tiempo

Una **serie de tiempo** es una colección ordenada de observaciones tomadas secuencialmente a lo largo del tiempo y espaciadas de manera uniforme. Hablaremos indistintamente de series o procesos temporales.

1.1. Proceso de ruido blanco y paseo aleatorio

La serie temporal más sencilla es el denominado proceso de *ruido blanco*. Es una secuencia de variables aleatorias tales que, como se puede ver en [7, p. 90]:

$$\mathbb{E}(a_t) = 0 \quad \forall t \quad \text{Var}(a_t) = \sigma^2 \quad \forall t \quad \text{Cov}(a_t, a_k) = 0 \quad \forall t \neq k$$

Denotamos series de ruido blanco gaussianas a aquellas series z_t de ruido blanco que siguen una distribución normal. Los procesos del ruido blanco serán de gran importancia en los modelos para series estacionarias, que veremos a más adelante.

Tal y como se dice en [3, p. 71], diremos que una serie temporal x_t es un **paseo aleatorio** (en inglés *random walk*) si

$$x_t = x_{t-1} + w_t$$

donde w_t es un ruido blanco.

Llamamos a una serie de esta forma un paseo aleatorio debido a que cada valor depende solamente del valor pasado y un término de ‘error’ que es aleatorio, por lo tanto la serie solo se mueve en función de un valor aleatorio.

1.2. Estacionariedad de las series temporales

La base del análisis de las series temporales es la estacionariedad, debido a que muchos de los modelos requieren que así sea. Por lo tanto en esta sección veremos qué significa que una serie sea o no estacionaria. Introduciremos primero las funciones de autocovarianza y autocorrelación, que nos serán útiles para definir el concepto de estacionariedad.

Función de autocovarianza y autocorrelación [9, p. 10-15]

■ Función de autocovarianzas

Definimos la covarianza entre z_t y z_{t+k} , [9, p. 10], como

$$\gamma_k = \text{Cov}(z_t, z_{t+k}) = \mathbb{E}((z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu))$$

de forma que la función de autocovarianzas será una función que recoge todo el conjunto de varianzas del proceso, y la denotaremos

$$\{\gamma_k : k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Esta función es simétrica, es decir, $\gamma_k = \gamma_{-k}$, y γ_0 es la varianza de la serie.

La función γ_k explica muy bien la estructura dinámica de la serie, pero sus unidades de medida dependen de las de la variable, por lo tanto, se suele utilizar la función de autocorrelación.

■ Función de autocorrelación

El coeficiente de correlación entre z_t y z_{t+k} , tal y como está definido en [8, p. 26], de la forma:

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(z_t, z_{t+k})}{\sqrt{\text{Var}(z_t) \text{Var}(z_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

El coeficiente ρ_k cuantifica la relación entre las variables z_t y z_{t+k} .

La función de autocorrelación es una función que recoge el conjunto de todos los coeficientes de autocorrelación del proceso, y la denotaremos como

$$\{\rho_k, k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Es una función simétrica, es decir, $\rho_k = \rho_{-k}$ y su representación gráfica respecto al retardo se llama *correlograma*, [7, p. 95].

Por ejemplo, las funciones de autocovarianza y autocorrelación de un proceso de ruido blanco, tal y como lo definimos en la Sección 1.1, son:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad \rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

Ahora bien, además de la correlación entre las variables z_t y z_{t+k} nos va a interesar ver la relación que existe entre éstas una vez eliminada la dependencia lineal de las variables intermedias $z_{t+1}, \dots, z_{t+k-1}$, de manera que utilizamos el coeficiente de correlación parcial, que es de la forma:

$$\text{Corr}(z_t, z_{t+k} | z_{t+1}, \dots, z_{t+k-1})$$

y la **función de autocorrelación parcial** será:

$$\{P_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

A partir de ahora, llamaremos función de autocorrelación simple, *fas* a la función ρ_k , y función de autocorrelación parcial *fap*, a la función p_k . Estas dos funciones nos serán muy útiles, entre otras cosas, para predecir el orden de los modelos que veremos más adelante.

Muchas veces es interesante comprobar si varias autocorrelaciones de la serie temporal son cero. Para contrastar si los m primeros coeficientes de autocorrelación son nulos se utiliza el contraste de **Ljung-Box**.

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0 \\ H_a : \rho_i \neq 0 \text{ para algún } i \in \{1, \dots, m\} \end{cases} \quad (1.1)$$

Se define el estadístico como:

$$Q(m) = T(T+2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{T-l}$$

de manera que rechazaremos la hipótesis nula si $Q(m) > \chi_\alpha^2$. Esto se puede ver más detallado en [8].

Detallaremos a continuación qué significa que una serie de tiempo sea o no estacionaria.

1.2.1. Series estacionarias

Las series estacionarias son aquellas cuyo comportamiento general no varía.

Como se define en [9, p. 6], diremos que una serie de tiempo z_t es **estrictamente estacionaria** si la función de distribución de un conjunto de k observaciones z_{t_1}, \dots, z_{t_k} coincide con la de $z_{t_1+t}, \dots, z_{t_k+t}$ para todo t , es decir, que la distribución sea invariante con el tiempo. Pero en la práctica es muy difícil justificar esta condición de estacionariedad estricta, ya que no se suele disponer de la distribución de las variables, por lo tanto, se suele utilizar una propiedad más fácil de contrastar empíricamente, la estacionariedad débil.

Diremos que una serie de tiempo es **débilmente estacionaria** si cumple las siguientes condiciones, [7, p. 87]:

1. $\mathbb{E}(z_t) = \mu_z$
2. $\text{Var}(z_t) = \sigma_z^2$
3. $\text{Cov}(z_{t-k}, z_t) = \gamma_{z(k)}$ depende solo del retardo (lag) y no de t

Si una serie sigue una distribución normal se dice que es un proceso gaussiano, y en este caso la estacionariedad débil y estricta serán equivalentes, como se dice en [5, p. 56].

De ahora en adelante, cuando hablemos de estacionariedad nos estaremos refiriendo al concepto de estacionariedad débil.

1.2.2. Series no estacionarias

Una serie no estacionaria es aquella que no cumple alguna de las propiedades de estacionariedad débil. Luego una serie no estacionaria puede serlo por diferentes razones, de forma que podemos pensar en:

- * No estacionariedad en media, en caso de que la media de la serie no permanezca constante a lo largo del tiempo de observación. Si es creciente o decreciente entonces diremos que la serie tiene una tendencia. Si la serie tiene un comportamiento periódico entonces hablaremos de estacionalidad.
- * No estacionariedad en varianza, si la varianza varía respecto a t .
- * No estacionariedad en covarianza, si la covarianza varía respecto a t .

Veamos dos ejemplos gráficos de series no estacionarias. En el segundo gráfico de la figura 1.1 vemos que la serie no es constante y tiene una clara tendencia creciente, además tiene un

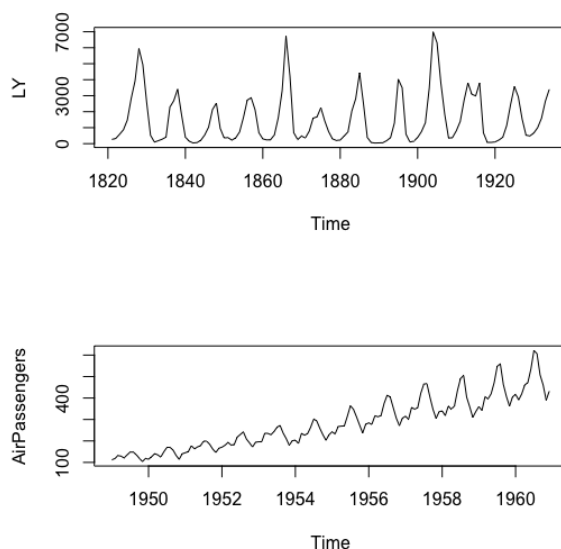


Figura 1.1: Ejemplo de serie estacionaria y no estacionaria

comportamiento periódico y varianza creciente, por lo que es un claro ejemplo de una serie no estacionaria en media y en varianza con estacionalidad. En cambio, el primer gráfico sí que tiene una media constante aunque es de nuevo una serie con estacionalidad. Veremos a continuación cómo podemos transformar series no estacionarias como estas, en series que sí lo son.

Como se puede ver en [8, p. 68], para comprobar si una serie es estacionaria, se puede utilizar el test de **Dickey-Fuller**. Este test es una manera de determinar si existen raíces unitarias¹ en las series de tiempo. Si hay raíz unitaria entonces tenemos un paseo aleatorio (Sección 1.1), y por tanto el proceso no es estacionario, y si no hay raíz unitaria si lo será. Entonces, el contraste que realiza este test es el siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : \text{Hay raíz unitaria (no estacionariedad)} \\ H_a : \text{No hay raíz unitaria (estacionariedad)} \end{cases}$$

1.2.3. Transformación de series no estacionarias en estacionarias

En la práctica buscamos obtener series estacionarias, ya que tienen la ventaja de que se pueden obtener predicciones más fácilmente.

¹Decimos que un proceso tiene una raíz unitaria, si es un proceso autorregresivo de orden 1 (sección 2.2.1), y $|\phi| = 1$

Llamaremos **series homogéneas** a todas aquellas series no estacionarias que se pueden transformar en estacionarias mediante la aplicación del **operador diferencia**, el cual definiremos a continuación, siguiendo [7, p. 132].

Aplicar a una serie z_t el operador diferencia de orden 1, ∇ , consiste en crear una nueva serie y_t , tal que

$$y_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1}$$

En algunos casos, no basta con aplicar una sola vez el operador diferencia para transformar una serie no estacionaria en una que sí lo es, por lo que definimos el operador diferencia de orden d

$$\nabla^d = \nabla (\nabla^{d-1})$$

Las series homogéneas son series no estacionarias en media y no estacionarias en varianza. Sin embargo, generalmente, su varianza es de la forma

$$\text{Var}(z_t) = cf(\mu_t)$$

es decir, a medida que la media de la serie cambia la varianza cambia. En esta situación antes de aplicar el operador diferencia para estabilizar la media hay que transformar la serie para estabilizar la varianza.

Vamos a ver como transformar series no estacionarias en varianza, para ello necesitaremos una función “estabilizadora”. Tenemos que encontrar una función T , tal que la varianza de $T(z_t)$ sea constante. Siguiendo el procedimiento que se puede ver en [9, p. 83-85], se llega a que la función T es de la forma:

$$r_t^{(\lambda)} = \begin{cases} (z_t^\lambda - 1) / \lambda & \lambda \neq 0 \\ \ln(z_t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

Este tipo de transformaciones se denominan **transformaciones Box-Cox**.

Frecuentemente, esta transformación además de estabilizar la varianza también mejora la aproximación de la distribución a una distribución normal.

Una vez aplicada la transformación, si la media es constante obtenemos una serie estacionaria. En cambio, si la media no es constante obtenemos una serie homogénea no estacionaria, a la que le podemos aplicar el operador diferencia, para estabilizar la media y obtener una serie estacionaria.

1.3. Series de retornos

Generalmente, las series temporales financieras, en lugar de tener interés en los precios de los activos suele ser más interesante ver si estos precios crecen o decrecen al terminar el día. Estas series se llaman **series de retornos**, y representan el porcentaje de crecimiento de la serie en cada intervalo de tiempo.

Sea P_t el precio de un activo en un tiempo t , como se puede ver en [8, p. 3], el retorno de un periodo correspondiente es

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

y un retorno de k -periodos será

$$R_t [k] = \frac{P_t - P_{t-k}}{P_{t-k}}$$

Esta serie, R_t , es la **serie de retornos proporcional**, en la que se consideran los retornos de forma discreta. Pero podemos considerar los retornos de forma continua mediante:

$$r_t = \ln(1 + R_t)$$

Esta serie r_t es la **serie de retornos logarítmica**. Presenta algunas ventajas respecto a R_t , ya que por ejemplo, permite calcular el retorno $r_t [k]$ como suma de retornos de un periodo, es decir, es aditiva. Además, como los retornos son valores muy cercanos a cero:

$$R_t \approx r_t \quad \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \approx \left(\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right)$$

En adelante, cuando hablemos de serie de retornos nos referiremos a la serie r_t .

Entre las características de las series de retornos destacan algunas como que el coeficiente de curtosis es mayor que 3, el de la normal. Además existe dependencia temporal, lo que se ve reflejado en estadísticos de Ljung-Box generalmente significativos, y en las series de este tipo existen periodos de valores altos o bajos alternados con periodos de valores medios, consecuencia del concepto, en inglés, volatility clustering, del cual hablaremos en el Capítulo 3.

En ese capítulo veremos estos efectos con más detalle con los modelos ARCH, GARCH o EGARCH.

Capítulo 2

Modelos Box-Jenkins para series estacionarias

2.1. Representación autorregresiva y de media móvil

De una serie de tiempo nos interesa describir el pasado y hacer predicciones para el futuro. Para conseguir esto necesitamos establecer un modelo que permita representar el comportamiento de la variable x_t y hacer inferencia sobre ella.

Para comenzar veremos dos representaciones útiles para expresar una serie de tiempo, siguiendo [9, p. 23-26].

La primera representación se denomina **representación autorregresiva** (AR) y consiste en expresar un proceso z_t como una combinación lineal de sus propios valores pasados más un proceso de ruido blanco. Por simplicidad denotaremos $\tilde{z}_t = z_t - \mu$

$$\tilde{z}_t = a_t + \pi_1 \tilde{z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{z}_{t-j} \quad (2.1)$$

También se puede escribir de forma más compacta en términos del operador de retardos, que definimos como $B^j x_t = x_{t-j}$, así:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t &= (\pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots) \tilde{z}_t + a_t \implies (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) \tilde{z}_t = a_t \\ &\implies \Pi(B) \tilde{z}_t = a_t \end{aligned}$$

Decimos que una serie es invertible si la influencia de z_{t-k} sobre z_t es mayor cuanto más nos

acercamos al momento t .

En el caso de una representación AR esto siempre se cumple, es decir, todo proceso que se pueda expresar de esta forma es invertible, [8, p. 62].

De manera alternativa (2.1) se puede expresar como:

$$\tilde{z}_t = \frac{1}{\Pi(B)} a_t = \Psi(B) a_t = (1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \dots) a_t$$

o, equivalentemente

$$\tilde{z}_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \quad (2.2)$$

Esta representación (2.2) se denomina **representación en medias móviles** (MA, del inglés, *moving average*). Consiste en escribir el proceso z_t como una combinación lineal de los procesos de ruido blanco. El teorema de Wold, como se puede ver en [9, p. 24], dice que todo proceso estacionario se puede expresar de esta forma, por lo que esta representación también se conoce como representación de Wold.

Recapitulando, tenemos dos representaciones:

$$\text{MA: } \tilde{z}_t = \Psi_{\infty}(B) a_t$$

$$\text{AR: } \Pi_{\infty}(B) \tilde{z}_t = a_t$$

Todo proceso que se pueda expresar con una representación MA es estacionario, y todo el que se pueda expresar con una representación AR es invertible, pero ni todo proceso estacionario es necesariamente invertible, ni todo proceso invertible es necesariamente estacionario.

Ahora bien, si tenemos un proceso estacionario $\tilde{z}_t = \psi(B) a_t$, para que se pueda escribir en representación autorregresiva, de forma que sea invertible, todas las raíces de $\psi(B) = 0$ deben tener módulo mayor que uno, así

$$a_t = \frac{1}{\psi(B)} \tilde{z}_t = \pi(B) \tilde{z}_t$$

De la misma forma, si tenemos un proceso invertible $\pi(B) \tilde{z}_t = a_t$, para que sea estacionario, de forma que se pueda escribir en representación de media móvil, las raíces de $\pi(B) = 0$ deben ser todas mayores que uno en módulo. Con esto, se cumple que la representación es sumable, es decir, se cumple la condición $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, y por lo tanto el proceso es estacionario. Así

$$\tilde{z}_t = \frac{1}{\pi(B)} a_t = \psi(B) a_t$$

Estas representaciones infinitas son difícilmente estimables a partir de series de tiempo con un número finito de observaciones, por lo que se buscarán expresiones finitas que sean buenas aproximaciones. Tales expresiones las obtendremos aproximando un polinomio de orden infinito por un cociente de polinomios finitos.

Así,

$$\Pi(B) = \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)} \quad \Psi = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}$$

donde $\phi_p(B)$ y $\theta_q(B)$ son polinomios finitos de orden p y q respectivamente.

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

Sustituyendo en la representación AR:

$$\Pi(B) \tilde{z}_t \simeq \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)} \tilde{z}_t = a_t \implies \phi_p(B) \tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t \quad (2.3)$$

Vamos a describir estos modelos más detalladamente.

2.2. Modelos para series estacionarias

2.2.1. El modelo autorregresivo, AR(p)

Comenzamos con los modelos autorregresivos, que generalizan la idea de regresión para representar la dependencia lineal entre dos variables aleatorias.

Sea $\{z_t\}$ una serie temporal, y denotemos, por simplicidad, $\tilde{z}_t = z_t - \mu$. Entonces, diremos que la serie es un **proceso autorregresivo de orden p** , AR(p), si se puede representar, como se ve en [2, p. 52], como:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t \quad (2.4)$$

siendo a_t un proceso de ruido blanco con varianza σ_a^2 .

Denotando a $\phi_p(B)$ polinomio autorregresivo, podemos expresar este mismo modelo en términos del operador de retardos, [2, p. 52]:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = \phi_p(B) \tilde{z}_t = a_t \quad (2.5)$$

donde denotamos a $\phi_p(B)$ polinomio autorregresivo.

La **función de autocorrelación simple**, f_{as} , de un proceso AR(p) es tal que, [2, p. 56]:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad k > 0$$

Esta función se puede escribir de la siguiente forma, como se puede ver en [8, p. 40]:

$$\phi_p(B) \rho_k = 0 \quad k > 0 \quad (2.6)$$

entonces, sean $G_1^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ las p raíces distintas del polinomio autorregresivo, la solución general de la ecuación (2.6) es $\rho_k = \sum_{i=1}^p A_i G_i^k$, de donde concluimos que la f_{as} de un proceso AR(p) es una mezcla de exponenciales, debido a las raíces reales, y sinusoidales, debido a las raíces complejas, que tiende a cero pero no se anula. Se puede ver con más detalle la resolución de la ecuación en diferencias¹ en [7, p. 133-139]

El coeficiente de correlación parcial de orden k , se calcula como el coeficiente de correlación simple entre observaciones separadas k períodos, cuando eliminamos de la relación entre ellas la dependencia lineal debida a valores intermedios.

Por la definición de coeficiente de correlación parcial que vimos en la Sección 1.2.1, deducimos que la **función de autocorrelación parcial**, f_{ap} , tendrá los p primeros coeficientes distintos de cero, de manera que nos sirve para identificar el orden del proceso AR. Además el coeficiente de correlación parcial de orden p coincidirá siempre con el parámetro ϕ_p , como se dice en [7, p. 129].

Por lo tanto, concluimos que en un proceso AR(p) la función de autocorrelación simple no se anula, mientras que la función de autocorrelación parcial se anula a partir del orden p .

Test de Dickey-Fuller Como se puede ver detalladamente en [2, p. 353-358], para comprobar si una serie es estacionaria, se puede utilizar el test de raíces unitarias de **Dickey-Fuller**.

Para ilustrar el concepto de raíz unitaria, consideremos un proceso AR(1) de la forma:

$$\tilde{z}_t = \phi \tilde{z}_{t-1} + a_t \quad (2.7)$$

Diremos que la raíz es unitaria si $|\phi| = 1$. Notemos que en ese caso el término z_t solo variará en relación al término z_{t-1} en función de a_t , que es un valor aleatorio, por lo tanto estaremos

¹Llamamos ecuación en diferencias a una expresión del tipo

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \dots - \phi_k x_{t-k} = c$$

[7] con los coeficientes ϕ_i constantes.

ante un paseo aleatorio, tal y como lo definimos en la sección 1.1, y por lo tanto la serie no será estacionaria.

Si por el contrario $|\phi| < 1$, entonces la serie sí será estacionaria. Entonces, el contraste que realiza este test de Dickey-Fuller es el siguiente:

$$\begin{cases} H_0 : \text{Hay raíz unitaria (no estacionariedad)} \\ H_a : \text{No hay raíz unitaria (estacionariedad)} \end{cases}$$

Cabe destacar que se podría dar el caso de que $|\phi| > 1$, en el cual diremos que el proceso es *explosivo*, pero no entraremos en detalle en este tipo de procesos, ya que en el campo de las series financieras no es habitual encontrarse este tipo de procesos, tal y como se dice en [4, p. 45].

2.2.2. El modelo de media móvil, MA(q)

Acabamos de ver los procesos AR, que se caracterizan por tener muchos coeficientes de autocorrelación distintos de cero, de manera que el valor actual estará correlado con muchos valores pasados, por tanto, estos procesos tendrán una memoria relativamente larga. Pero los procesos AR no pueden representar series donde el valor actual esté correlado con pocos valores pasados, es decir, de memoria corta. Una familia de procesos que tienen esta propiedad son los procesos de media móvil, [7, p.142].

Definimos, tal y como se dice en [2, p. 53], un proceso de media móvil de orden q como una combinación lineal del término actual de ruido blanco y los q términos de ruido blanco más recientes, de forma que una serie estacionaria $\{z_t\}$ sigue un proceso MA(q) si:

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.8)$$

Podemos expresar este modelo en términos del operador de retardos como, [2, p. 53]:

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta_q(B) a_t \quad (2.9)$$

donde $\theta_q(B)$ se denomina polinomio de media móvil.

La **función de autocorrelación simple**, *fas*, de un proceso MA(q) es, como se define en [9, p. 52]:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k = 1, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

Observemos que la *fas* de un proceso $MA(q)$ se hace cero a partir de retardo q , por lo que será muy útil para especificar el orden q de los modelos.

Dado un proceso $MA(q)$ invertible sabemos que se puede escribir en representación autorregresiva y un proceso $AR(p)$ estacionario se puede escribir en representación de medias móviles. Cuando hablamos de los modelos $AR(p)$ llegamos a la conclusión de que su función de autocorrelación simple es una mezcla de exponenciales y sinusoidales, que tiende a cero pero no se anula, de manera que, equivalente, la **función de autocorrelación parcial** de un proceso $MA(q)$ tendrá la misma forma, [7, p. 149].

Resumiendo, en los modelos de media móvil de orden q la *fas* se anula para retardos mayores que q , mientras que la *fap* nunca se anula, y en los modelos autorregresivos de orden p la *fas* nunca se anula y la *fap* se anula para retardos mayores que p .

2.2.3. El modelo ARMA(p, q)

Ya hemos visto que un proceso estacionario e invertible tiene una representación autorregresiva y una representación en medias móviles. Pero en algunos casos, los modelos AR y MA se vuelven demasiado latosos debido a que puede que se necesite un modelo que contenga muchos parámetros para llegar a una buena aproximación.

Para solucionar esto existen los modelos mixtos autorregresivos-media móvil, ARMA(p, q), que incluyen términos de los modelos AR y MA pero manteniendo el menor número de parámetros posibles, lo que se conoce como el *principio de parsimonia*.

La expresión general del modelo ARMA(p, q) es, siguiendo [2, p. 53]:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} = \sum_{k=1}^p \phi_k \tilde{z}_{t-k} + a_t - \sum_{k=1}^q \theta_k a_{t-k} \quad (2.10)$$

o equivalentemente, en términos del operador de retardos, [2, p. 53]:

$$\phi_p(B) \tilde{z}_t = \theta_q(B) a_t \quad (2.11)$$

donde $\phi_p(B)$ es el polinomio autorregresivo de orden p y $\theta_q(B)$ el polinomio de media móvil de orden q . Es necesario que no haya factores comunes en ambos polinomios, ya que si existiera alguna raíz común el modelo estaría sobreparametrizado innecesariamente, por lo que el modelo se podría escribir como un ARMA($p-1, q-1$), [8, p. 59].

Viendo la expresión (2.11) del modelo debemos darnos cuenta de que los modelos AR(p) y MA(q) son casos particulares del modelo ARMA(p, q). Si $\theta_q(B) = 1$ tendríamos un modelo

AR(p), y si $\phi_p(B) = 1$ tendríamos un modelo MA(q).

Notemos que, para que un proceso ARMA(p, q) sea estacionario, por tener parte autorregresiva, debe tener todas las raíces del polinomio $\phi_p(B)$ con módulo mayor que 1, y para que sea invertible, por tener parte de medias móviles, las raíces de $\theta_q(B)$ también deben ser en módulo mayores que 1.

La función de autocorrelación simple de un proceso ARMA(p, q) no se anula a partir de ningún retardo, debido a que tiene una parte AR(p), cuya *fas* ya vimos que no se anulaba, pero su función de autocorrelación parcial tampoco se anula, debido a que tiene una parte MA(q), y la *fap* de los procesos MA(q) vimos que tampoco se anula para ningún retardo. Por lo tanto, en este modelo no nos será tan fácil establecer los órdenes p y q .

Siguiendo el desarrollo de [2, p. 77], se tiene que la **función de autocorrelación simple** de un proceso ARMA(p, q) es

$$\rho_k = \Phi(B) = 0 \quad k \geq q + 1$$

y la **función de autocorrelación parcial** es

$$a_t = \theta^{-1}(B) \phi(B) \tilde{z}_t$$

2.3. Modelos para series no estacionarias

Hasta ahora, hemos visto modelos para series temporales estacionarias, pero en la práctica se pueden encontrar series que no lo son.

Tal y como vimos en la sección 1.2.3 podemos transformar series no estacionarias en series que si lo son. Si la serie es no estacionaria en varianza, puede que tras aplicar una transformación Box-Cox obtengamos una serie estacionaria, y en este caso, podemos modelar la serie con uno de los modelos vistos hasta ahora. Si por el contrario, tras aplicar la transformación obtenemos una serie homogénea, a la que podemos aplicar el operador diferencia, introducimos a continuación un nuevo modelo para modelar esta serie.

2.3.1. El modelo ARIMA(p, d, q)

Dada una serie $\{z_t\}$ homogénea no estacionaria, sea $\{y_t\}$ la serie estacionaria obtenida mediante la aplicación del operador diferencia, Sección 1.2.3, del orden apropiado, supongamos d ,

de forma que

$$y_t = (1 - B)^d z_t$$

Entonces, diremos que el proceso $\{z_t\}$ es un proceso autorregresivo integrado de media móvil de orden (p, d, q) , y lo denotaremos $\text{ARIMA}(p, d, q)$, si el proceso y_t es un modelo $\text{ARMA}(p, q)$ estacionario e invertible, y será, como se dice en [7, p. 180], de la forma:

$$\phi_p(B) (1 - B)^d z_t = \phi_p(B) y_t = c + \theta_q(B) a_t \quad (2.12)$$

o equivalentemente, utilizando $\nabla = 1 - B$

$$\phi_p(B) \nabla^d z_t = c + \theta_q(B) a_t \quad (2.13)$$

Notemos que al definir los modelos para procesos estacionarios hablábamos de \tilde{z}_t siendo $\tilde{z}_t = z_t - \mu$, ya que podíamos asegurarnos trabajar con procesos de media cero. Pero en los procesos no estacionarios la constante cobra un papel importante, [9, p. 72]. El operador diferencia elimina la tendencia y deja la serie diferenciada con, a lo sumo, una media constante $c = k/(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$. Si $c = k$ diremos que la serie tiene una deriva igual a k .

2.3.2. Procesos ARIMA estacionales

Hemos visto como tratar con procesos no estacionarios, pero nos falta tratar un tipo de no estacionariedad en media, la estacionalidad.

Siguiendo [7, 199-101], diremos que una serie es estacional de periodo s cuando su media no es constante pero sigue un patrón cíclico, es decir

$$\mathbb{E}(z_t) = \mathbb{E}(z_{t+s})$$

Podemos convertir una serie estacional en una serie estacionaria aplicándole el operador diferencia estacional de periodo s :

$$\nabla_s = 1 - B^s (\neq \nabla^s = (1 - B)^s)$$

Si aplicamos este operador a una serie estacional obtenemos una serie transformada tal que:

$$y_t = \nabla_s z_t = z_t - z_{t-s}$$

de forma que y_t es una serie sin el efecto estacional.

Incorporaremos la estacionalidad dentro del modelo ARIMA, de forma que obtendremos un modelo ARIMA estacional multiplicativo, [8, p. 75]. Podremos convertir una serie con estacionalidad en una serie estacionaria mediante

$$w_t = \nabla_s^D \nabla^d z_t$$

donde D es el número de diferencias estacionales y d el número de diferencias ‘regulares’.

Con esta idea, un modelo ARIMA estacional multiplicativo $(P, Q, D)_s \times (p, d, q)$ tendrá la forma:

$$\Phi_P(B^s) \phi_p(B) \nabla_s^D \nabla^d z_t = \theta_q(B) \Theta_Q(B^s) a_t \quad (2.14)$$

donde $\Phi_P(B^s)$ y $\Theta_Q(B^s)$ son los polinomios estacionales autorregresivo y de media móvil, respectivamente.

2.4. Estimación de los parámetros de los modelos

Una vez identificado el modelo para una serie z_t , tenemos que estimar sus parámetros.

Consideraremos, sin pérdida de generalidad, el modelo es un ARMA(p, q), y estimaremos los parámetros por máxima verosimilitud.

Para esto tenemos que escribir la función de densidad conjunta y maximizarla respecto de los parámetros.

La función de densidad conjunta de los $a = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ para un proceso ARMA z_t , puede expresarse de la forma:

$$P(a|\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n a_t^2 \right]$$

Escribiendo el modelo ARMA(p, q) de la forma

$$a_t = \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q} + \tilde{z}_t - \phi_1 \tilde{z}_{t-1} - \dots - \phi_p \tilde{z}_{t-p}$$

podemos escribir las funciones de verosimilitud de los parámetros.

Siendo $Z = (z_1, \dots, z_n)$ con condiciones iniciales $Z_* = (z_{1-p}, \dots, z_{-1}, z_0)$ y $a_* = (a_{1-q}, \dots, a_{-1}, a_0)$, tomando logaritmos, **la función de verosimilitud** del proceso es :

$$\ln L_*(\phi, \mu, \theta, \sigma_a^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_a^2 - \frac{S_*(\phi, \mu, \theta)}{2\sigma_a^2}$$

donde $S_*(\phi, \mu, \theta) = \sum_{t=1}^n a_t^2(\phi, \mu, \theta | Z_*, a_*, Z)$, es la función de suma de cuadrados condicional. Con esto, podemos estimar los parámetros. Este proceso se puede ver más detalladamente en el libro [9, p. 139].

Capítulo 3

Modelos de heterocedasticidad condicional

Hasta este momento hemos visto modelos que mantenían el supuesto de que las innovaciones a_t tenían una varianza constante en el tiempo, aunque la esperanza condicional fuese cambiante. Ahora vamos a introducir una serie de modelos que, aunque su varianza marginal es constante, su varianza condicional no lo es. Por lo tanto, nos referiremos a este tipo de modelos como **modelos de heterocedasticidad condicional**.

Entendemos como varianza marginal la varianza incondicional de la serie, y varianza condicional a la varianza de cada variable condicionada a sus valores pasados. Notemos que las series de este tipo son procesos estacionarios, ya que la condición necesaria para que lo sean es que la varianza marginal sea constante, aunque la condicional varíe.

En muchas series temporales, y en particular en las series asociadas a retornos de activos financieros, es habitual encontrarse con que la varianza condicional cambia con el paso del tiempo. Como consecuencia de esto nacen los modelos de heterocedasticidad condicional, ya que muchas características de los procesos de esta forma no se pueden explicar ni modelizar mediante los modelos que vimos en la sección anterior.

La evolución de la varianza condicional se conoce como la **volatilidad** de la serie. Generalmente, en campos como las finanzas, es vista como algo negativo, ya que representa la incertidumbre de las predicciones, sin embargo, es positiva en el sentido de que permite obtener beneficio cuando se vende en picos altos o se compra en picos bajos, por tanto, cuanto más alta sea la volatilidad mayor será la ganancia que se puede obtener. Además, como se dice en [5, p. 190-191], modelar la volatilidad de la serie puede mejorar la estimación de los parámetros del modelo de la media

condicional y la precisión de los intervalos de predicción.

Los modelos de heterocedasticidad condicional permiten explicar el comportamiento de series de tiempo con varianza condicional no constante ya que describen la volatilidad de la serie.

Los modelos ARCH, **modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva**, propuestos por Robert Engle en los años 80, suponen que la varianza condicional depende de los valores pasados con estructura autorregresiva, [5, p. 192]. A partir de estos surgieron otros como los GARCH o los EGARCH.

Denotemos por F_{t-1} al conjunto de toda la información de la serie hasta el momento $t - 1$, luego la media y la varianza condicionadas son, como se define en [5, p. 189-190]:

$$\mu_t = \mathbb{E}(z_t | F_{t-1}) \quad \sigma_t^2 = \text{Var}(z_t | F_{t-1})$$

Nos centraremos en modelos de la forma

$$z_t = \mu_t + a_t$$

Consideraremos que μ_t sigue un modelo ARMA(p, q), tal y como lo definimos en la Sección 2.2.3, por lo que los modelos que veremos consistirán en especificar modelos para a_t .

3.1. Modelos ARCH

Los modelos ARCH asumen que la forma de los a_t es, como se dice en [6, p. 250]:

$$a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \tag{3.1}$$

donde $\{\epsilon_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza constante, y h_t coincide con la varianza condicional de la serie z_t .

Los procesos ϵ_t y h_t son independientes entre sí, lo que nos permite afirmar, tal y como se puede ver desarrollado en el libro [7, p. 429], que las esperanzas marginal y condicional de a_t son nulas. Además esta independencia implica que el proceso a_t no tiene autocorrelación y es una serie de ruido blanco. Sin embargo, a diferencia de lo que pasaba en los modelos ARIMA, la serie a_t es de variables dependientes, pues a_t y a_{t-1} dependen de valores pasados comunes.

En los modelos de este tipo se supone que la varianza condicional tiene una estructura como la de un AR(p) (2.4), de forma que, siguiendo [6, p. 250]:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r a_{t-r}^2 \tag{3.2}$$

donde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0$. Los α_i deben satisfacer una serie de condiciones, como se dice en [6, p. 250], para que esta varianza sea finita. Veremos detalladamente las condiciones de los α_i en un modelo ARCH(1), para luego extrapolarlas al modelo ARCH general. Estas condiciones serán condiciones suficientes pero no necesarias.

De la expresión (3.2) deducimos que cuanto mayores sean los últimos r valores, $a_{t-1}^2, \dots, a_{t-r}^2$, mayor será la varianza condicional de a_t , lo que se traduce en una alta volatilidad. Como consecuencia, la probabilidad de que z_t tenga una varianza condicional alta es mayor que la probabilidad de que tenga una varianza baja ([6, p. 251]). Este comportamiento es similar al ‘volatility clustering’, del que hablamos en la sección 1.3.

3.1.1. El modelo ARCH(1)

Para estudiar las características de los modelos ARCH vamos a analizar primero el modelo ARCH(1), para luego tratar de extrapolar las ideas al modelo ARCH general.

En un modelo ARCH(1) se supone que la varianza condicional, σ_a^2 depende solo del último valor observado, y tiene una estructura similar a un AR(1). De manera que, un modelo ARCH(1) será de la forma, como se puede ver en [6, p. 252]:

$$a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 \quad (3.3)$$

Tal y como dijimos al introducir la estructura de la varianza condicional en los modelos ARCH, (3.2), los α_i , en este caso, α_0 y α_1 , deben cumplir una serie de condiciones, que veremos a continuación.

Primero, para asegurar que la varianza σ_a^2 sea positiva debe cumplirse $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_1 \geq 0$, como se puede ver en [7, p. 430]. Además, la varianza marginal del proceso, σ^2 es un valor constante, y viene dado por el promedio de las varianzas condicionales, por lo tanto, si seguimos el desarrollo de [6, p. 252], llamando $\sigma^2 = \mathbb{E}(\sigma_t^2)$ y utilizando la expresión (3.3) tenemos que:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(\sigma_t^2) \stackrel{\sigma_t^2 = h_t}{=} \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}(a_{t-1}^2) \quad (3.4)$$

Ahora bien, puesto que a_t es un proceso estacionario de media cero

$$\sigma^2 = \text{Var}(a_t) = \mathbb{E}(a_t^2) = \mathbb{E}(a_{t-1}^2) \quad (3.5)$$

Por lo tanto, por (3.4) y (3.5) tenemos que

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2 \implies \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \quad (3.6)$$

Así pues, para que la varianza sea positiva α_1 debe verificar la condición $0 \leq \alpha_1 < 1$.

Como se detalla en [8, p. 105], en algunos casos necesitamos que existan los momentos de orden superior de a_t y que cumplan ciertas condiciones, por lo tanto los α_i deberán satisfacer más restricciones, algunas de las cuales desarrollaremos a continuación.

Por ejemplo, para estudiar el comportamiento de sus colas necesitamos que el cuarto momento de a_t sea finito. Para probar esto, primero, basándonos en la hipótesis de que los ϵ_t siguen una distribución normal y definiendo \mathcal{F}_{t-1} como el conjunto de toda la información disponible de la serie hasta el instante $t - 1$, tenemos que:

$$\mathbb{E}(a_t^4 | \mathcal{F}_{t-1}) = 3\mathbb{E}(a_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = 3(\alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2)^2$$

Por lo tanto,

$$\mathbb{E}(a_t^4) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(a_t^4 | \mathcal{F}_{t-1})) = 3\mathbb{E}(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_1^2 a_{t-1}^4)$$

De forma que, si a_t es estacionario de cuarto orden con $m_4 = \mathbb{E}(a_t^4)$, luego,

$$\begin{aligned} m_4 &= 3[\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \text{Var}(a_t) + \alpha_1^2 m_4] = 3\alpha_0^2 \left(1 + 2\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}\right) + 3\alpha_1^2 m_4 \\ \implies m_4 &= \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Así pues, para que m_4 sea positivo α_1 debe satisfacer la condición $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$.

En conclusión, las condiciones que deben cumplir los α_i de un modelo ARCH(1) son $\alpha_0 < 0$, $0 \leq \alpha_1 < 1$ y $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$.

Además, utilizando (3.7), podemos calcular el coeficiente de curtosis¹ de a_t :

$$K = \frac{\mathbb{E}(a_t^4)}{[\text{Var}(a_t)]^2} = 3 \frac{\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - \alpha_1)(1 - 3\alpha_1^2)} \times \frac{(1 - \alpha_1)^2}{\alpha_0^2} = 3 \frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} \stackrel{(1)}{>} 3$$

Deducimos (1) del hecho de que, como $\alpha_1 > 0$, $\frac{1 - \alpha_1^2}{1 - 3\alpha_1^2} > 1$. Esto implica que las colas de la distribución de a_t son más pesadas que las de la distribución normal, lo que quiere decir que a_t con un modelo ARCH(1) es más probable que aparezcan valores atípicos que una serie de ruido blanco gaussiana.

¹El coeficiente de curtosis mide que tan empinada o achatada se encuentra una distribución. La distribución normal tiene un coeficiente de curtosis $K = 3$. Las distribuciones con $k = 3$ se denominan mesocúrticas, si $K > 3$ leptocúrticas, y si $K < 3$, platicúrticas.

3.1.2. El modelo ARCH(r)

Una vez vistas las características del modelo ARCH(1), podemos extrapolar estas ideas al modelo ARCH(r).

En este modelo, la varianza condicional σ_a^2 depende de los r últimos valores observados, de manera que ahora la estructura de h_t es similar a la de un AR(r), [6, p. 250]:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r a_{t-r}^2 \quad (3.8)$$

donde $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$.

Generalizando los cálculos que nos llevaron a la expresión (3.6) obtenemos que la varianza, σ^2 , de un proceso ARCH(r) es, siguiendo [7, p. 438]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_r}$$

de manera que los α_i deben cumplir la condición $\sum_{i=1}^r \alpha_i < 1$ para que la varianza sea finita.

La restricción que se obtenía en el ARCH(1) a partir de (3.7) se vuelve muy complicada de calcular para modelos ARCH de orden superior. Y el coeficiente de curtosis de estos modelos seguirá siendo mayor que 3.

3.1.3. Construcción de modelos ARCH

Como se puede ver en [8, p. 106-109], veremos una manera de construir un modelo ARCH mediante una serie de pasos.

1. El primer paso para construir un modelo ARCH específico para una serie $\{a_t^2\}$ consiste en determinar el orden r del modelo. Recordemos que la estructura de la varianza condicional en los modelos ARCH es similar a una estructura autorregresiva, tal y como veíamos en (3.2), por lo tanto, tal y como veíamos en los modelos AR, podemos utilizar la función de autocorrelación parcial, *fap*, para especificar el orden r del modelo.
2. Una vez determinado el orden r de nuestro modelo, estimamos los parámetros mediante la función de verosimilitud, que es de la forma:

$$f(a_1, \dots, a_T | \alpha) = f(a_T | \mathcal{F}_{T-1}) f(a_{T-1} | \mathcal{F}_{T-2}) \dots f(a_{r+1} | \mathcal{F}_m) f(a_1, \dots, a_r | \alpha)$$

$$= \prod_{t=r+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \times f(a_1, \dots, a_r|\alpha)$$

Por simplicidad, debido a que obtener la forma exacta de $f(a_1, \dots, a_r|\alpha)$ suele ser complicado, cuando la muestra es lo suficientemente grande podemos eliminar este último factor. De esta manera obtenemos que la función de verosimilitud de un modelo ARCH(r) será:

$$f(a_{r+1}, \dots, a_T|\alpha, a_1, \dots, a_r) = \prod_{t=r+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (3.9)$$

Maximizar esta función es equivalente a maximizar su logaritmo, lo cual es mucho más sencillo. Definimos entonces la función de verosimilitud logarítmica de un modelo ARCH(r) como:

$$l(a_{r+1}, \dots, a_T|\alpha, a_1, \dots, a_r) = - \sum_{t=r+1}^T \left(\frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) + \frac{1}{2} \frac{a_t^2}{\sigma_t^2} \right) \quad (3.10)$$

3. Por último, podemos comprobar si el modelo está bien ajustado. Por ejemplo, aplicando un **test de Ljung-Box**, del que hablamos ya en la sección 1.2.1, a los cuadrados de los residuos estandarizados, es decir, \hat{a}_t , siendo $\hat{a}_t = a_t/\sigma_t$.

3.1.4. Limitaciones de los modelos ARCH

Tal y como decíamos en la introducción de este capítulo, los ARCH fueron los primeros modelos propuestos para modelizar la varianza condicional de la serie, pero estos modelos tienen una serie de limitaciones, como se detalla en [6, p. 254], veremos algunas de ellas.

El primer inconveniente de estos modelos se debe a que son muy restrictivos, ya que como vimos en 3.1.1 los α_i deben cumplir varias condiciones, cada vez más restrictivas cuanto mayor sea el orden del modelo.

Además, estos modelos proporcionan una forma mecánica de describir el comportamiento de la varianza condicional, pero no nos dicen nada sobre las causas de este comportamiento.

Y por último, los ARCH tratan de igual manera los a_t positivos y negativos, pues trabaja con los cuadrados, pero en la práctica suele ser necesario tener esta diferencia en cuenta, ya que por ejemplo, en el caso de los activos financieros, los precios responden de manera diferente a retornos positivos y negativos.

Con todo esto, introducimos otros modelos desarrollados a partir de los descritos, para tratar de solventar esas limitaciones.

3.2. Modelos GARCH

Otro de los problemas de los modelos ARCH es que frecuentemente es necesario ajustar modelos de orden alto, lo cual implica la estimación de muchos parámetros. Ésto ha dado lugar al desarrollo de los modelos GARCH (modelo ARCH generalizado), en los cuales la varianza condicional de a_t está relacionada, además con los cuadrados de los valores pasados, como en los modelos ARCH, también con las varianzas condicionales pasadas.

Una serie $\{a_t\}$ sigue un modelo GARCH(r, s) si [6, p. 256]:

$$a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \quad h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j} \quad (3.11)$$

donde, tal y como ocurría en los modelos ARCH, los α_i y β_j deben cumplir una serie de condiciones [8, p. 114], de forma que $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{\max(r,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$. Se denotan los parámetros α_i y β_j como parámetros ARCH y GARCH, respectivamente.

De nuevo en estos modelos, h_t coincide con la varianza condicional de la serie.

3.2.1. El modelo GARCH(1,1)

Igual que para estudiar las características de los modelos ARCH utilizamos por simplicidad el modelo ARCH(1), introducimos ahora el modelo GARCH(1,1), [6, p. 256]:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (3.12)$$

donde $\alpha_0 > 0$, $0 \leq \alpha_1, \beta_1$.

Recordemos que, dado que σ^2 es la varianza marginal del proceso a_t , tenemos:

$$\sigma^2 = \text{Var}(a_t) = \mathbb{E}(a_t^2) = \mathbb{E}(\sigma_t^2)$$

de manera que tomando esperanzas en (3.12), teniendo en cuenta que por ser a_t estacionaria, $\text{Var}(a_t) = \text{Var}(a_{t-1})$, y siguiendo [7, p. 441]:

$$\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbb{E}(a_{t-1}^2) + \beta_1 \mathbb{E}(\sigma_{t-1}^2) \implies \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad (3.13)$$

Por lo tanto, para que el proceso sea estacionario α_1 y β_1 deben cumplir la condición $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Veamos ahora, tal y como describe [1, p. 311], una condición necesaria para la existencia del momento de orden 4. El momento de orden $2m$ existe, si y sólo si:

$$\mu(\alpha_1, \beta_1, m) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} < 1 \quad (3.14)$$

donde $a_0 = 1$ y $a_j = \prod_{i=1}^j (2i - 1)$.

Siguiendo el desarrollo de [1, p. 311-313] se llega a que:

$$\mathbb{E}(a_t^4) = 3\alpha_0^2 (1 + \alpha_1 + \beta_1) [(1 - \alpha_1 - \beta_1) (1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)]^{-1} \quad (3.15)$$

de donde concluimos que para que exista el momento de orden 4 necesariamente $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$.

Por último [6], el coeficiente de curtosis de este modelo es:

$$\frac{\mathbb{E}(a_t^4)}{[\mathbb{E}(a_t^2)]^2} = \frac{3 [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2]}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - 2\alpha_1^2} > 3$$

De esta expresión deducimos una última condición para α_1 y β_1 , $1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 - \beta_1)^2 > 0$. Además, dado que el coeficiente de curtosis del modelo GARCH(1,1) es mayor que 3, diremos que un proceso con un modelo GARCH(1,1) es leptocúrtico, es decir, tendrá unas colas más largas que la distribución normal.

Recapitulando, las condiciones que deben cumplir los parámetros α_1 y β_1 son:

1. $0 \leq \alpha_1, \beta_1$
2. $\alpha_1 + \beta_1 < 1$
3. $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$
4. $1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 - \beta_1)^2 > 0$

Volviendo a la ecuación (3.12) del modelo se ve claramente que un a_{t-1}^2 o h_{t-1} altos darán lugar a una alta probabilidad de que h_t , es decir, la varianza condicional en el instante t , sea alta, lo que implicará una alta volatilidad. Esto quiere decir que un valor a_{t-1}^2 suele ir seguido de un a_t^2 también alto (volatility clustering).

3.2.2. El modelo GARCH(r, s)

Tal y como vimos al inicio de la sección, los modelos GARCH(r, s) serán de la forma:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j h_{t-j}$$

Con todo lo que hemos visto hasta ahora, y fijándonos en esta expresión, notemos que en este modelo, los cuadrados de los elementos de la serie tienen una estructura autorregresiva, AR, (2.4) de orden r , y la varianza condicional una estructura de medias móviles, MA, (2.8) de orden s .

Claramente, como en los modelos anteriores, los parámetros de este modelo también deberán cumplir una serie de restricciones. Concretamente, como se puede ver en [8, 114], para que la varianza sea positiva se debe verificar que:

1. $\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$
2. $\sum_{i=1}^{\max(r,s)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$

Sea $\nu_t = a_t^2 - h_t$, de forma que $\nu_{t-i} = a_{t-i}^2 - h_{t-i}$ para todo $i = 0, \dots, s$, podemos escribir la dependencia de los cuadrados como: (Se puede ver en [6, p. 256])

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\max(r,s)} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^2 - \nu_t - \sum_{j=1}^s \beta_j \nu_{t-j} \quad (3.16)$$

Tomando esperanzas en esta expresión se tiene, como se dice en [7, p. 445], que:

$$\mathbb{E}(a_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max(r,s)} (\alpha_i + \beta_i)}$$

lo que implica restricciones sobre los parámetros α_i y β_i para que el proceso sea estacionario, ya que el denominador ha de ser positivo.

En caso de que el operador autorregresivo de la expresión (3.16) tenga raíces entre -1 y 1 , entonces estaremos ante un proceso integrado no estacionario, o proceso **IGARCH** [7, p. 445].

Notemos que los modelos GARCH siguen manteniendo algunas de las debilidades que presentaban los modelos ARCH, ya que por ejemplo, sigue respondiendo por igual a innovaciones a_t altas negativas y positivas.

3.2.3. Construcción de modelos GARCH

Siguiendo [8, p. 121], se pueden estimar los modelos GARCH mediante el **método de estimación en dos pasos**.

En primer lugar, se estima la ecuación media de la serie de retornos, sin tener en cuenta la volatilidad, y se denota la serie de residuos obtenida como a_t . Y en segundo lugar, se considera la serie a_t^2 y se aplica el método de máxima verosimilitud, análogo al que vimos en la sección 3.1.3, para estimar los parámetros de (3.16). Denotando los coeficientes estimados AR y MA

como $\hat{\phi}_i$ y $\hat{\theta}_i$, respectivamente, los coeficientes estimados del modelo GARCH serán $\hat{\beta}_i = \hat{\theta}_i$ y $\hat{\alpha}_i = \hat{\phi}_i - \hat{\theta}_i$. Estos estimadores son buenas aproximaciones siempre y cuando la muestra sea lo suficientemente grande.

Cabe destacar que no es fácil especificar el orden de un modelo GARCH, y en la práctica se suelen utilizar modelos de orden bajo. Además la función de verosimilitud se aplica asumiendo que se conocen los valores de volatilidad pasados, por lo que se contruye el modelo de forma recursiva.

3.3. Modelos EGARCH

Vimos que tanto el modelo ARCH como el GARCH tenían la desventaja de que trataban por igual los efectos de las innovaciones positivas y negativas, cuando en la práctica generalmente, no afectan de igual manera, esto se debe a que la varianza condicional se define dependiendo del cuadrado de la variable en el pasado [5, p. 210]. Con el fin de solucionar esto aparece el modelo GARCH exponencial, o modelo **EGARCH**.

Como se dice en [8, p. 124-125], para permitir el efecto ‘asimétrico’ de las innovaciones positivas y negativas se introduce la siguiente función, con θ y γ constantes reales, que da lugar a las denominadas innovaciones ponderadas, como:

$$g(\epsilon_t) = \theta\epsilon_t + \gamma[|\epsilon_t| - \mathbb{E}(|\epsilon_t|)] \quad (3.17)$$

de forma que $g(a_t)$ es lineal en a_t , con pendiente $(\theta + \gamma)$ si $0 < a_t < \infty$ y $(\theta - \gamma)$ si $-\infty < a_t < 0$. Por lo tanto, la expresión 3.17 se puede reescribir, de forma que se ve más clara la asimetría, como:

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)\epsilon_t - \gamma\mathbb{E}(|\epsilon_t|) & \text{si } \epsilon_t \geq 0 \\ (\theta - \gamma)\epsilon_t - \gamma\mathbb{E}(|\epsilon_t|) & \text{si } \epsilon_t < 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Una vez definidas las innovaciones ponderadas, podemos escribir un modelo EGARCH de la forma:

$$a_t = \sqrt{h_t}\epsilon_t, \quad \ln(h_t) = \alpha_0 + \frac{1 + \beta_1 B + \dots + \beta_s B^s}{1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m} g(\epsilon_{t-1}) \quad (3.19)$$

donde α_0 es constante y B es el operador de retardos, de forma que $Bg(\epsilon_t) = g(\epsilon_{t-1})$, y los polinomios $1 + \beta_1 B + \dots + \beta_s B^s$ y $1 - \alpha_1 B - \dots - \alpha_m B^m$ son polinomios con raíces fuera del círculo unidad y sin factores comunes [5, p. 211]. Análogamente a los modelos ARCH Y GARCH, la expresión (3.19) utiliza una estructura ARMA para describir la varianza condicionada de los a_t .

3.3.1. El modelo EGARCH(1, 1)

Por simplicidad, consideremos el modelo EGARCH(1, 1):

$$a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t, \quad (1 - \alpha B) \ln(h_t) = (1 - \alpha) \alpha_0 + g(\epsilon_{t-1}) \quad (3.20)$$

Asumiendo que $\mathbb{E}(|\epsilon_t|) = \sqrt{2/\pi}$ por ser ϵ_t iid² con distribución normal, y definiendo $\alpha_* = (1 - \alpha) \alpha_0 - \sqrt{2/\pi} \gamma$ tenemos que la varianza condicional para un modelo EGARCH evoluciona de forma no lineal dependiendo del signo de a_{t-1} y es de la siguiente forma, como se puede ver en [8, p. 125]:

$$\sigma_t^2 = \sigma_{t-1}^{2\alpha} \exp(\alpha_*) = \begin{cases} \exp\left((\gamma + \theta) \frac{a_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right) & \text{si } a_{t-1} \geq 0 \\ \exp\left((\gamma - \theta) \frac{|a_{t-1}|}{\sigma_{t-1}}\right) & \text{si } a_{t-1} < 0 \end{cases}$$

El modelo será, por tanto, no lineal cuando $\theta \neq 0$, y cuanto mayor es el orden del modelo, más complicada lo hace la no linealidad.

3.3.2. El modelo EGARCH(m, s)

Además de la expresión (3.19), el modelo EGARCH se puede escribir como:

$$\ln(h_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^m \beta_j \ln(h_{t-1}) \quad (3.21)$$

De esta forma, una innovación a_{t-i} positiva suma $\alpha_i (1 + \gamma_i) |\epsilon_{t-i}|$ y una innovación negativa $\alpha_i (1 - \gamma_i) |\epsilon_{t-i}|$, y el coeficiente γ_i indica el efecto de apalancamiento de a_{t-i} , como se dice en [8, p. 125].

Muchas de las propiedades de los modelos EGARCH se obtienen de manera similar a los GARCH, sin embargo, estos modelos difieren en varios aspectos, derivados del hecho de que el modelo EGARCH utilice el logaritmo de la volatilidad y responda de distinta manera a las innovaciones positivas y negativas.

3.4. Otros modelos heterocedásticos

Aunque los modelos introducidos hasta ahora son los más conocidos y utilizados en la práctica, existen otros muchos modelos para representar la evolución de la volatilidad. Veremos algunos de ellos.

²variables independientes e idénticamente distribuidas

- **Modelo IGARCH**

Como ya mencionamos en 3.2.2, existe el modelo integrado **IGARCH**. Si escribimos un modelo ARMA(m, s) de la forma 3.16, el polinomio autorregresivo que define el modelo anterior tendrá raíz unitaria si $\sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) = 1$, siendo $m = \max(r, s)$. Si se tiene una raíz unitaria, entonces tendremos un modelo IGARCH [5, p. 210].

Una de las características principales de estos modelos, [8, p. 122], es que el efecto ν_{t-i} de los a_{t-i}^2 pasados sobre a_t^2 es persistente, siendo $\nu_{t-i} = a_{t-i}^2 - h_{t-i}$. De esta forma las predicciones forman una línea recta con pendiente α_0 .

Por ejemplo, el modelo IGARCH(1, 1) es de la forma:

$$a_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \quad h_t = \alpha_0 + \beta_1 h_{t-1} + (1 - \beta_1) a_{t-1}^2 \quad (3.22)$$

con $0 < \beta_1 < 1$.

- **Modelo M-GARCH**

Otro modelo a destacar es el **M-GARCH**, o modelo GARCH *en la media*, como se puede ver en [8, p. 123]. Ya que en muchas series financieras el valor puede depender de la volatilidad, en lugar de modelar la varianza como en los modelos anteriores, este modelo añade un término de heterocedasticidad a la ecuación en media. Así, una expresión del M-GARCH(1, 1) será:

$$\begin{aligned} z_t &= \mu + c h_t + a_t, & a_t &= \sqrt{h_t} \epsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

siendo z_t la serie a estudiar, μ una constante y c un parámetro denotado parámetro de la prima de riesgo, e indica que z_t está relacionado positivamente con su volatilidad.

- **Modelo CHARMA**

Cabe mencionar también el modelo **CHARMA**, o modelo ARCH *heterocedástico condicional*. Este modelo se utiliza para tratar observaciones atípicas y se caracteriza por utilizar coeficientes aleatorios para producir heterocedasticidad condicional [6, p. 262].

Se define un modelo CHARMA general, [6, p. 262], como:

$$\phi(B)(z_t - \mu) = \theta(B)a_t, \quad \delta_t(B)a_t = \nu_t \quad (3.24)$$

donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ son los polinomios autorregresivo y de media móvil, respectivamente, tal y como los definimos en la sección 2.1. μ es la media de la serie temporal z_t , ν_t es una serie gaussiana de ruido blanco de media cero y varianza σ_ν^2 [8, p. 131]. Y $\delta_t(B) = 1 - \delta_{1,t}B - \dots - \delta_{r,t}B^r$ es un polinomio de coeficientes aleatorios en B [6, p. 262], con $(\delta_{1,t}, \dots, \delta_{r,t})$ una secuencia de vectores aleatorios iid ³ con media cero y no negativos.

³independientes y idénticamente distribuidos

Capítulo 4

Aplicación práctica

Llegados a este punto, vamos a llevar a cabo una aplicación con datos reales. La muestra con la que vamos a trabajar ha sido obtenida de <https://finance.yahoo.com> y corresponde con los precios diarios de cierre de la acción de Inditex desde el 1 de Enero de 2008 hasta el 31 de Diciembre de 2018. Notemos que la Bolsa de Valores de Madrid no opera los fines de semana, pero supondremos los días son seguidos, es decir, que la distancia entre los datos es la misma.

4.1. Análisis de la serie temporal

Para comenzar con el estudio de la serie, en primer lugar leemos los datos con el software R, y una vez leídos, los transformamos en una serie de tiempo.

```
ITX<-read.csv("indit.csv",header=TRUE,sep=";")
sITX<-timeSeries(ITX$Close,ITX$Date)
```

Ahora bien, como decíamos en la Sección 1.3 al definir los retornos, en la mayoría de las series temporales financieras, en lugar de trabajar con la serie de precios de los activos, se suele trabajar con la diferencia de precios, es decir, con los retornos. Esto se debe, entre otras razones, tal y como se puede ver en [8, p. 2], a que los retornos tienen mejores propiedades estadísticas, por lo que son más fáciles de manejar, y no presentan escalas.

Por lo tanto, calculamos la serie de retornos de los datos.

```
rITX<-returns(sITX)
```

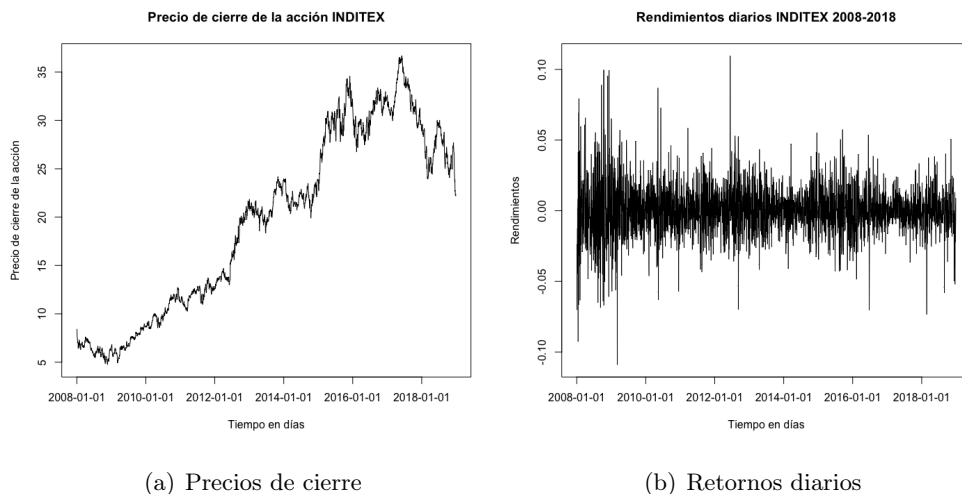


Figura 4.1: Precios de cierre y retornos diarios e la acción de Inditex

En el primer gráfico de la Figura 4.1 podemos ver que la serie de precios de cierre de la acción presenta una clara tendencia creciente a lo largo de los años, hasta aproximadamente 2017, y después una clara tendencia decreciente. En el segundo gráfico vemos que la serie de retornos parece estacionaria, con una media constante en torno al cero.

Podemos comprobar, aplicando una prueba *t de Student*, que efectivamente la media de la serie de retornos es cero.

```
t.test(rITX)

>
> One Sample t-test
>
> data: rITX
> t = 1.0438, df = 2807, p-value = 0.2967
> alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
> 95 percent confidence interval:
> -0.0003054631 0.0010008643
> sample estimates:
> mean of x
> 0.0003477006
```

Este test realiza un contraste con hipótesis nula que la media de la serie sea cero, y alternativa que no lo sea. De la salida de R obtenemos que el $p\text{-valor} = 0.2967$ es mayor que cualquiera de los niveles de significación habituales¹, por lo que no podemos rechazar la hipótesis nula, y en consecuencia, asumimos, tal y como esperábamos, que la media de la serie de retornos es cero.

¹1%, 5% ó 10%

Comprobaremos ahora, aplicando el test de raíces unitarias de Dickey-Fuller, definido en la Sección 2.2.1, si la serie es estacionaria.

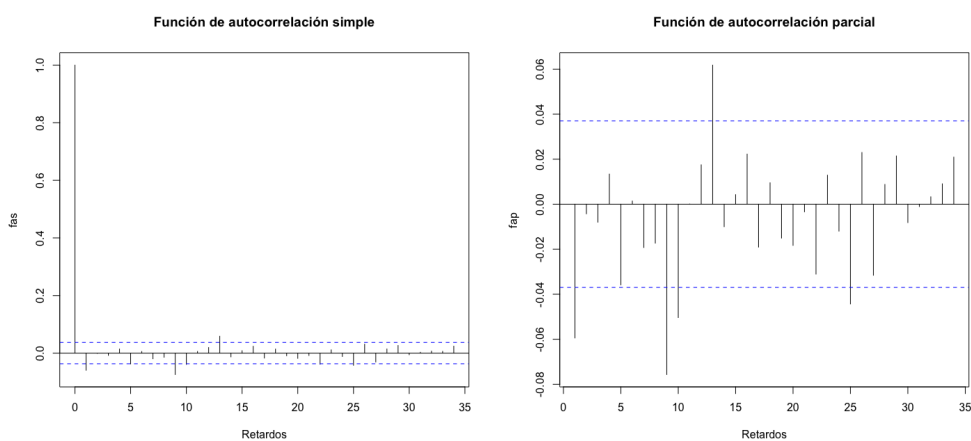
```
adf.test(rITX,alternative="stationary")  
  
>  
> Augmented Dickey-Fuller Test  
>  
> data: rITX  
> Dickey-Fuller = -14.374, Lag order = 14, p-value = 0.01  
> alternative hypothesis: stationary
```

Recordemos que este test realiza el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \text{Hay raíz unitaria} \implies \text{no estacionariedad} \\ H_a : \text{No hay raíz unitaria} \implies \text{estacionariedad} \end{cases} \quad (4.1)$$

De la salida de R observamos que considerando un nivel de significación del 5% podemos rechazar la hipótesis nula de no estacionariedad. Por lo tanto, confirmamos lo que ya suponíamos, que nuestra serie de retornos es estacionaria y tiene media cero.

En caso de que la serie no fuese estacionaria, antes de implementar un modelo Box-Jenkins deberíamos aplicar alguna de las transformaciones vistas en la Sección 1.2.3.



(a) Función de autocorrelación simple

(b) Función de autocorrelación parcial

Figura 4.2: Funciones de autocorrelación

En la Figura 4.2 podemos ver las gráficas de las funciones de autocorrelación simple y parcial (Sección 1.2.1) de los residuos. A la vista de la gráfica de la función de autocorrelación simple, Figura 4.2(a), es claro que el primer coeficiente de autocorrelación es significativo. Para comprobarlo, aplicamos el test Ljung-Box (Sección 1.2.1):

```
Box.test(rITX,lag=1,type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test
>
> data:  rITX
> X-squared = 9.9273, df = 1, p-value = 0.001628

Box.test(rITX,lag=5,type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test
>
> data:  rITX
> X-squared = 14.586, df = 5, p-value = 0.01229

Box.test(rITX,lag=10,type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test
>
> data:  rITX
> X-squared = 36.144, df = 10, p-value = 7.952e-05
```

Recordemos que este test se utiliza para ver si una serie de observaciones están incorreladas y son independientes. Se realiza el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0 \\ H_a : \rho_i \neq 0 \text{ para algún } i \in 1, \dots, m \end{cases}$$

De la salida de R vemos que para un nivel de significación del 5% podemos rechazar la hipótesis nula en los test, tanto para 1, 5 o 10 retardos. Esto implica, como ya intuíamos por la Figura 4.2(a) que el primer coeficiente de autocorrelación es muy significativo, y por tanto, al haber correlación, la serie no es ruido blanco (Sección 1.1). Con el rápido decrecimiento de las autocorrelaciones a cero podemos reafirmar que la serie es estacionaria, por lo que estamos en situación de ajustar un modelo Box-Jenkins.

4.2. Ajuste de modelo Box-Jenkins

A la hora de elegir el modelo que mejor se ajusta a los datos, hay que tener en cuenta que cuanto mayor sea el número de parámetros, mayor será la verosimilitud y menor la suma de los cuadrados de los errores. Por lo tanto, utilizaremos el criterio de información de Akaike². Utilizando la función `auto.arima`, R nos devuelve el modelo que mejor se ajusta a los datos, en relación al AIC.

```
ajuste=auto.arima(rITX, ic="aic")
ajuste

> Series: rITX
> ARIMA(3,0,1) with non-zero mean
>
> Coefficients:
>      ar1      ar2      ar3      ma1      mean
>      0.8732  0.0501 -0.0122 -0.9350  4e-04
> s.e.  0.0516  0.0253  0.0198  0.0482  2e-04
>
> sigma^2 = 0.0003103: log likelihood = 7359.57
> AIC=-14707.13   AICc=-14707.1   BIC=-14671.49
```

Obtenemos que el modelo que mejor se ajusta a los datos de la serie es un ARMA(3,1). Sin embargo, notemos que, este modelo utiliza muchos parámetros y algunos de ellos serían no significativos³, como el `ar2` y el `ar3`, con lo cual, definiremos manualmente otros modelos más sencillos y los compararemos con este para comprobar si nos merece la pena trabajar con tantos parámetros, o si por el contrario compensa elegir otro más simple.

```
ARMA21=arima(rITX,order=c(2,0,1))
ARMA21

>
> Call:
> arima(x = rITX, order = c(2, 0, 1))
>
> Coefficients:
>      ar1      ar2      ma1  intercept
>      0.8770  0.0401 -0.9392      4e-04
> s.e.  0.0478  0.0203  0.0439      2e-04
>
```

²Como se puede ver en [9, p. 156], el criterio AIC es un criterio de información que se define como:

$$\ln L = -2 \ln[\text{máxima verosimilitud}] + 2M$$

siendo M el número de parámetros del modelo

³Consideramos que un parámetro no es significativo cuando se encuentre dentro del intervalo $(0 - 2 * s.e., 0 + 2 * s.e.)$

```

> sigma^2 estimated as 0.0003098: log likelihood = 7359.38, aic = -14708.76

ARMA11=arima(rITX,order=c(1,0,1))
ARMA11

>
> Call:
> arima(x = rITX, order = c(1, 0, 1))
>
> Coefficients:
>      ar1      ma1  intercept
>    0.8725 -0.9038    4e-04
> s.e. 0.0783  0.0691    3e-04
>
> sigma^2 estimated as 0.0003102: log likelihood = 7357.34, aic = -14706.68

```

Hemos ajustado dos modelos, el ARMA(2,1) y el ARMA(1,1). De la salida de R vemos que el AIC de los modelos casi no varía, sin embargo el del ARMA(2,1) es un poco menor que los otros dos, por lo que nos quedamos con este modelo.

Ahora bien, notemos que el coeficiente `ar1` y el `ma1` en el modelo ARMA(2,1) son muy similares. Esto implica que los polinomios autorregresivo y de medias móviles tienen una raíz común, y en consecuencia, que se podría ajustar un modelo más sencillo que se explique bien los datos.

Vamos a ajustar un modelo AR(1), y veamos si los residuos cumplen la condición de ser ruido blanco, en cuyo caso, el modelo estará bien ajustado.

```

AR1=arima(rITX,order=c(1,0,0))
AR1

>
> Call:
> arima(x = rITX, order = c(1, 0, 0))
>
> Coefficients:
>      ar1  intercept
>   -0.0594    3e-04
> s.e.  0.0188    3e-04
>
> sigma^2 estimated as 0.0003104: log likelihood = 7356.78, aic = -14707.56

Box.test(residuals(AR1),type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test

```

```

>
> data: residuals(AR1)
> X-squared = 0.00016084, df = 1, p-value = 0.9899

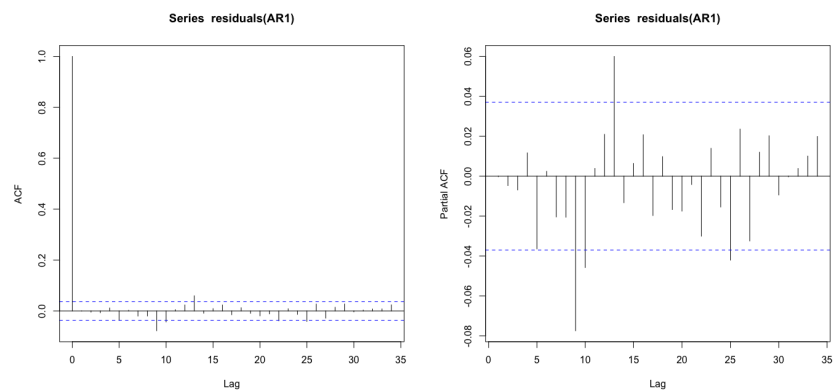
Box.test(residuals(AR1),lag=5,type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test
>
> data: residuals(AR1)
> X-squared = 4.3008, df = 5, p-value = 0.507

```

De los test de Ljung-Box para los residuos del modelo concluimos que son ruido blanco, ya que en ambos test se obtiene un p-valor mayor que cualquiera de los niveles habituales de significación y por tanto no se rechaza la hipótesis nula. Se tiene entonces que los residuos del modelo pueden ser considerados ruido blanco, luego el modelo AR(1) sí se ajusta bien a los datos.

Esto se ve también en las gráficas de la *fas* y la *fap* de los residuos en la Figura 4.3



(a) Función de autocorrelación simple (b) Función de autocorrelación parcial

Figura 4.3: Funciones de autocorrelación de los residuos

Notemos que, como podemos ver en el gráfico de la Figura 4.4, la inversa de la raíz del polinomio autorregresivo está dentro del círculo unidad, por lo que la raíz estará fuera, y en consecuencia el modelo es estacionario.

Una vez elegido el modelo veamos si los coeficientes son significativos.

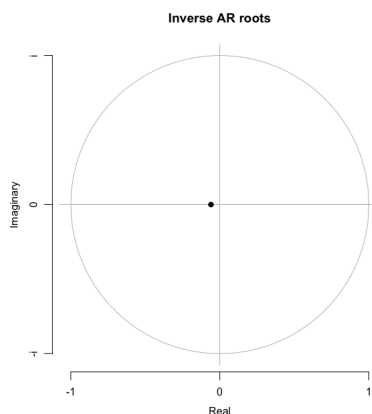


Figura 4.4: Raíz inversa del polinomio autorregresivo

```
coefstest(AR1)

>
> z test of coefficients:
>
>           Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
> ar1      -0.05944968  0.01884262 -3.1551 0.001605 **
> intercept 0.00034859  0.00031438  1.1088 0.267513
> ---
> Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

El intercepto, como ya comprobamos al realizar el `t.test`, no es significativo para ninguno de los niveles de significación habituales, de forma que consideraremos un modelo sin este coeficiente. Sin embargo, el coeficiente autorregresivo `ar1` sí es significativo. Así, nuestro modelo AR(1) para la media de la serie de retornos será:

```
AR1=arima(rITX,order=c(1,0,0),include.mean = FALSE)

>
> Call:
> arima(x = rITX, order = c(1, 0, 0), include.mean = FALSE)
>
> Coefficients:
>           ar1
>          -0.0590
> s.e.      0.0188
>
> sigma^2 estimated as 0.0003105:  log likelihood = 7356.16,  aic = -14708.33
```

$$R_t = -0,059R_{t-1} + a_t$$

4.3. Ajuste de modelo de heterocedasticidad condicionada para la volatilidad

Ahora que ya tenemos nuestro modelo para la media ajustado, tenemos que comprobar si existe heterocedasticidad en la varianza, para comprobar si es necesario ajustar un modelo GARCH.

En primer lugar, para hacernos una idea intuitiva, vamos a calcular y graficar los residuos al cuadrado del modelo AR que hemos ajustado.

```
rescuad<-resid(AR1)^2
```

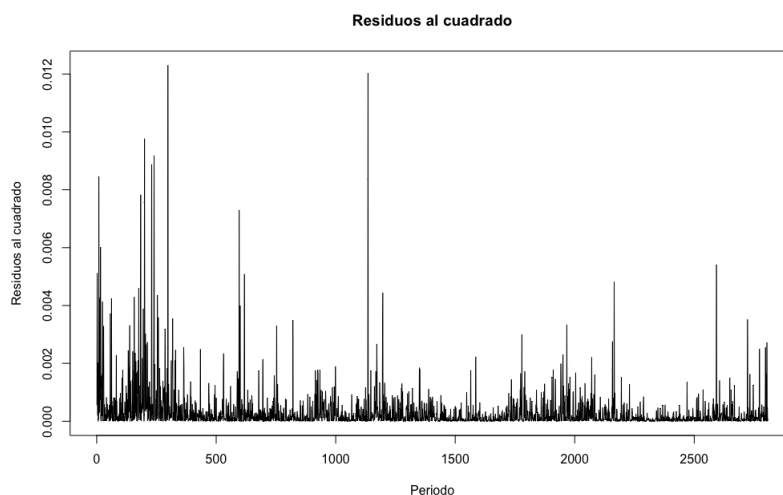


Figura 4.5: Residuos al cuadrado del modelo

En la Figura 4.5 vemos claramente que la varianza de los residuos al cuadrado no es constante, por lo tanto sí que presentará heterocedasticidad, pero tenemos que probarlo analíticamente. Si la varianza es heterocedástica diremos que presenta ‘efectos ARCH’.

Para comprobar si hay efectos ARCH podemos revisar si el cuadrado de los residuos es ruido blanco, ya que en caso de que lo sea la varianza no será heterocedástica.

Podemos ver en la Figura 4.6 que las barras se salen de las bandas de aceptación para un nivel de significación del 5%, tanto en la *fas* como en la *fap*, lo que indica que los residuos no serán ruido blanco.

Además, haciendo un test Ljung-Box para distintos lags, obtenemos un p-valor inferior al

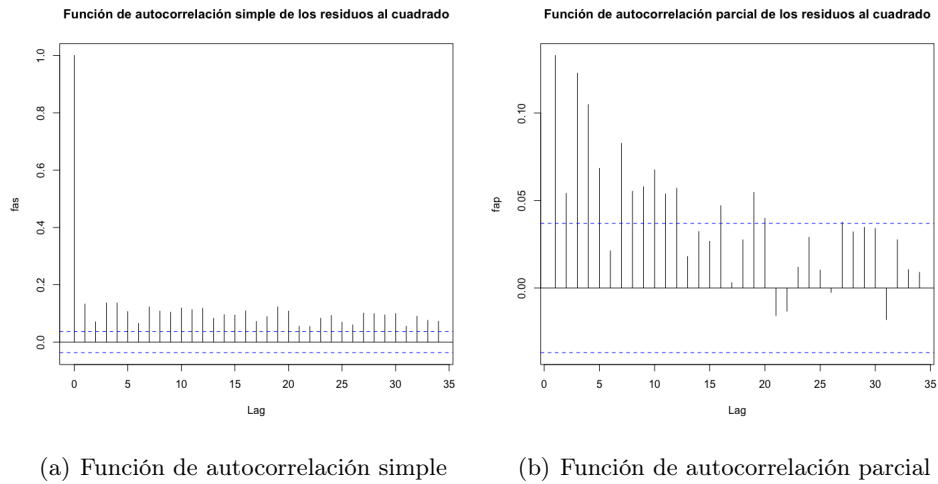


Figura 4.6: Funciones de autocorrelación simple y parcial de los residuos al cuadrado

5% de significancia, por lo que podemos rechazar la hipótesis nula de no autocorrelación en el cuadrado de los residuos, y por lo tanto, no son ruido blanco. Así, confirmamos que sí hay efectos ARCH.

```
Box.test(rescuad,type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test
>
> data: rescuad
> X-squared = 49.666, df = 1, p-value = 1.822e-12

Box.test(rescuad,lag=5,type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test
>
> data: rescuad
> X-squared = 200.23, df = 5, p-value < 2.2e-16

Box.test(rescuad,lag=10,type="Ljung-Box")

>
> Box-Ljung test
>
> data: rescuad
> X-squared = 358, df = 10, p-value < 2.2e-16
```

Otra manera de comprobar si la varianza de la serie es heterocedástica, consiste en aplicar la función `ArchTest` de R a la serie de retornos. Esta función realiza el llamado **test del multiplicador de Lagrange de Engle**, un test equivalente al habitual test F para los coeficientes en una regresión lineal que busca detectar efectos ARCH. Se puede ver más detalladamente en [8, p. 101-102].

Este test realiza el contraste

$$\begin{cases} H_0 : \text{No hay efectos ARCH} \\ H_a : \text{Sí hay efectos ARCH} \end{cases}$$

```
ArchTest(rITX, lags=1, demean=TRUE)

>
> ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects
>
> data: rITX
> Chi-squared = 54.518, df = 1, p-value = 1.54e-13
```

En la salida de R observamos que el estadístico está en la región crítica, y por tanto, tenemos pruebas significativas para rechazar la hipótesis nula. Por lo tanto, confirmamos que sí hay efectos ARCH.

Ahora que sabemos que la varianza es heterocedástica, tenemos que elegir un modelo GARCH para nuestra serie. Consideraremos un modelo GARCH(1,1), y estudiaremos si se cumplen las hipótesis estructurales.

Una vez elegido el modelo para la media y el modelo para la varianza definimos en R un AR(1)+GARCH(1,1) con distribución normal.

```
ug_spec2=ugarchspec(variance.model=list(garchOrder=c(1,1)),mean.model=list(armaOrder=c(1,0)),
distribution.model = "norm")
```

Una vez definido el modelo, lo ajustamos con nuestros datos.

```
ugfit2<-ugarchfit(spec=ug_spec2,data=rITX)
ugfit2

....

> *-----*
```

```

> *          GARCH Model Fit          *
> *-----*
>
> Conditional Variance Dynamics
> -----
> GARCH Model : sGARCH(1,1)
> Mean Model  : ARFIMA(1,0,0)
> Distribution : norm
> Optimal Parameters
> -----
>      Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
> mu      0.000458   0.000271   1.68732 0.091542
> ar1     -0.036283  0.019776  -1.83468 0.066554
> omega   0.000003  0.000003  0.92068 0.357217
> alpha1  0.047494  0.017030  2.78877 0.005291
> beta1   0.944074  0.019657  48.02721 0.000000
> ....

```

Notemos que el parámetro `ar1` no es significativo, lo que nos hace sospechar que puede que el modelo no sea el adecuado.

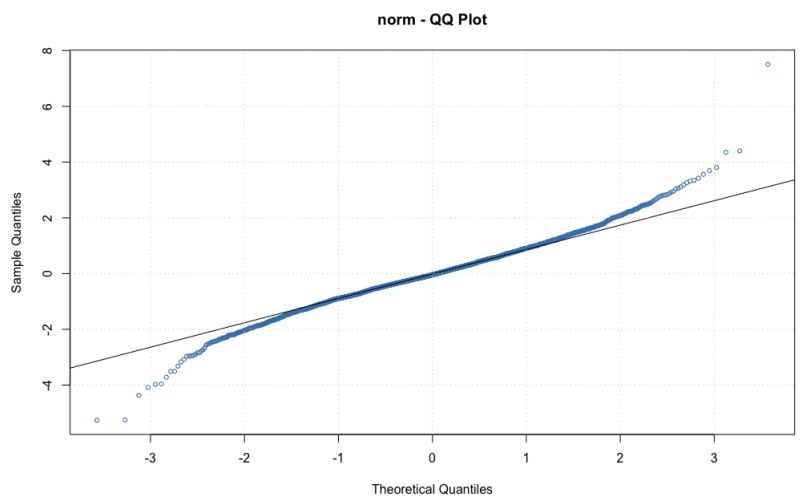


Figura 4.7: Gráfico Q-Q de los residuos estandarizados del modelo

El gráfico de la Figura 4.7 es un gráfico Q-Q. Estos gráficos permiten comprobar si la distribución de probabilidad de la muestra coincide con una distribución teórica concreta, en este caso la distribución normal. Vemos que los residuos estandarizados del modelo no siguen una distribución normal, ya que éstos se salen de la línea al principio y al final del gráfico. Esto último nos hace pensar en considerar una distribución con colas más pesadas, por ejemplo, la distribución t de Student.

Por lo tanto, definimos en R un modelo AR(1)+GARCH(1,1) pero con distribución t de Student.

```
ug_spec=ugarchspec(variance.model=list(garchOrder=c(1,1)),mean.model=list(armaOrder=c(1,0))
,distribution.model = "std")
```

Ajustamos el nuevo modelo con nuestros datos, y analizaremos la salida de R por partes, para ver si se cumplen las hipótesis estructurales del modelo.

```
ugfit<-ugarchfit(spec=ug_spec,data=rITX)

....

> *-----*
> *          GARCH Model Fit          *
> *-----*
>
> Conditional Variance Dynamics
> -----
> GARCH Model : sGARCH(1,1)
> Mean Model : ARFIMA(1,0,0)
> Distribution : std
> Optimal Parameters
> -----
>      Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
> mu      0.000252   0.000252   1.00012 0.317253
> ar1    -0.042436   0.018725  -2.26631 0.023432
> omega   0.000002   0.000003   0.72645 0.467560
> alpha1  0.041950   0.012277   3.41691 0.000633
> beta1   0.952254   0.013053  72.95278 0.000000
> shape   6.512831   1.006210   6.47264 0.000000
....
```

En primer lugar, obtenemos que los coeficientes de la parte GARCH, `alpha1` y `beta1`, son significativos, lo que implica que son significativamente distintos de cero. La constante `omega` no es significativa, por lo que podemos considerar que es cero. Esto significa que en caso de que el modelo esté bien ajustado la varianza σ_t^2 de la serie temporal será

$$\sigma_t^2 = 0,042a_{t-1} + 0,952\sigma_{t-1}^2$$

Notemos que aparece un parámetro denotado `shape` que no aparecía en el modelo con la distribución normal. Este parámetro indica la estimación de los grados de libertad de la distribución.

Las siguientes herramientas de diagnóstico que obtenemos de la salida de R sirven para chequear que las hipótesis estructurales de nuestro modelo son coherentes con nuestra serie de datos.

```

....
> Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
> -----
>
>                statistic p-value
> Lag[1]                0.2364 0.6268
> Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [2]    0.5197 0.9594
> Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [5]    1.3867 0.8734
> d.o.f=1
> H0 : No serial correlation
....

```

El test de Ljung-Box nos confirma que los residuos del modelo cumplen la condición de comportarse como ruido blanco.

```

....
> Weighted ARCH LM Tests
> -----
>
>      Statistic Shape Scale P-Value
> ARCH Lag[3]    0.9180 0.500 2.000 0.3380
> ARCH Lag[5]    0.9209 1.440 1.667 0.7566
> ARCH Lag[7]    2.5112 2.315 1.543 0.6101
....

```

La prueba ARCH LM proporciona un medio para probar si el modelo de heterocedasticidad condicionada explica la varianza de la serie. Realiza un contraste tomando hipótesis nula que el modelo explique bien el comportamiento de la varianza, y como el estadístico no se encuentra en la región crítica para ninguno de los retardos, según este test podemos considerar que sí lo explica bien.

```

....
> Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
> -----
>
> group statistic p-value(g-1)
> 1    20    18.18    0.5103
> 2    30    29.65    0.4316
> 3    40    31.66    0.7920
> 4    50    45.99    0.5960
....

```

La prueba de bondad de ajuste de Pearson ajustada compara la distribución empírica de los residuos con la distribución teórica, en este caso la *t* de Student. Realiza un contraste considerando como hipótesis nula que las distribuciones teórica y empírica coincidan. Como el estadístico se encuentra fuera de la región crítica para cualquiera niveles de significación habituales, consideramos que las distribuciones coinciden.

Por lo tanto, hemos comprobado que el modelo AR(1)+GARCH(1,1) se ajusta bien a nuestra serie de retornos.

Recordemos que al introducir los modelos EGARCH en la Sección 3.3 decíamos que una de las ventajas que tenían estos modelos en relación a los GARCH era el hecho de que no tratan de igual manera las innovaciones positivas y negativas. Generalmente, en las series de retornos estas no afectan de igual manera, por lo que vamos a tratar de ajustar un modelo EGARCH.

Definimos entonces un modelo AR(1)+EGARCH(1,1) con una distribución t de Student.

```
ug_spec3=ugarchspec(variance.model=list(model="eGARCH",garchOrder=c(1,1)),mean.model=list(armaOrder=c(1,0)),
distribution.model = "std")
```

Ajustamos el modelo a nuestros datos y analizaremos a través de la salida de R si se cumplen las hipótesis estructurales del modelo, tal y como hicimos con el anterior.

```
ugfit3<-ugarchfit(spec=ug_spec3,data=rITX)
ugfit3

....

> *-----*
> *          GARCH Model Fit          *
> *-----*
>
> Conditional Variance Dynamics
> -----
> GARCH Model : eGARCH(1,1)
> Mean Model  : ARFIMA(1,0,0)
> Distribution : std
> Optimal Parameters
> -----
>      Estimate  Std. Error   t value Pr(>|t|)
> mu      0.000097   0.000242    0.39835 0.690375
> ar1    -0.037862   0.019030   -1.98961 0.046634
> omega  -0.064906   0.005856  -11.08384 0.000000
> alpha1 -0.049100   0.010087   -4.86782 0.000001
> beta1   0.992104   0.000824  1203.72274 0.000000
> gamma1  0.100409   0.025885    3.87908 0.000105
> shape   6.961855   0.913689    7.61950 0.000000
....
```

Observamos que todos los parámetros estimados de este modelo son significativos excepto

μ , por lo que podemos considerar que este es cero. Además, el parámetro `shape` nos indica los grados de libertad estimados de la distribución, en este caso consideraremos 6,97.

```
....
> Weighted Ljung-Box Test on Standardized Residuals
> -----
>
>                statistic p-value
> Lag[1]                0.09293  0.7605
> Lag[2*(p+q)+(p+q)-1] [2]  0.76078  0.8705
> Lag[4*(p+q)+(p+q)-1] [5]  1.77764  0.7742
> d.o.f=1
> H0 : No serial correlation
>
....
```

Por el test de Ljung-Box asumimos que los residuos se comportan como ruido blanco.

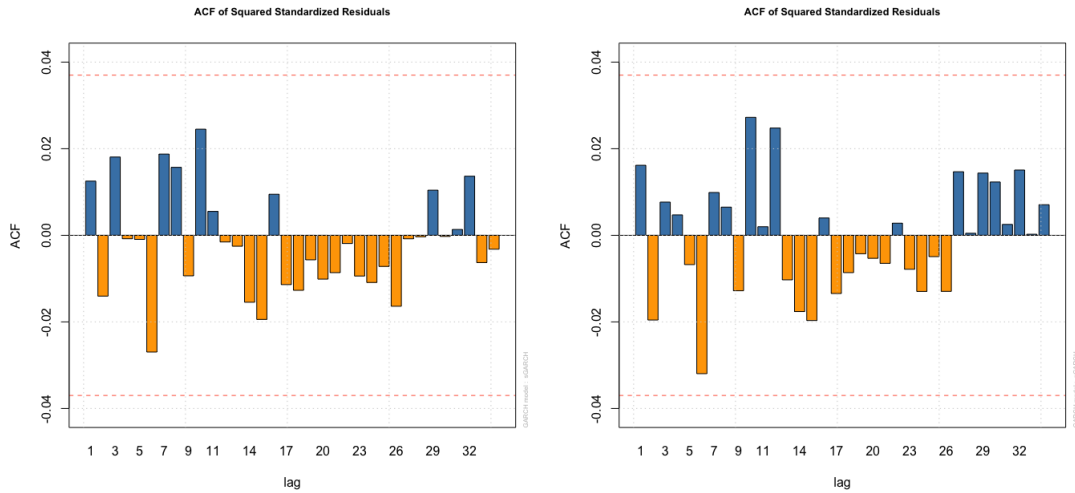
```
....
> -----
>
>      Statistic Shape Scale P-Value
> ARCH Lag[3]    0.1653 0.500 2.000  0.6844
> ARCH Lag[5]    0.2924 1.440 1.667  0.9423
> ARCH Lag[7]    2.0668 2.315 1.543  0.7032
>
....
```

De la salida de R vemos que realizando el test ARCH LM se obtienen unos p-valores superiores a todos los niveles habituales de significación, por lo que podemos asumir que la varianza está bien explicada con este modelo.

```
....
> Adjusted Pearson Goodness-of-Fit Test:
> -----
> group statistic p-value(g-1)
> 1    20    11.93    0.8886
> 2    30    25.48    0.6530
> 3    40    29.24    0.8722
> 4    50    52.04    0.3563
....
```

De la prueba de bondad de ajuste de Pearson obtenemos que ninguno de los estadísticos se encuentra dentro de la región crítica, por lo que no asumimos que la distribución empírica coincide con la t de Student.

Con todo esto, tenemos que el modelo $AR(1)+EGARCH(1,1)$ también explica bien nuestra muestra.

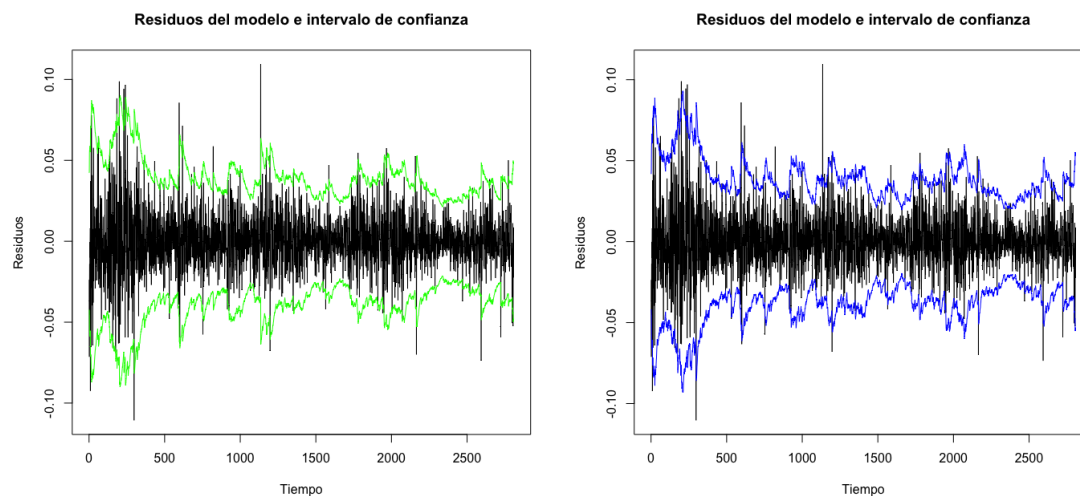


(a) Función de autocorrelación simple de los residuos al cuadrado del modelo AR(1)+GARCH(1,1) (b) Función de autocorrelación simple de los residuos al cuadrado del modelo AR(1)+EGARCH(1,1)

Figura 4.8: Función de autocorrelación simple de los residuos al cuadrado de ambos modelos

Veamos la función de autocorrelación simple de los residuos al cuadrado de cada uno de los dos modelos ajustados. A la vista de los dos gráficos de la Figura 4.8), notemos que los coeficientes de autocorrelación en ambos gráficos se encuentran dentro de las bandas de aceptación para un nivel de significación del 5%, lo que indica que la varianza de la serie queda bien explicada con estos modelos.

Una vez elegidos nuestros modelos para la varianza podemos ver en los gráficos de la Figura 4.9 los residuos con los intervalos de confianza para la varianza, en el gráfico 4.9(a) con el modelo AR(1)+GARCH(1,1) y en el 4.9(b) con el AR(1)+EGARCH(1,1).



(a) Residuos e intervalo de confianza de la varianza del modelo AR(1)+GARCH(1,1) (b) Residuos e intervalo de confianza de la varianza del modelo AR(1)+EGARCH(1,1)

Figura 4.9: Residuos de ambos modelos e intervalos de confianza de los retornos

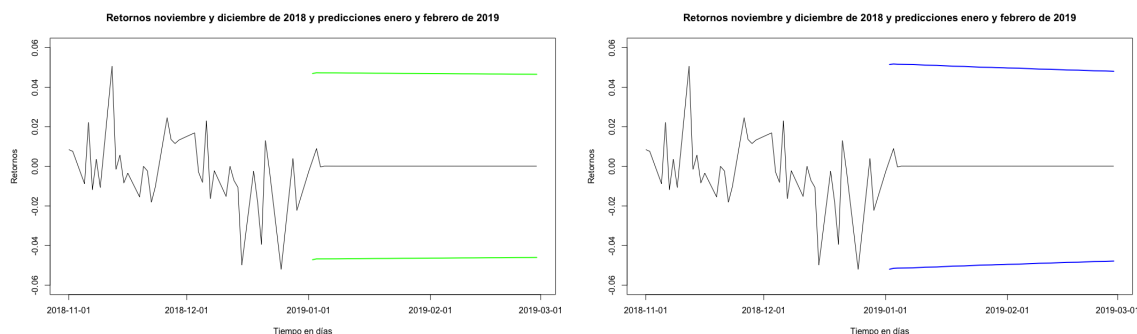
4.4. Ejemplo de predicción

Como los datos de la muestra inicial corresponden a los precios de cierre de la acción de Inditex desde enero de 2008 hasta diciembre de 2018, vamos a hacer una predicción de los retornos de esta acción en enero y febrero de 2019.

Como los meses de enero y febrero de 2019 tuvieron en total 41 días laborables, considerando como días laborables de lunes a viernes excepto los festivos, haremos una predicción de los primeros 40 retornos. Lo haremos utilizando los modelos AR(1)+GARCH(1,1) y AR(1)+EGARCH(1,1) ajustados en la Sección anterior.

En primer lugar, utilizando con la función `ugarchforecast` de R calculamos la media y la desviación típica, obtenidas con los modelos ajustado, de los próximos 40 retornos desde el final de nuestra serie inicial.

Con estos resultados contruimos con cada modelo tres series temporales para enero y febrero de 2019. La primera será una serie de la predicción de la media de los retornos, y las dos restantes serán las series de los extremos superior e inferior de los intervalos de confianza de la predicción, teniendo en cuenta para la construcción de los mismos que los modelos siguen una distribución t de Student, el primero con 6,5 grados de libertad y el segundo con 6,97.



(a) Retornos noviembre y diciembre y predicciones media y desviación típica de los retornos de enero y febrero usando el modelo $AR(1)+GARCH(1,1)$ (b) Retornos noviembre y diciembre y predicciones media y desviación típica de los retornos de enero y febrero usando el modelo $AR(1)+EGARCH(1,1)$

Figura 4.10: Retornos noviembre diciembre 2018 y predicción retornos enero y febrero 2019

En cada uno de los gráficos de la Figura 4.10 vemos una representación de los retornos reales del precio de cierre de la acción de Inditex correspondientes a los días de noviembre y diciembre de 2018, junto con las tres series que acabamos de definir para cada modelo, correspondientes a la predicción para enero y febrero de 2019. En la segunda mitad de los gráficos se ve claramente que la media esperada para los próximos 40 retornos es cero. El intervalo de predicción utilizando el modelo $AR(1)+GARCH(1,1)$, 4.10(a), se mantiene constante durante los dos meses en torno al $\pm 0,04$, lo que indica que según la predicción los retornos alcanzarán como máximo un valor de 0,04 en valor absoluto. Sin embargo, utilizando el modelo $AR(1)+EGARCH(1,1)$, 4.10(b), se obtiene un intervalo que se va estrechando a lo largo del tiempo, partiendo de un intervalo de aproximadamente $\pm 0,05$ en enero y llegando hasta $\pm 0,04$ en febrero.

Por último, para comprobar las predicciones, he cogido los datos reales de enero y febrero de 2019.

En el gráfico de la Figura 4.11 están representados los retornos reales del precio de la acción de Inditex desde el 1 de noviembre de 2018 hasta el 28 de febrero de 2019 junto con la predicción de la media, en rojo, y los intervalos de predicción que construimos utilizando los dos modelos, en verde el $AR(1)+GARCH(1,1)$ y en azul $AR(1)+EGARCH(1,1)$.

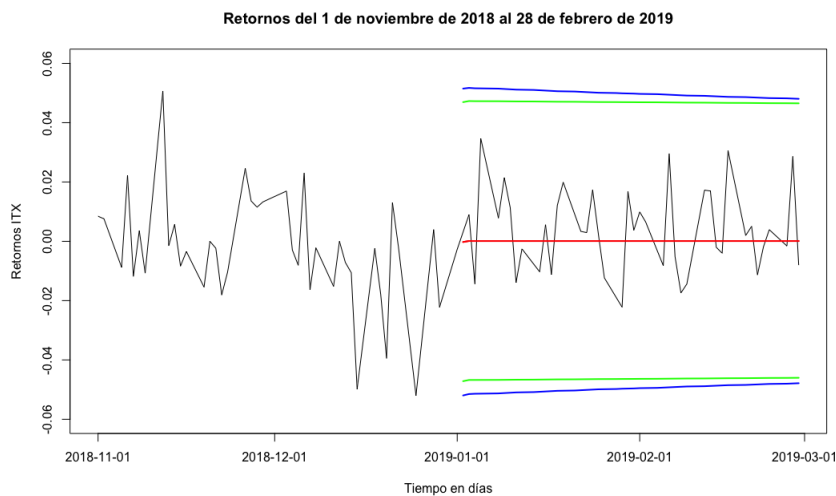


Figura 4.11: Retornos reales del 1 de noviembre de 2018 al 23 de febrero de 2019, predicción de la media en enero y febrero en rojo, e intervalos de predicción para la varianza, en verde con el modelo $AR(1)+GARCH(1,1)$ y en azul con el $AR(1)+EGARCH(1,1)$

Vemos que los retornos de enero y febrero se ajustan bien a las predicciones que habíamos hecho, pues tienen media cero y se encuentran dentro de los extremos de ambos intervalos de predicción. Por lo tanto concluimos que las predicciones se ajustaron bien a la realidad.

Notemos que, aunque con ambos modelos hemos obtenido una buena predicción, en las series de activos financieros, como con la que hemos trabajado, no afectan igual los retornos positivos y los negativos, en inglés se hace referencia a esto como *good news* y *bad news*, respectivamente. Por lo tanto, cabe pensar que será conveniente quedarse con el modelo $AR(1)+EGARCH(1,1)$.

Capítulo 5

Conclusiones finales

El objetivo de este trabajo consistía en introducir las herramientas y procedimientos estadísticos necesarios para realizar una predicción de retornos, y llevar a cabo una aplicación con datos reales.

Para tal fin, en los primeros capítulos hemos introducido los conceptos teóricos necesarios para llevar a cabo estas predicciones. En el primer capítulo introduciendo el concepto de serie temporal y algunas de sus características, y definiendo un poco más profundamente las series de retornos, y en los dos siguientes definiendo modelos para la media y para la varianza que servirán para hacer pronósticos sobre estas series.

Con la aplicación práctica del último capítulo hemos comprobado que el análisis de las series de retornos permite obtener predicciones considerablemente buenas. En particular, con el estudio que hemos llevado a cabo de los retornos del precio de la acción de Inditex, hemos obtenido, en primer lugar, que esta serie de retornos es estacionaria. Después, mediante una serie de test y comparando distintos modelos utilizando el criterio de Akaike, hemos ajustado un modelo autorregresivo de orden 1 para la media, y lo hemos combinado con los modelos GARCH(1,1) y EGARCH(1,1) para la volatilidad. La conclusión que sacamos es que la adopción de cualquiera de estos dos modelos nos sirve para obtener predicciones adecuadas, sin embargo, teniendo en cuenta la ventaja que presenta el modelo EGARCH al diferenciar las innovaciones positivas y negativas frente al GARCH que no considera esta diferencia, y en base a que al tratarse de una serie de retornos de activos financieros los retornos positivos y negativos no afectarán de igual manera, determinamos que el modelo más adecuado es el $AR(1)+EGARCH(1,1)$.

Desde el punto de vista económico, como hemos obtenido que la serie de retornos de la ac-

ción de Inditex es estacionaria, se podría concluir que el precio de esta acción no sufre grandes variaciones y se mantiene estable a lo largo del tiempo, y teniendo en cuenta que los datos que se recogen van desde enero de 2008 hasta diciembre de 2018, esta estabilidad indica que las acciones de Inditex no sufrieron en gran medida los efectos de la crisis financiera de 2008.

Por último, destacar que el estudio de la predicción de la volatilidad de las series de retornos es de gran utilidad en el análisis de las series financieras, ya que la volatilidad está asociada con el riesgo de inversión y el precio de derivados, lo que es de gran importancia para construir las carteras de inversión, y el estudio de ésta nos permite obtener pronósticos más precisos.

Anexo I

Código de R de la aplicación práctica

```
library(lmtest)
library(forecast)
library(TSA)
library(timsac)
library(tseries)
library(quantmod)
library(httr)
library(timeSeries)
library(rugarch)

#Lectura de los datos
ITX<-read.csv("indit.csv",header=TRUE,sep=";")
head(ITX)
class(ITX)
summary(ITX)

#Convertimos nuestros datos en una serie temporal
sITX<-timeSeries(ITX$Close,ITX$Date)
class(sITX)

#Grafico de precios
plot(sITX,xlab="Tiempo en dias",ylab="Precio de cierre de la accion",
main="Precio de cierre de la accion INDITEX")

#Definimos los retornos
rITX<-returns(sITX)
plot(rITX,main="Rendimientos diarios INDITEX 2008-2018",ylab="Rendimientos",xlab="Tiempo en dias")
class(rITX)

#Prueba de Dickey-Fuller para ver si la serie es estacionaria
adf.test(rITX,alternative="stationary")

#Autocorrelacion simple y parcial de los retornos
acf(rITX,xlab="Retardos",ylab="fas",main="Funcion de autocorrelacion simple")
pacf(rITX,xlab="Retardos",ylab="fap",main="Funcion de autocorrelacion parcial")
```

```

#Test de Ljung-Box
Box.test(rITX,type="Ljung-Box")
Box.test(rITX,lag=5,type="Ljung-Box")
Box.test(rITX,lag=10,type="Ljung-Box")

#MODELO BOX-JENKINS
ajuste=auto.arima(rITX,ic='aic')
ajuste

ARMA21=arima(rITX,order=c(2,0,1))
ARMA21
ARMA11=arima(rITX,order=c(1,0,1))
ARMA11

AR1=arima(rITX,order=c(1,0,0))
AR1
Box.test(residuals(AR1),type="Ljung-Box")
Box.test(residuals(AR1),lag=5,type="Ljung-Box")

acf(residuals(AR1))
pacf(residuals(AR1))

plot(AR1)

coefstest(AR1)

AR1=arima(rITX,order=c(1,0,0),include.mean=FALSE)
AR1

#MODELO HETEROCEDASTICIDAD CONDICIONADA

#Residuos al cuadrado y grafica para ver la volatilidad
rescuad<-resid(AR1)^2
plot(rescuad,main="Residuos al cuadrado")

acf(rescuad,main="Funcion de autocorrelacion simple de los residuos al cuadrado",ylab="fas")
pacf(rescuad,main="Funcion de autocorrelacion parcial de los residuos al cuadrado",ylab="fap")

#podemos realizar la prueba Ljung-Box para determinar si el cuadrado de los retornos
#distribuye ruido blanco
Box.test(rescuad,type="Ljung-Box")
Box.test(rescuad,lag=5,type="Ljung-Box")
Box.test(rescuad,lag=10,type="Ljung-Box")

#Prueba ARCHtest
library(FinTS)
ARCHtest<-ArchTest(rITX,lags=1,demean=TRUE)
ARCHtest

#Ajustamos el modelo
#Ajustamos en primer lugar un modelo AR(1)+GARCH(1,1) con distribuci<U+00F3>n normal
ug_spec2=ugarchspec(variance.model=list(garchOrder=c(1,1)),
mean.model=list(armaOrder=c(1,0)),distribution.model = "norm")

```

```

ug_spec2

#Par<U+00E1>metros estimados del modelo
ugfit2<-ugarchfit(spec=ug_spec2,data=rITX)
ugfit2

#QQplot del modelo
plot(ugfit2,which=9)

#Ajustamos un modelo AR(1)+GARCH(1,1) con distribuci<U+00F3>n t de student
ug_spec=ugarchspec(variance.model=list(garchOrder=c(1,1)),
mean.model=list(armaOrder=c(1,0)),distribution.model = "std")
ug_spec

#una vez seleccionado, tenemos que estimar el modelo
ugfit<-ugarchfit(spec=ug_spec,data=rITX) #tambien son todos significativos
ugfit

#Ajustamos un modelo AR(1)+EGARCH(1,1) con distribuci<U+00F3>n t de student
ug_spec3=ugarchspec(variance.model=list(model="eGARCH",garchOrder=c(1,1)),
mean.model=list(armaOrder=c(1,0)),distribution.model = "std")
ug_spec3

#Estimacion del modelo
ugfit3<-ugarchfit(spec=ug_spec3,data=rITX)
ugfit3

#fas de los residuos al cuadrado
plot(ugfit,which=11)
plot(ugfit3,which=11)

#Residuos de los modelos
ugres<-(ugfit@fit$residuals)
ugvar<-ugfit@fit$var
plot(ugres,type="l",main="Residuos del modelo e intervalo de confianza", ylab="Residuos", xlab="Tiempo")
lines(2.4*sqrt(ugvar),col="green")
lines(-2.4*sqrt(ugvar),col="green")

ugres2<-(ugfit3@fit$residuals)
ugvar2<-ugfit3@fit$var
plot(ugres2,type="l",main="Residuos del modelo e intervalo de confianza", ylab="Residuos", xlab="Tiempo")
lines(2.37*sqrt(ugvar2),col="blue")
lines(-2.37*sqrt(ugvar2),col="blue")

#PRONOSTICO DEL MODELO

#Calculamos la predicci<U+00F3>n de la media y la varianza con los modelos escogidos
#Prediccion usando AR(1)+GARCH(1,1)
ugfore<-ugarchforecast(ugfit,n.ahead=40)
media<-ugfore@forecast$seriesFor
dt<-ugfore@forecast$sigmaFor

#Prediccion usando AR(1)+EGARCH(1,1)

```

```

ugfore<-ugarchforecast(ugfit3,n.ahead=40)
media<-ugfore3@forecast$seriesFor
dt<-ugfore3@forecast$sigmaFor

#Vector que contenga las fechas de los días de enero y febrero laborables
t<-timeSequence(as.Date("2019/01/01"),as.Date("2019/02/28"))
t2<-t[-c(1,5,6,7,12,13,19,20,26,27,30,33,34,41,42,48,49,55,56)]

#Calculamos una serie temporal para la media, y los extremos superior e inferior
#para la varianza

#Medias
media<-ugfore@forecast$seriesFor
med<-timeSeries(media,t2)

media2<-ugfore3@forecast$seriesFor
med2<-timeSeries(media2,t2)

#Extremos superiores
int.der<-ugfore@forecast$seriesFor+2.4*ugfore@forecast$sigmaFor
int.der2<-timeSeries(int.der,t2)

int.derr<-ugfore3@forecast$seriesFor+2.37*ugfore3@forecast$sigmaFor
int.derr2<-timeSeries(int.derr,t2)

#Extremos inferiores
int.izq<-ugfore@forecast$seriesFor-2.4*ugfore@forecast$sigmaFor
int.izq2<-timeSeries(int.izq,t2)

int.izqq<-ugfore3@forecast$seriesFor-2.37*ugfore3@forecast$sigmaFor
int.izqq2<-timeSeries(int.izqq,t2)

#Vector con las fechas de los días laborables de noviembre
#2018 a febrero 2019
td<-timeSequence(as.Date("2018/11/01"),as.Date("2019/02/28"))
td2<-td[-c(3,4,10,11,17,18,24,25,31,32,39,40,46,47,53,54,56,57,60,61,
63,67,68,74,75,81,82,88,89,95,96,102,103,109,110,116,117,121)]

#Cogemos de la serie de retornos inicial los retornos correspondientes a esos días
length(rITX)
rnd<-rITX[2766:2808]
length(rnd)

#Serie de tiempo formada por los retornos de noviembre y diciembre y las predicciones
#de enero y febrero
media2<-as.numeric(media)
library(dplyr)
union<-union_all(rnd,media2)
ts<-timeSeries(union,td2)

#Valores reales enero y febrero2019
ef<-read.csv("enerofebrero.csv",header=TRUE,sep=";")

```

```
#Convertimos nuestros datos en una serie temporal
sef<-timeSeries(ef$Close,ef$Date)

#Grafico de precios
plot(sef,xlab="Tiempo en dias",ylab="Precio de cierre de la accion",
main="Precio de cierre de la acci<U+00F3>n INDITEX")

#Definimos los retornos
ref<-returns(sef)
plot(ref,main="Rendimientos diarios INDITEX 2008-2018",ylab="Rendimientos",xlab="Tiempo")
ref<-as.numeric(ref)

#Calculamos la serie de tiempo formada por los retornos de los dias del 1 de noviembre 2018
#al 28 de febrero 2019
union2<-union_all(rnd,ref)
tsreal<-timeSeries(union2,td2)

#Grafica de las predicciones de la serie temporal con los extremos de la prediccion de
#la varianza
plot(ts,ylim=c(-0.06,0.06), main="Retornos noviembre y diciembre de 2018 y predicciones enero y
febrero de 2019", ylab="Retornos", xlab="Tiempo en dias")
lines(int.der2,col="green",lwd=2)
lines(int.izq2,col="green",lwd=2)
lines(int.derr2,col="blue",lwd=2)
lines(int.izqq2,col="blue",lwd=2)

#Grafica de la serie temporal con los extremos de la prediccion de
#la varianza
plot(tsreal,ylim=c(-0.06,0.06), main="Retornos del 1 de noviembre de 2018 al 28 de febrero de 2019",
ylab="Retornos ITX", xlab="Tiempo en dias")
lines(int.der2,col="green",lwd=2)
lines(int.izq2,col="green",lwd=2)
lines(int.derr2,col="blue",lwd=2)
lines(int.izqq2,col="blue",lwd=2)
lines(med,col="red",lwd=2)
lines(med,col="red",lwd=2)
```


Bibliografía

- [1] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986. ID: 271689.
- [2] G.E.P. Box, G.M. Jenkins, G.C. Reinsel, and G.M. Ljung. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2015.
- [3] Paul S. P. Cowpertwait and Andrew V. Metcalfe. *Introductory Time Series with R*. Springer, Dordrecht ; New York, 2009.
- [4] María Pilar González Casimiro. *Análisis de series temporales: Modelos ARIMA*. 2009.
- [5] Miguel González Velasco and Inés María del Puerto García. *Series temporales*. Universidad de Extremadura, Cáceres, 2009.
- [6] D. Peña, G.C. Tiao, and R.S. Tsay. *A Course in Time Series Analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2011.
- [7] Daniel Peña. *Análisis de series temporales*. Alianza, Madrid, 2005.
- [8] Ruey S. Tsay. *Analysis of financial Time Series*. Wiley-Interscience, Hoboken, N.J, 2nd edition, 2005.
- [9] William W. S. Wei. *Time Series analysis: univariate and multivariate methods*. Addison-Wesley, Redwood City, California [etc.], 1990.