

materia

Programación Linear e Enteira

unidade didáctica 2

Programación linear enteira

M. Ángeles Fernández Fernández

Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Facultade de Matemáticas



VICERREITORÍA DE ESTUDANTES,
CULTURA E FORMACIÓN CONTINUA

titulación

Grao en Matemáticas



unidade didáctica 2

Programación linear enteira

M. Ángeles Fernández Fernández

Departamento de Estatística e Investigación Operativa
Facultade de Matemáticas



© Universidade de Santiago de Compostela, 2013



Esta obra atópase baixo unha licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0. Calquera forma de reprodución, distribución, comunicación pública ou transformación desta obra non incluída na licenza Creative Commons BY-NC-SA 3.0 só pode ser realizada coa autorización expresa dos titulares, salvo excepción prevista pola lei. Pode acceder Vde. ao texto completo da licenza nesta ligazón: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/es/legalcode.g>

Deseño
Unidixital
Servizo de Edición Dixital
da Universidade de Santiago de Compostea

Edita
Vicerreitoría de Estudantes,
Cultura e Formación Continua
da Universidade de Santiago de Compostela
Servizo de Publicacións
da Universidade de Santiago de Compostela

Imprime
Unidixital
Dep. Legal: c 60-2013
ISBN 978-84-9887-953-7

ADVERTENCIA LEGAL: reservados todos os dereitos. Queda prohibida a duplicación, total ou parcial desta obra, en calquera forma ou por calquera medio (elec-trónico, mecánico, gravación, fotocopia ou outros) sen consentimento expreso por escrito dos editores.

MATERIA: Programación linear e enteira
TITULACIÓN: Grao en Matemáticas
PROGRAMA XERAL DO CURSO
Localización da presente unidade didáctica

Unidade I. Programación linear

Introdución á Investigación Operativa. Motivación e aplicación
Programación linear
O algoritmo do símplex. Fundamentos teóricos. A súa complexidade
Dualidade e análise de sensibilidade
Paquetes de optimización de uso habitual

Unidade II. Programación linear enteira

Programación linear enteira
Métodos de planos de corte
Métodos de enumeración implícita
Métodos de ramificación e acotación

Unidade III. Nocións xerais de optimización e deseño de algoritmos

Optimización e programación matemática: Unha panorámica
Algoritmos e complexidade computacional
Resolución de problemas de optimización

Unidade IV. Optimización en redes de fluxo

Programación en redes de fluxo. O problema de fluxo en redes a custo mínimo.
O problema do transporte. Método símplex do transporte.
O problema de asignación. Método húngaro.
O problema do camiño máis curto. Algoritmo de Dijkstra.
O problema do fluxo máximo. Algoritmo de traxectorias aumentadas.
O problema da árbore de expansión mínima. Algoritmo de Prim.
O problema do axente viaxeiro. Algoritmo de Christofides.

Unidade V. Planificación de proxectos

Planificación de proxectos. Método PERT
Aceleración de proxectos a custo mínimo. Método MCE: Algoritmo de Ackoff e Sasieni.+-

ÍNDICE

Presentación	7
Os obxectivos	7
1. Obxectivos xerais	7
2. Obxectivos específicos	8
3. Obxectivos transversais	9
Os principios metodolóxicos	9
1. Clases expositivas	9
2. Clases de seminario	10
3. Prácticas de informática	10
4. Titorías	10
Os contidos básicos	11
1. Introducción	11
2. Clasificación dos problemas de programación enteira	12
2.1. Primeira clasificación	12
2.2. Segunda clasificación	12
3. Modelos básicos. Modelización con variables binarias	12
3.1. Problemas tipo	12
3.2. Outros problemas	12
3.3. Aproximacións	12
4. Métodos de solución	12
4.1. Métodos de planos de corte	12
4.2. Métodos de ramificación e acotación	12
4.3. Enumeración implícita en problemas binarios	12
Actividades propostas	13
1. Actividades en aula ordinaria	13
1.1. Revisión histórica e coñecementos previos	14
1.2. Actividades de modelización e transformación	14
1.3. Métodos de solución	14
2. Actividades en laboratorio de informática	14
2.1. Revisión de ferramentas	14
2.2. Traballo colaborativo e individual	15
Avaliación da unidade	15
Anexos	15
Anexo 1: Proposta de material clase expositiva	16
1. Problemas transformados	16
2. Modelos básicos: Problema de almacenaxe	17
3. Métodos de solución	17
Anexo 2: Proposta de material de seminario	20
Anexo 3: Proposta de laboratorio de informática	21
Bibliografía	22
1. Bibliografía básica	22
2. Bibliografía complementaria	23
3. Citas de recursos en internet	23

PRESENTACIÓN

A unidade didáctica enmárcase dentro dos contidos relativos á materia de Formación Básica *Programación linear e enteira*, de 6 créditos ECTS que se imparte no primeiro semestre do segundo curso do Grao en Matemáticas.

A materia á que corresponde forma parte da Formación Obrigatoria que a titulación oferta en segundo curso. Pretende, por unha banda, que o alumnado afiance e desenvolva as destrezas fundamentais en relación á programación linear e enteira e ademais, propicia unha toma de contacto co modelado de certos problemas de interese no ámbito da Optimización, proporcionando algunhas técnicas sinxelas de resolución dos modelos formulados, así como a do estudo da sensibilidade e postoptimización da solución obtida. Para un maior aproveitamento será importante ter coñecementos previos de espazos vectoriais e de cálculo matricial.

A materia estrutúrase en diferentes unidades didácticas, e esta unidade didáctica correspóndese co Tema 2, con ela iníciase o estudo dos modelos de programación linear enteira, a súa identificación, métodos xerais de soluciónalos, así como modelados doutros problemas dentro das súas característica.

Para o seu desenvolvemento apoiámonos no estudo dos elementos básicos desenvolvidos na unidade anterior e xa traballados de maneira conveniente, polo que poderemos afondar sen maior dificultade na unidade da que estamos a traballar dados os coñecementos previos xa adquiridos polo alumnado.

A unidade verase completada noutras posteriores onde se afondará en problemas específicos e de especial interese que teñen implementados métodos propios de resolución, é importante sinalar que lle vai proporcionar ademais unha maior comprensión e asimilación doutras materias que forman parte do seu plano de estudos.

A formación proporcionada pola unidade en concreto (e pola materia en xeral) resulta fundamental na formación dos graduados en Matemáticas independentemente da súa orientación profesional posterior, pola súa contribución ao desenvolvemento da capacidade de razoamento e da capacidade de interpretar datos e obter conclusións.

OS OBXECTIVOS

Os obxectivos que se pretenden cubrir nesta unidade didáctica clasificámoslos en tres tipos.

1. Obxectivos xerais

Serán os incluídos dentro da materia da que forma parte.

- O.X.1. Situar á programación enteira no contexto da Programación lineal.

- O.X.2. Proporcionar una base matemática para a resolución e toma de decisión en problemas relacionados coa programación matemática que presenten unha modelización con supostos da programación enteira.
- O.X.3. Fomentar a capacidade de análise e de abstracción na definición e formulación de problemas enteiros e na busca de solucións.
- O.X.4. Propoñer modelos de situación reais sinxelos, analizar e validar e interpretar ditos modelos e adquirir a capacidade de traballar en modelos de maior dificultade.
- O.X.5. Ser consciente da utilidade da programación linear enteira cara ao futuro profesional do alumno.

2. Obxectivos específicos

Considerados como propios da unidade didáctica.

- O.E.1. Coñecer as características que deben presentar os modelos de programación linear enteira, cara a unha solución de maneira exacta ou ben proporcionar aproximacións que podan seren admitidas como válidas.
- O.E.2. Aplicar os coñecementos adquiridos nas unidades anteriores e avanzar noutros coñecementos que leven a formular solucións a diversos problemas, ben de carácter xeral ou de carácter máis particular (problemas directos ou ben transformados) que sexan enmarcados na programación enteira.
- O.E.3. Distinguir clases de problemas con características comúns e, polo tanto, solucións máis particulares ca no modelo global, que serán desenvolvidos en unidades posteriores
- O.E.4. Coñecer e algoritmos de resolución e facer unha introdución aos algoritmos de natureza heurística.
- O.E.5. Analizar casos prácticos, facendo uso de ferramentas informáticas e software científico, en xeral, para resolver estes problemas.
- O.E.6. Interpretar os resultados, analizar a sensibilidade da solución proposta e estudar as modificacións nos parámetros do modelo

3. Obxectivos transversais

Serán os de interese dentro dos estudos de Grao. Nas actividades que se propoñan promoverase o seu desenvolvemento.

- O.T.1. Estudar e aprender de forma autónoma, con organización de tempo e recursos, novos coñecementos e técnicas.
- O.T.2. Fomentar a colaboración entre os distintos membros dun grupo, aportando orde, abstracción e razoamento lóxico.
- O.T.3. Manexar con soltura as fontes bibliográficas e ferramentas de busca , incluíndo o acceso a Internet.
- O.T.4. Comunicar, tanto por escrito como de forma oral, coñecementos, procedementos, resultados e ideas da unidade tanto a un público especializado como non especializado.
- O.T.5. Ler textos científicos tanto en lingua propia como en outras de relevancia no ámbito científico.

OS PRINCIPIOS METODOLÓXICOS

O desenvolvemento da Unidade Didáctica farase nun total de 9 horas e estruturarase en clases expositivas e interactivas, que se verán complementadas con titorías, de aula en grupos moi reducidos ou as chamadas titorías de despacho, atendidas de maneira máis individualizada. En todas elas o profesor deberá non só ser un transmisor dos contidos aos alumnos, deberá principalmente ser un orientador do seu aprendizaxe e promotor do seu traballo en equipo, o que fomentará a cooperación e a responsabilidade na consecución dos obxectivos.

As clases expositivas serán tres de cincuenta e cinco minutos cada unha, os seminarios interactivos de aula en grupos máis reducidos tamén serán tres de cincuenta e cinco minutos cada unha e tres prácticas interactivas de informática coa mesma duración en grupo máis pequenos, procedentes do desdoblamento dos grupos de seminario.

1. Clases expositivas

As clases expositivas dedicarase ao desenvolvemento dos contidos esenciais da unidade, facendo fincapé naqueles aspectos da unidade didáctica que presenten maior dificultade. Sendo uns tipos de clase de características máis de tipo maxistral, cada apartado motivarase cun problema tomado da vida real co fin de promover na medida do posible a participación dos alumnos durante a exposición. Ademais formularanse cuestións que sexan indicadoras do nivel de aproveitamento e consecución de obxectivos.

Ao comezo de cada clase dedicaranse uns poucos minutos a situar os contidos a traballar na sesión dentro do contexto xeral da unidade, para continuar cun esquema dos aspectos a tratar na sesión, pasando a continuación á exposición de cada un deles, e de ser o caso, ilustrada con exemplos e deixando apartados máis de tipo de aplicación que poderán ser tratados en seminarios.

Empregaranse os medios audiovisuais dispoñibles na aula para proxectar unha presentación que sirva de guía á exposición. O encerado tamén se utilizará, fundamentalmente para a realización de problemas. Para o seguimento das clases, os estudantes dispoñerán de materiais didácticos coa suficiente antelación e que poderán obter a través da USC virtual e de bibliografía específica que sirva de axuda no proceso de aprendizaxe, (Exemplo no Anexo 1).

2. Clases de seminario

As sesións de seminario deben servir de test de detección de obxectivos conseguidos cos clases expositivas, levando ao profesor a facer fincapé naqueles aspectos que presenten algunha dificultade, ademais de desenvolver parte dos contidos teóricos que non foron traballados nas clases expositivas e que poidan ter máis contido práctico, polo que serán estudados e discutidos exercicios e casos que familiarizarán ao alumno coa modelización e resolución dos problemas reais que teñan estrutura de programación enteira. Os materiais correspondentes aos seminarios tamén estarán ao seu dispor coa suficiente antelación e que poderán obter a través da USC virtual, os alumnos deberán intentar resolvelos previamente á sesión de seminario, polo que a clase será máis interactiva e de discusión e por último, unha vez que o profesorado corrixa os fallos, farase unha posta en común. (Exemplo no Anexo 2).

3. Prácticas de informática

Nas correspondentes á aula de informática formularanse casos prácticos que deberán modelar e resolver utilizando paquetes informáticos xa estudados en unidades anteriores ademais de resolvelos manualmente se os problemas son de pequena dimensión. Serán as clases de características máis interactivas, resolvéndose en cada sesión as dúbidas que vaian formulando. Fomentárase entre os alumnos/as a capacidade resolutiva ante modificacións, ben propostas polo profesor/a ou ben que eles mesmos sexan capaces de formular, polo que a práctica se verá enriquecida. (Exemplo no Anexo 3).

4. Titorías

Por outra banda, as titorías en pequenos grupos permitirán realizar un mellor seguimento do proceso de ensino-aprendizaxe e discutir sobre os

aspectos fundamentais da materia, orientando e fomentando o traballo persoal do alumno. Poderán facer utilización das titorías de despacho onde se resolverán as cuestións e problemas que vaian xurdindo ao longo do proceso de aprendizaxe da unidade.

As horas de traballo presencial na aula deberán ir unidas de xeito ineludible a un traballo persoal axeitado por parte do alumnado, que consiste en horas de estudo individual, elaboración de exercicios, lecturas ou outras actividades recomendadas, traballo persoal relacionado coas prácticas de ordenador, así como a realización de probas.

Fomentarase a participación activa do alumno no proceso de aprendizaxe, tanto na asistencia como a utilización de horas de titorías, a realización dun esforzo responsable de traballo e asimilación persoal dos métodos estudados, con especial importancia nos aspectos máis prácticos e, en xeral, un traballo autónomo e en grupo de maneira continuado, tendo en conta que os coñecementos e as destrezas adquiridas van ser utilizadas no desenvolvemento de unidades posteriores da mesma materia e de materias afíns.

OS CONTIDOS BÁSICOS

A unidade encárgase do estudo de problemas de programación lineal no que todas as variables, ou parte delas deberán tomar valores enteiros, incluíndo o caso de variables binarias que poderán ser utilizadas para solucionar problemas de decisión Si/Non unha vez sexan codificadas.

Iníciase un breve percorrido histórico acerca dos inicios da programación enteira e a continuación faríase un enlace cos coñecementos adquiridos na unidade anterior sobre a programación lineal continua e a súa aplicación para a solución no caso enteiro.

Despois de introducir os tipos de problemas, presentarase un apartado para diversos tipos de modelados que a programación enteira proporciona: problema da dieta, de investimento, do transporte, de asignación, de transformación, etc. A continuación estudaranse os métodos de resolución, tanto para problemas xerais como para problemas binarios.

Facemos a continuación unha breve descrición dos contidos en cada un dos apartados.

1. Introducción

- 1.1 Panorama histórico da programación enteira.
- 1.2 A non aproximación da solución do problema continuo (contraexemplos).
- 1.3 A non aproximación da solución do problema continuo (contraexemplos).

Neste apartado verase unha panorámica de natureza histórica e farase fincapé na presentación dalgún exemplo onde a primeira tentación que

xorde para abordar a resolución dun problema é a de redondear a solución obtida ao relaxar a condición de ter valores enteiros non é válido.

2. Clasificación dos Problemas de programación enteira

- 2.1 *Primeira clasificación:* Programación Lineal Enteira Pura, Programación Lineal Enteira Mixta Programación Binaria (0–1.)
- 2.2 *Segunda clasificación:* Problemas directos. Problemas codificados. Problemas transformados.

A primeira clasificación, de natureza máis clásica será ilustrada con exemplos sobre os que decidirán a natureza das variables implicadas e a elaborar a formulación dos modelos oportunos.

Na segunda clasificación, os modelos directos son os que presentan de natureza inicial a característica da primeira clasificación. Presentarase a continuación aos alumnos determinados problemas de característica cualitativa (decisións SI ou NON, ou quizais máis alternativas), unha vez presentados exemplos promoverase a discusión de alternativas de solución en problemas que xorden con moita frecuencia na vida real.

3. Modelos básicos. Modelización con variables binarias

- 3.1 Problemas tipo: Distribución dun presuposto. Problema do transporte. Problema de almacenaxe (mochila). Problema do viaxante. Problema de asignación xeneralizada e asignación cuadrática. Problema de cubrimento e particionamento.
- 3.2 Outros problemas (Problema de custo fixo. Perdas por cortes.
- 3.3 Aproximación dunha función non lineal dunha variable mediante unha lineal a cachos utilizando Programación enteira).

Para insistir na importancia da Unidade, describiranse problemas básicos, algúns serán modelizados polo profesor, outros deberán ser consensuadas as súas formulacións despois de abrir o debate na aula. Os problemas serán repartidos por grupos que deberán consensuar a formulación e posteriormente explicar ao resto dos seus compañeiros.

Despois dunha primeira explicación por parte do profesorado, o bloque préstase a ser traballado en clases interactivas.

4. Métodos de solución

- 4.1 Métodos de planos de corte.
- 4.2 Métodos de ramificación e acotación.
- 4.3 Enumeración implícita en problemas binarios.

Se estamos nun modelo de Programación Enteira (puro ou mixto) e resolvemos o modelo de Programación Lineal asociado estaremos obtendo

a solución da Relaxación Continua do modelo enteiro. No caso particular que a Relaxación Continua obteña unha solución enteira, entón esta será tamén a solución do modelo de Programación Enteira asociado. En caso contrario deberemos utilizar algunha estratexia ou algoritmo para obter a solución do modelo de PE. Os métodos máis estendidos son:

- *Métodos de Planos de Corte*: introdúcense novas restricións ao problema relaxado, ata lograr que a solución óptima do novo problema sexa enteira. Elimínanse algunhas solucións continuas sen eliminar ningunha solución enteira.
- *Métodos enumerativos*: consisten en enumerar de forma implícita as solucións e mediante test ou cotas para a función obxectivo, descartalas antes de coñecelas explicitamente.
- *O método Branch and Bound (Ramificación e Cota)*. Divide en problemas menores: ramificación e descarta algúns deles: cota. Ás veces pode usarse como heurístico, se non se exploran todos os nodos. Se se exploran todos si se garante o óptimo.
- *Métodos híbridos*: combinan as dúas estratexias anteriores. O método Branch and Cut (Ramificación e Corte).
- *Métodos de enumeración implícita (programación binaria)*. O método de ramificación e cota no caso de problema binario, apoiase en que todas as variables son cero ou un, co que podemos simplificar os procesos de ramificación e cota e determinar de maneira eficiente cando un nodo é factible.

Ao mesmo tempo que se desenvolven as técnicas, estas serán postas en marcha en clases preferiblemente de laboratorio de informática, onde non só terán que ir resolvendo casos máis fáciles, senón que a dificultade se irá aumentando para traballar en propostas que deberán presentar resultas a niveis de grupos moi reducidos para a avaliación final.

ACTIVIDADES PROPOSTAS

1. Actividades en aula ordinaria

Corresponden ás clases expositivas e de seminario en grupo reducido. Empregarase como recursos material bibliográfico, resumos e boletíns colgados no curso virtual creado para a materia, encerado, proxeccións co ordenador, utilización de recursos informáticos e buscas na rede.

En todas as actividades promoverase o desenvolvemento dos obxectivos transversais.

1.1 Revisión histórica e coñecementos previos: relacionado co contido 1 e os obxectivos O.X.1, O.X.3, O.E.1 e E O.2.

1.2 Actividades de modelización e transformación : relacionadas cos contidos 2 e 3 e cos obxectivos O.X.2, O.X.4 e O.E.3.

Metodoloxía: Presentación por parte do profesor/a das bases conceptuais, unha vez formalizadas, fomentárase a cooperación e discusión no alumnado para a posta en común. Faranse propostas de casos prácticos que deberán ser modelizados ou ben indicacións claras para iso nas clases de seminario.

1.3 Métodos de solución: relacionadas co contido 4 e os obxectivos O.X.4, O.X.5, O.E.4, O.E.5 e O.E.6.

Metodoloxía: Revisión do profesor/a dos métodos de solución máis sinxelos, promovendo entre o alumnado a busca de métodos máis específicos.

Propostas en seminarios de grupos reducidos para seren solucionadas e modificadas de maneira conveniente, que serán expostas ao resto dos compañeiros e compañeiras, traballarán en pequenos grupos e deberán entregalos por escrito para serlles devoltos corrixidos.

Busca de casos prácticos que fomenten o traballo cooperativo, imaxinativo e resolutivo.

2. Actividades en laboratorio de informática

Farase en grupos pequenos que permitan unha maior interacción profesor/a e estudante.

Empregarase como recursos resumos e propostas colgados no curso virtual creado para a materia, proxeccións co ordenador, utilización de recursos informáticos e buscas na rede.

De novo en todas as actividades promoverase o desenvolvemento dos obxectivos transversais.

2.1 Revisión de ferramentas: relacionadas cos contidos 2, 3 e 4 e os obxectivos O.X.4, O.E.4, O.E.5 e O.E.6

Metodoloxía: O profesor/a fará unha breve revisión dos coñecementos que os alumnos terán adquiridos e utilizadas de ferramentas informáticas e linguaxes de programación, fundamentalmente o complemento Solver de Microsoft Excel que é utilizado en materias afíns, linguaxe R por ser de uso habitual en materias da Área (<http://www.r-project.org/>) e LINDO (<http://www.lindo.com/>) pola facilidade de manexo. O alumnado xa terá utilizado as ferramentas con anterioridade.

2.2 Traballo colaborativo e individual: relacionado cos contidos 2, 3 e 4 e os obxectivos O.X.4, O.E.4, O.E.5 e O.E.6

O alumnado manexará sen dificultado o software considerado máis adecuado o que servirá para resolver propostas de maneira máis dinámica, e de maneira gradual serán introducidas cuestións de post-optimización e de sensibilidade para facer a presentación de resultados máis ampla e de maneira consensuada. Sinalar a importancia de traballar en equipo, achegando orde, abstracción e razoamento lóxico.

AVALIACIÓN DA UNIDADE

A avaliación da unidade didáctica farase mediante avaliación continua e no exame final da materia da que forma parte.

- **Avaliación continua:** farase de xeito continuado e tendo en conta as actividades sinaladas no apartado anterior, avaliando positivamente aqueles alumnos/as que participen nas distintas categorías de clases, o que fomentará estar ao día na materia, resolver cuestións que se vaian formulando e a utilización das titorías. Valorarase cun 25% da nota final.

Avaliación de contidos: mediante preguntas feitas na aula, nivel de atención, participación activa nas clases e aproveitamento, asistencia ás mesmas, saídas ao encerado, interese e cooperación manifesto.

Avaliación dos seminarios: o alumnado deberá entregar por escrito exercicios propostos para resolver de maneira individual ou en grupo, facer a exposición oral dalgún deles. Valorarase a claridade e a presentación, así como o grao de participación no traballo grupal.

Avaliación das prácticas de informática: proporase un traballo non pechado que deberán resolver utilizando non só os contidos desta unidade didáctica, senón que deberán incluír coñecementos e técnicas que estuden en unidades posteriores, elaborar un informe de resultados e de modificacións para conseguir a mellor solución en circunstancias de variación das características do problema inicial.

- **Proba final:** realizarase un exame escrito teórico-práctico que constará dunha parte de exercicios similares aos feitos na clase, parte de preguntas e cuestións curtas, e outra parte que se realizará no laboratorio de informática. Coa proba poderase avaliar non só os seus niveis de coñecemento, senón a capacidade de dedución e razoamento do alumno/a. Valorarase nun 75% da nota final.

- **Cualificación final:** A nota final será o máximo entre a obtida pola avaliación continua e a a nota do exame teórico-práctico.

ANEXOS

Preséntanse propostas de materiais a traballar nos distintos bloques de clase polos alumnos ao longo do desenvolvemento da unidade didáctica.

ANEXO 1: Proposta de material clase expositiva

1. Problemas transformados: deben cumprirse k de N restricións, (k < N)

Que combinación de k restricións permite que a f. do obxectivo tome o mellor valor posible? As N-k que non se elixan, de feito, quedan eliminadas, aínda que por coincidencia as solucións factibles poidan satisfacelas.

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_N(x_1, \dots, x_n) \leq b_N \end{array} \right\}$$

considerando M unha constante positiva moi grande, formularemos:

$$\begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1 + My_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \leq b_2 + My_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_N(x_1, \dots, x_n) \leq b_N + My_N \\ \sum_{i=1}^N y_i = N - k \\ y_i \in \{0, 1\} \quad , i = 1, \dots, N \end{array}$$

2. Modelos básicos. Problema de almacenaxe (mochila):

Dado un certo espazo con determinado volume ou capacidade ou limitación de peso, que debe ser enchido con obxectos de valor de volume ou peso dado, ver como é posible encher este espazo cos obxectos máis valiosos de forma que non exceda os límites físicos de dito espazo. Supoñamos que son n obxectos, cada un cun peso P_i e un valor V_i

Sexa P = peso total admisible

Formulamos:

$$\begin{aligned} \text{Sexa } x_i &= n^{\circ} \text{ de unidades do obxecto } i - \text{ésimo} \\ \text{Max } z &= \sum_{i=1}^n V_i x_i \\ \text{s.a. } \sum_{i=1}^n P_i x_i &\leq P ; x_i \in Z^+, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Outra variante é o coñecido co nome de perdas por cortes.

3. Métodos de solución

Resolva os dous seguintes modelo de Programación Enteira utilizando o algoritmo *de Ramificación e Cota*.

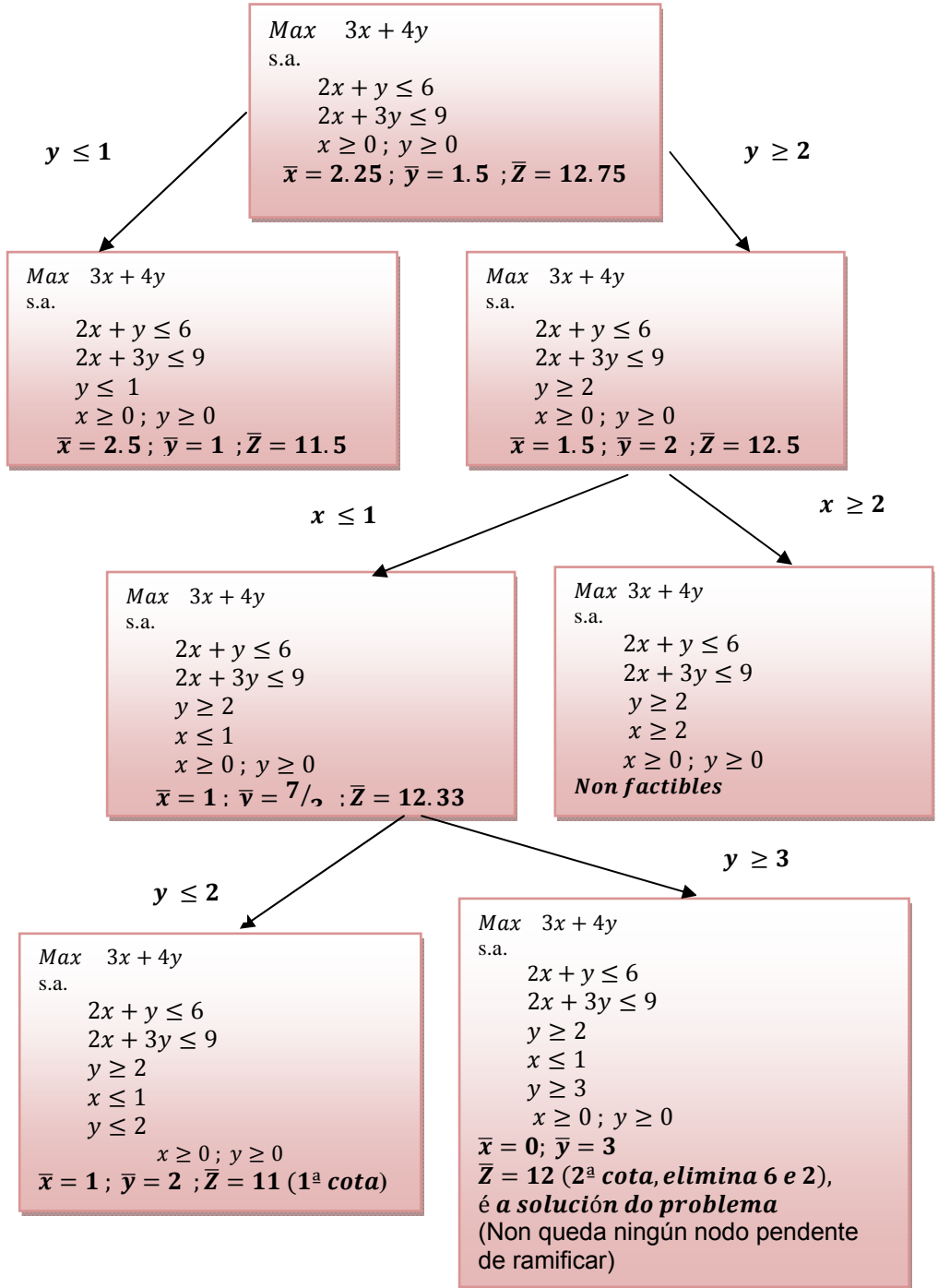
3.1

$$\begin{aligned} \text{Max } & 3x + 4y \\ \text{s.a. } & \\ & 2x + y \leq 6 \\ & 2x + 3y \leq 9 \\ & x \geq 0 ; y \geq 0 \end{aligned}$$

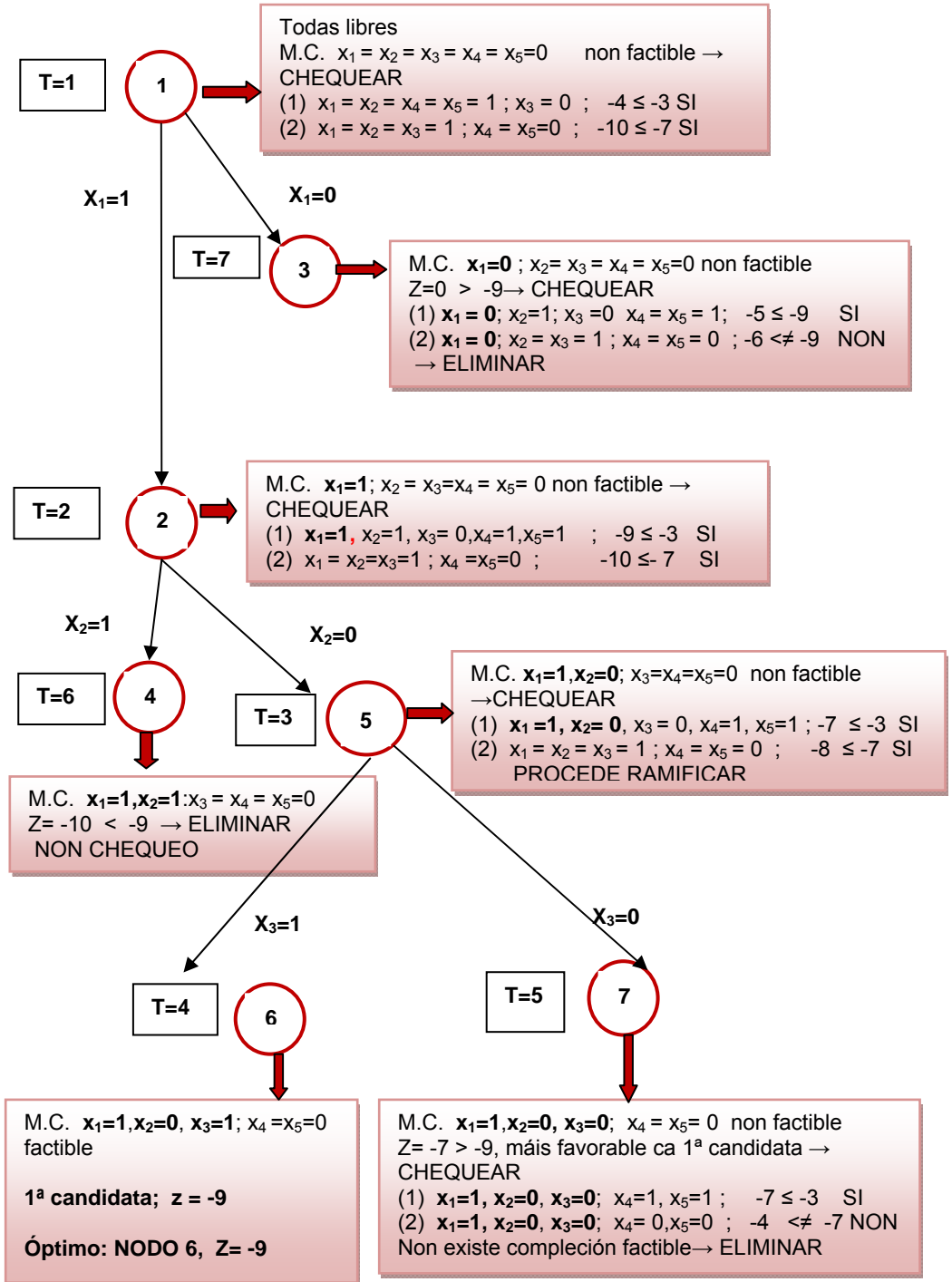
3.2

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= -7x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 \\ \text{s.a. } & \\ & -4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq -3 \\ & -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 \leq -7 \\ & x_i = 0, 1 ; i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Solución 3.1



Solución 3.2



ANEXO 2: Proposta de material de seminario

A empresa Motor G. contrata a unha empresa de publicidade para que elabore unha estratexia destinada a promover a venta dos seus coches usados. A empresa de publicidade recoméndalles que utilice anuncios tanto na televisión como na radio, pensando que son os medios de publicidade idóneos para a campaña promocional que se propón. As liñas indicadas son:

- a) utilizar anuncios na cobertura combinada na radio e na televisión.
- b) non empregar máis de 25 anuncios na radio.
- c) o número de anuncios na radio non pode ser menor có número de anuncios por televisión.

Determinábase que o presuposto publicitario da Motor G. é de 25.500 u.m. e tamén que a cadea de televisión cóbralle 1200 u.m. por anuncio e a de radio 300 u.m. por anuncio. A empresa de publicidade ten avaliado en termos de impacto na audiencia uns coeficientes por cada anuncio na televisión e na radio, sendo de 600 e de 200 respectivamente en horario de media audiencia.

Por outro lado ofrécenlle á cadea de televisión a emisión dos anuncios nun programa de noticias nocturno cun coeficiente elevado (ó mesmo custo), se a Motor G. considerase a posibilidade de contratar unha maior cantidade de anuncios.

Elabore un informe coa estratexia de publicidade que se lle recomenda á Motor G, no que expoña a súa análise e as súas recomendacións, incluíndo nel:

- o número de anuncios na radio e na televisión que recomenda, sen entrar a valorar a oferta da emisión no programa de noticias nocturno;
- o coeficiente que tería que ter a emisión do anuncio nese programa nocturno, para que tivese sentido aumentar o número de anuncios contratados coa cadea de televisión;
- o número de anuncios na televisión que se contratarían se o coeficiente do apartado anterior é o suficientemente alto para facer aconsellable incrementar os anuncios nese medio;
- as restricións que podería relaxar ou alterar;
- se é posible aumentar o presuposto para anuncios e que as outras restricións non son alteradas, cal sería o novo presuposto tal que a partir del a función do obxectivo no óptimo non se alterara?

- o departamento de publicidade na radio está intentando organizar unha campaña para captar máis clientes, qué proporía ?

ANEXO 3. Proposta laboratorio de informática

Un estudante dedica parte do seu tempo á repartición de propaganda publicitaria. A empresa A págalle 5 u.m. por cada impreso repartido e a empresa B, con folletos máis grandes, págalle 7 u.m. por impreso. O estudante leva dúas bolsas: unha para os impresos A, na que caben 120, e outra para os impresos B, na que caben 100. Calculou que cada día é capaz de repartir 150 impresos como máximo.

- d) Cantos impresos haberá que repartir de cada clase para que o seu beneficio diario sexa máximo?
 - Resolver usando o método simplex coas iteracións correspondentes (manualmente o pivotando con “LINDO”).
 - Resolver directamente utilizando “LINDO”.
 - Resolver con “R”.
- e) Ten o problema solución única?
 - Facer representación gráfica con “R” para a súa comprobación.
 - Razoalo sobre a táboa óptima obtida en “LINDO”.
- f) Realizar unha análise gráfica de sensibilidade: cambios nos coeficientes da función obxectivo e estudar os cambios nos termos independentes das restricións longas.
 - Realizar os cálculos sen axuda da computadora.
 - Comprobar que son os rangos dados por “LINDO”.
 - Facer as representacións gráficas utilizando “R” nos límites dos rangos.
- g) Indicar os prezos duais e interpretar o seu valor. Xustificar que coinciden coa taxa de cambio no valor da función obxectivo debido a cambios no lado dereito de cada restrición.
 - Utilizar a táboa óptima obtida con “LINDO “ e dicir ónde se localizan en dita táboa.
 - Facer unha análise análoga á que se fixo en clase expositiva (análise gráfica de sensibilidade, pero non é necesario que faga todas as representacións gráficas).
- h) Escribir o problema dual asociado.

- i) Dar a solución ao problema dual a partir da táboa óptima do problema de partida.
- Considerar a táboa óptima obtida en “LINDO” do problema inicial.
 - Comprobar que se resolvemos o problema dual (resólvaoo como estime oportuno), o resultado obtido coincide co que se respondeu no apartado f.1

Nota: Repartirei no laboratorio, por cada grupo de titorías, un exemplo análogo. Deberán encargarse da súa resolución en grupo. Cada membro do grupo deberá encargarse dunha parte do traballo.

Na clase de titorías correspondentes, farán unha exposición de dito traballo, encargándose cada persoa da parte da que é responsable.

Observación:

Deberá elaborar un documento cun procesador de textos (Microsoft Word, OpenOffice Writer,...) onde copie a información obtida.

Cada apartado debe recoller:

- Se utiliza “R” toda a información que aparece na consola (unha vez executados os comandos do paquete utilizado) e incluíndo os comentarios e explicacións que considere oportunos. De ter que presentar un gráfico, facer unha como una copia del no documento (rexión factible, as liñas de nivel da función obxectivo...).
 - De utilizar “LINDO” deberá copiar a información da ventá de resultados que veña ao caso, incluíndo tamén os comentarios e explicacións que considere oportunos.
- De ter que facer cálculos ou comentarios que non van “teclear”, deixar espazo no documento para poder incluílos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Bibliografía básica

- AHUJA, R.K./ MAGNANTI, T.L./ ORLIN, J.B. (1993): *Network flows. Theory, algorithms and applications*. Prentice-Hall.
- BAZARAA, M. / JARVIS, J. / SHERALI, H. (2005): *Linear programming and networks flows*. John Wiley & Sons.
- HILLIER, F. / LIEBERMAN, G. (2005): *Introduction to operations research*. McGraw-Hill.
- MARTÍN, Q. / SANTOS, M. T. / SANTANA, Y. (2005): *Investigación operativa: problemas y ejercicios resueltos*. Pearson.
- SALAZAR GONZÁLEZ, J. S. (2000): *Lecciones de optimización*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de la Laguna.

2. Bibliografía complementaria

- ANDERSON, D. / SWEENEY, D. / WILLIAMS, T. (1993): *Introducción a los modelos cuantitativos para administración*. Grupo Editorial Iberoamérica.
- BHATTI, M. A. (2000): *Practical optimization methods*, Springer-Verlag.
- FERRIS, M. C. / MANGASARIAN, O. L. / WRIGHT, S. J. (2007): *Linear programming with MATLAB*. Ed. MPS-SIAM Series on Optimization.
- FOURER, R. / GAY, D. M. / KERNIGHAM, B. W. (2002): *AMPL: A modeling language for Mathematical Programming*. Ed. Duxbury Press.
- GOBERNA, M. / JORNET, V. / PUENTE, R. (2004): *Optimización lineal. Teoría, métodos y modelos*. McGraw-Hill.
- JENSEN, P. A. / BARD, J. F. (2003): *Operations research models and methods*. Ed. Wiley.
- KASANA, H. S. / KUMAR, K. D. (2004): *Introductory operations research. Theory and applications*. Springer.
- MARTÍN, Q. (2003): *Investigación operativa*. Pearson. Hespérides.
- PARLAR, M. (2000): *Interactive operations research with Maple. Methods and models*. Birkhauser.
- RÍOS INSUA, S. / RÍOS INSUA, D. / MATEOS, A. / MARTÍN, J. (1997) : *Programación lineal y aplicaciones*. Ra-Ma.
- RÍOS INSUA, S. (1996): «Investigación operativa. Programación lineal y aplicaciones. Centro de Estudios Ramón Areces.
- SALAZAR GONZÁLEZ, J. S. (2001): *Programación matemática*. Díaz de Santos.
- SCHRAGE, L. (1997): *Optimization modelling with LINDO*. Duxbury Press.
- TAHA, H. (2004): *Investigación de operaciones*. Ed. Pearson.
- THIE, P. R. / KEOUGH, G. E. (2008): *An introduction to linear programming and game theory*. Ed. Wiley.
- WINSTON, W. (2003): *Introduction to mathematical programming: operations research*. Pacific Grove : Brooks/C.

3. Citas de recursos en internet:

Página web do software LINDO: <http://www.lindo.com>

Página web do proxecto 'R': <http://www.r-project.org/>

Web con recursos sobre programación lineal:

<http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/90-XX.html>

Web con recursos sobre programación lineal:

<http://www.personal.psu.edu/faculty/t/m/tmc7/tmclinks.html>

Enlaces a webs sobre investigación de operaciones:

http://www.rpi.edu/~mitchj/sites_or.html

ORMS Journal: <http://lionhrtpub.com/ORMS.html>

Tutorial sobre optimización con Excel-Solver:

<http://www.kem.ae.poznan.pl/Books/Excel-Solver/T1/T1.htm>

Web dedicada a preguntas más comunes acerca de la Programación Lineal:

<http://www.faqs.org/faqs/linear-programming-faq/>



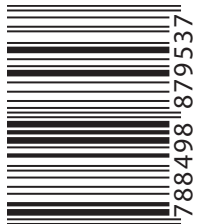
Unha colección orientada a editar materiais docentes de calidade e pensada para apoiar o traballo do profesorado e do alumnado de todas as materias e titulacións da universidade



Impreso en papel 100% reciclado e libre de cloro



SERVIZO DE NORMALIZACIÓN LINGÜÍSTICA



9 788498 879537