FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El método de decisión de Tarski para el Álgebra y la Geometría elementales

Rosana Sobrido Codesido

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

El método de decisión de Tarski para el Álgebra y la Geometría elementales

Rosana Sobrido Codesido

Julio, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: El método de decisión de Tarski para el Álgebra y la Geometría elementales
Breve descrición do contido
El logista Alfred Tarski en los años 30 del siglo XX, y restringiéndose a lo que él llama la geometría elemental, probó la existencia de un procedimiento que, aplicado a cualquier fórmula de la teoría formal puede decir, en un número finito de pasos, si es o no un teorema. Además Tarski desenvuelve un sistema formal para la geometría euclidiana. Su algoritmo funciona también en la teoría formal del Álgebra elemental. Este admite eliminación de cuantificadores, resultando en un sistema completo, decidible y que admite una demostración constructiva de su consistencia.
Recomendacións
Es conveniente usar la bibliografía sugerida.
Outras observacións

Índice general

Resumen **VII**

Introducción **IX**

1. Contexto histórico **1**

2. Álgebra elemental **5**

3. El método de decisión **13**

3.1. Primera Parte 13

3.2. Segunda Parte 35

4. Extensión a otros ámbitos: Geometría Elemental **37**

4.1. El sistema de Tarski para la Geometría Elemental 37

4.2. Aplicación del Método de Decisión a la Geometría Elemental 41

4.3. Ampliación de las teorías 41

Apéndice **43**

Bibliografía **47**

Resumen

El trabajo se enmarca en el campo de la Teoría de Modelos dentro de la lógica matemática. Con este contexto se estudiarán las propiedades de las teorías del álgebra y la geometría elementales. Particularmente se realiza un estudio sintáctico presentando el método de decisión proporcionado por el matemático y filósofo Alfred Tarski que permite conocer qué resultados son ciertos dentro de una de estas dos teorías y, en consecuencia, particularizar los teoremas de las mismas. Esta es una idea muy interesante ya que este algoritmo permite resolver cuestiones complicadas de forma mecánica sin que sean necesarios grandes conocimientos de la materia. En consecuencia, al poder ser aplicado, quedará probado que ambas teorías son decidibles. Se hará uso de conceptos metamatemáticos y de lógica de predicados junto con los puramente algebraicos y, además de la propia definición del método se hará un estudio de los fundamentos del álgebra y la geometría elementales en el sentido de Tarski.

Abstract

The work is framed in the field of the Model Theory inside the Mathematical logic. In this context we will study the properties of Elementary Algebra and Geometry. In particular a syntactic study is carried out presenting the decision method provided by the mathematician and philosopher Alfred Tarski that allows to know which results are true within one of these two theories and, consequently, to particularize the theorems of them. This is a very interesting idea since this algorithm allows to solve complicated questions in a mechanical way without being necessary to have a great knowledge of the matter. Consequently, if it can be applied, it will be proved that both theories are decidable. It will make use of metamathematical concepts and logic of predicates along with the purely algebraic ones and, in addition to the definition of the method we will make a study of the fundamentals of Elementary Algebra and Geometry in the sense of Tarski.

Introducción

Resulta de gran interés conocer qué resultados pueden añadirse a una teoría matemática, determinar qué afirmaciones son o no ciertas en marcos teóricos concretos. A lo largo de este trabajo se tratará de dar respuesta a esta cuestión en el ámbito del álgebra y la geometría elementales siguiendo la Lógica de primer orden.

En primer lugar cabe preguntarnos qué es realmente una teoría matemática. Las teorías componen las bases de los distintos campos de las matemáticas, surgen al observar ejemplos concretos y seguidamente analizar y extraer sus axiomas. Siguiendo conceptos de la lógica formal una teoría matemática será el conjunto de fórmulas que se deducen lógicamente de una serie de axiomas. Dentro de una teoría los ingredientes básicos son las constantes, funciones y relaciones junto con fórmulas que componen los axiomas. Más adelante daremos definiciones formales para estos conceptos dentro de las teorías que nos competen.

La inquietud que mencionamos al inicio llevó a que muchos matemáticos centraran sus estudios en estos términos, podría decirse que el precursor de la formalización de investigaciones orientadas a este fin fue Hilbert(1862) que resumirá estas inquietudes en el Problema de Decisión para cierta teoría. Este se resume en conocer si una sentencia dada es verdadera en una teoría, es decir si forma parte de ella al ser derivada lógicamente de los axiomas.

En respuesta al problema de decisión surge el método de decisión. Concretamente el nuestro fue proporcionado por el matemático y filósofo Alfred Tarski (1901) y es aplicable al álgebra y la geometría elementales. No obstante existen multitud de métodos aplicables a prácticamente todos los ámbitos. Quizás los más conocidos sean el algoritmo de Euclides(325 a.C) para hallar el máximo común divisor y el Teorema de Sturm(1803) para encontrar las raíces de un polinomio. Este último estará estrechamente relacionado con el método de Tarski.

Utilizando este método podremos saber si una sentencia pertenece a cualquiera de las teorías siguiendo una serie de pasos. Una de las ventajas de los métodos de decisión es que una vez que confirmamos la existencia cualquiera puede hacer uso de él sin grandes conocimientos previos. Podremos construir a partir del mismo una máquina, denominada máquina de decisión, que siga los pasos por nosotros y la única tarea sea la de traducir la afirmación a la máquina.

Si queremos dar una definición más formal, generalmente "por un método de decisión para una clase K de sentencias (u otras expresiones) entendemos un método por medio del cual dada cualquier sentencia θ uno siempre puede decidir en un número finito de pasos si θ está en K"[5]. El tipo más importante de método es el que nos compete, aquel que considera la clase de las sentencias verdaderas. No obstante cuando nos encontramos con teorías presentadas como un sistema de axiomas el método de decisión toma un significado distinto y nos referiremos no a la clase de sentencias verdaderas si no a la de todos los teoremas de la teoría (las sentencias que pueden ser derivadas de los axiomas por medio de las reglas de inferencia). Por tanto, en particular, la existencia de un método de decisión nos permite concluir que la teoría es decidible.

La presencia de métodos de decisión otorga un positivismo que nos lleva a pensar que podría existir uno universal para toda la matemática. Desgraciadamente esta afirmación fue refutada a partir de los estudios de Gödel(1930) y las correcciones de Church(1936) y Rosser(1936), entre otros. De sus estudios se sigue que "no existe un método de decisión para cualquier teoría a la que pertenezcan todas las sentencias de la teoría elemental de números (es decir la aritmética de los enteros con la suma y la multiplicación) y por tanto no existe un método de decisión para el conjunto de toda la matemática."[5]

En las siguientes páginas presentaremos un procedimiento que nos permitirá dar respuesta al problema de decisión en el ámbito del álgebra y la geometría elementales. La palabra -Elemental- suele indicar que algo es fundamental o fácil de entender, lo que nos llevaría a pensar que el tema que estamos tratando no tiene el suficiente interés, pero nada más lejos de la realidad. Resulta que este ámbito tiene un contenido matemático muy abundante y existen multitud de importantes problemas que pueden ser formulados en estas teorías. Problemas geométricos como la trisección de ángulos o multitud de cuestiones algebraicas referidas a polinomios como la existencia de raíces pueden ser valorados a través de nuestro procedimiento.

Cabe destacar también, que mostraremos en qué consisten estas teorías, en consecuencia de la idea que para Tarski significó ser elemental puesto que es importante determinar de forma exacta en qué ámbitos podremos emplear el método. Es interesante, sobre todo dentro de la geometría elemental, que esta concepción se da al enunciado del problema y no a su demostración, es decir hay cuestiones cuya prueba resulta muy difícil y hace uso de medios para nada elementales pero como el enunciado cumple nuestras condiciones puede ser evaluado por nuestro método de decisión.

Con todo, el método que describiremos puede ser aplicado en dos grandes ámbitos y resulta de gran ayuda e interés para el estudio de las matemáticas.

En el Capítulo 1 daremos un contexto de la creación de este trabajo de Tarski, sus dificultades y su momento histórico.

Tarski ideó su método y vio que podía ser aplicable en lo que él llama álgebra elemental, explicaremos este concepto a lo largo del Capítulo 2, lo que incluye las definiciones más concisas de sentencia, función y demás términos lógicos señalados.

En el Capítulo 3 explicaremos el método de forma exhaustiva, definiendo todos los operadores necesarios y probando su eficacia a través de teoremas. Este estará dividido en dos partes, una de eliminación de cuantificadores y otra que nos permite asignar el valor de verdad.

Más tarde, Tarski observa que este método también podía ser aplicado en geometría, ámbito dónde él mismo ideó una serie de axiomas que la forman, como en el caso de los Elementos de Euclides pero en una forma moderna y de mayor sencillez. A lo largo del Capítulo 4 veremos el sistema que formó y los pasos precisos para aplicar el método en estas circunstancias, además de modificaciones que podrían o no realizarse a las teorías.

Capítulo 1

Contexto histórico

Anteriormente mencionamos a Hilbert quien, siguiendo el estudio de las teorías matemáticas, formalizó en 1928 el *Entscheidungsproblem*, en nuestro idioma El Problema de Decisión, es decir, el problema de decidir si una fórmula dada de una teoría de primer orden es un teorema de dicha teoría. De forma más formal, "diseñar un algoritmo que debería determinar correctamente, para cualquier sentencia F y para cualquier conjunto S de sentencias del cálculo de predicados, si F es, o no, consecuencia lógica[1] de S "[14]. El conjunto S puede entenderse como el grupo de axiomas de la teoría y F la nueva sentencia que queremos añadir. "Hilbert lo llamó el problema central de la lógica matemática pues consideraba que si se contara con un método para resolver este problema se tendría un método para determinar los teoremas de toda teoría matemática formulable en primer orden."[9].

Hilbert es, en esencia, quien define el ámbito de la *metamatemática*, refiriéndose al estudio de los fundamentos de las matemáticas, es decir la teoría de la demostración. Puede ser entendida como la matemática con la que explicamos las matemáticas mediante el uso del metalenguaje, el cual es el lenguaje empleado para explicar otro formalizado que será conocido como lenguaje objecto. La cuestión esencial de este campo radicaría en el problema de decisión para toda teoría matemática y, aunque ya vimos que no existe un método global se han establecido multitud de ellos para diversas teorías. En este ámbito hablamos del Teorema de la deducción, Teorema de consistencia, Teorema de completitud o el Teorema de decidibilidad de una teoría[2], todos son metateoremas que nos dan distintos

[1]Para una contextualización de lógica matemática véase **Apéndice 2**.

[2]En primer lugar el Teorema de deducción es una formalización del tipo de demostración para $A \Rightarrow B$ que consiste en llegar a B a partir de A, fue demostrado por primera vez por Alfred Tarski en 1921. La consistencia es la propiedad que tienen los sistemas cuando no es posible deducir una fórmula y a la vez su negación a partir de los axiomas. Que una teoría sea completa significa que todas las fórmulas lógicamente válidas del sistema son además teoremas del sistema. Finalmente al afirmar que una teoría es decidible

aspectos de una teoría matemática, no son teoremas en la definición habitual del concepto.

Después de Hilbert otros matemáticos se interesarían por el problema de decisión, uno de ellos es Tarski. El papel del matemático polaco resulta esencial puesto que transformó el concepto de la metamatemática al introducir métodos semánticos[3]. Sinaceur (1940) afirmó sobre la relación de Tarski con este ámbito:

Desde la perspectiva de Tarski, la metamatemática es similar a cualquier disciplina matemática. No solo sus conceptos y resultados pueden ser matematizados, si no que pueden ser integrados dentro de las matemáticas (...) Tarski destruyó la línea entre la matemática y la metamatemática. Se opuso a restringir el papel de las metamatemáticas a los fundamentos de las matemáticas. [2]

En las siguientes páginas presentaremos el método de decisión proporcionado por Alfred Tarski que nos permitirá dar respuesta al problema de decisión en el ámbito del álgebra y la geometría elementales. Este fue un trabajo no exento de dificultades teóricas e históricas.

Una pista de la problemática histórica viene dado por el nombre original de Tarski: Alfred Teitelbaum, de origen judío, además de su nacimiento datado en 1901 en Varsobia, pocos años antes del estallido de las Guerras Mundiales. Podemos extraer un breve sumario de su vida siguiendo [13], en su juventud Alfred cambia su nombre a la versión que conocemos hoy en día (Tarski) y se convierte al catolicismo siguiendo ideales nacionalistas polacos y tratando de esquivar el antisemitismo de la época.

La vida de Tarski se ve dificultada por las guerras, esta situación incluso le llevará a interrumpir sus estudios en varias ocasiones para luchar por sus ideales y es que, antes de comenzar la Universidad Tarski se unió durante un tiempo al ejército polaco y también en una segunda ocasión durante sus estudios universitarios. Este ambiente hostil de guerra y ocupación no impide que Alfred sea un brillante estudiante y lleve a cabo multitud de investigaciones.

Siendo muy joven, en 1925 nuestro hombre consigue no uno, si no dos trabajos como profesor en matemáticas y comienza a ser conocido internacionalmente. En sus lecturas universitarias entre 1926 y 1928 afloran algunos resultados parciales que darán lugar al método de decisión. En sus inicios las condiciones fueron más restrictivas para la existencia del mismo, así en sus estudios iniciales la única operación considerada en el ámbito del álgebra era la suma y la geometría solo contemplaba la línea recta.

---

confirmamos que existe un método para determinar si cualquier fórmula pertenece al conjunto de verdades de la misma. En el trabajo este método es el método de decisión.

[3]El método semántico, frente al sintáctico trata de analizar la concepción de verdad en lugar de limitarse a pruebas y derivaciones.

Según las palabras del propio Tarski en [5] los primeros resultados referidos a este trabajo de una forma casi similar a la actual se obtienen en los años treinta y su elaboración se alarga nueve años. La publicación estaba prevista para 1939 pero debido al comienzo de la Segunda Guerra Mundial tuvo que ser aplazada. El primer momento del que se tienen referencias del trabajo es en 1931 en la publicación *Sur les ensembles définissables de nombres réels* , Fundamenta Mathematicae 17.1, (1931), 210–239 pero parcialmente y sin demostrar sus hipótesis.

Siguiendo el libro [11] podemos analizar la biografía de Tarski en esos años, tardó en aceptar el hecho de que era necesario emigrar de su país debido al presente conflicto y la persecución judía que estaba comenzando a surgir. La guerra afecta a todos pero, los orígenes judíos de Tarski podían llevarlo a los guetos impuestos por los alemanes en Varsobia o a una sentencia de muerte.

El matemático había recibido una invitación oficial para asistir a un congreso en Cambridge, Massachusetts, pero acercándose la fecha aún no había dado una respuesta. El profesor de Harvard y logista Willard Van Orman Quine repitió la invitación y pidió a Tarski que considerara la emigración, idea que Tarski acepta en el último minuto.

En un principio la estancia en Estados Unidos sería pasajera pero terminará por quedarse allí el resto de su vida, al igual que su mujer e hijas que tras sobrevivir a la guerra se unirán a él en América. Volviendo a la narración que realiza el propio Tarski sobre los hechos, una vez en Estados Unidos le comienzan a surgir dudas sobre la calidad de su trabajo y trata de reescribirlo, lo que alarga aún más su publicación. Los duros momentos de la guerra y la posguerra llevan a que el trabajo se posponga durante años hasta que a principios de 1948 la corporación RAND, Santa Mónica, California se interesa por el trabajo y se ofrece a publicarlo. Tras leves modificaciones, en las que el propio Alfred toma parte, se publica *A decision Method for Elementary Algebra and Geometry.*

No todo el entorno de Tarski tuvo la misma suerte, sus padres, su hermano y la familia de este último fueron asesinados por los alemanes así como muchos matemáticos compañeros que no pudieron huir de la guerra.

Capítulo 2

Álgebra elemental

El marco donde es aplicable el método de decisión es el álgebra elemental, en las siguientes líneas se describirá su sistema formal, además de estudiar la forma de los elementos que la componen. Esto se llevará a cabo en el ámbito de la lógica de primer orden empleando conceptos básicos[1]. Todos los conceptos seguirán las ideas descritas en [5]. En rasgos generales se considera elemental a la teoría que no hace uso de conceptos de teoría de conjuntos.

Nuestro trabajo conlleva el estudio de las teorías del álgebra y la geometría elementales en su origen por tanto debemos emplear algunos conceptos metamatemáticos además de los clásicos símbolos matemáticos[2]. A continuación se presenta un esquema de los elementos que componen el álgebra elemental.

En primer lugar, los elementos más básicos son las **variables**, que nos permitirán tomar valores de forma arbitraria. La notación empleada será $x_1, x_2, ..., y_1, y_2, ..., z_1, z_2, ...$ donde los subíndices nos indican que están ordenadas y en consecuencia podemos hablar de primera variable, segunda variable, hasta n-ésima variable. Las variables se interpretan como números reales arbitrarios sin que existan las distinciones entre los conceptos clásicos de entero, racional etc. pues en caso contrario pasaríamos al caso en el que no existe método de decisión probado por Gödel.

Definición 2.1. Una **operación n-aria en el conjunto A** es una función $t : A^n \to A$. Siendo n el **número de aridad**, este viene dado por la cantidad de elementos que se

[1] Para una caracterización más lógica ver **Apéndice 1**.

[2] Los símbolos y expresiones matemáticos se denotan de la forma habitual y podemos considerar que son constantes metamatemáticas. Por otro lado, en la parte metamatemática α, β, γ representarán términos arbitrarios, las letras $\xi, \eta, \lambda, \mu, \nu$ variables arbitrarias y finalmente θ, ϕ, ψ fórmulas y sentencias arbitrarias. Para una discusión más amplia sobre estos conceptos ver [4](Sección 2, pp.279 ff., en particular p.289) y [3](p.100 en particular).

necesitan para llevar a cabo la operación. [10]

A continuación tenemos las **constantes algebraicas** que son los símbolos $1, 0, -1$ y por otro lado los **signos de operación** suma y multiplicación $+, \cdot$. Ambos son de aridad 2. Solamente mencionamos dos signos de operación porque queremos simplificar el modelo lo máximo posible, otros pueden surgir de diversas combinaciones, como es el caso de la resta pues decir $\alpha - \beta$ es lo mismo que $[\alpha + (-1 \cdot \beta)]$.

Juntando variables y constantes mediante signos de operación obtenemos los **términos algebraicos** como serían por ejemplo $x + y$ o $-1 \cdot x$. Sin olvidar que, en algunos casos, será importante el uso de **signos de agrupación** para indicar qué operación se realiza antes que otra, Tarski emplea paréntesis, corchetes y llaves con este fin, entendiendo este último como un superparéntesis y no con nociones de teoría de conjuntos. Los términos adquieren distinto orden. Un término algebraico de primer orden es simplemente una variable o una constante. A partir de aquí por cada interacción se aumentará el orden. Si tenemos los términos α y β siendo k el máximo orden (de una o de ambas), entonces $\alpha \cdot \beta$ y $\alpha + \beta$ son términos algebraicos de orden $k + 1$. Por ejemplo, ¿cuál sería el orden de $-1 \cdot x_1 + x_2$? $1 + 1 + 1 = 3$.

El siguiente elemento a definir son los **signos algebraicos de relación**: $=, \geq$ conocidos como signo de igualdad y signo mayor que[3].

Definición 2.2. Una **fórmula atómica** es una expresión formada por términos algebraicos arbitrarios junto con los símbolos de relación. Los dos tipos de fórmulas obtenidas son las **igualdades** $\alpha = \beta$ y las **desigualdades** $\alpha > \beta$.

Podemos unir las fórmulas atómicas mediante diversos conectores para formar otras más complejas. Los conectores son, en particular operaciones. Sean θ y ϕ fórmulas atómicas, presentamos así las conectivas $\neg, \wedge$ y $\vee$.

- La negación $\neg$: Leído como "no" $\neg\theta$. Es un operador lógico unario.
- La conjunción $\wedge$: Leído como "y" $\theta \wedge \phi$. Es un operador lógico binario
- La disyunción $\vee$: Leído como "o" $\theta \vee \phi$. Es también un operador lógico binario.

Existen otras dos conectivas lógicas que pueden expresarse en función de las tres anteriores y aunque reducimos nuestro sistema a la forma más sencilla por comodidad utilizaremos

[3]Tratamos de presentar el sistema de la forma más simple posible, omitiremos el signo $<$. De hecho también podemos reducirlo más puesto que $x > y \equiv (Ez)[\neg(z = 0) \wedge (x = y + z^2)]$.

su notación particular, estos son la implicación $\rightarrow$ y la equivalencia $\leftrightarrow$. Las entendemos como abreviaturas para expresiones que emplean las anteriores conectivas lógicas.[4] [5]

Otro elemento lógico que debemos nombrar es el **cuantificador existencial** $\exists$, que nos permite decir que existe al menos un elemento que cumplirá lo que viene a continuación. No obstante la notación que emplearemos será la de Tarski, esta resulta $E\xi$ para decir que existe un ξ tal que.

Definición 2.3. Una **fórmula** es una expresión construida mediante la unión de fórmulas atómicas junto con conectores y cuantificadores.

Al igual que los términos las fórmulas tienen un orden asociado. Una fórmula de orden 1 es simplemente una fórmula atómica. Por cada conector que empleamos la fórmula sube un orden, es decir si θ es una fórmula de orden k entonces $\neg\theta$ es una fórmula de orden $k+1$ al igual que si empleamos el cuantificador $(Ex)\theta$ resultando también de orden $k+1$. Aquellos que involucran dos fórmulas θ y ϕ, siendo k el orden máximo de ambas, $\theta \wedge \phi$ y $\theta \vee \phi$ resultan de orden $k+1$.

Ahora nos interesa hablar de un tipo de variables, las **variables libres** que definimos en particular para cada situación. Suponemos que θ y ϕ son dos fórmulas atómicas.

- ξ es libre en ϕ si y solo si ξ aparece en ϕ.
- ξ es libre en $(E\eta)\theta$ si y solo si η no es la misma variable que ξ y ξ es libre en θ.
- ξ es libre en $\neg\theta$ si y solo si ϕ es libre en θ.
- ξ es libre en $\theta \vee \phi$ y en $\theta \wedge \phi$ si y solo si ξ es libre en al menos una de las fórmulas θ y ϕ.

Definición 2.4. Una **sentencia** es una fórmula que no contiene variables libres.

Además debemos nombrar otro importante elemento: el **cuantificador universal** $\forall$, que Tarski escribe como $(A\xi)\theta$ para decir: para todo ξ que existe en θ. No obstante no constituiría un elemento principal si no que puede derivarse del cuantificador existencial.

$$(A\xi)\theta \equiv \neg(E\xi)\neg\theta$$

[4]No debemos confundir dos conceptos similares, la equivalencia material y la equivalencia lógica. La equivalencia material es la conectiva lógica binaria que aquí se explica, denotada con el símbolo $\leftrightarrow$ y al cual se le asocia su semántica particular. Por otro lado denotaremos la equivalencia lógica por $\equiv$ o también podría ser denotada por $\Leftrightarrow$, esta acepción está dentro del ámbito de la semántica y nos indica que ambas partes, a un lado y al otro, poseen el mismo valor de verdad.

[5]Ambas provienen de las conectivas básicas de la siguiente manera, $\theta \rightarrow \phi \equiv \neg\theta \vee \phi$ entendiendo θ como el antecedente o hipótesis y ϕ la consecuencia o conclusión de la implicación. De la misma forma $\theta \leftrightarrow \phi \equiv (\theta \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \theta)$.

Se leería como no existe un ξ que no está en θ, dicho de otra forma todo ξ está en θ.

También para el método será muy importante el uso de disyunciones y conjunciones de muchas fórmulas simultáneamente, lo denotaremos de la siguiente forma. Si las fórmulas están ordenadas en una secuencia finita, $\theta_1, ...\theta_n$

$$\bigvee_{1\leq i\leq n} \theta_i$$

$$\bigwedge_{1\leq i\leq n} \theta_i$$

Si se involucran más casos, aumentarán los subíndices de las fórmulas y pasará a haber dos líneas bajo el conector.

Hasta este punto hemos tratado la construcción de sentencias, elemento a partir del cual emplearemos el método de decisión. Toda esta parte compondría la sintaxis del lenguaje de primer orden. A continuación nos corresponde la parte de semántica que estudia el significado o interpretación de las fórmulas, aquí entra en juego el concepto de verdad.[6] [7]

Existen sentencias básicas que sabemos directamente si son verdaderas o falsas, para las demás se usarán unas normas establecidas, estas vienen dadas por los conectores. Sean θ y ϕ dos sentencias.

- $\neg\theta$ es verdad si y solo si θ es falsa.
- $\theta \wedge \phi$ es verdad si y solo si ambas sentencias son verdad.
- $\theta \vee \phi$ es verdad si y solo si al menos una de ellas es verdad.
- $\theta \rightarrow \phi$ es verdad en todo caso excepto que θ sea verdad y ϕ falsa.

[6]Para Tarski la noción de verdad fue una cuestión muy importante, la trata de forma extendida en obras como [4] donde se proporciona una definición formal. No obstante el concepto filosófico sobre qué es la verdad no es necesario para nuestro trabajo. Usaremos la definición de verdad de forma intuitiva.

[7]También podemos eliminar directamente la noción de verdad del trabajo si sometemos al álgebra elemental a un proceso de axiomatización. En este contexto podemos sustituir la idea de sentencia verdadera por la de sentencia probable. Una sentencia probable es aquella que puede ser derivada de los axiomas mediante la repetición de las reglas de inferencia. Los axiomas de la teoría son los de la lógica de primer orden(**Apéndice 2**) y los axiomas propios de la misma que son de tipo algebraico. Estos últimos involucran los que permiten la caracterización del conjunto de números reales como un campo ordenado junto con las operaciones $+$ y $\cdot$ y la relación $>$ sin olvidar los elementos especiales 1, -1 y 0; además se añade un último axioma

$$(A\xi_1)...(A\xi_n)(A\eta)(A\zeta)\{[(\eta > \zeta) \wedge (E\xi)((\xi = \eta) \wedge (\alpha > 0)) \wedge (E\xi)((\xi = \zeta) \wedge (0 > \alpha))] \\ \rightarrow (E\xi)((\eta > \xi) \wedge (\xi > \zeta) \wedge (\alpha = 0))\}$$

que indica que si en un punto una función, en el sentido que empleamos, es positiva y en otro negativa existe un punto intermedio en el cual la función toma el valor cero.

- $\theta \leftrightarrow \phi$ es verdad si y sólo si ambas sentencias son verdad o ambas sentencias son falsas.

Las sentencias son verdaderas o falsas mientras que las fórmulas pueden tomar diversos valores y resultarán falsas o verdaderas dependiendo de ellos. Por ejemplo $0 = 1$ es una sentencia que resulta ser falsa mientras que la fórmula $x > 0$ es válida para ciertos valores pero falsa para otros.

Definición 2.5. Sean θ y ϕ fórmulas arbitrarias y $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ las variables libres que aparecen en ellas. Entonces si la sentencia $(A\xi_1)...(A\xi_n)(\theta \leftrightarrow \phi)$ es verdad diremos que ambas fórmulas son **equivalentes**.

Teorema 2.6. *La relación de equivalencia es simétrica, reflexiva y transitiva.*

Demostración.

- Reflexiva, lógicamente si θ relacionada con ϕ, ϕ está relacionada con θ pues si ocurre lo primero al ser verdad $(A\xi_1)...(A\xi_n)(\theta \leftrightarrow \phi)$ significa que θ y ϕ son ambas verdad o ambas mentira, de cualquiera de las dos formas $(A\xi_1)...(A\xi_n)(\phi \leftrightarrow \theta)$.

- Simétrica, toda fórmula está relacionada consigo misma puesto que $\theta \leftrightarrow \theta$ siempre es verdad.

- Transitiva

  θ relacionada con ϕ luego $(A\xi_1)...(A\xi_n)(\theta \leftrightarrow \phi)$ es verdad, así ambas θ y ϕ son verdaderas o falsas.

  ϕ relacionada con φ luego $(A\xi_1)...(A\xi_n)(\phi \leftrightarrow \varphi)$ es verdad, así ambas ϕ y φ son verdaderas o falsas.

  Suponemos que θ, ϕ y φ son verdad para todas las variables libres que están en las fórmulas luego como ambas θ y φ son verdad también lo es $(\theta \Leftrightarrow \varphi)$ para todas las variables libres.

  Por contra, si suponemos que θ, ϕ y φ son mentira para todas las variables libres que están en las fórmulas luego como ambas θ y φ son mentira, $(\theta \leftrightarrow \varphi)$ es verdad para todas las variables libres.

$\square$

Teorema 2.7. *Sean θ_1 y θ_2 dos fórmulas equivalentes y supongamos que la fórmula ψ_2 surge de la fórmula ψ_1 reemplazando θ_1 por θ_2 en uno o más lugares. Entonces ψ_1 es equivalente a ψ_2.*

Análogamente, ya viendo que esta definición y teoremas se verifican para fórmulas, en consecuencia podrán aplicarse a términos.

Definición 2.8. Sean α y β términos arbitrarias y $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ las variables que aparecen en ellas. Entonces si la sentencia $(A\xi_1)...(A\xi_n)(\alpha = \beta)$ es verdad diremos que ambos términos son **equivalentes**.

Teorema 2.9. *La relación de equivalencia de términos es simétrica, reflexiva y transitiva.*

Teorema 2.10. *Sean α_1 y α_2 dos términos equivalentes y supongamos que el término β_2 surge del término β_1 reemplazando α_1 por α_2 en uno o más lugares. Entonces β_1 es equivalente a β_2.*

Teorema 2.11. *Sean α_1 y α_2 dos términos equivalentes y supongamos que la fórmulaψ_2 surge la fórmula ψ_1 reemplazando α_1 por α_2 en uno o más lugares. Entonces ψ_1 es equivalente a ψ_2.*

Finalmente presentamos las últimas nociones algebraicas básicas que necesitaremos para establecer el método de decisión.[8]

Definición 2.12. Sean $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ términos que no dependen de x. Se dice que

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi + ... + \alpha_n \cdot \xi^n$$

es un **polinomio** en ξ de grado n con coeficientes $\alpha_0, ..., \alpha_n$ siendo α_n el coeficiente principal.

El grado viene dado por el coeficiente principal, este no tiene que ser necesariamente distinto de cero, $(1-1) \cdot x^2 + x$ es un polinomio de grado dos.

Definición 2.13. Sean α y β dos polinomios en ξ de grados m y n respectivamente.

$$\alpha \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi + ... + \alpha_m \cdot \xi^m$$

$$\beta \equiv \beta_0 + \beta_1 \cdot \xi + ... + \beta_n \cdot \xi^n$$

Sean $r = min\{m, n\}$ y $s = max\{m, n\}$ y $\gamma_i \equiv \alpha_i + \beta_i$ con $i \leq r$.

- Si $m < n$ $\gamma_i \equiv \beta_i$ con $r < i \leq s$.
- Si $m > n$ $\gamma_i \equiv \alpha_i$ con $r < i \leq s$.

Es decir, para los índices superiores al mínimo se toma como valor el correspondiente con el polinomio de mayor grado. Definimos la **suma de polinomios** $+_\xi$:

$$\alpha +_\xi \beta \equiv \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \xi + ... + \gamma_s \cdot \xi^s$$

[8]La definición común de polinomio incluye la teoría de conjuntos, $p \in \mathcal{P}(x)$, por tanto debemos de dar una versión adaptada a nuestro contexto "elemental" incluyendo también el procedimiento para las operaciones entre polinomios.

En resumen, la suma de polinomios resulta en otro polinomio cuyos coeficientes son la suma de los otros dos.

Definición 2.14. Sea α un polinomio en ξ de grado m. Se dice que

$$Rd_\xi(\alpha) \equiv a_0 + a_1 \cdot \xi + ... + a_{m-1} \cdot \xi^{m-1}$$

es el **reductum** de α. Si el polinomio es de grado nulo, es decir no depende de ξ, el reductum será el polinomio nulo $Rd_\xi(\alpha) \equiv 0$. Podemos decir que

$$Rd_\xi^0(\alpha) \equiv \alpha$$

$$Rd_\xi^1(\alpha) \equiv a_0 + a_1 \cdot \xi + ... + a_{m-1} \cdot \xi^{m-1}$$

$$Rd_\xi^2(\alpha) \equiv a_0 + a_1 \cdot \xi + ... + a_{m-2} \cdot \xi^{m-2}$$

Por tanto

$$Rd_\xi^{k+1}(\alpha) \equiv Rd_\xi[Rd_\xi^k(\alpha)]$$

Efectivamente observamos que el reductum de un polinomio es otro polinomio con los mismos coeficientes pero eliminando el principal, de forma que tendrá un grado menor.

Definición 2.15. Sean α y β dos polinomios en ξ de grados m y n respectivamente.

$$\alpha \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi + ... + \alpha_m \cdot \xi^m$$

$$\beta \equiv \beta_0 + \beta_1 \cdot \xi + ... + \beta_n \cdot \xi^n$$

Se define la operación **poducto de polinomios** $\cdot_\xi$:

- Si $m = 0$

  $$\alpha \cdot_\xi \beta \equiv (\alpha \cdot \beta_0) + (\alpha \cdot \beta_1) \cdot \xi + ... + (\alpha \cdot \beta_n) \cdot \xi^n$$

  Así se obtiene el polinomio nulo, ojo no podríamos decir que $\alpha \cdot_\xi \beta \equiv 0$ porque el resultado de la operación no daría lugar a un polinomio si no al valor cero.

- Si $m > 0$

  $$\alpha \cdot_\xi \beta \equiv [Rd_\xi(\alpha) \cdot_\xi \beta] +_\xi (\gamma_0 + \gamma_1 \cdot \xi + ... + \gamma_{m+n} \cdot \xi^{m+n})$$

  Siendo

  $$\gamma_i \equiv 0 \,\text{para}\, i < m$$

  $$\gamma_m \equiv \alpha_m \cdot \beta_0$$

  $$\gamma_{m+1} \equiv \alpha_m \cdot \beta_1$$

  $$\vdots$$

  $$\gamma_{m+n} \equiv \alpha_m \cdot \beta_n$$

Definición 2.16. Sean α y β dos polinomios en ξ, entonces definimos la **resta de polinomios** $-_\xi$

$$\alpha -_\xi \beta \equiv \alpha +_\xi [(-1) \cdot_\xi \beta]$$

Teorema 2.17. *Sean α y β dos polinomios en ξ, entonces $\alpha +_\xi \beta$, $\alpha \cdot_\xi \beta$ y $\alpha -_\xi \beta$ son polinomios en ξ.*

Capítulo 3

El método de decisión

3.1. Primera Parte

Todo lo citado en este capítulo pertenece a la publicación de Tarski [5], tratando de explicar de forma más sencilla ciertas ideas y actualizando algunos conceptos.

El método de decisión [1] se divide en dos partes, la primera consistirá en un **método de eliminación de cuantificadores**, es decir, un procedimiento que nos permitirá transformar cualquier fórmula en una equivalente que no tenga cuantificadores. Esto resulta de gran interés pues una fórmula que viene limitada para ciertos valores (cuantificada) pasaría a una equivalente pero sin restricciones, lo que daría propiedades del modelo.

Se definirán una serie de operadores que nos darán las transformaciones y los teoremas que nos confirmen que, efectivamente, obtenemos fórmulas que funcionan de la misma forma que su predecesora pero eliminando lo que no nos interesa.

El ejemplo más claro de eliminación de cuantificadores es el de las raíces del polinomio de segundo grado, donde se establece:

$$(Ex)(a \neq 0 \wedge ax^2 + bx + c = 0) \equiv a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0$$

Todo resultado estará probado para fórmulas, pero de forma inmediata podemos afirmar que todo puede aplicarse a sentencias ya que se trataría de un caso particular.

Retomamos la notación utilizada en el capítulo previo. Comenzamos con la definición

[1] Pese a que en la introducción tratamos de dar una definición de este concepto, en el trabajo no sería estrictamente necesaria una definición formal, pues al obtener un resultado positivo podemos ver claramente, mientras definimos el método, en qué consiste. El procedimiento resulta en afirmar si cualquier sentencia de álgebra elemental es cierta en un número finito de pasos. Si nos encontrásemos ante el problema de probar que una teoría no admite un método de decisión tendríamos que dar una noción del concepto. Para una discusión sobre la terminología consultar [12] y [1]

del operador P que nos permite colocar cualquier término en forma de polinomio, en el sentido de la definición 2.12.

Definición 3.1. Transformación 1: $P_\xi(\alpha)$

- Si $\alpha \equiv \xi$
$$P_\xi(\alpha) \equiv 0 + 1 \cdot \xi$$
- Si α es una constante o cualquier variable distinta de ξ
$$P_\xi(\alpha) \equiv \alpha$$
- Si α y β son términos arbitrarios
$$P_\xi(\alpha + \beta) \equiv P_\xi(\alpha) +_\xi P_\xi(\beta)$$
$$P_\xi(\alpha \cdot \beta) \equiv P_\xi(\alpha) \cdot_\xi P_\xi(\beta)$$

Teorema 3.2. *Si α es cualquier término y ξ cualquier variable $P_\xi(\alpha)$ es un polinomio en ξ y es equivalente a α.*

Demostración. Lo haremos por inducción respecto al orden de α.

Si α es de orden 1 significa que es una variable o una constante.

Si es una variable $P_\xi(\alpha) \equiv 0 + 1 \cdot \xi$, que efectivamente resulta ser un polinomio porque sigue el esquema de su definición y además es equivalente ya que si es verdad $P_\xi(\alpha)$ también lo será α.

Si es una constante $P_\xi(\alpha) \equiv \alpha$ luego se queda igual obteniendo un polinomio de grado nulo que lógicamente es equivalente al ser él mismo.

Suponemos cierto para los términos de orden k.

Veamos que se cumple para un término de orden $k + 1$, si el término tiene este orden significa que está compuesto por dos términos cuyo orden máximo es k unidos mediante una de las operaciones elementales, los denotamos por α y β.

$$P_\xi(\alpha + \beta) \equiv P_\xi(\alpha) +_\xi P_\xi(\beta)$$
$$P_\xi(\alpha \cdot \beta) \equiv P_\xi(\alpha) \cdot_\xi P_\xi(\beta)$$

Ambos por el 2.17 son polinomios y ya vimos que para ambas partes, una de orden k y la otra de orden menor se verifican las condiciones del teorema. Luego se verifica para orden $k + 1$. $\square$

Definición 3.3. Sean α y β dos términos y θ y ϕ fórmulas, entonces:[2]

1. $P_\xi(\alpha = \beta) \equiv P_\xi(\alpha - \beta) = 0$
2. $P_\xi(\alpha > \beta) \equiv P_\xi(\alpha - \beta) > 0$
3. $P_\xi[\neg(\alpha = \beta)] \equiv [P_\xi(\alpha > \beta) \vee P_\xi(\beta > \alpha)]$
4. $P_\xi[\neg(\alpha > \beta)] \equiv [P_\xi(\alpha = \beta) \vee P_\xi(\beta > \alpha)]$
5. $P_\xi(\theta \vee \phi) \equiv [P_\xi(\theta) \vee P_\xi(\phi)]$
6. $P_\xi(\theta \wedge \phi) \equiv [P_\xi(\theta) \wedge P_\xi(\phi)]$
7. $P_\xi[\neg(\theta \vee \phi)] \equiv P_\xi(\neg\theta) \wedge P_\xi(\neg\phi)$
8. $P_\xi[\neg(\theta \wedge \phi)] \equiv P_\xi(\neg\theta) \vee P_\xi(\neg\phi)$
9. $P_\xi(\neg\neg\theta) \equiv P_\xi(\theta)$

Teorema 3.4. *Sea θ una fórmula sin cuantificadores y ξ cualquier variable. Entonces:*

1. *$P_\xi(\theta)$ es equivalente a θ.*
2. *$P_\xi(\theta)$ es una fórmula construida mediante los signos de conjunción y disyunción (sin hacer uso de los signos de negación)a partir de fórmulas atómicas de la forma $\alpha = 0$ y $\alpha > 0$, siendo α un polinomio en ξ.*

Demostración. Emplearemos la inducción en ambos puntos

1. Si θ es de orden 1 significa que es una fórmula atómica, es decir sólo está compuesta por términos y símbolos de relación. Por tanto estamos en el caso de los puntos 1 y 2 de la definición 3.3. Ya vimos en el Teorema 3.2 que $P_\xi(\alpha)$ es equivalente a α si α es un término y $\alpha - \beta$ lo es puesto que $\alpha - \beta \equiv [\alpha + (-1 \cdot \beta)]$. Luego:

$$P_\xi(\alpha = \beta) \equiv P_\xi(\alpha - \beta) = 0 \equiv \alpha - \beta = 0 \equiv \alpha = \beta$$

$$P_\xi(\alpha > \beta) \equiv P_\xi(\alpha - \beta) > 0 \equiv \alpha - \beta > 0 \equiv \alpha > \beta$$

Suponemos cierto para orden k.

Lo probamos para orden $k + 1$. Si θ es una fórmula de orden $k + 1$ significa que está compuesta por la negación de una fórmula de orden k o dos fórmulas relacionadas

[2] Lo que pretendemos con esta definición es extender la definición anterior para poder aplicarla a todas las fórmulas sin cuantificadores, por ello atendemos a todos los casos posibles de este tipo de fórmulas que quedan determinados en el marco del Álgebra Elemental.

entre sí por conjunción o disyunción (el caso cuantificadores está descartado) siendo k el orden mayor de las fórmulas. Digamos por comodidad en la notación que estas dos fórmulas son θ y ϕ. Entonces las posibilidades son el resto de casos de la definición 3.3. Como suponemos que es cierto para k y las fórmulas ahora son de ese orden o inferior se van dando las equivalencias, por ejemplo:

$$P_\xi[\neg(\alpha = \beta)] \equiv [P_\xi(\alpha > \beta) \vee P_\xi(\beta > \alpha)] \equiv (\alpha > \beta) \vee (\beta > \alpha) \equiv \neg(\alpha = \beta)$$

Esta última implicación es de lógica básica puesto que estamos diciendo que o el elemento 1 es mayor que el 2 o que el elemento 2 es el mayor por tanto esto quiere decir que no es posible que sean iguales.

Se procede de manera análoga para el resto de casos:

$$P_\xi[\neg(\alpha > \beta)] \equiv [P_\xi(\alpha = \beta) \vee P_\xi(\beta > \alpha)] \equiv (\alpha = \beta) \vee (\beta > \alpha) \equiv \neg(\alpha > \beta)$$

$$P_\xi(\theta \vee \phi) \equiv [P_\xi(\theta) \vee P_\xi(\phi)] \equiv \theta \vee \phi$$

$$P_\xi(\theta \wedge \phi) \equiv [P_\xi(\theta) \wedge P_\xi(\phi)] \equiv \theta \wedge \phi$$

$$P_\xi[\neg(\theta \vee \phi)] \equiv P_\xi(\neg\theta) \wedge P_\xi(\neg\phi) \equiv (\neg\theta) \wedge \neg\phi \equiv [\neg(\theta \vee \phi)$$

$$P_\xi[\neg(\theta \wedge \phi)] \equiv P_\xi(\neg\theta) \vee P_\xi(\neg\phi) \equiv (\neg\theta) \vee (\neg\phi) \equiv \neg(\theta \wedge \phi)$$

$$P_\xi(\neg\neg\theta) \equiv P_\xi(\theta) \equiv \theta \equiv \neg\neg\theta$$

Luego cierto para orden $k + 1$.

2. Si θ es de orden 1 significa que es una fórmula atómica, es decir sólo está compuesta por términos y símbolos de relación. Estamos en el caso de los puntos 1 y 2 de la definición 3.3. Siguiendo el teorema 3.2 $P_\xi(\alpha - \beta)$ es un polinomio luego se verifica para orden 1 que $P_\xi(\theta)$ es una fórmula del tipo $\alpha = 0$ o $\alpha > 0$ donde α es un polinomio.

   Suponemos cierto para orden k.

   Lo probamos para orden $k + 1$. Análogamente, como en el primer apartado estamos en el resto de casos de la anterior definición, atendiendo a la parte de la derecha vemos que $P_\xi(\theta)$ está formada por la conjunción o disyunción de fórmulas atómicas de la forma señalada.

□

Para comodidad en la notación establecemos $P_\xi(\theta) \equiv \Psi$. De esta forma a partir de una fórmula sin cuantificadores obtenemos otra equivalente también sin cuantificadores y sin signos de negación.

La siguiente transformación que introduciremos involucra el operador Q, este transforma una fórmula del tipo Ψ aplicando la ley distributiva del cálculo proposicional[3]. Obtendremos una fórmula en la forma normal disyuntiva.

Definición 3.5. Transformación 2: $Q(\phi)$

1. Si ϕ es una fórmula atómica entonces $Q(\phi) \equiv \phi$.

2. Si
$$Q(\phi_1) \equiv \bigwedge_{i \leq m} \bigvee_{j \leq m_i} \Psi_{i,j}$$
y
$$Q(\phi_2) \equiv \bigwedge_{m < i \leq m+n} \bigvee_{j \leq m_i} \Psi_{i,j}$$
donde $\Psi_{i,j}$ con $i \leq m$ y $j \leq m_i$ es una fórmula atómica, entonces:
$$Q(\phi_1 \vee \phi_2) \equiv \bigwedge_{i \leq m+n} \bigvee_{j \leq m_i} \Psi_{i,j}$$

$$Q(\phi_1 \wedge \phi_2) \equiv \bigvee_{\substack{i \leq m \\ m < j \leq m+n}} (\Psi_{i,1} \wedge \ldots \wedge \Psi_{i,m_i} \wedge \Psi_{j,1} \wedge \ldots \wedge \Psi_{j,m_j})$$

En definitiva, lo que hace ϕ es colocar una fórmula en unión y disyunción de fórmulas atómicas.

Teorema 3.6. *Si ϕ es cualquier fórmula sin cuantificadores ni signos de negación, entonces $Q(\phi)$ es una disyunción de conjunciones de fórmulas atómicas. Además $Q(\phi)$ es equivalente a ϕ.*

Demostración. Lo haremos por inducción sobre el orden de ϕ.

Si ϕ es de orden 1 significa que es una fórmula atómica luego $Q(\phi) \equiv \phi$ y se verifica el teorema trivialmente.

Suponemos cierto para k.

Veamos que se verifica para una fórmula de orden $k+1$, esto significa que está compuesta por la disyunción o conjunción de fórmulas de máximo orden k (resto de los casos

[3]Esta propiedad consiste en lo siguiente: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ y $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Es decir lo que está dentro del paréntesis pasa a estar fuera.

descartados por hipótesis). Luego nos encontramos en el punto 2 de la definición 3.5 viendo que efectivamente es una disyunción de conjunciones de fórmulas atómicas. La equivalencia se sigue de la ley distributiva del cálculo proposicional. □

Teorema 3.7. *Sea ϕ una fórmula arbitraria sin cuantificadores y ξ una variable cualquiera. Entonces $QP_\xi(\phi)$[4] es una disyunción de conjunciones de fórmulas atómicas donde cada una de ellas tiene un polinomio en ξ en el lado izquierdo y 0 en el lado derecho. Además $QP_\xi(\phi)$ es equivalente a ϕ.*

Demostración. Efectivamente $QP_\xi(\phi)$ es equivalente a ϕ siguiendo los Teoremas 3.4 y 3.6. $QP_\xi(\phi) \equiv Q(\phi) \equiv \phi$. Además su forma también es trivial siguiendo la definición de ambos operadores. □

Definición 3.8. Sea α un polinomio en ξ, definimos la **derivada con respecto a** ξ $D_\xi(\alpha)$ como:

1. Si es de grado $n > 0$, es decir $\alpha \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \xi + ... + \alpha_n \cdot \xi^n$:

$$D_\xi(\alpha) \equiv \alpha_1 + (2 \cdot \alpha_2) \cdot \xi + ... + (n \cdot \alpha_n) \cdot \xi^{n-1}$$

2. Si es de grado 0:

$$D_\xi(\alpha) \equiv 0$$

Lógicamente la derivada de un polinomio es un polinomio pues sigue teniendo el esquema de la definición 2.12, solo que de un grado menor. Este concepto de derivada puede también extenderse a términos arbitrarios que no sean polinomios en ξ utilizando la primera transformación, así

$$D_\xi(\alpha) \equiv D_\xi P_\xi(\alpha)$$

Definición 3.9. Si α es cualquier término y ξ una variable arbitraria. Definimos la **derivada de orden k**:

$$D^0_\xi(\alpha) \equiv \alpha$$

$$D^{k+1}_\xi(\alpha) \equiv D_\xi[D^k_\xi(\alpha)]$$

Como estas son la derivada de la derivada sucesivamente y ya vimos que la derivada de un polinomio es un polinomio todas las derivadas de orden superior serán polinomios.

[4] Abreviamos la notación en lugar de escribir $Q[P_\xi(\phi)]$.

Definición 3.10. Sea α un polinomio en ξ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos el **operador M** de la siguiente manera:

$$M_\xi^n(\alpha) \equiv \{(\bigwedge_{1\le i\le n} [D_\xi^{i-1}(\alpha) = 0]) \wedge \neg[D_\xi^n(\alpha) = 0]\}$$

$$M_\xi^0(\alpha) \equiv \neg(\alpha = 0)$$

Se leerá como "el número ξ es de orden n en el polinomio α".

Este operador nos indica las raíces del polinomio, traducimos la parte formal de la derecha: dos condiciones que deben darse simultáneamente, la primera que el valor ξ es una raíz para el propio polinomio y todas sus derivadas hasta el orden $n-1$ y la segunda que el valor ξ no es raíz para la derivada n-ésima. Luego el significado de $M_\xi^n(p)$ es que ξ es una raíz del polinomio de orden n y cuando el valor de n es nulo significará que ξ no es raíz de α.

Definición 3.11. Sea ξ una variable y ϕ una fórmula arbitraria, n un número entero positivo y $\eta_1, ..., \eta_n$ las primeras n-variables que no aparecen en ϕ y que son diferentes de ξ. Definimos el **cuantificador existencial numérico**:

$$(E_0\xi)\phi \equiv (A\xi)\neg\phi$$

$$(\underset{n}{E}\xi)\phi \equiv \{(E\eta_1)...(E\eta_n)(\bigwedge_{1\le i<j\le n} \neg(\eta_i = \eta_j) \wedge (A\xi)[\phi \leftrightarrow \bigvee_{1\le i\le n} (\eta_i = \xi)])\}$$

Lo que quiere decir este cuantificador es que existen η_1 hasta η_n valores que verifican dos condiciones, la primera que todos ellos son distintos y la segunda que no hay ningún valor además de los ya citados que hace a ϕ verdadera. Por tanto el cuantificador $(\underset{n}{E}\xi)\phi$ indica que existen exactamente n valores para ξ que hacen que ϕ sea cierta.

Definición 3.12. Sean α y β dos polinomios, el primero de grado p y el segundo de grado q en ξ. Además supongamos que η_1 y η_2 son las primeras dos variables distintas de ξ que no aparecen ni en α ni en β. Definimos el **operador F**, $F_\xi^n(\alpha, \beta)$[5]:

$$F_\xi^n(\alpha,\beta) \equiv (\underset{n}{E}\xi)\{ \bigvee_{\substack{0\le k\le q \\ 0\le 2m\le p-k-1}} [M_\xi^{k+2m+1}(\alpha) \wedge M_\xi^k(\beta)] \wedge (E\eta_1)(E\eta_2)[(\eta_1 = \xi) \wedge (\xi > \eta_2)$$
$$\wedge (A\xi)\{[(\xi > \eta_2) \wedge (\eta_1 > \xi)] \rightarrow (\alpha \cdot \beta > 0)\}]\}$$

Si analizamos la notación lo que nos dice el operador $F_\xi^n(\alpha, \beta)$ es que existen exactamente n valores para ξ tales que:

[5] Nótese que la variable ξ no es libre en $F_\xi^n(\alpha, \beta)$

1. ξ es raíz de orden $k+2m+1$ del polinomio α y es raíz de orden k del polinomio β por tanto ξ es raíz de ambos polinomios pero es de mayor orden en α y si calculamos la diferencia de ambos órdenes $k+2m+1-k=2m+1$ vemos que es un número entero impar.

2. Existen η_1 y η_2 tales que:

   a) O bien η_1 tiene el mismo valor que ξ y η_2 es menor que ξ.

   b) O bien para todos los valores de ξ situados entre η_2 y η_1 los polinomios tienen el mismo signo.

   En conclusión, que existe un intervalo abierto cuyo punto final es ξ dentro del cual α y β tienen el mismo signo.

Definición 3.13. Sea n entero sin restricciones, α y β dos polinomios en ξ y supongamos que k es el máximo de sus grados. Definimos el **Operador G** $G_\xi^n(\alpha,\beta)$:

$$G_\xi^n(\alpha,\beta) \equiv \bigvee_{\substack{0\le m\le k\\ 0\le m+n\le k}} [F_\xi^{n+m}(\alpha,\beta)\wedge F_\xi^m(\alpha,(-1)\cdot_\xi\beta)]$$

$G_\xi^n(\alpha,\beta)$ significa que n_1 es el entero para el cual se verifica $F_\xi^{n_1}(\alpha,\beta)$ y n_2 el entero para el cual se verifica $F_\xi^{n_2}(\alpha,(-1)\cdot_\xi\beta)$ resultando $n=n_1-n_2$

Ahora nos interesa definir el resto obtenido por la división de polinomios, no obstante nos es más sencillo hacerlo cambiado de signo, es decir en su forma negativa a la que denotaremos como $R_\xi(\alpha,\beta)$

Definición 3.14. Sean ξ una variable y α y β dos polinomios de grados m y n respectivamente. Además supongamos que el coeficiente principal de α es α_m y el de β β_n. Definimos el **resto en negativo** $R_\xi(\alpha,\beta)$[6]

1. Si $m<n$
$$R_\xi(\alpha,\beta)\equiv(-1)\cdot_\xi\alpha$$

2. Si $m=n$
$$R_\xi(\alpha,\beta)\equiv Rd_\xi P_\xi(\alpha_m\cdot\beta_n\cdot\beta-\beta_n^2\cdot\alpha)$$

3. Si $m>n$
$$R_\xi(\alpha,\beta)\equiv R_\xi\{Rd_\xi P_\xi(\beta_n^2\cdot\alpha-\alpha_m\cdot\beta_n\cdot\xi^{m-n}\cdot\beta),\beta\}$$

[6]Se requiere la hipótesis $\neg(\beta_n=0)$ puesto que, en caso contrario todos los coeficientes de $R_\xi(\alpha,\beta)$ serían equivalentes a 0

Observación 3.15. Nótese que es importante recordar, para el cálculo del resto, que el coeficiente principal puede ser cero. De esta forma $Rd_\xi(0\xi^2 - \xi + 1) \equiv -\xi + 1$.

Efectivamente $R_\xi(\alpha, \beta)$ da como resultado otro polinomio de menor grado que β.

Teorema 3.16. *Sean α y β dos polinomios en ξ de grados m y n respectivamente. Supongamos que β_n es el coeficiente principal de β. Establecemos:*

1. *Si $m < n$ se tiene $q = 0$.*

2. *Si $m \geq n$ se tiene $q = m - n + 1$*

Entonces existe un polinomio γ en ξ cuyos coeficientes no tienen otras variables que las que están en α y β para el cual $\alpha \cdot \beta_n^{2q}$ y $\beta \cdot \gamma - R_\xi(\alpha, \beta)$ son equivalentes.

Generalmente no se emplea este modo para hablar sobre la división de polinomios, no obstante tiene que ser así puesto que en nuestro sistema no disponemos de la operación división. Normalmente se define el resto como un polinomio δ para el cual, para cierto polinomio γ, se satisface la ecuación $\alpha = \beta \cdot \gamma - \delta$. Sin embargo el teorema anterior nos proporciona una situación equivalente a esta ecuación utilizando los elementos que disponemos en nuestro sistema.

A continuación veremos los operadores principales S T y U que nos permitirán obtener fórmulas sin cuantificadores equivalentes a cualquier tipo de fórmula original. Los siguientes tres teoremas asociados a estos operadores resultan interesantes a nivel matemático porque pueden ser relacionados fácilmente con el Teorema de Sturm(1803) (Ver **Apéndice 3**) y en su demostración se hace uso de los métodos de este matemático.

Definición 3.17. Sean k entero, α y β polinomios en ξ de grados m y n respectivamente con coeficientes principales α_m y β_n. Denotamos $\phi \equiv G_\xi^k(\alpha, \beta)$. Entonces definimos el **operador S** de la siguiente forma:

1. Si alguno de los polinomios es nulo:

$$\begin{cases} S(\phi) \equiv (0 = 0) \text{ si } k = 0 \\ S(\phi) \equiv (0 = 1) \text{ si } k \neq 0 \end{cases}$$

2. Si ninguno de los polinomios es nulo y la suma de sus grados es par:

$$\begin{aligned} S(\phi) \equiv \{&[(\alpha_m = 0) \wedge SG_\xi^k(Rd_\xi(\alpha), \beta)] \vee [\beta_n = 0) \wedge SG_\xi^k(\alpha, Rd_\xi(\beta))] \\ &\vee [\neg(\alpha_m \cdot \beta_n = 0) \wedge SG_\xi^k(\beta, R_\xi(\alpha, \beta))]\} \end{aligned}$$

3. Si ninguno de los polinomios es nulo y la suma de sus grados es impar:

$$S(\phi) \equiv \{[(\alpha_m = 0) \wedge SG^k_\xi(Rd_\xi(\alpha), \beta)] \vee [\beta_n = 0) \wedge SG^k_\xi(\alpha, Rd_\xi(\beta))]$$
$$\vee [(\alpha_m \cdot \beta_n > 0) \wedge SG^{k+1}_\xi(\beta, R_\xi(\alpha, \beta))] \vee [0 > (\alpha_m \cdot \beta_n) \wedge SG^{k-1}_\xi(\beta, R_\xi(\alpha, \beta))]\}$$

Este operador sólo sirve para casos bastante particulares, las fórmulas del tipo $G^k_\xi(\alpha, \beta)$. No obstante nos será de gran importancia porque los demás operadores se definirán en función de él.

Teorema 3.18. *Sea ϕ una de las fórmulas para las cuales podemos definir el operador S según la definición anterior. Entonces $S(\phi)$ es una fórmula sin cuantificadores y sin variables excepto las libres en ϕ. Además ϕ es equivalente a $S(\phi)$.*

Demostración. La primera parte resulta inmediata por la definición. Para la segunda parte, basta con demostrarlo para los tres casos de la definición empleando la misma notación.

En primer lugar, atendiendo al primer caso, si α o β son el polinomio nulo entonces $G^k_\xi(\alpha, \beta)$ es equivalente a $(0 = 0)$ si $k = 0$ y a $(0 = 1)$ si $k \neq 0$. Sean $\xi_1, ...\xi_n$ las variables que aparecen en los coeficientes de α, β o ambas. Entonces:

$G^0_\xi(\alpha, \beta)$ equivalente a $(0 = 0)$ si la sentencia

$$(A\xi_1)...(A\xi_s)(G^0_\xi(\alpha, \beta) \leftrightarrow (0 = 0))$$

es verdad. Como $(0 = 0)$ es verdad en consecuencia debe serlo $G^0_\xi(\alpha, \beta)$ para todos los valores de ξ.

$G^k_\xi(\alpha, \beta)$ equivalente a $(0 = 1)$ si la sentencia

$$(A\xi_1)...(A\xi_s)(G^k_\xi(\alpha, \beta) \leftrightarrow (0 = 1))$$

es verdad. Como $(0 = 1)$ es falsa en consecuencia debe serlo $G^k_\xi(\alpha, \beta)$ o lo que es lo mismo, $\neg G^k_\xi(\alpha, \beta)$ debe de ser verdadera para todos los valores de ξ.

Por la definición de derivada, para todo entero no negativo p se verifica $D^p_\xi(0) \equiv 0$ luego por la definición del operador M si $\alpha \equiv 0$ o $\beta \equiv 0$ $F^k_\xi(\alpha, \beta)$ se satisface para todos los valores de $\xi_1, ...\xi_n$ si $k = 0$ y no se satisface si $k \neq 0$. Por la definición del operador G vemos que se aplica lo mismo para $G^k_\xi(\alpha, \beta)$.

Para el segundo y tercer caso $G^k_\xi(\alpha, \beta)$ equivalente al punto uno y dos de la definición 3.19 según el valor de $m + n$. Para demostrar la equivalencia, mediante transformaciones, todo se reduce a probar que:

1. $(A\xi_1)...(A\xi_s)\{\neg(\alpha_m \cdot \beta_n = 0) \rightarrow [G^k_\xi(\alpha, \beta) \leftrightarrow G^k_\xi(\beta, R_\xi(\alpha, \beta))]\}$ para $m + n$ par

2. $(A\xi_1)...(A\xi_s)\{(\alpha_m \cdot \beta_n > 0) \rightarrow [G^k_\xi(\alpha, \beta) \leftrightarrow G^{k+1}_\xi(\beta, R_\xi(\alpha, \beta))]\}$ para $m + n$ impar

3. $(A\xi_1)...(A\xi_s)\{0 > (\alpha_m \cdot \beta_n) \rightarrow [G_\xi^k(\alpha, \beta) \leftrightarrow G_\xi^{k-1}(\beta, R_\xi(\alpha, \beta))]\}$ para $m + n$ impar

A continuación convertiremos estas expresiones en otras más fuertes. Emplearemos la fórmula $H_\xi^p(\alpha, \beta)$[7]. Establecemos γ y δ polinomios arbitrarios en ξ cuyos coeficientes solo involucran las variables $\xi_1, ..., \xi_s$ y p y q son enteros cualesquiera no negativos. Con esto tendremos que probar que las siguientes sentencias son verdaderas:

4. $(A\xi_1)...(A\xi_s)\{[H_\xi^p(\alpha, \beta) \wedge (A\xi)(\alpha \cdot \beta_n^{2q} = \beta \cdot \gamma - \delta) \wedge \neg(\alpha_m \cdot \beta_n = 0)] \rightarrow [G_\xi^k(\alpha, \beta) \leftrightarrow G_\xi^k(\beta, \delta)]\}$ para p par.

5. $(A\xi_1)...(A\xi_s)\{[H_\xi^p(\alpha, \beta) \wedge (A\xi)(\alpha \cdot \beta_n^{2q} = \beta \cdot \gamma - \delta) \wedge (\alpha_m \cdot \beta_n > 0)] \rightarrow [G_\xi^k(\alpha, \beta) \leftrightarrow G_\xi^{k+1}(\beta, \delta)]\}$ para p impar

6. $(A\xi_1)...(A\xi_s)\{[H_\xi^p(\alpha, \beta) \wedge (A\xi)(\alpha \cdot \beta_n^{2q} = \beta \cdot \gamma - \delta) \wedge (0 > \alpha_m \cdot \beta_n)] \rightarrow [G_\xi^k(\alpha, \beta) \leftrightarrow G_\xi^{k-1}(\beta, \delta)]\}$ para p impar.

Efectivamente, la verdad de 4 implica la de 1, la de 5 la de 2 y la verdad de 6 la de 3.[8] Antes de probar la verdad de estas sentencias se incluye cierta notación:

- Dado un polinomio α y un número λ denotaremos mediante $f(\lambda, \alpha)$ el orden de λ en α, lo que coincide con el valor r para el cual se verifica $M_\lambda^r(\alpha)$.

- Dados dos polinomios α y β, escribiremos $g(\alpha, \beta)$ para representar el entero k para el cual se verifica $G_\xi^k(\alpha, \beta)$.

- Consideraremos todos los números λ para los cuales $f(\lambda, \alpha) - f(\lambda, \beta)$ es positivo e impar y los dividiremos en dos grupos

  - P, al cual pertenece λ si existe un intervalo abierto cuyo punto final (a la derecha) es λ dentro del cual los valores de α y β tienen siempre el mismo signo.
  - N al cual pertenece λ si existe un intervalo abierto cuyo punto final (a la derecha) es λ dentro del cual los valores de α y β tienen siempre distinto signo.

  Ambos grupos son finitos y la diferencia entre el número de elementos de ambos es $g(\alpha, \beta)$

- Por último se empleará $h(\alpha, \beta)$ para denotar el entero p para el cual se verifica $H_\xi^p(\alpha, \beta)$. Lo que quiere decir que es el número de todos los valores λ para los cuales $f(\lambda, \alpha) - f(\lambda, \beta)$ es impar.

[7]Lo que expresa esta fórmula es que existen exactamente p valores ξ tales que la diferencia entre el orden de ξ en α y el orden de ξ en β es un entero impar tanto positivo como negativo.

[8]Para una prueba de estas implicaciones consultar [5] pág. 26.

También se hará uso de la siguiente propiedad:

7. Sean α, β, γ y δ polinomios en ξ, tales que $\alpha \cdot \beta_n^{2q} = \gamma \cdot \beta - \delta$ se verifica para todo valor de ξ, siendo β_n el coeficiente principal, distinto de cero, del polinomio β y q un entero.

   Si para cierto número λ $f(\lambda, \beta) > f(\lambda, \alpha)$ (luego ni α ni β pueden ser el valor cero) entonces $f(\lambda, \alpha) = f(\lambda, \delta)$ y por tanto δ tampoco es el polinomio nulo. Análogamente si $f(\lambda, \beta) > f(\lambda, \delta)$ se tiene $f(\lambda, \alpha) = f(\lambda, \delta)$

Por tanto procederemos a probar la verdad de 4, 5 y 6. Estas tres afirmaciones se cumplen trivialmente si el polinomio δ toma el valor cero por tanto descartamos ese caso. Lo haremos por inducción sobre $h(\alpha, \beta)$.

En primer lugar supongamos que $h(\alpha, \beta) = 0$ por tanto no existen valores para λ tales que $f(\lambda, \alpha) - f(\lambda, \beta)$ y, en consecuencia, $g(\alpha, \beta) = 0$. Tampoco existen valores para λ tales que $f(\lambda, \beta) - f(\lambda, \delta)$ es impar y positivo, lo vemos por reducción a lo absurdo. Si tal valor existiera, por la propiedad 7, se tendría que $f(\lambda, \alpha) = f(\lambda, \delta)$, lo que llevaría a que $f(\lambda, \alpha) - f(\lambda, \beta)$ fuese impar lo que supone una contradicción. Concluimos que $g(\beta, \delta) = 0$ y así $g(\alpha, \beta) = g(\beta, \delta) = 0$. Lo que prueba las afirmaciones.

Suponemos que las afirmaciones 4. 5 y 6 se verifican para polinomios arbitrarios α y β tales que $h(\alpha, \beta) = p$.

Probemos que son ciertas para los polinomios arbitrarios α y β tales que $h(\alpha, \beta) = p + 1$, siendo α_m y β_n coeficientes principales distintos de cero. Consideramos también dos polinomios γ y δ tales que

8. $\alpha \cdot \beta_n^{2q} = \gamma \cdot \beta - \delta$ para cierto entero no negativo q

En esta situación existen dos casos según si la multiplicación de los coeficientes principales es positiva o negativa, solo se resolverá para el caso positivo ya que el restante es análogo.

$h(\alpha, \beta) = p + 1$ implica que existen exactamente $p + 1$ valores para λ tales que $f(\lambda, \alpha) - f(\lambda, \beta)$ es impar, denotemos por λ_0 al mayor valor para λ que verifica esa condición.

Como $\alpha_m \cdot \beta_n > 0$ para los $\xi > \lambda_0$ ambos polinomios tienen el mismo signo, como se verifica para todo número sea o no raíz podemos afirmar que no existe ningún $\xi > \lambda_0$ para el cual $f(\xi, \alpha) - f(\xi, \beta)$ es impar. Por esto y porque $f(\lambda_0, \alpha) - f(\lambda_0, \beta)$ es impar se tiene que existe un intervalo abierto cuyo punto final es λ_0 donde los valores de α y β son de distinto signo.

Se definen los polinomios α', γ' y δ' que verifican las ecuaciones

9. $\alpha' = \alpha \cdot (\lambda_0 - \xi) \qquad \gamma' = \gamma \cdot (\lambda_0 - \xi) \qquad \delta' = \delta \cdot (\lambda_0 - \xi)$

Por 8, que $\alpha_m \cdot \beta_n > 0$ y 9 concluimos que

10. $\alpha' \cdot \beta_n^{2q} = \gamma' \cdot \beta - \delta'$ se verifica para algún entero no negativo q.

11. $\alpha'_{m+1} \cdot \beta_n < 0$ donde α'_{m+1} es el coeficiente principal de α'.

12. $f(\lambda_0, \alpha') = f(\lambda_0, \alpha) + 1$ y $f(\lambda_0, \delta') = f(\lambda_0, \delta) + 1$ siempre que δ y δ' sean distintos de cero.

13. $f(\varepsilon, \alpha') = f(\varepsilon, \alpha)$ para todo $\varepsilon + \delta_0$ y $f(\varepsilon, \delta') = f(\varepsilon, \delta)$ para todo $\varepsilon + \delta_0$ siempre que δ y δ' sean distintos de cero.

Debido a 12 y 13 el conjunto de los números λ tales que $f(\lambda, \alpha') - f(\lambda, \beta)$ es impar es distinto del conjunto análogo para α y β solo por la ausencia de λ_0 luego $h(\alpha', \beta) = h(\alpha, \beta) - 1 = p$.

En consecuencia la premisa para la inducción se aplica a los polinomios α' y β lo que quiere decir que las sentencias 4, 5 y 6 son verdad si cambiamos α por α'. Concluimos, por 10 y 11:

$$\begin{cases} g(\alpha', \beta) = g(\beta, \delta') \text{ si } p \text{ par} \\ g(\alpha', \beta) = g(\beta, \delta') + 1 \text{ si } p \text{ impar} \end{cases}$$

Queremos probar que $g(\alpha, \beta) - g(\beta, \delta) = g(\alpha', \beta) - g(\beta, \delta') - 1$.

Por 9 los valores de α y α' tienen el mismo signo para todo $\xi < \lambda_0$ de la misma forma que para los valores de δ y δ'.

14. Por 9 los valores de α y α' tienen el mismo signo para todo $\xi < \lambda_0$ de la misma forma que para los valores de δ y δ'.

15. Además no existe $\xi > \lambda_0$ para el cual $f(\xi, \beta) - f(\xi, \delta)$ es positivo e impar, de la misma forma que para β y δ'.

Probemos este hecho, procedemos por reducción a lo absurdo. Si para cierto valor $\xi > \lambda_0$, $f(\xi, \beta) - f(\xi, \delta)$ fuese positivo e impar, siguiendo 7 y 8 $f(\xi, \alpha) - f(\xi, \beta)$ sería impar para el mismo $\xi > \lambda_0$ y llegaríamos a una contradicción puesto que se había determinado que λ_0 era el mayor valor para λ para el cual $f(\lambda, \alpha) - f(\lambda, \beta)$ es impar. Por otro lado aplicado a β y δ' se procede de manera análoga pero por 7, 10 llegando a la misma contradicción pero combinada con la primera parte de 13.

Nos encontramos ante dos casos según el signo de $f(\lambda_0, \alpha) - f(\lambda_0, \beta)$, antes de estudiarlos vemos que, siguiendo 13, 14 y 15 el único valor que puede provocar diferencias entre $g(\alpha, \beta)$ y $g(\alpha', \beta)$ o entre $g(\beta, \delta)$ y $g(\beta, \delta')$ es λ_0.

- $f(\lambda_0, \alpha) - f(\lambda_0, \beta) > 0$

  Siguiendo la notación para λ_0 y la existencia del intervalo abierto con ese punto final donde α y β tienen distintos signos, este número provoca un decrecimiento de una unidad de $g(\alpha, \beta)$ mientras que, por 12 no afecta al valor de $g(\alpha', \beta)$. Luego

  16. $g(\alpha, \beta) = g(\alpha', \beta) - 1$.

  Además $f(\lambda_0, \beta) - f(\lambda_0, \delta)$ no puede ser positivo en consecuencia de 7 luego tampoco puede serlo $f(\lambda_0, \beta) - f(\lambda_0, \delta')$ por 12. En este caso probamos que el número λ_0 no tiene efecto en los valores de $g(\beta, \delta)$ ni $g(\beta, \delta')$. Por tanto

  17. $g(\beta, \delta) = g(\beta, \delta')$.

  En consecuencia de 16 y 17 se verifica $g(\alpha, \beta) - g(\beta, \delta) = g(\alpha', \beta) - g(\beta, \delta') - 1$.

- $f(\lambda_0, \alpha) - f(\lambda_0, \beta) < 0$

  Se observa de forma directa que el valor λ_0 no afecta al valor de $g(\alpha, \beta)$. Además tampoco afecta al valor de $g(\alpha', \beta)$ ya que por la definición de λ_0 y 12 $f(\delta_0, \alpha') - f(\delta_0, \beta)$ es par. Luego

  18. $g(\alpha, \beta) = g(\alpha', \beta)$.

  Por otro lado, en consecuencia de 7 $f(\lambda_0, \alpha) = f(\lambda_0, \delta)$ que, sumado con la definición de λ_0

  19. $f(\lambda_0, \beta) - f(\lambda_0, \delta)$ es positivo e impar.

  Sea $f(\lambda_0, \alpha) = f(\lambda_0, \delta) = r$. Así λ_0 es de orden r en α y en δ y de orden mayor en β. En consecuencia existen tres polinomios α'', β'' y δ''tales que se verifican las ecuaciones

  20. $\alpha = \alpha'' \cdot (\lambda_0 - \xi)^r \qquad \beta = \beta'' \cdot (\lambda_0 - \xi)^r \qquad \delta = \delta'' \cdot (\lambda_0 - \xi)^r$

  λ_0 es raíz de β'' pero no de α'' o δ''. Seguido de 8 y 20 $\alpha'' \cdot \beta_n^{2q} = \gamma \cdot \beta'' - \delta''$. En consecuencia los valores de α'' y δ'' para $\xi = \lambda_0$ tienen distintos signos, luego existe un intervalo abierto cuyo punto final es λ_0 en el cual los valores de α'' y δ'' tienen distintos signos y por 20 esto también se aplica a α y δ. Si comparamos este resultado con el intervalo que habíamos obtenido anteriormente podemos concluir que existe un intervalo abierto cuyo punto final es λ_0 en el cual los valores de β y $delta$ tienen el mismo signo. Por lo tanto seguido de 19 λ_0 aumenta el valor de $g(\beta, \delta)$ en 1. Por otro lado determinamos, por 12 y 19, que $f(\lambda_0, \beta) - f(\lambda_0, \delta')$ es par luego λ_0 no afecta al valor $g(\beta, \delta')$. Concluimos así

21. $g(\beta,\delta) = g(\beta,\delta') + 1$

En consecuencia de 18 y 21 se verifica $g(\alpha,\beta) - g(\beta,\delta) = g(\alpha',\beta) - g(\beta,\delta') - 1$.

Finalmente al haber probado

$$\begin{cases} g(\alpha',\beta) = g(\beta,\delta') \text{ si } p \text{ par} \\ g(\alpha',\beta) = g(\beta,\delta') + 1 \text{ si } p \text{ impar} \\ g(\alpha,\beta) - g(\beta,\delta) = g(\alpha',\beta) - g(\beta,\delta') - 1 \end{cases}$$

se obtiene que

$$\begin{cases} g(\alpha,\beta) = g(\beta,\delta) \text{ si } p+1 \text{ par} \\ g(\alpha,\beta) = g(\beta,\delta) - 1 \text{ si } p+1 \text{ impar} \end{cases}$$

Luego 4, 5 y 6 se verifican para polinomios α y β tales que $h(\alpha,\beta) = p+1$ y así por inducción se verifica para todos los polinomios arbitrarios [9]. □

Definición 3.19. Sean $\alpha, \beta, \gamma_1, ..., \gamma_r$ polinomios arbitrarios en ξ.

$$\alpha \equiv \alpha_0 + \alpha_1\xi + ... + \alpha_m\xi^m$$

$$\beta \equiv \beta_0 + \beta_1\xi + ... + \beta_n\xi^n$$

$$\gamma_1 \equiv \gamma_{1,0} + \gamma_{1,1}\xi + ... + \gamma_{1,n_1}\xi^{n_1}$$

$$\vdots$$

$$\gamma_r \equiv \gamma_{r,0} + \gamma_{r,1}\xi + ... + \gamma_{r,n_r}\xi^{n_r}$$

Definimos el **Operador T**, que da lugar a la fórmula $T(\phi)$:

1. Si ϕ es una fórmula del tipo $(\underset{k}{E}\xi)[\alpha = 0]$, entonces:

$$T(\phi) \equiv [\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge SG_{\xi}^{-k}(\alpha, D_{\xi}(\alpha))$$

[9] Relacionándolo con el Teorema de Sturm, a partir de la demostración de este teorema podemos llegar a la siguiente generalización, sean α y β dos polinomios en ξ y κ y μ dos números reales tales que $\kappa < \mu$. Se construye una serie de polinomios $\gamma_1, ..., \gamma_n$ que pueden ser entendidos como la cadena de Sturm para α y β usando α para γ_1, β para γ_2 y los siguientes γ_i son el resto en negativo de γ_{i-2} y γ_{i-1} finalizando el proceso al encontrar un polinomio γ_n divisor de γ_{n-1}. Finalmente denotamos las secuencias de valores $\kappa_1, ..., \kappa_n$ y $\mu_1, ..., \mu_n$ de $\gamma_1, ..., \gamma_n$ tales que $\xi = k$ y $\xi = \mu$ y k el número de cambios de signo en la primera secuencia y m el de la segunda. Así $k - m$ es lo mismo que el número $g(\alpha, \beta)$ de esta demostración solo que en vez de que las raíces estén entre κ y μ están en $(-\infty, \infty)$.

2. Si ϕ es una fórmula del tipo $[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge (\underset{k}{E}\xi)[(\alpha = 0) \wedge (\beta > 0)]$ entonces:

$$T(\phi) \equiv \{[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge \bigvee_{\substack{2k = r_1 - r_2 + r_3 \\ 0 \leq r_1, r_2 \leq m \\ -m \leq r_3 \leq m}} (SG_\xi^{-r_1}[\alpha, D_\xi(\alpha)] \wedge SG_\xi^{-r_2}[P_\xi(\alpha^2 + \beta^2), D_\xi P_\xi(\alpha^2 + \beta^2)] \wedge SG_\xi^{-r_3}[\alpha, D_\xi(\alpha) \cdot_\xi \beta])\}$$

3. Si ϕ es una fórmula del tipo $[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge (\underset{k}{E}\xi)[(\alpha = 0) \wedge (\gamma_1) \wedge ... \wedge (\gamma_r)]$ donde $r \geq 2$, entonces:

$$T(\phi) \equiv \bigvee_{\substack{2k = r_1 + r_2 - r_3 \\ 0 \leq r_1, r_2, r_3 \leq m}} \{T(\phi_1) \wedge T(\phi_2) \wedge T(\phi_3)\}$$

donde

$$\phi_1 \equiv \{[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge (\underset{r_1}{E}\xi)[(\alpha = 0) \wedge (\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r-2} > 0) \wedge P_\xi(\gamma_{r-1} \cdot \gamma_r^2) > 0]\}$$

$$\phi_2 \equiv \{[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge (\underset{r_2}{E}\xi)[(\alpha = 0) \wedge (\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r-2} > 0) \wedge P_\xi(\gamma_{r-1}^2 \cdot \gamma_r) > 0]\}$$

$$\phi_3 \equiv \{[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge (\underset{r_3}{E}\xi)((\alpha = 0) \wedge (\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r-2} > 0) \wedge P_\xi[(-1) \cdot \gamma_{r-1} \cdot \gamma_r] > 0)\}$$

En el caso $r = 0$ se omite la expresión $(\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r-2} > 0)$ en las fórmulas que definen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

4. Si ϕ es una fórmula del tipo $\neg(\alpha_m = 0) \wedge (\underset{k}{E}\xi)[(\alpha = 0) \wedge (\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r > 0)]$ entonces:

$$T(\phi) \equiv (\neg(\alpha_m = 0) \wedge T\{[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge (\underset{k}{E}\xi)[(\alpha = 0) \wedge (\gamma_1 > 0) \wedge ...(\gamma_r > 0)]\})$$

5. Si ϕ es una fórmula del tipo

$$[\neg(\gamma_{1,n_1} = 0) \wedge \neg(\gamma_{2,n_2} = 0) \wedge ... \wedge \neg(\gamma_{r,n_r} = 0)] \wedge (\underset{k}{E}\xi)[(\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r > 0)]$$

entonces

a) si $k > 0$ definimos:

$$T(\phi) \equiv (0 = 1)$$

b) si $k = 0$ y $n_1 + ... + n_r = 0$ definimos:

$$T(\phi) \equiv \{[\neg(\gamma_{1,0} = 0) \wedge ... \wedge \neg(\gamma_{r,0} = 0)] \wedge [(0 > \gamma_{1,0}) \vee ... \vee (0 > \gamma_{r,0})]\}$$

c) si $k = 0$ y $n_1 + ... + n_r > 0$ definimos:

$$T(\phi) \equiv \{\neg(\gamma_{1,n_1} = 0) \wedge ... \wedge \neg(\gamma_{r,n_r} = 0) \wedge [(0 > \gamma_{1,n_1}) \vee ... \vee (0 > \gamma_{r,n_r})]\}$$
$$\wedge \{[0 > (-1)^{n_1} \cdot \gamma_{1,n_1}] \vee ... \vee [0 > (-1)^{n_r} \cdot \gamma_{r,n_r}]\} \wedge$$
$$T\{\neg(\delta = 0) \wedge (\underset{0}{E}\xi)([D_\xi P_\xi(\gamma_1 \cdot ... \cdot \gamma_r) = 0] \wedge (\gamma_1 > 0) \wedge ...(\gamma_r > 0))\}$$

donde δ es el coeficiente principal de $D_\xi P_\xi(\gamma_1 \cdot ... \cdot \gamma_r)$.

6. Si ϕ es una fórmula del tipo $(\underset{k}{E}\xi)[(\gamma_1 > 0) \wedge ...(\gamma_r > 0)]$, entonces:

a) si $k \neq 0$ definimos:

$$T(\phi) \equiv (0 = 1)$$

b) si $k = 0$ definimos:

$$T(\phi) \equiv \{[(\gamma_{1,0} = 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{1,n_1} = 0)] \vee ... \vee [(\gamma_{r,0} = 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r,n_r} = 0)]\} \vee$$
$$\bigvee_{(s_1,...,s_r) \mathrm{in} S} \{\psi_{1,s_1} \wedge ... \wedge \psi_{r,s_r} \wedge T([\neg(\gamma_{1,s_1} = 0) \wedge ... \wedge \neg(\gamma_{r,s_r} = 0)] \wedge$$
$$(\underset{0}{E}\xi)[(Rd_\xi^{n_1 - s_1}(\gamma_1) > 0) \wedge ... \wedge (Rd_\xi^{n_r - s_r}(\gamma_r) > 0)])\}$$

donde S es el conjunto de todas las r-uplas ordenadas $(s_1, ..., s_r)$ con $0 \leq s_i \leq n_1, ..., 0 \leq s_r \leq n_r$

$$\begin{cases} \psi_{k,1} \equiv [(\gamma_{k,l+1} = 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{k,n_k} = 0)] \text{ para } \ 0 \leq l < n_k \\ \psi_{k,1} \equiv (0 = 0) \text{ para } \ l = n_k \end{cases}$$

7. Si ϕ es una fórmula del tipo $(\underset{k}{E}\xi)[(\alpha = 0) \wedge (\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r > 0)]$ entonces:

$$T(\phi) \equiv T\{[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge \phi\} \vee$$
$$([(\alpha_0 = 0) \wedge ... \wedge (\alpha_m = 0)] \wedge T\{(\underset{k}{E}\xi)[(\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r > 0)]\})$$

8. Si ϕ es una fórmula del tipo $(\underset{k}{E}\xi)[(\gamma_1 = 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r = 0)]$ entonces:

$$T(\phi) \equiv T\{(\underset{k}{E}\xi)[P_\xi(\gamma_1^2 + ... + \gamma_r^2) = 0]\}$$

9. Si ϕ es una fórmula del tipo $(\underset{k}{E}\xi)[(\gamma_1 = 0) \wedge ... \wedge (\gamma_s = 0) \wedge (\gamma_{s+1} > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r > 0)]$ donde $1 < s < r$ entonces:

$$T(\phi) \equiv T\{(\underset{k}{E}\xi)[P_\xi(\gamma_1^2 + ... + \gamma_s^2) = 0 \wedge (\gamma_{s+1} > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r > 0)]\}$$

10. Si ϕ es una fórmula distinta a todas las formas anteriores pero del tipo $\phi \equiv (\underset{k}{E}\xi)(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge ... \wedge \phi_r)$ donde cada ϕ_i es de una de las formas $\gamma_i = 0$ o $\gamma_i > 0$ y si $j_1, ..., j_u$ son los valores de i (en orden creciente) para los cuales $\phi_i \equiv (\gamma_i = 0)$ y si $j_{u+1}, ..., j_r$ son los valores de i (en orden creciente) para los cuales $\phi_i \equiv (\gamma_i > 0)$, entonces establecemos:

$$T(\phi) \equiv T(\underset{k}{E}\xi)(\phi_{j_1} \wedge ... \wedge \phi_{j_r})$$

Teorema 3.20. *Sea ξ una variable cualquiera y ϕ una fórmula arbitraria tal que $T(\phi)$ está definida. Entonces $T(\phi)$ es una fórmula sin cuantificadores y sin variables exceptuando aquellas libres en ϕ. Además ϕ es equivalente a $T(\phi)$.*

Demostración. Que $T(\phi)$ es una fórmula sin cuantificadores y sin variables exceptuando aquellas libres en ϕ es obvio siguiendo el Teorema 3.18 y la definición 3.19.

Ahora probaremos que ϕ es equivalente a $T(\phi)$, lo haremos atendiendo a cada uno de los casos de la definición 3.19.

1. Para el primer caso se tenía que $T(\phi) \equiv [\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge SG_\xi^{-k}(\alpha, D_\xi(\alpha))$, por el Teorema 3.18 esta fórmula es equivalente a

$$[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge G_\xi^{-k}(\alpha, D_\xi(\alpha))$$

Como la fórmula era del tipo $(\underset{k}{E}\xi)[\alpha = 0]$, tenemos que probar que si α es un polinomio en ξ, no siendo el polinomio nulo, entonces α tiene k raíces distintas si y sólo si se verifica $G_\xi^{-k}(\alpha, D_\xi(\alpha))$. Sea s_1 el número de valores de ξ tales que:

- El orden de ξ en α es un entero par positivo mayor que su orden en $D_\xi(\alpha)$.
- Existe un intervalo abierto cuyo punto final es ξ en el cual los valores de α y $D_\xi(\alpha)$ tienen el mismo signo.

Con esto tendríamos $F_\xi^{s_1}(\alpha, D_\xi(\alpha))$

Sea s_2 el número de valores de ξ tales que:

- El orden de ξ en α es un entero par positivo mayor que su orden en $D_\xi(\alpha)$.
- Existe un intervalo abierto cuyo punto final es ξ en el cual los valores de α y $D_\xi(\alpha)$ tienen distinto signo.

Con esto tendríamos $F_\xi^{s_2}(\alpha, (-1) \cdot_\xi D_\xi(\alpha))$

Por tanto empleando la definición 3.13 $G_\xi^{-k}(\alpha, D_\xi(\alpha))$ es verdad si y sólo si $-k = s_1 - s_2$. Podemos ver que $s_1 = 0$ POR QUÉ???? luego $k = s_2$ y $G_\xi^{-k}(\alpha, D_\xi(\alpha))$ es cierto si y solo sí k es en número de raíces distintas de α, probando así la equivalencia.

2. Atendemos a la forma dos de la definición. Sean α y β polinomios en ξ, t_1 el número de raíces de α para las cuales β es positivo y t_2 el número de raíces de α para las cuales β es negativo. Entonces $SG_{\xi}^{-c}(\alpha, D_{\xi} \cdot_{\xi} \beta)$ es verdad si y sólo si $c = t_1 - t_2$ siguiendo el Teorema 3.18. Por otro lado como estamos considerando números reales las raíces de los polinomios α y β coinciden con las de α^2 y β^2. Sea ϕ una fórmula del tipo 2 de la 3.19. Para ver que ϕ es equivalente a $T(\phi)$ basta con probar que si k es un entero no negativo y α y β polinomios siendo el primero de grado m distinto de cero, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

    a) Existen exactamente k raíces de α en las cuales β es positivo.

    b) Existen enteros r_1, r_2 y r_3 que verifican $2k = r_1 - r_2 + r_3$ tales que r_1 es el número de raíces de α, r_2 el número de raíces comunes de α y β y r_3 la diferencia entre el número de raíces de α para las cuales β es positivo y el número de raíces de α para las cuales β es negativo. Pongamos que α tiene como mucho m raíces luego se verifica con $0 \leq r_1 \leq m$, $0 \leq r_2 \leq m$ y $-m \leq r_3 \leq m$.

    Sea k en el significado de la primera condición y r_4 el número de raíces de α en las cuales β es negativo, luego

    $$r_1 - r_3 = k + r_4$$

    $$r_3 = k - r_4$$

    y eliminando r_4 obtenemos $2k = r_1 - r_2 + r_3$. La otra equivalencia es análoga.

3. La fórmula es del tipo 3 de la definición 3.13. Basta con probar que si α es un polinomio no nulo de grado m y $\gamma 1, ..., \gamma_r$ son polinomios cualesquiera, son equivalentes:

    - Existen exactamente k raíces de α para las cuales $\gamma_1, ..., \gamma_r$ son positivos.
    - Existen tres enteros r_1, r_2 y r_3 que verifican $2k = r_1 + r_2 - r_3$ tales que r_1 es el número de raíces de α para las cuales $\gamma_1, ..., \gamma_{r-2}$ y $\gamma_{r-1} \cdot \gamma_r^2$ son positivos, r_2 el número de raíces de α para las cuales $\gamma_1, ..., \gamma_{r-2}$ y $\gamma_{r-1}^2 \cdot \gamma_r$ son positivos y r_3 el número de raíces de α para las cuales $\gamma_1, ..., \gamma_{r-2}$ y $(-1) \cdot \gamma_{r-1} \cdot \gamma_r$ son positivos. Luego se verifica con $0 \leq r_1$, r_2 y $r_3 \leq m$.

    Denotamos por r_4 al número de raíces de α para las cuales $\gamma_1, ...\gamma_{r-1}$ son todas positivas y γ_r es negativo y por r_5 al número de raíces de α para las cuales $\gamma_1, ...\gamma_{r-2}$ y γ_r son todas positivas y γ_{r-1} es negativo. Finalmente si k es el número de raíces de α para las cuales $\gamma_1, ...\gamma_r$ son positivos se tiene que

    $$k + r_4 = r_1$$

$$k + r_5 = r_2$$

$$r_5 + r_4 = r_3$$

Eliminando r_4 y r_5 obtenemos que $2k = r_1 + r_2 - r_3$.

4. La fórmula es del tipo 4 de la definición 3.13. Se demuestra al observar que la fórmula $\neg(\alpha_m = 0) \wedge [\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee (\alpha_m = 0)]$ es equivalente a $\neg(\alpha_m = 0)$.

5. La fórmula es del tipo 5 de la definición 3.13.

   En primer lugar, si $k > 0$ la fórmula $(\underset{k}{E}\xi)\{(\gamma_1 > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_r > 0)\}$ nunca se verifica luego ϕ tampoco se satisface nunca por tanto es equivalente a $(0 = 1)$.

   Si $k = 0$ y $n_1 + ... + n_r = 0$ se tiene $n_1 = n_2 = ... = n_r = 0$ y ϕ se reduce a

   $$[\neg(\gamma_{1,0} = 0) \wedge ... \wedge \neg(\gamma_{r,0} = 0)] \wedge (\underset{0}{E}\xi)[(\gamma_{1,0} > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r,0} > 0)]$$

   donde $\gamma_{1,0}, ...\gamma_{r,0}$ son términos que no involucran a ξ. Finalmente ya que $(\underset{0}{E}\xi)[(\gamma_{1,0} > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r,0} > 0)]$ es equivalente a $\neg[(\gamma_{1,0} > 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r,0} > 0)]$ queda probado que ϕ es equivalente a $T(\phi)$.

   Si $k = 0$ y $n_1 + ... + n_r > 0$ se procede de la siguiente manera, hay que probar que si $\gamma_1, ...\gamma_r$ son polinomios en ξ alguno no nulo y con todos los coeficientes principales distintos de cero, una condición suficiente y necesaria para que no existan valores ϕ que hagan todos estos polinomios positivos es que se verifiquen las siguientes tres condiciones:

   - Al menos uno de los polinomios tiene coeficiente principal negativo.
   - Al menos uno de los polinomios verifica $(-1)^{n_i}\gamma_{i,n_i} < 0$. [10]
   - No existe valor para ξ que sea raíz de la derivada del polinomio obtenido al multiplicar los polinomios que haga que todos sean positivos.

   La primera se satisface puesto que si el coeficiente principal de un polinomio es positivo podemos encontrar un número μ para el cual el polinomio es positivo para todos los valores de ξ mayores que μ. También se verifica la segunda condición por el argumento análogo para valores negativos. La última condición es necesaria puesto que si suponemos que $\gamma_1, ...\gamma_r$ son polinomios que nunca son todos positivos para un mismo valor ξ se verifica inmediatamente. Concluimos que las condiciones son necesarias.

[10] n_i es el grado del polinomio y γ_{i,n_i} es el coeficiente principal.

Ahora suponemos que no son suficientes, es decir que se verifican estas tres condiciones y que existe cierto valor ξ que hace que todos los polinomios sean positivos, denotamos este valor por λ. Luego $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot ... \cdot \gamma_r > 0$. Por otro lado, sabemos que existe i tal que γ_i tiene un coeficiente principal negativo, luego podemos encontrar un valor λ' mayor que λ suficiente para que γ_i sea negativo en λ'. Como γ_i es positivo en λ y negativo en λ' por el Teorema del Valor Medio tiene una raíz entre esos dos valores. Como toda raíz de γ_i es también raíz de $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot ... \cdot \gamma_r$ concluimos que este último tiene una raíz a la derecha de λ. De forma similar, por la propiedad 2 $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot ... \cdot \gamma_r$ tiene una raíz a la izquierda de λ. Sea μ_1 la mayor raíz de $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot ... \cdot \gamma_r$ a la izquierda de λ y μ_1 la menor raíz del mismo polinomio a la derecha de λ. Luego $\gamma_1 \cdot ... \cdot \gamma_n$ es positivo en el intervalo (μ_1, μ_2) y cero en los extremos. Por tanto ningún γ_i puede tener una raíz en el intervalo (μ_1, μ_2) ya que cada γ_i es positivo en λ que se encuentra dentro del intervalo, concluyendo que cada γ_i es positivo a lo largo de todo el intervalo. Por otro lado como $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot ... \cdot \gamma_r$ es cero para los valores μ_1 y μ_2 por el Teorema de Rolle existe un punto ν en (μ_1, μ_2) para el cual la derivada de $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot ... \cdot \gamma_r$ es cero. Al contradecirse la tercera propiedad vemos que es también suficiente.

6. La fórmula es del tipo 6 de la definición 3.13. Si $k \neq 0$ es trivial luego supongamos que $k = 0$. Existen dos posibilidades, o que uno de los polinomios $\gamma_1, ...\gamma_r$ sea el polinomio nulo o que ninguno lo sea. En el primer caso lógicamente ϕ es cierta. En el segundo, denotamos por s_i al mayor índice j tal que $\gamma_{i,j}$ no es igual a cero, es decir el j-ésimo coeficiente de γ_i no nulo. Luego ϕ es equivalente a la fórmula

$$\psi \equiv [\neg(\gamma_{1,s_1} = 0) \wedge ... \wedge (\gamma_{r,s_r} = 0)] \wedge \underset{0}{(\xi)}([Rd_\xi^{n_1 - s_1}(\gamma_1) > 0] \wedge ... \wedge [Rd_\xi^{n_r - s_r}(\gamma_r) > 0])$$

Sin embargo ψ es de la forma 5 de la definición 3.13 luego ϕ y $T(\phi)$ son equivalentes.

7. Si la fórmula es del tipo 7 de la definición 3.13 la demostración se obtiene inmediatamente puesto que ϕ es equivalente a

$$\{[\neg(\alpha_0 = 0) \vee ... \vee \neg(\alpha_m = 0)] \wedge \phi\} \vee \{[(\alpha_0 = 0) \wedge ... \wedge (\alpha_m = 0)] \wedge \phi\}$$

8. Si fórmula es del tipo 8 o 9 de la definición 3.13 la demostración se obtiene directamente utilizando el hecho de que las raíces comunes de r polinomios $\gamma_1, ...\gamma_r$ coinciden con las de $\gamma_1^2 + ... + \gamma_r^2$.

9. Si la fórmula es del tipo 10 de la definición 3.13 la demostración se sigue de las leyes asociativa y conmutativa para conjunciones de la lógica elemental[11].

[11] En cuanto a su relación con las ideas de Sturm aquí podemos ver la representación de los dos casos

□

Definición 3.21. Sean ϕ, ψ y θ fórmulas arbitrarias y ξ una variable cualquiera. Entonces definimos el **operador U** de la siguiente forma:

1. Si ϕ es una fórmula atómica, establecemos:
$$U(\phi) \equiv \phi$$

2. Si $\phi \equiv (\psi \vee \theta)$, establecemos:
$$U(\phi) \equiv [U(\psi) \vee U(\theta)]$$

3. Si $\phi \equiv (\psi \wedge \theta)$, establecemos:
$$U(\phi) \equiv [U(\psi) \wedge U(\theta)]$$

4. Si $\phi \equiv \neg\psi$, establecemos:
$$U(\phi) \equiv \neg U(\psi)$$

5. Si $\phi \equiv (E\xi)\psi$ y $QP_\xi U(\psi) \equiv \psi_1 \vee ... \vee \psi_n$, donde ψ_i para $i = 1, ..., n$ es una conjunción de fórmulas atómicas, establecemos:
$$U(\phi) \equiv \neg T[(\underset{0}{E}\xi)\psi_1] \vee \neg T[(\underset{0}{E}\xi)\psi_2] \vee ... \vee \neg T[(\underset{0}{E}\xi)\psi_n]$$

Teorema 3.22. *Si ϕ es cualquier fórmula entonces $U(\phi)$ es una fórmula sin cuantificadores y sin variables libres exceptuando aquellas que ocurren en ϕ. Además ϕ es equivalente a $U(\phi)$.* [12]

para el Teorema de Sturm. Usamos la notación de la nota al pie 9. El primer caso es el básico ya conocido, a partir de un polinomio α (considerar que el polinomio β es el polinomio derivado de α) construir la cadena y obtener que $k - m$ es el número de distintas raíces en el intervalo (κ, μ), es el que se considera en el Apéndice. No obstante existe un caso dos que formamos a partir del anterior teorema donde α y β son dos polinomios cualesquiera y $k - m$ pasa a ser la diferencia entre el número de raíces de α las cuales tienen el mismo signo en β y en el polinomio derivado de α y el número de raíces de α con distinto signo en β y en el polinomio derivado de α, todo dentro del intervalo κ, μ.

[12] Podemos ver este teorema como una extensión del Teorema de Sturm (**Apéndice 3**). Este último proporciona un criterio para que una ecuación algebraica de una incógnita tenga exactamente k soluciones reales mediante la construcción de sistemas en función de sus coeficientes. Luego la ecuación tiene exactamente k raíces si y solo si sus coeficientes satisfacen todas las ecuaciones e inecuaciones de al menos uno de esos sistemas. El Teorema 3.22 da una extensión para poder aplicar esta idea a sistemas de ecuaciones e inecuaciones de varias incógnitas.

Demostración. Lo haremos por inducción en el orden de ϕ.

Si ϕ es de orden uno significa que es una fórmula atómica luego siguiendo la definición 3.21 $U(\phi) \equiv \phi$ y trivialmente se verifica el teorema.

Suponemos cierto para orden k.

Para probarlo para orden $k+1$ bastaría con emplear los teoremas 3.7 y 3.20. $\square$

Corolario 3.23. *Si ϕ es cualquier sentencia, entonces $U(\phi)$ es una sentencia equivalente sin variables y sin cuantificadores.*

De esta forma quedan cubiertos todos los casos para convertir una fórmula o sentencia con cuantificadores en otra sin ellos.

3.2. Segunda Parte

Lo que nos interesa ahora es darle un valor de verdad a cada sentencia. En primer lugar estableceremos una correlación entre una sentencia sin variables ni cuantificadores con $0 = 0$ o $1 = 0$.

Primero nos centramos en los términos de esas sentencias, estos se obtienen combinando las constantes algebraicas mediante las operaciones $+, \cdot$.

Definición 3.24. Sean α, β y γ términos, definimos el entero $n(\alpha)$ como:

$$n(1) = 1$$

$$n(-1) = -1$$

$$n(0) = 0$$

Si $\alpha \equiv (\beta + \gamma)$: $n(\alpha) = n(\beta) + n(\gamma)$
Si $\alpha \equiv (\beta \cdot \gamma)$: $n(\alpha) = n(\beta) \cdot n(\gamma)$

Como estamos trabajando con números enteros y no comparando expresiones empleamos el signo igual en lugar de $\equiv$, no estamos nombrando el número uno por ejemplo en el primer caso si no que estamos indicando el valor.

Definición 3.25. Sean α y β términos y ϕ, ψ y θ fórmulas sin variables. Definimos $W(\phi)$:

1. Si $\phi \equiv (\alpha = \beta)$

$$\begin{cases} W(\phi) \equiv (0 = 0) \text{ si } n(\alpha) = n(\beta)) \\ W(\phi) \equiv (0 = 1) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

2. Si $\phi \equiv (\alpha > \beta)$

$$\begin{cases} W(\phi) \equiv (0=0) \text{ si } n(\alpha) > n(\beta)) \\ W(\phi) \equiv (0=1) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

3. Si $\phi \equiv (\psi \vee \theta)$

$$\begin{cases} W(\phi) \equiv (0=0) \text{ si } W(\psi) \equiv (0=0) \text{ o } W(\theta) \equiv (0=0) \\ W(\phi) \equiv (0=1) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

4. Si $\phi \equiv (\psi \wedge \theta)$

$$\begin{cases} W(\phi) \equiv (0=0) \text{ si } W(\psi) \equiv (0=0) \text{ y } W(\theta) \equiv (0=0) \\ W(\phi) \equiv (0=1) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

5. Si $\phi \equiv (\neg\psi)$

$$\begin{cases} W(\phi) \equiv (0=0) \text{ si } W(\psi) \equiv (0=1) \\ W(\phi) \equiv (0=1) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Teorema 3.26. *Si ϕ es cualquier sentencia sin variables ni cuantificadores, entonces $W(\phi)$ es una de las sentencias $0 = 0$ o $0 = 1$. Además ϕ es equivalente a $W(\phi)$.*

Demostración. Se ve de forma sencilla por inducción en el orden de ϕ.

□

Teorema 3.27. *Si ϕ es cualquier sentencia, entonces $WU(\phi)$ es una de las sentencias $0 = 0$ o $0 = 1$. Además ϕ es equivalente a $WU(\phi)$.*

Demostración. En consecuencia directa del teorema 3.26 y el corolario 3.23. □

Por tanto queda visto que hemos encontrado un método que nos permite conocer si una sentencia pertenece a la teoría del álgebra elemental. Además cualquier teoría lógica de primer orden que admite un algoritmo de eliminación de cuantificadores es completa, así el álgebra elemental entendida en el sentido del Capítulo 2 es decidible y completa.

Capítulo 4

Extensión a otros ámbitos: Geometría Elemental

Podemos extender el método a otros ámbitos como es el de la geometría Elemental. La primera pregunta es qué entendemos por una sentencia de geometría elemental. De nuevo, Tarski afirma en su simposio[6] que "consideramos elemental la parte de la geometría Euclidiana que puede formularse y establecerse sin la ayuda de cualquier mecanismo de la teoría de conjuntos."(p.16) Por ello todo el sistema vendrá dado dentro de la lógica de primer orden.

Estamos pues en la misma definición general que proporcionamos para el álgebra elemental, lo que corresponde ahora es presentar el sistema de la geometría elemental. Tarski lo proporciona alrededor del año 1926 y es de una innegable elegancia y simpleza puesto que su característica principal es que el único objecto primitivo son los puntos, a diferencia de otros famosos sistemas como el de Hilbert que añade a parte de ellos planos o líneas como objectos geométricos primitivos. Entender este sistema es otra forma de definir la geometría elemental.

4.1. El sistema de Tarski para la Geometría Elemental

El primer ingrediente en la receta de la geometría elemental de Tarski ya lo hemos visto: el objecto matemático primitivo, es decir los puntos, que serán variables del tipo $a, b, c, \ldots$. Lo siguiente que emplea son dos relaciones no lógicas, también símbolos primitivos:

1. La relación ternaria "estar entre" $\beta(abc)$ que se leería como b está entre a y c y significa que b está en el segmento que une los puntos a y c.

2.La relación cuaternaria de equidistancia denotada como $\delta(abcd)$[6] o $ab \equiv cd$ [7] que quiere decir que la distancia del punto a a b es la misma que la del punto c al d.

El concepto de centralidad no aparece hasta el siglo XX, lo que parece increíble basándose en la simpleza del mismo. Tanto Hilbert con sus axiomas para la geometría Euclidiana como Tarski lo usan. Por otra parte en consecuencia de la relación de equidistancia podemos obtener el concepto de congruencia para la geometría, de hecho una de las notaciones es la misma que para la congruencia de números. De esta forma decir que $ab \equiv a'b'$ querrá decir que el segmento con puntos finales a y b es congruente con el segmento con puntos finales a' y b'.

El último ingrediente que precisamos son las constantes lógicas. Aquí entran los conectores y cuantificadores ya vistos en el capítulo de Álgebra Elemental junto con los símbolos de igualdad y diferencia $\neq \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists\}$.

El siguiente paso es presentar los axiomas de la teoría. Este sistema de axiomas ha recibido cierto número de modificaciones a lo largo de los años, tanto por el propio Tarski como por otros matemáticos. Presentamos la forma final que Tarski decidió y formó con otros dos matemáticos: Schwabhäuser(1931) y Szmielew(1918)[1]. Ya resaltamos la sencillez del sistema, no precisamos definiciones previas como es el caso de los Elementos de Euclides, los axiomas se presentan directamente.

Axioma 4.1. *Reflexividad para la Equidistancia*

$$ab \equiv ba$$

Lógicamente a está a la misma distancia de b tanto como b lo está de a.

Axioma 4.2. *Transitividad para la Equidistancia*

$$ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \rightarrow pq \equiv rs$$

Si un segmento es congruente a otros dos estos últimos lo serán entre ellos.

Axioma 4.3. *Identidad para la Equidistancia*

$$ab \equiv cc \rightarrow a = b$$

Axioma 4.4. *Axioma de la identidad para "estar entre"*

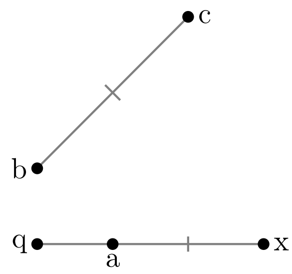
$$\beta(aba) \rightarrow a = b$$

Axioma 4.5. *Axioma de la Construcción de segmentos*

$$\exists(\beta(qax) \wedge ax \equiv bc)$$

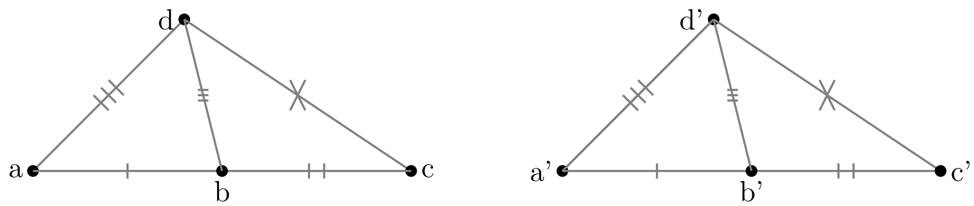
[1]Todas las modificaciones pueden verse en el documento [7], aquí nos limitamos a mostrar la versión más reducida hasta el momento.

Si tenemos un segmento bc podemos construir uno congruente



Axioma 4.6. *Axioma de los cinco segmentos*

$$[a \neq b \wedge \beta(abc) \wedge \beta(a'b'c') \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c' \wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd'] \rightarrow cd \equiv c'd'.$$

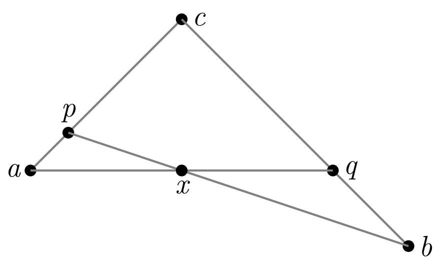


En lenguaje más simple este axioma nos dice que si tenemos dos triángulos $\triangle acd$ y $\triangle a'c'd'$ y dos puntos b y b' que estén en el segmento que une a y c y a' y c' respectivamente, existe una correspondencia entre ciertos pares de segmentos como se indica en el dibujo.

Este axioma es el que precede la mayor parte de los resultados relacionados con congruencia de ángulos, segmentos y triángulos

Axioma 4.7. *Primer Axioma de Pasch*

$$\beta(apc) \wedge \beta(bqc) \rightarrow \exists[\beta(pxb) \wedge \beta(qxa)]$$



Se leería como si p está entre a y c y q está entre b yc entonces existe un x que está entre p y b y entre q y a. Otra forma de expresarlo es que si una recta corta a uno de los lados de un triángulo tiene que cortar a otro y no al tercero, es decir si una recta penetra en el interior de un triángulo también sale de nuevo al exterior del mismo.

Axioma 4.8. *Axioma n-Dimensional inferior para* $n = 3, 4, ...$

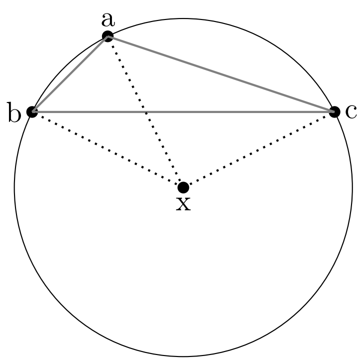
Este axioma nos dice que existen $n-1$ puntos distintos $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ y tres puntos a, b, c tales que cada uno de estos tres últimos es equidistante de los puntos $n-1$ no siendo coolineaes. Es decir el conjunto de todos los puntos equidistantes de cada n-1 puntos $p_1, p_2, ..., p_{n-1}$ no siempre es una línea.

Axioma 4.9. *Axioma n-Dimensional superior para* $n = 2, 3...$

Axioma 4.10. *Segunda forma del Axioma de Euclides*

$$\beta(abc) \vee \beta(bca) \vee \beta(cab) \vee \exists x[ax \equiv bx \wedge ax \equiv cx]$$

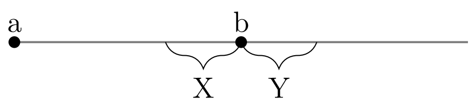
Dado un triángulo (compuesto por los segmentos dados) siempre existe un punto equidistante a los vértices, lo que nos lleva a que todo triángulo puede ser inscrito en un círculo.



Nótese que no debemos echar de menos el axioma de las paralelas pues este es una formulación equivalente.

Axioma 4.11. *Axioma de continuidad*

$$\exists a \forall x \forall y[x \in X \wedge y \in Y \rightarrow \beta(axy)] \rightarrow \exists b \forall x \forall y[x \in X \wedge y \in Y \longrightarrow \beta(xby)]$$



Dados dos conjuntos X e Y de forma que los elementos de X precedan a los de Y con respecto a un punto a, entonces están separados por un punto b

Todo esto compone la Geometría elemental de Tarski, [2]

[2] No obstante también ideó un sistema para toda la Geometría pero que no estudiaremos en este trabajo.

4.2. Aplicación del Método de Decisión a la Geometría Elemental

Alrededor del año 1930 Tarski prueba que su sistema de geometría admite eliminación de cuantificadores, a partir de estos estudios se presenta como aplicar el método de decisión a este ámbito, probando que la geometría elemental entendida por Tarski es completa y decidible.

Volviendo a la presentación de Tarski de la Corporación Rand [5] veremos cómo aplicar el Método de Decisión en este ámbito.

Lo que debemos hacer es correlacionar cada sentencia ϕ de geometría elemental con una sentencia $\phi*$ del álgebra elemental. Es decir, a cada variable de ϕ, denotada por ξ se le asignan dos variables algebraicas $\bar{\xi}$ y $\bar{\bar{\xi}}$ de forma que si tenemos dos variables distintas ξ e η también lo serán $\bar{\xi}$, $\bar{\bar{\xi}}$,$\bar{\eta}$ y $\bar{\bar{\eta}}$. Lo siguiente es particularizar los cambios de cada expresión del ámbito de la geometría elemental, esto es:

- La expresión $(E\xi)$ se reemplaza por $(E\bar{\xi})(E\bar{\bar{\xi}})$.
- La fórmula $\xi = \eta$ se reemplaza por $(\bar{a} = \bar{\eta}) \wedge (\bar{\bar{\xi}} = \bar{\bar{\eta}})$
- La fórmula $\beta(\xi, \eta, \mu)$ se reemplaza por

$$[(\bar{\bar{\eta}} - \bar{\bar{\xi}}) \cdot (\bar{\mu} - \bar{\eta}) = (\bar{\bar{\mu}} - \bar{\bar{\eta}}) \cdot (\bar{\eta} - \bar{\xi})] \wedge [((\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\eta} - \bar{\mu}) > 0) \vee ((\bar{\xi} - \bar{\eta}) \cdot (\bar{\eta} - \bar{\mu}) = 0)] \\ \wedge [((\bar{\bar{\xi}} - \bar{\bar{\eta}}) \cdot (\bar{\bar{\eta}} - \bar{\bar{\mu}}) > 0) \vee ((\bar{\bar{\xi}} - \bar{\bar{\eta}}) \cdot (\bar{\bar{\eta}} - \bar{\bar{\mu}}) = 0)]$$

- La fórmula $D(\xi, \eta, \mu, \nu)$ por $(\bar{\xi} - \bar{\eta})^2 + (\bar{\bar{\xi}} - \bar{\bar{\eta}})^2 = (\bar{\mu} - \bar{\nu})^2 + (\bar{\bar{\mu}} - \bar{\bar{\nu}})^2$

De esta forma si la sentencia ϕ es verdadera también lo será $\phi*$ y viceversa.

4.3. Ampliación de las teorías

A continuación podemos preguntarnos si sería posible aumentar las teorías definidas con algunas propiedades. Existen respuestas que ya conocemos como el hecho de añadir conceptos como "ser entero" o "ser racional", en este caso sabemos que no existiría un método de decisión en el sentido que hemos dado y así no se podría construir la máquina. Esto se sigue de los resultados de Gödel-Church-Rosser mencionados anteriormente y Mrs. Robinson para el caso de racional. También tiene el mismo resultado añadir funciones periódicas como sin, esto es debido a que un número x es racional si y solo si verifica la fórmula

$$(Ey)(Ez)[(x \cdot y = z) \wedge \neg(y = 0) \wedge (siny = 0) \wedge (sinz = 0)]$$

En otros casos el problema sigue aún abierto, como es el caso de añadir la operación exponenciación(restringida a casos reales) denotada por Exp[3] o el símbolo Cn que denotase la propiedad de ser un número construible[4]. No existe todavía respuesta, tanto positiva o negativa para la pregunta de si existe un método de decisión. No obstante las dificultades parecen ser de tipo matemático y puede que en los próximos años se halle una solución para el problema.

[3]Precisaríamos de tres nuevos axiomas para incluirla $(Ax)(Ay)[(x > y) \rightarrow (Exp(x) > Exp(y))]$, $(Ax)(Ay)[(Exp(x) \cdot Ep(y)) = Exp(x+y)]$ y $Exp(1) = 1 + 1$.

[4]Este es un tipo de número que indica que puede ser obtenido a partir del 1 mediante las operaciones sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíz cuadrada. Añadir esta propiedad resultaría muy interesante porque nos permitiría no solo decidir la verdad de una sentencia de la geometría elemental si no también decidir cuándo la verdad de una sentencia puede establecerse usando solamente regla y compás.

Apéndice

1. Todo el desarrollo del sistema formal para el álgebra elemental sigue un esquema lógico básico, es decir, que se corresponde con la lógica de primer orden de los números reales junto con la suma y la multiplicación. En estas líneas se proporciona un resumen de los conceptos de lógica que son necesarios para la comprensión del trabajo.

   La base de la lógica son los argumentos, formados por un conjunto de premisas y una conclusión luego son una serie de ideas que desencadenan lógicamente una última. Pueden ser válidos o inválidos en cuestión de si su forma es correcta. Un argumento es inválido si las premisas pueden ser todas verdaderas y la conclusión falsa, en caso contrario, es válido.

   El proceso de formalización del Álgebra que se vio en el Capítulo 2 precisa de un lenguaje que, al igual que sería el caso del entorno lingüístico, está compuesto por un alfabeto y una gramática.

   El alfabeto tiene como elementos las variables, constantes, funciones (y en consecuencia operaciones), los conectores$\{\bot, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, los cuantificadores$\{\exists, \forall\}$, los elementos de agrupación y los predicados. Salvo estos últimos los anteriores están definidos en la parte principal del trabajo. Los predicados son frases que asignan propiedades y generalmente se denotan con letras mayúsculas P, Q, R etc., son tratados como funciones y también podemos hablar de aridad de un predicado según el número de elementos que tenga en cuenta. A partir de variables, constantes, operaciones y signos de agrupación podemos formar términos. Finalmente una fórmula atómica será un símbolo de predicado n-ario seguido, entre paréntesis, por n términos separados por comas.

   La parte de la gramática está dividida a su vez en dos ámbitos: la sintaxis y la semántica. La primera estudia las reglas de formación de los elementos del lenguaje cuyo fin es establecer fórmulas bien formadas (a su vez compuestas por términos y fórmulas atómicas dadas al juntar elementos del alfabeto) y sentencias en el caso de no poseer variables libres. Las fórmulas a las que nos referimos en el trabajo son fórmulas bien formadas(fbf). Definiremos este concepto de forma recursiva:

- Las fórmulas atómicas y $\perp$ son fbf.
- Si $\mathcal{F}$ es fbf también lo será $\neg\mathcal{F}$.
- Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son fbf también lo serán $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}, \mathcal{F} \vee \mathcal{G}, \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ y $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$.
- Si $\mathcal{F}$ es una fbf también lo serán $\exists\mathcal{F}$ y $\forall\mathcal{F}$.
- Todas las fbf sobre X son generadas aplicando sólo las reglas anteriores.

La semántica atiende al significado de estas funciones o sentencias, estudiando el contenido y no la forma como era en el caso anterior. En este contexto entraría el valor de verdad

2. Los sistemas deductivos se emplean para tratar de dar respuesta a un método para caracterizar las fórmulas bien formadas que son tautologías. "El cálculo de predicados no es decidible, no existe ningún método para decidir cuando una fórmula del cálculo de predicados es válida; aunque si existen zonas parciales de decidibilidad dentro de dicho sistema"[14]. Para conseguir derivar los teoremas de un sistema podemos utilizar en particular un **sistema axiomático**, la forma más común de sistema deductivo. Este está formado, además del alfabeto y la gramática, por un grupo selecto de sentencias llamadas axiomas y un conjunto de reglas denotado reglas de inferencia que nos permiten formar nuevas sentencias a partir de los axiomas. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ fórmulas, se definen los axiomas:

Axioma .12. $\mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F})$

Axioma .13. $(\mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H})) \rightarrow ((\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}))$

Axioma .14. $(\neg\mathcal{F} \rightarrow \neg\mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F})$

Axioma .15. $\forall x\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}[r \leftarrow x]$ *r término libre para x en F.*

Axioma .16. $\forall x(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}) \rightarrow (\mathcal{F} \rightarrow \forall x\mathcal{G})$ *x no variable libre en F.*

Toda fórmula del lenguaje que responda al patrón de alguno de esos esquemas será un axioma. Por último las reglas de inferencia empleadas son:

- Modus Ponens $\{\mathcal{F}, \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}\} \vdash \mathcal{G}$
- Generalización $\{\mathcal{F}\} \vdash \forall x\mathcal{F}$

Si S es un conjunto de proposiciones, se dirá que una fórmula $\mathcal{G}$ se deduce de S si existe una sucesión finita de proposiciones $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ con $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}$ tal que, para cada $i \leq n$ se verifica uno de las siguientes puntos:

a) $\mathcal{F}_i$ es un axioma

b) $\mathcal{F}_i$ es una premisa

c) $\mathcal{F}_i$ es consecuencia directa mediante una de las dos reglas de inferencia.

Se denotará $S \vdash \mathcal{G}$ para indicar que $\mathcal{G}$ se deduce de S y la sucesión $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ recibe el nombre de demostración. Si no existen premisas se escribe $\vdash \mathcal{G}$ y se dice que $\mathcal{G}$ es un teorema del cálculo de proposiciones.

Por tanto un teorema de una lógica es una fórmula del lenguaje formal que es deducible en ella a partir de los axiomas con ayuda sintáctica de las reglas de inferencia.

3. El **Teorema de Sturm** permite conocer el número exacto de raíces de un polinomio $f(x)$ dentro de un intervalo. El primer paso es formar una cadena de polinomios compuesta por los siguientes:

   - En primer lugar el propio polinomio $f_0(x) = f(x)$.
   - A continuación la derivada $f_1(x) = f'(x)$.
   - El siguiente polinomio es el resto resultante de dividir $f_0(x)$ y $f_1(x)$ multiplicado por -1.
   - El polinomio $f_{i+1}(x)$ será el resto con signo contrario resultado de dividir los los polinomios $f_{i-1}(x)$ y $f_i(x)$.

   El proceso se repite hasta obtener un número, es decir que no se dependa de x. Si c no es raíz del polinomio original se define $V(c)$ como el número de variaciones de signo de ese valor en la sucesión de polinomios anterior.

   A continuación lo que puramente nos dice el Teorema es lo siguiente:

   Teorema .17. *Sean a y b números reales tales que ninguno de ellos es raíz de $f(x)$ suponiendo $a < b$. Entonces $V(a) \geq V(b)$ y el número de raíces reales entre a y b es igual a $V(a) - V(b)$ [8].*

   También se podía aplicar en todo su dominio dando valores en $-\infty$ y ∞.

Bibliografía

[1] Kleene, S. C., *General recursive functions of natural numbers*, Mathematische annalen, **112**, (1936), 727–742.

[2] Sinaceur, H., *Mathématiques et métamathématique du congrès de Paris (1900) au congrès de Nice (1970): nombres réels et théorie des modèles dans les travaux de Tarski*, Studies in the history of modern mathematics II, **44**, (1996), 113-132.

[3] Tarski, A., *Einige Betrachtungen über die Begriffe der W-Widerspruchsfreiheit und der W-Vollständigkeit*, Monatshefte für Mathematik and Phisik, **40**, (1933), 97–112.

[4] Tarski, A., *Der Wahrsheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, Studia philosophica, **1**, (1939), 261–405.

[5] Tarski, A., *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, Prepared for Publication with the Assistance of J.C.C. McKinsey. Santa Monica, CA: RAND Corporation, (1951).

[6] Tarski, A., *What is elementary geometry?*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier, **27** (1959), 16–29.

[7] Tarski, A. and Givant, S., *Tarski's system of geometry*, Bulletin of Symbolic Logic, **5(2)**, (1999), 175–214.

[8] Yañez, G., *El teorema de Sturm.* Revista Integración, temas de matemáticas, **2(1)**, (1983), 59-67.

[9] Ponce, A. and Martinez, J., *Saber filosofico vol. 2: Sociedad y ciencia*, Siglo XXI, Mexico, 2007.

[10] Barnes, D. W. and Mack, J. M., *An algebraic Introduction to Mathematical Logic*, Graduate Texts in Mathematics, 22, Springer Science and Business Media, New York, 1975.

[11] Grattan-Guinness, I. *Alfred Tarski: Early Work in Poland—Geometry and Teaching*, Springer, New York, 2014.

[12] Hilbert, D. and Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, 1, Berlin, 1934. **2**, Berlin, 1939.

[13] O'Connor, J. and Robertson, E. F., 2003, *Alfred Tarski (1901-1983)*. Recuperado de: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tarski.html. Consulta de 08/02/2020.

[14] Barja, J. M., *Lógica para informáticos*, 1997.