FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL PARA LA INTEGRAL DE LEBESGUE

José Señarís Seoane

Curso 24/25

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grado

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL PARA LA INTEGRAL DE LEBESGUE

José Señarís Seoane

Junio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis matemático
Título: El Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la Integral de Lebesgue
Tutor/a: Francisco Javier Fernández Fernández
Código: AN04_25
Breve descripción del contenido: Se trata de estudiar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la Integral de Lebesgue. Para ello, seguiremos los siguientes puntos: 1) Funciones de variación acotada, 2) El teorema de derivación de Lebesgue, 3) Funciones absolutamente continuas, 4) El Teorema Fundamental del Cálculo
Bibliografía: **Bartle, R. G. (1995). The Elements of Integration and Lebesgue Measure.** **DiBenedetto, E. (2016). Real Analysis.**
Recomendaciones
Otras observaciones

Índice

Resumen

Este trabajo de fin de grado consistirá en el enunciado y demostración del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue, lo que se llegará a hacer en el capítulo 7. Antes, para poder llegar a ese punto con la base teórica necesaria, se estudiarán las propiedades, definición y resultados varios de las funciones aboslutamente continuas (capítulo 6); las funciones de variación acotada (capítulo 3) y, en particular, su diferenciación (capítulo 5), para lo que se usarán como herramienta las Derivadas de Dini (capítulo 4). Será necesario también para poder avanzar en la comprensión de estos conceptos ciertos resultados como el Teorema de Recubrimiento de Vitali, que se explica en el capítulo 2; y por supuesto una importante base de la teoría de la medida, explicada en los preliminares para después acompañarnos a lo largo de todo el trabajo.

Abstract

This final degree proyect will consist on enunciate and proof the Fundamental Integral Calculos Theorem for Lebesgue's integral, what will finally be done at chapter 7. Before that, in order to reach that point with the necessary theoretical basis, there will be estudied properties, definition, and variated results about absolute contiuos functions (chapter 6); also bounded variation functions (chapter 3) and, particullary, their differentiation (chapter 5), for what we will use as a tool the Dini Derivatives (chapter 4). It will be also necessary for advancing on these concepts' comprehension certain results such as Vitali's Covering Theorem, which will be explained in chapter 2; and of course, an important basis of Measuring Theory, explained on the first chapter, the preliminaries, for not leaving us until the end of the proyect.

Introducción

El Teorema Fundamental del Cálculo Integral establece que si f es integrable en $[a, b]$, entonces se tiene que $F'(x) = f(x)$ para casi todo punto $x \in [a, b]$, siendo F la función primitiva de f; además, si f es absolutamente continua en $[a, b]$, se tendrá que f' es integrable y que $f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'(t)\, dt$.

Este teorema ha sido de enorme importancia en la historia del análisis matemático y ha tenido varias versiones. Además de la de Lebesgue, la de Riemann fue muy destacada, aunque acabó por quedarse algo limitada al no aportar toda la generalidad que se deseaba. Así, la integral de Lebesgue permitió dar un claro paso adelante, pues permite integrar funciones que pueden ser muy irregulares, siempre que se cumplan ciertas condiciones, que en cualquier caso, abarcan un abanico de funciones mayor que la teoría de Riemann.

Para poder llegar a este teorema, Henri Lebesgue tuvo, en primer lugar, que estudiar concienzudamente una teoría de la medida que sería imprescindible para el desarrollo de sus trabajos. Es por ello que se dedicarán unas páginas de este proyecto a unos preliminares, es decir, a sentar las bases y la notación de ciertos conceptos que resultarán capitales para poder avanzar en los contenidos hacia el objetivo final.

Una vez detallada esta teoría de la medida, procederemos a estudiar los conjuntos de Vitali, para poder así probar el Teorema de recubrimiento de Vitali, que da nombre al capítulo 2. Será este de gran importancia, pues se usará posteriormente en la prueba de varios resultados sobre la diferenciación de funciones de variación acotada, véase la Proposición 4.5 o el Teorema de Lebesgue (Teorema 5.2),

Para el teorema que nos acontece, son de vital importancia, como ya se irá viendo a medida que se avance en la lectura, las funciones de variación acotada, que se estudiarán en el tercer capítulo. Pues serán sus propiedades y su relación con las funciones absolutamente continuas unas de las grandes protagonistas de la demostración final del trabajo. De esta manera, probaremos que pueden ser escritas como diferencia de dos funciones monótonas, utilizando sus variaciones negativa y positiva y la descomposición de Jordan.

Una vez dadas ciertas característiacas de las funciones de variación acotada, se comenzará a trabajar en la prueba de que son diferenciables, para lo cual, en el capítulo cuarto se introducen las cuatro Derivadas o Números de Dini, que guardan una estrecha relación con la definición de diferenciabilidad en sí misma. Continuando con el uso de las Derivadas de Dini, se consigue probar el Teorema de Lebesgue (Teorema 5.2), del que de manera directa en un corolario obtenemos que toda función de variación acotada es diferenciable casi por doquier.

Por último antes de llegar al teorema principal, estudiamos las funciones absolutamente continuas, así como propiedades de las mismas, entre las que será de gran importancia el hecho de que toda función absolutamente continua sea de variación acotada, pues esto implicará que toda función absolutamente continua sea diferenciable en casi todo punto, y nos permitirá estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función a través de su derivada.

Para concluír con el tema que verdaderamente nos ocupa, se probarán una serie de resultados previos en cuya demostración se utilizan parte de los contenidos anteriores, y así, se estará al fin en condiciones de poder probar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue.

A lo largo del desarrollo de este trabajo de fin de grado, se han utilizado como referencia y fuente de información los libros [Bartle, 1995], [DiBenedetto, 2016] y [Bartle, 2001].

Capítulo 1

Preliminares

En estos preliminares se realizará una breve introducción a ciertos conceptos que serán utilizados en los capítulos siguientes. Este capítulo será pues, una introducción a la teoría de la medida, la medida de Lebesgue, y la integral de Lebesgue, centrándonos en la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y su correspondiente integral. Estarán divididos en dos secciones:

- Teoría de la medida e integración asbtracta en un espacio de medida (X, Σ, μ), en la que se tratarán definiciones y resultados generales para cualquier espacio de medida.
- Resultados particulares y construcción del espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, en la que se tratará de forma particular la medida, el espacio y la integración de Lebesgue.

Para la elaboración de estos preliminares se utilizó el libro [Bartle, 1995].

1.1. Teoría de la medida e integración asbtracta en un espacio de medida (X, Σ, μ).

Definición 1.1 (σ-álgebra)**.** Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, se dirá que $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ es una σ-álgebra si cumple que:

1. $\emptyset$, $X \in \Sigma$
2. Si $E \in \Sigma$, entonces, $E^c \in \Sigma$
3. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$, entonces, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$

La tercera condición se denomina $\sigma-$aditividad.

Definición 1.2 (Espacio medible)**.** Dado un conjunto $X \neq \emptyset$ y Σ una σ-álgebra, se define como espacio medible al par (X, Σ).

Proposición 1.3. *Sea* (X, Σ) *un espacio medible, entonces tendremos que*

1. *Dado* $\{E_k\}_{k=1}^{n} \subset \Sigma$ *un conjunto finito de elementos de la* $\sigma-$*álgebrea, tendremos que* $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \Sigma$
2. *Dado* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$*, entonces* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.
3. *Dados* $E, F \in \Sigma$*, se tiene que* $E \backslash F \in \Sigma$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la definición de σ-álgebra. □

Definición 1.4 (Medida)**.** Sea X un conjunto y Σ una $\sigma-$álgebra de conjuntos de X. Definimos entonces como medida en Σ una funcion $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ que verifique las siguientes condiciones:

1. $\mu(\emptyset)$=0
2. $0 \leq \mu(E) \leq \infty, \forall E \in \Sigma$
3. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Definición 1.5 (Casi para todo punto)**.** Diremos que una propiedad definida sobre un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ se verifica para casi todo punto (c.t.p), o casi por doquier (c.p.d) cuando el conjunto de puntos en los que no se verifica tiene medida nula:

$$\Big[P(x) \text{ es cierta c.t.p } x \in E\Big] \Leftrightarrow \Big[\mu(\{x \in E \mid P(x) \text{ es falsa}\}) = 0\Big]$$

Definición 1.6 (Espacio de medida)**.** Dada una $\sigma-$álgebra Σ en X y μ una medida en Σ, definimos un espacio de medida como el triple (X, Σ, μ).

Definición 1.7 (Espacio de medida finito y σ-finito)**.** Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), diremos que

1. Es finito si $\mu(X) < \infty$.
2. Es σ-finito si existe $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.8 (Espacio de media completo)**.** Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), diremos que es completo si cualquier subconjunto de un conjunto medible de medida nula es medible.

Teorema 1.9. *Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), se tendrá que:*

1. *Si $E, F \in \Sigma$ son tales que $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$ (monotonía de la medida).*

2. *Si $E, F \in \Sigma$ son tales que $E \subset F$ y $\mu(E) < \infty$, entonces, $\mu(F \setminus F) = \mu(F) - \mu(E)$.*

3. *$E, F \in \Sigma$ son dos conjuntos cualesquiera, entonces, $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$. En particular, dada $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ una colección finita de conjuntos (no necesariamente disjuntos), se tiene que:*
$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_k) \text{ (Subaditividad numerable).}$$

Demostración. Este resultado es consecuencia de la definición de espacio de medida y de los resultados [Bartle, 1995, 3.3 Lemma] y [Bartle, 1995, 3.4 Lemma] □

Definición 1.10. Sea $E \subset X$ y $f : E \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ y un número arbitrario $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned}
[f \geq \alpha] =& \{x \in E |\ f(x) \geq \alpha\}, \\
[f = \alpha] =& \{x \in E |\ f(x) = \alpha\}, \\
[f \leq \alpha] =& \{x \in E |\ f(x) \leq \alpha\}, \\
[f < \alpha] =& \{x \in E |\ f(x) < \alpha\}, \\
[f > \alpha] =& \{x \in E |\ f(x) > \alpha\}.
\end{aligned}$$

Definición 1.11 (Función medible)**.** Sea $E \in \Sigma$ y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, se dice que f es una función medible en E si se cumple que

$$[f > \alpha] \in \Sigma, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

Lema 1.12. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$[f > \alpha] \in \Sigma$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

2. *$[f \leq \alpha] \in \Sigma$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

3. *$[f \geq \alpha] \in \Sigma$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

4. *$[f > \alpha] \in \Sigma$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$*

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 2.4 Lemma] □

Observación 1.13. Si f es una función medible, entonces $[f = \alpha] \in \Sigma$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. En efecto, basta ver que $[f = \alpha] = [f \geq \alpha] \cap [f \leq \alpha]$ y utilizar las propiedades de la $\sigma-$álgebra.

Teorema 1.14. *Dado $E \in \Sigma$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ medibles y $c \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que las funciones $cf, f \pm g, |f|, fg$ y f/g, esta última cuando $g \neq 0$ c.p.d en E, son medibles en E.*

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 2.6 Lemma] □

Teorema 1.15. *Si $f : E \to \mathbb{R}$, con $E \in \Sigma$ es una función continua excepto en un conjunto de medida nula, entonces se tiene que f es medible.*

Demostración. Por definición de función medible, si modificas una función medible en un conjunto de medida nula, el resultado es medible. □

Definición 1.16 (Función simple y simple medible)**.** Dado un conjunto $E \subset X$, diremos que $s : E \to \mathbb{R}$ es una función simple si existen:

1. $\{E_k\}_{k=1}^n \subset X$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$, y $\bigcup_{k=1}^n E_k = E$
2. $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$

tales que $s(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{E_k}(x)$. Diremos que es simple medible si $E \in \Sigma$ y $E_k \in \Sigma$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.17 (Teorema de aproximación de funciones medibles)**.** *Si f es una función medible no negativa en E, entonces existirá una sucesión de funciones simples medibles $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{R}}$ tal que*

1. *$0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ para todo $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ para todo $x \in E$.*

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 2.11 Lemma] □

Notación 1.18. Para referirnos a la integral de una función medible consideraremos el espacio de medida (X, Σ, μ)

Definición 1.19 (Integral de una función simple medible no negativa)**.** Sea φ una función simple medible no negativa, siguiendo la Definición 1.16. Definimos la integral de φ con respecto a μ como

$$\int \varphi \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(E_k) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Además, si $E \in \Sigma$ es un conjunto medible, definiremos la integral de φ en E con respecto a μ como

$$\int_E \varphi \, d\mu = \int \varphi \, \chi_E \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(E \cap E_k) \in \overline{\mathbb{R}}$$

Lema 1.20. *El conjunto de las funciones simples medibles no negativas tiene estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 4.3 Lemma]. □

Definición 1.21 (Integral de una función medible no negativa)**.** Dada f es una función medible no negativa, definimos su integral con respecto a μ como

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi \, d\mu \middle| \varphi \text{ es medible no negativa y } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x), \forall x \in X \right\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

De manera similar, definiremos la integral de f sobre un conjunto $E \in \Sigma$ medible con respecto a μ como

$$\int_E f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$$

Teorema 1.22. *Dadas dos funciones f, g medibles no negativas se tiene que:*

1. *Si $f \leq g$, entonces*
$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$
2. *Si $E, F \in \Sigma$ y $E \subset F$, entonces*
$$\int_E f \, d\mu \leq \int_F f \, d\mu$$

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 4.5 Lemma]. □

Teorema 1.23 (Teorema de la convergencia monótona)**.** *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles y no negativas tales que:*

- *$f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.*
- *$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$, siendo $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa.*

Entonces se tendrá que:

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 4.6 Monotone Convergence Theorem]. □

Lema 1.24 (Lema de Fatou)**.** *Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:*

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 4.8 Fatou's Lemma]. □

Corolario 1.25. *Si f es una función medible no negativa y definimos $\lambda : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ como*

$$\lambda(E) = \int_E f\, d\mu$$

entonces λ es una medida.

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 4.9 Corollary]. □

Corolario 1.26. *Si f es una función medibles no negativa, entonces f será igual a 0 para casi todo punto en X si y solo si $\int f\, d\mu = 0$.*

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 4.10 Corollary]. □

Definición 1.27. [Función Lebesgue integrable] Dada una función $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, diremos que es Lebesgue integrable si se verifica que

$$\int f^+\, d\mu < \infty$$

$$\int f^-\, d\mu < \infty$$

y, en tal caso, definimos la integral de Lebesgue de f con respecto a μ como

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

De manera análoga, si $E \in \Sigma$ diremos que f es integrable en E si las integrales correspondientes a la parte positiva y negativa de f son finitas sobre E, y de cumplirse:

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu$$

Al conjunto de las funciones medibles Lebesgue integrables se le denotará por $\mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$, o cuando no exista posibilidad de confusión $\mathcal{L}(X)$.

Teorema 1.28. *Una función medible f será Lebesgue integrables si, y solo si $|f|$ es Lebesgue integrable, y en tal caso*

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu$$

Demostración. La demostración está en [Bartle, 1995, 5.3 Theorem] □

Teorema 1.29 (Teorema de la convergencia dominada)**.** *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones Lebesgue integrables que converge casi por doquier una función real medible f. Si existe una función g Lebesgue integrable tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f será Lebesgue integrable y además*

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

Demostración. La demostración está en [Bartle, 1995, 5.6 Lebesgue Dominated Convergence Theorem] □

Definición 1.30. Dado un espacio de medida (X, Σ, μ), y $f \in \mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$, definimos:

$$N_\mu(f) := \int |f| \, d\mu$$

Esta aplicación es una seminorma en $\mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$.

Definición 1.31 (Funciones equivalentes)**.** Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$, se dirá que son equivalentes si son iguales salvo en un conjunto de medida nula, es decir:

$$f \sim g \Leftrightarrow [\exists E \in \Sigma, \text{ con } \mu(X \backslash E) = 0, \text{ tal que } f(x) = g(x), \forall x \in E]$$

Esta relación es una relación de equivalencia.

Observación 1.32. De esta relación de equivalencia surge el considerar sus clases de equivalencia, que denotaremos por $[f]$:

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}(X, \Sigma, \mu) | g \sim f\}$$

Definición 1.33 (El espacio $\mathcal{L}^p$, con $1 \leq p < \infty$)**.** Definimos el epacio $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ como el conjunto cociente formado por todas las clases de equivalencia de funciones de $\mathcal{L}(X, \Sigma, \mu)$ en las que se cumple que

$$\int |f|^p \, d\mu < \infty$$

En este espacio, definimos la norma

$$\|[f]\|_{\mathcal{L}^p} \equiv \|f\|_{\mathcal{L}^p} = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Teorema 1.34 (Completitud de los espacios $\mathcal{L}^p$)**.** *Si $1 \leq p < \infty$, se tendrá que el espacio vectorial normado $\mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$ es completo, pues toda sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^p$ es convergente a un elemento de este espacio.*

Demostración. La demostración está en [Bartle, 1995, 6.14 Completness Theorem] □

Definición 1.35 (El espacio $\mathcal{L}^\infty$)**.** Definimos el espacio $\mathcal{L}^\infty$ como el conjunto de las clases de equivalencias que están acotadas casi por doquier. Las funciones cuyas clases de equivalencia pertenecen a $\mathcal{L}^\infty$ se denominan funciones esencialmente acotadas. Considerando $f \in \mathcal{L}^\infty$ y $N \in \Sigma$ con $\mu(N) = 0$, definimos

$$S(N) = \sup\{|f(x)| \mid x \notin N\}$$

Por último, definimos el supremo esencial de una función perteneciente a $\mathcal{L}^\infty$ como:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \text{ínf}\{S(N) | \mu(N) = 0\}$$

Teorema 1.36. *El espacio vectorial normado $\mathcal{L}^\infty$ es un espacio completo utilizando como norma el supremo esencial dado en la Definición 1.35.*

Demostración. La demostración está en [Bartle, 1995, 6.16 Theorem] □

1.2. Resultados particulares y construcción de $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$.

Definición 1.37 (Celda en $\mathbb{R}$)**.** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, se define una celda en $\mathbb{R}$ con extremos a y b como un conjunto con una de las siguientes formas:

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ (celda abierta)
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ (celda cerrada)
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ (celda semiabierta o semicerrada)
4. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ (celda semiabierta o semicerrada)

Observación 1.38. Las celdas son intervalos de la recta real, sin embargo, los intervalos no acotados como $(-\infty, a), (\infty, a], [b, \infty), (b, \infty), (-\infty, +\infty)$ no entran en la categoría de celdas.

Definición 1.39 (Longitud o volumen de una celda en $\mathbb{R}$)**.** Se define la longitud o volumen de una celda $I \subset \mathbb{R}$ de extremos a y b como

$$l(I) = b - a$$

Observación 1.40. Las celdas abiertas, cerradas y semiabiertes o semicerradas cuyos extremos coincidan tienen la misma longitud, es decir, $l((a, b)) = l([a, b]) = l((a, b]) = l([a, b)) = b - a$.

Observación 1.41. El conjunto vacío se puede considerar una celda abierta cuyos extremos coinciden, es decir $l(\emptyset) = l((a, a)) = a - a = 0$.

Definición 1.42 (Translación de A por x)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$, se define la translación de A por x como:

$$x \oplus A = \{x + a \mid a \in A\}$$

Si I es una celda en $\mathbb{R}$, entonces $x \oplus I$ también lo será, y $l(x \oplus I) = l(I)$

Definición 1.43 (Medida exterior de un conjunto E)**.** Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}$, definimos la medida exterior del conjunto E como:

$$\mu^*(E) = \text{ínf} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) | \; E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \text{ con } I_k \text{ celda de } \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

Proposición 1.44. *La medida exterior cumple las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq \mu^*(E) \leq \infty$ *para todo* $E \subset \mathbb{R}$*; y* $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. *Dado* $E \subset F$*, se tiene que* $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.
3. *Dados* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$*, entonces*

$$\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 12.3 Theorem] □

Observación 1.45. Nótese que es posible que $\mu^*(E) = \infty$, por ejemplo si $E = \mathbb{R}$.

Definición 1.46 (Condición de Carathéodory)**.** Sea μ^* la medida exterior de los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Se dirá que $E \subset \mathbb{R}$ verifica la condición de Carathéodory si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),\ \forall A \subset \mathbb{R}$$

A la colección de conjuntos que cumplen esta condición se la denota por $\mathcal{L}$.

Observación 1.47. Por la subaditividad de la medida exterior, esta condición es equivalente a que para todo $A \subset \mathbb{R}$, con $\mu^*(A) < \infty$, se tenga que

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Teorema 1.48 (Teorema de extensión de Carathéodory)**.** *El conjunto* $\mathcal{L}$ *formado por todos los conjuntos que cumplen la condición de Carathéodory es una* $\sigma-$*álgebra sobre* $\mathbb{R}$ *que llamaremos* $\sigma-$*álgebra de Lebesgue, siendo los conjuntos* $E \in \mathcal{L}$ *conjuntos Lebesgue-medibles; y la restricción de la medida exterior a* $\mathcal{L}$ *es una medida sobre* $\mathcal{L}$ *que llamaremos medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}$.

Demostración. La demostración puede encontrarse en [Bartle, 1995, 13.5 Theorem] □

Definición 1.49 (Espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$)**.** Definimos el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ como el triple formado por $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, siendo:

- $\mathcal{L}$ la σ-álgebra de Lebesgue definida en la Definición 1.46.
- μ a la restricción de la medida exterior μ^* (ver Definición 1.43) a $\mathcal{L}$.

A los conjuntos $E \in \mathcal{L}$ se les llama conjuntos Lebesgue-medibles.

Definición 1.50 (σ-álgebra y conjunto de Borel)**.** El σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ más pequeña que contiene todos los conjuntos abiertos se denomina σ-álgebra de Borel y se denota por $\mathcal{B}$. Cualquier conjunto en $\mathcal{B}$ se dice que es un conjunto de Borel.

Lema 1.51. *Los conjuntos de Borel son conjuntos medibles.*

Demostración. Por consecuencia de [Bartle, 1995, 14.1 Lemma], todo conjunto abierto es medible, por ser unión numerable de celdas abiertas, y por ello el σ-álgebra de Borel está contenido en $\mathcal{L}$. $\square$

Teorema 1.52. *Si $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, siendo E un conjunto Lebesgue-medible ($E \in \mathcal{L}$), entonces se tendrá que la función f es medible.*

Demostración. Dado que los conjuntos de Borel son medibles por el Lema 1.51, por la definición topológica de continuidad, se tiene que la imagen inversa de un abierto es es un abierto, y por tanto, es medible. $\square$

Teorema 1.53. *Toda función monótona es una función medible.*

Demostración. La demostración es inmediata si se considera el espacio de medida de Lebesgue. En efecto, puesto que la imagen inversa de un intervalo mediante una función monótona es un intervalo (en particular, Lebesgue medible), se sigue el resultado. $\square$

Capítulo 2

Teorema de recubrimiento de Vitali

En este capítulo daremos, además de un resultado previo, la definición de recubrimiento de Vitali y dos versiones del Teorema de Recubrimiento de Vitali, incluyéndose en este documento solo la demostración de la primera de estas versiones. Para ello, se han utilizado los libros [DiBenedetto, 2016] y [Bartle, 2001].

Teorema 2.1. *Sea $E \in \mathcal{L}$ un conjunto Lebesgue medible y $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una función Lebesgue integrable. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que si $F \subseteq E$ es un conjunto tal que $m(F) < \delta$, entonces,*

$$\int_F |f| \, dm < \epsilon.$$

Demostración. Se trata de demostrar la continuidad con respecto al conjunto de integración. Consideremos la sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles no negativas dada por:

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq m, \\ m, & f(x) > m. \end{cases}$$

Resulta claro que $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ para todo $x \in E$, además, $f_m \leq f_{m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, en base al teorema de la convergencia monótona,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_m \, dm = \int_E f \, dm,$$

o lo que es lo mismo, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq N$, se tiene que:

$$0 \leq \int_E f \, dm - \int_E f_m \, dm < \frac{\epsilon}{2},$$

de donde, gracias a la linealidad de la integral,

$$\int_E (f - f_m) \, dm < \frac{\epsilon}{2}, \ \forall m \geq N.$$

Tomemos $\delta = \epsilon/(2N)$ y sea $A \subseteq E$ un conjunto medible tal que $m(A) < \delta$, se tendrá que:

$$\begin{aligned}\int_A f\,dm &= \int_A (f - f_N)\,dm + \int_A f_N\,dm \\ &< \int_A (f - f_N)\,dm + Nm(A) < \frac{\epsilon}{2} + N\frac{\epsilon}{2N} = \epsilon.\end{aligned}$$

□

Definición 2.2. Sea $E \subset [a,b]$ y $\mathcal{F}$ una familia de intervalos cerrados no degenerados contenidos en $[a-1, b-1]$. Diremos que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de Vitali de E si para cada $x \in E$ y cada $s > 0$ existe un intervalo $J \in \mathcal{F}$ tal que $x \in J$ y $0<l(J)<$s.

Observación 2.3. Si $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de Vitali de E, cada punto $x \in E$ pertenecerá a infinitos intervalos de $\mathcal{F}$. En efecto, dado un punto $x \in E$ y $s_n = \frac{1}{n} > 0$, al ser $\mathcal{F}$ un recubrimiento de Vitali, existirán intervalos infinitos intervalos $J_n \in \mathcal{F}$, por ser $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de infinitos términos, tales que $x \in J_n$ y $0 < l(J_n) < s_n$.

Ejemplo 2.4. Sea $I = [0,1]$, entonces la familia:

$$\mathcal{F} = \{B[x, \tfrac{1}{n}] \mid x \in I \cap \mathbb{Q},\, n \in \mathbb{N}\}$$

es un recubrimiento de Vitali numerable de I.

Teorema 2.5 (Teorema de recubrimiento de Vitali)**.** *Sea $E \subset [a,b]$ y $\mathcal{F}$ un recubrimiento de Vitali de E. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existirán intervalos disjuntos $I_1, \dots, I_p \in \mathcal{F}$ y una familia numerable de intervalos cerrados $\{J_i, i = p+1, \dots\}$ contenidos en $\mathbb{R}$ tales que*

$$E - \bigcup_{i=1}^{p} I_i \subset \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i \quad y \quad \sum_{i=p+1}^{\infty} l(J_i) \leq \epsilon$$

De lo que se sigue que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{p} \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i$$

Demostración. Escogemos $I_k \in \mathcal{F}$ arbitrariamente y suponemos que los intervalos disjuntos $I_1, \dots, I_k, \dots, I_p$ ya han sido escogidos. Si $E \subset \bigcup_{i=1}^{p} I_i$, basta tomar $J_i = \emptyset$ para $i \geq p+1$ para concluír la prueba. En caso contrario, definimos $\mathcal{F}_p$ como la familia de intervalos $I \in \mathcal{F}$ que tienen puntos de E y que son disjuntos a todos los intervalos $I_1, \dots, I_p$. Sea $\lambda_p \leq b - a + 2$ el supremo de las longitudes de todos los intervalos $I \in \mathcal{F}_p$, y escojamos $I_{p+1} \in \mathcal{F}_p$ de forma que $l(I_{p+1}) > \frac{1}{2}\lambda_p$. Esto nos da una sucesión infinita de intervalos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a no ser que E esté contenido en la unión de un número finito de estos intervalos cerrados.

Supongamos que obtenemos una sucesión infinita $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado que estos intervalos I_n son disjuntos dos a dos y están todos contenidos en $[a-1,b+1]$, tendremos que $\sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) \leq b-a+2$. De esta forma, dado un $\epsilon > 0$, existirá un $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=p_0+1}^{\infty} l(I_i) \leq \frac{\epsilon}{5}$$

Definamos ahora

$$D_{p_0} := E - \bigcup_{I=1}^{p_0} I_i$$

y consideremos un $x \in D_{p_0}$ arbitario. Dado que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de Vitali de E, existirá un intervalo $I_x \in \mathcal{F}$ tal que $x \in I_x$ y tal que $I_x \cap I_i = \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, p_0$, con lo que se tiene que $I_x \in \mathcal{F}_{p_0}$. De esta forma, sabemos que el intervalo I_x intersecará por lo menos un intervalo I_n, con $n > p_0$. Dado que $I_x \cap I_i = \emptyset$ para $i = 1, \ldots, n$, se tiene que $I_x \in \mathcal{F}$ y tenemos que $0 < l(I_x) < \lambda_n$. Por otro lado, $0 < \lambda_n < 2l(I_{n+1})$, con lo que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, y por tanto $0 < l(I_x) < \lambda_n$ no se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, definimos

$$n(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} \quad | \quad I_x \cap I_n \neq \emptyset\}$$

De esta manera $n(x) > p$ y como $I_x \in \mathcal{F}_{n(x)-1}$, se tiene que $l(I_x) \leq \lambda_{n(x)-1} < 2l(I_{n(x)})$. Como I_x contiene al punto $x \in D_{p_0}$ y tiene un punto en $I_{n(x)}$, la distancia de x al punto medio de $I_{n(x)}$ (al que denotaremos por $x_{n(x)}$) será

$$d(x, x_{n(x)}) \leq l(I_x) + \frac{1}{2} l(I_{n(x)}) < \frac{5}{2} l(I_{n(x)})$$

Así, x pertenecerá al intervalo $J_{n(x)}$ con el mismo punto medio $x_{n(x)}$ que $I_{n(x)}$ y cinco veces su longitud. Para $i \geq p_0 + 1$, sea J_i el intervalo formado a partir de I_i de este modo. Como el $x \in D_{p_0}$ es arbitrario, este argumento nos lleva a que

$$E - \bigcup_{i=1}^{p_0} I_i = D_{p_0} \subset \bigcup_{i=p_0+1}^{\infty} J_i$$

Al mismo tiempo, como $l(J_i) = 5l(I_i)$ para $i > p$, concluímos que

$$\sum_{i=p_0+1}^{\infty} l(J_i) \leq \epsilon$$

□

Observación 2.6. El teorema de recubrimiento de Vitali se puede formular también en términos de la medida exterior como sigue.

Teorema 2.7 (Teorema de recubrimiento de Vitali (V.2)). *Sea $E \subset [a,b]$ y $\mathcal{F}$ un recubrimiento de Vitali de E, entonces se tiene que:*

1. *Dado* $\epsilon > 0$*, existen intervalos disjuntos dos a dos* $I_1, \ldots, I_p \in \mathcal{F}$ *cumpliendo que*

$$\mu^*(E - \bigcup_{i=1}^{p} I_i) \leq \epsilon$$

2. *Existe una sucesión* $\{I_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de intervalos disjuntos dos a dos pertenecientes a la familia* $\mathcal{F}$ *cumpliendo que*

$$\mu^*(E - \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0$$

3. *Existe una sucesión* $\{I_i\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de intervalos disjuntos dos a dos pertenecientes a la familia* $\mathcal{F}$ *cumpliendo que*

$$\mu^*(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(I_i)$$

Observación 2.8. La demostración de la segunda versión del teorema se puede encontrar en [Bartle, 2001, D.5 Theorem]

Capítulo 3

Funciones de variación acotada

Las funciones de variación acotada y muchas de sus propiedades serán de gran importancia a lo largo del trabajo. Así, en este tercer capítulo veremos la definición de este tipo de funciones, algunas condiciones suficientes para ser una de ellas, sus características, y diversos resultados como la Descomposición de Jordan, que serán utilizados en futuros argumentos. De nuevo, nos nutriremos de los libros [DiBenedetto, 2016] y [Bartle, 2001].

Definición 3.1 (Variación total de una función)**.** Sea $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ acotada, y sea P una partición del intervalo [a,b], $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Se define la variación total de f en $[a, b]$ como el número finito o infinito

$$V_f[a, b] = \sup_{\mathrm{P}} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Definición 3.2 (Función de variación acotada)**.** Sea $f : [a.b] \to \mathbb{R}$, si tiene variación total finita, es decir, si

$$V_f[a, b] < \infty$$

diremos que f es una función de variación acotada y lo denotaremos como $f \in BV[a, b]$.

Proposición 3.3. *Si f es una función de variación acotada $[a, b]$, entonces f es acotada.*

Demostración. Por ser f una función de variación acotada, se tiene que $V_f[a, b] < \infty$, con lo que por la definición de variación total tenemos que:

$$V_f[a, b] = \sup_{P} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Así, tomando un $x \in [a, b]$, teniendo en cuenta que este podría ser uno de los puntos de una partición, vemos que:

$$\sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq |f(x) - f(a)| \geq |f(x)| - |f(a)|$$

De manera que:

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_f[a, b]$$

y así conclüímos que f es acotada con cota $|f(a)| + V_f[a, b]$. □

Observación 3.4. El recíproco no es cierto, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.5. Definimos en primer lugar $c_k := 1 - \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$ y sea

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x \to f(x) &= (-1)^{k+1} \quad \text{si} \quad x \in [c_{k-1}, c_k) \end{aligned}$$

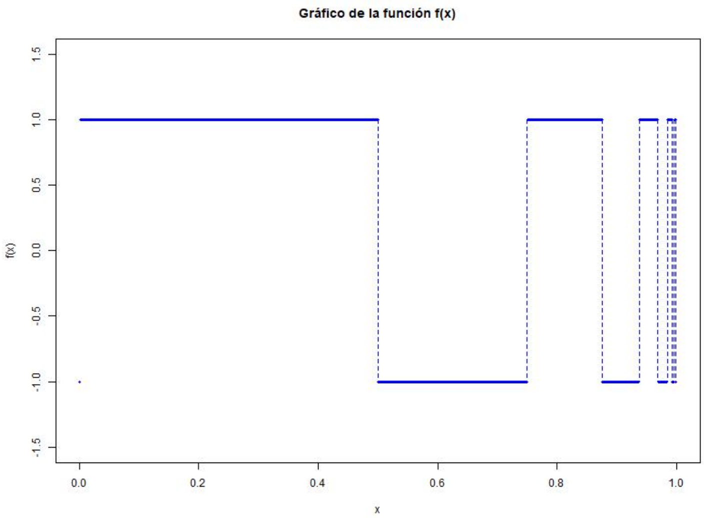

Figura 3.1: Gráfico de la función f(x)

Tomando la partición, con $m \in \mathbb{N}$:

$$x_0 := 1, \quad x_m := 1, \quad \text{y} \quad x_k := c_k \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, m-1$$

vemos que $|f(x_k) - f(x_{k-1})| = 2$ para $k = 1, \ldots, m-1$ y que $|f(x_m) - f(x_{m-1})| = 1$, con lo que se tiene que

$$V_f[0, 1] \geq 1 + 2(m-1) = 2m - 1$$

y como $m \in \mathbb{N}$ es arbitrario, vemos que cuando va a infinito $V_f[0, 1] \geq \infty$, luego $f \notin BV[0, 1]$

Proposición 3.6. *Toda función monótona en un intervalo $[a, b]$ es de variación acotada. Además,*

$$V_f([a, b]) = |f(b) - f(a)|$$

Demostración. Supongamos que f es no decreciente (siendo el caso no creciente análogo), entonces se tiene que:

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

Con lo que obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = f(b) - f(a)$$

De esta forma se sigue que $V_f[a, b] = f(b) - f(a)$, con lo que $f \in BV[a, b]$. □

Proposición 3.7. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función Lipschitziana con constante de Lipschitz L, entonces $f \in BV[a, b]$ y $V_f[a, b] \leq L(b - a)$.*

Demostración. Por ser f una función Lipschitziana, con constante de Lipschitz L, se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{para todo} \quad x, y \in [a.b]$$

Así tenemos que

$$V_f[a, b] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = L(b - a)$$

y se concluye el resultado. □

Observación 3.8. La continuidad de una función no implica que esta sea de variación acotada. En efecto, basta considerar la función $f : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

que es continua en $[0, 1]$. Si consideramos la partición del intervalo

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < \ldots < \frac{1}{n-(n-1)} = 1\right\}$$

y calculamos la variación total vemos que

$$V_f[0, 1] \geq \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{|\cos(n\pi)|}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left| \frac{\cos(\pi(n-j))}{n-j} - \frac{\cos(\pi(n-j+1))}{n-j+1} \right| \right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{n-j} + \frac{1}{n-j+1} \right) \right\}$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{n} \frac{1}{i}$$

Observación 3.9. La variación acotada no implica la continuidad. Basta considerar la función $f : [-1,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

que es discontinua en $x = 0$ y tiene $V_f[-1,1] = 2$.

Proposición 3.10. *Sean $f, g \in BV[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces las funciones $\alpha f + \beta g$ y fg serán funciones de variación acotada en $[a,b]$. Además, si $g \neq 0$ en $[a,b]$, tenemos que $\frac{f}{g}$ también será una función de variación acotada.*

Demostración. Veamos cada una de las afirmaciones por separado

1. $\alpha\, f + \beta\, g \in BV[a,b]$. En efecto,

$$V_{\alpha f+\beta g} = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |\alpha f(x_i) + \beta g(x_i) - \alpha f(x_{i-1}) - \beta g(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq \sup_P \sum_{i=1}^{n} |\alpha f(x_i) - \alpha f(x_{i-1})| + \sup_P \sum_{i=1}^{n} |\beta g(x_i) - \beta g(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq \alpha \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \beta \sup_P \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq \alpha V_f[a,b] + \beta V_g[a,b] < \infty$$

2. $fg \in BV[a,b]$.

$$V_{fg}[a,b] = \sup_p \sum_{i=1}^{n} |fg(x_i) - fg(x_{i-1})| = \sup_p \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| =$$

$$= \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_{i-1}) + f(x_i)g(x_{i-1}) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \leq$$

$$\sup_P \sum_{i=1}^{n} \left[|f(x_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})| + |g(x_{i-1})||f(x_i) - f(x_{i-1})| \right] \leq$$

$$\sup_P \sum_{i=1}^{n} \left[|f(x_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})|\right] + \sup_P \sum_{i=1}^{n} \left[|g(x_{i-1})||f(x_i) - f(x_{i-1})|\right]$$

Por la Proposición 3.3, por ser las funciones f y g de variación acotada, son acotadas, luego existen $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) \leq M_1 \quad \text{y} \quad g(x) \leq M_2 \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b]$$

De esta forma

$$\sup_P \sum_{i=1}^{n} \left[|f(x_i)||g(x_i) - g(x_{i-1})|\right] + \sup_P \sum_{i=1}^{n} \left[|g(x_{i-1})||f(x_i) - f(x_{i-1})|\right] \leq$$

$$M_1 \sup_P \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| + M_2 \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| =$$

$$M_1 V_g[a,b] + M_2 V_f[a,b] < \infty$$

3. $f/g \in BV[a,b]$.

$$V_{\frac{f}{g}}[a,b] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f}{g}(x_i) - \frac{f}{g}(x_{i-1}) \right| =$$

$$= \sup_P \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_i)}{g(x_i)} - \frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})} \right| = \sup_P \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f(x_i)}{g(x_i)} - \frac{f(x_{i-1})}{g(x_i)} + \frac{f(x_{i-1})}{g(x_i)} - \frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})} \right| =$$

$$\sup_P \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{g(x_i)} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) - f(x_{i-1}) \left(\frac{1}{g(x_{i-1})} - \frac{1}{g(x_i)} \right) \right| \leq$$

$$\leq \sup_P \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{g(x_i)} \right| |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1})| \frac{|g(x_i) - g(x_{i-1})|}{|g(x_i)||g(x_{i-1})|}$$

Como $f, g \in BV[a,b]$, están acotadas, existirá $M_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M_1$ para todo $x \in [a,b]$. Además, como $g \neq 0$ en $[a,b]$, existirá $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\frac{1}{g(x)}\right| \leq M_2$ para todo $x \in [a,b]$, de forma que $\frac{1}{|g(x_i)||g(x_{i-1})|} \leq M_2^2$. Así, tenemos que

$$\sup_P \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{g(x_i)} \right| |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1})| \frac{|g(x_i) - g(x_{i-1})|}{|g(x_i)||g(x_{i-1})|} \leq$$

$$\leq M_2 \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + M_1 M_2^2 \sup_P \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| =$$

$$= M_2 V_f[a,b] + M_1 M_2^2 V_g[a,b] < \infty$$

$\square$

Proposición 3.11. *Si f es una función de variación acotada en $[a.b]$, entonces para todo $[c,d] \subset [a,b]$ se tiene que $f \in BV[c,d]$. De forma más general, para todo $c \in [a,b]$ tenemos que:*

$$V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

Demostración. Por ser f una función de variación acotada, se tiene que

$$V_f[a,b] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \infty$$

Si consideramos un subconjunto del conjunto de particiones del intervalo $[a,b]$ tal que el punto $c \in [a,b]$ pertenezca a todas sus particiones, que denotaremos por P'. Así, por las propiedades del supremo, como $P \subset P'$, tenemos que

$$\infty > V_f[a,b] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq \sup_{P'} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| =$$

$$= \sup_{P'} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sup_{P'} \left[\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right] =$$

$$\sup_{P'} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sup_{P'} \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = V_f[a,c] + V_f[c,d] \quad \text{siendo} \quad x_k = c$$

Siguiendo este razonamiento, considerando un intervalo $[c,d] \subset [a,b]$ llegamos a que

$$f \in BV[a,b] \quad \Rightarrow \quad f \in BV[c,d]$$

□

Definición 3.12 (Variación positiva y negativa de una función)**.** Se definen las variaciones positiva y negativa de f en $[a,b]$, respectivamente, como:

$$V_f^+[a,b] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+$$

$$V_f^-[a,b] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

Proposición 3.13. *Sea f una función de variación acotada en $[a,b]$, entonces se tiene que:*

$$V_f[a,b] = V_f^+[a,b] + V_f^-[a,b]$$

$$f(b) - f(a) = V_f^+[a,b] - V_f^-[a,b]$$

En particular, para cada $x \in [a,b]$, obtenemos la Descomposición de Jordan:

$$f(x) = f(a) + V_f^+[a,x] - V_f^-[a,x]$$

Demostración. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ por definición de parte positiva y negativa se tiene que $|x| = [x]^+ + [x]^-$, luego aplicándolo a la variación total tenemos que:

$$V_f[a,b] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sup_P \sum_{i=1}^{n} \Big[[f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \Big] =$$

$$= \sup_P \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ + \sup_P \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- = V_f^+[a,b] + V_f^-[a,b]$$

De nuevo, por definición de parte positiva y negativa se tiene que $x = [x]^+ - [x]^-$, con lo que podemos ver que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-$$

De esta forma es sencillo llegar a que

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} \left[[f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \right]$$

Con lo que tomando supremos llegamos a que

$$f(b) - f(a) = \sup_P \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \sup_P \sum_{i=1}^{n} \left[[f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- \right] =$$

$$= \sup_P \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ - \sup_P \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- = V_f^+[a,b] - V_f^-[a,b]$$

Por último, tomando un $x \in [a,b]$, por la Proposición 3.11, al ser f de variación acotada en $[a,b]$, también lo será en $[a,x]$ y cumplirá que $V_f[a,b] = V_f[a,x] + V_f[x,b]$, con lo que tendremos por el apartado anterior de esta proposición que

$$f(x) - f(a) = V_f^+[a,x] - V_f^-[a,x]$$

□

Proposición 3.14. *Una función f es de variación acotada en $[a,b]$ si, y solo si se puede expresar como diferencia de dos funciones no decrecientes.*

Demostración.
" $\Rightarrow$ "
Sabiendo que $f \in BV[a,b]$, consideramos las siguientes funciones:

$$g(x) := f(a) + V_f^+[a,x], \quad h(x) := V_f^-[a,x]$$

Es evidente que ambas funciones son no decrecientes y aplicando el último apartado de la Proposición 3.13 tenemos que

$$f(x) = f(a) + V_f^+[a,x] - V_f^-[a,x] = g(x) - h(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [a,b]$$

" $\Leftarrow$ "

En la Proposición 3.6 vimos que toda función monótona es de variación acotada, y en la Proposición 3.10 probamos que la suma de funciones de variación acotada es una función de variación acotada. Concluyendo así que la diferencia de dos funciones monótonas es de variación acotada. $\square$

Proposición 3.15. *Toda función de variación acotada en $[a, b]$ es una función medible.*

Demostración. Por ser f una función de variación acotada se puede descomponer en la diferencia de dos funciones monótonas, en particular, medibles (ver Teorema 1.53). $\square$

Proposición 3.16. *Si una función f es de variación acotada en $[a, b]$, entonces su conjunto de discontinuidades en $[a, b]$ es, a lo sumo, numerable.*

Demostración. Por ser una función de variación acotada la diferencia de dos funciones no decrecientes (ver Proposición 3.14), bastará probar el resultado para funciones monótonas no decrecientes. Sea E el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Se tiene para todo $x \in E$ que $f(x^-) < f(x^+)$. Así, existirá un elemento $r(x) \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x^-) < r(x) < f(x^+)$. Por otro lado, si x_1 y x_2 son dos elementos de E tales que $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1^+) \leq f(x_2^-)$, lo que implica que $r(x_1) \neq r(x_2)$.

Teniendo esto en cuenta, la aplicación $r : E \in E \to r(x) \in \mathbb{Q}$ será inyectiva. En particular, esto establecerá una biyección entre E y un subconjunto de $\mathbb{Q}$, de donde se deduce que E es numerable. $\square$

Capítulo 4

Conceptos y propiedades de la derivada de Dini

En este capítulo introduciremos las definiciones de las cuatro Derivadas de Dini, así como la definición de las Derivadas mayores y menores de Dini. Relacionaremos estos conceptos con la diferenciabilidad de una función, y además estudiaremos su medibilidad. Más adelante lo usaremos para estudiar la diferenciación de las funciones de variación acotada introducidas en el capítulo 3. Se utilizó como bibliografía el libro [DiBenedetto, 2016].

Definición 4.1 (Derivadas o números de Dini)**.** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dado un $x \in [a,b]$, definimos las cuatro derivadas o números de Dini de f como

$$D_{\pm} f(x) = \liminf_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D^{\pm} f(x) = \limsup_{h \to 0^{\pm}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siendo las primeras las Derivadas de Dini inferiores y las segundas las superiores. Además, definimos las Derivadas mayores y menores de Dini, respectivamente, como:

$$D'' f = \max\{D^{-} f; D^{+} f\} \quad , \quad D' f = \min\{D_{-} f; D_{+} f\}$$

Proposición 4.2. *Si f es diferenciable en x, entonces las cuatro Derivadas de Dini coinciden con $f'(x)$*

Demostración. Si f es diferenciable en x_0 tenemos que

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

Por definición de límite, el límite superior e inferior coinciden, y lo mismo ocurre con el límite cuando $h \to 0$ por la izquierda o por la derecha, con lo que llegamos a que las cuatro Derivadas de Dini coinciden. $\square$

Teorema 4.3 (Teorema de Banach-Sierpinski). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente en $[a, b]$. Entonces, las funciones $D_{\pm}f(x)$ y $D^{\pm}f(x)$ son medibles. En particular, $D'f$ y $D''f$ son medibles.*

Demostración. Probaremos que D^+f es medible, siendo el resto de pruebas análogas. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$u_n(x) := \sup_{0<h<\frac{1}{n}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dado que $D^+f = \lim_{n\to\infty} u_n$, es suficiente probar que las funciones u_n son medibles. Por la monotonía de f, es medible, y para un h fijado, los cocientes de la definición de u_n son medibles. Probaremos que el supremo de estos cocientes con $h \in (0, \frac{1}{n}]$ se realiza para h evaluado en un subconjunto numerable de $(0, \frac{1}{n}]$. De esta manera, u_n será el supremo de un conjunto numerable de funciones medibles. Definimos entonces:

$$v_n = \sup_{h\in\mathbb{Q}\cap(0,\frac{1}{n}]} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Por sus propias definiciones tenemos que

$$v_n(x) \leq u_n(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b]$$

Para probar la desigualdad contraria, fijamos $\epsilon > 0$, con lo que existe $\tau \in (0, \frac{1}{n}]$ tal que:

$$\frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} > u_n(x) - \epsilon$$

Fijando un $\tau \in (0, \frac{1}{n}]$ en tales condiciones, tendremos que existe $h \in \mathbb{Q} \cap (0, \frac{1}{n}]$ que cumpla que $h \geq \tau$ y tal que

$$\frac{1}{\tau} < \frac{1}{h} + \frac{\epsilon}{|f(x+\tau)| + |f(x)| + 1}$$

Así, teniendo en cuenta que $f(x+\tau) \leq f(x+h)$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \epsilon \geq \frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} > u_n(x) - \epsilon$$

Con lo que llegamos a que $v_n(x) \geq u_n(x) - 2\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, llegando así a que $v_n(x) = u_n(x)$ y por tanto a que la función D^+f es medible. $\square$

Observación 4.4. Por el Teorema de Banach-Sierpinski (Teorema 4.3), si f es una función no decreciente, las Derivadas mayores y menores de Dini son medibles.

Proposición 4.5. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente en su dominio, entonces se tiene que:*

$$f(b) - f(a) \geq t\mu([D''f > t]) \quad \textit{para todo} \quad t \in \mathbb{R}$$

Demostración. Si $\mu([D''f > t] = 0$ o si $t \leq 0$ la afirmación es trivial, con lo que supondremos que

$$\mu([D''f > t]) > 0 \quad \text{y} \quad t > 0$$

Sea $\mathcal{F}$ una familia de intervalos cerrados $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ tales que al menos uno de sus extremos está en $[D''f > t]$ y

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > t$$

Por la definición de $D''f$, fijado $x \in [D''f > t]$ y $\delta > 0$, existirá algún intervalo $[\alpha, \beta] \in \mathcal{F}$ tal que $|\beta - \alpha| < \delta$ y $x \in [\alpha, \beta]$, de forma que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de Vitali de $[D''f > t]$, con lo que para todo $\epsilon > 0$ existe una colección finita de intervalos $[\alpha_i, \beta_i] \in \mathcal{F}$ con $i = 1, \ldots, n$ con interior disjuntos dos a dos, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) > \mu([D''f > t]) - \epsilon$$

De modo que por la definición de $\mathcal{F}$

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^{n} [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] > \sum_{i=1}^{n} t(\beta_i - \alpha_i) > t\mu([D''f > t]) - t\epsilon$$

□

Corolario 4.6. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función no decreciente. Entonces se cumple que $D''f$ y $D'f$ son finitas para casi todo punto $x \in [a,b]$.*

Demostración. Para todo $t > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu\left(\{x \in [a,b] : \ D'f(x) = \infty\}\right) &\leq \mu\left(\{x \in [a,b] : \ D''f(x) = \infty\}\right) \\ &\leq \mu\left(\{x \in [a,b] : \ D''f(x) > t\}\right) \\ &\leq \frac{f(b) - f(a)}{t}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Diferenciación de funciones de variación acotada

Utilizando como referencia el libro [DiBenedetto, 2016], tras probar un teorema previo, conseguiremos demostrar el Teorema de Lebesgue, con el que, teniendo en cuenta que una función de variación acotada se puede escribir como diferencia de funciones monótonas, concluiremos que las funciones de variación acotada son diferenciables casi por doquier.

Teorema 5.1. *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $x \in (a, b)$ si, y solo si $D''f(x)$ es finito en x y $D''f(x) = D'f(x)$. De forma más general, f será diferenciable casi por doquier en $[a, b]$ si, y solo si $D''f$ es finita para casi todo punto $x \in [a, b]$ y $\mu([D''f > D'f]) = 0$.*

Demostración.
" $\Rightarrow$ "
Por ser f diferenciable

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Por tanto, existe y es finita $D''f(x)$ y además, por la Proposición 4.2 las cuatro Derivadas de Dini coinciden, con lo que $D''f(x) = D'f(x)$.
" $\Leftarrow$ "
Por hipótesis tenemos que $D'f(x) = D''f(x) \in \mathbb{R}$, con lo que se tiene que:

$$\min\{D_-f, D_+f\} = \max\{(D^+(x), D^-(x)\}$$

Lo que implica que la menor de las derivadas inferiores de Dini es igual a la mayor de las derivadas superiores de Dini, con lo que se llega a que el límite existe y a que la función f es diferenciable en x. $\square$

Teorema 5.2 (Teorema de Lebesgue). *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente, entonces será diferenciable para casi todo punto $x \in [a, b]$.*

Demostración. Sabemos por el Corolario 4.6 que $D''f$ y $D'f$ son finitas para casi todo punto $x \in [a, b]$. Supongamos que $\mu([D''f > D'f]) > 0$, y para $p, q \in \mathbb{N}$ definimos:

$$E_{p,q} = \left[D'f(x) < \frac{p}{q} < \frac{p+1}{q} < D''f(x) \right]$$

Dado que

$$[D''f > D'f] = \bigcup_{p,q \in \mathbb{N}} E_{p,q}$$

existirá un par $p_0, q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_{p_0,q_0}) > 0$. Sea $\mathcal{F}$ una familia de intervalos cerrados $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tales que al menos uno de los extremos pertenezca a E_{p_0,q_0} y tales que

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{p_0}{q_0}$$

Fijando $x \in E_{p_0,q_0}$ y $\delta > 0$, existirá un intervalo $[\alpha, \beta] \in \mathcal{F}$ tal que $|\beta - \alpha| < \delta$ cumpliendo que $x \in [\alpha, \beta]$. De esta forma vemos que $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de Vitali de E_{p_0,q_0}, luego, habiendo fijado un $\epsilon > 0$, podremos extraer de $\mathcal{F}$ una colcción finita de intervalos $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, \ldots, n$ con interiores disjuntos dos a dos tales que,

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) - \epsilon < \mu(E_{p_0,q_0}) < \mu(E_{p_0,q_0} \cap \bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i]) + \epsilon$$

y por la forma en que la familia $\mathcal{F}$ está construída tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] < \frac{p_0}{q_0} \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \frac{p_0}{q_0} \mu(E_{p_0,q_0}) + \frac{p_0}{q_0} \epsilon$$

Con lo que por la Proposición 4.5 aplicada a la restricciòn de f al intervalo $[\alpha_i, \beta_i]$ deducimos que

$$f(\beta_i) - f(\alpha_i) > \frac{p_0 + 1}{q_0} \mu(E_{p_0,q_0} \cap [\alpha_i, \beta_i])$$

y sumando estas desigualdades de $i = 1, \ldots, n$, llegamos a que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] &> \frac{p_0 + 1}{q_0} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_{p_0,q_0} \cap [\alpha_i, \beta_i]) \\ &\geq \frac{p_0 + 1}{q_0} \mu \left(E_{p_0,q_0} \cap \bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_i, \beta_i] \right) \\ &> \frac{p_0 + 1}{q_0} \mu(E_{p_0,q_0}) - \frac{p_0 + 1}{q_0} \epsilon \end{aligned}$$

Con lo que combinando desigualdades llegamos a que

$$\frac{p_0}{q_0} \mu(E_{p_0,q_0}) + \frac{p_0}{q_0} \epsilon > \frac{p_0 + 1}{q_0} \mu(E_{p_0,q_0}) - \frac{p_0 + 1}{q_0} \epsilon$$

y concluímos que $\mu(E_{p_0,q_0}) < (2p + 1)\epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ $\square$

Corolario 5.3. *Sea* $f.[a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de variación acotada en* $[a,b]$*, entonces* f *es diferenciable para casi todo punto* $x \in [a,b]$*.*

Demostración. Por la Proposición 3.14, toda función de variación acotada se puede expresar como la diferencia de dos funciones monótonas no decrecientes. Por el teorema anterior (Teorema de Lebesgue), toda función monótona no decereciente es monótona para casi todo punto $x \in [a,b]$. De esta manera, por ser f de variación acotada en $[a,b]$, es diferenciable para casi todo punto $x \in [a,b]$. $\square$

Capítulo 6

Funciones absolutamente continuas

En este sexto capítulo estudiaremos las funciones absolutamente continuas: su definición, propiedades, una caracterización, etc. Estas serán parte esencial del enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la Integral de Lebesgue, que da nombre a este trabajo. Veremos que estas funciones son también, por definición, funciones de variación acotada, pero que, sin embargo, la definición de continuidad absoluta es más poderosa. Se verá también que estas funciones son diferenciables casi por doquier, y que además su derivada tiene propiedades muy importantes para su estudio. Para la escritura de este capítulo se han tomado como referencia los libros [Bartle, 2001] y [DiBenedetto, 2016].

Definición 6.1 (Función absolutamente continua)**.** Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Diremos que F es una aplicación absolutamente continua en $[a, b]$ y lo denotaremos por $F \in AC([a, b])$, si, dada una partición P cualquiera del intervalo $[a, b]$, $\{x_1 < x_2 < \ldots < x_s\}$, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si:

$$\sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}| \leq \delta, \quad \text{entonces,} \quad \sum_{i=1}^{s} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq \epsilon$$

Teorema 6.2 (Propiedades del conjunto $AC([a, b])$)**.**

1. *Si $F \in AC([a, b])$, F es uniformemente continua (luego continua) en $[a, b]$.*

2. *Si F,$G \in AC([a, b])$, y $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$cF,\ |F|,\ F + G,\ F - G,\ F \cdot G \in AC([a, b])$$

Demostración.

1. Sea $x \in [a,b]$, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta > 0$ según la Definición 6.1, si $y \in [a,b]$ y $|x-y| < \delta$, se tiene que $|F(x)-F(y)| < \epsilon$, con lo que F es continua en un punto arbitrario $x \in [a,b]$; y dado que δ no depende del punto x, llegamos a que F es uniformemente continua en $[a,b]$.

2. Procederemos con cada caso por separado:

   a) Como $|cF(x_i) - cF(x_{i-1})| \leq |c| \cdot |F(x_i) - F(x_{i-1})|$, tomando en la defnición de continuidad absoluta de la función F el $\epsilon' = \frac{\epsilon}{|c|}$, con el mismo $\delta > 0$ tendremos que $|cF(x_i) - cF(x_{i-1})| \leq |c| \cdot \epsilon' = |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon$, siguiéndose entonces que $cF \in AC([a,b])$

   b) De la desigualdad $||F(x_i)| - |F(x_{i-1})|| \leq |F(x_i) - F(x_{i-1})|$ llegamos a que $|F| \in AC([a,b])$

   c) Por ser F y G absolutamente continuas, tenemos que dado un ϵ_1 y un ϵ_2, existirán δ_1 y δ_2 que cumplan la definición, respectivamente. Así, si definimos $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$ y tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, tendremos que $|(F \pm G)(x_i) - (F \pm G)(x_{i-1})| \leq |F(x_i) - F(x_{i-1})| + |G(x_i) - G(x_{i-1})| < \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$, de lo que concluimos que $F \pm G \in AC([a,b])$

   d) Si $|F(x)|$, $|G(x)| \leq M$ para $x \in [a,b]$, Por la definición de continuidad absoluta, procediendo igual que en el apartado anterior, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ y $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\epsilon}{2M}$ tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
&|(FG)(x_i) - (FG)(x_{i-1})| = |(FG)(x_i) - F(x_{i-1})G(x_i) + F(x_{i-1})G(x_i) - (FG)(x_{i-1})| \\
&\leq |F(x_i) - F(x_{i-1})| \cdot |G(x_i)| + |G(x_i) - G(x_{i-1})| \cdot |F(x_i)| \\
&\leq M\Big[|F(x_i) - F(x_{i-1})| + |G(x_i) - G(x_{i-1})|\Big],
\end{aligned}
$$

   así,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} |(FG)(x_i) - (FG)(x_{i-1})| \leq & M\left[\sum_{i=1}^{s} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{s} |G(x_i) - G(x_{i-1})|\right] \\
< & M(\epsilon_1 + \epsilon_2) = M\frac{2\epsilon}{2M} = \epsilon,
\end{aligned}
$$

   con lo que llegamos a que $FG \in AC([a,b])$.

□

Proposición 6.3. *Sea $F \in AC([a,b])$, entonces F es una función de variación acotada en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ fijado y el $\delta > 0$ correspondiente a la Definición 6.1. Definimos en I una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tal que

$$\frac{1}{2}\delta < x_i - x_{i-1} < \delta, \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

El número n de intervalos de esta partición no superan $2(b-a)/\delta$. En cada uno la variación de F es menor que ϵ. Así, por la Proposición 3.11 tenemos que

$$V_f[a,b] = \sum_{i=1}^{n} V_f[x_{i-1} - x_i] \leq 2(b-a)\frac{\epsilon}{\delta}$$

□

Observación 6.4. Es evidente que el recíproco no es cierto, en particular, una función de variación acotada no tiene por que ser continua. Bastaría considerar una función definidia a trozos, que fuera constante C en un intervalo $[a,c] \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$ y que en el conjunto $(c,b] \subset [a,b]$ fuese $C+1$.

Corolario 6.5. *Sea F abosolutamente continua en $[a,b]$, entonces F es diferenciable casi por doquier en $[a,b]$.*

Demostración. Se sigue fácilmente de la Proposición 6.3 y del Corolario 5.3. □

Teorema 6.6 (Caracterización de funciones absolutamente continuas)**.** *Dada una función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *F es una integral indefinida de una función perteneciente a $\mathcal{L}([a,b])$*

2. *F es una función absolutamente continua*

Demostración.
“ $\Rightarrow$ ”
Por hipótesis tenemos que

$$F(x) = C + \int_a^x f \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \quad \text{y } f \in \mathcal{L}([a,b])$$

Por el Teorema 2.1, dado $\epsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que si $E \subset [a,b]$ es un conjunto medible cuya medida sea $\mu(E) < \delta$, entonces se tenga que $\int_E |f| \leq \epsilon$. Tomando una partición del intervalo $[a,b]$ de la forma $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = b$ cumpliendo que $\sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}| \leq \delta$, tendremos que si definimos

$$E := \bigcup_{i=1}^{s} [x_{i-1}, x_i]$$

entonces $\mu(E) \leq \delta$, lo que nos lleva a que

$$\sum_{i=1}^{s} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{s} |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f| \leq \sum_{i=1}^{s} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f| \leq \int_E |f| \leq \epsilon$$

y llegamos a que $F \in AC([a,b])$

" $\Leftarrow$ "

Consideremos una partición P y tomemos, para un $k \in \{1, \dots, s\}$ un $x \in [x_{k-1}, x_k]$ arbitrario. Como F es una función absolutamente continua, dado un $\epsilon > 0$ también arbitrario, y tomando la partición $P \cup \{x\}$, tendremos que existirá un $\delta > 0$, tal que

$$\text{si } \Big[\sum_{i=1}^{k-1} |x_i - x_{i-1}| + |x - x_{k-1}| + |x_k - x| + \sum_{i=k+1}^{s} |x_i - x_{i-1}|\Big] \leq \delta \text{ entonces}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon \geq &\Big[\sum_{i=1}^{k-1} |F(x_i) - F(x_{i-1})| + |F(x) - F(x_{k-1})| + |F(x_k) - F(x)| + \sum_{i=k+1}^{s} |F(x_i) - F(x_{i-1})|\Big] \\
= &\sum_{i=1}^{k-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(t)\, dt \right| + \left| \int_{x_{k-1}}^{x} F'(t)\, dt \right| + |F(x_k) - F(x)| + \sum_{k+1}^{s} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(t)\, dt \right| \\
\geq &\left| \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(t)\, dt \right| + \left| \int_{x_{k-1}}^{x} F'(t)\, dt \right| + |F(x_k) - F(x)| + \left| \sum_{k+1}^{s} \int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(t)\, dt \right| \\
= &\left| \int_{a}^{x_{k-1}} F'(t)\, dt \right| + \left| \int_{x_{k-1}}^{x} F'(t)\, dt \right| + |F(x_k) - F(x)| + \left| \int_{x_k}^{b} F'(t)\, dt \right| \\
\geq &\left| \int_{a}^{x_{k-1}} F'(t)\, dt + \int_{x_{k-1}}^{x} F'(t)\, dt + F(x_k) - F(x) + \int_{x_k}^{b} F'(t)\, dt \right| \\
= &\left| \int_{a}^{x} F'(t)\, dt + \int_{x_k}^{b} F'(t)\, dt + F(x_k) - F(x) \right|.
\end{aligned}$$

Dado que $\epsilon > 0$ es tan pequeño como nosotros queramos, llegamos a que

$$0 = \left| \int_{a}^{x} F'(t)\, dt + \int_{x_k}^{b} F'(t)\, dt + F(x_k) - F(x) \right|$$

Luego se tiene que:

$$\begin{aligned}
&0 = \int_{a}^{x} F'(t)\, dt + \int_{x_k}^{b} F'(t)\, dt + F(x_k) - F(x) \\
&\Leftrightarrow F(x) = \int_{a}^{x} F'(t)\, dt + \int_{x_k}^{b} F'(t)\, dt + F(x_k) = \int_{a}^{x} F'(t)\, dt + F(b) - F(x_k) + F(x_k).
\end{aligned}$$

Con lo que podemos concluír que $F(x) = \int_a^x F'(t)\, dt + F(b)$, y así F será una integral indefinida de una función perteneciente a $\mathcal{L}([a, b])$. $\square$

Ejemplo 6.7. Este ejemplo de función absolutamente continua nos dará la idea de la siguiente demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned}
f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) = x^2
\end{aligned}$$

Para ver que $f \in AC([0,1])$, consideremos una colección de puntos $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_s = 1$ tales que definan una partición de $[0,1]$. Dado que $f(x) = x^2$, tenemos que

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = |x_i^2 - x_{i-1}^2| = |x_i - x_{i-1}||x_i + x_{i-1}|$$

y como $x_i, x_{i-1} \in [0,1]$, se tiene que $|x_i + x_{i-1}| \leq 2$. De manera que:

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq 2|x_i - x_{i-1}|$$

Si tomamos la suma de $i = 1, \ldots, s$ tendremos

$$\sum_{i=1}^{s} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{s} 2|x_i - x_{i-1}| = 2\sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}|$$

Luego, dado un $\epsilon > 0$ cualquiera, bastará tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ para ver que si

$$\sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}| \leq \delta, \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{s} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq 2\sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}| = 2\delta = 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

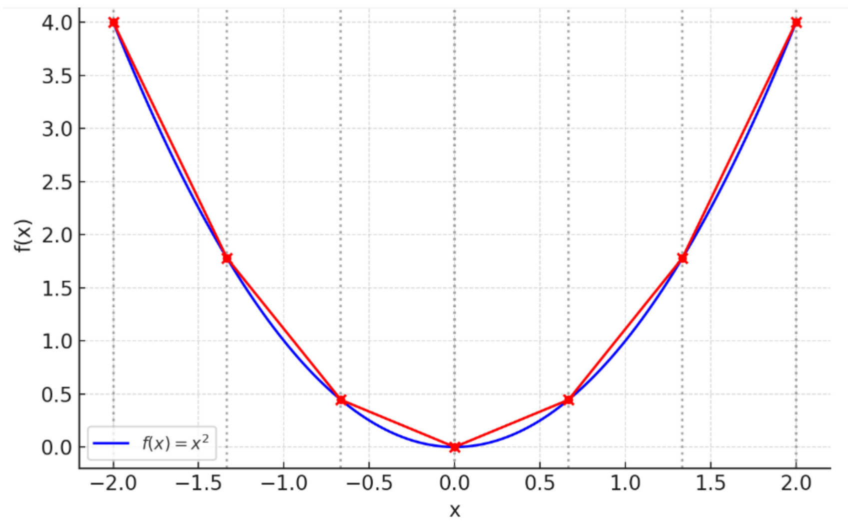

Figura 6.1: Representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ con una partición. Observamos como la diferencia de imágenes está determinada por la longitud de los intervalos de la partición

Proposición 6.8. *Si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitziana y continua, y L es su constante de Lipschitz, entonces F es una función absolutamente continua.*

Demostración. Por ser F una función Lipschitziana en $[a,b]$, se tiene que

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y| \quad \text{para todo} \quad x, y \in [a,b]$$

De esta manera, considerando una partición del intervalo $[a,b]$ de la forma $x_0 < x_1 < \ldots < x_s$ se tendrá que

$$|F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq L|x_i - x_{i-1}|$$

Con lo que sumando de $i = 1$ hasta s tendremos que

$$\sum_{i=1}^{s} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}|$$

Así, dado un $\epsilon > 0$, y considerando $\delta = \frac{\epsilon}{L}$ es sencillo ver que

$$\text{si } \sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}| \leq \delta, \quad \text{entonces} \quad \sum_{i=1}^{s} |F(x_i) - F(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^{s} |x_i - x_{i-1}| = L\delta = L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon$$

Concluyendo así que $F \in AC([a,b])$ □

Observación 6.9. El recíproco de la anterior proposición no es cierto. En efecto, consideremos la siguiente función y veamos que es absolutamente continua pero no Lipschitziana.

$$\begin{aligned} F : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^{\alpha}, \quad \text{con } \alpha \in (0,1) \end{aligned}$$

Es absolutamente continua, pues considerando su derivada, tenemos que

$$F(x) = \int_0^x F'(x) + F(0) = \int_0^x \alpha t^{\alpha-1}\, dt + 0^{\alpha} = x^{\alpha}$$

Teniendo en cuenta que F es continua, sabemos que es una función medible, y además sabemos que

$$\int_{\delta}^{1} |F'(x)|\, dx = \int_{\delta}^{1} F'(x)\, dx = [x^{\alpha}]_{\delta}^{b} = b^{\alpha} - \lim_{\delta \to 0^+} \delta^{\alpha} = b^{\alpha} < \infty$$

Con lo que llegamos a que $F' \in \mathcal{L}([a,b])$ y por la caracterización de las funciones absolutamente continuas (Teorema 6.6), llegamos a que F es absolutamente continua por ser la integral indefinida de una función en $\mathcal{L}([0,1])$.

Veamos ahora que no es Lipschitziana, supongamos que existe una constante $K > 0$ tal que

$$|F(x) - F(y)| = |x^{\alpha} - y^{\alpha}| \leq K|x - y| \text{ para todo } x, y \in [0,1]$$

Si tomamos $y = 0$ nos queda que $x^{\alpha} \leq Lx$ para todo $x \in [0,1]$, luego dividiendo por x a ambos lados de la desigualdad nos queda que

$$x^{\alpha-1} \leq L \text{ y como } \alpha \in (0,1) \text{ podemos ver que } x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \xrightarrow{x \to 0^+} \infty$$

Contradiciendo que L sea una constante real, de forma que llegamos a que la función F no es Lipschitziana.

Ejemplo 6.10. La función de Cantor, también conocida como escalera del diablo, es un ejemplo de función continua pero no absolutamente continua. Veámoslo. Definamos en primer lugar el conjunto de Cantor de la siguiente manera:

1. Sea $E_0 = [0,1]$. Dividimos este intervalo en tres iguales y separamos el segmento $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
2. Sea $E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Dividimos ambos intervalos, cada uno en tres partes y serparamos los tercios centrales.
3. Sea $E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Procedemos de la misma manera.

Continuando con este procedimiento obtenemos una sucesión de intervalos compactos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$, siendo E_n la unión de 2^n intervalos, cada uno de ellos de longitud 3^{-n}. Así, definimos el conjunto de Cantor como

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

Con esta definición hecha, se define la función de Cantor $c : [0,1] \to [0,1]$, como sigue:

1. Para cada $x \in [0,1]$, consideramos su expansión ternaria, es decir:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ , donde } a_n \in \{0,1,2\}$$

2. Si $a_n \in \{0,2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, si la expansión ternaria no contiene a 1, entonces x pertenece al conjunto de Cantor y definimos

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \text{ , con } b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } a_n = 0, \\ 1, & \text{si } a_n = 2. \end{cases}$$

   Si la extensión ternaria contiene a 1, entonces consideramos N como el menor entero tal que $a_N = 1$. De manera que x estará en uno de los intervalos abiertos de la construcción del conjunto de Cantor. Así, $C(x) = C(y)$ donde y es el extremo inferior del intervalo que se elimina en el $N-$ésimo paso.

De esta manera, tendremos que $C(0) = 0$ y $C(1) = 1$, que C será continua por ser el límite de una sucesión de funciones continuas definidas en cada etapa de la construcción, que es una función no decreciente, y que es constante en cada uno de los intervalos abiertos que se eliminan en la construcción del conjunto de Cantor.

Para ver que no es una función absolutamente continua, tengamos en cuenta que en cada paso n, se eliminan 2^{n-1} intervalos abiertos, dejando 2^n intervalos cerrados. Denotaremos los 2^n intervalos cerrados de la $n-$ésima etapa por $I_1^{(n)}, \dots, I_{2^n}^{(n)}$, donde la función es lineal y, denotando por $I_k^{(n)} = [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}]$ tendremos que

$$\sum_{k=1}^{2^n} |C(b_k^{(n)}) - C(a_k^{(n)})| = 1$$

Por la definición del conjunto de Cantor, estos intervalos tienen longitud 3^{-n}, con lo que

$$\sum_{k=1}^{2^n} |b_k^{(n)} - a_k^{(n)}| = 2^n \cdot 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Así, tomando n suficientemente grande tendremos que la suma de la longitud de los intervalos será menor que $\delta > 0$. Al mismo tiempo, independientemente del n que tomemos, la suma de las diferencias de las imágenes siempre será 1, con lo que si $\epsilon \in (0, 1)$ no se cumplirá la definición de continuidad absoluta.

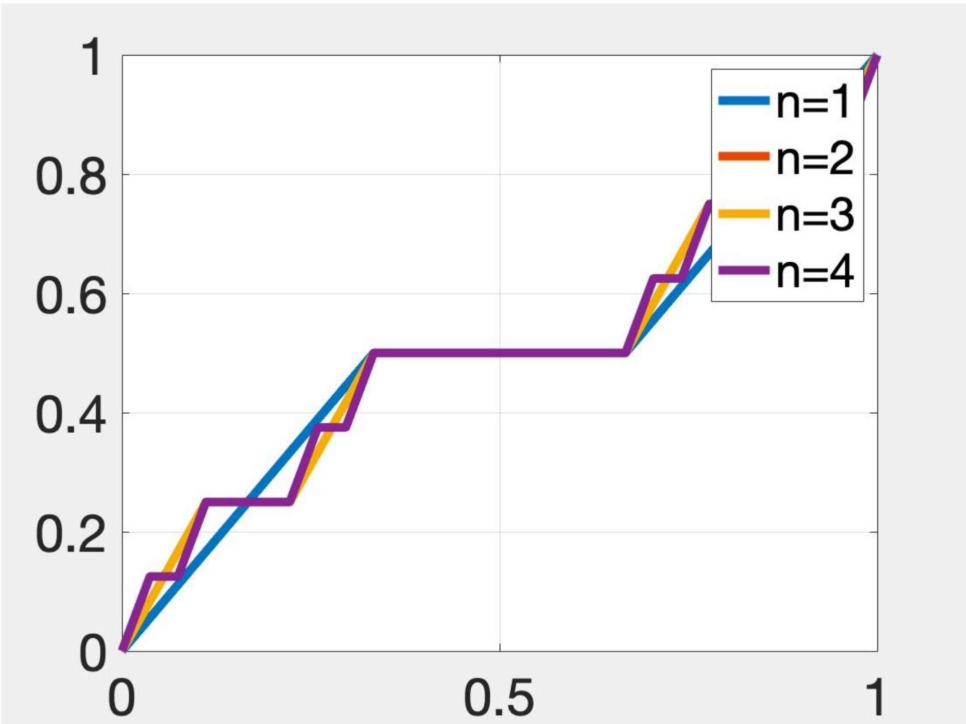

Figura 6.2: Aproximaciones sucesivas de la función de Cantor

Proposición 6.11. *Sea F abosolutamente continua en $[a, b]$. Si $F' \geq 0$ casi por doquier en $[a, b]$, entonces F será no decreciente en el intervalo $[a, b]$.*

Demostración. fijamos $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ y el conjunto E definido como:

$$E = \{x \in [a, b] \mid F'(x) \geq 0\} \cap [\alpha, \beta]$$

Por hipótesis $\mu(E) = \beta - \alpha$. Fijamos $\epsilon > 0$, y consideramos como $\delta > 0$ el obtenido de la definición de la continuidad absoluta de F. Para cada $x \in E$, existe algún σ_x tal que

$$f(x+h) - f(x) > \epsilon h \quad \text{para todo } h \in (0, \sigma_x)$$

El conjunto de intervalos $\{[x, x+h] \mid x \in E, h \in (0, \sigma_x)\}$ es un recubrimiento fino de Vitali para E. Así, teniendo en cuenta el $\delta > 0$ ya definido anteriormente, podemos obtener una colección finita de intervalos $\{[\alpha_i, \beta_i] \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ con interiores disjuntos dos a dos, tales que:

$$\mu(E) - \delta \leq \mu\left[E \cap \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)\right] \quad \text{y} \quad f(\beta_i) - f(\alpha_i) > -\epsilon(\beta_i - \alpha_i)$$

El complementario

$$[\alpha, \beta] - \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_i, \beta_i)$$

consiste en un número finito de intervalos disjuntos $[a_j, b_j]$ con $j = 1, \ldots, m$ de longitud total menor que δ. Así, se cumplen las hipótesis de la Proposición 6.3 para esta colección finita, y

$$f(\beta) - f(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] + \sum_{j=1}^{n} [f(b_j) - f(a_j)] \geq -\epsilon \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) - \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$ $\square$

Corolario 6.12. *Sea F absolutamente continua en $[a, b]$. Si $F' = 0$ casi por doquier en $[a, b]$, entonces F es constante en $[a, b]$.*

Demostración. Por ser $F \in AC([a, b]) \subset BV([a, b])$, podemos escribirla como la diferencia de dos funciones no decrecientes, es decir, $F = h - g$, siendo h y g funciones no decrecientes. Así, tenemos que $0 = F' = h' - g'$ casi por doquier en $[a, b]$. Lo que nos lleva a que $h' = g'$ para casi todo punto $x \in [a, b]$, y de esta manera vemos que

$$\int_{[a,b]} h' = \int_{[a,b]} g' \text{ con lo que } h + C = g \text{ , con } C \in \mathbb{R}$$

Con lo que concluímos que

$$F = h - g = C \in \mathbb{R}$$

$\square$

Observación 6.13. La proposición 6.11 y el Corolario 6.12 no se cumplirán si F es de variación acotada pero no absolutamente continua.

En efecto, consideramos una función f de variación acotada y su correspondiente función de saltos, definida por $J_f(x) = \sum_{a \leq c_j \leq x} [f(c_j^+) - f(c_j^-)]$, tendremos que J_f' será igual a cero en todos los puntos de $[a, b]$ salvo en los puntos donde f sea discontinua, y por ser $f \in BV[a, b]$, este conjunto de puntos será numerable. De esta manera, tenemos que $J_f' = 0$ para todo $[a, b]$ exceptuando un conjunto de medida nula, o lo que es lo mismo, $J_f' = 0$ para casi todo punto $x \in [a, b]$, de manera que estamos en las hipótesis del Corolario. No obstante, la función de saltos no es constante, pues varía en los puntos donde f es discontinua.

Para ver el caso de la proposición, bastará tomar la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [-1, 0), \\ x & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

En esta función, tenemos que $f' \geq 0$ para todo punto del intervalo $[-1, 1]$ excepto el 0, donde f no es diferenciable, al no ser ni siquiera continua. No obstante, tenemos que, por ejemplo $-\frac{1}{2} < 0$ y $f(0) < f(-\frac{1}{2})$, incumpliendo que la función sea no decreciente.

Capítulo 7

Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue

FInalmente, se demostrará en las siguientes páginas el Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue, haciendo uso de muchas de las definiciones, conceptos.... de los capítulos anteriores. Antes de enunciar y demostrar el propio teorema, se darán ciertos resultados necesarios para la comprensión del mismo. Por último, se darán ciertas consecuencias de esta importante cuestión, así como contraejemplos que permitan ver la importancia de las hipótesis requeridas.

Teorema 7.1 (Teorema de Fubini)**.** *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión funcional de funciones reales y no decrecientes en $[a,b]$, tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es convergente en $[a,b]$ a una función real f en $[a,b]$. Entonces f es diferenciable casi por doquier en $[a,b]$, es decir*

$$\mu\left(\left\{x\in[a,b] : \nexists\, f'(x)\right\}\right)=0$$

y, además,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \textit{casi por doquier en } [a,b]$$

Demostración. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $f_n(a)=0$ y que $f_n \geq 0$, pues en caso contrario bastaría tomar $f_n = f_n - f_n(a)$. Para $n\in\mathbb{N}$, escribimos:

$$f=\sum_{i=1}^{n} f_i + R_n \quad \text{donde} \quad R_n=\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j$$

Las funciones R_n son no decrecientes, y por tanto, por el Teorema 5.2 (Teorema de Lebesgue), diferenciables casi por doquier en $[a,b]$. Además, la diferencia $R_n - R_{n+1} = f_{n+1}$ también es no decreciente y por el mismo motivo será diferenciable casi por doquier en $[a,b]$. Así $R_n' - R_{n+1}' =$

$f_{n+1} \geq 0$ para casi todo punto $x \in [a,b]$, lo que implica que la sucesión R'_n es decreciente y, como está formada por funciones no negativas, tiene límite

$$0 \leq g(x) = \lim_{n\to\infty} R'_n(x) \text{ c.p.d en } [a,b].$$

Por otro lado, la serie f es no decreciente y por tanto diferenciable c.p.d en $[a,b]$, con lo que

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f'_i + R'_n \quad \text{casi por doquier en} \quad [a,b].$$

Tomando límite en n en la expresión anterior obtetemos que

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n + g.$$

Por lo tanto, para completar la demostración será suficiente demostrar que $g(x) = 0$ en casi todo punto $x \in [a,b]$. Ahora bien, teniendo en cuenta la Proposición 4.5 para la función R_n, dado que $R'_n \geq g$ para casi todo punto $x \in [a,b]$, y $R_n(a) = 0$, se tiene que

$$R_n(b) \geq t\mu([R'_n > t]) \geq t\mu([g > t]), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sabiendo que la serie es convergente en $[a,b]$, la parte izquierda de la desigualdad se va a cero cuando $n \to \infty$, con lo que $\mu([g > t]) = 0$ para todo $t > 0$ y así, llegamos a que $g = 0$ en casi todo punto $x \in [a,b]$ y concluímos la demostración del teorema. □

Definición 7.2 (Función de densidad de conjunto)**.** Sea $E \subset [a,b]$ Lebesgue-medible. Definimos las funciones de densidad de conjunto como:

$$x \to d_E(x) = \int_{[a,x]} \chi_E(t)\,dt \quad \text{y} \quad d_{[a,b]\setminus E}(x) = \int_{[a,x]} \chi_{[a,b]\setminus E}(t)\,dt$$

Proposición 7.3. *Las funciones de densidad de conjunto son absolutamente continuas y no decrecientes en $[a,b]$. Además,*

$$d_E(x) + d_{[a,b]\setminus E}(x) = x - a, \ \forall x \in [a,b],$$
$$d'_E(x) + d'_{[a,b]\setminus E}(x) = 1, \ c.p.t \ \ x \in [a,b].$$

Demostración. Siguiendo el Teorema 6.6, tenemos que la funicón de densidad de conjunto es absolutamente continua por ser integral indefinida de una función en $\mathcal{L}([a,b])$. Además, si $x_1 < x_2$, se tendrá que $[a,x_1] \subset [a,x_2]$, de manera que $\chi_{[a,x_1]} \leq \chi_{[a,x_2]}$, y por la monotonía de la integral llegamos a que es no decreciente. Para ver la primera igualdad, por la definición de funciones de densidad de conjunto (Definición 7.2), se tiene:

$$d_E(x) + d_{[a,b]\setminus E}(x) = \int_{[a,x]} \chi_E(t)\,dt + \int_{[a,x]} \chi_{[a,b]\setminus E}(t)\,dt =$$

$$= \int_{[a,x]\cap E} 1\,dt + \int_{[a,x]\cap([a,b]\setminus E)} 1\,dt$$

Así, teniendo en cuenta que $E \cap ([a,b] \setminus E) = \emptyset$ y que $[a,x] \subset [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$ se tiene que

$$d_E(x) + d_{[a,b]\setminus E}(x) = \int_{[a,x]} 1\,dt = x - a, \text{ para todo } x \in [a,b]$$

Por último, por ser una función absolutamente continua, tenemos que es diferenciable para casi todo punto $x \in [a,b]$, con lo que

$$d'_E(x) + d'_{[a,b]\setminus E}(x) = (d_E(x) + d_{[a,b]\setminus E}(x))' = (x-a)' = 1 \text{ c.p.d } x \in [a,b]$$

□

Proposición 7.4. *Dado $E \subset [a,b]$ un conjunto Lebesgue-medible, se tiene que:*

$$d'_E = 1 \quad c.p.d \text{ en } E \quad y \quad d'_E = 0 \quad c.p.d \text{ en } \quad [a,b] - E$$

Demostración. Dividiremos la demostración en tres partes: E es un conjunto abierto, $E \in G_\delta$ (intersección numerable de abiertos), y E es un conjunto medible.

- Sea E un conjunto abierto, entonces consideramos $t_0 \in E$, luego por ser E abierto existirá un $\delta > 0$ tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset E$. Sea $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ y supongamos que $t > t_0$ (siendo análogo para $t \leq t_0$), entonces:

  $$\frac{d_E(t) - d_E(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\left[\int_a^t \chi_E(s)\,ds - \int_a^{t_0} \chi_E(s)\,ds\right] = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^t \chi_E(s)\,ds$$

  Con esto, y dado que $[t_0, t] \subset G$ tenemos que

  $$\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^t \chi_E(s)\,ds = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^t 1\,ds$$

  con lo que llegamos a que

  $$\lim_{t \to t_0} \frac{d_E(t) - d_E(t_0)}{t - t_0} = 1$$

  y concluímos el primer caso.

- Sea $E \in G_\delta$, entonces existe una colección numerable de conjuntos abiertos $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $G_{n+1} \subset G_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $E = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$. Como $\chi_{G_n} \leq \chi_{G_1} \in \mathcal{L}^1([a,b])$ y $\lim_{n\to+\infty} \chi_{G_n} = \chi_E$, por el Teorema de la Convergencia Dominada (PONER REFERENCIA!!!!),

  $$d_E(x) = \int_{[a,x]} \chi_E(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,x]} \chi_{G_n}(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} d_{G_n}(x).$$

  Por lo tanto,

  $$d_E = d_{G_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(d_{G_{n+1}} - d_{G_n}\right),$$

con lo cual, por el Teorema 7.1,

$$d'_E(x) = d'_{G_1}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(d'_{G_{n+1}}(x) - d'_{G_n}(x) \right), \; c.p.d. \; x \in [a,b].$$

Finalmente, dado un elemento $x \in E$, $x \in G_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en particular, gracias al punto anterior, $d'_{G_n}(x) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta esto último, se sigue el resultado.

- Sea $E \subset [a,b]$ Lebesgue-medible. Gracias al Teorema [Bartle, 2001, 15.3 Theorem] existe un conjunto $B \in G_\delta$ tal que $E \subset B$ y $\mu(B \setminus E) = 0$. Por lo tanto, $d_E = d_B$ y, en consecuencia, $d'_E(x) = d'_B(x)$ para casi todo punto $x \in E$.

$\square$

Definición 7.5 (Función primitiva). Sea f Lebesgue-integrable en $[a,b]$, se define entonces la función primitiva como:

$$x \to F(x) = \int_{[x,a]} f(t)\, dt$$

Proposición 7.6. *La función primitiva es absolutamente continua, y en particular, diferenciable para casi todo punto $x \in [a,b]$*

Demostración. Por la caracterización de funciones absolutamente continuas (Teorema 6.6) se tiene la primera parte del enunciado. La segunda es inmediata, pues todas las funciones absolutamente continuas son diferenciables para casi todo punto $x \in [a,b]$ (Corolario 6.5). $\square$

Teorema 7.7 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue).

1. *Sea f Lebesgue-integrable en $[a,b]$, entonces se tiene que $F'(x) = f(x)$ para casi todo punto $x \in [a,b]$*

2. *Sea f absolutamente continua en $[a,b]$, entonces se tiene que f' es integrable y que*

$$f(x) - f(a) = \int_{[a,x]} f'\, dt$$

Demostración.

1. Dividiremos la demostración en tres puntos: f es una función simple, f es no negativa y f es una función arbitraria.

   - Supongamos que f es una función simple, entonces existe conjuntos disjuntos y medibles $E_i \subset [a,b]$, $i = 1, \ldots, n$, tales que

   $$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{E_i} \quad \text{y} \quad F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_{E_i}$$

   Así, por la Proposición 7.4, se concluye el resultado.

- Supongamos pues que la función f es integrable y no negativa en $[a, b]$, así tendremos que existirá una sucesión de funciones simples tales que:

  $$f_n \leq f_{n+1} \quad \text{y también} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in [a, b]$$

  De esta forma, aplicando el Teorema de convergencia dominada (Teorema 1.29), tenemos que:

  $$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \quad \text{donde} \quad F_n(x) = \int_{[a,x]} f_n(t)\, dt$$

  Con lo que observamos que

  $$F = F_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} (F_{n+1} - F_n)$$

  y dado que

  $$(F_{n+1} - F_n)' = f_{n+1} - f_n \geq 0 \quad \text{c.p.d en} \quad [a, b]$$

  llegamos a que los elementos de la serie son no decrecientes, con lo que por el Teorema de Fubini (Teorema 7.1):

  $$F' = \lim_{n\to\infty} F_n' = \lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{c.p.d en} \quad [a, b]$$

  Y como sabemos que una función integrable f se puede escribir como la diferencia de dos funciones integrables no negativas, por la definición de función Lebesgue-integrable (Definición 1.27), llegamos al resultado.

2. Se dividirá la demostración en dos partes: f es no decreciente, y f es absolutamente continua.

   - Sea f una función no decreciente, de manera que $f' \geq 0$ para casi todo punto $x \in [a, b]$. Definiendo $f(x) = f(b)$ para todo $x \geq b$, tenemos que el límite

     $$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}$$

     existe para casi todo punto $x \in [a, b]$, luego por el Lema de Fatou (Lema 1.24):

     $$\begin{aligned}
     \int_a^b f'\, dx &\leq \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] dx = \\
     &= \liminf_{n\to\infty} n \left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\, dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, dx \right) \\
     &\leq \liminf_{n\to\infty} n \left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)\, dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\, dx \right) \\
     &= \liminf_{n\to\infty} n \left(f(b)(b + \frac{1}{n} - b) - f(a)(a + \frac{1}{n} - a) \right) \\
     &= \liminf_{n\to\infty} n \frac{f(b) - f(a)}{n} = f(b) - f(a)
     \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuenciad de la monotonía de f, ya que $f(b) \geq f(x)$ y $f(a) \leq f(x)$ $\big(\Rightarrow -f(a) \geq -f(x)\big)$ para todo $x \in [a,b]$. Así, hemos demostrado que f' es Lebesgue-integrable.

- Sea ahora f una función absolutamente continua. Se tiene por la Proposición 6.3, que f es función de variación acotada, y por la Proposición 3.14, f es la diferencia de dos funciones no decrecientes, con lo que f' es integrable en $[a,b]$. Así, la función

$$g(x) = g(a) + \int_{[a,x]} f'(t)\,dt$$

es absolutamente continua por el Teorema 6.6 (Caracterización de funciones absolutamente continuas) y $g' = f'$ casi por doquier en $[a,b]$, con lo que $(g-f)' = 0$ para casi todo punto $x \in [a,b]$, y por el Corolario 6.12, $g = f + C$ en $[a,b]$, con $C \in \mathbb{R}$, y dado que $g(a) = f(a)$ se concluye el resultado.

□

Corolario 7.8. *Sea f una función de variación acotada en $[a,b]$, entonces se tiene que f' es integrable en $[a,b]$.*

Demostración. la demostración de este resultado está incluída en la parte final de la prueba del segundo apartado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue (Teorema 7.7). □

Observación 7.9. El segundo enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue (Teorema 7.7), no se cumple si la función f es de variación acotada. Bastará considerar la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$x \in [0,2] \to f(x) = \chi_{[0,1]}(x) + 3\chi_{(1,2]}(x)$$

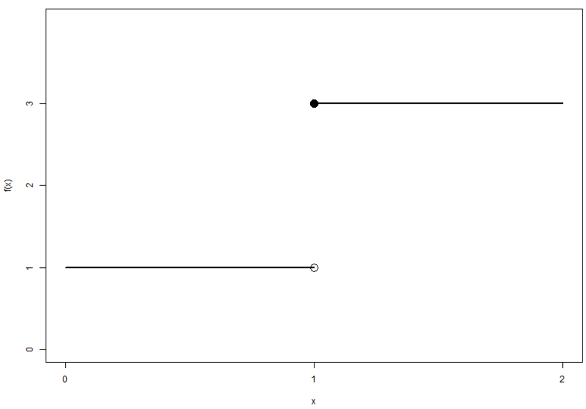

Figura 7.1: Descripción del gráfico

Es una función de variación acotada, pues $V_f[0,2] = 2 < \infty$, pero no es continua por tener un punto de discontinuidad en $x = 1$, con lo que no es absolutamente continua. Además, tenemos que $f'(x) = 0$ para casi todo punto $x \in [0,2]$, con lo que tenemos que:

$$\int_{[0,2]} f'(t)\, dt = 0$$

y sin embargo observamos que

$$f(2) - f(0) = 3 - 1 = 2 \neq \int_{[0,2]} f'(x)\, dx = 0$$

Con lo que concluímos que, tomando $x = 2$, $f(x) - f(a) = 2 \neq 0 = \int_{[0,x]} f'\, dt$, incumpliendo el teorema.

Observación 7.10. El segundo enunciado del Teorema Fundamental del Cálculo Integral para la integral de Lebesgue (Teorema 7.7) tampoco se cumple si se añade la condición de continuidad en el intervalo $[a,b]$. Se puede probar empleando como contraejemplo la función ternaria de Cantor (definida ya en el Ejemplo 6.10). En efecto, se tiene que $C'(x) = 0$ para casi todo $x \in [0,1]$. No obstante, $C(1) - C(0) = 1$, contradiciendo el teorema.

Bibliografía

[Bartle, 1995] Bartle, R. G. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York. Containing a corrected reprint of the 1966 original [*The elements of integration*, Wiley, New York; MR0200398 (34 #293)], A Wiley-Interscience Publication.

[Bartle, 2001] Bartle, R. G. (2001). *A modern theory of integration*, volume 32 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI.

[DiBenedetto, 2016] DiBenedetto, E. (2016). *Real analysis.* Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser/Springer, New York, second edition.