



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

# Sumas torcidas de espacios de Hilbert y operadores

Raúl Pino Velasco

2019–2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA





FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Máster

# Sumas torcidas de espacios de Hilbert y operadores

Raúl Pino Velasco

Julio 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA







# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VII</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Sumas torcidas de espacios quasi-Banach</b>	<b>1</b>
1.1. Sumas torcidas . . . . .	2
1.2. Sumas torcidas y aplicaciones quasi-lineales . . . . .	4
1.3. Aplicaciones quasi-lineales . . . . .	8
<b>2. Sumas torcidas de espacios de sucesiones</b>	<b>17</b>
2.1. Espacios quasi-normados sólidos . . . . .	17
2.2. Sumas torcidas de espacios $\ell_p$ con $0 < p < \infty$ . . . . .	26
2.3. Existencia de base de Schauder . . . . .	27
<b>3. Sumas torcidas de espacios <math>\ell_p</math></b>	<b>31</b>
3.1. Sumas torcidas y convexidad . . . . .	31
3.1.1. Coeficientes $a_n, b_n, c_n$ . $B$ -convexidad . . . . .	32
3.2. El espacio dual de $\ell_p(\varphi)$ . . . . .	40
3.3. Sucesiones básicas en $\ell_p(\varphi)$ . . . . .	44
3.4. Espacios $Z_p$ . . . . .	50
<b>4. Operadores en sumas torcidas de espacios de Banach</b>	<b>51</b>
4.1. Operadores en $Z_p$ . . . . .	51
4.2. Operadores en el espacio $Z_2$ . . . . .	59
<b>Anexos</b>	<b>65</b>
<b>A. Anexo A</b>	<b>67</b>
A.1. Espacios vectoriales topológicos . . . . .	67
A.2. Espacios vectoriales quasi-normados . . . . .	68
A.2.1. Espacios quasi-Banach y $p$ -convexidad . . . . .	70
A.3. El 3-Lema . . . . .	73
<b>B. Anexo B</b>	<b>75</b>
B.1. Bases de Schauder . . . . .	75
B.1.1. El concepto de Base de Schauder . . . . .	75
B.1.2. Sucesiones básicas . . . . .	78

B.1.3. Sucesiones básicas bloque . . . . .	82
B.1.4. Bases y dualidad . . . . .	83
B.1.5. Sucesiones básicas bloque en $\ell_p$ . . . . .	87
B.2. Espacios de Orlicz . . . . .	88

<b>Bibliografía</b>	<b>91</b>
---------------------	-----------

## Resumen

En el siguiente trabajo se presenta la teoría de sumas torcidas de espacios quasi-Banach, que surgió a finales de los años setenta con el objeto de resolver y comprender las soluciones del llamado problema de Palais, que formulaba una cuestión relativa a la estructura de los espacios de Banach y, en particular, de los espacios de Hilbert.

Concretamente, se estudiará la estructura de ciertas sumas torcidas que, en particular, constituyen soluciones del problema mencionado anteriormente y se dedicará una breve parte de la memoria al estudio de sus operadores.

## Abstract

The following work presents the theory of twisted sums of quasi-Banach spaces, which emerged in the late 1970s in order to solve and understand the solutions of the so-called Palais problem, which formulated a question regarding the structure of Banach spaces and, in particular, Hilbert spaces.

Specifically, the structure of certain twisted sums that, in particular, constitute solutions to the aforementioned problem, will be studied and a brief part of the work will be devoted to the study of operators defined on them.



# Introducción

Este Trabajo Fin de Máster está dedicado al conocido como *problema de Palais*, que se pregunta lo siguiente:

*¿existe algún espacio de Banach  $X$  —y que no sea un espacio de Hilbert— que contenga un (subespacio isomorfo a) espacio de Hilbert  $H$  de modo que  $X/H$  sea nuevamente (isomorfo a) un espacio de Hilbert  $H'$ ?*

Esta memoria consta esencialmente dos partes: la primera parte estará dedicada al estudio de una familia de espacios relacionada con una de las soluciones del problema de Palais; en la segunda parte estudiaremos operadores definidos en tales espacios.

Con el objetivo de entender la formulación de *el problema de Palais*, en el primer capítulo introducimos brevemente la teoría de sumas torcidas sobre  $F$ -espacios. Además, también veremos que el contexto idóneo sobre el que trabajar para resolver el problema de Palais es el de los espacios quasi-Banach. En el Anexo A pueden consultarse resultados relacionados con espacios vectoriales topológicos y, en particular, espacios quasi-normados.

Por otra parte, en este mismo capítulo mostramos que existe una correspondencia entre sumas torcidas y cierto tipo de aplicaciones no lineales, las llamadas aplicaciones quasi-lineales, que jugarán un importante papel en este trabajo.

Ya en el Capítulo 2, veremos que encontrar una solución para el problema de Palais se reduce a construir sumas torcidas mediante aplicaciones lipschitzianas definidas en  $[0, +\infty)$  y no acotadas.

Más exactamente, dado  $1 < p < \infty$ , probaremos que si  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función lipschitziana no acotada, entonces es posible definir una suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  de  $\ell_p$  y  $\ell_p$ . Además, en la última sección de este capítulo, veremos que dicha suma torcida (que es un espacio quasi-Banach) admite base de Schauder. Adjuntamos información y resultados elementales sobre bases de Schauder en el Anexo B.

En la primera parte del capítulo 3 demostramos que las sumas torcidas  $\ell_p(\varphi)$  introducidas en el capítulo anterior son, en realidad, isomorfas a espacios de Banach. Para probar tal hecho necesitaremos invocar resultados sobre convexidad en espacios de Banach (que no probaremos).

En la segunda sección de este capítulo caracterizamos el espacio dual de la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$ . A continuación, en la tercera sección estudiamos las sucesiones básicas de tales espacios. En esta sección aparecerán los espacios de Orlicz. Adjuntamos en el Anexo algunos resultados elementales sobre tales espacios.

Finalmente, en la cuarta y última sección introducimos los espacios  $Z_p$ , que se obtienen cuando consideramos la función lipschitziana más sencilla:  $\varphi(t) = t$ .

En el cuarto capítulo abordamos el estudio del espacio de operadores  $\mathcal{B}(Z_p)$ . La segunda sección estará dedicada enteramente al caso  $p = 2$ . También estudiaremos en este último epígrafe operadores  $T : Z_2 \rightarrow X$ , siendo  $X$  cualquier espacio de Banach.

Agradezco a los profesores Félix Cabello y Jesús Castillo el haberme enviado su material, el cual empleé para la realización de este Trabajo de Fin Máster.

Por último, quiero agradecer a mis dos tutores: a Jorge que, con la misma dedicación que siempre ha tenido, me ayudó a realizar dicho trabajo; y a Jesús, también siempre dispuesto a ayudar, quien me enseñó que “al final, las matemáticas son lo que importan”.

Raúl Pino Velasco  
Santiago de Compostela, 16 de julio de 2020.

# Capítulo 1

## Sumas torcidas de espacios quasi-Banach

Dado un espacio de Banach  $X$  y un subespacio  $M \subset X$  no trivial, a la hora de estudiar cierta propiedad de  $X$ , lo natural es comenzar por examinar dicha propiedad en el subespacio  $M$  y en el espacio cociente  $X/M$ . Por ejemplo, conviene observar que la reflexividad es una propiedad hereditaria —esto es, si  $X$  es reflexivo,  $M$  también es reflexivo— y además, también tendremos que el espacio cociente  $X/M$  es reflexivo (ver [18, p. 164]). Otras propiedades con un comportamiento similar, son —por ejemplo— tener dimensión finita o ser separable.

Ahora bien ¿hasta qué punto las propiedades de los subespacios  $M \subset X$  y los espacios cociente  $X/M$  determinan las propiedades del espacio total  $X$ ? Es decir, dada una propiedad  $P$  ¿es cierto que  $X$  satisface  $P$  si  $M$  y  $X/M$  satisfacen  $P$ ? En caso afirmativo, se dice que  $P$  es una *propiedad de tres espacios* —hecho que acostumbra ser abreviado diciendo que “la propiedad  $P$  es  $3SP$ ”.

Así pues, las sucesiones exactas cortas son de gran utilidad a la hora de estudiar si una propiedad es propiedad de tres espacios. En efecto, pues para probar que una propiedad  $P$  es de tres espacios, basta ver que si los “extremos” de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow X \longrightarrow X/M \longrightarrow 0$$

satisfacen  $P$  entonces el espacio “central”  $X$  también cumple  $P$ .

Las tres propiedades que mencionamos al principio (“ser reflexivo”, “tener dimensión finita” y “ser separable”) son ejemplos de  $3SP$  (ver [13, pp. 232–238]). Sin embargo, propiedades tan elementales como, por ejemplo, “admitir base de Schauder” o “ser espacio de Banach” no son  $3SP$  (ver [13, p. 226] y [41]).

Para un estudio detallado de distintas propiedades de tres espacios y conceptos relacionados, puede consultarse [13].

Relacionados con las  $3SP$ 's, es necesario destacar el *Problema de Palais* (ver [17, 13, 39, 31]), que consiste en plantearse la siguiente cuestión:

*¿existe algún espacio de Banach  $X$  —que no sea un espacio de Hilbert— que contiene un (subespacio isomorfo a un) espacio de Hilbert  $H$  de modo que  $X/H$  sea nuevamente (isomorfo a) un espacio de Hilbert  $H'$ ?*

Dado que todo subespacio de un espacio de Hilbert es complementado y el coproducto de dos espacios de Hilbert es un espacio Hilbert, encontrar un ejemplo de espacio de

Banach  $X$  que nos permita responder afirmativamente a la pregunta anterior es —en virtud del Teorema de la aplicación abierta y los comentarios anteriores— equivalente a que exista una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow X \longrightarrow \ell_2 \longrightarrow 0$$

que no escinda (esto es,  $X$  no es isomorfo a  $\ell_2 \oplus \ell_2$ ). En tal caso, se dice que  $X$  es *una suma torcida (no trivial) de espacios de Hilbert*. Por tanto, el *problema de Palais* consiste en preguntarse si “ser espacio de Hilbert” es *3SP*.

Así pues, la teoría de sumas torcidas que exponemos en esta memoria tiene su origen en el estudio de las *3SPs*.

En la actualidad, conocemos distintas sumas torcidas de espacios Hilbert no triviales. El primer ejemplo fue dado en 1975 por Enflo, Lindenstrauss y Pisier [17]. No obstante, cuatro años más tarde, Kalton y Peck [27] estudiarían con detalle la relación entre sumas torcidas y cierto tipo de aplicaciones no lineales, lo que los permitió construir una nueva suma torcida de espacio de Hilbert: el espacio  $Z_2$ .

En este capítulo, presentamos con detalle los resultados de Kalton y Peck anteriormente mencionados.

## 1.1. Sumas torcidas

En primer lugar, introduciremos formalmente el concepto de “suma torcida”. Como veremos de inmediato, será necesario situarnos —al menos en principio— en un contexto más general que el de los espacios de Banach.

**Definición 1.1** (sumas torcidas).

Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  tres  $F$ -espacios (i.e. tres EVTs metrizable y completos).

- (a) Se dice que  $Z$  es una *suma torcida de  $X$  e  $Y$*  (atención al orden) si  $Z$  contiene un subespacio  $X'$  isomorfo a  $X$  y el espacio cociente  $Z/X'$  es isomorfo a  $Y$ . Es decir, el  $F$ -espacio  $Z$  es una suma torcida de los  $F$ -espacios  $X$  e  $Y$  si existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0,$$

siendo  $j$  la inclusión y  $q$  la aplicación cociente.

- (b) Se dice que  $Z$  es una *suma torcida isométrica de  $X$  e  $Y$*  si  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  son espacios vectoriales quasi-normados completos con  $Z$  suma torcida de  $X$  e  $Y$  tal que

$$\|jx\| = \|x\|, \quad \text{para todo } x \in X,$$

e

$$\|y\| = \inf\{\|z\| : y = qz\}, \quad \text{para todo } y \in Y.$$

En tal caso,  $Z$  tiene un subespacio  $j(X)$  isomorfo a  $X$  y  $Z/j(X)$  es isomorfo a  $Y$ .

**Definición 1.2** (equivalencia de sumas torcidas).

- (a) Dos sumas torcidas  $Z_1$  y  $Z_2$  de  $X$  e  $Y$  se dicen *equivalentes* si existe  $T \in \mathcal{B}(Z_1, Z_2)$  haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j_1} & Z_1 & \xrightarrow{q_1} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow I_X & & \downarrow T & & \downarrow I_Y & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j_2} & Z_2 & \xrightarrow{q_2} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- (b) Dos sumas torcidas  $Z_1$  y  $Z_2$  de  $X$  e  $Y$  se dicen *proyectivamente equivalentes* si existen  $T \in \mathcal{B}(Z_1, Z_2)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j_1} & Z_1 & \xrightarrow{q_1} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha I_X & & \downarrow T & & \downarrow \beta I_Y & & \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j_2} & Z_2 & \xrightarrow{q_2} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Nota 1.3** (sobre la equivalencia (proyectiva) de sumas torcidas).

En virtud del Lema A.21 (3-Lema), por ser  $\alpha I_X$  y  $\beta I_Y$  biyectivas,  $T$  es un operador biyectivo. En tal caso, en virtud del Teorema de la aplicación abierta,  $T$  es un isomorfismo entre  $Z_1$  y  $Z_2$ .

**Nota 1.4** (Sumas torcidas triviales).

Dados dos  $F$ -espacios  $X$  e  $Y$ , su suma directa usual  $X \oplus Y$  define trivialmente una suma torcida de  $X$  e  $Y$ . Aquellas sumas torcidas que sean equivalentes a la suma directa usual las denominaremos *sumas torcidas triviales*. En particular, por los comentarios de la nota anterior, éstas son isomorfas a sumas torcidas cuya sucesión exacta asociada escinde.

Así como el *Problema de Palais* se pregunta si toda suma torcida de dos espacios de Hilbert es un espacio de Hilbert, una cuestión análoga puede ser formulada para espacios de Banach:

*¿es toda suma torcida de espacios de Banach isomorfa a un espacio Banach?*

Tal y como muestra el ejemplo dado por Ribe en [41], la respuesta es negativa: existe una suma torcida de  $\mathbb{R}$  y el espacio de sucesiones  $\ell_1$  que, siendo un espacio quasi-Banach, dicha suma torcida no es isomorfa a ningún espacio de Banach.

Es decir, la operación “torcer espacios de Banach” no es cerrada en la correspondiente categoría; luego, es necesario considerar una categoría más general. En este contexto, el Teorema 1.5 que sigue —cuya demostración puede consultarse en [25]— es especialmente aclarador.

**Teorema 1.5** (suma torcida de dos quasi-Banach).

*Toda suma torcida de dos espacios quasi-Banach es un espacio quasi-Banach.*

Es entonces debido a la naturaleza intrínseca de las sumas torcidas, que la familia de espacios que surge de modo “natural” en su estudio no es la de los espacios de Banach, si no la de los espacios quasi-Banach. Así pues, en los primeros capítulos de este documento nos vemos obligados a trabajar con espacios quasi-Banach.

## 1.2. Sumas torcidas y aplicaciones quasi-lineales

En este epígrafe, mostraremos la correspondencia entre sumas torcidas y aplicaciones quasi-lineales mencionada al inicio del capítulo. Esencialmente, probaremos que:

- 1.- Dada una aplicación quasi-lineal  $F : Y \longrightarrow X$ , veremos que la “norma torcida” definida como

$$\|(x, y)\| = \|x - F(y)\| + \|y\|, \quad \text{para cada } (x, y) \in X \times Y$$

es en realidad una quasi-norma en  $X \times Y$ ; además la completitud (respecto a dicha quasi-norma) se sigue de la completitud de  $X$  e  $Y$  (i.e., la completitud es una “propiedad de tres subespacios”)

- 2.- Dada una suma torcida  $Z$  de  $X$  e  $Y$ , obtendremos una aplicación quasi-lineal  $F : Y \longrightarrow X$  considerando la diferencia entre dos secciones de la aplicación cociente. Una de dichas secciones será lineal pero no necesariamente acotada (su existencia se debe a la estructura de espacio vectorial), mientras que la otra sección será homogénea y acotada (su existencia está asegurada por el Teorema de la aplicación abierta —para  $F$ -espacios [28, p. 9-10]—)

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios quasi-Banach.

**Definición 1.6** (aplicación quasi-lineal).

Se dice que una aplicación  $F : Y \longrightarrow X$  es *quasi-lineal* si:

- (a)  $F(ty) = tF(y)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $y \in Y$ ;
- (b) existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| \leq M(\|y_1\| + \|y_2\|), \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in Y.$$

Si  $F : Y \longrightarrow X$  es una aplicación quasi-lineal, denotaremos por  $X \oplus_F Y$  al espacio vectorial quasi-normado  $(X \oplus Y, \|\cdot\|)$ , donde  $\|\cdot\| : X \oplus Y \longrightarrow \mathbb{R}$  es la quasi-norma dada por

$$\|(x, y)\| = \|x - F(y)\|_X + \|y\|_Y, \quad \text{para cada } (x, y) \in X \oplus Y. \quad (1.1)$$

**Teorema 1.7** (aplicaciones quasi-lineales & sumas torcidas).

- (a) Si  $F : Y \longrightarrow X$  es una aplicación quasi-lineal,  $Z = X \oplus_F Y$  es una suma torcida de  $X$  e  $Y$ .
- (b) Si  $Z$  es una suma torcida de  $X$  e  $Y$ , existe una aplicación quasi-lineal  $F : Y \longrightarrow X$  tal que  $Z$  es equivalente a  $X \oplus_F Y$ .

*Demostración.*

(a)

Inicialmente, probaremos que (1.1) define una quasi-norma en  $X \oplus Y$ .

Es evidente que  $\|(x, y)\| = 0$  si y sólo si  $(x, y) = 0 \in X \oplus Y$ ; además, también es claro que  $\|(x, y)\| \geq 0$  para todo  $(x, y) \in X \oplus Y$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|(\lambda x, \lambda y)\| &= \|\lambda x - F(\lambda y)\|_X + \|\lambda y\|_Y = \|\lambda(x - F(y))\| + |\lambda|\|y\| \\ &= |\lambda|(\|x - F(y)\| + \|y\|) = |\lambda|\|(x, y)\|, \quad \text{para todo } (x, y) \in X \oplus Y \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que si  $C_X$  y  $C_Y$  son módulos de concavidad para las quasi-normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_Y$ , tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\|(x_1, y_1) + (y_1, y_2)\| &= \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\| = \|x_1 + x_2 - F(y_1 + y_2)\| + \|y_1 + y_2\| \\
&= \|x_1 + x_2 - F(y_1) - F(y_2) + F(y_1) + F(y_2) - F(y_1 + y_2)\| + \|y_1 + y_2\| \\
&\leq C_X [\|x_1 - F(y_1)\| + C_X (\|x_2 - F(y_2)\| + \|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\|)] \\
&\quad + C_Y (\|y_1\| + \|y_2\|) \\
&\leq C_X [\|x_1 - F(y_1)\| + C_X (\|x_2 - F(y_2)\| + M(\|y_1\| + \|y_2\|))] \\
&\quad + C_Y (\|y_1\| + \|y_2\|) \\
&\leq C_X^2 C_Y M (\|x_1 - F(y_1)\| + \|y_1\| + \|x_2 - F(y_2)\| + \|y_2\|) \\
&= C_X^2 C_Y M (\|(x_1, y_1)\| + \|(x_2, y_2)\|), \quad \text{para todo } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \oplus Y.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que los subespacios  $\{(x, 0) : x \in X\}$  y  $(X \oplus_F Y)/X$  son isométricamente isomorfos a  $X$  e  $Y$  respectivamente. Para ello, basta observar que

$$\|(x, 0)\| = \|x - F(0)\| + \|0\| = \|x\|, \quad \text{para todo } x \in X \quad (1.2)$$

y que

$$\|y\| = \inf_{x' \in X} \|x + x' - F(y)\| + \|y\| = \inf_{x' \in X} \|(x, y) + (x', 0)\|, \quad \text{para todo } y \in Y.$$

Ahora, tan sólo resta probar la completitud de  $X \oplus_F Y$ . Para ello, sea  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy arbitraria en  $X \oplus_F Y$ . En tal caso, dado  $\varepsilon > 0$ , para  $n \gg 1$  tenemos que

$$\|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \|x_n - x_m - F(y_n - y_m)\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } m \geq n;$$

luego  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $Y$  y por tanto convergente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $y_n \rightarrow 0$  en  $Y$ . Así pues, si para cada  $n \in \mathbb{N}$  escogemos  $\bar{x}_n \in X$  de modo que  $\|(\bar{x}_n, 0) - (x_n, y_n)\| < 1/n$ ; obtenemos entonces —en virtud de (1.2)— que

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}_n - \bar{x}_m\| &= \|(\bar{x}_n - \bar{x}_m, 0)\| \\
&= \|(\bar{x}_n, 0) - (x_n, y_n) + (x_n, y_n) - (x_m, y_m) + (x_m, y_m) - (\bar{x}_m, 0)\| \\
&\leq C^3 (\|(\bar{x}_n, 0) - (x_n, y_n)\| + \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| + \|(x_m, y_m) - (\bar{x}_m, 0)\|) \\
&\leq C^3 (1/n + \varepsilon + 1/m), \quad \text{para todo } m \geq n.
\end{aligned}$$

Es decir,  $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ ; luego existe  $x_0 \in X$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$ . Ahora es inmediato comprobar que  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, 0)$  en  $X \oplus_F Y$ , quedando probada así la completitud del espacio quasi-normado  $X \oplus_F Y$ .

(b)

Sea

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} Y \longrightarrow 0$$

la sucesión exacta corta que define la suma torcida  $Z$  de  $X$  e  $Y$ . En tal caso, existe:

(i) una aplicación lineal —posiblemente no continua—  $\theta: Y \longrightarrow Z$  tal que  $q\theta = I_Y$ ;

(ii) una aplicación —posiblemente no lineal—  $\varphi: Y \rightarrow Z$  tal que  $\|\varphi(y)\| \leq K\|y\|$  y  $q\varphi(y) = y$  para todo  $y \in Y$ ; supongamos además que  $\varphi(ty) = t\varphi(y)$  para todo  $y \in Y$ .

A continuación, probaremos que la aplicación  $F: Y \rightarrow X$  dada por

$$F(y) = j^{-1}(\varphi(y) - \theta(y)), \quad \text{para cada } y \in Y,$$

[observemos que  $q(\varphi(y) - \theta(y)) = 0$ , luego  $\varphi(y) - \theta(y) \in \ker q = j(X)$ ] define una aplicación quasi-lineal  $F: Y \rightarrow Z$  que nos permitirá definir una suma torcida  $X \oplus_F Y$  equivalente a  $Z$ .

La homogeneidad de  $F$  es clara; además, si  $L \in \mathbb{R}^+$  es tal que  $\|j^{-1}(z)\| \leq L\|z\|$  para todo  $z \in j(X)$  y  $C \in \mathbb{R}^+$  es un módulo de concavidad para  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $(Y, \|\cdot\|)$  y  $(Z, \|\cdot\|)$ , tendremos entonces que

$$\begin{aligned} \|F(y_1 + y_2) - F(y_1) - F(y_2)\| &= \\ &= \|j^{-1}(\varphi(y_1 + y_2) - \theta(y_1 + y_2) - \varphi(y_1) + \theta(y_1) - \varphi(y_2) + \theta(y_2))\| \\ &= \|j^{-1}(\varphi(y_1 + y_2) - \varphi(y_1) - \varphi(y_2))\| \\ &\leq L\|\varphi(y_1 + y_2) - \varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| \\ &\leq C^2L(\|\varphi(y_1 + y_2)\| + \|\varphi(y_1)\| + \|\varphi(y_2)\|) \\ &\leq C^2L(KC(\|y_1\| + \|y_2\|) + K\|y_1\| + K\|y_2\|) \\ &\leq 2C^3KL(\|y_1\| + \|y_2\|), \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in Y. \end{aligned}$$

Además, considerando

$$Tz = (j^{-1}(z - \theta qz), qz), \quad \text{para cada } z \in Z,$$

obtenemos que  $T: Z \rightarrow X \oplus_F Y$  define un operador en  $\mathcal{B}(Z, X \oplus_F Y)$ . En efecto, pues

$$\begin{aligned} \|Tz\| &= \|(j^{-1}(z - \theta qz), qz)\| \\ &= \|j^{-1}(z - \theta qz) - F(qz)\| + \|qz\| \\ &= \|j^{-1}(z - \theta qz) - j^{-1}(\varphi(qz) - \theta qz)\| + \|qz\| \\ &= \|j^{-1}(z - \varphi(qz))\| + \|qz\| \\ &\leq L\|z - \varphi(qz)\| + \|qz\| \leq LC(\|z\| + \|\varphi(qz)\|) + \|q\|\|z\| \\ &\leq LC(\|z\| + K\|q\|\|z\|) + \|q\|\|z\| \\ &= (LC + KLC\|q\| + \|q\|)\|z\|, \quad \text{para todo } z \in Z. \end{aligned}$$

Por tanto,  $T \in \mathcal{B}(Z, X \oplus_F Y)$  induce una equivalencia entre  $X \oplus_F Y$  y  $Z$ . □

Una vez que probado que el estudio de las sumas torcidas de  $X$  e  $Y$  equivale al estudio de las aplicaciones quasi-lineales  $F: Y \rightarrow X$ , cabe preguntarnos por un criterio o condición que nos permita decidir cuando dos aplicaciones quasi-lineales  $F, G: Y \rightarrow X$  definen sumas torcidas (proyectivamente) equivalentes. El siguiente resultado nos proporcionará dicho criterio.

**Definición 1.8** (equivalencia de aplicaciones quasi-lineales).

- (a) Se dice que dos aplicaciones quasi-lineales  $F, G: Y \longrightarrow X$  son (*proyectivamente equivalentes*) si  $X \oplus_F Y$  y  $X \oplus_G Y$  son sumas torcidas (proyectivamente) equivalentes.
- (b) Se dice que  $F$  es una aplicación quasi-lineal *trivial* si  $X \oplus_F Y$  y  $X \oplus Y$  son sumas torcidas equivalentes.

**Nota 1.9.** Si  $F: Y \longrightarrow X$  es la aplicación nula, entonces  $X \oplus_F Y$  coincide con la suma directa topológica ordinaria. En tal caso, la sucesión exacta corta correspondiente escinde.

**Teorema 1.10** (aplicaciones quasi-lineales equivalentes).

Sean  $F, G: Y \longrightarrow X$  dos aplicaciones quasi-lineales. Entonces:

- (a)  $F$  y  $G$  son equivalentes si y sólo si existe una aplicación lineal  $A: Y \longrightarrow X$  y  $M \in \mathbb{R}$  de modo que

$$\|F(y) - G(y) - Ay\| \leq M\|y\|, \quad \text{para todo } y \in Y;$$

- (b)  $F$  y  $G$  son proyectivamente equivalentes si y sólo si existe una aplicación lineal  $A: Y \longrightarrow X$  y  $M, \alpha \in \mathbb{R}$  de modo que

$$\|F(y) - G(\alpha y) - Ay\| \leq M\|y\|, \quad \text{para todo } y \in Y;$$

- (c)  $F$  es trivial si y sólo si  $F$  es proyectivamente equivalente a la aplicación idénticamente nula, esto es,  $F$  se puede expresar como la suma de una aplicación lineal y una aplicación acotada.

*Demostración.*

(a)

Sean  $F$  y  $G$  dos aplicaciones quasi-lineales equivalentes. En tal caso, por definición y la conmutatividad de los correspondientes diagramas, existe un operador lineal y continuo  $T: X \oplus_F Y \longrightarrow X \oplus_G Y$  que debe ser de la forma  $T(x, y) = (x + Ay, y)$  para cierta aplicación lineal  $A: Y \longrightarrow X$ . Así pues, dado que para  $y \in Y$  tenemos que  $T(F(y), y) = (F(y) + Ay, y)$ , concluimos entonces que

$$\begin{aligned} \|F(y) - G(y) + Ay\| &\leq \|F(y) + Ay - G(y)\| + \|y\| = \|(F(y) + Ay, y)\| \\ &= \|T(F(y), y)\| \leq \|T\| \|(F(y), y)\| \\ &= \|T\|(\|F(y) - F(y)\| + \|y\|) = \|T\|\|y\|, \quad \text{para todo } y \in Y. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si  $F$  y  $G$  son dos aplicaciones quasi-lineales que satisfacen la condición del enunciado, la aplicación lineal  $T: X \oplus_F Y \longrightarrow X \oplus_G Y$  dada por  $T(x, y) = (x - Ay, y)$  para cada  $(x, y) \in X \oplus_F Y$ , satisface que

$$\begin{aligned} \|T(x, y)\| &= \|(x - Ay, y)\| = \|x - Ay - G(y)\| + \|y\| \\ &= \|x - Ay - G(y) - F(y) + F(y)\| + \|y\| \\ &\leq C(\|x - F(y)\| + \|F(y) - G(y) - Ay\|) + \|y\| \\ &\leq C(\|x - F(y)\| + M\|y\|) + \|y\| \\ &\leq C(M + 1)\|(x, y)\|, \quad \text{para todo } (x, y) \in X \oplus_F Y. \end{aligned}$$

Por tanto,  $X \oplus_F Y$  y  $X \oplus_G Y$  son dos sumas torcidas equivalentes mediante  $T$ .

(b)

Se prueba de forma similar a (a).

(c)

Es obvio a partir de las definiciones. □

Por tanto, una aplicación quasi-lineal  $F$  es no trivial si no existe ninguna aplicación lineal  $A$  de modo que  $F - A$  sea una aplicación acotada.

### 1.3. Aplicaciones quasi-lineales

A la vista del Teorema 1.10 anterior, concluimos que para obtener una suma torcida no trivial de  $X$  e  $Y$ , basta definir una aplicación quasi-lineal  $F: Y \rightarrow X$  que “no pueda ser aproximada por una aplicación lineal”. Así pues, ahora cobra una importancia vital la siguiente pregunta:

*¿cómo proceder para definir una aplicación quasi-lineal  $F: Y \rightarrow X$ ?*

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios quasi-Banach e  $Y_0 \subset Y$  un subespacio denso en  $Y$ ; a continuación, indicamos un esquema del itinerario que seguiremos para definir una aplicación quasi-lineal  $F: Y \rightarrow X$  a partir de una función lipschitziana  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.11** (aplicaciones quasi-lineales en un subespacio denso).

Si  $F_0: Y_0 \rightarrow X$  es una aplicación quasi-lineal, entonces:

- (a) existe una aplicación quasi-lineal  $F: Y \rightarrow X$  tal que  $F|_{Y_0} = F_0$ ;
- (b) si  $F_1, F_2: Y \rightarrow X$  son dos aplicaciones quasi-lineales tales que  $F_1|_{Y_0} = F_2|_{Y_0} = F_0$ , entonces  $F_1$  y  $F_2$  son equivalentes.

**Definición 1.12** (aplicaciones quasi-aditivas).

Una aplicación  $f: Y_0 \rightarrow X$  se dice *quasi-aditiva* si:

- (a) existe  $K \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$\|f(y_1 + y_2) - f(y_1) - f(y_2)\| \leq K(\|y_1\| + \|y_2\|), \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in Y_0;$$

- (b)  $\lim_{t \rightarrow 0} f(ty) = 0$  para todo  $y \in Y_0$ ;
- (c)  $f(-y) = -f(y)$  para todo  $y \in Y_0$ .

En tal caso, diremos que  $f$  es una aplicación quasi-aditiva de orden  $K$ .

**Teorema 1.13** (toda aplicación quasi-aditiva define una aplicación quasi-lineal).

Si  $f: Y_0 \rightarrow X$  es una aplicación quasi-aditiva, entonces  $F: Y_0 \rightarrow X$  dada por

$$F(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es una aplicación quasi-lineal.

**Teorema 1.14** (toda función lipschitziana define una aplicación quasi-aditiva).

(a) Si  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación lipschitziana, entonces  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) = \begin{cases} t\varphi\left(\log \frac{1}{|t|}\right), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

es una aplicación quasi-aditiva.

(b) Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función quasi-aditiva, existe una función lipschitziana  $\theta$  tal que

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} \left| \frac{f(t)}{t} - \theta\left(\log \frac{1}{|t|}\right) \right| < \infty.$$

*Demostración del Teorema 1.11.*

(a)

Consideremos inicialmente el espacio vectorial quasi-normado  $(X \oplus_{F_0} Y_0, \|\cdot\|)$ , donde

$$\|(x, y)\| = \|x - F_0(y)\| + \|y\|, \quad \text{para cada } (x, y) \in X \oplus_{F_0} Y_0.$$

Sea  $Z$  la completación de  $(X \oplus_{F_0} Y_0, \|\cdot\|)$ .

A continuación, probaremos que  $Z$  es una suma torcida de  $X$  e  $Y$ . Para ello, consideremos las siguientes aplicaciones:  $j: X \rightarrow X \oplus_{F_0} Y_0$  —dada por  $j(x) = (x, 0)$  para cada  $x \in X$ — y  $\hat{q}: X \oplus_{F_0} Y_0 \rightarrow Y_0$  —dada por  $\hat{q}(x, y) = y$  para cada  $(x, y) \in X \oplus_{F_0} Y_0$ —. En tal caso,  $\hat{q}$  puede ser extendida a una aplicación abierta y sobreyectiva —es decir, a una aplicación cociente—  $q: Z \rightarrow Y$  tal que  $\ker(q) = j(X)$ .

En efecto, la extensión está garantizada por [25, p. 19] y si  $z \in Z$  es tal que  $q(z) = 0$ , luego

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{q}(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n, \quad \text{en } (Y, \|\cdot\|),$$

siendo  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de vectores de  $X \oplus_{F_0} Y_0$  tal que  $(x_n, y_n) \rightarrow z$ . En tal caso,  $(F_0(y_n), y_n) \rightarrow 0$ , pues  $\|(F_0(y_n), y_n)\| = \|F_0(y_n) - F_0(y_n)\| + \|y_n\| = \|y_n\| \rightarrow 0$  y entonces,  $(x_n - F_0(y_n), 0) = (x_n, y_n) - (F_0(y_n), y_n) \rightarrow z$ . Por tanto,  $x_n - F_0(y_n) \rightarrow x_0$  para algún  $x_0 \in X$ , de donde deducimos finalmente que  $z = (x_0, 0) \in j(X)$ .

Por tanto, en virtud del Teorema 1.7, existe una aplicación quasi-lineal  $H: Y \rightarrow X$  (con constante asociada  $M_1$ ) de modo que  $Z$  es equivalente a  $X \oplus_H Y$ . Es decir, existe un operador lineal y acotado  $T: Z \rightarrow X \oplus_H Y$  que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{j} & Z & \xrightarrow{q} & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow I_X & & \downarrow T & & \downarrow I_Y \\ 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X \oplus_H Y & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

En tal caso,  $T$  es un operador de la forma  $T(x, y) = (x + Ay, y)$  para cierta aplicación lineal  $A: Y \rightarrow X$ . Además, para  $y_0 \in Y_0$ , tenemos que

$$\|F_0(y_0) + Ay_0 - H(y_0)\| \leq \|F_0(y_0) + Ay_0 - H(y_0)\| + \|y_0\| = \|(F_0(y_0) + Ay_0, y_0)\|$$

$$\begin{aligned}
&= \|T(F_0(y_0), y_0)\| \leq \|T\| \| (F_0(y_0), y_0) \| \\
&= \|T\| (\|0\| + \|y_0\|) = \|T\| \|y_0\|.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Así, la aplicación  $F: Y \rightarrow X$  dada por

$$F(y) = \begin{cases} F_0(y), & \text{si } y \in Y_0, \\ H(y) - Ay, & \text{si } y \notin Y_0, \end{cases}$$

es una extensión quasi-lineal de  $F_0$  a todo  $Y$ . En efecto, pues para  $y_0 \in Y_0$  e  $y_1 \in Y \setminus Y_0$ ,

$$\begin{aligned}
\|F(y_0 + y_1) - F(y_0) - F(y_1)\| &= \|H(y_0 + y_1) - A(y_0 + y_1) - F_0(y_0) - H(y_1) + Ay_1\| \\
&= \|H(y_0 + y_1) - Ay_0 - F_0(y_0) - H(y_1)\| \\
&\leq C(\|H(y_0 + y_1) - H(y_0) - H(y_1)\| + \|H(y_0) - Ay_0 - F_0(y_0)\|) \\
((1.3)) \quad &\leq C(M_1(\|y_0\| + \|y_1\|) + \|T\| \|y_0\|) \leq C(M_1 + \|T\|)(\|y_0\| + \|y_1\|).
\end{aligned}$$

(b)

La unicidad (módulo equivalencia) de la extensión  $F$  es una consecuencia de que toda extensión quasi-lineal de  $F_0$  a  $Y$  define una completación de  $X \oplus_{F_0} Y_0$  (y tal completación es única). En efecto, pues para  $(x, y) \in X \oplus_F Y$ , si  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $Y_0$  tal que  $y_n \rightarrow y$ , entonces  $((x - F(y - y_n), y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión en  $X \oplus_F Y$  tal que  $(x - F(y - y_n), y_n) \rightarrow (x, y)$ .  $\square$

*Demostración del Teorema 1.13.*

La homogeneidad de  $F$  es una consecuencia inmediata de la antisimetría de la aplicación quasi-aditiva  $f$ . Para probar la propiedad (b) de la Definición 1.6 anterior, necesitaremos el siguiente resultado auxiliar, cuya demostración posponemos por claridad en la exposición.

**Lema 1.15** (auxiliar para el Teorema 1.13).

*Existe una constante  $B_X$  —dependiente únicamente del espacio quasi-Banach  $X$ — tal que: si  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$  es una aplicación quasi-aditiva de orden  $K$ , entonces*

$$\|f(t) - tf(1)\| \leq B_X K, \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Dado  $x \in Y$  tal que  $\|x\| \leq 1$ , consideramos la aplicación quasi-aditiva  $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow X$  dada por

$$\bar{f}(t) = f(tx/\|x\|), \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.$$

En tal caso, en virtud del Lema 1.15 anterior,

$$\|F(x) - f(x)\| = \left\| \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - f(x) \right\| = \left\| \|x\| \bar{f}(1) - \bar{f}(\|x\|) \right\| \leq B_X K.$$

Así pues, dado que  $\|x\| + \|y\| \leq 1/C$  implica  $\|x + y\| \leq C(\|x\| + \|y\|) \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
\|F(x + y) - F(x) - F(y)\| &\leq \\
&\leq C \left[ \|f(x + y) - f(x) - f(y)\| + \|F(x + y) - f(x + y) \right. \\
&\quad \left. - F(x) + f(x) - F(y) + f(y) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left[ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| + C \left( \|F(x+y) - f(x+y)\| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + C [\|F(x) - f(x)\| + \|F(y) - f(y)\|] \right) \right] \\
&\leq C \left[ K(\|x\| + \|y\|) + C(B_X K + 2CB_X K) \right] \\
&\leq C(K + 3C^2 B_X K), \quad \text{para todo } x, y \in X \text{ con } \|x\| + \|y\| \leq 1/C.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|F(x+y) - F(x) - F(y)\| \leq 2C^3(K + 3C^2 B_X K)(\|x\| + \|y\|), \quad \text{para todo } x, y \in X. \quad \square$$

*Demostración del Lema 1.15.*

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $f(1) = 0$ . En caso contrario, trabajaríamos con la aplicación  $g(t) = f(t) - tf(1)$ . Probemos luego que existe  $B_X \in \mathbb{R}^+$  dependiente únicamente de  $X$  de modo que

$$\|f(t)\| \leq B_X K, \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Para ello, necesitaremos los siguientes resultados auxiliares, cuya demostración posponemos por claridad en la exposición.

**Lema 1.16** (auxiliar para el Lema 1.15).

Si  $Y_0$  es un subespacio denso en  $Y$  y  $f: Y_0 \rightarrow X$  es una aplicación quasi-aditiva de orden  $K$ , existen constantes positivas  $r$  y  $\mathbb{L}$  tales que,

$$\left\| f\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \sum_{i=1}^n f(y_i) \right\| \leq \mathbb{L}K \left( \sum_{i=1}^n \|y_i\|^r \right)^{1/r}, \quad \text{para todo } y_i \in Y_0 \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

[Aclaración: Podremos considerar  $r \leq p/2$ , donde  $p > 0$  es el exponente dado por el Lema A.19.]

**Lema 1.17** (auxiliar para el Lema 1.15).

Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$  es una aplicación quasi-aditiva de orden  $K$ , existen constantes positivas  $L$  y  $r$  tales que

$$\|2^n f(2^{-n})\| \leq LKn^{1/r}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

[Aclaración: La constante  $L > 0$  coincide con la indicada en el Lema A.19. Podremos considerar  $r \leq p$ , siendo  $p > 0$  el exponente dado por el Lema A.19.]

Sea  $t \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$  escogido de forma arbitraria. Para dicho  $t$ , existe un único  $n \in \mathbb{N}$  de modo que  $t \in [2^{-n}, 2^{1-n}) \subset \mathbb{R}$ . En tal caso,

$$t = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-(n+k)}, \quad \text{con } \varepsilon_0 = 1 \text{ y } \varepsilon_k \in \{0, 1\} \text{ para cada } k \geq 1.$$

Sea además, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$t_m = \sum_{k=0}^m \varepsilon_k 2^{-(n+k)}.$$

Aplicando ahora el Lema A.19, sabemos que existe  $L > 0$  (dependiendo únicamente de  $X$ ) de modo que si  $r = p/2$  —siendo  $p$  el exponente dado por el Lema A.19—, entonces

$$\|f(t)\| = \|f(t_m) + f(t - t_m) + (f(t) - f(t_m) - f(t - t_m))\|$$

$$\leq L(\|f(t_m)\|^r + \|f(t - t_m)\|^r + \|f(t) - f(t_m) - f(t - t_m)\|^r)^{1/r}.$$

A continuación, para cada uno de los tres sumandos de la última desigualdad, obtendremos cotas adecuadas que nos permitirán obtener el resultado enunciado.

Por ser  $f$  una aplicación quasi-aditiva de orden  $K$ , para el tercer sumando, tenemos que

$$\|f(t) - f(t_m) - f(t - t_m)\| \leq K\|t_m + t - t_m\| = Kt \leq K$$

y entonces

$$\|f(t) - f(t_m) - f(t - t_m)\|^r \leq K^r \quad (1.4)$$

Por otra parte, para el primer sumando, empleando nuevamente el Lema A.19, obtenemos inicialmente que

$$\begin{aligned} \|f(t_m)\| &= \left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) + \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\| \\ &\leq L \left( \left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r + \left\| \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r \right)^{1/r}. \end{aligned}$$

A continuación, acotaremos cada uno de los sumandos obtenidos en la última desigualdad. Para el primero de ellos, teniendo en cuenta que  $f(0) = -f(-0) = -f(0) = 0$ , deducimos que

$$\begin{aligned} \left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\| &= \left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^m f(\varepsilon_k 2^{-(n+k)}) \right\| \\ \text{(Lema 1.16)} \quad &= \left\| f\left(\sum_{k=0}^m \varepsilon_k 2^{-(n+k)}\right) - \sum_{k=0}^m f(\varepsilon_k 2^{-(n+k)}) \right\| \leq K\mathbb{L}\left(\sum_{k=0}^m |\varepsilon_k 2^{-(n+k)}|^r\right)^{1/r} \\ &\leq K\mathbb{L}\left(\sum_{k=0}^m 2^{-(n+k)r}\right)^{1/r} \leq K\mathbb{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)r}\right)^{1/r} \leq K\mathbb{L}(1 - 2^{-r})^{-1/r}; \end{aligned}$$

luego

$$\left\| f(t_m) - \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r \leq K^r \mathbb{L}^r (1 - 2^{-r})^{-1}. \quad (1.5)$$

Por otra parte, invocando nuevamente el Lema A.19, obtenemos que

$$\left\| \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\| \leq L \left( \sum_{k=0}^m \|\varepsilon_k f(2^{-(n+k)})\|^r \right)^{1/r} \leq L \left( \sum_{k=0}^m \|f(2^{-(n+k)})\|^r \right)^{1/r},$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m \varepsilon_k f(2^{-(n+k)}) \right\|^r &\leq L^r \sum_{k=0}^m \|f(2^{-(n+k)})\|^r = L^r \sum_{k=0}^m \frac{\|2^{n+k} f(2^{-(n+k)})\|^r}{2^{(n+k)r}} \\ \text{(Lema 1.17)} \quad &\leq L^r \sum_{k=0}^m (LK(n+k)^{1/r})^r 2^{-(n+k)r} = K^r L^{2r} \sum_{k=0}^m (n+k) 2^{-(n+k)r} \\ &\leq K^r L^{2r} \sum_{k=0}^{\infty} (n+k) 2^{-(n+k)r}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por tanto, aunando (1.5) y (1.6), obtenemos ahora que

$$\|f(t_m)\| \leq L \left( K^r \mathbb{L}^r (1 - 2^{-r})^{-1} + K^r L^{2r} \sum_{k=0}^{\infty} (n+k) 2^{-(n+k)r} \right)^{1/r} \leq L (K^r L_1 + K^r L_2)^{1/r},$$

es decir,

$$\|f(t_m)\|^r \leq L^r (K^r L_1 + K^r L_2) = L^r K^r (L_1 + L_2). \quad (1.7)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (1.4) y (1.7), concluimos que

$$\begin{aligned} \|f(t)\| &\leq L (L^r K^r (L_1 + L_2) + \|f(t - t_m)\|^r + K^r)^{1/r} \\ &\leq L (L^r K^r (L_1 + L_2) + K^r \|f(t - t_m)\|^r + K^r)^{1/r} \\ &= LK (L^r (L_1 + L_2) + \|f(t - t_m)\|^r + 1)^{1/r} = LK (L^* + \|f(t - t_m)\|^r + 1)^{1/r}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Además, al ser  $f$  una aplicación quasi-aditiva,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(t - t_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(2^{-n} \sum_{k=m+1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(2^{-(n+m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k}) = 0.$$

Por tanto, haciendo  $m \rightarrow \infty$  en (1.8), deducimos finalmente que

$$\|f(t)\| \leq LK (L^* + 1) = KB_X. \quad \square$$

*Demostración del Lema 1.16.*

En virtud del Corolario A.17 – Nota A.18, para cierto  $p > 0$  existe una quasi-norma  $\|\cdot\|$  equivalente a la quasi-norma  $\|\cdot\|$  y tal que  $\|y_1 + y_2\|^p \leq \|y_1\|^p + \|y_2\|^p$  para todo  $y_1, y_2 \in Y_0$ . Por ser  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|$  quasi-normas equivalentes, existe  $\mathbb{L}' > 0$  tal que  $\|x\| \leq \|x\| \leq \mathbb{L}' \|x\|$  para todo  $x \in X$ , y entonces

$$\begin{aligned} \|f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)\| &\leq \mathbb{L}' \|f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)\| \\ (f \text{ es quasi-aditiva de orden } K) &\leq \mathbb{L}' K (\|x_1\| + \|x_2\|) \leq \mathbb{L}' K (\|x_1\| + \|x_2\|) \\ (0 < p < 1) &\leq \mathbb{L}' K (\|x_1\|^p + \|x_2\|^p)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

A continuación, aplicando el método de inducción, probaremos que

$$\left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \right\| \leq \mathbb{L}' K \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

Para  $n = 2$ , tendríamos que probar que

$$\|f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)\| \leq \mathbb{L}' K (\|x_1\|^p + 2 \|x_2\|^p)^{1/p},$$

lo cual es trivialmente cierto si tenemos en cuenta (1.9). Supongamos luego que (A.1) es cierto para  $n - 1 \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq 3$ , y veamos que también es cierto para  $n \in \mathbb{N}$ . Observando que

$$\left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \right\|^p =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left\| f\left(\sum_{i=2}^n x_i\right) - \sum_{i=2}^n f(x_i) + f\left(\sum_{i=2}^n x_i + x_1\right) - f\left(\sum_{i=2}^n x_i\right) - f(x_1) \right\| \right\|^p \\
(\|\cdot\|^p \text{ subaditiva}) &\leq \left\| \left\| f\left(\sum_{i=2}^n x_i\right) - \sum_{i=2}^n f(x_i) \right\| \right\|^p + \left\| \left\| f\left(\sum_{i=2}^n x_i + x_1\right) - f\left(\sum_{i=2}^n x_i\right) - f(x_1) \right\| \right\|^p \\
&= \left\| \left\| f\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1}) \right\| \right\|^p + \left\| \left\| f\left(\sum_{i=2}^n x_i + x_1\right) - f\left(\sum_{i=2}^n x_i\right) - f(x_1) \right\| \right\|^p \\
(\text{Inducción y (1.9)}) &\leq \mathbb{L}^p K^p \sum_{i=1}^{n-1} i \|x_{i+1}\|^p + \mathbb{L}^p K^p \left( \left\| \sum_{i=2}^n x_i \right\|^p + \|x_1\|^p \right) \\
&= \mathbb{L}^p K^p \left( \sum_{i=2}^n (i-1) \|x_i\|^p + \left\| \sum_{i=2}^n x_i \right\|^p + \|x_1\|^p \right) \\
&\leq \mathbb{L}^p K^p \left( \sum_{i=2}^n (i-1) \|x_i\|^p + \sum_{i=2}^n \|x_i\|^p + \|x_1\|^p \right) = \mathbb{L}^p K^p \sum_{i=1}^n i \|x_i\|^p,
\end{aligned}$$

queda entonces probada la veracidad de (A.1).

Sea ahora  $r = p/2$ . Para  $x_1, \dots, x_n \in X$  con  $\|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \dots \geq \|x_n\|$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \right\| \right\| &\leq \mathbb{L}' K \left( \sum_{i=1}^n i \|x_i\|^p \right)^{1/p} \\
(i \|x_i\|^r \leq \|x_1\|^r + \dots + \|x_i\|^r) &\leq \mathbb{L}' K \left( \sum_{i=1}^n (\|x_1\|^r + \dots + \|x_i\|^r + \dots + \|x_n\|^r) \|x_i\|^r \right)^{1/p} \\
&= \mathbb{L}' K \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \|x_j\|^r \right) \|x_i\|^r \right)^{1/p} = \mathbb{L}' K \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^r \sum_{j=1}^n \|x_j\|^r \right)^{1/p} \\
&= \mathbb{L}' K \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^r \right)^{2/p} = \mathbb{L}' K \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^r \right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta la equivalencia entre  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|$ , concluimos finalmente que

$$\left\| \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - \sum_{i=1}^n f(x_i) \right\| \right\| \leq \mathbb{L}'^2 K \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^r \right)^{1/r} = \mathbb{L} K \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^r \right)^{1/r}. \quad \square$$

*Demostración del Lema 1.17.*

Puesto que  $f$  es quasi-aditiva de orden  $K$ ,

$$\begin{aligned}
\|f(2^{-n}) - 2f(2^{-(n+1)})\| &= \|f(2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)}) - f(2^{-(n+1)}) - f(2^{-(n+1)})\| \\
&\leq K(2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)}) = K2^{-n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\|2^n f(2^{-n}) - 2^{n+1} f(2^{-(n+1)})\| \leq K, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (1.11)$$

Así pues, teniendo en cuenta que  $f(1) = 0$ , el Lema A.19 y (1.11), obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
\|2^n f(2^{-n})\| &= \|(2^n f(2^{-n}) - 2^{n-1} f(2^{-(n-1)})) + \dots + (2f(2^{-1}) - 2^0 f(2^0))\| \\
&\leq L \left( \sum_{i=1}^n \|2^i f(2^{-i}) - 2^{i-1} f(2^{-(i-1)})\|^r \right)^{1/r} \leq L(nK^r)^{1/r} = LKn^{1/r}. \quad \square
\end{aligned}$$

*Demostración del Teorema 1.14.*

(a)

Dados  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(t_1 + t_2) - f(t_1) - f(t_2)}{t_1 + t_2} \right| &= \left| \frac{(t_1 + t_2) \varphi\left(\log \frac{1}{t_1 + t_2}\right) - t_1 \varphi\left(\log \frac{1}{t_1}\right) - t_2 \varphi\left(\log \frac{1}{t_2}\right)}{t_1 + t_2} \right| \\
&\leq \left| \frac{t_1}{t_1 + t_2} \varphi\left(\log \frac{1}{t_1 + t_2}\right) - \frac{t_1}{t_1 + t_2} \varphi\left(\log \frac{1}{t_1}\right) \right| \\
&\quad + \left| \frac{t_2}{t_1 + t_2} \varphi\left(\log \frac{1}{t_1 + t_2}\right) - \frac{t_2}{t_1 + t_2} \varphi\left(\log \frac{1}{t_2}\right) \right| \\
&= \frac{t_1}{t_1 + t_2} \left| \varphi\left(\log \frac{1}{t_1 + t_2}\right) - \varphi\left(\log \frac{1}{t_1}\right) \right| \\
&\quad + \frac{t_2}{t_1 + t_2} \left| \varphi\left(\log \frac{1}{t_1 + t_2}\right) - \varphi\left(\log \frac{1}{t_2}\right) \right| \\
&\leq \frac{t_1}{t_1 + t_2} L_\varphi \log \frac{t_1 + t_2}{t_1} + \frac{t_2}{t_1 + t_2} L_\varphi \log \frac{t_1 + t_2}{t_2} \leq L_\varphi \log 2,
\end{aligned}$$

donde hemos empleado que  $\varphi$  es una función Lipschitziana —con constante de Lipschitz  $L_\varphi$ — y que

$$t \log \frac{1}{t} + (1 - t) \log \frac{1}{1 - t} \leq \log 2, \quad \text{para todo } 0 < t < 1.$$

Por tanto, ya hemos probado que

$$|f(t_1 + t_2) - f(t_1) - f(t_2)| \leq L_\varphi |t_1 + t_2| \log 2 = L_\varphi (t_1 + t_2) \log 2, \quad \text{para todo } t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Por otra parte, utilizando nuevamente el carácter lipschitziano de la función  $\varphi$ , concluimos que

$$\begin{aligned}
\left| t \varphi\left(\log \frac{1}{|t|}\right) \right| &= |t| \left| \varphi\left(\log \frac{1}{|t|}\right) - \varphi(0) + \varphi(0) \right| \\
&\leq L_\varphi |t| \left| \log \frac{1}{|t|} \right| + |t| |\varphi(0)| \\
&= -L_\varphi t \log t + |t| |\varphi(0)|, \quad 0 < t < 1;
\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \varphi\left(\log \frac{1}{|t|}\right) = 0.$$

Así pues, dado que la antisimetría de  $f$  es clara, queda entonces probado que  $f$  es una función quasi-aditiva.

(b)

Necesitaremos el siguiente resultado auxiliar, cuya demostración posponemos por claridad en la exposición.

**Lema 1.18** (auxiliar para el Teorema 1.14).

Si  $f$  y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones quasi-aditivas de orden  $K$  tales que

$$|f(2^n) - g(2^n)| \leq M 2^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

entonces

$$|f(t) - g(t)| \leq (M + 4BK)|t|, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

donde  $B = B_{\mathbb{R}}$  es la constante cuya existencia ha sido probada en el Lema 1.15.

Por ser  $f$  una función quasi-aditiva de orden  $K$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , tenemos que

$$|f(2^{n+1}) - 2f(2^n)| = |f(2^n + 2^n) - f(2^n) - f(2^n)| \leq K(2^n + 2^n) = K2^{n+1}$$

y entonces

$$\left| \frac{f(2^{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{f(2^n)}{2^n} \right| \leq K, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.12)$$

Escojamos ahora una función  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$(i) \quad \varphi(n) = 2^n f(2^{-n}) \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}, \quad (ii) \quad \varphi \text{ es } K\text{-lipschitziana en } \mathbb{R}.$$

La existencia de una función  $\varphi$  satisfaciendo las condiciones (i) y (ii) anteriores está garantizada por (1.12). Sea ahora

$$g(t) = \begin{cases} t\varphi\left(-\frac{\log|t|}{\log 2}\right) & \text{si } t \neq 0; \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Tenemos entonces que:

$$(i) \quad g \text{ es una función quasi-aditiva de orden } K;$$

$$(ii) \quad g(2^n) = 2^n \varphi\left(-\frac{\log 2^n}{\log 2}\right) = 2^n \varphi(-n) = 2^n 2^{-n} f(2^n) = f(2^n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, el Lema 1.18 nos permite afirmar que

$$\left| \frac{f(t)}{t} - \frac{g(t)}{t} \right| \leq 4BK, \quad \text{para } t \neq 0,$$

de donde deducimos finalmente que

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \left| \frac{f(t)}{t} - \varphi\left(-\frac{\log|t|}{\log 2}\right) \right| < \infty,$$

o equivalentemente, si  $\theta(t) = \varphi(t/\log 2)$ , que

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \left| \frac{f(t)}{t} - \theta\left(\log \frac{1}{|t|}\right) \right| < \infty. \quad \square$$

*Demostración del Lema 1.18.*

Dado  $t \in \mathbb{R}^+$ , existe un único  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $t \in [2^{n-1}, 2^n) \subset \mathbb{R}$ . En tal caso,  $f^n(t) = f(2^n t)$  y  $g^n(t) = g(2^n t)$  son dos aplicaciones quasi-aditivas de orden  $2^n K$ . Por tanto, en virtud del Lema 1.15 anterior,

$$\begin{aligned} |f(t) - g(t)| &= |f^n(2^{-n}t) - g^n(2^{-n}t)| \\ &\leq |f^n(2^{-n}t) - 2^{-n}t f^n(1)| + |2^{-n}t f^n(1) - 2^{-n}t g^n(1)| + |2^{-n}t g^n(1) - g^n(2^{-n}t)| \\ &\leq 2^n BK + 2^{-n}t |f(2^n) - g(2^n)| + 2^n BK = 2^{n+1}BK + 2^{-n}t M 2^n \\ &= 2^2 2^{n-1}BK + tM \leq (4BK + M)t, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Dado que  $f$  y  $g$  son funciones antisimétricas, la desigualdad anterior es válida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

# Capítulo 2

## Sumas torcidas de espacios de sucesiones

Tal y como vimos en la tercera sección del Capítulo 1 anterior, toda aplicación lipschitziana  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  induce una aplicación quasi-aditiva  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sin embargo, si deseamos construir una suma torcida empleando un espacio quasi-Banach  $E$ , necesitamos una aplicación quasi-aditiva definida en  $E$ .

En este capítulo, introducimos los espacios quasi-normados sólidos —una clase particular de espacios de sucesiones— en los que, partiendo de una función quasi-aditiva  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , lograremos construir una aplicación quasi-aditiva definida en el propio espacio.

Los espacios clásicos de sucesiones  $\ell_p$ , con  $0 < p < \infty$ , son ejemplos de espacios quasi-normados sólidos. Así pues, lograremos definir sumas torcidas de tales espacios; también probaremos que dichas sumas torcidas admiten base de Schauder.

### 2.1. Espacios quasi-normados sólidos

Dadas dos sucesiones de números reales  $x, y$ , denotaremos por  $|x|$  y  $xy$  la sucesión obtenida aplicando la operación correspondiente (ya sea efectuar el valor absoluto o bien el producto) componente a componente. Por otra parte, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , denotaremos por  $e_n$  a la sucesión dada por  $e_{nj} = \delta_{n,j}$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.1** (espacio quasi-normado sólido).

Un *espacio quasi-normado sólido* es un espacio quasi-Banach de sucesiones  $(E, \|\cdot\|)$  en el que:

- (a)  $\mathbb{R}^\infty = \text{span} \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto denso;
- (b) la quasi-norma  $\|\cdot\|$  satisface que:
  - (i)  $\|yx\| \leq \|y\|_\infty \|x\|$  para toda sucesión  $y \in \ell_\infty$  y  $x \in E$ ,
  - (ii)  $\|e_n\| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
  - (iii)  $\|x\|_\infty \leq \|x\|$  para toda sucesión  $x \in E$ .

Conviene observar que, en tal caso, la base usual  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una base de Schauder incondicional para  $E$ .

**Ejemplo 2.2** (espacios quasi-normados sólidos).

- (a) Los espacios  $\ell_p$ , con  $1 < p < \infty$ , son ejemplos de espacios quasi-normados sólidos.  
(b) Para  $0 < p < 1$ , el espacio de sucesiones  $\ell_p$  también es un espacio quasi-normado sólido.

Dada una función lipschitziana  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t) = 0$  para todo  $t \leq 0$  —emplearemos la notación  $\varphi \in \mathcal{L}$  para referirnos a una función  $\varphi$  satisfaciendo dicha propiedad—, consideramos la aplicación quasi-aditiva  $f: \mathbb{R}^\infty \rightarrow E$  dada por

$$f(x)_k = \begin{cases} x_k \varphi(-\log |x_k|), & \text{si } x_k \neq 0, \\ 0, & \text{si } x_k = 0, \end{cases} \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

que, en virtud de los Teoremas 1.13 y 1.14, induce la aplicación quasi-lineal  $F_0: \mathbb{R}^\infty \rightarrow E$  dada por

$$F_0(x) = \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}^\infty,$$

que se extiende a su vez, en virtud del Teorema 1.11 anterior, a una aplicación quasi-lineal  $F: E \rightarrow E$  con la que definiremos la suma torcida  $E \oplus_F E$ .

**Definición 2.3** (espacio  $E(\varphi)$ ).

Dada una función  $\varphi \in \mathcal{L}$ , emplearemos la notación  $E(\varphi)$  para denotar a la suma torcida  $E \oplus_F E$ .

Justifiquemos el paso clave de la construcción anterior: la aplicación  $f: \mathbb{R}^\infty \rightarrow E$  dada por (2.1) es una aplicación quasi-aditiva.

Dado que la antisimetría de  $f$  es una consecuencia inmediata de su definición, centraremos todos nuestros esfuerzos en probar que  $f$  satisface las propiedades (a) y (b) de la Definición 1.12.

Para ello, dadas dos sucesiones normalizadas arbitrarias  $x, y \in \mathbb{R}^\infty$  y  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k y_k \neq 0$ , observemos que si  $L_\varphi$  es la constante de Lipschitz de  $\varphi$ , entonces

$$\begin{aligned} |f(x)_k + f(y)_k - f(x+y)_k| &= \\ &= |x_k \varphi(-\log |x_k|) + y_k \varphi(-\log |y_k|) - (x_k + y_k) \varphi(-\log |x_k + y_k|)| \\ &\leq |x_k| |\varphi(-\log |x_k|) - \varphi(-\log |x_k + y_k|)| + |y_k| |\varphi(-\log |y_k|) - \varphi(-\log |x_k + y_k|)| \\ &\leq L_\varphi \left( |x_k| \log \frac{|x_k + y_k|}{|x_k|} + |y_k| \log \frac{|x_k + y_k|}{|y_k|} \right) \\ &\leq L_\varphi \left( |x_k| \log \frac{|x_k| + |y_k|}{|x_k|} + |y_k| \log \frac{|x_k| + |y_k|}{|y_k|} \right) \\ &\leq L_\varphi (|x_k| + |y_k|) \log 2, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos empleado que

$$t \log \frac{1}{t} + (1-t) \log \frac{1}{1-t} \leq \log 2, \quad \text{para todo } 0 < t < 1.$$

Por tanto, concluimos que  $|f(x) + f(y) - f(x+y)| \leq L_\varphi (|x| + |y|) \log 2$ , de donde se deducimos finalmente que si  $C$  es un módulo de concavidad de la quasi-norma  $\|\cdot\|$ ,

entonces

$$\begin{aligned} \|f(x) + f(y) - f(x+y)\| &\leq L_\varphi (\|x\| + \|y\|) \log 2 \\ &\leq CL_\varphi (\|x\| + \|y\|) \log 2, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^\infty. \end{aligned}$$

Por otra parte, dado  $x = x_1e_1 + \cdots + x_Ne_N \in \mathbb{R}^\infty$  arbitrario, en virtud de la propiedad (i) de la quasi-norma  $\|\cdot\|$  de  $E$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|f(tx)\| &= \left\| \sum_{k=1}^N tx_k \varphi(-\log |tx_k|) e_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^N tx_k \varphi(-\log |tx_k|) e_k \right\|_\infty \left\| \sum_{k=1}^N e_k \right\| \\ &= \max_{1 \leq k \leq N} |tx_k \varphi(-\log |tx_k|)| \left\| \sum_{k=1}^N e_k \right\| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |tx_k \log |tx_k|| L_\varphi \left\| \sum_{k=1}^N e_k \right\| \end{aligned}$$

y entonces ahora es claro que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f(tx)\| = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^\infty.$$

**Nota 2.4** (sobre la condición  $\varphi(t) = 0$  para todo  $t \leq 0$ ).

En virtud de las consideraciones anteriores, debemos notar que no supone pérdida de generalidad alguna limitarnos a trabajar con funciones lipschitzianas  $\varphi$  tales que  $\varphi(t) = 0$  para todo  $t \leq 0$ . En efecto, pues si para una función lipschitziana  $\varphi$  arbitraria consideramos

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \varphi(0), & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0; \end{cases}$$

es fácil ver que entonces  $\bar{\varphi}$  induce una suma torcida equivalente a  $E \oplus_F E$ .

Fijándonos en la definición de la aplicación quasi-aditiva  $f: \mathbb{R}^\infty \rightarrow E$  introducida en (2.1), observamos que lo realmente importante de la función lipschitziana  $\varphi$  es su comportamiento asintótico en  $+\infty$ .

Una vez visto que toda función  $\varphi \in \mathcal{L}$  define una suma torcida de  $E$  y  $E$  (siendo  $E$  un espacio quasi-normado sólido) es natural formularse la siguiente pregunta: dadas dos funciones  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ ,

*¿cuándo son (proyectivamente) equivalentes las sumas torcidas  $E(\varphi)$  y  $E(\psi)$ ?*

Assumiendo ciertas hipótesis no muy restrictivas, el siguiente resultado responde a dicha cuestión: esencialmente, dos sumas torcidas  $E(\varphi)$  y  $E(\psi)$  son equivalentes si y sólo si  $\varphi - \psi$  es una función acotada. En particular, tal y como deduciremos más adelante, una suma torcida  $E(\varphi)$  será trivial si y sólo si la aplicación  $\varphi$  es acotada.

**Teorema 2.5** (espacios  $E(\varphi)$  equivalentes).

Sea  $E$  un espacio *quasi-normado sólido* en el que ninguna subsucesión de  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base usual de  $c_0$ . En tal caso, dadas dos funciones  $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$ , tenemos que:

(a)  $E(\varphi)$  y  $E(\psi)$  son equivalentes si y sólo si

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - \psi(t)| < \infty;$$

(b)  $E(\varphi)$  y  $E(\psi)$  son proyectivamente equivalentes si y sólo si existe  $a \neq 0$  tal que

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - a\psi(t)| < \infty;$$

(c)  $E(\varphi)$  es trivial si y sólo si  $\varphi$  es una función acotada.

*Demostración del Teorema 2.5.*

Sean  $F: E \rightarrow E$  y  $G: E \rightarrow E$  las aplicaciones *quasi-lineales* inducidas por las funciones *lipschitzianas*  $\varphi$  y  $\psi$  respectivamente.

(a)

Inicialmente, probaremos que la condición  $M = \sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - \psi(t)| < \infty$  implica que

$$\|F(y) - G(y) - Ay\| \leq M\|y\|, \quad \text{para todo } y \in E,$$

siendo  $A$  la aplicación idénticamente nula en  $E$ .

Para ello, observaremos que si  $y \in E$ , entonces

$$\begin{aligned} \|F(y) - G(y)\| &= \left\| \|y\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - \|y\| g\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k \varphi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) e_k - \sum_{k=1}^{\infty} y_k \psi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) e_k \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left[ \varphi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) - \psi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) \right] e_k \right\| \\ (\text{prop. (i) de } \|\cdot\|) &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \varphi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) - \psi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) \right| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k \right\| \leq M\|y\|. \end{aligned}$$

El resultado enunciado es ahora una consecuencia del Teorema 1.10 anterior.

Antes de mostrar la demostración detallada del enunciado recíproco, indicamos un breve esquema de cómo procederemos.

1.- La idea esencial consistirá en escoger una sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$  satisfaciendo que:

- (a) para cada  $t \in [\log \|s_1\|, +\infty)$  existe un único  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $t \in [\log \|s_n\|, \log \|s_{n+1}\|)$  (véase (2.8)),
- (b)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \log \|s_{n+1}\| - \log \|s_n\| < \infty$  (véase 2.7),
- (c)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|)| < \infty$  (véase (2.6));

y observar finalmente que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - \varphi(\log \|s_n\|)| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|)| \\ &\quad + \sup_{t \in (0, +\infty)} |\psi(\log \|s_n\|) - \psi(t)|, \end{aligned}$$

de donde, empleando la lipschitzianidad de las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  y las propiedades (b) y (c) anteriores, deducimos que

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - \psi(t)| < \infty.$$

- 2.– Evidentemente, la gran dificultad con la que nos encontraremos será obtener tal sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Sin embargo, es curioso que para cada  $n \in \mathbb{N}$  la sucesión  $s_n \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .
- 3.– La equivalencia entre los espacios  $E(\varphi)$  y  $E(\psi)$  jugará un importante papel a la hora de lograr las propiedades (b) y (c) anteriores. En relación con este último punto, compárese (2.2) con (2.5) y valórese la importancia de esta última desigualdad a la hora de obtener la sucesión  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Iniciamos ahora la prueba detallada; supongamos entonces —en virtud del Teorema 1.10— que existe una aplicación lineal  $A: E \rightarrow E$  tal que

$$\|F(y) - G(y) - Ay\| \leq M\|y\|, \quad \text{para todo } y \in E. \quad (2.2)$$

Sea  $H$  la aplicación quasi-lineal dada por  $H = F - G$ . En tal caso, para  $n \in \mathbb{N}$  arbitrario,

$$\begin{aligned} H(e_n) &= F(e_n) - G(e_n) = \|e_n\|f\left(\frac{e_n}{\|e_n\|}\right) - \|e_n\|g\left(\frac{e_n}{\|e_n\|}\right) \\ &= f(e_n) - g(e_n) = 0 - 0 = 0 \in E. \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.2) y la propiedad (iii) de la Definición 2.1,

$$\|Ae_n\|_\infty \leq \|Ae_n\| \leq M\|e_n\| = M, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así pues, aplicando el argumento diagonal de G. Cantor, existen dos sucesiones estrictamente crecientes de números naturales  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tales que  $A(e_{n_k} - e_{m_k}) \rightarrow 0$  coordenada a coordenada. Ahora, aplicando un argumento del estilo “joroba deslizante”, podemos escoger:

- una subsucesión  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(e_{n_k} - e_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ,
- y una sucesión creciente de números naturales  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ;

de tal modo que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(I) \quad \left\| A(f_n) - \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A(f_n)_k e_k \right\| \leq \frac{1}{2^n}; \quad (II) \quad \text{sop}(f_n) = \{q_n, r_n\} \subset \{p_{n-1}+1, \dots, p_n\}$$

Consideremos ahora la aplicación lineal  $\hat{A}: \text{span}\{f_n: n \in \mathbb{N}\} \rightarrow E$  dada por

$$\hat{A}f_n = (A f_n)_{q_n} e_{q_n} + (A f_n)_{r_n} e_{r_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Así definida, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la sucesión  $\hat{A}f_n \in E$  satisface que:

$$(i) \text{ sop } f_n = \text{sop } \hat{A}f_n = \{q_n, r_n\};$$

$$(ii) \|\hat{A}f_n\| \leq 2CM;$$

$$\begin{aligned} \|\hat{A}f_n\| &= \|(Af_n)_{q_n}e_{q_n} + (Af_n)_{r_n}e_{r_n}\| \leq \|Af_n\| \\ &= \|A(e_{n_k} - e_{m_k})\| \leq C\left(\|Ae_{n_k}\| + \|Ae_{m_k}\|\right) \leq 2CM; \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(iii) \|\hat{A}f_n\|_\infty \leq \|\hat{A}f_n\| \leq 2CM;$$

$$(iv) |\hat{A}f_n| \leq 2CM|f_n|.$$

Dado  $x = \sum_{n=1}^N t_n f_n \in \text{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ , en virtud de la propiedad (iii) de  $\|\cdot\|$ , tenemos que

$$\text{máx}\{|t_n| : 1 \leq n \leq N\} = \|x\|_\infty \leq \|x\| \quad (2.4)$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|F(x) - G(x) - \hat{A}x\| &= \left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \hat{A}f_n \right\| \\ &= \|H(x) - \hat{A}x\| \leq M_2 \|x\|, \quad \text{para todo } x \in \text{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por claridad en la exposición, dejamos para más adelante la demostración de (2.5).

Adjuntamos una “explicación gráfica” de las condiciones indicadas en las desigualdades (I) y (2.3).

$$\begin{aligned} f_n &= (\text{---}, \pm 1, \text{---}, \pm 1, \text{---}) \\ Af_n &= (\text{---}) \\ \left\| Af_n - \sum_{p_{n-1}+1}^{p_n} Af_{n_k} e_k \right\| &= \|(\text{---}, \text{---}, \text{---})\| \leq \frac{1}{2^n} \\ \|\hat{A}f_n\| &= \|(\text{---}, \blacksquare, \text{---}, \blacksquare, \text{---})\| \leq 2CM \end{aligned}$$

En particular, para  $s_n = \sum_{i=1}^n f_i \in \text{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ , tenemos que

$$\left\| H(s_n) - \sum_{i=1}^n \hat{A}f_i \right\| \leq M_2 \|s_n\|.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$H(s_n) = (\varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|)) s_n$$

y

$$\left| \sum_{i=1}^n \hat{A}f_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\hat{A}f_i| \leq 2CM \sum_{i=1}^n |f_i| = 2CM |s_n|,$$

concluimos que

$$\left\| \left| \varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|) \right| |s_n| - \sum_{i=1}^n |\hat{A}f_i| \right\| \leq M_2 \|s_n\|.$$

Por tanto, para  $|\varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|)| \geq 2CM$ , debe ser

$$|\varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|)| - 2CM \leq M_2,$$

o equivalentemente,

$$|\varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|)| \leq M_2 + 2CM. \quad (2.6)$$

Por otro lado, dado que

$$\begin{aligned} \|s_n\| &= \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n-1} f_k + f_n \right\| \leq C \left( \left\| \sum_{k=1}^{n-1} f_k \right\| + \|f_n\| \right) \\ &= C(\|s_{n-1}\| + \|e_{n_k} - e_{m_k}\|) \leq C(\|s_{n-1}\| + 2C), \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \log \|s_n\| &\leq \log C + \log(\|s_{n-1}\| + 2C) \leq \log C + \log(\|s_{n-1}\|(1 + 2C)) \\ &= \log(C(1 + 2C)) + \log \|s_{n-1}\|, \end{aligned}$$

es decir,

$$\log \|s_n\| - \log \|s_{n-1}\| \leq \log(C(1 + 2C)). \quad (2.7)$$

Además, debe ser

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|s_n\| = \infty. \quad (2.8)$$

En otro caso, la sucesión  $(e_{q_1}, e_{r_1}, e_{q_2}, e_{r_2}, \dots)$  sería equivalente a la base canónica de  $c_0$ . En efecto, pues para  $x = \sum_i t_i e_{q_i} + \sum_j t_j e_{r_j}$  tendríamos que —en virtud de las propiedades (i) y (iii) de la quasi-norma  $\|\cdot\|$  de un espacio quasi-normado sólido—

$$\sup_{i,j \in \mathbb{N}} \{|t_i|, |t_j|\} = \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|s_n\| \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \{|t_i|, |t_j|\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|s_n\| \|x\|_\infty.$$

Así pues, en virtud de (2.8), podemos afirmar que para cada  $t \in [\log \|s_1\|, \infty) \subset \mathbb{R}$  existe un único  $n \in \mathbb{N}$  para el que  $t \in [\log \|s_{n-1}\|, \log \|s_n\|] \subset \mathbb{R}$ . En tal caso, teniendo en cuenta (2.6) y (2.7),

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq |\varphi(t) - \varphi(\log \|s_n\|)| + |\varphi(\log \|s_n\|) - \psi(\log \|s_n\|)| + |\psi(\log \|s_n\|) - \psi(t)| \\ &\leq L_\varphi |t - \log \|s_n\|| + M_2 + 2CM + L_\psi |t - \log \|s_n\|| \\ &\leq (L_\varphi + L_\psi) \log(C(1 + 2C)) + M_2 + 2CM, \end{aligned}$$

donde  $L_\varphi$  y  $L_\psi$  son las constantes de Lipschitz de  $\varphi$  y  $\psi$  respectivamente.

Por tanto, hemos probado que si  $E(\varphi)$  y  $E(\psi)$  son sumas torcidas equivalentes, entonces

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - \psi(t)| < \infty.$$

*Demostración de la desigualdad (2.5).*

Dado que

$$\begin{aligned}
\left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \hat{A} f_n \right\| &= \left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n [A f_{n_{q_n}} e_{q_n} + A f_{n_{r_n}} e_{r_n}] \right\| \\
&= \left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \left[ \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k - \sum_{\substack{k=p_{n-1}+1 \\ k \neq q_n, r_n}}^{p_n} A f_{nk} e_k \right] \right\| \\
&\leq C \left( \left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| + \left\| \sum_{n=1}^N t_n \sum_{\substack{k=p_{n-1}+1 \\ k \neq q_n, r_n}}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| \right) \\
&\leq C \left( \left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| + \left\| A \left( \sum_{n=1}^N t_n f_n \right) \right\| \right) \\
&= C \left( \left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| + \|A(x)\| \right) \\
&\leq C \left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| + C \|A\| \|x\|,
\end{aligned}$$

basta encontrar una cota adecuada para el primer sumando de la última desigualdad. No obstante,

$$\begin{aligned}
\left\| H(x) - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| &= \left\| F(x) - G(x) - Ax + Ax - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| \\
&\leq C \left( \|F(x) - G(x) - Ax\| + \left\| Ax - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| \right) \\
&\leq CM \|x\| + C \left\| Ax - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| \\
&\leq CM \|x\| + CL^* \|x\| = M_2^* \|x\|,
\end{aligned}$$

donde para acotar el segundo sumando hemos tenido en cuenta que

$$\begin{aligned}
\left\| Ax - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| &= \left\| A \left( \sum_{n=1}^N t_n f_n \right) - \sum_{n=1}^N t_n \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^N t_n \left( A f_n - \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right) \right\| \\
&\stackrel{\text{(Lema 1.17)}}{\leq} L \left( \sum_{n=1}^N \left\| t_n \left( A f_n - \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right) \right\|^r \right)^{1/r} \\
&\leq L \max_{1 \leq i \leq N} |t_i| \left( \sum_{n=1}^N \left\| \left( A f_n - \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} A f_{nk} e_k \right) \right\|^r \right)^{1/r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{prop. (iii) de } \|\cdot\|) &\leq L\|x\| \left( \sum_{n=1}^N \left\| Af_n - \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} Af_{nk} e_k \right\|^r \right)^{1/r} \\
(1) &\leq L\|x\| \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{2^n} \right)^r \right)^{1/r} = L^* \|x\|.
\end{aligned}$$

(b)

Inicialmente, probaremos que la condición  $M = \sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - a\psi(t)| < \infty$  implica que

$$\|F(y) - G(ay) - Ay\| \leq M\|y\|, \quad \text{para todo } y \in E,$$

siendo  $A$  la aplicación idénticamente nula en  $E$ . En efecto, pues para  $y \in E$  arbitrario,

$$\begin{aligned}
\|F(y) - G(ay)\| &= \left\| \|y\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) - \|ay\| g\left(\frac{ay}{\|ay\|}\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k \varphi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) e_k - \sum_{k=1}^{\infty} ay_k \psi\left(-\log \frac{|ay_k|}{\|ay\|}\right) e_k \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left[ \varphi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) - a\psi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) \right] e_k \right\| \\
(\text{prop. (i) de } \|\cdot\|) &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \varphi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) - a\psi\left(-\log \frac{|y_k|}{\|y\|}\right) \right| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k \right\| \leq M\|y\|.
\end{aligned}$$

A continuación, probaremos el enunciado recíproco. Si  $E(\varphi)$  y  $E(\psi)$  son dos sumas torcidas proyectivamente equivalentes, existe  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  para el que las aplicaciones quasi-lineales  $F$  y  $G_a$  —dada por  $G_a(x) = G(ax)$  para cada  $x \in E$ — son equivalentes. En tal caso,  $E \oplus_{G_a} E$  es equivalente a  $E(\theta)$ , siendo  $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función (lipschitziana) dada por

$$\theta(t) = \begin{cases} a\psi\left(t + \log \frac{1}{|a|}\right) - a\psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right), & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

En efecto, pues si  $h$  es la aplicación quasi-aditiva asociada a  $\theta$ , es decir, si

$$h(t) = t\theta\left(\log \frac{1}{|t|}\right) = at \left[ \psi\left(\log \frac{1}{|t|} + \log \frac{1}{|a|}\right) - \psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) \right] = at \left[ \psi\left(\log \frac{1}{|at|}\right) - \psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) \right],$$

entonces

$$\begin{aligned}
H(x)_k &= \|x\| h\left(\frac{x}{\|x\|}\right)_k = \|x\| \frac{ax_k}{\|x\|} \left[ \psi\left(-\log \frac{|ax_k|}{\|x\|}\right) - \psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) \right] \\
&= ax_k \left[ \psi\left(-\log \frac{|ax_k|}{\|x\|}\right) - \psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) \right], \quad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

y

$$G_a(x)_k = G(ax)_k = \|ax\| g\left(\frac{ax}{\|ax\|}\right)_k = \|ax\| \frac{ax_k}{\|ax\|} \psi\left(-\log \frac{|ax_k|}{\|ax\|}\right) = ax_k \psi\left(-\log \frac{|x_k|}{\|x\|}\right).$$

Por tanto, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$\left| H(x)_k - G_a(x)_k + a\psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) x_k \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |ax_k| \left| \psi\left(-\log \frac{|ax_k|}{\|x\|}\right) - \psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) - \psi\left(-\log \frac{|x_k|}{\|x\|}\right) + \psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) \right| \\
&= |ax_k| \left| \psi\left(-\log \frac{|ax_k|}{\|x\|}\right) - \psi\left(-\log \frac{|x_k|}{\|x\|}\right) \right| \leq |ax_k| L_\psi \log |a|,
\end{aligned}$$

y concluimos entonces que

$$\|H(x) - G_a(x) + Ax\| \leq L_\psi |a| \log |a| \|x\|, \quad \text{para todo } x \in E,$$

siendo  $A: E \rightarrow E$  la aplicación lineal que consiste en multiplicar cada sucesión de  $E$  por el escalar  $a\psi(-\log |a|)$ .

Así pues, en virtud del Teorema 1.10,  $E \oplus_{G_a} E$  y  $E(\theta)$  son sumas torcidas equivalentes. Por tanto, en virtud de lo probado en el apartado (a) anterior,

$$\sup_{t \in (0, +\infty)} \left| \varphi(t) - a\psi\left(t + \log \frac{1}{|a|}\right) + a\psi\left(\log \frac{1}{|a|}\right) \right| < \infty$$

y entonces, dado que  $\psi$  es una función lipschitziana,

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in (0, +\infty)} |\varphi(t) - a\psi(t)| &= \sup_{t \in (0, +\infty)} \left| \varphi(t) - a\psi(t) + a\psi\left(t + \log \frac{1}{|a|}\right) - a\psi\left(t + \log \frac{1}{|a|}\right) \right| \\
&\leq \sup_{t \in (0, +\infty)} \left| \varphi(t) - a\psi\left(t + \log \frac{1}{|a|}\right) \right| + |a| \sup_{t \in (0, +\infty)} \left| \psi(t) - \psi\left(t + \log \frac{1}{|a|}\right) \right| < \infty.
\end{aligned}$$

(c)

Es una consecuencia inmediata de (a) y (b).  $\square$

### Definición 2.6.

Se dice que un par de  $F$ -espacios  $(X, Y)$  *escinde* si toda suma torcida de  $X$  e  $Y$  es trivial; es decir, si toda sucesión exacta corta  $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$  escinde.

### Corolario 2.7 (¡¡Existen sumas torcidas no triviales!!).

Sea  $E$  es un espacio quasi-normado sólido en el que ninguna subsucesión de  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base usual de  $c_0$ . En tal caso, el par  $(E, E)$  no escinde. Es decir, existen sumas torcidas no triviales de  $E$  y  $E$ .

*Demostración.*

En virtud del Teorema 2.5 anterior, basta considerar el espacio  $E(\varphi)$  obtenido al considerar una función  $\varphi \in \mathcal{L}$  no acotada.  $\square$

## 2.2. Sumas torcidas de espacios $\ell_p$ con $0 < p < \infty$

**Corolario 2.8** (espacios  $\ell_p$  con  $p \in (0, 1]$ ).

Dado  $0 < p \leq 1$ , existe un espacio quasi-Banach  $Z$  tal que:

- (a)  $Z$  no es  $p$ -convexo (en particular,  $Z$  no es isomorfo a  $\ell_p$ )
- (b)  $Z$  contiene un subespacio  $X$  isomorfo a  $\ell_p$  de modo que  $Z/X$  también es isomorfo a  $\ell_p$ .

*Demostración.*

En virtud del Corolario 2.7 anterior, el par  $(\ell_p, \ell_p)$  no escinde. Por tanto, existe un espacio quasi-Banach  $Z$  que contiene a un subespacio  $X$  isomorfo a  $\ell_p$  con  $Z/X$  también isomorfo a  $\ell_p$ . Sea  $F: \ell_p \rightarrow \ell_p$  una aplicación quasi-lineal para la que  $Z = \ell_p \oplus_F \ell_p$ .

Además, para  $s_n = \sum_{i=1}^n e_i$ ,

$$\begin{aligned} \|(s_n, s_n)\|^p &= (\|s_n - F(s_n)\| + \|s_n\|)^p = ((n|1 - \log n^{1/p}|)^{1/p} + n^{1/p})^p \\ &= n(|1 - \log n^{1/p}|^{1/p} + 1)^p, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\sum_{i=1}^n \|(e_i, e_i)\|^p = \sum_{i=1}^n (\|e_i - F(e_i)\| + \|e_i\|)^p = \sum_{i=1}^n (\|e_i\| + \|e_i\|)^p = 2^p n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, dado que

$$\frac{\|(e_1 + \cdots + e_n, e_1 + \cdots + e_n)\|^p}{\|(e_1, e_1)\|^p + \cdots + \|(e_n, e_n)\|^p} = \frac{1}{2^p} (|1 - \log n^{1/p}| + 1)^p \rightarrow \infty,$$

concluimos entonces que  $Z$  no es un espacio quasi-Banach  $p$ -convexo. □

**Corolario 2.9** (espacios  $\ell_p$  con  $p \in (1, \infty)$ ).

*Dado  $p > 1$ , si  $\varphi \in \mathcal{L}$  es una función no acotada,  $\ell_p(\varphi)$  es un espacio quasi-Banach no isomorfo a  $\ell_p$  que contiene un subespacio  $X$  isomorfo a  $\ell_p$  de modo que  $\ell_p(\varphi)/X$  también es isomorfo a  $\ell_p$ .*

*Demostración.*

Es una consecuencia inmediata del Corolario 2.7 anterior. □

**Nota 2.10** ( $\ell_p(\varphi)$  es isomorfo a un espacio de Banach si  $p > 1$ ).

En realidad, para  $p > 1$ , la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  (que es, en principio, un espacio quasi-Banach) será, en realidad, isomorfo a un espacio de Banach. Este resultado será mostrado en la sección 3.1.1.

En particular, deducimos que existen tantas soluciones de la forma  $\ell_2(\varphi)$  del *problema de Palais* como aplicaciones lipschitzianas  $\varphi \in \mathcal{L}$  no acotadas y no equivalentes entre sí. En el Capítulo ??, estudiaremos operadores en los espacios  $Z_p$ , una subfamilia muy importante de los espacios  $\ell_p(\varphi)$  dados en el Corolario 2.9.

## 2.3. Existencia de base de Schauder

En este epígrafe veremos que los espacios  $E(\varphi)$  admiten base de Schauder. Dicho resultado será empleado más adelante para deducir ciertas propiedades de los espacios  $\ell_p(\varphi)$  con  $1 < p < \infty$ .

**Teorema 2.11** ( $E(\varphi)$  admite base de Schauder).

*Si  $E$  es un espacio quasi-normado sólido y  $\varphi \in \mathcal{L}$ , entonces  $E(\varphi)$  admite base de Schauder.*

*Demostración.*

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$u_{2n-1} = (e_n, 0) \quad \text{y} \quad u_{2n} = (0, e_n).$$

Probaremos que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una base de Schauder de  $E(\varphi)$ .

Dado que  $\text{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}^\infty$  es denso en  $E(\varphi)$ , en virtud del Criterio de Grunblum (ver la Proposición B.11), basta probar que existe  $C^* \in \mathbb{R}^+$  tal si  $p, q \in \mathbb{N}$  y  $p < q$ , entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^p t_i u_i \right\| \leq C^* \left\| \sum_{i=1}^q t_i u_i \right\|, \quad \text{para todo } t_i \in \mathbb{R} \text{ con } 1 \leq i \leq q. \quad (2.9)$$

Supongamos inicialmente que  $p$  es un número par; es decir, que  $p = 2n$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N \geq n$ , consideraremos

$$\alpha_n = \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i} e_i \right\| \quad \text{y} \quad \alpha = \left\| \sum_{i=1}^N t_{2i} e_i \right\|.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p t_i u_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{2n} t_i u_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i-1} e_i - F \left( \sum_{i=1}^n t_{2i} e_i \right) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i} e_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i-1} e_i - \sum_{i=1}^n t_{2i} \varphi \left( -\log \frac{|t_{2i}|}{\alpha_n} \right) e_i \right\| + \alpha_n \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i-1} e_i - \sum_{i=1}^n t_{2i} \varphi \left( \log \alpha_n - \log |t_{2i}| \right) e_i \right\| + \alpha_n \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i-1} e_i - \sum_{i=1}^n t_{2i} \left[ \varphi \left( \log \alpha_n - \log |t_{2i}| \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \varphi \left( \log \alpha - \log |t_{2i}| \right) - \varphi \left( \log \alpha - \log |t_{2i}| \right) \right] e_i \right\| + \alpha_n \\ &\leq C \left\| \sum_{i=1}^n \left[ t_{2i-1} - t_{2i} \varphi \left( \log \alpha - \log |t_{2i}| \right) \right] e_i \right\| \\ &\quad + C \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i} \left[ \varphi \left( \log \alpha_n - \log |t_{2i}| \right) - \varphi \left( \log \alpha - \log |t_{2i}| \right) \right] e_i \right\| + \alpha_n \\ &\leq C \left\| \sum_{i=1}^n \left[ t_{2i-1} - t_{2i} \varphi \left( \log \alpha - \log |t_{2i}| \right) \right] e_i \right\| + CL_\varphi \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i} \log \alpha - \log \alpha_n | e_i \right\| + \alpha_n \\ &= C \left\| \sum_{i=1}^N \left[ t_{2i-1} - t_{2i} \varphi \left( \log \alpha - \log |t_{2i}| \right) \right] e_i \right\| + CL_\varphi \log \frac{\alpha}{\alpha_n} \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i} e_i \right\| + \alpha_n \\ &\leq C \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\| + CL_\varphi \log \frac{\alpha}{\alpha_n} \left\| \sum_{i=1}^n t_{2i} e_i \right\| + \alpha_n = C \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\| + CL_\varphi \log \left( \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) \alpha_n + \alpha_n \\ &= C \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\| + CL_\varphi \log \left( \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) \frac{\alpha_n}{\alpha} \alpha + \alpha_n \leq C \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\| + \frac{CL_\varphi}{e} \alpha + \alpha_n \end{aligned}$$

$$\leq C \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\| + \frac{CL_\varphi}{e} \alpha + \alpha \leq \left( C + \frac{CL_\varphi}{e} + 1 \right) \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\|,$$

donde en la antepenúltima desigualdad hemos empleado que  $|t \log t| \leq e^{-1}$  para  $0 < t < 1$ .

Supongamos ahora que  $p$  es un número impar, es decir, que  $p = 2n - 1$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$ . Empleando lo obtenido anteriormente, obtenemos ahora que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^p t_i u_i \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{2n} t_i u_i - t_{2n} u_{2n} \right\| \leq C \left( \left\| \sum_{i=1}^{2n} t_i u_i \right\| + |t_{2n}| \|u_{2n}\| \right) \\ &\leq C \left( C + \frac{CL_\varphi}{e} + 1 \right) \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\| + C |t_{2n}| \leq \left( C^2 + \frac{C^2 L_\varphi}{e} + 2C \right) \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\|, \end{aligned}$$

pues

$$|t_{2n}| \leq \left\| \sum_{i=1}^N t_{2i} e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^N t_{2i} e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^N t_{2i-1} e_i - F \left( \sum_{i=1}^N t_{2i} e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{2N} t_i u_i \right\|.$$

Además, puesto que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| \sum_{i=1}^{2k} t_i u_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{2k+1} t_i u_i \right\|,$$

la desigualdad (2.9) es cierta tanto para  $q$  par como para  $q$  impar. □



# Capítulo 3

## Sumas torcidas de espacios $\ell_p$

En este capítulo estudiamos con cierto detalle las sumas torcidas  $\ell_p(\varphi)$  para  $1 < p < \infty$ , espacios que ya fueron introducidas en el capítulo anterior.

En la primera sección, veremos que para cada  $1 < p < \infty$  la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  es isomorfa a cierto espacio de Banach. La demostración de dicho resultado —de gran complejidad— emplea propiedades geométricas directamente relacionadas con la convexidad de un espacio, las cuales no probaremos.

En la segunda sección identificaremos el espacio dual de la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  con la suma torcida  $\ell_q(\psi)$ , siendo  $p$  y  $q$  exponentes conjugados y  $\psi$  cierta función lipschitziana.

En la tercera sección, estudiamos propiedades elementales de las sucesiones básicas del espacio  $\ell_p(\varphi)$ ; dichos resultados nos permitirán conocer la estructura de algunos subespacios de  $\ell_p(\varphi)$ . Finalmente, cerramos este capítulo introduciendo los espacios  $Z_p$ .

### 3.1. Sumas torcidas y convexidad

Anteriormente, ya probamos que  $\ell_p(\varphi)$  es una suma torcida no trivial si  $\varphi$  es una aplicación lipschitziana no acotada. En particular,  $\ell_2(\varphi)$  es una suma torcida no trivial de espacios de Hilbert; es decir,  $\ell_2(\varphi)$  no es isomorfo a un espacio de Hilbert.

Además, en virtud del Teorema 1.5, sabemos que  $\ell_2(\varphi)$  es un espacio quasi-Banach; luego tiene sentido preguntarse si dicho espacio es, en realidad, un espacio de Banach.

En esta sección veremos que la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$ , con  $1 < p < \infty$ , es isomorfa a un espacio de Banach. Para ello, podemos proceder de dos formas distintas:

- 1.- El primer método consiste en invocar la  $B$ -convexidad (ver Definición 3.4) de los espacios  $\ell_p$  y emplear luego que la suma torcida de dos espacios  $B$ -convexos es  $B$ -convexa; es decir, que la  $B$ -convexidad es una *propiedad de 3 espacios*.

En tal caso, teniendo en cuenta que los espacios  $B$ -convexos son localmente convexos (Proposición 3.7) y que la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  es un espacio quasi-Banach, deduciríamos que  $\ell_p(\varphi)$  es isomorfo a un espacio Banach (Proposición 3.9).

Para probar que los espacios  $\ell_p$  son  $B$ -convexos podemos proceder de diversas maneras:

- (i) empleando alguna de las condiciones descritas en la Proposición 3.5;

- (ii) teniendo en cuenta que los espacios  $\ell_p$  son uniformemente convexos para  $1 < p < \infty$  (ver [18, p. 430] o [4, p. 198]) y que todo espacio uniformemente convexo es B-convexo [19, p. 55];
- (iii) empleando una condición equivalente a la B-convexidad propuesta por G. Pisier (ver [40] y [15, Capítulo 13]).

2.- El segundo enfoque se basa en el concepto de K-espacio (ver, por ejemplo, [25, 28]).

Dado un espacio de Banach  $X$ , estudiar las sumas torcidas que generan otros espacios quasi-Banach con  $X$  equivale a estudiar las aplicaciones quasi-lineales de  $X$  en otro quasi-Banach. El espacio de Banach “más pequeño” que podemos considerar como codominio es  $\mathbb{K}$ . Es por ello que es habitual referirse a las sumas torcidas  $Z$  con

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{q} X \longrightarrow 0$$

como extensiones (o sumas torcidas) “minimales” de  $X$ . Se dice que  $X$  es un K-espacio si todas sus extensiones (o sumas torcidas) minimales son triviales.

Es conocido (ver [6, p. 379]) que la suma torcida de un espacio Banach con un K-espacio es isomorfa a un espacio de Banach.

Por tanto, para demostrar que  $\ell_p(\varphi)$  es isomorfo a un espacio de Banach, basta ver que  $\ell_p$  es un K-espacio, resultado que se puede consultar en [8], donde se invoca el carácter super-reflexivo de los espacios  $\ell_p$  para  $1 < p < \infty$ .

A continuación, explicaremos con más detalle el método 1.-(ii).

### 3.1.1. Coeficientes $a_n, b_n, c_n$ . B-convexidad

Para la redacción de este epígrafe hemos empleado las referencias [25] y [13].

Dado un espacio quasi-Banach  $X$ , las siguientes tres sucesiones de módulos de convexidad aportan información cualitativa sobre las propiedades geométricas de  $X$ .

**Definición 3.1** (geometría en espacios quasi-Banach).

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos:

$$a_n = \sup\{\|x_1 + \dots + x_n\| : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq n\},$$

$$b_n = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \min_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|,$$

$$c_n^2 = \sup_{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 = 1} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2.$$

**Nota 3.2.** Conviene observar que si definimos

$$\text{Promedio}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2,$$

entonces  $c_n$  es el ínfimo de todas las constantes  $c$  para las que

$$\text{Promedio}(x_1, \dots, x_n) \leq nc^2 \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2, \quad \text{para cualesquiera } x_1, \dots, x_n.$$

La siguiente proposición muestra que la sucesión de coeficientes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es submultiplicativa y permite caracterizar el carácter localmente convexo de un espacio quasi-Banach. Las sucesiones  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  jugarán un importante papel a la hora de caracterizar el carácter  $B$ -convexo (véase la Definición 3.4 y la Proposición 3.5).

**Proposición 3.3** (propiedades de  $a_n$ ).

- (a)  $a_{mn} \leq a_m a_n$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ,
- (b)  $X$  es localmente convexo si y sólo si  $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} a_n < \infty$ .

*Demostración.*

(a)

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \sup\{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_{mn}\| : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq mn\} \\ &= \sup\{\|(x_1 + \cdots + x_m) + \cdots + (x_{(m-1)n+1} + \cdots + x_{mn})\| : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq mn\} \\ &\leq \sup\{\|x_1 + \cdots + x_m\| : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq m\} \sup\{\|x_1 + \cdots + x_n\| : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq n\} \\ &= a_m a_n \end{aligned}$$

(b)

Inicialmente, supongamos que  $X$  es un espacio quasi-Banach localmente convexo. Esto es, supongamos que existe un entorno  $U \subset X$  convexo y acotado de  $0 \in X$ ; sea  $A = \sup_{x \in U} \|x\|$ . En tal caso, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \sup\{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq n\} \\ &= \sup\left\{n \left\| \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \cdots + \frac{x_n}{n} \right\| : \|x_i\| \leq 1, 1 \leq i \leq n\right\} \leq nA; \end{aligned}$$

es decir,  $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} a_n < A$ .

Supongamos ahora que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} a_n < \infty$ ; esto es, existe  $C > 0$  tal que  $a_n < nC$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Probaremos que la envolvente convexa de  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \subset X$  es un conjunto acotado. Para ello, dado  $n \in \mathbb{N}$ , sean:

- (i)  $u_i \in B$ , para cada  $1 \leq i \leq n$ ;
- (ii)  $\alpha_i > 0$ , con  $1 \leq i \leq n$ , de modo que  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ ;
- (iii)  $\lambda_{im} = [m\alpha_i]$ , para cada  $1 \leq i \leq n$  y  $m \in \mathbb{N}$ , donde  $[\cdot]$  denota la función parte entera.

En tal caso, para  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_{im} u_i \right\| &= \|\lambda_{1m} u_1 + \cdots + \lambda_{nm} u_n\| = \|(u_1 + \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{1m}} u_1) + \cdots + (u_n + \frac{\lambda_{nm}}{\lambda_{nm}} u_n)\| \\ &\leq a_{\lambda_{1m} + \cdots + \lambda_{nm}} \leq C(\lambda_{1m} + \cdots + \lambda_{nm}) = C \sum_{i=1}^n \lambda_{im} \\ &= C \sum_{i=1}^n [m\alpha_i] \leq C \sum_{i=1}^n m\alpha_i = Cm \sum_{i=1}^n \alpha_i = Cm. \end{aligned}$$

Por tanto, si  $K > 0$  es un módulo de concavidad de  $\|\cdot\|$ , entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{im}}{m} u_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{im}}{m} u_i \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq K \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{im}}{m} u_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{im}}{m} u_i \right\| \right) \\
&\leq K \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{im}}{m} u_i \right\| + C \right) = K(0 + C) = KC.
\end{aligned}$$

Así pues, hemos probado que la envolvente convexa de  $B$  es un conjunto acotado en  $X$ ; luego  $X$  es un espacio localmente convexo.  $\square$

Introducimos ahora la definición de espacio  $B$ -convexo:

**Definición 3.4** (B-convexidad).

Se dice que  $X$  es  $B$ -convexo si existen  $\delta > 0$  y  $n \geq 2$  de modo que si  $x_i \in X$  con  $\|x_i\| \leq 1$ , para  $1 \leq i \leq n$ , entonces

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \leq (1 - \delta),$$

para cierta sucesión  $(\varepsilon_i)_{i=1}^n \in \{-1, 1\}^n$ .

El concepto de B-convexidad fue introducido por A. Beck [5] en 1962 para caracterizar aquellos espacios de Banach  $X$  en los que se satisface un resultado análogo a la Ley de los Grandes Números en  $X$ .

Posteriormente, los espacios  $B$ -convexos adquirieron una gran importancia; ello fue debido, en parte, al resultado de G. Pisier que afirma la equivalencia entre espacios  $B$ -convexos y espacios  $K$ -convexos (para una descripción detallada de este hecho véase [15] o [19]). Los espacios  $K$ -convexos fueron introducidos por rerey y Pisier en [35].

El siguiente resultado muestra la utilidad de las sucesiones  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en relación con el concepto de  $B$ -convexidad. Su demostración puede consultarse en [40] o [15, Capítulo 13].

**Proposición 3.5** (caracterización de la B-convexidad).

*Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} b_n = 0$ ;
- (ii)  $\sup_{n \geq 2} n^{-1} b_n < 1$ ;
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ .

*Además,  $X$  satisface alguna de las condiciones anteriores si y sólo si  $X$  es B-convexo.*

Los dos siguientes resultados muestran propiedades de la sucesión  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que serán empleadas más adelante en la demostración del Teorema 3.8.

**Proposición 3.6** (propiedades de  $b_n$ ).

- (a)  $b_{mn} \leq b_m b_n$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ ;
- (b)  $b_n \leq a_n$ .

*Demostración.*

(a)

Si  $\{x_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  es un conjunto de  $n \cdot m$  vectores de  $X$  tales que  $\|x_{ij}\| \leq 1$  para  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq n$ , existen signos  $\theta_{ij} = \pm 1$  tales que

$$\left\| \sum_{j=1}^n \theta_{ij} x_{ij} \right\| \leq b_n, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m.$$

Además, también existen signos  $\eta_i = \pm 1$  de modo que

$$\left\| \sum_{i=1}^m \frac{\eta_i}{b_n} \sum_{j=1}^n \theta_{ij} x_{ij} \right\| \leq b_m, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq n;$$

es decir,

$$\left\| \sum_{i=1}^m \eta_i \sum_{j=1}^n \theta_{ij} x_{ij} \right\| \leq b_n b_m.$$

Por tanto, escogiendo  $\varepsilon_{ij} = \eta_i \theta_{ij}$ , obtenemos que

$$\left\| \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\| \leq b_n b_m,$$

de donde deducimos finalmente que  $b_{mn} \leq b_n b_m$ .

(b)

Trivial. □

**Proposición 3.7** (B-convexo implica localmente convexo).

Si  $\sup_{n \geq 2} n^{-1} b_n < 1$ , entonces  $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} a_n < \infty$ .

*Demostración.*

Puesto que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente, basta probar que  $(2^{-k} a_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada en  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ . Por otra parte, dado que  $X$  es localmente acotado, la quasi-norma original de  $X$  puede ser sustituida por una quasi-norma equivalente  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para cierto  $r \in (0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,

$$\|x + y\|^r \leq \|x\|^r + \|y\|^r, \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Claramente, es suficiente probar el resultado enunciado considerando (en la definición de  $a_n$  y  $b_n$ ) esta nueva quasi-norma.

Sea  $\{x_1, x_2, \dots, x_{2n}\} \subset X$  un conjunto formado por  $2n$  vectores de  $X$  de modo que  $\|x_i\| \leq 1$  para  $1 \leq i \leq 2n$ . En tal caso, existen signos  $\varepsilon_i = \pm 1$ , con  $1 \leq i \leq 2n$ , para los que

$$\left\| \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i \right\| \leq b_{2n}.$$

Sea  $A = \{i : \varepsilon_i = 1\}$  y  $B = \{i : \varepsilon_i = -1\}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $|A| \leq n$ . Así pues, dado que

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 2 \sum_{i \in A} x_i - \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{2n} x_i \right\|^r &= \left\| 2 \sum_{i \in A} x_i - \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i \right\|^r \\ (\|\cdot\|^r \text{ es subaditiva}) &\leq 2^r \left\| \sum_{i \in A} x_i \right\|^r + \left\| \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i \right\|^r \\ (|A| \leq n) &\leq 2^r a_n^r + b_{2n}^r \end{aligned}$$

Por tanto, hemos probado que

$$a_{2n}^r = \left( \sup_{\|x_i\| \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{2n} x_i \right\| \right)^r \leq 2^r a_n^r + b_{2n}^r,$$

de donde deducimos finalmente que,

$$(2n)^{-r} a_{2n}^r \leq n^{-r} a_n^r + (2n)^{-r} b_{2n}^r, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En particular, (para “ $n = 2^n$ ”)

$$(2^{-(n+1)} a_{2^{n+1}})^r \leq (2^{-n} a_{2^n})^r + (2^{-(n+1)} b_{2^{n+1}})^r, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

o equivalentemente, si  $\alpha_n = 2^{-n} a_{2^n}$  y  $\beta_n = 2^{-n} b_{2^n}$ ,

$$\alpha_{n+1}^r - \alpha_n^r \leq \beta_{n+1}^r, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Dado que —por hipótesis—  $\sup_{n \geq 2} n^{-1} b_n < 1$ , tenemos luego que  $b_2 < 2$ . Sea entonces  $p > 1$  tal que  $b_2 \leq 2^{1/p}$ . En tal caso, empleando la submultiplicidad de  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , obtenemos que

$$b_{2^k} \leq b_2 \cdot \dots \cdot b_2 \leq 2^{1/p} \cdot \dots \cdot 2^{1/p} = \sqrt[p]{2^k}, \quad \text{para cada } k \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Dado ahora  $m \in \mathbb{N}$  arbitrario, escojamos  $k \in \mathbb{N}$  de modo que  $m \in [2^k, 2^{k+1}) \subset \mathbb{R}$ . Así, empleando que  $b_n$  es creciente y (3.2), obtenemos que

$$b_m \leq b_{2^{k+1}} \leq \sqrt[p]{2^{k+1}} = \sqrt[p]{2} \sqrt[p]{2^k} \leq 2^{1/p} \sqrt[p]{m} \quad (3.3)$$

Por tanto, en virtud de (3.2) y (3.3),

$$b_n \leq \sqrt[p]{2} n^{1/p}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

de donde concluimos ahora que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1/p} b_n < \infty$ . En tal caso,

$$\beta_n^r = (2^{-n} b_{2^n})^r = 2^{nr/p} 2^{-nr} (2^{-n/p} b_{2^n})^r \leq 2^{nr(\frac{1}{p}-1)} \sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1/p} b_n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^r < \infty,$$

de donde —teniendo en cuenta (3.1)— deducimos finalmente que  $(\alpha_n^r)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada en  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ; luego,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} a_n < \infty. \quad \square$$

En el siguiente resultado demostramos una importante desigualdad entre las sucesiones  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}(Y)$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}(X/Y)$  y  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}(X)$  (véase la ecuación (3.6)); empleando dicho resultado seremos capaces de probar que la suma torcida de espacios  $B$ -convexos es un espacio  $B$ -convexo.

**Teorema 3.8** (la suma torcida de dos espacios  $B$ -convexos es  $B$ -convexa).

Si  $0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \longrightarrow X/Y \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de espacios quasi Banach tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(Y) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(X/Y),$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(X) = 0.$$

*Demostración.*

Sea  $\{x_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  un conjunto formando por  $nm$  vectores de  $X$  y  $\theta_{ij}$ , con  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq n$ , las  $nm$  primeras funciones de Rademacher en el intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , esto es,  $\theta_{ij}(t) = \text{signo}(\text{sen}(2^k \pi t))$ , para cada  $k = 1, \dots, nm$  y  $t \in [0, 1]$ . Tenemos entonces que

$$\frac{1}{2^{nm}} \sum_{\varepsilon_{ij} = \pm 1} \left\| \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\|^2 = \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \theta_{ij}(t) x_{ij} \right\|^2 dt.$$

[Escribiendo la suma de Riemann de la integral del segundo miembro asociada a la partición uniforme del intervalo  $[0, 1]$  formada por  $2^{mn}$  subintervalos.]

Sean también,  $\varphi_i$  con  $1 \leq i \leq m$  las  $m$  primeras funciones de Rademacher en el intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Tenemos luego que [empleando la aditividad de la integral “interior” del segundo miembro]

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \theta_{ij}(t) x_{ij} \right\|^2 dt &= \int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi_i(s) \theta_{ij}(t) x_{ij} \right\|^2 ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s) u_i(t) \right\|^2 ds dt = \int_0^1 A(t)^2 dt, \end{aligned}$$

donde, para cada  $1 \leq i \leq m$ ,

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^n \theta_{ij}(t) x_{ij}, \quad t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$$

y

$$A(t) = \left( \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s) u_i(t) \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}.$$

Por tanto, hemos probado que

$$\frac{1}{2^{nm}} \sum_{\varepsilon_{ij} = \pm 1} \left\| \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\|^2 = \int_0^1 A(t)^2 dt.$$

Dado que  $u_i : [0, 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$  es una función simple (esto es, alcanza una cantidad finita de valores en  $X$ ) es posible escoger una función simple  $v_i : [0, 1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow Y$  tal que

$$\|u_i(t) + v_i(t)\|_X \leq 2 \|\pi(u_i(t))\|_{X/Y}, \quad (3.4)$$

con  $\|\pi(u_i(t))\|_{X/Y} = \inf\{\|u_i(t) - y\|_X : y \in Y\}$ . Así pues,

$$\begin{aligned} \|v_i(t)\| &= \|v_i(t) + u_i(t) - u_i(t)\| \leq k(\|v_i(t) + u_i(t)\| + \|u_i(t)\|) \\ (3.4) \quad &\leq k(2\|\pi(u_i(t))\| + \|u_i(t)\|) \leq 3k\|u_i(t)\|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Por otra parte,

$$\left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s)u_i(t) \right\| \leq k \left[ \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s)(u_i(t) + v_i(t)) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s)v_i(t) \right\| \right],$$

y entonces, aplicando la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} A(t) &= \left( \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s)u_i(t) \right\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ (\text{Minkowski}) &\leq k \left[ \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s)(u_i(t) + v_i(t)) \right\|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} + k \left[ \int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^m \varphi_i(s)v_i(t) \right\|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ (\text{Riemann}) &= k \left[ \frac{1}{2^m} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i(u_i(t) + v_i(t)) \right\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + k \left[ \frac{1}{2^m} \sum_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i v_i(t) \right\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ (\text{Def. } c_n) &\leq k \left[ m c_m(X)^2 \sum_{i=1}^m \|u_i(t) + v_i(t)\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + k \left[ m c_m(Y)^2 \sum_{i=1}^m \|v_i(t)\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ ((3.4) \text{ y } (3.5)) &\leq k\sqrt{m} c_m(X) 2 \left( \sum_{i=1}^m \|\pi(u_i(t))\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + k\sqrt{m} c_m(Y) 3k \left( \sum_{i=1}^m \|u_i(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, empleando nuevamente la desigualdad de Minkowski, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 A(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq k\sqrt{m} \left[ 2 c_m(X) \left( \sum_{i=1}^m \int_0^1 \|\pi(u_i(t))\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3 c_m(Y) k \left( \sum_{i=1}^m \int_0^1 \|u_i(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= k\sqrt{m} \left[ 2 c_m(X) \left( \sum_{i=1}^m \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n \theta_{ij}(t)\pi(x_{ij}) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3 c_m(Y) k \left( \sum_{i=1}^m \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n \theta_{ij}(t)x_{ij} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= k\sqrt{m} \left[ 2 c_m(X) \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \pi(x_{ij}) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3 c_m(Y) k \left( \sum_{i=1}^m \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_{ij} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq k\sqrt{m} \left[ 2 c_m(X) \left( \sum_{i=1}^m c_n(X/Y)^2 n \sum_{j=1}^n \|\pi(x_{ij})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3 c_m(Y) k \left( \sum_{i=1}^m c_n(X)^2 n \sum_{j=1}^n \|x_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq k\sqrt{mn} \left[ 2 c_m(X) c_n(X/Y) \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|x_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 3kc_m(Y) c_n(X) \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|x_{ij}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Así pues, para  $\{x_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \subset X$  tal que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \|x_{ij}\|^2 = 1,$$

tenemos que

$$\frac{1}{2^{nm}} \sum_{\varepsilon_{ij}=\pm 1} \left\| \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} x_{ij} \right\|^2 \leq k^2 mn \left[ 2c_m(X)c_n(X/Y) + 3kc_m(Y)c_n(X) \right]^2;$$

es decir,

$$c_{nm}(X) \leq k \left[ 2c_m(X)c_n(X/Y) + 3kc_m(Y)c_n(X) \right].$$

En particular, para  $n = m$ ,

$$c_{m^2}(X) \leq (2k c_m(X/Y) + 3k^2 c_m(Y))c_m(X). \quad (3.6)$$

Por tanto, dado que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} 2kc_m(X/Y) + 3k^2 c_m(Y) = 0,$$

concluimos que

$$c_m(X) = \alpha < 1, \quad \text{para cierto } m \gg 1.$$

[sea  $\lambda_m = 2kc_m(X/Y) + 3k^2 c_m(Y)$ ; luego  $\lambda_m < 1/2$  para  $m \gg 1$  y entonces  $c_{m^2} \leq c_m/2$ ,  $c_{m^4} \leq c_{m^2}/2 \leq c_m/4$ ,  $c_{m^8} \leq c_{m^4}/2 \leq c_m/8, \dots$ ]

En tal caso, para  $\{x_i: 1 \leq i \leq m\} \subset X$  con  $\|x_i\| \leq 1$  para todo  $1 \leq i \leq m$ , tenemos —empleando que  $c_m \leq \alpha$ — que

$$\frac{1}{m2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|^2 \leq \alpha^2 \sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 \leq \alpha^2 m,$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|^2 \leq \alpha^2 m^2;$$

luego existen signos  $\varepsilon_i = \pm 1$ , con  $1 \leq i \leq m$ , para los que

$$\left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|^2 \leq \alpha^2 m^2,$$

y entonces  $b_m(X) \leq \alpha m < m$ . Por tanto, aplicando un razonamiento como el de la prueba de la Proposición 3.7 concluimos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} b_m(X) = 0. \quad \square$$

Hasta ahora, hemos probado que la suma torcida  $X$  de espacios  $B$ -convexos es localmente convexa (en virtud del Teorema 3.8 y la Proposición 3.7). Por otra parte, en virtud del Teorema 1.5, toda suma torcida de espacios de Banach es un espacio quasi-Banach. Estos resultados garantizan la existencia de un entorno acotado y convexo de  $0 \in X$ .

Por tanto, para concluir que la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  es isomorfa a un espacio de Banach, basta probar que el espacio de sucesiones  $\ell_p$ , con  $1 < p < \infty$ , es  $B$ -convexo (Proposición 3.12 siguiente) e invocar luego el siguiente resultado (cuya demostración puede consultarse en [45, p. 30]).

**Proposición 3.9.** *Un espacio quasi-Banach localmente convexo es isomorfo a un espacio de Banach.*

Centrémonos entonces en demostrar que  $\ell_p$ , con  $1 < p < \infty$ , es un espacio  $B$ -convexo. Emplearemos para ello el siguiente concepto.

**Definición 3.10.** [19, p. 36] Un espacio de Banach  $X$  se dice *uniformemente convexo* si para todo  $\varepsilon > 0$  existe algún  $\delta > 0$  tal que para  $x, y \in B_X$  se tiene que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 - \delta \quad \text{implica que} \quad \|x - y\| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

**Nota 3.11** (Sobre la Definición 3.10).

La definición usual de espacio uniformemente convexo (ver, por ejemplo, [18, 1, 34]) tan sólo requiere la condición (3.7) para vectores unitarios. No obstante, puede demostrarse (ver [34, p. 60]) que esta última condición implica la convexidad uniforme en el sentido de la Definición 3.10 anterior, que será suficiente para nuestros propósitos.

El siguiente resultado puede consultarse en [19].

**Proposición 3.12.**

*Todo espacio uniformemente convexo es  $B$ -convexo.*

*Demostración.*

Supongamos que  $X$  es uniformemente convexo. En tal caso, existe  $\delta(1) > 0$  de modo que si  $x, y \in B_X$  son tales que  $\|x - y\| > 1$ , entonces  $\|x + y\| < 2(1 - \delta(1))$ .

Veremos que  $X$  es  $B$ -convexo (ver Definición 3.4 anterior) con  $n = 2$  y  $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \delta(1)\}$ . Dados  $x_1, x_2 \in B_X$ , distinguimos dos casos:

(1) si  $\|x_1 - x_2\| \leq 1$  entonces tenemos que

$$\|x_1 - x_2\| \leq 1 = 2(1 - \frac{1}{2}) \leq 2(1 - \delta);$$

(2) si  $\|x_1 - x_2\| > 1$  entonces se sigue que

$$\|x_1 + x_2\| \leq 2(1 - \delta(1)) \leq 2(1 - \delta).$$

En general, para vectores  $x_1, x_2 \in X$  —reescalando tales vectores de ser necesario— existe un signo  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  de modo que

$$\frac{1}{2}\|x_1 + \varepsilon x_2\| \leq (1 - \delta) \max_{i=1,2} \|x_i\|. \quad \square$$

Es conocido que los espacios  $\ell_p$ , con  $1 < p < \infty$ , son uniformemente convexos (ver [18] o [4]); luego, en virtud de la Proposición 3.12, dichos espacios son  $B$ -convexos. Así pues, concluimos finalmente que:

**Corolario 3.13.**

*Para  $1 < p < \infty$ , la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  es isomorfa a un espacio de Banach.*

## 3.2. El espacio dual de $\ell_p(\varphi)$

Centramos ahora nuestro interés en el estudio del espacio dual de la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$ , con  $1 < p < \infty$ , introducida en el epígrafe 2.3 anterior.

Dado que para  $1 < p < \infty$ , el espacio  $\ell_p(\varphi)$  es un espacio de Banach, su dual también será un espacio de Banach. Además, puesto que tomar duales en espacios de Banach es exacto —Lema 3.14—, el dual de la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$  será también una suma torcida de espacios de Banach. Más exactamente, tendremos que  $\ell_p(\varphi)^* = \ell_q(\psi)$ , con  $p$  y  $q$  exponentes conjugados, para cierta función  $\psi \in \mathcal{L}$  que lograremos identificar en el Teorema 3.15.

**Lema 3.14** (el functor dualidad es exacto).

Si

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Z \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de espacios de Banach, entonces

$$0 \longrightarrow Y^* \longrightarrow Z^* \longrightarrow X^* \longrightarrow 0$$

también es una sucesión exacta de espacios de Banach.

*Demostración.* (Ver [13, Lemma 2.2.d])

Denotaremos por  $i$  y  $q$  las correspondientes inclusión y aplicación cociente. Ya que la aplicación  $q$  es sobreyectiva,  $q^*$  es inyectiva. En efecto, pues

$$\begin{aligned} \ker(q^*) &= \{f \in Y^* : q^*(f) = 0\} = \{f \in Y^* : f(q(z)) = 0, \text{ para todo } z \in Z\} \\ &= \{f \in Y^* : f(x) = 0, \text{ para todo } x \in Y\} = 0. \end{aligned}$$

Ahora, ya que  $i^*$  es la restricción de los funcionales de  $Z$  a  $X$ , en virtud del Teorema de Hahn-Banach,  $i^*$  es sobreyectiva.

Finalmente, para ver que la sucesión es exacta basta tener en cuenta que si

$$X^\perp = \{f \in Z^* : f(x) = 0, \text{ para todo } x \in X\} = \{f \in Z^* : i^*(f) = 0\} = \ker(i^*),$$

entonces

$$\ker(i^*) = X^\perp = (Z/\ker q)^* = Y^* = (\text{Im } q)^* = \text{Im } q^*. \quad \square$$

**Teorema 3.15** (espacio dual de la suma torcida  $\ell_p(\varphi)$ ).

Para  $1 < p < \infty$  y  $\varphi \in \mathcal{L}$ , el espacio dual  $\ell_p(\varphi)^*$  es equivalente al espacio  $\ell_q(\psi)$  si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{y} \quad \psi(t) = -\varphi\left(\frac{t}{p-1}\right), \quad \text{para cada } t \geq 0.$$

*Demostración.*

En virtud del Lema 3.14 anterior, sabemos que  $\ell_p(\varphi)^*$  es una suma torcida de  $\ell_q$  y  $\ell_q$ , siendo  $q$  el exponente conjugado de  $p$ . Es decir, sabemos que existe una aplicación quasi-lineal  $G: \ell_q \longrightarrow \ell_q$  tal que  $\ell_p(\varphi)^* = \ell_q \oplus_G \ell_q$ . Además, la dualidad viene dada por

$$\langle (x, y), (w, z) \rangle = \langle y, w \rangle + \langle x, z \rangle, \quad \text{para } x, y \in \ell_p \text{ y } w, z \in \ell_q.$$

Sea  $H: \ell_q \longrightarrow \ell_q$  la aplicación quasi-lineal obtenida a partir de la función lipschitziana  $\psi$  indicada en el enunciado y  $\mathbb{R}_q^\infty$  el espacio vectorial normado  $(\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_q)$ . Consideremos ahora la aplicación  $T: \mathbb{R}_q^\infty \oplus_H \mathbb{R}_q^\infty \longrightarrow \ell_p(\varphi)^*$  definida, para cada  $(w, z) \in \mathbb{R}_q^\infty \oplus_H \mathbb{R}_q^\infty$ , como

$$T(w, z)(x, y) = \langle y, w \rangle + \langle x, z \rangle, \quad \text{para cada } (x, y) \in \ell_p(\varphi).$$

Las desigualdades que probaremos a continuación, muestran que  $T(w, z)$  es un funcional lineal y acotado en  $\ell_p(\varphi)$  —esto es, que  $T$  está bien definido— y que  $T \in \mathcal{B}(\ell_q \oplus_H \ell_q, \ell_p(\varphi)^*)$ .

Puesto que

$$\langle y, w \rangle + \langle x, z \rangle = \langle y, w - H(z) + H(z) \rangle + \langle x - F(y) + F(y), z \rangle$$

$$= \langle y, w - H(z) \rangle + \langle y, H(z) \rangle + \langle x - F(y), z \rangle + \langle F(y), z \rangle,$$

tenemos entonces que

$$|\langle y, w \rangle + \langle x, z \rangle| \leq |\langle F(y), z \rangle + \langle y, H(z) \rangle| + |\langle x - F(y), z \rangle + \langle y, w - H(z) \rangle|. \quad (3.8)$$

A continuación, acotaremos cada uno de los sumandos de la desigualdad anterior. El siguiente resultado auxiliar jugará un papel clave a la hora de obtener dichas desigualdades.

**Lema 3.16** (auxiliar para el Teorema 3.15).

Si  $1 < p < \infty$  y  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  para  $1 \leq i \leq n$ , entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \log \frac{|x_i|}{|y_i|^{p-1}} \right| \leq \frac{(p-1) \|x\|_q^q + \|y\|_p^p}{e}.$$

Para el primer sumando de (3.8), empleando el Lema 3.16 anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} |\langle F(y), z \rangle + \langle y, H(z) \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n y_i z_i \varphi \left( \log \frac{\|y\|}{|y_i|} \right) + \sum_{i=1}^n y_i z_i \psi \left( \log \frac{\|z\|}{|z_i|} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n y_i z_i \varphi \left( \log \frac{\|y\|}{|y_i|} \right) - \sum_{i=1}^n y_i z_i \varphi \left( \log \left( \frac{\|z\|}{|z_i|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n y_i z_i \left[ \varphi \left( \log \frac{\|y\|}{|y_i|} \right) - \varphi \left( \log \left( \frac{\|z\|}{|z_i|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right) \right] \right| \\ &\leq L_\varphi \sum_{i=1}^n |y_i z_i| \left| \log \left[ \frac{\|y\|}{|y_i|} \left( \frac{|z_i|}{\|z\|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \right] \right| \\ &= \frac{L_\varphi}{p-1} \sum_{i=1}^n |y_i z_i| \left| \log \left[ \left( \frac{\|y\|}{|y_i|} \right)^{p-1} \frac{|z_i|}{\|z\|} \right] \right| \\ \left( z_i^* = |z_i| \operatorname{sgn} \log \frac{\|y\|^{p-1} |z_i|}{|y_i|^{p-1} \|z\|} \right) &= \frac{L_\varphi}{p-1} \sum_{i=1}^n |y_i| z_i^* \left| \log \left[ \left( \frac{\|y\|}{|y_i|} \right)^{p-1} \frac{|z_i|}{\|z\|} \right] \right| \\ \left( u_i = \frac{|y_i|}{\|y\|}, v_i = \frac{z_i^*}{\|z\|} \right) &= \frac{L_\varphi}{p-1} \sum_{i=1}^n \|y\| u_i \|z\| v_i \left| \log(u_i^{1-p} |v_i|) \right| \\ &= \frac{L_\varphi \|y\| \|z\|}{p-1} \sum_{i=1}^n u_i v_i \left| \log \left( \frac{|v_i|}{u_i^{p-1}} \right) \right| \\ &\leq \frac{L_\varphi \|y\| \|z\|}{p-1} \left| \sum_{i=1}^n u_i v_i \log \left( \frac{|v_i|}{u_i^{p-1}} \right) \right| \\ \text{(Lema 3.16)} &\leq \frac{L_\varphi \|y\| \|z\|}{p-1} \frac{(p-1) \|u\|_p^p + \|v\|_q^q}{e} = \frac{L_\varphi p \|y\| \|z\|}{e(p-1)}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Por otra parte, para el segundo sumando de (3.8),

$$\begin{aligned} |(y, w - H(z)) + (x - F(y), z)| &\leq |(y, w - H(z))| + |(x - F(y), z)| \\ &\leq \|y\| \|w - H(z)\| + \|x - F(y)\| \|z\| \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por tanto, aunando (3.9) y (3.10) y considerando  $K = \max \{L_\varphi p / (pe - e), 1\}$ ,

$$|T(w, z)(x, y)| = |\langle y, w \rangle + \langle x, z \rangle| \leq (\|x - F(y)\| \|z\| + K \|y\| \|z\| + \|y\| \|w - H(z)\|)$$

$$\begin{aligned}
&\leq K(\|x - F(y)\| + \|y\|)(\|w - H(z)\| + \|z\|) \\
&\leq K\|(x, y)\|_{\mathbb{R}_p^\infty \oplus_F \mathbb{R}_p^\infty} \|(w, z)\|_{\ell_p(\psi)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Así pues, en virtud de (3.11),  $T(w, z)$  es un funcional continuo en  $\mathbb{R}_p^\infty \oplus_F \mathbb{R}_p^\infty$ ; es decir,  $T(w, z)$  es un elemento de  $\ell_p(\varphi)^*$  y además —nuevamente en virtud de (3.11)—  $T$  es un operador lineal y acotado de  $\mathbb{R}_q^\infty \oplus_H \mathbb{R}_q^\infty$  en  $\ell_p(\varphi)^*$ .

Además, es fácil probar que  $T$  induce una equivalencia entre las sumas torcidas  $\ell_q \oplus_H \ell_q$  y  $\ell_p(\varphi)^*$  al hacer conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}_q^\infty & \longrightarrow & \mathbb{R}_q^\infty \oplus_H \mathbb{R}_q^\infty & \longrightarrow & \mathbb{R}_q^\infty \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow T & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{R}_q^\infty & \longrightarrow & \ell_p(\varphi)^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_q^\infty \longrightarrow 0
\end{array}$$

En efecto, pues cuando consideremos las complecciones de los espacios que aparecen en el diagrama anterior, la equivalencia entre sumas torcidas sigue siendo válida y queda entonces probado el resultado enunciado.  $\square$

*Demostración del Lema 3.16.*

Sea  $J$  el conjunto de índices de  $\{1, 2, \dots, n\}$  para los que  $|x_i| \leq |y_i|^{p-1}$  y sea  $K$  el conjunto formado por los índices restantes. Tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i \in J} x_i y_i \log \left( \frac{|x_i|}{|y_i|^{p-1}} \right) \right| &= \left| \sum_{i \in J} \frac{x_i}{|y_i|^{p-1}} \log \left( \frac{|x_i|}{|y_i|^{p-1}} \right) y_i |y_i|^{p-1} \right| \\
&\leq \sum_{i \in J} \left| \frac{x_i}{|y_i|^{p-1}} \log \frac{|x_i|}{|y_i|^{p-1}} \right| |y_i|^p \leq \frac{1}{e} \sum_{i \in J} |y_i|^p \leq \frac{\|y\|_p^p}{e};
\end{aligned} \tag{3.12}$$

y, por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i \in K} x_i y_i \log \frac{|x_i|}{|y_i|^{p-1}} \right| &= \left| \sum_{i \in K} \frac{y_i}{|x_i|^{q-1}} \log \left( \frac{|x_i|}{|y_i|^{p-1}} \right) x_i |x_i|^{q-1} \right| \\
&= \left| \sum_{i \in K} \frac{y_i}{|x_i|^{q-1}} \log \left( \frac{|y_i|}{|x_i|^{q-1}} \right)^{p-1} x_i |x_i|^{q-1} \right| = (p-1) \left| \sum_{i \in K} \frac{y_i}{|x_i|^{q-1}} \log \left( \frac{|y_i|}{|x_i|^{q-1}} \right) x_i |x_i|^{q-1} \right| \\
&\leq (p-1) \sum_{i \in K} \left| \frac{y_i}{|x_i|^{q-1}} \log \frac{|y_i|}{|x_i|^{q-1}} \right| |x_i|^q \leq \frac{p-1}{e} \sum_{i \in K} |x_i|^q \leq \frac{p-1}{e} \|x\|_q^q,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde en ambos casos hemos empleado que  $|t \log |t|| \leq e^{-1}$  para  $|t| \leq 1$ .

La desigualdad enunciada se sigue ahora teniendo en cuenta (3.12) y (3.13).  $\square$

### 3.3. Sucesiones básicas en $\ell_p(\varphi)$

Con el objetivo de conocer más propiedades sobre la estructura de los espacios  $\ell_p(\varphi)$ , centramos ahora nuestra atención en el estudio de sucesiones básicas. Tal modo de proceder nos permitirá deducir propiedades importantes sobre los “subespacios notables” de  $\ell_p(\varphi)$ , que serán esencialmente el propio  $\ell_p(\varphi)$ ,  $\ell_p$  y ciertos espacios de Orlicz.

En lo que sigue, consideraremos funciones  $\varphi \in \mathcal{L}$  derivables. En tal caso, la función quasi-aditiva asociada, que recordemos viene dada por

$$f(t) = t\varphi(-\log t), \quad \text{para cada } t > 0,$$

satisface que  $f'(t) = \varphi(-\log t) - \varphi'(-\log t)$  para  $t > 0$ . Por tanto, si  $\varphi$  es una función no acotada, al ser  $\varphi'$  una función acotada (por  $\varphi$  ser lipschitziana),  $|f|$  es una función creciente en un entorno de  $0 \in \mathbb{R}$ .

En tal caso, para la función de Orlicz dada por

$$M(t) = |f(t)|^p, \quad \text{para cada } t > 0,$$

se satisface que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{tM'(t)}{M(t)} &= \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{p t^p \varphi(-\log t)^{p-1} (\varphi(-\log t) - \varphi'(-\log t))}{t^p \varphi(-\log t)^p} \\ &= \limsup_{t \rightarrow 0} p \frac{\varphi(-\log t) - \varphi'(-\log t)}{\varphi(-\log t)} = p < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto, la función de Orlicz  $M$  satisface las hipótesis del Teorema B.33 y entonces

$$\ell_M = h_M \quad \text{y} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_M \iff \sum_{n=1}^{\infty} M(|x_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p < \infty.$$

Así, emplearemos la notación  $\ell_{f,p}$  para referirnos al espacio de Orlicz de sucesiones  $\ell_M$ .

En el primer resultado de este epígrafe, mostraremos un ejemplo fundamental de sucesión básica normalizada en  $\ell_p(\varphi)$ . Dicho resultado, puede pensarse como auxiliar para el Teorema 3.18, donde hablaremos de sucesiones básicas normalizadas arbitrarias de  $\ell_p(\varphi)$ .

Sea entonces en lo que sigue  $\varphi \in \mathcal{L}$  una función no acotada y derivable.

**Lema 3.17** (auxiliar para el Teorema 3.18: sucesiones básicas en  $\ell_p(\varphi)$ ).

Si  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica bloque normalizada en  $\ell_p$  y

$$w_n = (F(v_n), v_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

entonces:

- (a)  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica en  $\ell_p(\varphi)$ ;
- (b) si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi'(t) = 0$  monótonamente, existe  $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  equivalente a la base usual de  $\ell_p$  o  $\ell_{f,p}$ ;
- (c) si  $\varphi(t) = ct$ , con  $c \neq 0$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base usual de  $\ell_{f,p}$ .

*Demostración.*

(a)

Por ser  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión bloque normalizada en  $\ell_p$ , existe una sucesión  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que

$$v_n = \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} v_{nk} e_k, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Así pues,

$$\begin{aligned} w_n &= (F(v_n), v_n) = \left( \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} v_{nk} \varphi(-\log |v_{nk}|) e_k, \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} v_{nk} e_k \right) \\ &= \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} v_{nk} \varphi(-\log |v_{nk}|) (e_k, 0) + \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} v_{nk} (0, e_k), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es sucesión básica bloque respecto de la base de Schauder  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  obtenida en el Teorema 2.11 anterior y así, en particular (ver Lema B.16),  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica en  $\ell_p(\varphi)$ .

(b)

Supongamos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n$  converge en  $\ell_p(\varphi)$  —es decir, que  $\sum_{n=1}^{\infty} (t_n F(v_n), t_n v_n)$  converge en  $\ell_p(\varphi)$ —. En tal caso,  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n v_n$  converge en  $\ell_p$ , luego  $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty$  y deducimos entonces —en virtud del Teorema de Riesz (convergencia absoluta implica convergencia)— que  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$  converge en  $\ell_p$ .

A continuación, obtendremos un importante resultado auxiliar que será fundamental a la hora de obtener la prueba del resultado enunciado. Supongamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$  converge en  $\ell_p$ ; es decir, que  $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty$ . En tal caso, emplearemos la siguiente notación:

$$\sigma = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \right)^{1/p} \quad \text{y} \quad \sigma_N = \left( \sum_{n=1}^N |t_n|^p \right)^{1/p}, \quad \text{para cada } N \in \mathbb{N}.$$

Tenemos entonces que, al ser  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión bloque normalizada,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N t_n w_n \right\| &= \left\| \left( \sum_{n=1}^N t_n F(v_n), \sum_{n=1}^N t_n v_n \right) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^N t_n F(v_n) - F \left( \sum_{n=1}^N t_n v_n \right) \right\| + \left\| \sum_{n=1}^N t_n v_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^N t_n F(v_n) - F \left( \sum_{n=1}^N t_n v_n \right) \right\| + \left( \sum_{n=1}^N |t_n|^p \right)^{1/p} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^N t_n F(v_n) - F \left( \sum_{n=1}^N t_n v_n \right) \right\| + \sigma_N \\ &= \left( \sum_{n=1}^N \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} |t_n|^p |v_{nk}|^p \left| \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{\sigma_N}{|t_n v_{nk}|} \right) \right|^p \right)^{1/p} + \sigma_N. \end{aligned}$$

Así pues, dado que  $\varphi$  es una función lipschitziana —luego continua— y  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sigma_N = \sigma$ , en caso de existir  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| \sum_{n=1}^N t_n w_n \right\|$ , éste debe ser igual a

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} |t_n|^p |v_{nk}|^p \left| \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} \right) \right|^p \right)^{1/p} + \sigma. \quad (3.14)$$

Por tanto, dado que  $\ell_p(\varphi)$  es un espacio de Banach reflexivo y  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica de  $\ell_p(\varphi)$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotadamente completa (ver Teorema B.28) y entonces: si  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$  converge en  $\ell_p$ , la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n$  en  $\ell_p(\varphi)$  equivale a la finitud de (3.14).

Probemos ahora que la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$  en  $\ell_{f,p}$  implica la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n$  en  $\ell_p(\varphi)$ . Para ello, observemos inicialmente que

$$|t_n| \leq |t_n| \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right) \right|, \quad \text{si } n \gg 1,$$

pues  $\sigma/|t_n| \rightarrow \infty$  y  $\varphi$  es una función no acotada. Por tanto, la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$  en  $\ell_{f,p}$  implica la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$  en  $\ell_p$ .

Por otra parte, la condición  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0$  monótonamente nos permite afirmar que

$$\left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) \right| \leq \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right) - \varphi(0) \right| = \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right).$$

Además, dado que  $\|v_n\| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , debe ser  $|v_{nk}| \in [0, 1]$  para todo  $n, k \in \mathbb{N}$ . Por tanto,

$$(3.14) \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right) \right|^p \right)^{1/p} + \sigma = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p \right)^{1/p} + \sigma = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right\|_{\ell_{f,p}} + \sigma < \infty,$$

o equivalentemente,  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n$  es convergente en  $\ell_p(\varphi)$ .

Sea ahora,

$$a_n = \text{máx}\{|v_{nk}| : l_{n-1} + 1 \leq k \leq l_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Distinguiremos dos casos:

- (i) Si  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \varepsilon > 0$ , probaremos que la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n$  en  $\ell_p(\varphi)$  implica la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n$  en  $\ell_{f,p}$ . Para ello, basta probar que la finitud de (3.14) implica la finitud de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p$ .

No obstante, empleando la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right) \right|^p \right)^{1/p} \leq \\ \text{(Minkowski)} & \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n \varepsilon|} \right) - \varphi \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right|^p \right)^{1/p} \\ & \quad + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right) - \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n \varepsilon|} \right) \right|^p \right)^{1/p} \\ \text{(Lipschitz)} & \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n \varepsilon|} \right) - \varphi \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right|^p \right)^{1/p} + \sigma |\varphi(\varepsilon^{-1})| + \sigma L_{\varphi} |\log \varepsilon| \end{aligned} \tag{3.15}$$

y entonces

$$\infty > (3.14) = \sigma + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} |t_n|^p |v_{nk}| \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) \right|^p \right)^{1/p}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi'(t) \rightarrow 0 \text{ monót.}) &\geq \sigma + \varepsilon \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n \varepsilon|} \right) - \varphi \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) \right|^p \right)^{1/p} \\
((3.15)) &\geq \sigma + \varepsilon \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right) \right|^p \right)^{1/p} - \sigma \varepsilon |\varphi(\log \varepsilon^{-1})| - \sigma \varepsilon L_\varphi |\log \varepsilon| \\
&= \sigma + \varepsilon \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p \right)^{1/p} - \sigma \varepsilon |\varphi(\log \varepsilon^{-1})| - \sigma \varepsilon L_\varphi |\log \varepsilon|.
\end{aligned}$$

(ii) Si  $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$ , probaremos que existe una subsucesión  $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_k e_k$  en  $\ell_p$  implica la convergencia de  $\sum_{n=1}^{\infty} t_k w_{n_k}$  en  $\ell_p(\varphi)$ . Para ello, basta probar la finitud de (3.14).

Observemos ahora que para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe  $n_k \in \mathbb{N}$  de modo que si  $t \geq \log a_{n_k}^{-1}$ , entonces  $|\varphi'(t)| \leq 2^{-k}$ . Por simplicidad en la notaci3n, supongamos que  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . As3 ptes,

$$\left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) \right| \leq 2^{-n} \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} - \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) = 2^{-n} \log \frac{\sigma}{|t_n|} \quad (3.16)$$

y entonces

$$\begin{aligned}
(3.14) &= \sigma + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} |t_n|^p |v_{nk}|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) \right|^p \right)^{1/p} \\
(v_{nk} \leq 1) &\leq \sigma + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) \right|^p \right)^{1/p} \\
((3.16)) &\leq \sigma + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^{p 2^{-np}} \left| \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right|^p \right)^{1/p} \\
&\leq \sigma + \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-np} \left| \frac{\sigma}{e} \right|^p \right)^{1/p} = \sigma + \frac{\sigma}{e} \left( \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-np} \right)^{1/p} < \infty,
\end{aligned}$$

donde en la 3ltima desigualdad hemos empleado que  $|t \log(\sigma/t)| \leq \sigma e^{-1}$  si  $0 \leq t \leq \sigma$ .

(c)

En este caso, la funci3n quasi-aditiva correspondiente viene dada por  $f(t) = c t \log(1/|t|)$  para cada  $t > 0$ . Por tanto,

$$\begin{aligned}
(3.14) &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} |t_n|^p |v_{nk}|^p \left| \varphi \left( \log \frac{1}{|v_{nk}|} \right) - \varphi \left( \log \frac{\sigma}{|t_n v_{nk}|} \right) \right|^p \right)^{1/p} + \sigma \\
&= |c| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p |v_{nk}|^p \left| \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right|^p \right)^{1/p} + \sigma \\
&\leq |c| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p \left| \log \frac{\sigma}{|t_n|} \right|^p \right)^{1/p} + \sigma = |c| \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f(t_n)|^p \right)^{1/p} + \sigma.
\end{aligned}$$

As3 ptes, teniendo en cuenta el apartado anterior,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base usual de  $\ell_{f,p}$ .  $\square$

Empleando el Lema 3.17 anterior, lograremos probar el siguiente importante resultado.

**Teorema 3.18** (sucesiones básicas en  $\ell_p(\varphi)$ ).

Si  $\varphi \in \mathcal{L}$  es una función que satisface alguna de las siguientes condiciones:

- (a)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = 0$  monótonamente,
- (b)  $\varphi(t) = ct$  con  $c \neq 0$ ;

entonces toda sucesión básica normalizada de  $\ell_p(\varphi)$  admite una subsucesión equivalente bien a la base usual de  $\ell_p$  o bien a la base usual  $\ell_{f,p}$ .

*Demostración.*

Sea  $w_n = (u_n, v_n)$  una sucesión básica normalizada arbitraria en  $\ell_p(\varphi)$ . Distinguiremos dos casos:  $v_n \rightarrow 0$  y  $v_n \not\rightarrow 0$ .

(i)  $\|v_n\| \rightarrow 0$ .

Bajo tal condición,

$$\|(u_n, v_n) - (u_n - F(v_n), 0)\| = \|(F(v_n), v_n)\| = \|0\| + \|v_n\| \rightarrow 0.$$

En tal caso, existe una sucesión estrictamente creciente  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(u_{n_k}, v_{n_k}) - (u_{n_k} - F(v_{n_k}), 0)\| < \frac{1}{2K}, \quad \text{con } K = \text{bc}(w_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Así pues, en virtud del Teorema B.13 (Krein-Milman-Rutman),  $(u_{n_k} - F(v_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica de  $\ell_p$  (pues  $(u_n - F(v_n), 0) \in j(\ell_p)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ ) equivalente a  $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .

Además, dado que  $\|(u_n, v_n)\| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  implica  $\|u_n - F(v_n)\| = 1 - \|v_n\| \rightarrow 1$ , concluimos que  $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  es equivalente a una sucesión básica normalizada de  $\ell_p$ . En tal caso, en virtud de la Proposición B.29,  $(w_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base canónica de  $\ell_p$ .

(ii)  $\|v_n\| \not\rightarrow 0$

Supongamos, sin pérdida alguna de generalidad, que  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\| = \varepsilon > 0$ .

Por ser  $\ell_p(\varphi)$  un espacio de Banach reflexivo,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es contractiva —véase Teorema B.28 (James)— y entonces, teniendo en cuenta la caracterización del espacio  $\ell_p(\varphi)^*$  obtenida en el Teorema 3.15 y la caracterización de bases contractivas vista en la Proposición B.24, concluimos que  $v_n \rightarrow 0$  débilmente en  $\ell_p(\varphi)$  (si  $Y = \overline{\text{span}}\{w_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_p(\varphi)$  entonces  $\ell_p(\varphi)^* = \ell_q(\psi) \subset Y^* = \overline{\text{span}}\{w_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ ).

Por tanto, en virtud del Teorema B.18 (Bessaga-Pełczyński), existe una subsucesión  $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  —supongamos por comodidad  $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — de modo que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica equivalente a cierta sucesión básica bloque  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\ell_p$  satisfaciendo además que  $\|v_n - y_n\| \rightarrow 0$  (en virtud de (B.2)).

En tal caso, en virtud ahora del Lema 3.17 anterior, podemos suponer que  $(F(y_n), y_n)$  es una sucesión básica equivalente bien a la base canónica de  $\ell_{f,p}$  o bien a la base canónica de  $\ell_p$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $z_n = (F(y_n), y_n)$ ; luego  $z_n \rightarrow 0$  débilmente (razonando como anteriormenete). Distinguiremos dos subcasos.

(ii.1)  $\|w_n - z_n\| \rightarrow 0$

En este caso, en virtud del Teorema B.13 (Krein-Milman-Rutman), existe una subsucesión de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que es equivalente a cierta subsucesión de  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

(ii.2)  $\|w_n - z_n\| \not\rightarrow 0$

Dado que  $w_n - z_n \rightarrow 0$  débilmente en  $\ell_p(\varphi)$  (ya que  $w_n \rightarrow 0$  débilmente por ser contractiva y  $z_n \rightarrow 0$  débilmente), el Teorema B.18 (Bessaga-Pelczyński) afirma la existencia de una subsucesión  $(w_{n_k} - z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  —supongamos por comodidad  $(w_{n_k} - z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (w_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — de modo que  $(w_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es sucesión básica en  $\ell_p(\varphi)$ .

No obstante, dado que  $w_n - z_n = (u_n - F(y_n), v_n - y_n)$  y  $\|v_n - y_n\| \rightarrow 0$ , el apartado (i) anterior nos permite suponer que  $(w_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base canónica de  $\ell_p$ .

Veamos que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n (u_n, v_n)$  converge en  $\ell_p(\varphi)$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n v_n$  converge en  $\ell_p$  y entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty$ . En tal caso, dado que  $(w_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base canónica de  $\ell_p$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n (w_n - z_n)$  converge en  $\ell_p(\varphi)$ . Por tanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n z_n$  converge en  $\ell_p(\varphi)$ .

Si  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n z_n = \sum_{n=1}^{\infty} t_n (F(y_n), y_n)$  converge en  $\ell_p(\varphi)$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n y_n$  converge en  $\ell_p$  y entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^p < \infty$ . En tal caso, dado que  $(w_n - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es equivalente a la base canónica de  $\ell_p$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n (w_n - z_n)$  converge en  $\ell_p(\varphi)$ . Por tanto,  $\sum_{n=1}^{\infty} t_n w_n$  converge en  $\ell_p(\varphi)$ .  $\square$

**Corolario 3.19** (espacio  $\ell_p(\varphi)$ ).

Sea  $\varphi(t) = ct$  para cada  $t \geq 0$ . Si  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n, v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica normalizada de  $\ell_p(\varphi)$  tal que  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\| > 0$ , entonces  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admite una subsucesión equivalente a la base usual del espacio de Orlicz  $\ell_{f,p}$ .

*Demostración.*

En virtud del Lema 3.17, la sucesión  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que aparece en el segundo caso ( $\|v_n\| \not\rightarrow 0$ ) de la demostración del Teorema 3.18 anterior es equivalente a la base usual de  $\ell_{f,p}$ .  $\square$

**Corolario 3.20** (los espacios  $\ell_p(\varphi_r)$ ).

Para cada  $0 < r \leq 1$ , sea

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ t^r, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Los espacios  $\ell_p(\varphi_r)$ , con  $0 < r \leq 1$ , son sumas torcidas mutuamente no equivalentes.

*Demostración.*

Dado que  $\sup_{t \in (1, \infty)} |\varphi_r(t) - \varphi_s(t)| = \infty$ , el resultado enunciado es consecuencia directa del Teorema 2.5.  $\square$

**Nota 3.21.** Dado que, para  $r, s \in (0, 1]$  con  $r \neq s$ , no existen  $K > 0$  ni  $t_0 > 0$  tales que

$$\frac{1}{K} \leq \frac{f_r(t)}{f_s(t)} = |-\log t|^{p(r-s)} \leq K, \quad \text{para todo } t \in (0, t_0),$$

en virtud del Teorema B.34, los espacios de Orlicz  $\ell_{f_r,p}$  y  $\ell_{f_s,p}$  no son isomorfos.

Por tanto, empleando el Teorema 3.18 anterior concluimos que las sumas torcidas  $\ell_p(\varphi_r)$  y  $\ell_p(\varphi_s)$  no son espacios de Banach isomorfos.

### 3.4. Espacios $Z_p$

Para cada  $1 < p < \infty$  se define el espacio  $Z_p$  como la suma torcida (módulo equivalencia proyectiva)  $\ell_p(\varphi)$  con  $\varphi(t) = t$  para cada  $t \geq 0$ .

Esto es, en virtud de lo visto anteriormente,  $Z_p$  es la complección del espacio de pares de sucesiones con soporte finito respecto de la quasi-norma dada, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ , por

$$\|(x, y)\| = \|x - F(y)\|_p + \|y\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( x_n - y_n \log \frac{\|y\|_p}{|y_n|} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \|y\|_p, \quad (3.17)$$

donde  $F$  es la aplicación quasi-lineal inducida por la aplicación lipschitziana  $\varphi(t) = t$  (ver Teoremas 1.13 y 1.14).

En particular, para  $p = 2$ , obtenemos una suma torcida no trivial de espacios de Hilbert: el espacio de Banach  $Z_2$ . Dicho espacio es la complección del espacio de pares de sucesiones con soporte finito respecto de la quasi-norma dada, para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ , por

$$\|(x, y)\| = \|x - \text{KP}(y)\|_2 + \|y\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( x_n - y_n \log \frac{\|y\|_2}{|y_n|} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|y\|_2,$$

donde KP es la *aplicación quasi-lineal de Kalton-Peck* dada por

$$\text{KP}(y) = - \sum_n x_n \log \left( \frac{|y_n|}{\|y\|_2} \right) e_n, \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R}^\infty.$$

# Capítulo 4

## Operadores en sumas torcidas de espacios de Banach

Dado un espacio de Banach  $X$ , el estudio de los espacios de operadores  $\mathcal{B}(X, Y)$ , con  $Y$  un espacio de Banach, aporta información sobre las propiedades del propio espacio  $X$ . Piénsese, por ejemplo, en el espacio dual de  $X$  o en la equivalencia entre la existencia de subespacios complementados y la existencia de proyecciones acotadas en  $X$ .

En la primera sección de este capítulo nos centramos en el estudio del espacio  $\mathcal{B}(Z_p)$ . A continuación, ya en la segunda sección, prestaremos especial atención al caso  $p = 2$ .

### 4.1. Operadores en $Z_p$

Para el estudio del espacio  $\mathcal{B}(Z_p)$  necesitamos algunos conceptos y resultados previos.

**Proposición 4.1** ( $Z_p$  es  $\ell_p$ -hereditario).

*Para cada  $1 < p < \infty$  los espacios  $Z_p$  son  $\ell_p$ -hereditarios, esto es, todo subespacio de dimensión infinita de  $Z_p$  contiene un subespacio isomorfo a  $\ell_p$ .*

*Demostración.*

En virtud del Teorema Mazur [33, p. 4] —todo espacio de Banach contiene una sucesión básica—,  $Z_p$  contiene una sucesión básica. Así pues, normalizando de ser necesario, tenemos una sucesión básica normalizada en  $Z_p$ . Luego, en virtud del Teorema 3.18, dicha sucesión básica admite una subsucesión equivalente a la base usual de  $\ell_p$  o del espacio de Orlicz  $\ell_{f,p}$ .

La tesis se sigue ahora de que el espacio de Orlicz  $\ell_{f,p}$  contiene una copia complementada de  $\ell_p$  (ver [33, p. 157, 4.c.1]).  $\square$

**Definición 4.2.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach. Un operador  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  se dice:

- (a) *estrictamente singular* si la restricción de  $T$  a cualquier subespacio de dimensión infinita no es un isomorfismo;
- (b) *estrictamente cosingular* si para cualquier subespacio de codimensión infinita  $Z \subset Y$ , la composición  $(\pi_Z \circ T) : X \rightarrow Y/Z$  no es sobreyectiva.

**Nota 4.3.**

Los operadores estrictamente singulares fueron introducidos por Kato (ver [29]) en el contexto de la teoría de perturbación de operadores. Tal concepto generaliza al de operador compacto pues, en virtud del Lema de Riesz [18, p. 19] todo operador compacto es estrictamente singular. Años más tarde, Pełczyński [36] introduciría el concepto dual.

Conviene observar el siguiente hecho: la familia formada por todos los operadores estrictamente singulares (cosingulares) entre dos espacios de Banach dados forma un *ideal de operadores* (ver [38]). En particular la suma de operadores estrictamente singulares (cosingulares) y la composición de éstos con un operador lineal y acotado es estrictamente singular (cosingular).

La siguiente proposición nos permitirá probar un importante resultado (ver Teorema 4.6 siguiente) —obtenido originalmente por Kalton y Peck en [27]— sobre el espacio  $\mathcal{B}(Z_p)$ : todo operador  $T \in \mathcal{B}(Z_p)$  es, o bien estrictamente singular, o bien un isomorfismo sobre alguna copia del propio  $Z_p$ .

**Proposición 4.4.**

Si  $p \in (1, \infty)$ , entonces:

- (a)  $j: \ell_p \rightarrow Z_p$  es estrictamente cosingular;
- (b)  $q: Z_p \rightarrow \ell_p$  es estrictamente singular.

*Demostración.*

En virtud del Teorema 3.15 anterior, la sucesión dual de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ell_p \xrightarrow{j} Z_p \xrightarrow{q} \ell_p \longrightarrow 0$$

es (proyectivamente equivalente a) la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ell_q \xrightarrow{j} Z_q \xrightarrow{q} \ell_q \longrightarrow 0,$$

donde  $1/p + 1/q = 1$ . Por tanto, basta probar que  $q: Z_p \rightarrow \ell_p$  es estrictamente singular.

Supongamos que  $q: Z_p \rightarrow \ell_p$  no es estrictamente singular. En tal caso, existe un subespacio  $Y \subset Z_p$  de dimensión infinita de modo que

$$\|q(y)\| \geq \varepsilon > 0, \quad \text{para todo } y \in S_Y.$$

No obstante, en virtud de la Proposición 4.1, existe una sucesión básica normalizada  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $Y$  equivalente a la base usual de  $\ell_p$  tal que

$$\|q(w_n)\| \geq \varepsilon > 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En tal caso, en virtud del Corolario 3.19 anterior,  $(w_n)$  tiene una subsucesión equivalente a la base usual del espacio Orlicz  $\ell_{f,p}$ , lo cual es imposible pues toda subsucesión de una sucesión básica equivalente a la base de  $\ell_p$  es equivalente a la base usual de  $\ell_p$ .  $\square$

**Teorema 4.5.**

Sea  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión básica bloque de la base canónica de  $\ell_p$  tal que  $\alpha \leq \|v_n\| \leq \beta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En tal caso, la aplicación  $V: Z_p \rightarrow Z_p$  dada por

$$V(e_n, 0) = (v_n, 0) = j(v_n) \quad \text{y} \quad V(0, e_n) = (F(v_n), v_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

es un isomorfismo.

*Demostración.*

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea

$$v_n = \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} v_{nk} e_k, \quad \text{con } l_{n-1} < l_n.$$

Probaremos que existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  de modo que

$$c_1 \|(x, y)\| \leq \|V(x, y)\| \leq c_2 \|(x, y)\|, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty.$$

Si  $(x, y) = (\sum_n x_n, \sum_n y_n) \in \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty$ , entonces  $V(x, y) = (\sum_n x_n v_n + \sum_n y_n F(v_n), \sum_n y_n v_n)$ . Por tanto,

$$\|V(x, y)\| = \left\| \sum_n x_n v_n + \sum_n y_n F(v_n) - F\left(\sum_n y_n v_n\right) \right\|_p + \left\| \sum_n y_n v_n \right\|_p.$$

Así pues, dado que

$$\begin{aligned} \sum_n y_n F(v_n) - F\left(\sum_n y_n v_n\right) &= \sum_n y_n \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} v_{nk} \log \frac{\|v_n\|}{|v_{nk}|} e_k - \sum_n \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} y_n v_{nk} \log \frac{\|\sum_n y_n v_n\|}{|y_n v_{nk}|} e_k \\ &= \sum_n \sum_{k=l_{n-1}+1}^{l_n} y_n v_{nk} \log \frac{\|v_n\| |y_n|}{\|\sum_n y_n v_n\|} e_k \\ &= \sum_n y_n \log \frac{\|v_n\| |y_n|}{\|\sum_n y_n v_n\|} v_n, \end{aligned}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_n x_n v_n + \sum_n y_n F(v_n) - F\left(\sum_n y_n v_n\right) \right\| &= \left\| \sum_n x_n v_n + \sum_n y_n \log \frac{\|v_n\| |y_n|}{\|\sum_n y_n v_n\|} v_n \right\| \\ (\|v_n\| \leq \beta) &\leq \beta \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \log \frac{\|v_n\| |y_n|}{\|\sum_n y_n v_n\|} \right|^p \right]^{1/p} \\ &= \beta \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \log \frac{\|v_n\| |y_n| \|y\|}{\|\sum_n y_n v_n\| \|y\|} \right|^p \right]^{1/p} \\ &= \beta \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \left( \log \frac{|y_n|}{\|y\|} + \log \frac{\|v_n\| \|y\|}{\|\sum_n y_n v_n\|} \right) \right|^p \right]^{1/p} \\ \text{(Minkowski)} &\leq \beta \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \log \frac{|y_n|}{\|y\|} \right|^p \right]^{1/p} + \beta \left[ \sum_n |y_n|^p \log \frac{\|v_n\| \|y\|}{\|\sum_n y_n v_n\|} \right]^{1/p} \\ (\alpha \leq \|v_n\| \leq \beta) &\leq \beta \|x - F(y)\| + \beta \log \frac{\beta}{\alpha} \|y\| \end{aligned}$$

y entonces

$$\|V(x, y)\| \leq \beta \|x - F(y)\| + \beta \log \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \|y\| + \left\| \sum_n y_n v_n \right\|$$

$$\leq \beta \|x - F(y)\| + \beta \left(1 + \log \frac{\beta}{\alpha}\right) \|y\|, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty.$$

Es decir, hemos probado que  $\|V\| \leq \beta(1 + \log \beta/\alpha)$ .

Por otra parte, dado que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_n x_n v_n + \sum_n y_n F(v_n) - F\left(\sum_n y_n v_n\right) \right\| &= \left\| \sum_n x_n v_n + \sum_n y_n \log \frac{\|v_n\| |y_n|}{\|\sum_n y_n v_n\|} v_n \right\| \\ (\|v_n\| \geq \alpha) &\geq \alpha \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \log \frac{\|v_n\| |y_n|}{\|\sum_n y_n v_n\|} \right|^p \right]^{1/p} \\ &= \alpha \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \log \frac{\|v_n\| |y_n| \|y\|}{\|\sum_n y_n v_n\| \|y\|} \right|^p \right]^{1/p} \\ &= \alpha \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \left( \log \frac{|y_n|}{\|y\|} + \log \frac{\|v_n\| \|y\|}{\|\sum_n y_n v_n\|} \right) \right|^p \right]^{1/p} \\ (\text{Minkowski}) &\geq \alpha \left[ \sum_n \left| x_n + y_n \log \frac{|y_n|}{\|y\|} \right|^p \right]^{1/p} - \alpha \left[ \sum_n |y_n|^p \left| \log \frac{\|v_n\| \|y\|}{\|\sum_n y_n v_n\|} \right|^p \right]^{1/p} \\ (\alpha \leq \|v_n\| \leq \beta) &\geq \alpha \|x - F(y)\| - \alpha \log \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \|y\|, \end{aligned}$$

deducimos entonces que

$$\begin{aligned} \|V(x, y)\| &\geq \alpha \|x - F(y)\| - \alpha \log \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \|y\| + \left\| \sum_n y_n v_n \right\| \\ &\geq \alpha \|x - F(y)\| - \alpha \log \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) \|y\| + \alpha \|y\| \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty. \end{aligned}$$

Ahora, distinguiamos dos casos:

(i) si  $\|y\| \leq \frac{\|x - F(y)\|}{2 \log(\beta/\alpha)}$ , entonces

$$\|V(x, y)\| \geq \frac{\alpha}{2} \|x - F(y)\| + \alpha \|y\| \geq \frac{\alpha}{2} \|(x, y)\|;$$

(ii) si  $\|y\| \geq \frac{\|x - F(y)\|}{2 \log(\beta/\alpha)}$ , entonces

$$\|V(x, y)\| \geq \alpha \|y\| = \frac{\alpha}{2} \|y\| + \frac{\alpha}{2} \|y\| \geq \frac{\alpha \|x - F(y)\|}{4 \log(\beta/\alpha)} + \frac{\alpha}{2} \|y\| \geq C' \|(x, y)\|,$$

donde  $C' = \min\left\{\frac{\alpha}{4 \log(\beta/\alpha)}, \alpha/2\right\}$ .

Es decir,

$$\|V(x, y)\| \geq C' \|(x, y)\|, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^\infty \oplus \mathbb{R}^\infty.$$

Por tanto, si extendemos  $V$  a todo el espacio  $Z_p$  se conserva la norma (ver por ejemplo, [1, p. 446]) y obtenemos entonces el resultado enunciado.  $\square$

**Teorema 4.6.**

*Si  $T: Z_p \rightarrow Z_p$  no es estrictamente singular, entonces existe un subespacio  $W \subset Z_p$  tal que  $W$  es isomorfo a  $Z_p$  y  $T|_W$  es un isomorfismo.*

*Demostración.*

- 1.- En virtud de la Proposición 4.1, el espacio  $Z_p$  es  $\ell_p$ -hereditario. Por tanto, existe un subespacio  $Y \subset Z_p$  isomorfo a  $\ell_p$  y tal que  $\|Ty\| \geq \varepsilon > 0$  para todo  $y \in S_Y$ .

Sea entonces  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una base de Schauder de  $Y$  equivalente a la base usual de  $\ell_p$  (ver Proposición B.12). En tal caso, en virtud del Corolario 3.19 anterior,  $\|qu_n\| \rightarrow 0$  y  $\|qTu_n\| \rightarrow 0$ .

Luego, empleando el Teorema B.13 (Krein-Milman-Rutman) (y trabajando —de ser necesario— con una subsucesión  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ), podemos suponer que existen sucesiones básicas  $(v'_n)$  y  $(w'_n)$  en  $j(\ell^p)$  tales que

$$\|u_n - v'_n\| \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \|T(u_n) - w'_n\| \rightarrow 0.$$

Pasando nuevamente a subsucesiones de ser necesario, podemos suponer que existen sucesiones básicas bloque  $(v_n)$  y  $(w_n)$  en  $\ell^p$  tales que

$$\|u_n - j(v_n)\| \leq 2^{-n} \quad \text{y} \quad \|T(u_n) - j(w_n)\| \leq 2^{-n}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

- 2.- Para  $N \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, consideramos operadores  $A, B: Z_p \rightarrow Z_p$  tales que  $\|A\|, \|B\| \leq 1/2$ ,

$$A(jv_n) = u_n - jv_n \quad \text{y} \quad B(Tu_n) = jw_n - Tu_n, \quad \text{si } n \geq N.$$

Tales operadores pueden ser obtenidos aplicando el Teorema de Hahn-Banach a los coeficientes funcionales asociados a las bases  $(j(v_n))$  y  $(T(u_n))$ .

Sea  $S = (I + B)T(I + A)$ . Puesto que  $I + A$  e  $I + B$  son —en virtud del Teorema de Neumann [1, p. 446]— operadores invertibles, basta entonces probar que  $S$  es un isomorfismo en cierto subespacio isomorfo a  $Z_p$ .

- 3.- Definimos las aplicaciones  $V, W: Z_p \rightarrow Z_p$  dadas por

$$V(e_n, 0) = (v_n, 0) = j(v_n) \quad \text{y} \quad V(0, e_n) = (F(v_n), v_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

y

$$W(e_n, 0) = (w_n, 0) = j(w_n) \quad \text{y} \quad W(0, e_n) = (F(w_n), w_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En virtud del Teorema 4.5,  $V$  y  $W$  son isomorfismos, y dado que

$$\begin{aligned} S(jv_n) &= (I + B)T(I + A)(jv_n) = (I + B)T(jv_n + u_n - jv_n) \\ &= (I + B)(Tu_n) = Tu_n + jw_n - Tu_n = jw_n, \quad \text{para todo } n \geq N, \end{aligned}$$

deducimos entonces que  $(W - SV)$  es un operador compatible con la relación de equivalencia),

$$(W - SV)(e_n, 0) = (w_n, 0) - S(v_n, 0) = jw_n - S(jv_n) = 0, \quad \text{para todo } n \geq N.$$

Entonces, existe un subespacio  $Y \subset Z_p$  de codimensión finita tal que  $(W - SV)|_Y$  se factoriza por  $q|_Y$  (propiedad universal del cociente). Por tanto, al ser  $q$  estrictamente singular,  $W - SV$  es estrictamente singular (ver Nota 4.3).

No obstante, al ser  $W$  un isomorfismo, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que la restricción de  $SV$  a  $\overline{\text{span}}\{(e_j, 0), (0, e_j) : j \geq n_0\}$  es un isomorfismo.

Por tanto,  $S$  es un isomorfismo en  $V(\overline{\text{span}}\{(e_j, 0), (0, e_j) : j \geq n_0\})$ , que es isomorfo a  $Z_p$  y entonces,  $T = (I + B)^{-1}S(I + A)^{-1}$  es un isomorfismo en un subespacio isomorfo a  $Z_p$ .  $\square$

**Corolario 4.7.**

Todo subespacio infinito-dimensional complementado en  $Z_p$  contiene un subespacio isomorfo a  $Z_p$ .

*Demostración.*

Sea  $Y \subset Z_p$  un subespacio infinito dimensional complementado en  $Z_p$  y  $P: Z_p \rightarrow Z_p$  la proyección correspondiente (en particular,  $P(Z_p) = Y$ ).

Dado que la proyección  $P$  no es estrictamente singular, en virtud del Teorema 4.6 anterior, existe  $Z \subset Z_p$  subespacio isomorfo a  $Z_p$  tal que  $P|_Z$  es isomorfismo; luego debe ser  $P(Z) \subset Y$ .  $\square$

**Nota 4.8** (Corolario 4.7 & espacios de Banach primos).

Un espacio de Banach se dice *primo* (ver [33, p. 57]) si es isomorfo a sus subespacios complementados de dimensión infinita.

Los ejemplos básicos de espacios de Banach primos son los espacios de sucesiones  $\ell_p$ , con  $1 \leq p < \infty$ , y  $c_0$  (ver [1, p. 35]); a finales de los años 60, Lindenstrauss [32] demostró que el espacio  $\ell_\infty$  también es primo. No obstante, hasta los años 90 no se conocieron más ejemplos de espacios de Banach primos.

En 1997 Gowers y Maurey [20] propusieron un nuevo espacio de Banach primo “con pocos operadores”. Sin embargo, la construcción de dicho espacio dista mucho de ser natural. Es por ello que, teniendo en cuenta el Corolario 4.7 anterior, cobra especial interés saber si el espacio  $Z_2$  es primo.

Otra cuestión interesante y relacionada con la anterior, consiste en saber si  $Z_2$  es isomorfo a sus hiperplanos. Para más información sobre tal cuestión puede consultarse [26, 23, 12].

**Corolario 4.9.**

$Z_p$  no tiene subespacios complementados isomorfos a  $\ell_p$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $Z_p$  admite un subespacio complementado isomorfo a  $\ell_p$  —esto es, si  $Z_p \sim \ell_p \oplus Y$ —. En tal caso, el Corolario 4.7 anterior afirma que  $\ell_p$  contiene un subespacio isomorfo a  $Z_p$  y tendríamos que  $0 = Z_p/\ell^p \sim (\ell_p \oplus Y)/\ell_p \sim Y$ , hecho que contradice la suposición inicial.  $\square$

**Nota 4.10** (Sobre espacios de Banach que contienen a  $\ell_p$ ).

Saber si un espacio de Banach dado contiene o no copias de los espacios  $\ell_p$  es de gran importancia. Recordemos, por ejemplo, el resultado de Rosenthal (ver [44]) caracteriza los espacios de Banach que no contienen a  $\ell_1$  como aquellos en los que toda sucesión acotada admite una subsucesión débilmente de Cauchy.

Otro resultado importante debido a Kadets y Pełczyński (ver [24] y [1, p. 167]) es el siguiente: si  $X$  es un subespacio cerrado de dimensión infinita de  $L_p$  para algún  $2 < p < \infty$ , entonces equivalen:  $X$  es isomorfo a un espacio de Hilbert complementado en  $L_p$  y  $\ell_p$  no pueda embeberse en  $X$ .

Cabe señalar que un problema clásico de la teoría de espacios de Banach fue saber si existe algún espacio de Banach reflexivo sin copias de los espacios  $\ell_p$  ni  $c_0$ . Tal cuestión fue resuelta afirmativamente por Tsirelson [47] en 1974.

Para conocer más sobre el alcance y la importancia del trabajo de Tsirelson puede consultarse la monografía de Casazza y Shura [11], donde ya en el prefacio mencionan:

“His example opened a Pandora’s box of pathological variations, and has had a tremendous effect upon the study of Banach spaces”.

**Corolario 4.11.**  $Z_2$  no puede embeberse en ningún espacio  $L_p(0, 1)$  para  $1 \leq p < \infty$ .

*Demostración.*

Supongamos que  $Z_2 \subset L_p(0, 1)$  para cierto  $p > 2$ . En tal caso, dado que todo espacio de Hilbert contenido en  $L_p(0, 1)$  es complementado en  $L_p(0, 1)$  —resultado de Kadets & Pełczyński mencionado anteriormente—, tendríamos entonces que  $\ell^2$  es complementado en  $Z_2$ , contradiciendo así la tesis del Corolario 4.9.

Supongamos que  $Z_2 \subset L_p(0, 1)$  para cierto  $p \in [1, 2]$ . En tal caso, en virtud de un resultado de Rosenthal [43], podemos asumir que  $Z_2 \subset L_p(0, 1)$  para cierto  $p \in (1, 2]$ . Ahora, un resultado de Pełczyński y Rosenthal [37] nos permite afirmar que  $Z_2$  contiene un subespacio de Hilbert complementado, lo cual contradice nuevamente la tesis del Corolario 4.9.  $\square$

**Corolario 4.12.**

$Z_p$  no tiene subespacios complementados de dimensión infinita con base incondicional.

*Demostración.*

Supongamos que  $Z_p$  admite un subespacio  $Y$  complementado de dimensión infinita con base incondicional  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . En tal caso, en virtud del Teorema 3.18 anterior, existe una subsucesión  $(e_{i_k})_{k \in \mathbb{N}}$  equivalente a la base canónica de  $\ell_p$  o  $\ell_{f,p}$ .

Además, dado que  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es incondicional,  $\overline{\text{span}} \{e_{i_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset Z_p$  es complementado en  $Y$  (ver [1, p. 54]) y entonces, también es complementado en  $Z_p$ . Dado que el espacio de Orlicz  $\ell_{f,p}$  contiene un subespacio complementado isomorfo a  $\ell_p$  (ver [33, p. 157]), obtenemos en ambos casos una contradicción con la tesis del Corolario 4.9.  $\square$

## 4.2. Operadores en el espacio $Z_2$

El espacio  $Z_2$  es el ejemplo fundamental de suma torcida de espacios de Hilbert que aparece en el artículo original de Kalton y Peck [27]. Obviamente, constituye una de las soluciones del *problema de Palais* que mencionábamos en la introducción del Capítulo 1. Es más,  $Z_2$  es una “solución extrema” para dicho problema (véase [27, p. 24-26] o [26, p. 109-110] para entender a qué nos referimos con “extrema”) y tiene gran relevancia dentro de la teoría de espacios de Banach. El artículo [12] da cuenta de ésto último y en él su autor propone un programa de clasificación de las sumas torcidas de espacios de Hilbert.

Con el objetivo de aproximarnos a tal programa de clasificación, en esta sección estudiaremos brevemente el espacio de operadores en  $\mathcal{B}(Z_2)$ .

A diferencia de lo visto en el Teorema 4.6 anterior —donde demostramos que todo operador  $T : Z_p \rightarrow Z_p$  es estrictamente singular o, en caso contrario, un isomorfismo sobre alguna copia de  $Z_p$ —, para  $p = 2$  tenemos un resultado aún más fuerte (ver Teorema 4.19 siguiente): para todo espacio de Banach  $X$ , todo operador  $T : Z_2 \rightarrow X$  es, o bien estrictamente singular, o bien un isomorfismo sobre una copia complementada de  $Z_2$ .

La demostración original de dicho resultado se encuentra en [26]. No obstante, a continuación seguiremos el esquema de [10], donde los autores definen la siguiente versión “local” de la aplicación de Kalton-Peck.

**Definición 4.13.** Dada una sucesión bloque  $(u_n)$  de elementos con soportes disjuntos consecutivos en  $\ell_2$ , sea  $U = [u_n] = \overline{\text{span}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ . En tal caso, se define la aplicación de *Kalton-Peck relativa a  $U$*  como

$$\text{KP}_U(u) = - \sum_n \lambda_n \log \left( \frac{|\lambda_n|}{\|u\|} \right) u_n, \quad \text{para cada } u = \sum_n \lambda_n u_n \in U \text{ con soporte finito.}$$

**Nota 4.14.** Si  $\|u\| = 1$  se tiene que

$$\begin{aligned} \text{KP}_U(u) - \text{KP}(u) &= - \sum_n \lambda_n u_n \log |\lambda_n| + \sum_n \lambda_n u_n \log |\lambda_n u_n| \\ &= \sum_n \lambda_n u_n \log |u_n| = - \sum_n \lambda_n \text{KP}(u_n) \end{aligned}$$

Ya probamos que  $Z_2$  es reflexivo y que su dual es proyectivamente equivalente al propio  $Z_2$ ; en particular,  $Z_2$  es isomorfo a  $Z_2^*$ . La siguiente proposición, cuya demostración puede consultarse en [10], da un isomorfismo explícito entre ambos espacios.

**Proposición 4.15** (Isomorfismo entre  $Z_2$  y  $Z_2^*$ ).

Consideramos la forma bilineal antisimétrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle : Z_2 \times Z_2 \rightarrow \mathbb{R}$  que asigna a cada  $((y, x), (y', x')) \in Z_2 \times Z_2$  el número real

$$\langle (y, x), (y', x') \rangle = \langle y, x' \rangle_{\ell_2} - \langle x, y' \rangle_{\ell_2}.$$

En tal caso, la aplicación  $D : Z_2 \rightarrow Z_2^*$  definida, para cada  $a \in Z_2$ , como

$$[D(a)](b) = \langle a, b \rangle, \quad \text{para cada } b \in Z_2,$$

es un isomorfismo.

En la siguiente definición se introducen operadores análogos a los dados en el Teorema 4.5 anterior, adaptados ahora para el caso de  $Z_2$ .

Sea  $(u_n)$  una sucesión bloque normalizada de elementos con soportes disjuntos y consecutivos de  $\ell_2$ .

**Definición 4.16.** El operador bloque asociado a  $U$  es la aplicación  $T_U : Z_2 \rightarrow Z_2$  dado por

$$T_U(e_j, 0) = (u_j, 0) \quad \text{y} \quad T_U(0, e_j) = (\text{KP}(u_j), u_j),$$

donde  $\text{KP}$  es la aplicación quasi-lineal de Kalton-Peck.

**Proposición 4.17.** El operador bloque  $T_U$  dado en la Definición 4.16 es una isometría (no necesariamente sobreyectiva) y la imagen  $T_U(Z_2)$  es un subespacio complementado isomorfo a  $Z_2$ .

*Demostración.*

Dado  $(y, x) \in Z_2$ , si  $y = \sum y_i e_i$  y  $x = \sum x_j e_j$  son sucesiones con soporte finito, entonces  $T_U(y, x) = \left( \sum y_i u_i + \sum x_j \text{KP}(u_j), \sum x_j u_j \right)$ ; luego, empleando el cálculo realizado en la Nota 4.14 anterior, que  $(u_n)$  es una sucesión bloque normalizada y que  $x$  e  $y$  tienen soporte finito, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T_U(y, x)\| &= \left\| \left( \sum y_i u_i + \sum x_j \text{KP}(u_j), \sum x_j u_j \right) \right\| \\ &= \left\| \sum y_i u_i + \sum x_j \text{KP}(u_j) - \text{KP} \left( \sum x_j u_j \right) \right\| + \left\| \sum x_j u_j \right\| \\ &= \left\| \sum y_i u_i - \text{KP}_U \left( \sum x_j u_j \right) \right\| + \left\| \sum x_j e_j \right\| \\ &= \left\| \sum y_i e_i - \text{KP} \left( \sum x_j e_j \right) \right\| + \left\| \sum x_j e_j \right\| \\ &= \|(y, x)\|. \end{aligned}$$

Además,  $T_U(Z_2)$  es una copia isomorfa de  $Z_2$  complementada en el propio  $Z_2$ . En efecto, si tenemos en cuenta el diagrama —donde  $D : Z_2 \rightarrow Z_2^*$  es el isomorfismo dado en la Proposición 4.15—

$$\begin{array}{ccc} Z_2 & \xrightarrow{T_U} & Z_2 \\ D \downarrow & & \downarrow D \\ Z_2^* & \xleftarrow{T_U^*} & Z_2^* \end{array}$$

se sigue que  $D = T_U^* D T_U$  ya que

$$\begin{aligned} T_U^* D T_U(e_j, 0)(y, x) &= T_U^* D(u_j, 0)(y, x) = D(u_j, 0)T_U(y, x) \\ &= \langle u_j, \sum_i x_i u_i \rangle = x_j = \langle e_j, x \rangle \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_U^* D T_U(0, e_j)(y, x) &= T_U^* D(\text{KP}(u_j), u_j)(y, x) = D(\text{KP}(u_j), u_j)T_U(y, x) \\ &= D(\text{KP}(u_j), u_j) \left( \sum y_i u_i + \sum x_i \text{KP}(u_i), \sum x_i u_i \right) \\ &= \langle \text{KP}(u_j), \sum x_i u_i \rangle - \langle u_j, \sum y_i u_i + \sum x_i \text{KP}(u_i) \rangle \end{aligned}$$

$$(\text{KP}(u_j) = 0) = -y_j.$$

De esta forma,  $T_U D^{-1} T_U^* D T_U D^{-1} T_U^* D = T_U D^{-1} D D^{-1} T_U^* D = T_U D^{-1} T_U^* D$  da lugar a una proyección de  $Z_2$  en  $T_U(Z_2)$ .  $\square$

La siguiente proposición afirma que el carácter estrictamente singular de un operador de  $Z_2$  sólo depende de su comportamiento en el subespacio  $\ell_2$ .

**Proposición 4.18.** *Un operador  $\tau \in \mathcal{B}(Z_2, X)$  es estrictamente singular si y sólo si su restricción  $\tau|_{\ell_2}$  es estrictamente singular.*

*Demostración.*

Supongamos que  $\tau|_{\ell_2}$  es estrictamente singular. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \xrightarrow{j} & Z_2 & \xrightarrow{\rho} & \ell_2 \longrightarrow 0 \\ & & \tau j \downarrow & & & & \\ & & \tau(\ell_2) & & & & \end{array}$$

Ahora bien, si denotamos por  $PO$  el push-out generado por los morfismos  $j : \ell_2 \rightarrow Z_2$  y  $\tau j : \ell_2 \rightarrow \tau(\ell_2)$  obtenemos una sucesión exacta corta  $0 \rightarrow \tau(\ell_2) \rightarrow PO \rightarrow \ell_2 \rightarrow 0$  (ver [13, 1.3.a]), lo cual completa el diagrama a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \xrightarrow{j} & Z_2 & \xrightarrow{\rho} & \ell_2 \longrightarrow 0 \\ & & \tau j \downarrow & & \downarrow (\tau j)' & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \tau(\ell_2) & \longrightarrow & PO & \longrightarrow & \ell_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

En virtud de la Proposición 4.4, la aplicación cociente es estrictamente singular. Por hipótesis,  $\tau j$  también lo es; luego, en virtud de [9, Lema 3],  $(\tau j)'$  es también estrictamente singular.

Así, como  $\tau j : \ell_2 \hookrightarrow X$  y  $\tau : Z_2 \rightarrow X$ , la propiedad universal del push-out garantiza que existe un operador  $\alpha : PO \rightarrow X$  tal que  $\tau = \alpha(\tau j)'$ , por lo que  $\tau$  es estrictamente singular.  $\square$

Finalmente ya estamos en condiciones de enunciar y probar el resultado prometido.

**Teorema 4.19.** *Todo operador  $\tau : Z_2 \rightarrow X$  es, o bien estrictamente singular, o bien un isomorfismo sobre una copia complementada de  $Z_2$ .*

*Demostración.*

Consideremos el siguiente diagrama de push-out:

$$\begin{array}{ccccccc} \ell_2 & \xlongequal{\quad} & \ell_2 & & & & \\ \downarrow j & & \downarrow \bar{j} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_2 & \xrightarrow{(\tau, 1)} & X \oplus Z_2 & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \\ \downarrow \rho & & \downarrow Q & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \ell_2 & \longrightarrow & PO & \longrightarrow & X \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dado que  $Q(\tau, 1)(x) = Q\tau(x) + Q(0, x)$ , la aplicación  $Q(\tau, 1)$  es estrictamente singular —si  $Q(\tau, 1)$  no lo fuera, contradiría que  $\rho$  es estrictamente singular al ser el diagrama conmutativo—.

Supongamos pues que  $\tau$  no es estrictamente singular; en virtud de la Proposición 4.18,  $\tau|_{\ell_2}$  no puede ser estrictamente singular, por lo que existe alguna sucesión bloque  $[w_n]$  en  $\ell_2$  generando un subespacio  $W$  en el que  $\tau|_W$  es un isomorfismo.

Supongamos primero que  $W = \ell_2$ ; en tal caso, puesto que  $\tau|_{\ell_2}$  es un isomorfismo —y podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\|\tau^{-1}\| \leq 1$ , pues en otra situación normalizamos—, la aplicación  $x \mapsto Q(0, x)$  también es un isomorfismo. En efecto, ya que  $\bar{j}(y) = (\tau(y), y)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \|Q((0, x))\| &= \inf_{y \in \ell_2} \|(0, x) - \bar{j}(y)\| = \inf_{y \in \ell_2} \|(0, x) - (\tau(y), y)\| \\ &= \inf_{y \in \ell_2} \|(-\tau(y), x - y)\| = \inf_{y \in \ell_2} \{\|\tau(y)\| + \|x - y\|\} \\ &\geq \|\tau^{-1}\| \|y\| + \|x\| - \|y\| \geq \|\tau^{-1}\| \|x\| + (\|\tau^{-1}\| - 1)\|y\| \\ &\geq \|\tau^{-1}\| \|x\|. \end{aligned}$$

Por tanto, como  $Q(\tau, 1)$  es estrictamente singular y  $Q(0, x)$  es isomorfismo, forzosa-mente  $Q\tau$  ha de ser un isomorfismo en un espacio de  $Z_2$  de codimensión finita (ver [33, 2.c.10]). Así pues,  $\tau$  es un isomorfismo en un subespacio de codimensión finita en virtud del Corolario 4.7.

Si suponemos ahora que  $W = [w_n]$  no es todo  $\ell_2$ , trabajamos con el operador  $\tau T_W$ , el cual es un isomorfismo en el propio  $\ell_2$ . Concluimos nuevamente que  $\tau$  es un isomorfismo sobre  $T_W(Z_2)$ , que es una copia complementada de  $Z_2$  dentro de  $Z_2$  en virtud de la Proposición 4.17.  $\square$

Para terminar esta sección, mostramos un resultado que caracteriza los operadores de  $Z_2$  que admiten una representación matricial sencilla. Dicho resultado puede consultarse en [6], donde los autores lo emplean para estudiar la estructura local de  $Z_2$ .

**Teorema 4.20** (Operadores “sencillos” en  $Z_2$ ).

Sea  $A$  la matriz  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ . Entonces la aplicación  $T$  dada por

$$T(x_n e_n, y_n h_n) = ((\alpha x_n + \beta y_n) e_n, (\gamma x_n + \delta y_n) h_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

se extiende a un operador lineal y acotado en  $Z_2$  si y sólo si  $\alpha = \delta$  y  $\gamma = 0$ .

*Demostración.*

Que la aplicación dada por

$$T(x_n e_n, y_n h_n) = ((\alpha x_n + \beta y_n) e_n, \alpha y_n h_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N},$$

define un operador en  $Z_2$  es claro. En efecto, pues

$$\begin{aligned} T((x_n + x'_n) e_n, (y_n + y'_n) h_n) &= \left( (\alpha(x_n + x'_n) + \beta(y_n + y'_n)) e_n, (\alpha(y_n + y'_n)) h_n \right) \\ &= \left( (\alpha x_n + \beta y_n) e_n + (\alpha x'_n + \beta y'_n) e_n, (\alpha y_n) h_n + (\alpha y'_n) h_n \right) \\ &= T(x_n e_n, y_n h_n) + T(x'_n e_n, y'_n h_n). \end{aligned}$$

Haciendo un cálculo análogo para el producto por escalar se obtiene que  $T$  es lineal; además es acotada ya que si expresamos  $x = \sum_n x_n e_n$  y  $y = \sum_n y_n h_n$  tenemos que

$$\begin{aligned} \|(\alpha x + \beta y, \alpha y)\| &= \|(\alpha x, \alpha y) + (\beta y, 0)\| \leq C[|\alpha|\|(x, y)\| + |\beta|\|(y, 0)\|] \\ &\leq C \max\{|\alpha|, |\beta|\} [\|(x, y)\| + \|(y, 0)\|] \\ &\leq 2C \max\{|\alpha|, |\beta|\} \|(x, y)\|. \end{aligned}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $u_n = n^{-1/2}(e_1 + \cdots + e_n, 0) \in Z_2$ . En tal caso, tenemos que

$$\|u_n\| = n^{-1/2} \|e_1 + \cdots + e_n\| = 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sin embargo, tal y como probaremos a continuación,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n\| = \infty \quad \text{si } \gamma \neq 0.$$

Inicialmente, observemos que

$$\begin{aligned} T(u_n) &= T(n^{-1/2}(e_1 + \cdots + e_n, 0)) = n^{-1/2}T(e_1 + \cdots + e_n, 0) \\ &= n^{-1/2}(\alpha(e_1 + \cdots + e_n), \gamma(e_1 + \cdots + e_n)), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así pues, dado que  $\|(\alpha(e_1 + \cdots + e_n), \gamma(e_1 + \cdots + e_n))\| > 0$ , existe  $c > 0$  tal que

$$\|(\alpha(e_1 + \cdots + e_n), \gamma(e_1 + \cdots + e_n))\| \geq c \left[ \|(\alpha(e_1 + \cdots + e_n), 0)\| + \|(0, \gamma(e_1 + \cdots + e_n))\| \right]$$

y en tal caso,

$$\|(\alpha(e_1 + \cdots + e_n), \gamma(e_1 + \cdots + e_n))\| \geq c|\alpha|\sqrt{n} + c|\gamma|(n \log \sqrt{n} + \sqrt{n}).$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c|\alpha|\sqrt{n} + c|\gamma|(n \log \sqrt{n} + \sqrt{n})}{\sqrt{n}} \quad (4.1)$$

Con lo cual, tomando  $n \rightarrow \infty$  en (4.1) tenemos que  $\gamma = 0$ . Si ahora  $\alpha \neq \delta$ , tomamos  $u_n = n^{-1/2}((\log(\sqrt{n})) \sum_{k=1}^n e_k, \sum_{k=1}^n h_k)$ . Luego, análogamente se tiene que  $\|u_n\| = 1$  y existe  $C > 0$  tal que  $\|T(u_n)\| \geq C \log(n)$ , lo cual impide nuevamente que  $T$  sea acotada.  $\square$



# Anexos



# Anexo A

En este primer anexo recordamos algunas definiciones básicas relacionadas con espacios vectoriales topológicos. Nuestro objetivo es presentar el concepto de espacio quasi-Banach así como algunos resultados elementales. Para ello hemos seguido el enfoque de [28].

## A.1. Espacios vectoriales topológicos

**Definición A.1** (espacio vectorial topológico).

Un *espacio vectorial topológico*  $X$  sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  (consideraremos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) es un espacio vectorial  $X$  dotado de una topología  $\tau$  para la que las aplicaciones suma (de vectores) y producto (de un escalar por un vector) son continuas.

**Nota A.2** (sobre la topología de un EVT).

La topología  $\tau$  de un espacio vectorial topológico  $X$  queda definida a partir de una base local  $\mathcal{U}$  de  $0 \in X$ . En tal caso, dicha base local  $\mathcal{U}$  debe satisfacer las siguientes propiedades:

- (i) dado  $U \in \mathcal{U}$ , existe  $V \in \mathcal{U}$  tal que  $V + V = \{v_1 + v_2 : v_1, v_2 \in V\} \subset U$ ;
- (ii) dado  $U \in \mathcal{U}$ , existe  $V \in \mathcal{U}$  tal que  $\alpha V \subset U$  para todo  $\alpha \in \mathbb{K}$  con  $|\alpha| \leq 1$ ;
- (iii) dados  $U \in \mathcal{U}$  y  $x \in X$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in nU$ .

Recíprocamente, dada una familia de conjuntos  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  satisfaciendo (i) – (iii), existe una estructura de espacio vectorial topológico sobre  $X$  que tiene a  $\mathcal{U}$  como base local de  $0 \in X$ .

**Definición A.3** (propiedades geométricas de un EVT).

Sea  $(X, \tau)$  un espacio vectorial topológico.

- (i)  $(X, \tau)$  es *Hausdorff* si para todo par de vectores  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  existen dos conjuntos abiertos  $U_1$  y  $U_2$  de modo que  $x_1 \in U_1$ ,  $x_2 \in U_2$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .  
Es relativamente fácil probar que  $(X, \tau)$  es Hausdorff si y sólo si  $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$ .

(ii)  $(X, \tau)$  es *localmente convexo* si admite una base local  $\mathcal{U}$  formada por conjuntos convexos. Un conjunto  $C \subset X$  se dice *convexo* si  $\lambda C + (1 - \lambda)C \subset C$  para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

En tal caso, es posible escoger una base local  $\mathcal{U}$  formada por conjuntos *absolutamente convexos*. Un conjunto  $C \subset X$  se dice *absolutamente convexo* si  $\lambda C + \mu C \subset C$  para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  con  $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ .

(iii)  $(X, \tau)$  es *localmente acotado* si  $0 \in X$  admite un entorno acotado. Un conjunto  $B \subset X$  se dice *acotado* si dado un entorno  $U$  de  $0 \in X$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $B \subset nU$ .

Observemos que si  $B_i \subset X$  con  $1 \leq i \leq n$  son conjuntos acotados, entonces  $B_1 + \dots + B_n$  también es un conjunto acotado.

(iv) Para  $0 < p \leq 1$ , un conjunto  $C \subset X$  se dice *p-convexo* si  $\lambda C + \mu C \subset C$  para todo  $\lambda, \mu \geq 0$  tales que  $\lambda^p + \mu^p = 1$ .

(v) Para  $0 < p \leq 1$ , un conjunto  $C \subset X$  se dice *absolutamente p-convexo* si  $\lambda C + \mu C \subset C$  para todo  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  tales que  $|\lambda|^p + |\mu|^p = 1$ .

## A.2. Espacios vectoriales quasi-normados

Sea  $X$  un espacio vectorial.

**Definición A.4** ( $\Delta$ -norma).

Una  $\Delta$ -norma en  $X$  es una aplicación  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

(i)  $\|x\| > 0$  para todo  $x \in X$  con  $x \neq 0$ ,

(ii)  $\|\alpha x\| \leq \|x\|$  para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$  con  $|\alpha| \leq 1$ ,

(iii)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\alpha x\| = 0$  para todo  $x \in X$ ,

(iv) existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|x + y\| \leq C \max\{\|x\|, \|y\|\}$  para todo  $x, y \in X$ .

**Nota A.5** ( $\Delta$ -norma & EVT métricos).

Toda  $\Delta$ -norma  $\|\cdot\|$  define una estructura de espacio vectorial topológico metrizable sobre  $X$  para la que una base local de  $0 \in X$  viene dada por

$$U_n = \{x \in X : \|x\| < 1/n\}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

En tal caso,  $x_n \rightarrow x$  si y sólo si  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

Si  $(X, \tau)$  es un espacio topológico que admite una base local numerable  $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$  para la que:  $\cap U_n = \{0\}$ ,  $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$  y  $U_n$  es un conjunto equilibrado —i.e.  $\lambda U_n \subset U_n$  si  $|\lambda| \leq 1$ — para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces la aplicación  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|x\| = \sup\{2^{-n} : x \notin U_n\}, \quad \text{para cada } x \in U_n,$$

es una  $\Delta$ -norma en  $X$  que también induce sobre  $X$  la topología  $\tau$ .

**Definición A.6** ( $F$ -norma, con “ $F$ ” de Fréchet).

Una  $F$ -norma en  $X$  es una aplicación  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- (i)  $\|x\| > 0$  para todo  $x \in X$  con  $x \neq 0$ ,
- (ii)  $\|\alpha x\| \leq \|x\|$  para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$  con  $|\alpha| \leq 1$ ,
- (iii)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\alpha x\| = 0$  para todo  $x \in X$ ,
- (iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in X$ .

**Nota A.7** ( $F$ -norma & EVT métricos con métrica invariante).

Toda  $F$ -norma es una  $\Delta$ -norma. Además, si  $\|\cdot\|$  es una  $F$ -norma en  $X$ , entonces

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad \text{para cada } x, y \in X,$$

define una distancia invariante (por traslaciones) en  $X$  que induce la misma topología que la  $F$ -norma  $\|\cdot\|$  sobre  $X$ .

**Teorema A.8** ( $\Delta$ -norma &  $F$ -norma).

Sea  $\|\cdot\|$  una  $\Delta$ -norma en  $X$ . En tal caso, si escogemos  $p \in (0, 1)$  tal que  $2^{1/p} = C$ , entonces

$$\|x\| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p : \sum_{i=1}^n x_i = x \right\}, \quad \text{para cada } x \in X,$$

define una  $F$ -norma que induce sobre  $X$  la misma topología que la  $\Delta$ -norma  $\|\cdot\|$ .

*Comentario sobre la demostración.*

Por claridad en la exposición, indicaremos los detalles de la prueba al final de la sección. Concretamente, mostraremos que  $4^{-1}\|x\|^p \leq \|x\| \leq \|x\|^p$  para todo  $x \in X$ .

**Definición A.9** (quasi-norma).

Una quasi-norma en  $X$  es una función  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

- (i)  $\|x\| > 0$  para todo  $x \in X$  con  $x \neq 0$ ,
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  para todo  $x \in X$  y  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,
- (iii) existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|x + y\| \leq C \max\{\|x\|, \|y\|\}$  para todo  $x, y \in X$ .

**Nota A.10** (quasi-norma & EVT localmente acotados I).

Toda quasi-norma es una  $\Delta$ -norma.

Sea  $(X, \tau)$  es un espacio vectorial topológico localmente acotado. Entonces, si  $B \subset X$  es un entorno acotado de  $0 \in X$ , la familia  $\{n^{-1}B: n \in \mathbb{N}\}$  forma una base local numerable de  $0 \in X$ . Luego  $(X, \tau)$  es metrizable. Además, dado que  $B + B$  es acotado, existe  $\rho \geq 1$  tal que  $B + B \subset \rho B$ . En tal caso, el *funcional de Minkowski* asociado a  $B$ , que viene dado por

$$\|x\| = \inf\{\lambda: \lambda^{-1}x \in B\}, \quad \text{para cada } x \in X, \tag{A.1}$$

define una quasi-norma en  $X$  para la que

$$\|x + y\| \leq \rho \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Recíprocamente, la topología definida en  $X$  por una quasi-norma  $\|\cdot\|$  da lugar una estructura de espacio vectorial topológico localmente acotado.

**Nota A.11** (quasi-normas & espacios vectoriales topológicos localmente acotados II).

Si  $(X, \tau)$  es un espacio vectorial topológico localmente acotado tal que  $0 \in X$  admite un entorno acotado y absolutamente  $p$ -convexo, la quasi-norma dada por (A.1) satisface que

$$\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p, \quad \text{para todo } x, y \in X. \quad (\text{A.2})$$

Recíprocamente, si  $\|\cdot\|$  es una quasi-norma en  $X$  que satisface (A.2), la bola unidad  $B_X(0, 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$  es un conjunto acotado y absolutamente  $p$ -convexo.

Toda quasi-norma  $\|\cdot\|$  satisfaciendo (A.2) se dice  $p$ -subaditiva. En tal caso, diremos que  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio *localmente  $p$ -convexo* (o simplemente,  $p$ -convexo).

### A.2.1. Espacios quasi-Banach y $p$ -convexidad

De los comentarios anteriores se extrae que un espacio vectorial dotado de una quasi-norma es lo mismo que un espacio vectorial topológico localmente acotado y metrizable. Si pedimos completitud respecto de tal métrica, obtenemos la definición de espacio quasi-Banach:

**Definición A.12** (espacio quasi-Banach).

Un espacio *quasi-Banach* es un espacio vectorial topológico  $X$  localmente acotado y completo.

**Ejemplo A.13** (espacios quasi-Banach).

- (i) Todo espacio de Banach es un ejemplo de espacio quasi-Banach. En efecto, pues toda norma es una quasi-norma.
- (ii) Para  $p \in (0, 1)$ , sea  $\ell_p$  el espacio vectorial formado por todas las sucesiones de escalares  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para las que

$$\|a\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

En tal caso, de la desigualdad

$$\begin{aligned} \|a + b\|_p &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{1/p} \\ &= (\|a\|_p^p + \|b\|_p^p)^{1/p} \leq 2^{1/p} \max\{\|a\|_p, \|b\|_p\}, \quad \text{para todo } a, b \in \ell_p, \end{aligned}$$

se sigue que  $\|\cdot\|_p$  define una quasi-norma en  $\ell_p$ .

Además, dado que los espacios  $\ell_p$  son completos —se demuestra de la misma forma que para  $p \geq 1$ —, deducimos entonces que para cada  $0 < p < 1$ ,  $\ell_p$  es un espacio quasi-Banach.

- (iii) Para  $p \in (0, 1)$ , sea  $L_p(0, 1)$  el espacio formado por todas las funciones Lebesgue-medibles  $f$  para las que

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

La completitud de los espacios  $(L_p(0, 1), \|\cdot\|_p)$  con  $0 < p < 1$  se prueba de forma análoga al caso  $p \geq 1$ ; luego  $L_p(0, 1)$  es un espacio quasi-Banach para cada  $0 < p < 1$ . La diferencia principal entre los espacios  $L_p$  y  $\ell_p$  radica en que, al ser la medida usual de Lebesgue en el intervalo  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  no atómica, los espacios de funciones tienen dual trivial —esto es,  $L_p(0, 1)^* = \{0\}$  para todo  $0 < p < 1$  (véase [14])—, mientras que  $(\ell_p)^* = \ell_\infty$  para todo  $0 < p < 1$  (ver [28, Capítulo 2]).

**Definición A.14** (espacio quasi-Banach  $p$ -convexo).

Un *espacio  $p$ -Banach* es un espacio quasi-Banach y  $p$ -convexo.

**Ejemplo A.15** (espacios  $p$ -Banach).

- (i) Para  $0 < p < 1$ , los espacios  $\ell_p$  y  $L_p(0, 1)$  son ejemplos de espacios  $p$ -Banach.
- (ii) Tal y como veremos más adelante (en el Corolario A.17), todo espacio quasi-Banach es  $p$ -Banach para cierto  $0 < p < 1$ .

El siguiente teorema es un resultado fundamental de la teoría geométrica de espacios vectoriales topológicos. Originalmente, fue probado por Aoki [2] y Rolewicz [42]; esencialmente, afirma que siempre que exista un entorno acotado del origen, existe un entorno  $p$ -convexo contenido en él para algún  $p > 0$ .

**Teorema A.16** (Aoki-Rolewicz).

Sea  $(X, \tau)$  un espacio vectorial topológico localmente acotado. En tal caso, existe  $p > 0$  tal que  $(X, \tau)$  es  $p$ -convexo.

Más exactamente, si  $B$  es un entorno acotado de  $0 \in X$  tal que  $B + B \subset \rho B$ , entonces  $X$  es  $p$ -convexo para  $p$  tal que  $2^{1/p} = \rho$ .

*Demostración.*

Por ser  $(X, \tau)$  un espacio vectorial topológico localmente acotado, existe —ver Nota A.10— una quasi-norma  $\|\cdot\|$  en  $X$  que define una topología equivalente a  $\tau$ . Además, en virtud ahora del Teorema A.8 anterior,

$$\|x\|_1 = \inf \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p} : \sum_{i=1}^n x_i = x \right\}, \quad \text{para cada } x \in X,$$

define una quasi-norma  $p$ -subaditiva en  $X$  equivalente a  $\|\cdot\|$  —pues  $4^{-1}\|x\|^p \leq \|x\|_1^p \leq \|x\|^p$ — y entonces —ver Nota A.11—  $(X, \tau)$  es un espacio vectorial topológico localmente  $p$ -convexo.  $\square$

**Corolario A.17.** *Todo espacio quasi-Banach es  $p$ -Banach para algún  $p > 0$ .*

**Nota A.18** (quasi-normas & módulos de concavidad).

La constante  $\rho$  del enunciado del Teorema A.16 anterior es tal que

$$\|x + y\| \leq \rho \max\{\|x\|, \|y\|\}, \quad \text{para todo } x, y \in X. \quad (\text{A.3})$$

Sin embargo, a la hora de trabajar con quasi-normas, es mucho más común considerar *módulos de concavidad*, que serían aquellas constantes  $k \in \mathbb{R}^+$  para las que

$$\|x + y\| \leq k(\|x\| + \|y\|), \quad \text{para todo } x, y \in X. \quad (\text{A.4})$$

Observemos que (A.3) implica (A.4) con  $k = \rho$ , mientras que (A.4) implica (A.3) con  $\rho = 2k$ .

Por tanto, el Teorema A.16 anterior afirma que si se cumple (A.3), podemos considerar una quasi-norma equivalente  $\|\cdot\|_1$  de modo que

$$\|x + y\|_1 \leq (\|x\|_1^p + \|y\|_1^p)^{1/p}, \quad \text{para todo } x, y \in X,$$

lo cual implica que

$$\|x + y\|_1 \leq 2^{1/p-1}(\|x\|_1 + \|y\|_1) = \frac{\rho}{2}(\|x\|_1 + \|y\|_1), \quad \text{para cada } x, y \in X.$$

Así pues, renormando, podemos considerar  $k = \rho/2$ .

Es decir, el Teorema A.16 (Aoki-Rolewicz) anterior afirma que si se cumple (A.4), entonces  $X$  es  $p$ -convexo para  $2^{1/p} = 2k$ , o equivalentemente, para  $k = 2^{1/p-1}$ .

**Lema A.19** (una desigualdad muy útil).

Si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio quasi-Banach, existen números positivos  $L$  y  $p$  tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \leq L \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}, \quad \text{para } x_i \in X \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

*Demostración.*

Sea  $\|\cdot\|$  la quasi-norma original de  $X$ ,

$$k = \inf\{c > 1: \|x + y\| \leq c(\|x\| + \|y\|) \text{ para todo } x, y \in X\}$$

y  $0 < p < 1$  tal que  $2^{1/p} = 2k$ . En tal caso, en virtud del Teorema A.16 anterior,

$$\|x\|_1 = \inf \left\{ \left( \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p} : x = \sum_{i=1}^n x_i \right\}, \quad \text{para cada } x \in X,$$

define una quasi-norma en  $X$  equivalente a  $\|\cdot\|$  satisfaciendo que

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^p \leq 4^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_1^p \leq 4^{-1} \sum_{i=1}^n \|x_i\|^p, \quad \text{para } x_i \in X \text{ con } 1 \leq i \leq n. \quad \square$$

*Demostración del Teorema A.8.*

Probaremos que

$$\frac{1}{4}\|x\|^p \leq \|x\| \leq \|x\|^p, \quad \text{para todo } x \in X. \quad (\text{A.5})$$

La segunda desigualdad de (A.5) es evidente a partir de la definición de  $\|\cdot\|$ . Por otra parte, la primera desigualdad será clara una vez tengamos probado que

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq 4^{1/p} (\|x_1\|^p + \cdots + \|x_n\|^p)^{1/p}. \quad (\text{A.6})$$

Para mostrar la veracidad de (A.6), comencemos observando que

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} C^k \|x_k\| \quad (\text{A.7})$$

y considerando la aplicación  $H: X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H(x) = \begin{cases} 2^{n/p}, & \text{si } 2^{(n-1)/p} < \|x\| \leq 2^{n/p}, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z},$$

para la que

$$\|x\| \leq H(x) \leq 2^{1/p}\|x\|, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Así pues, si probamos que

$$\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq 2^{1/p}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{1/p}, \quad (\text{A.8})$$

la desigualdad (A.6) será entonces obvia.

Para  $n = 1$ , la desigualdad (A.8) es trivial. Supongamos luego que (A.8) es cierta para  $m \in \mathbb{N}$  y consideremos  $x_1, \dots, x_{m+1} \in X$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\|x_i\| \geq \|x_{i+1}\|$  para cada  $1 \leq i \leq m$ . Distinguiremos dos casos.

Inicialmente, supongamos que  $H(x_i) \neq H(x_{i+1})$  para todo  $1 \leq i \leq m$ . En tal caso, teniendo en cuenta que  $H(x_i) \leq 2^{(1-i)/p}H(x_1)$ , concluimos que

$$\begin{aligned} C^i\|x_i\| &\leq C^iH(x_i) = 2^{i/p}H(x_i) \leq 2^{1/p}H(x_1) \\ &\leq 2^{1/p}(H(x_1)^p + \cdots + H(x_n)^p)^{1/p}, \quad \text{para cada } 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Luego (A.8) es consecuencia directa (A.7).

Si existe  $1 \leq j \leq m$  tal que  $H(x_j) = H(x_{j+1})$ , existe  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $2^{(r-1)/p} < \|x_{j+1}\| \leq \|x_j\| \leq 2^{r/p}$ ; luego  $\|x_j + x_{j+1}\| \leq C \max\{\|x_{j+1}\|, \|x_j\|\} = 2^{1/p}\|x_j\| \leq 2^{(r+1)/p}$  y entonces,

$$H(x_j + x_{j+1})^p \leq 2^{r+1} = H(x_j)^p + H(x_{j+1})^p. \quad (\text{A.9})$$

Por tanto, aplicando la hipótesis de inducción y teniendo en cuenta (A.9), concluimos finalmente que

$$\|x_1 + \cdots + x_{m+1}\|^p \leq 2 \left( \sum_{i \neq j, j+1} H(x_i)^p + H(x_j + x_{j+1})^p \right) \leq 2 \left( \sum_{i=1}^{m+1} H(x_i)^p \right). \quad \square$$

**Nota A.20** (sobre espacios métricos).

Un espacio vectorial topológico metrizable se dice que es un *F-espacio* si es completo para cierta (y entonces para toda) métrica invariante. Una importante resultado de V.L. Klee (ver [30]) afirma que todo espacio vectorial métrico completo puede ser metrizado mediante una métrica invariante, respondiendo así afirmativamente a una cuestión formulada por el propio S. Banach en [3, p. 141].

Todo espacio vectorial topológico metrizable  $X$  puede ser embebido como un subespacio denso de un *F-espacio*  $\tilde{X}$ . Además, el espacio  $\tilde{X}$  es único en el sentido de que no depende de la métrica (invariante) escogida en  $X$ .

Si  $N \subset X$  es un subespacio cerrado de un espacio vectorial topológico metrizable, entonces  $X/N$  también es metrizable. Además, si  $X$  es completo entonces  $X/N$  también es completo.

### A.3. El 3-Lema

El siguiente resultado es bien conocido y puede encontrarse en cualquier libro de álgebra homológica (véase, por ejemplo, [22]). Debido a su importancia a la hora de definir la equivalencia de sumas torcidas —Definición 1.2—, preferimos incluir aquí su demostración.

**Lema A.21** (el 3-lema).

Sea un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \\
 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

En tal caso, si  $\alpha$  y  $\beta$  son aplicaciones inyectivas, entonces  $\gamma$  es inyectiva; además, si  $\alpha$  y  $\beta$  son sobreyectivas,  $\gamma$  es sobreyectiva. Por tanto, si  $\alpha$  y  $\beta$  son isomorfismos, entonces  $\gamma$  también es un isomorfismo.

*Demostración.*

Veamos en primer lugar que  $\gamma$  es inyectiva. Si  $\gamma(b) = 0$  para algún  $b \in B$ , entonces —por la conmutatividad del diagrama—  $\beta(q_B(b)) = 0$ , donde  $q_B$  es la aplicación cociente. Puesto que  $\beta$  es inyectiva,  $q_B(b) = 0$  y  $b \in \ker(q_B)$ .

Como las filas del diagrama son exactas, existe  $a \in A$  tal que  $i_A(a) = b$ , siendo  $i_A$  la inclusión. Por conmutatividad,  $i_D(\alpha(a)) = \gamma(i_A(a)) = \gamma(b) = 0$ , por lo que  $a = 0$  al ser  $\alpha$  inyectiva. Luego,  $b = i_A(a) = 0$ .

Veamos ahora que  $\gamma$  es sobreyectiva. Para ello, sea  $e \in E$  arbitrario. Como  $\beta$  es sobreyectiva, existe  $c \in C$  tal que  $\beta(c) = q_E(e)$ . Luego, existe  $b \in B$  tal que  $\beta(q_B(b)) = q_E(e)$ . Por conmutatividad,  $q_E(\gamma(b) - e) = 0$ , por lo que existe  $d \in D$  tal que  $\gamma(b) - e = i_D(d)$ .

Dado que  $\alpha$  es sobreyectiva,  $d = \alpha(a)$  para algún  $a \in A$ . Luego,  $\gamma(i_A(a)) = i_D(\alpha(a)) = i_D(d) = \gamma(b) - e$ , por lo que  $e = \gamma(b - i_A(a))$ .  $\square$

# Anexo B

En este segundo anexo incluimos resultados relacionados con bases de Schauder y los espacios de Orlicz. Estos resultados son empleados en el Capítulo 3.

Para su elaboración hemos empleado las referencias [18, 33, 1].

## B.1. Bases de Schauder

### B.1.1. El concepto de Base de Schauder

**Definición B.1** (base de Schauder).

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado infinito dimensional sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión (ordenada) de vectores de  $X$ .

Se dice que  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una *base de Schauder* de  $X$  si:

para cada  $x \in X$  existe una única sucesión  $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$  tal que  $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ .

**Nota B.2.**

El concepto de base de Schauder es la generalización natural para espacios de Banach separables (ya que  $X = \overline{\text{span}}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ ) del concepto de base de Hilbert para espacios de Hilbert.

No obstante, a diferencia de lo que ocurre en el caso de éstos últimos —todo espacio de Hilbert admite una base de Hilbert—, tal y como demostró Enflo [16] en 1972, existen espacios de Banach separables que no admiten base de Schauder.

**Definición B.3** (conceptos asociados al de base de Schauder).

Sea  $X$  un espacio vectorial normado con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . En tal caso, definimos

(a) la *proyección natural*  $P_n: X \rightarrow X$  como la aplicación dada por

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X.$$

(b) la *norma*  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X.$$

(c) la constante de la base  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  como  $bc(e_i)_{i \in \mathbb{N}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| \in [1, +\infty)$  (ver Teorema B.9).

(d) el funcional biortogonal  $e_n^*: X \rightarrow \mathbb{K}$  como la aplicación dada por

$$e_n^*(x) = a_n, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X.$$

**Definición B.4** (tipos de bases).

Una base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de un espacio vectorial normado  $X$  se dice:

- (a) *normalizada* si  $\|e_i\| = 1$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ ;
- (b) *monótona* si  $bc(e_i)_{i \in \mathbb{N}} = 1$ , esto es, si  $\|P_n\| = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (c) *incondicional* si, para cada  $x \in X$ , la serie  $\sum_n e_n^*(x)e_n$  converge incondicionalmente, esto es, la serie  $\sum_n e_{\pi(n)}^*(x)e_{\pi(n)}$  converge para toda biyección  $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

**Lema B.5** (las proyecciones naturales).

(a) Sea  $X$  un espacio vectorial normado con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . En tal caso:

- (i)  $\dim P_n(X) = n$
- (ii)  $P_n P_m = P_m P_n = P_{\min\{m, n\}}$
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = x$  en  $(X, \|\cdot\|)$

(b) Si una sucesión de proyecciones lineales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio vectorial normado  $X$  satisface las propiedades (i), (ii) e (iii) anteriores, entonces  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión de las proyecciones naturales asociadas a cierta base de Schauder de  $X$ .

*Demostración.*

(a)

Por ser  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una base de Schauder,  $\{e_i: i \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto linealmente independiente; luego (i) es claro. La propiedad (iii) es una consecuencia directa de la definición de base de Schauder y (ii) es consecuencia directa de la definición de  $P_n$ .

(b)

Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , escogamos  $e_i \in P_i(X) \cap P_{i-1}^{-1}(0)$ . En tal caso, teniendo en cuenta que  $\dim P_i(X)/P_{i-1}(X) = 1$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , concluimos entonces que, dado  $x \in X$  (si  $P_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n x - P_0 x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (P_i x - P_{i-1} x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (P_i x - P_{i-1} x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i, \quad \text{donde } \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ para cada } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Además, la unicidad de la sucesión de coeficientes  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una consecuencia directa de que  $\alpha_i e_i = P_i(x) - P_{i-1}(x)$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  y de la propiedad (iii) del enunciado. Por lo tanto,  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una base de Schauder de  $X$  que tiene a  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  por sucesión de proyecciones naturales.  $\square$

**Lema B.6** (la norma  $\|\|\cdot\|\|$ ).

- (a) Si  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es base de Schauder de  $(X, \|\cdot\|)$ , entonces  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es base de Schauder de  $(X, \|\|\cdot\|\|)$ .
- (b) Las proyecciones naturales asociadas a  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  son uniformemente acotadas respecto de  $\|\|\cdot\|\|$ .

*Demostración.*

(a)

Probaremos que  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una base de Schauder de  $(X, \|\|\cdot\|\|)$  mostrando que la sucesión de proyecciones naturales  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisface las propiedades (i), (ii) e (iii) del Lema B.5 anterior. Las propiedades (i) y (ii) no dependen de la norma; luego tan sólo tenemos que probar (iii). No obstante, dado que

$$\|x - P_m x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n x - P_n P_m x\| = \sup_{n \geq m} \|P_n x - P_m x\|,$$

concluimos que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m x - x\| = 0$  para todo  $x \in X$ .

(b)

Para probar la acotación uniforme de las proyecciones naturales respecto de  $\|\|\cdot\|\|$ , basta observar que

$$\begin{aligned} \|P_m\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_m x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n P_m x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_n P_m x\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup \{ \|P_n P_m x\| : \sup_{i \in \mathbb{N}} \|P_i x\| \leq 1 \} \leq 1, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lema B.7** (la hipótesis de completitud).

Sea  $(X, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial normado con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de modo que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty.$$

En tal caso,  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es base de Schauder de la complección  $\hat{X}$  de  $X$ .

*Demostración.*

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $\hat{P}_n: \hat{X} \rightarrow \hat{X}$  la extensión de la proyección natural  $P_n$ . Dado que  $P_n(X)$  es de dimensión finita,  $P_n(X)$  es un conjunto cerrado en  $\hat{X}$  y entonces,  $\hat{P}_n(\hat{X}) \subset P_n(X)$ . Por lo tanto,  $P_n(X) = \hat{P}_n(\hat{X})$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A continuación, probaremos que las proyecciones  $(\hat{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfacen las propiedades (i), (ii) e (iii) del Lema B.5 anterior. En efecto, pues:

(i) es una consecuencia directa de que  $\hat{P}_n(\hat{X}) = P_n(X)$ :  $\dim \hat{P}_n(\hat{X}) = \dim P_n(X) = n$ ;

(ii) es una consecuencia de la continuidad de las proyecciones  $P_n$ :

$$\hat{P}_n \hat{P}_m(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_n \hat{P}_m(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_n P_m(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_{\min\{n,m\}}(x_i) = \hat{P}_{\min\{n,m\}}(x);$$

(iii) es una consecuencia de la acotación de la sucesión de números reales  $(\|P_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned} \|\hat{P}_n(\hat{x}) - \hat{x}\| &= \|\hat{P}_n(\hat{x}) - \hat{P}_n(x_i) + \hat{P}_n(x_i) - \hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{P}_n(\hat{x} - x_i)\| + \|\hat{P}_n x_i - \hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{P}_n\| \|\hat{x} - x_i\| + \|P_n x_i - \hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{P}_n\| \|\hat{x} - x_i\| + \|P_n x_i - x_i + x_i - \hat{x}\| \\ &\leq \|\hat{P}_n\| \|\hat{x} - x_i\| + \|P_n x_i - x_i\| + \|x_i - \hat{x}\| < \varepsilon \quad \text{para } n \gg 1. \end{aligned}$$

Además, dado que  $e_i \in P_i(X) \cap P_{i-1}^{-1}(0)$ , tenemos entonces que  $e_i \in \hat{P}_i(\hat{X}) \cap \hat{P}_{i-1}^{-1}(0)$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

Por tanto, en virtud del Lema B.5 anterior,  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es la sucesión de proyecciones naturales asociada a la base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  del espacio de Banach  $\hat{X}$ .  $\square$

**Proposición B.8** (equivalencia de las normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|$ ).

Si  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach con base de Schauder, las normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|$  son equivalentes.

*Demostración.*

Supongamos que  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach. En tal caso,  $I: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$  es una aplicación lineal, continua —pues  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|$ — e biyectiva entre dos espacios de Banach. Luego, en virtud del Teorema de la Aplicación Abierta, la aplicación  $I^{-1}$  también es continua; es decir,  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|$  son normas equivalentes en  $X$ . Basta entonces probar la completitud de  $(X, \|\cdot\|)$ .

Sea  $\hat{X}$  la complección de  $X$  respecto de  $\|\cdot\|$ ; veremos que  $\hat{X} \subset X$ . Para ello, comencemos indicando que, en virtud del Lema B.7 anterior,  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  también es base de Schauder de  $\hat{X}$ . Así pues, dado  $x \in \hat{X}$ , existe una única sucesión de escalares  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$  en  $(X, \|\cdot\|)$ . Teniendo en cuenta que  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|$ , concluimos que  $s_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  es una sucesión de Cauchy en  $(X, \|\cdot\|)$ ; luego  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = x'$  en  $(X, \|\cdot\|)$ . Por tanto, razonando como en el Lema B.6 anterior, concluimos que  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = x'$  en  $(X, \|\cdot\|)$  y así —por unicidad del límite—  $x = x' \in X$ .  $\square$

**Teorema B.9** (S. Banach).

Sea  $X$  un espacio de Banach con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . En tal caso,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty \quad y \quad e_j^* \in X^* \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N}.$$

*Demostración.*

Basta tener en cuenta que  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|$  son equivalentes y que  $\|P_n\| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por otra parte, dado que  $\|P_j x - P_{j-1} x\| = \|e_j^*(x) e_j\| = |e_j^*(x)| \|e_j\|$ ,

$$\|e_j^*\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |e_j^*(x)| = \|e_j\|^{-1} \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_j(x) - P_{j-1}(x)\| \leq 2 \|e_j\|^{-1} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|$$

y entonces,

$$\|e_j\| \|e_j^*\| \leq 2 \text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \quad \square$$

## B.1.2. Sucesiones básicas

**Definición B.10** (sucesión básica).

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios de Banach.

- (a) Una sucesión  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$  se dice *sucesión básica* si es base de Schauder de  $\overline{\text{span}} \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ .
- (b) Dos sucesiones básicas  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$  y  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$  se dicen *equivalentes* si

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X \iff \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i \in Y.$$

**Proposición B.11** (criterio de Grumblum).

Una sucesión  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$  es sucesión básica si y sólo si existe  $K > 0$  tal que,

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|, \quad \text{para toda sucesión } a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \text{ y } n \leq m.$$

Además, la menor constante  $K$  que podemos escoger es  $\text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.*

La necesidad de la condición enunciada es clara. En efecto, pues basta tener en cuenta que

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| = \left\| P_n \left( \sum_{i=1}^m a_i e_i \right) \right\| \leq \|P_n\| \left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\| \leq \text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|.$$

Recíprocamente, si  $P_n: \text{span}\{e_i: i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \text{span}\{e_i: 1 \leq i \leq n\}$  es la aplicación dada por

$$P_n \left( \sum_{i=1}^m a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i e_i, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^m a_i e_i \in \text{span}\{e_i: i \in \mathbb{N}\} \text{ con } m > n;$$

entonces —en virtud de la hipótesis que estamos asumiendo—,  $\|P_n\| \leq K$ . Por tanto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , podemos extender la aplicación  $P_n$  a  $\overline{\text{span}}\{e_i: i \in \mathbb{N}\}$ ; por comodidad en la notación, denotaremos a dicha extensión por  $P_n$ .

A continuación, veremos que la sucesión  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisface las propiedades (i) – (iii) del Lema B.5 anterior. En efecto, pues:

- (i) dado que  $\text{span}\{e_i: 1 \leq i \leq n\}$  es cerrado,  $\text{Im } P_n = \text{span}\{e_i: 1 \leq i \leq n\}$ ;
- (ii) basta tener en cuenta la definición de  $P_n$ ;
- (iii) dado  $\varepsilon > 0$  y  $x \in \overline{\text{span}}\{e_i: i \in \mathbb{N}\}$ , existe  $y = a_1 e_1 + \dots + a_m e_m \in \text{span}\{e_i: i \in \mathbb{N}\}$  tal que  $\|x - y\| < \varepsilon/(2K)$ ; luego,  $\|P_m(x - y)\| < \varepsilon/2$  y entonces

$$\begin{aligned} \|x - P_m x\| &= \|x - y + y - P_m x\| \leq \|x - y\| + \|y - P_m x\| \\ &= \|x - y\| + \|P_m(y) - P_m x\| < \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, el resultado enunciado es ahora consecuencia directa del Lema B.5 anterior.  $\square$

**Proposición B.12** (equivalencia de sucesiones básicas).

Si  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset X$  y  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$  son dos sucesiones básicas en  $X$  e  $Y$  respectivamente, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a)  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es equivalente a  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ;
- (b) existe un isomorfismo  $T: \overline{\text{span}}\{e_i: i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \overline{\text{span}}\{\varepsilon_i: i \in \mathbb{N}\}$  tal que

$$T e_i = \varepsilon_i, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N};$$

(c) existen  $C_1, C_2 > 0$  tales que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$C_1^{-1} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|_X \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right\|_Y \leq C_2 \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\|_X, \quad \text{para todo } a_i \in \mathbb{K} \text{ con } 1 \leq i \leq n.$$

*Demostración.*

(a)  $\implies$  (b)

La aplicación  $T: \overline{\text{span}} \{e_i: i \in \mathbb{N}\} \longrightarrow \overline{\text{span}} \{\varepsilon_i: i \in \mathbb{N}\}$  dada por

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\text{span}} \{e_i: i \in \mathbb{N}\},$$

está bien definida y es biyectiva. Para probar que  $T$  es un isomorfismo, emplearemos el Teorema del Grafo cerrado y el Teorema de la Aplicación abierta.

Sea entonces  $(z^k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de vectores de  $X$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a^k_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = z \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Tz^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a^k_i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varepsilon_i.$$

En tal caso, dado a que los funcionales biortogonales son continuos, tendremos entonces que  $a^k_i \rightarrow a_i$  y  $a^k_i \rightarrow c_i$ . Por tanto,  $a_i = c_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$  y entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Tz^k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i = Tz.$$

(b)  $\implies$  (c)

Basta considerar  $C_2 = \|T\|$  e  $C_1 = \|T^{-1}\|$ .

(c)  $\implies$  (a)

Las desigualdades de (c) nos permiten afirmar que

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i \text{ es de Cauchy} \iff \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \text{ es de Cauchy.} \quad \square$$

**Teorema B.13** (Krein–Milman–Rutman).

Sea  $X$  un espacio de Banach y  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión básica normalizada con  $\text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}} = K$ .

En tal caso, si  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de vectores de  $X$  tal que

(a)  $\sum_{i=1}^{\infty} \|e_i - \varepsilon_i\| < \frac{1}{2K}$ , entonces  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica equivalente a  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ;

(b) si  $\overline{\text{span}} \{e_i: i \in \mathbb{N}\}$  es complementado en  $X$  mediante una proyección  $P: X \longrightarrow X$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|e_i - \varepsilon_i\| < \frac{1}{8K\|P\|},$$

entonces  $\overline{\text{span}} \{\varepsilon_i: i \in \mathbb{N}\}$  es complementado en  $X$ .

*Demostración.*

(a)

Veamos inicialmente que si  $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$ , entonces  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i \in X$ . Para ello, teniendo en cuenta que  $|a_i| = |e_i^*(x)| \|e_i\| \leq \|e_i^*\| \|e_i\| \|x\| \leq 2\|x\| K$ , observamos que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=k}^l a_i \varepsilon_i \right\| &= \left\| \sum_{i=k}^l a_i (\varepsilon_i - e_i) \right\| + \left\| \sum_{i=k}^l a_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| \|\varepsilon_i - e_i\| + \left\| \sum_{i=k}^l a_i e_i \right\| \\ &\leq 2K\|x\| \sum_{i=l}^k \|\varepsilon_i - e_i\| + \left\| \sum_{i=k}^l a_i e_i \right\|. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta (a), deducimos que el primer sumando tiende a 0 cuando  $k, l \rightarrow \infty$ . Por otra parte, en virtud de la definición de  $x$ , el segundo sumando también satisface la misma propiedad.

Por lo tanto, la aplicación  $T: \overline{\text{span}} \{e_i : i \in \mathbb{N}\} \rightarrow \overline{\text{span}} \{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$  dada por

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\text{span}} \{e_i : i \in \mathbb{N}\},$$

está bien definida. Probaremos que  $T$  es un isomorfismo y entonces el resultado enunciado se deducirá a partir de la Proposición B.12 anterior.

Comencemos observando que, para  $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \overline{\text{span}} \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$  arbitrario,

$$\|x - Tx\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \|\varepsilon_i - e_i\| \leq 2K\|x\| \sum_{i=1}^{\infty} \|\varepsilon_i - e_i\| \leq \|x\| \quad (\text{B.1})$$

y entonces  $\|Tx\| \leq \|Tx - x\| + \|x\| \leq 2\|x\|$ ; luego  $T$  es un operador acotado. Por otro lado,

$$\|x\| \leq \|x - Tx\| + \|Tx\| \leq 2K\|x\| \sum_{i=1}^{\infty} \|\varepsilon_i - e_i\| + \|Tx\|,$$

de donde deducimos que

$$\left(1 - 2K \sum_{i=1}^{\infty} \|\varepsilon_i - e_i\|\right) \|x\| \leq \|Tx\|;$$

luego  $T^{-1}$  también es un operador acotado.

Por tanto, ya sabemos que  $T$  es un isomorfismo entre  $\overline{\text{span}} \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$  y  $T(\overline{\text{span}} \{e_i : i \in \mathbb{N}\})$ . Además, dado que  $T(\overline{\text{span}} \{e_i : i \in \mathbb{N}\})$  es cerrado en  $\overline{\text{span}} \{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$  y contiene a  $\text{span} \{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ , concluimos finalmente que  $T(\overline{\text{span}} \{e_i : i \in \mathbb{N}\}) = \overline{\text{span}} \{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ .

**Nota B.14.** Si  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es base de Schauder,  $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$  también es base de Schauder.

De acuerdo con lo anterior, basta probar que  $\overline{\text{span}} \{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\} = T(X) = X$ . Si dicha igualdad no fuese cierta, en virtud del Lema de Riesz sobre elementos casi-ortogonales [18, p. 19], existiría  $x \in S_X$  tal que

$$\text{dist}(x, T(X)) \in \left(2K \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - e_i\|, 1\right) \subset \mathbb{R},$$

contradiciendo así (B.1), pues

$$\|x - Tx\| \leq 2K \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i - e_i\|.$$

(b)

Considerando el operador  $T$  del apartado (a) anterior, para  $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i$ , tenemos que

$$y = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = TP\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right)$$

y entonces —como  $|a_i| = |\varepsilon_i^*(y)| \leq \|\varepsilon_i^*\| \|y\| = \|(Te_i)^*\| \|y\| \leq \|T\| \|\varepsilon_i^*\| \|e_i\| \leq 2K\|T\| \|y\|$  y  $\|T\| \leq 2$ —

$$\begin{aligned} \|TPy - y\| &= \left\| TP\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i(\varepsilon_i - e_i)\right) \right\| \leq \|T\| \|P\| \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \|\varepsilon_i - e_i\| \\ &\leq 8K\|P\| \|y\| \sum_{i=1}^{\infty} \|\varepsilon_i - e_i\| \leq \delta \|y\|, \quad \text{con } \delta < 1. \end{aligned}$$

Sea  $S$  la restricción de  $TP$  a  $\overline{\text{span}}\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ . De modo análogo a lo mostrado en el apartado (a) anterior, se prueba ahora que  $S$  es un isomorfismo sobreyectivo de  $\overline{\text{span}}\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$  en  $\overline{\text{span}}\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ ; luego  $S^{-1}TP$  es una proyección de  $X$  sobre  $\overline{\text{span}}\{\varepsilon_i : i \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

### B.1.3. Sucesiones básicas bloque

**Definición B.15** (sucesión básica bloque).

Sea  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión básica en un espacio de Banach  $X$ . Una *sucesión básica bloque* de  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , es una sucesión de vectores no nulos de la forma

$$u_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_i e_i, \quad \text{con } a_i \in \mathbb{K} \text{ y } p_1 < p_2 < \dots$$

**Lema B.16** (el nombre “sucesión básica bloque” es correcto).

Toda sucesión básica bloque de una base  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica con constante básica menor o igual que  $\text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.*

Es una consecuencia directa de la Proposición B.11 (Grumblum). En efecto, pues para  $k \leq l$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j u_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_i e_i \right\| = \left\| \sum_{j=1}^k \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \alpha_j a_i e_i \right\| \\ &\leq \text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^l \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \alpha_j a_i e_i \right\| = \text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^l \alpha_j u_j \right\|. \quad \square \end{aligned}$$

Sea  $X$  un espacio de Banach con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $\text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}} = K$ .

**Teorema B.17** (Pełczyński: utilidad de las sucesiones básicas bloque).

Si  $Y \subset X$  es un subespacio de dimensión infinita, existe un subespacio  $Z \subset Y$  tal que

(a)  $Z$  tiene dimensión infinita;

(b)  $Z$  tiene base de Schauder equivalente a una sucesión básica bloque de  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.*

Dado  $p \in \mathbb{N}$  arbitrario, sea  $W_p \subset X$  el subespacio vectorial de codimensión finita dado por

$$W_p = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=p+1}^{\infty} a_i e_i \right\} = \overline{\text{span}} \{e_i : i > p\}.$$

Puesto que  $W_p$  es un subespacio de codimensión finita e  $Y$  es infinito dimensional, el subespacio intersección  $W_p \cap Y$  tiene dimensión no finita y entonces,  $W_p \cap Y \neq \{0\}$  para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , dado  $y_j = \sum_{i=j}^{\infty} a^j_i e_i \in S_Y$ , escojamos  $p_j \in \mathbb{N}$  de modo que

$$u_j = \sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j} a^j_i e_i \implies \|y_j - u_j\| < \frac{1}{4^j K}, \quad \text{siendo } K = \text{bc}(e_i)_{i \in \mathbb{N}}. \quad (\text{B.2})$$

Procediendo de tal modo, construimos una sucesión básica bloque  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j - u_j\| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4^j K} = \frac{1}{3K}.$$

Por tanto, en virtud del Teorema B.13 anterior,  $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica equivalente a  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ . Por lo tanto,  $Z = \overline{\text{span}} \{y_j : j \in \mathbb{N}\}$  satisface la propiedad requerida en el enunciado.  $\square$

Realizando un ligera modificación de la anterior demostración se obtiene el siguiente resultado, conocido habitualmente por *Criterio de selección de Bessaga-Pełczyński*. Una demostración explícita del mismo puede consultarse en el artículo original [7] y también en [1].

**Teorema B.18.** [*Criterio de Bessaga-Pełczyński*]

Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de vectores de  $X$  tal que:

- (a)  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| > 0$ ,
- (b)  $x_n \rightarrow 0$  débilmente;

entonces existe  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  subsucesión de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  es sucesión básica equivalente a una sucesión básica bloque de  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ .

#### B.1.4. Bases y dualidad

Dado un espacio de Banach  $X$  con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , ¿forman los coeficientes biortogonales  $(e_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$  una base del espacio dual  $X^*$ ? Pese a que, en general, la respuesta es negativa —téngase en cuenta que para que ocurriese es necesario que  $X^*$  sea separable— los siguientes resultados muestran bajo qué condiciones tenemos asegurada una respuesta afirmativa.

**Lema B.19** (Motivación).

Sea  $X$  un espacio de Banach con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  y proyecciones canónicas asociadas  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En tal caso,  $(e_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$  es una base de Schauder de  $\overline{\text{span}} \{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$  con proyecciones canónicas asociadas  $(P_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ .

*Demostración.*

Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in X^*$  y  $x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)e_i \in X$  arbitrarios, tenemos que

$$P_n^* f(x) = f(P_n x) = f\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)f(e_i)$$

y entonces, identificando  $X$  con  $X^{**}$ ,

$$P_n^*(f) = \sum_{i=1}^n f(e_i)e_i^* = \sum_{i=1}^n e_i(f)e_i^*, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (\text{B.3})$$

Por tanto, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que  $\dim P_n^*(X^*) = n$ .

Por otra parte, para  $f \in \text{span}\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ , tenemos que  $P_n^* f = f$  para  $n \gg 1$ . Así pues, dado  $f \in \overline{\text{span}}\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$  arbitrario, tenemos que (escogiendo  $g \in \overline{\text{span}}\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$  tal que  $\|f - g\| < \varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \|P_n^* f - f\| &= \|P_n^* f - P_n^* g + P_n^* g - g + g - f\| \\ &= \|P_n^*\| \|f - g\| + \|P_n^* g - g\| + \|g - f\| \\ &\leq \varepsilon \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| + \varepsilon, \quad \text{se } n \gg 1 \end{aligned}$$

y entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n^* f - f\| = 0, \quad \text{para todo } f \in \overline{\text{span}}\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}. \quad (\text{B.4})$$

Es inmediato probar que  $P_n^* P_m^* = P_{\min\{n,m\}}^*$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ . Por tanto, el resultado enunciado es consecuencia del Lema B.5 anterior.  $\square$

**Nota B.20** (sobre (B.4)).

Tenemos que  $P_n^* f \rightarrow f$  débilmente\* en  $X^*$  para todo  $f \in X^*$ . En efecto, pues al ser  $f$  continua,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)f(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e_i^*(x)f(e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^* f(x).$$

**Definición B.21** (base de Schauder contractiva & Base de Schauder acotadamente completa).

Sea  $X$  un espacio de Banach con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ; se dice que  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ :

- (a) es una *base contractiva* (en inglés, *shrinking*) si  $\overline{\text{span}}\{e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = X^*$ ;
- (b) es una *base acotadamente completa* (en inglés, *boundedly complete*) si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| < \infty \implies \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X.$$

**Ejemplo B.22** (bases contractivas y acotadamente completas).

- (a) La base canónica de  $c_0$  y  $\ell_p$ , con  $1 < p < \infty$  es contractiva; la base canónica de  $\ell_1$  no es contractiva.
- (b) La base canónica de  $\ell_p$ , con  $1 \leq p < \infty$  es acotadamente completa; la base canónica de  $c_0$  no es acotadamente completa (basta considerar  $x^n = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ ).

**Proposición B.23** (caracterización de bases contractivas I).

Sea  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una base de Schauder de  $X$  con proyecciones asociadas  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En tal caso,

$$(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ base contractiva} \iff (e_i^*)_{i \in \mathbb{N}} \text{ es base de Schauder de } X^*.$$

*Demostración.*

Si  $\overline{\text{span}} \{e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = X^*$ , entonces —en virtud del Lema B.19 anterior—  $(P_n^*)$  genera una base de Schauder de  $X^*$ .

Recíprocamente, si las proyecciones naturales  $P_n^*$  generan una base de Schauder de  $X^*$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n^* f - f\| = 0$  para todo  $f \in X^*$  y entonces  $X^* = \overline{\text{span}} \{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

La siguiente proposición motiva la elección del nombre “contractiva” para este tipo de bases.

**Proposición B.24** (Caracterización de bases contractivas II).

Sea  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una base de Schauder de  $X$  con proyecciones asociadas  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En tal caso,

$$(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ base contractiva} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|f|_{\overline{\text{span}} \{e_i : i > n\}}\| = 0 \text{ para todo } f \in X^*.$$

*Demostración.*

Comencemos observando que si  $P: X \rightarrow X$  es una proyección lineal y acotada, entonces

$$\sup_{y \in P(B_X)} |f(y)| = \sup_{x \in B_X} |f(P(x))| = \sup_{x \in B_X} |P^*(f(x))| = \|P^* f\|$$

y

$$B_{P(X)} \subset P(B_X) \subset \|P\|B_X \cap P(X) \subset \|P\|B_{P(X)}.$$

Así pues, para las proyecciones canónicas  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  asociadas a la base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|f|_{(I-P_n)(X)}\| &= \sup\{|f(x)| : x \in B_{(I-P_n)(X)}\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in (I-P_n)(B_X)\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : x \in (\|P_n\| + 1)B_{(I-P_n)(X)}\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|f|_{(I-P_n)(X)}\| \leq \|f - P_n^*(f)\| \leq (\|P_n\| + 1)\|f|_{(I-P_n)(X)}\|, \quad \text{para todo } f \in X^*,$$

y entonces  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una base contractiva si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f|_{\overline{\text{span}} \{e_i : i > n\}}\| = 0, \quad \text{para todo } f \in X^*. \quad \square$$

El siguiente Teorema B.28 proporciona una caracterización de los espacios de Banach con base de Schauder que son reflexivos. Para su demostración emplearemos tres teoremas clásicos que involucran topologías débiles de un espacio de Banach; recordamos a continuación sus enunciados (su demostración puede consultarse en [18]).

**Teorema B.25** (Teorema de Mazur).

Sea  $X$  un espacio de Banach. Entonces, todo conjunto  $C \subset X$  cerrado y convexo es débilmente cerrado.

**Teorema B.26** (Teorema de Goldstine).

Sea  $X$  un espacio de Banach. Luego,  $B_X$  es débilmente compacto si y sólo si  $X$  es reflexivo.

**Teorema B.27** (Teorema de Eberlein–Smulyan).

Sea  $X$  un espacio de Banach separable y  $C \subset X$  un conjunto cerrado. Entonces,

$$C \text{ débilmente compacto} \iff C \text{ débilmente secuencialmente compacto.}$$

**Teorema B.28** (James. Bases de Schauder en espacios reflexivos).

Sea  $X$  un espacio de Banach con base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Entonces,

$$X \text{ es reflexivo} \iff (e_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ es contractiva y acotadamente completa.}$$

*Demostración.*

Supongamos inicialmente que  $X$  es reflexivo. En tal caso, para toda  $f \in X^*$ , tenemos que  $P_n^* f \rightarrow f$  en la topología débil\* de  $X^*$  (ver Nota B.20). No obstante, dado que  $X$  es reflexivo, tal propiedad de convergencia también es cierta en la topología débil de  $X$ . Luego, teniendo en cuenta (B.3) y el Teorema B.25 (convexo y cerrado implica débilmente cerrado), concluimos que

$$X^* = \overline{\text{span}}^w \{e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = \overline{\text{span}} \{e_i^* : i \in \mathbb{N}\}.$$

Es decir,  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una base contractiva de  $X$ .

Sea ahora  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de escalares tal que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| < \infty$$

y consideremos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in X.$$

Sea  $x \in X$  un punto límite débil de la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  —cuya existencia está asegurada, al ser  $X$  reflexivo, por los Teoremas B.26 y B.27—. Para  $i \leq n$  tenemos que,  $e_i^*(x_n) = a_i$  y entonces  $e_i^*(x) = a_i$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Por tanto, en virtud de la unicidad de los coeficientes proporcionados por una “serie de Schauder”,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X$$

y entonces la base de Schauder  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es acotadamente completa.

Recíprocamente, supongamos ahora que  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una base contractiva y acotadamente completa de  $X$ . Probaremos que  $X$  es reflexivo empleando el Teorema B.26 viendo que  $B_X$  es débilmente compacto.

Dado que  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una base contractiva de  $X$ , el dual  $X^*$  es separable. Por tanto, en virtud del Teorema B.27, para probar que  $B_X$  es débilmente compacto basta mostrar que toda sucesión  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B_X$  admite una subsucesión débilmente convergente.

Sea luego  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B_X$  una sucesión arbitraria. Empleando el argumento diagonal de Cantor, podemos extraer una subsucesión denotada nuevamente por  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i^*(x_k) = a_i \in \mathbb{K}, \quad \text{para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Así pues, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = \sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} e_i^*(x_k) e_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n e_i^*(x_k) e_i = \lim_{k \rightarrow \infty} P_n(x_k)$$

y entonces

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} P_n(x_k) \right\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \lim_{k \rightarrow \infty} \|P_n(x_k)\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty.$$

Por tanto, dado que  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es acotadamente completa,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in X.$$

Además, dado que  $\overline{\text{span}} \{e_i^* : i \in \mathbb{N}\} = X^*$  y

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i^*(x_k) = a_i = e_i^*(x), \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

concluimos finalmente que  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge débilmente a  $x \in B_X$ . □

### B.1.5. Sucesiones básicas bloque en $\ell_p$

**Proposición B.29** (Sucesiones básicas bloque en  $\ell_p$ ).

Si  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es una sucesión básica bloque normalizada de la base canónica  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\ell_p$ , con  $1 \leq p < \infty$ , entonces:

- (a)  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  es equivalente a  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  y  $\overline{\text{span}} \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$  es isométrico a  $\ell_p$ ;
- (b) existe una proyección sobreyectiva  $P: \ell_p \rightarrow \overline{\text{span}} \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$  con  $\|P\| = 1$ .

*Demostración.*

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , supongamos que el  $j$ -ésimo vector de la sucesión básica bloque normalizada  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  viene dado por

$$u_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \lambda_i e_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |\lambda_i|^p = 1.$$

(a)

En tal caso, dado que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m a_j u_j \right\| &= \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |a_j|^p |\lambda_i|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{j=1}^m |a_j|^p \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |\lambda_i|^p \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{j=1}^m |a_j|^p \right)^{1/p} = \left\| \sum_{j=1}^m a_j e_j \right\|, \end{aligned}$$

es claro que  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  y  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  son equivalentes. Además, la aplicación dada por

$$T \left( \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j, \quad \text{para cada} \quad \sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j \in \overline{\text{span}} \{u_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

define una isometría entre  $\overline{\text{span}}\{u_i : i \in \mathbb{N}\}$  y  $\ell_p$ .

(b)

Dado  $j \in \mathbb{N}$ , sea  $u_j^* \in \ell_p^*$  tal que  $u_j^* \in \text{span}\{e_i : p_j + 1 \leq i \leq p_{j+1}\} \subset \ell_q$  y  $\|u_j^*\| = u_j^*(u_j) = 1$ . En tal caso,  $u_j^*(u_k) = 0$  para todo  $k \neq j$  y entonces,

$$Px = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^*(x)u_j, \quad \text{para cada } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p,$$

define una proyección lineal y sobreyectiva  $P: \ell_p \longrightarrow \overline{\text{span}}\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$ . Además, dado que

$$|u_j^*(x)|^p \leq \|u_j\|^p \|x\|^p \leq \|x\|^p = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |a_i|^p, \quad \text{para cada } x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in \ell_p,$$

tenemos entonces que  $\|P\| = 1$ . En efecto, pues

$$\|Px\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |u_j^*(x)|^p |\lambda_i|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |u_j^*(x)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} |a_i|^p = \|x\|^p. \quad \square$$

## B.2. Espacios de Orlicz

**Definición B.30** (función de Orlicz).

Se dice que una función  $M: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$  es una *función de Orlicz* si  $M$  es continua, creciente, convexa y cumple que:

$$M(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} M(t) = +\infty.$$

Además, se dice que:

- (a)  $M$  es una *función de Orlicz degenerada* si existe  $b > 0$  tal que  $M(t) = 0$  para todo  $t \in [0, b]$ .
- (b)  $M$  satisface la  $\Delta_2$ -condición en 0 si

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{M(2t)}{M(t)} < \infty.$$

**Definición B.31** (espacios de Orlicz).

Para cada sucesión  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de escalares consideramos

$$\|x\|_M = \inf \left\{ \rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) \leq 1 \right\} \in [0, +\infty].$$

y definimos entonces los siguientes espacios:

- (a)  $\ell_M = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) < \infty \text{ para algún } \rho > 0 \right\}$ ,
- (b)  $h_M = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{|x_n|}{\rho}\right) < \infty \text{ para todo } \rho > 0 \right\}$ ;

en los que  $\|\cdot\|_M$  define una norma.

**Nota B.32** (Sobre los espacios de Orlicz).

El espacio  $(\ell_M, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach de sucesiones que generaliza a los bien conocidos espacios  $\ell_p$ ; pues éstos se obtienen como caso particular cuando consideramos  $M(t) = t^p$ . Si  $M$  es una función degenerada, entonces  $\|\cdot\|_M = \|\cdot\|_\infty$  y  $\ell_M = \ell^\infty$ , mientras que  $h_M = c_0$ .

En general, para una función de Orlicz arbitraria  $M$ , la sucesión  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  formada por los vectores unitarios canónicos no es una base de Schauder de  $\ell_M$ ; ello justifica la importancia del siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en [33].

**Teorema B.33** (Sobre los espacios de Orlicz).

Para una función de Orlicz  $M: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a)  $M$  satisface la  $\Delta_2$ -condición en 0;
- (c)  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una base de Schauder acotadamente completa  $\ell_M$ ,
- (d)  $\ell_M = h_M$ ,
- (e)  $\ell_M$  es separable,
- (f)  $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{tM'(t)}{M(t)} < \infty$ ,
- (g)  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_M$  si y sólo si  $\sum_{n=1}^{\infty} M(|x_n|) < \infty$ .

El último teorema de esta sección da una condición necesaria y suficiente para que dos espacios de Orlicz, definidos éstos por funciones de Orlicz que verifiquen la condición  $\Delta_2$ , sean isomorfos. Nuevamente, una demostración del mismo se encuentra en [33].

**Teorema B.34.**

Sean  $M_1, M_2: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  dos funciones de Orlicz que satisfacen la condición  $\Delta_2$ . En ta caso, los siguientes enunciados son equivalentes:

- (a)  $\ell_{M_1}$  y  $\ell_{M_2}$  son espacios de Banach isomorfos;
- (b) existe  $K > 0$  y  $t_0 > 0$  tal que

$$\frac{1}{K} \leq \frac{M_1(t)}{M_2(t)} \leq K, \quad \text{para todo } t \in [0, t_0].$$



# Bibliografía

- [1] Albiac, F. y Kalton, N.J., *Topics in Banach space theory*, Springer, 2006.
- [2] Aoki, T., *Locally bounded linear topological spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 18 (1942), 588–594.
- [3] Banach, S., *Theory of linear operations*, North-Holland, 1987.
- [4] Beauzamy, B., *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland, 1982.
- [5] Beck, A., *A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 13:2 (1962), 329–334.
- [6] Benyamini, Y. y Lindenstrauss, J., *Geometric Nonlinear Functional Analysis. Volume 1*, American Mathematical Society, 2000.
- [7] Bessaga, C. y Pełczyński, A., *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Stud. Math. 17 (1958), 151–164.
- [8] Cabello, F., *A simple proof that super-reflexive spaces are K-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 132:3 (2003), 697–698.
- [9] Cabello, F., Castillo, J.M.F. y Kalton, N., *Complex interpolation and twisted twisted Hilbert spaces*, Pacific J. Math. 276:2 (2015), 287–307.
- [10] Cabello, F. y Castillo, J.M.F., *Métodos homológicos en espacios de Banach*. (Comunicación personal de los autores)
- [11] Casazza, P.G. y Shura, T.J., *Tsirelson's Space*, Springer, 1989.
- [12] Castillo, J. M. F., *The freewheeling twisting of Hilbert spaces*. (Comunicación personal del autor)
- [13] Castillo, J. M. F. y González, M., *Three-space problems in Banach space theory*, Springer-Verlag, 1997.
- [14] Day, M.M., *The spaces  $L_p$  with  $0 < p < 1$* , Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 819–823.
- [15] Diestel, J., Jarchow, H. y Tonge, A., *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

- [16] Enflo, P., *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. 130 (1973), 309–317.
- [17] Enflo, P., Lindenstrauss, J. y Pisier, G., *On the "three-space" problem for Hilbert spaces*, Math. Scand. 36 (1975), 199–210.
- [18] Fabia, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V. y Zizler, V., *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, 2011.
- [19] Fackler, S., *Holomorphic Semigroups and the Geometry of Banach Spaces*, Ulm university, 2011.
- [20] Gowers, W.T. y Maurey, B., *Banach spaces with small spaces of operators*, Math. Ann. 307:4 (1997), 543–568.
- [21] Hanche-Olsen, H. y Holden, H., *The Kolmogorov-Riesz compactness theorem*, Expo. Math. 28:4 (2010), 385–394.
- [22] Hilton, E. y Stambach, K., *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, 1970.
- [23] Johnson, W.B., Lindenstrauss, J. y Schechtman, G. *On the relation between several notions of unconditional structure*, Israel J. Math. 37 (1980), 120–129.
- [24] Kadets, M.I. y Pełczyński, A., *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces  $L_p$* , Stud. Math. 21 (1961/1962), 161–176.
- [25] Kalton, N.J., *The three-space problem for locally bounded  $F$ -spaces*, Compo. Math. 37 (1978), 243–276.
- [26] Kalton, N.J., *The space  $Z_2$  viewed as a symplectic Banach space*, Proceedings of research workshop on Banach space theory, University of Iowa, 1981.
- [27] Kalton, N. J. y Peck, N. T., *Twisted sums of sequence spaces and three subspace problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 225 (1979), 1–30.
- [28] Kalton, N. J., Peck, N. T. y Roberts, James W., *An  $F$ -space sampler*, Cambridge University Press, 1984.
- [29] Kato, T., *Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators*, J. Analyse Math. 6 (1958), 273–322.
- [30] Klee, V. L. Jr., *Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach)*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 484–487.
- [31] Lindenstrauss, J. y Rosenthal, H.P., *The  $\mathcal{L}_p$  spaces*, Israel J. of Math. 7 (1969), 325–349.
- [32] Lindenstrauss, J., *On complemented subspaces of  $m$* , Israel J. Math. 9 (1971), 279–284.
- [33] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L., *Classical Banach spaces. I*, Springer-Verlag, 1977.
- [34] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L., *Classical Banach spaces. II*, Springer-Verlag, 1979.

- [35] Maurey, B. y Pisier, G., *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. 58 (1976), 45–90.
- [36] Pełczyński, A., *On strictly singular and strictly cosingular operators*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. 13 (1965), 31–41.
- [37] Pełczyński, A. y Rosenthal, H.P., *Localization techniques in  $L_p$  spaces*, Studia Math. 52 (1975), 263–289.
- [38] Pietsch, A., *Operator ideals*, North-Holland, 1980.
- [39] Pietsch, A., *History of Banach spaces and linear operators*, Birkhauser, 2007.
- [40] Pisier, G., *Sur les espaces qui ne contiennent pas de  $\ell_1^n$  uniformément*, Séminaire Maurey-Schwartz, 1973/74.
- [41] Ribe, M., *Examples for the nonlocally convex three space problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 237 (1979), 351–355.
- [42] Rolewicz, S., *On certain classes of linear metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957), 471–473.
- [43] Rosenthal, H.P., *On subspaces of  $L_p$* , Ann. of Math. 97 (1973), 344–373.
- [44] Rosenthal, H.P., *A characterization of Banach spaces containing  $\ell_1$* , Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411–2413.
- [45] Rudin, W., *Functional analysis*, 2<sup>a</sup> Ed., McGraw-Hill, 1991.
- [46] Triebel, H., *A New Approach to Function Spaces on Quasi-Metric Spaces*, Rev. Mat. Complut. 18:1 (2005), 7–48.
- [47] Tsirelson, B.S., *It is impossible to imbed  $\ell_p$  of  $c_0$  into an arbitrary Banach space*, Funkcional. Anal. Priložen. 8:2 (1974), 57–60. (En ruso)