



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

OPTIMIZACIÓN Y EQUIDAD

Nicolás Chenlo Andrade

Curso 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

OPTIMIZACIÓN Y EQUIDAD

Nicolás Chenlo Andrade

Junio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Estadística e Investigación Operativa
Título: Optimización y equidad
Breve descripción del contenido
<p>La noción de equidad tiene un papel importante en investigación operativa cuando resolvemos problemas de optimización, tanto en teoría como en la práctica. Este trabajo se adentra en el tema a través de tres problemas. En primer lugar, se considera un modelo de rutas de vehículos en situaciones de ayuda humanitaria donde la equidad aparece ligada al cumplimiento de la urgencia en la atención a demandantes de artículos suministrados desde ciertos depósitos por una flota de vehículos. Junto al modelo, se estudiarán sus propiedades y se resolverá de modo exacto con una instancia pequeña haciendo uso de AMPL. El segundo problema será el de la localización de un conjunto de instalaciones que atienden las necesidades de un conjunto de usuarios. En este caso, la equidad se analiza para cada una de las instalaciones, considerando para cada uno de sus usuarios asignados el grado de satisfacción con su asignación a la vista de sus preferencias. Se persigue una localización libre de descontento. El interés se centrará en discutir formulaciones alternativas del problema. Finalmente se estudiará la equidad en un problema de asignación de recursos hídricos por medio de la introducción de restricciones de carácter <i>envy-free</i>.</p>

Índice

Resumen	XI
Introducción	XIII
1. Optimización de rutas en situaciones de ayuda humanitaria	1
1.1. Introducción	1
1.2. Revisión de la literatura	2
1.3. Modelización y análisis del problema	3
1.3.1. Suposiciones y notación	3
1.3.2. Formulación entera	4
1.3.3. Funciones objetivo	5
1.3.4. Comparación de los objetivos	7
1.3.5. Propiedades analíticas	9
1.4. Instancias pequeñas del problema	10
1.4.1. Casos de prueba	10
1.4.2. Estructura de las rutas	11
1.4.3. Rendimiento de las métricas	12
1.4.4. Rendimiento computacional	14
1.5. Instancias grandes del problema	14
1.5.1. Algoritmos heurísticos para $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$	14

1.5.2.	Algoritmos heurísticos para $P(Z_3)$	14
1.5.3.	Estructura de las rutas	18
1.5.4.	Rendimiento de las métricas	18
1.6.	Resolución exacta de una instancia pequeña con AMPL	19
1.6.1.	Eficiencia	20
1.6.2.	Eficacia	20
1.6.3.	Equidad	20
1.6.4.	Equidad y eficiencia	21
1.6.5.	Equidad y eficacia	21
1.7.	Conclusión	21
2.	Equidad en problemas de localización	23
2.1.	Introducción	23
2.2.	Revisión de la literatura	24
2.3.	Modelización y análisis del problema	25
2.3.1.	Formulación general	25
2.3.2.	Equidad	26
2.4.	Caso continuo	27
2.4.1.	Primera formulación	28
2.4.2.	Segunda formulación	30
2.4.3.	Tercera formulación	31
2.5.	Caso discreto	33
2.5.1.	Primera formulación	33
2.5.2.	Segunda formulación	34
2.5.3.	Tercera formulación	35
2.6.	Estudio computacional	35

2.6.1. Análisis de resultados	36
2.6.2. Rendimiento computacional	39
2.7. Conclusión	41
3. Asignación multiobjetivo de recursos hídricos	43
3.1. Introducción	43
3.2. Modelización y análisis del problema	44
3.2.1. Formulación general	45
3.2.2. Equidad	47
3.3. Análisis de un caso	49
3.3.1. Elección del área de estudio	50
3.3.2. Datos	50
3.3.3. Asignación multiobjetivo de recursos hídricos	52
3.3.4. Asignación equitativa de recursos hídricos	52
3.4. Conclusión	56
Conclusiones	59
I. Tablas de datos	61
II. Demostraciones	69
II.1. Demostraciones del Capítulo 1	69
II.2. Demostraciones del Capítulo 2	70
III. Código de AMPL	73
III.1. Datos	73
III.2. Modelos	74
III.3. Ejecución	82
III.4. Salidas	84

Resumen

En este trabajo abordamos el análisis de condiciones de equidad en problemas de optimización a través del estudio de tres problemas. En primer lugar, tratamos la optimización de rutas de vehículos en condiciones de ayuda humanitaria, lo cual requiere un enfoque equitativo por la naturaleza de la situación. En segundo lugar, analizamos condiciones de equidad relativas a la localización de un conjunto de instalaciones, presentando diversas formulaciones del problema. Por último, estudiamos la equidad en la asignación de recursos hídricos, para lo cual realizamos el análisis de un caso real.

Abstract

In this work, we analyze conditions of equity in optimization problems through the study of three problems. First, we address the optimization of vehicle routing optimization in the context of humanitarian aid, which requires an equitable approach due to the nature of the situation. Second, we examine conditions of equity related to locating a group of facilities, offering different formulations of the problem. Finally, we study equity in the allocation of water resources, for which we analyze a real case.

Introducción

Los problemas de optimización constituyen una rama fundamental de las matemáticas con aplicaciones prácticas en multitud de disciplinas. En particular, son ampliamente estudiados en economía, principalmente con el fin de maximizar el rendimiento financiero. De este modo, combinando elementos de la investigación operativa y del análisis matemático, se modelan y resuelven problemas buscando obtener el máximo beneficio individual. Sin embargo, existen situaciones en las que un análisis de este tipo es insuficiente. Por ejemplo, si se desea hacer un reparto de recursos entre países, no es lógico buscar una solución en la que cada uno obtiene el máximo número posible, sino que es necesario llegar a un equilibrio basado en la equidad. En este contexto, es de interés realizar un estudio de un enfoque equitativo para problemas de optimización, y aquí juega un papel importante la teoría de juegos. En este trabajo desarrollamos este tema a través de tres problemas, cada uno de los cuales se analiza en un capítulo independiente.

En el Capítulo 1 estudiaremos un problema de transporte en torno a la optimización de rutas de vehículos en contextos de ayuda humanitaria, los cuales precisan de un estudio delicado debido a la necesidad de acción inmediata y a la ausencia de información exacta. Consideramos un centro de distribución que debe enviar recursos a zonas afectadas por una situación de emergencia. Además de actuar con rapidez, es necesario buscar un reparto equitativo para evitar soluciones en las que una zona reciba inmediatamente toda la ayuda necesaria y otra quede desatendida. En el transcurso del capítulo, seguiremos la metodología explicada en [17] para deducir recomendaciones acerca de cómo actuar en este tipo de situaciones. Además, a modo de ilustración, resolveremos el problema de modo exacto para una instancia pequeña haciendo uso de AMPL y analizaremos los resultados.

En el Capítulo 2 analizaremos condiciones de equidad en problemas de localización, los cuales tienen gran relevancia socioeconómica. En general, estos problemas son usados por empresas del ámbito privado para localizar sus instalaciones asegurando la máxima cobertura posible a nivel local, centrándose únicamente en el beneficio económico. De todos modos, la equidad cobra relevancia cuando se estudian estos problemas en el ámbito público. Por ejemplo, a la hora de construir un cuartel de bomberos, es necesario lograr un tiempo de llegada bajo a cualquier área

de la ciudad, y se descartarían soluciones que dejaran en gran desventaja a zonas específicas. Así, partiremos de lo estudiado en [7] para proponer la medida equitativa de descontento interno y discutir distintas formulaciones del problema, tanto en el caso continuo como en el discreto.

En el Capítulo 3 abordaremos la asignación equitativa de recursos hídricos. Debido a la contaminación del agua y diversos motivos socioeconómicos, el agua dulce está en una situación de creciente escasez. Al ser un recurso natural y de acceso colectivo, resulta evidente la necesidad de un reparto equitativo centrado en el equilibrio entre las necesidades de las distintas áreas geográficas. En el desarrollo de este capítulo, seguiremos el enfoque de [37] para modelar el problema con varias funciones objetivo y analizar un caso real.

Con el fin de no interrumpir el desarrollo principal del texto, incluimos tres anexos al final de este trabajo. En el Anexo I recogemos las tablas de datos a las que se hace referencia a lo largo del desarrollo. En el Anexo II presentamos las demostraciones de algunos de los resultados utilizados. En el Anexo III mostramos el código de AMPL usado en el Capítulo 1. Tras los anexos, exponemos la bibliografía utilizada.

Capítulo 1

Optimización de rutas en situaciones de ayuda humanitaria

La optimización de rutas de vehículos supone un tema de gran relevancia social y económica. En particular, resulta vital en el contexto de situaciones de ayuda humanitaria, que requiere un estudio especial debido a las complicaciones inherentes al problema. En este capítulo abordaremos este tema a través del análisis propuesto en [17]. La estructura es la siguiente. En la Sección 1.1 presentaremos una introducción a esta problemática. En la Sección 1.2 revisaremos la literatura centrada en los problemas de transporte. En la Sección 1.3 modelizaremos el problema realizando un análisis de distintos objetivos. En la Sección 1.4 analizaremos soluciones obtenidas para instancias pequeñas de los modelos del problema. En la Sección 1.5 propondremos algoritmos heurísticos para la resolución de instancias grandes del problema. En la Sección 1.6 resolveremos el problema de forma exacta para una instancia pequeña con AMPL. Finalmente, en la Sección 1.7 presentaremos las conclusiones.

1.1. Introducción

Los problemas de transporte componen una rama ampliamente estudiada de la optimización matemática y consisten en hallar las rutas que permitan transportar ciertos bienes con un coste mínimo. En un contexto de ayuda humanitaria, la propia naturaleza del problema hace que la situación sea mucho más compleja. Pensemos por ejemplo en un centro de distribución de ayuda que debe mandar recursos a distintas zonas afectadas por un desastre natural. La prioridad principal es que los recursos de primera necesidad (comida, agua, productos sanitarios e higiénicos, etc.) lleguen a la población de forma rápida, pero esta distribución está sujeta a diversos problemas.

Por un lado, se dispone de recursos limitados. Se genera una situación de escasez causada por la demanda repentina de ayuda combinada con la destrucción de bienes. Además, los daños a vehículos, carreteras e infraestructuras impiden el paso por ciertas rutas y limitan mucho los servicios de auxilio.

Por otro lado, la información de la que se dispone es muy limitada. Se necesita asistencia urgente pero no se conoce con certeza el número de zonas afectadas, la cantidad de recursos que necesitan o las vías disponibles para el transporte.

Además, se introduce una cuestión de equidad: de nada sirve que una zona afectada reciba todos los recursos necesarios rápidamente si otras zonas siguen sin recibir ayuda.

Para estudiar este problema seguiremos la metodología propuesta en [17], cuyos autores desarrollan un modelo para diseñar las rutas de vehículos y sus planes de distribución de una flota que entrega suministros de ayuda humanitaria desde un centro de distribución. A partir de dicho modelo, se analizarán varios objetivos basados en (i) la eficiencia, definida como el coste del transporte, (ii) la eficacia, entendida como un tiempo de respuesta adecuado, y (iii) la equidad, medida a través de las diferencias de eficacia entre las zonas afectadas.

1.2. Revisión de la literatura

En esta sección revisaremos la literatura centrada en los problemas de transporte, con especial interés en la relacionada con las situaciones de ayuda humanitaria.

En uno de los primeros estudios relativos a este problema se considera un modelo que busca maximizar el número de envíos de ayuda de forma eficiente ([22]). Además, se tienen en cuenta algunas de las características particulares inherentes al problema y de las complicaciones que pueden aparecer. Recientemente, se valoran con cada vez mayor frecuencia situaciones más complejas que se adapten al contexto en cuestión, considerando, por ejemplo, varios tipos de mercancías de diferente necesidad, distintos tipos de vehículos, demanda indeterminada, carreteras en malas condiciones, etc. La mayoría de estudios proponen algoritmos heurísticos para la resolución de modelos ([39]) o los resuelven para instancias pequeñas del problema ([2]). Los objetivos principales son minimizar los costes, la cantidad de demanda insatisfecha y el tiempo total empleado. Así, la equidad solo se considera en algunos estudios de manera conjunta con la eficiencia. Por ejemplo, en ocasiones se busca maximizar la satisfacción mínima entre los puntos de demanda ([38]) o minimizar el porcentaje máximo de demanda insatisfecha ([25]), siempre teniendo en cuenta los costes.

En particular, el estudio propuesto en [8] trata de minimizar el tiempo medio de llegada de la ayuda a través de dos funciones objetivo: (i) minimizar el tiempo máximo de llegada de la

ayuda y (ii) minimizar la suma de todos los tiempos de llegada. De todos modos, la equidad en los recursos no se considera ya que cada punto de demanda se visita una única vez y se asegura la satisfacción completa de la demanda. Tras comparar las soluciones obtenidas de los objetivos (i) y (ii) con otras resultantes de minimizar el tiempo total de viaje, se concluye que los objetivos (i) y (ii) aseguran mejores tiempos de respuesta, si bien de forma menos eficiente en términos de costes.

Como veremos en los Capítulos 2 y 3, la equidad está ampliamente estudiada en contextos ajenos a la ayuda humanitaria. De todos modos, en problemas de rutas de vehículos (VRP) es más habitual centrarse en objetivos relacionados con la eficiencia y la eficacia. En los últimos años ha aumentado el número de trabajos que estudian la equidad en este tipo de problemas, habitualmente buscando equilibrios con otros objetivos.

1.3. Modelización y análisis del problema

En esta sección propondremos la modelización matemática del problema y analizaremos diversos objetivos.

1.3.1. Suposiciones y notación

Para la realización del modelo consideremos un grafo completo y simétrico $G = (N, A)$, donde el conjunto de nodos $N = \{0, 1, \dots, n\}$ contiene el almacén de recursos ($i = 0$) y los puntos de demanda ($i = 1, \dots, n$), y $A = (c_{ij})$, con $i, j \in N$, es la matriz de costes (en horas). Supongamos que los costes son no negativos ($c_{ij} \geq 0, \forall i, j \in N$) y que satisfacen la desigualdad triangular ($c_{ik} \leq c_{ij} + c_{jk}, \forall i, j, k \in N$). Las rutas comienzan en el tiempo $t = 0$. La demanda d_i de cada nodo puede ser dividida entre varios vehículos y se mide en palés enteros, $d_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in N$, cada uno de los cuales puede contener diferentes suministros. Consideremos $K = \{1, \dots, k\}$ el conjunto de vehículos y $C \in \mathbb{Z}$ la capacidad en palés de cada vehículo. Finalmente, supongamos que la demanda de cada punto es menor que la capacidad de un vehículo ($d_i \leq C, \forall i \in N$) y que en el almacén hay suministros suficientes para satisfacer la demanda total ($kC \geq \sum_{i \in N} d_i$). Cada vehículo realiza como mucho un viaje, luego visita cada nodo una vez como máximo y no puede volver al almacén para coger más suministros.

En el problema se deben tomar dos tipos de decisiones. Por un lado, las de rutas determinan para cada vehículo un conjunto de nodos y un orden de visita. Por otro lado, las de distribución determinan el número de palés entregados en cada visita. Para evaluar los efectos de estas decisiones consideramos objetivos asociados a diferentes métricas:

1. Eficiencia (Z_1), medida como la suma de los costes de transporte.
2. Eficacia (Z_2), medida como suma de los tiempos de llegada de cada palé.
3. Equidad (Z_3), medida a través de varias funciones que consideran las disparidades en eficacia entre los nodos.

1.3.2. Formulación entera

Supongamos que $R = \{1, \dots, |R|\}$ es el conjunto de rutas viables. Cada ruta $r \in R$ representa un conjunto de nodos y el orden en que se visitan, con coste asociado c_r . Consideremos un parámetro b_{ir} que denote la presencia del nodo i en la ruta r :

$$b_{ir} = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } i \text{ es visitado por la ruta } r, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Del mismo modo, consideremos a_{ir} definido como:

$$a_{ir} = \begin{cases} t, & \text{si el nodo } i \text{ es visitado por la ruta } r \text{ (} b_{ir} = 1 \text{)}, \\ T, & \text{en caso contrario (} b_{ir} = 0 \text{)}, \end{cases}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo de llegada al nodo i en la ruta r (si $b_{ir} = 1$) y $T \geq 0$ es una cota superior del tiempo.

Supongamos que cada una de las rutas en R es recorrida por, como máximo, un vehículo (en la Subsección 1.3.5 veremos que existe una solución óptima cumpliendo esta condición). Usaremos variables de decisión binarias x_r para determinar las rutas seleccionadas:

$$x_r = \begin{cases} 1, & \text{si la ruta } r \text{ ha sido seleccionada,} \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Las variables de decisión enteras y_{ir} indican el número de palés entregados en el nodo i a través de la ruta r .

Denotemos por $P(Z_i)$ al problema de hallar las rutas con la función objetivo de minimizar

la métrica genérica Z_i , esto es:

$$\min Z_i(x, y), \quad (\text{O1})$$

$$\text{sujeto a } \sum_{r \in R} x_r \leq k, \quad (\text{R1})$$

$$y_{ir} \leq d_i b_{ir} x_r, \quad \forall i \in N, \forall r \in R, \quad (\text{R2})$$

$$\sum_{i \in N} y_{ir} \leq C, \quad \forall r \in R, \quad (\text{R3})$$

$$\sum_{r \in R} y_{ir} = d_i, \quad \forall i \in N, \quad (\text{R4})$$

$$y_{ir} \in \mathbb{Z}, \quad \forall i \in N, \forall r \in R, \quad (\text{R5})$$

$$x_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in R. \quad (\text{R6})$$

La restricción (R1) garantiza que el número de rutas no supere al de vehículos. Las restricciones (R2) aseguran que cada nodo solo recibe suministros de una ruta determinada si es visitado por la misma. Además, establecen la demanda de cada nodo como cota superior de los envíos al mismo. Las restricciones (R3) aseguran que la cantidad repartida en cada ruta no supere la capacidad de un vehículo. Las restricciones (R4) garantizan que cada punto de demanda reciba exactamente el número de palés solicitados. Finalmente, las restricciones (R5) y (R6) especifican que las variables que determinan el número de palés entregados por nodo en cada ruta sean enteras y positivas y que las variables que determinan las rutas tomadas sean binarias.

1.3.3. Funciones objetivo

A continuación, estudiamos objetivos relacionados con la eficiencia, la eficacia y, particularmente, la equidad.

Eficiencia

Sea $Z_1(x, y) = \sum_{r \in R} c_r x_r$ la eficiencia medida como el tiempo total empleado en recorrer las rutas consideradas. Como el objetivo basado en Z_1 es el del VRP clásico, $P(Z_1)$ coincide con el problema de rutas de vehículos con entregas divididas (SDVRP), en el que se permite que los vehículos usen toda su capacidad para reducir los costes.

Eficacia

Sea $Z_2(x, y) = \sum_{i \in N} \sum_{r \in R} a_{ir} y_{ir}$ la medida de eficacia que calcula la velocidad y suficiencia de los repartos. El tiempo de llegada al nodo i en la ruta r (a_{ir}) se multiplica por el número de palés

entregados para hallar la suma de los tiempos de llegada en ese envío. Entonces, Z_2 calcula el tiempo de llegada ponderado por la demanda como la suma de los tiempos de llegada de todos los palés. La cantidad entregada y_{ir} representa el cambio en la demanda insatisfecha acumulada, de modo que el cálculo del tiempo de llegada ponderado por la demanda equivale a la suma del producto del tiempo de llegada por el cambio en la demanda acumulada. Asimismo, podríamos obtener la demanda insatisfecha ponderada por el tiempo como la suma del producto del tiempo entre envíos y la demanda insatisfecha acumulada.

Equidad

Sea $s_i = \frac{1}{d_i} \sum_{r \in R} a_{ir} y_{ir}$ el nivel de servicio del nodo i , medido como el tiempo de llegada ponderado por la demanda y normalizado por la demanda del nodo i . Sea \bar{s} el nivel de servicio promedio entre los nodos.

Para medir la disparidad entre los valores de s_i , consideremos las métricas de equidad

$$Z_3^a(x, y) = \max_{i \in N} s_i - \min_{i \in N} s_i, \quad Z_3^b(x, y) = \sqrt{\sum_{i \in N} \frac{(s_i - \bar{s})^2}{N}}.$$

Así, Z_3^a captura la máxima diferencia por pares en los valores de s_i y Z_3^b es la desviación estándar. Como veremos en la Subsección 1.3.4, ninguna de las métricas es viable como objetivo del problema, por lo que únicamente las usaremos con fines de evaluación. Para poder tener un objetivo adecuado, consideraremos una métrica Z_3 que englobe el tiempo de respuesta y la equidad, siendo así un equilibrio con la eficacia.

Consideremos una función convexa de disutilidad $f(w)$, donde w es la fracción de demanda insatisfecha. Vemos un ejemplo de dicha función en la Figura 1.1. Como la tasa de cambio de la disutilidad es más alta donde la demanda insatisfecha es cercana a 1 (esto es, donde hay poca demanda distribuida), los primeros palés distribuidos se benefician más que los últimos. La métrica Z_3 minimiza el tiempo de llegada ponderado por la disutilidad. Así, la función f fomenta que los vehículos guarden suministros para suplir parte de la demanda de varios nodos en lugar de satisfacer completamente la de uno específico. Como el cambio en la disutilidad requiere cálculos dependientes de varias variables, será más sencillo hallar el valor de la disutilidad ponderada por el tiempo. Discreticemos el tiempo por horas y consideremos para cada $t \in \{1, \dots, T\}$ y cada nodo $i \in N$ su porcentaje de demanda insatisfecha

$$w_{it} = \left(1 - \frac{1}{d_i} \sum_{r \in R_t} y_{ir} \right),$$

donde $R_t = \{r \in R : a_{ir} < t\}$.

Finalmente, definimos la medida de equidad

$$Z_3(x, y) = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N f(w_{it}),$$

donde se suman las penalizaciones provenientes de las demandas insatisfechas de cada nodo y en cada hora. En la práctica no es necesario calcular $f(w_{it})$ en cada hora $t \in T$ sino solo cuando la función cambia. Tomado un nodo $i \in N$, se pueden ordenar todos los tiempos de llegada al mismo y determinar las horas entre envíos consecutivos.

En los cálculos usaremos la siguiente función por su parecido a un polinomio convexo:

$$f(w) = \begin{cases} \frac{4w}{13}, & \text{si } w < 0,25, \\ \frac{8w-1}{13}, & \text{si } 0,25 \leq w < 0,5, \\ \frac{16w-5}{13}, & \text{si } 0,5 \leq w < 0,75, \\ \frac{24w-11}{13}, & \text{si } w \geq 0,75. \end{cases}$$

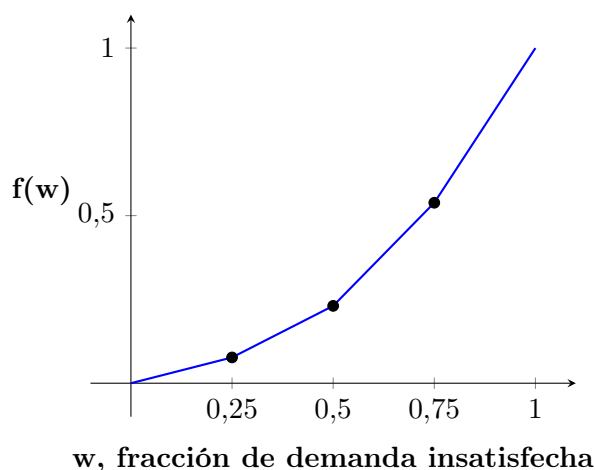


Figura 1.1: Ejemplo de función de disutilidad para la demanda insatisfecha.

Como se aprecia en la Figura 1.1, a medida que se envían más palés, w disminuye y la pendiente cada vez más elevada implica que los últimos palés tienen menos peso que los primeros.

1.3.4. Comparación de los objetivos

Comparemos los objetivos de la Subsección 1.3.3. En la Figura 1.2 se aprecia una instancia del problema con tres puntos de demanda ($i = 1, 2, 3$), cada uno solicitando cuatro palés ($d_i = 4, \forall i \in \{1, 2, 3\}$). Consideremos una flota de dos vehículos ($K = \{1, 2\}$) con capacidad para seis palés cada uno ($C = 6$).

En la Figura 1.3 se aprecian las soluciones óptimas para el problema asociado a cada uno de los objetivos. Aunque todas las métricas de equidad tienen como objetivo reducir las diferencias en tiempos de servicio entre los puntos de demanda, los distintos modelos dan lugar a soluciones diferentes. Se aprecian las rutas elegidas ($r \in R$) y los tiempos de llegada y número de palés entregados por cada nodo (respectivamente $a_{ir}, y_{ir}, \forall i \in \{1, 2, 3\}, \forall r \in R$). Sea $\pi(k) \in R$ la ruta recorrida por el vehículo k . Como se puede apreciar, las rutas obtenidas para cada variación del problema difieren en los tiempos de llegada y las cantidades entregadas.

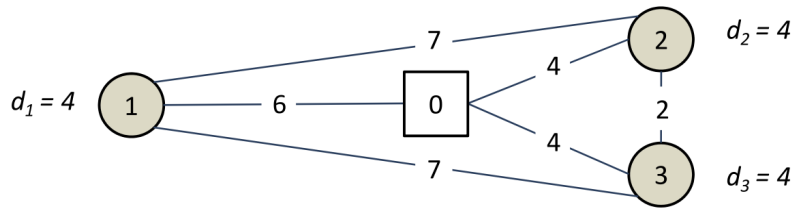
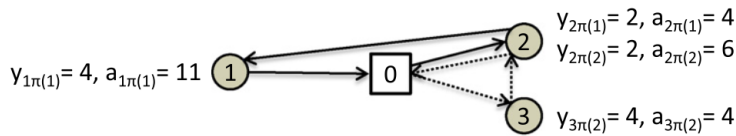
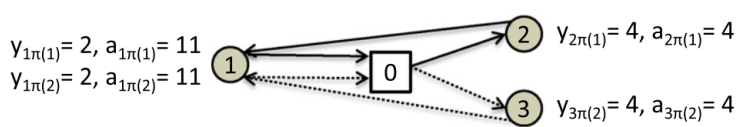


Figura 1.2: Ejemplo del problema con tres puntos de demanda. Los costes asociados a cada ruta se ven representados en cada arista. Fuente: [17].

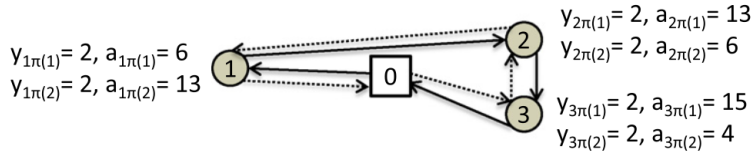
(a) Solución óptima de $P(Z_1)$



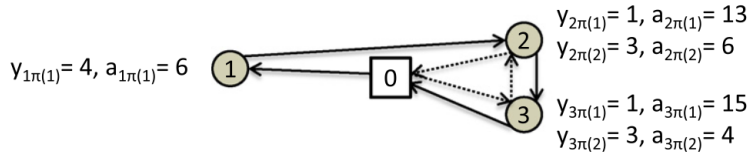
(b) Solución óptima de $P(Z_2)$



(c) Solución óptima de $P(Z_3^a)$ y $P(Z_3^b)$



(d) Solución óptima de $P(Z_3)$



— Vehículo 1
 Vehículo 2

Figura 1.3: Soluciones óptimas para los modelos del problema. Fuente: [17].

En la Tabla I.1 del Anexo I se aprecia el nivel de servicio para cada nodo $(s_i, i \in \{1, 2, 3\})$ y los valores de las métricas definidas para los objetivos en cada solución. Como es de esperar, cada solución optimiza su respectiva métrica a costa del resto. En particular, con un impacto mínimo en la eficiencia y eficacia (aumentos de 7% y 8% respectivamente), la solución de $P(Z_3)$ tiene un rendimiento muy superior a las de $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$ con respecto a las métricas Z_3^a y Z_3^b . Esta amplia mejora en equidad puede ser atribuida a la asignación de la demanda en el nodo 3: en lugar de suplir toda su demanda, el segundo vehículo suministra un palé más al nodo 2. La solución no tiene valores asociados de Z_1 y Z_2 significativamente peores porque sigue existiendo un incentivo para suplir la demanda rápidamente.

La solución representada en la Figura 1.3 (a) ilustra cómo la existencia de múltiples soluciones óptimas puede generar resultados desfavorables. En particular, si el primer vehículo recorriese su ruta en sentido opuesto, se mejorarían los valores de Z_2 , Z_3^a , Z_3^b y Z_3 sin empeorar el valor de Z_1 . Por este motivo, en los estudios computacionales de la Subsección 1.4 se usarán objetivos secundarios ponderados para definir preferencias entre varias soluciones óptimas.

1.3.5. Propiedades analíticas

Enunciamos una serie de proposiciones a partir de las que podremos obtener conclusiones acerca de las rutas viables como solución del problema. La Proposición 1.1 está demostrada en [14]. Las demostraciones de las Proposiciones 1.2 y 1.3 se encuentran en la Sección II.1 del Anexo II.

Proposición 1.1. *Para $P(Z_1)$ existe una solución óptima tal que para cada par de nodos, como mucho un vehículo visita ambos.*

Proposición 1.2. *El resultado de la Proposición 1.1 se verifica para $P(Z_2)$.*

Proposición 1.3. *El resultado de la Proposición 1.1 no se verifica para $P(Z_3)$.*

Las Proposiciones 1.1 y 1.2 implican que dos rutas no pueden compartir más de un nodo al que le den suministros. De aquí se deduce que para $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$, la división de la demanda de un nodo entre varios vehículos solo tiene sentido por motivos de capacidad. Por un lado, en $P(Z_1)$, la división permite que se usen menos vehículos y por tanto que se recorran menos rutas. Debido a la desigualdad triangular explicada en la Subsección 1.3.1, la reducción del número de rutas supone una disminución en el coste asociado al transporte, es decir, una mayor eficiencia. Por otro lado, en $P(Z_2)$ es preferible usar la flota entera de vehículos para reducir el tiempo de llegada. De todos modos, aunque se use la flota entera, la división tiene sentido si un determinado vehículo puede llegar a un punto antes que el resto pero no tiene suficientes suministros para suplir toda su demanda.

Las Proposiciones 1.1 y 1.2 permiten añadir restricciones adicionales a la formulación de los problemas $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$. En particular, podemos añadir en ambos problemas las restricciones $\sum_{r \in R'} x_r \leq 1, \forall i, j \in N$, donde $R' = \{r \in R : b_{ir} > 0, b_{jr} > 0\}$.

La Proposición 1.3 proviene del hecho de que la división de la demanda de un nodo entre varios vehículos puede mejorar el objetivo basado en la equidad Z_3 , como se puede ver en la Figura 1.3 (d). Con esta división se consigue que un nodo reciba parte de sus suministros antes a costa de que otro nodo reciba la ayuda que le falta más tarde.

1.4. Instancias pequeñas del problema

En esta sección analizaremos las soluciones obtenidas por el *solver* CPLEX para instancias pequeñas de los distintos modelos del problema.

1.4.1. Casos de prueba

Consideramos instancias formadas por 8 o 10 nodos. En cada instancia, emparejamos 5 distribuciones de ubicación de los nodos con 5 distribuciones de la demanda. Los nodos se sitúan en un cuadrado de 100×100 con el almacén de recursos en el centro y cada nodo solicita entre 1 y 4 palés. Tanto los nodos como el número de palés que solicita cada uno pueden estar (i) agrupados (G), (ii) distribuidos equitativamente (E) o (iii) distribuidos aleatoriamente (A1, A2, A3). Los costes de cada trayecto se definen como la distancia euclidiana entre los nodos aproximada al entero más cercano. Cada vehículo tiene capacidad para 10 palés y el tamaño de la flota es de 1 vehículo más que el mínimo número necesario.

En caso de que existan múltiples soluciones óptimas, usamos combinaciones de los objetivos para decidir. En particular, tomamos $\alpha > 0$ suficientemente pequeño y consideramos $Z_1 + \alpha Z_2$ para $P(Z_1)$; $Z_2 + \alpha Z_1$ para $P(Z_2)$; y $Z_3 + \alpha Z_1$ para $P(Z_3)$. No hemos considerado Z_3 como objetivo secundario debido a su complejidad y al elevado tiempo de computación asociado (como veremos en la Subsección 1.4.4).

Para que la resolución de los modelos sea viable, hemos impuesto sobre el conjunto de rutas R una restricción para que las rutas viables no puedan visitar más de 5 nodos. Esto no debería tener un efecto considerable en las soluciones de $P(Z_2)$ ni $P(Z_3)$, ya que en estos modelos se busca equilibrar la demanda. De todos modos, sí que puede haber mayor impacto en las soluciones de $P(Z_1)$, donde las rutas más largas reducen el tiempo de viaje de la flota. Por tanto, notamos que las soluciones halladas son óptimas considerando esta restricción del tamaño de las rutas. Finalmente, imponemos un límite de 60 horas para la resolución de cada instancia del problema.

1.4.2. Estructura de las rutas

En la Figura 1.4 se aprecia un conjunto de soluciones para una instancia de 10 nodos de los modelos del problema. En cada solución, el tamaño de los puntos de demanda representa la cantidad de suministros que solicitan.

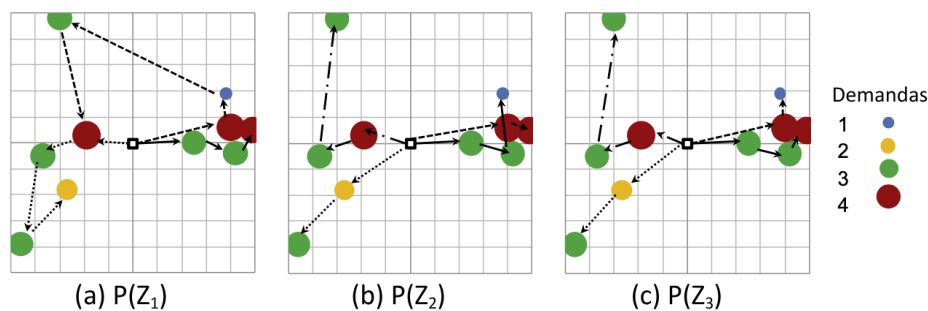


Figura 1.4: Soluciones óptimas de los modelos del problema para una instancia de 10 nodos. Fuente: [17].

En la Tabla I.2 del Anexo I se aprecian una serie de resultados numéricos. En concreto, las columnas 3 y 4 muestran el porcentaje de soluciones que usan, respectivamente, el número mínimo de vehículos y todos los vehículos disponibles (en este caso, el mínimo más uno). La columna 5 muestra el porcentaje de rutas en las que el último nodo visitado es el correspondiente al más alejado en la ruta. Las columnas restantes muestran el tiempo medio de llegada a los nodos para diferentes niveles de demanda.

Los resultados obtenidos dan lugar a una serie de observaciones sobre el número de vehículos, la estructura de las rutas y el impacto de la demanda de los nodos.

Observación 1.4. Como se puede apreciar en las columnas 3 y 4 de la Tabla I.2, la solución óptima para $P(Z_1)$ usa el número mínimo de vehículos en la gran mayoría de casos. Debido a la desigualdad triangular, minimizar los costes de la ruta conlleva usar el menor número posible de vehículos. Los casos en los que se usa un número mayor son aquellos en que existen varios óptimos y el uso de un vehículo extra puede reducir los tiempos de servicio sin mayores tiempos de viaje. Como se puede apreciar, esto ocurre un 12% de las veces para las instancias de 8 nodos y un 20% para las de 10. En contraste, las soluciones óptimas de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ usan todos los vehículos disponibles ya que esto reduce el tiempo de servicio de los nodos (si bien incrementando el tiempo de viaje).

Observación 1.5. Como se observa en la Figura 1.4, las soluciones de $P(Z_1)$ suelen tener forma de gancho. En efecto, al desviarse en dirección al almacén se logra reducir la distancia de vuelta

desde el último nodo. En contraste, los objetivos de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ no tienen en cuenta el recorrido de vuelta desde el último nodo al almacén, luego las rutas óptimas tienden a parecerse más a una recta que se aleja del punto de abastecimiento. Para evaluar estas tendencias, medimos el porcentaje de soluciones en las que el último nodo visitado en las rutas es el más distante del almacén. Para las instancias de 8 nodos, esto ocurre en un 49 % de las veces en las soluciones de $P(Z_1)$, un 89 % en las de $P(Z_2)$ y un 93 % en las de $P(Z_3)$. Para las instancias de 10 nodos, los porcentajes son 38 %, 79 % y 86 %, respectivamente.

Observación 1.6. En $P(Z_2)$ se considera el tiempo de servicio en el objetivo, lo que provoca que las rutas sean muy dependientes de la demanda de los nodos. Así, los nodos con mucha demanda se abastecen antes a costa del resto. Por ejemplo, en la solución de la Figura 1.4 (b), dos rutas se intersecan para satisfacer un nodo con mucha demanda lo antes posible en lugar de dividir las áreas de servicio de un modo más directo. En particular, los nodos con demanda 1 tienden a abastecerse de últimos en sus respectivas rutas, resultando a menudo en la forma de gancho anteriormente mencionada. En contraste, en $P(Z_3)$ no se tiene en cuenta la demanda de los nodos que son visitados por un único vehículo, luego los que tienen menor demanda se satisfacen por la ruta más cercana y no se ignoran en favor de los de mayor demanda. Para cuantificar estas observaciones evaluamos el tiempo medio de llegada a los nodos basado en la demanda. Por un lado, observamos que las soluciones de $P(Z_1)$ tienen tiempos de llegada más elevados para todos los nodos porque usan menos vehículos. Por otro lado, los nodos con poca demanda no suelen tener rutas dedicadas y son más propensos a compartir sus rutas con otros nodos, luego su llegada se ve retrasada debido a las paradas adicionales. Ahora, si bien en todos los modelos el promedio de los tiempos de llegada es mayor para los nodos con poca demanda, esta diferencia es considerablemente menor en las soluciones de $P(Z_3)$.

1.4.3. Rendimiento de las métricas

Para evaluar el rendimiento de una solución respecto a las métricas Z_1 , Z_2 y Z_3 , calculamos la diferencia porcentual entre el valor de la métrica de la solución y el de la solución óptima para esa métrica. Formalmente, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, sean $Z_i^{P(Z_j)}$ el valor de la métrica Z_i de la solución óptima de $P(Z_j)$ y $Z_i^* = Z_i^{P(Z_i)}$. Entonces, para evaluar la solución óptima de $P(Z_i)$ con respecto a Z_j , calculamos $\Delta_i^{P(Z_j)} = \frac{Z_i^{P(Z_j)} - Z_i^*}{Z_i^*}$. Para las métricas Z_3^a y Z_3^b , la diferencia porcentual se calcula respecto a la mejor solución obtenida entre las de $P(Z_1)$, $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$.

En la Tabla I.3 del Anexo I se aprecia un resumen de los resultados obtenidos para 25 instancias de 8 y 10 nodos con diferentes distribuciones de demanda y ubicación. Estos resultados dan lugar a una serie de observaciones.

Observación 1.7. Las diferencias en la estructura de las rutas entre las soluciones de $P(Z_1)$ y

las de los otros modelos suponen grandes diferencias de valores de las métricas. Por un lado, los costes de transporte aumentan entre un 17% y un 18% de media cuando Z_1 no es el objetivo principal ya que el resto de objetivos no tienen en cuenta el trayecto del último nodo al almacén. Por otro lado, $P(Z_1)$ no tiene en cuenta ni la eficacia ni la equidad, lo cual se ve reflejado en sus valores de estas métricas con diferencias medias de un 29% para Z_2 , 65-72% para Z_3^a y 64-68% para Z_3^b . Por su parte, aunque $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ no tienen en cuenta el coste de forma tan directa, sí que buscan minimizar los tiempos de llegada, lo cual supondrá una reducción de las distancias.

Observación 1.8. Las similitudes en la estructura de las rutas entre las soluciones de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ suponen valores de las métricas parecidos, a menudo obteniendo soluciones idénticas. De todos modos, hay diferencias más elevadas cuando se reduce la capacidad. En cuanto a Z_3^a y Z_3^b , las soluciones de $P(Z_3)$ tienen ligeramente mejor rendimiento que las de $P(Z_2)$. En particular, en las instancias de 8 nodos, el rendimiento medio de $P(Z_2)$ es un 2% peor que la mejor solución mientras que el de $P(Z_1)$ es menos de un 1%. En las instancias de 10 nodos la diferencia es mayor. Para Z_3^a y Z_3^b , $P(Z_2)$ es, respectivamente, un 7% y un 4% peor que las mejores soluciones, mientras que $P(Z_3)$ es solo un 2% y un 1% peor. Conjeturamos que esta diferencia se debe a que la cantidad de capacidad sobrante es menor para las instancias de 10 nodos.

En la Tabla I.4 del Anexo I se aprecian resultados para las instancias de 8 nodos con el mínimo número posible de vehículos. No se consideran instancias de 10 nodos ya que el tiempo de computación necesario para los cálculos es considerablemente más elevado.

Observación 1.9. Cuando en los tres modelos se impone la restricción de usar el mínimo número posible de vehículos, las diferencias en valores de las métricas entre las soluciones de $P(Z_1)$ y los otros dos modelos son menores. La pérdida del vehículo extra supone valores más parecidos entre las soluciones óptimas de $P(Z_1)$ y las de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$. En particular, las tres son idénticas en una instancia concreta. Siguiendo esto, apreciamos una disminución en la diferencia de desviación del óptimo al comparar la Tabla I.4 con la Tabla I.3. En cuanto a Z_1 , las soluciones óptimas de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ son, en promedio, solo un 8% y un 7% más elevadas que la de $P(Z_1)$, respectivamente. Además, los valores de las métricas de Z_2 y Z_3 de la solución óptima de $P(Z_1)$ son, en promedio, un 8% y un 12% más elevados, respectivamente. La reducción del número de vehículos supone una disminución de la capacidad y, como hemos visto en la Observación 1.8, las diferencias entre $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ son más notorias. En particular, $P(Z_3)$ tiene un rendimiento con respecto a Z_2 un 4% peor. De modo semejante, $P(Z_2)$ tiene un rendimiento un 5% peor respecto de Z_3 . Notablemente, con respecto a Z_3^b , las soluciones óptimas de $P(Z_2)$ son, en promedio, un 10% peores que la mejor solución, en contraste con el 1% de las soluciones óptimas de $P(Z_3)$. Proponemos que a medida que la demanda total se acerca a la capacidad de la flota de vehículos, la diferencia porcentual en las soluciones se asemeja al ejemplo de la Subsección 1.3.4, donde

$P(Z_3)$ mostraba una mejora clara en la equidad con un impacto mínimo en la eficiencia o la eficacia.

1.4.4. Rendimiento computacional

En la Tabla I.5 del Anexo I se aprecia el tiempo empleado para resolver el problema en minutos de CPU. Notamos que $P(Z_2)$ tiene el tiempo de resolución más bajo y $P(Z_3)$ el más alto, alcanzando las 60 horas.

1.5. Instancias grandes del problema

En esta sección propondremos algoritmos heurísticos para la resolución de instancias más grandes del problema y analizaremos las soluciones obtenidas en [33] para instancias de 100 nodos de los modelos del problema.

1.5.1. Algoritmos heurísticos para $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$

Para la resolución de $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$ se utiliza un algoritmo iterativo consistente en fases recursivas de construcción aleatoria y de mejora local. En primer lugar, se construye una solución viable de manera iterativa, de modo que en cada iteración se añade a la ruta un nodo tomado aleatoriamente de una lista de candidatos que han pasado por una función de evaluación. Entonces, la solución se mejora mediante una búsqueda local determinista para encontrar el óptimo local. Finalmente, tras 5000 iteraciones, se toma la mejor solución de entre todas ellas.

1.5.2. Algoritmos heurísticos para $P(Z_3)$

Como se aprecia en la Tabla I.5 del Anexo I, $P(Z_3)$ es considerablemente más difícil de resolver que los otros dos modelos, luego lo estudiaremos individualmente. De modo similar a lo visto en la Subsección 1.5.1, para su resolución se usa un algoritmo iterativo en el que cada iteración se evalúa con respecto a Z_3 para tomar la mejor solución. De todos modos, este modelo tiene ciertas particularidades que obligan a tomar un enfoque distinto. En primer lugar, la dependencia entre las rutas dificulta determinar la contribución de una ruta concreta al valor total de Z_3 . Además, este valor es muy sensible a las decisiones de distribución, de modo que reasignar el envío de un palé de un vehículo a otro puede tener un impacto muy grande en la función objetivo. Por estas razones, es difícil construir una solución o modificarla para mejorar el objetivo como hacíamos para $P(Z_1)$ y $P(Z_2)$.

Para construir el algoritmo, nos basamos en el hecho de que, para asegurar la equidad, la solución óptima de $P(Z_3)$ envía parte de la demanda a cada nodo de forma rápida y luego distribuye el resto. De este modo, llegamos a un enfoque de dos fases en el que se tienen en cuenta la equidad, la eficiencia y la eficacia.

En la primera fase se reparte una fracción β de la demanda a cada nodo en un tiempo t . Para asegurar que la solución sea viable, definimos el valor de β al principio y determinamos t tras la primera iteración. Para repartir la demanda inicial, realizamos una iteración del algoritmo heurístico para $P(Z_2)$ visto en 1.5.1 con demandas $\lceil \beta d_i \rceil, \forall i \in N$. Así, obtenemos una solución viable de $P(Z_2)$ en la que se reparte la demanda inicial rápidamente. Definimos t como el último tiempo de llegada de esta solución. En la Figura 1.5 (a) se aprecia la solución tras la fase inicial con $\beta = 0,75$, obteniendo un valor de $t = 6$.

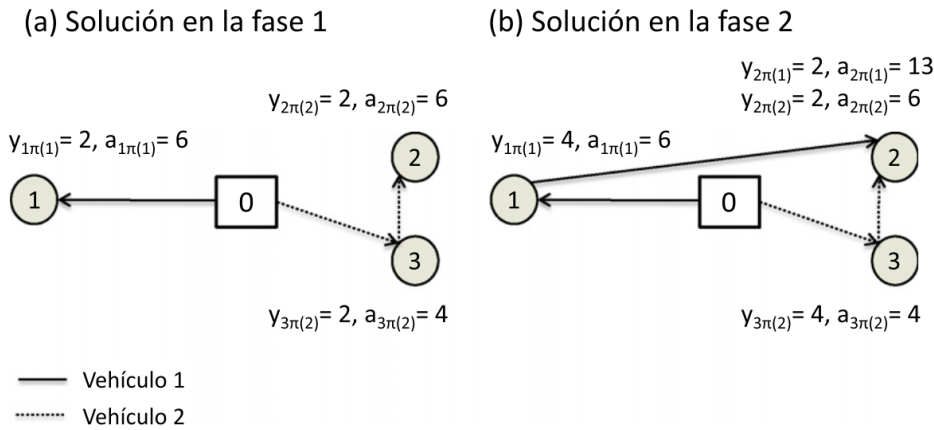


Figura 1.5: Solución en dos fases para $\beta = 0,75$. Fuente: [17].

En la segunda fase se distribuye el resto de la demanda. Partimos de las rutas y envíos de la primera fase, de modo que cada nodo i tiene una demanda no asignada de $d_i - \lceil \beta d_i \rceil$, con $i \in N$. Entonces, cada vehículo se clasifica por su capacidad como viable o no viable en base a una estimación conservadora, la cual suma la carga del vehículo y la de la demanda no asignada de los nodos que visita y le resta la capacidad del vehículo. De este modo, un vehículo será viable si la estimación devuelve un valor negativo. Así, las cantidades enviadas aumentan en $d_i - \lceil \beta d_i \rceil$ para todos los nodos en vehículos viables. Para los nodos visitados por varios vehículos, el algoritmo aumenta únicamente la cantidad enviada al nodo por el primer vehículo encontrado. Entonces, se reparte la demanda no asignada de manera iterativa. En cada iteración, el algoritmo encuentra la manera más barata (en términos de tiempo de trayecto) de asignar cada nodo a un vehículo viable, siempre al final de su ruta para seguir asegurando que se reparta la demanda inicial en el tiempo t . A continuación, se actualiza la viabilidad de los vehículos, de modo que si un vehículo pasa a ser viable se incrementan las cantidades enviadas para satisfacer la demanda completa.

El proceso se repite hasta que toda la demanda está asignada. Tras 5000 iteraciones, se toma la mejor solución encontrada.

En la Figura 1.5 (b) se aprecia la solución final del ejemplo hallada con este método. En este caso, coincide con la solución óptima de $P(Z_3)$. Notamos que este enfoque se puede generalizar para distintos niveles de urgencia en los nodos considerando demandas individuales β_i , $i \in N$. Para más detalles se puede consultar [?].

Elección de β

Estudiemos cómo el valor de β repercute en las soluciones de $P(Z_3)$, en especial en el reparto de la demanda y los valores de las métricas.

En la Figura 1.6 se aprecia el efecto de β en el reparto. En particular, se muestra el porcentaje de nodos visitados por varios vehículos en las soluciones de $P(Z_3)$ con respecto a β agregado a lo largo de las instancias del problema. La naturaleza discreta de la gráfica se debe a la función techo usada al repartir las demandas $\lceil \beta d_i \rceil$. El reparto es mínimo cuando β es próximo a 0 o a 1. Cuando $\beta = 0$, el algoritmo se reduce a su segunda fase en la que el reparto en base a la equidad no sucede. En este punto, un 10% de los nodos son visitados por varios vehículos debido a razones de capacidad. A medida que β aumenta, también lo hace el número de nodos con reparto, alcanzando el 18% en el intervalo (0,5, 0,6). A partir de entonces, el número de nodos con reparto disminuye rápidamente a medida que β sigue aumentando. Cuando $\beta = 1$, el algoritmo se reduce a su fase inicial y, por tanto, es igual al algoritmo para $P(Z_2)$. De este modo, no se hace reparto por razones de equidad.

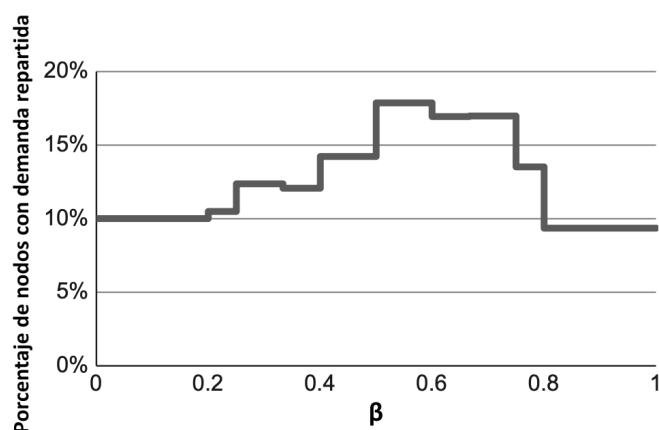


Figura 1.6: Porcentaje de nodos con demanda repartida en función de β . Fuente: [17].

En la Figura 1.7 se aprecia el efecto de β en los valores de $P(Z_3)$. Para cada métrica, se

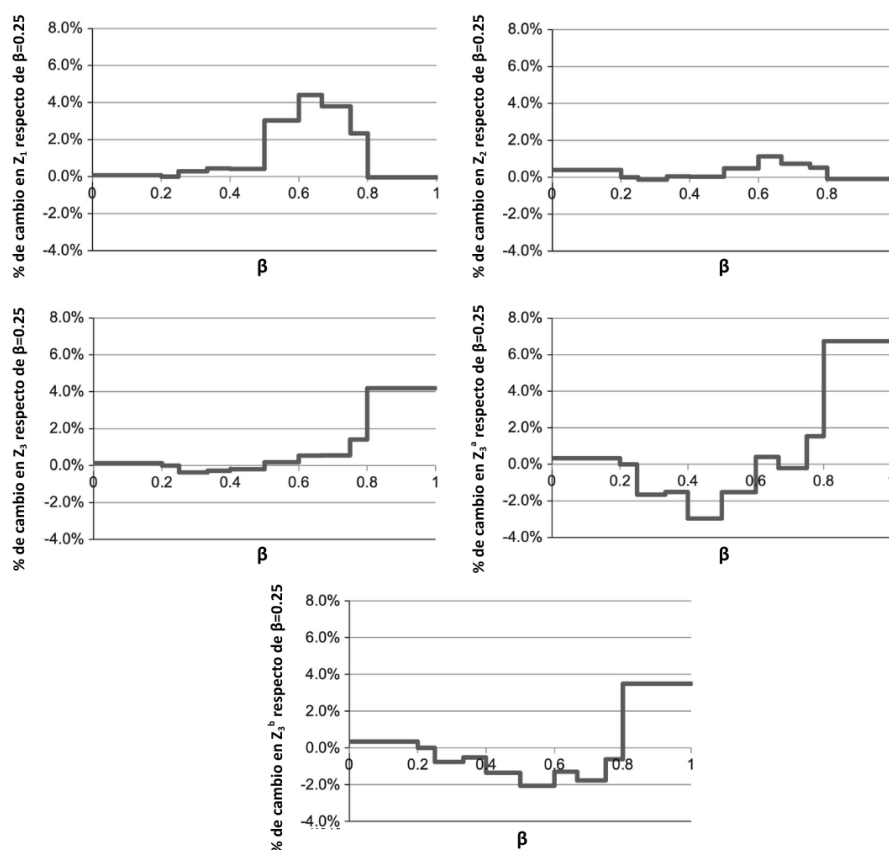


Figura 1.7: Porcentaje de cambio en los valores de $P(Z_3)$ en función de β . Fuente: [17].

representa el promedio en las diferentes instancias de la diferencia porcentual en valor métrico con respecto a β comparado con el valor métrico para $\beta = 0,25$. En general, no observamos un impacto significativo causado por β en los valores de las métricas de las soluciones. A excepción de Z_3^a , los valores no varían más de un 5%. De todos modos, sí se observan ligeras tendencias. En particular, los valores de Z_1 y Z_2 aumentan o disminuyen según lo haga el reparto de nodos observado en la Figura 1.6. A medida que más nodos son visitados por varios vehículos para mejorar la equidad, tanto la distancia recorrida como el tiempo de espera total disminuyen. Por el contrario, los valores de las métricas de equidad Z_3^a , Z_3^b y Z_3 mejoran a medida que β toma valores que favorecen el reparto. Combinando estos resultados con la tasa de cambio en las gráficas de la Figura 1.7, podemos concluir que un valor bajo de β logra mejoras en la eficiencia y la eficacia con una ligera pérdida de equidad.

Podemos definir el valor de β dependiendo de las prioridades de cada situación. Por una parte, si buscamos enfatizar la eficiencia y la eficacia, la Figura 1.7 sugiere un valor bajo de β . Por otra parte, si buscamos un reparto más equitativo, un valor más alto de β puede ser más apropiado.

1.5.3. Estructura de las rutas

A diferencia de las instancias pequeñas estudiadas en la Sección 1.4, las soluciones para las instancias grandes tienden a repartir la demanda entre varios vehículos, especialmente en algunos modelos. En particular, en la solución de $P(Z_3)$ debería haber un mayor número de nodos visitados por varios vehículos por razones de capacidad y equidad.

En la Tabla I.6 del Anexo I se aprecia el promedio de nodos visitados por número de vehículos para las soluciones heurísticas de los modelos del problema. Como era de esperar, la de $P(Z_3)$ muestra mayor reparto que los otros modelos, si bien con ligera diferencia. Además, el reparto no es excesivo ya que la gran mayoría de nodos son visitados por un único vehículo. El impacto en la estructura de las rutas se aprecia especialmente en las soluciones de $P(Z_3)$: como en este modelo se busca enviar a cada nodo parte de su demanda, algunas rutas deben volver atrás para satisfacer nodos cuya demanda no se puede suplir antes del tiempo t .

1.5.4. Rendimiento de las métricas

Como para las soluciones heurísticas no existe garantía de optimalidad, en las instancias grandes evaluamos las soluciones respecto a cada métrica de modo distinto a lo hecho en la Subsección 1.4.3. En este caso, para una solución (1) y una métrica Z_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, consideramos la solución heurística de cada modelo y seleccionamos la solución (2) con mejor valor de Z_i . Entonces, calculamos la diferencia porcentual entre los valores de las métricas de (1) y (2). En la Tabla I.7 del Anexo I se aprecia un resumen de estas diferencias porcentuales a lo largo de las instancias del problema.

Aunque resulta intuitivo pensar que cada solución heurística debería ofrecer el mejor rendimiento en el modelo que intenta resolver, la solución heurística de $P(Z_3)$ muestra a menudo un mejor rendimiento respecto a Z_2 que su propia solución. Las tendencias en los valores de las métricas son similares a las observaciones vistas en la Subsección 1.4.3. En efecto, los valores de las métricas de las soluciones heurísticas de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ son similares entre sí pero difieren de los de las soluciones de $P(Z_1)$. En particular, las soluciones de $P(Z_1)$ tienen valores de Z_2 y Z_3 , en promedio, un 27 % y un 31 % más altos, respectivamente, que la mejor solución heurística para cada una de las respectivas métricas. En cuanto a Z_1 , las soluciones de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ tienen ambas valores un 16 % más altos en promedio que la mejor solución heurística para la métrica obtenida con el algoritmo heurístico de $P(Z_1)$.

Para examinar el efecto de la capacidad no utilizada, estudiamos los resultados con alteraciones en el número de vehículos. Sea $M = \lceil \frac{1}{C} \sum_{i \in N} d_i \rceil$ el número mínimo de vehículos necesarios para la viabilidad del problema.

En la Tabla I.8 del Anexo I se aprecian las diferencias porcentuales para M , $M + 1$, $M + 2$ y $M + 3$ vehículos. Observamos que, conforme aumenta el número de vehículos, la diferencia porcentual entre la solución heurística de $P(Z_1)$ y las mejores soluciones heurísticas de Z_2 y Z_3 aumenta progresivamente. Esto ocurre porque en $P(Z_1)$ es preferible usar el menor número de vehículos, mientras que en $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ ocurre lo contrario. Además, notamos que, a medida que aumenta el número de vehículos disponibles, los valores de $P(Z_2)$ y $P(Z_3)$ tienden a aproximarse ya que la capacidad añadida permite una entrega más paralela, lo que reduce el impacto de la demanda de los nodos.

Rendimiento con respecto a las soluciones óptimas restringidas

Comparamos las soluciones heurísticas con las soluciones óptimas con restricción en la longitud de las rutas para las instancias de 8 y 10 nodos del problema estudiadas en la Sección 1.4. En general, observamos muy buenos resultados. La solución heurística de $P(Z_1)$ tiene un rendimiento igual o mejor que la hallada con el *solver* en todas las instancias salvo una, en la que hay una desviación del 3,8%. Como las soluciones heurísticas no están restringidas a rutas que visiten como mucho 5 nodos, en algunos casos la asociada a $P(Z_1)$ tiene menores tiempos de trayecto que la obtenida con el *solver*. Para $P(Z_2)$, el algoritmo heurístico encuentra soluciones óptimas en todas las instancias. Para $P(Z_3)$, el algoritmo encuentra soluciones óptimas en todas las instancias menos en dos de las de 10 nodos, en las que las desviaciones son del 4,1% y del 1,2%. En todos los casos, las soluciones heurísticas resuelven las instancias de 8 y 10 nodos en menos de un segundo de tiempo de CPU.

1.6. Resolución exacta de una instancia pequeña con AMPL

En esta sección resolveremos el ejemplo de la Figura 1.2 de forma exacta haciendo uso de AMPL. En el Anexo III recogemos los archivos utilizados para la ejecución del problema, los cuales explicamos a continuación.

- En los archivos del tipo `.dat` definimos los datos del problema. En `rutas.dat` consideramos únicamente las demandas y las distancias, que son suficientes para calcular la eficiencia. Notamos que hemos fijado la distancia entre un nodo y sí mismo en 100 para evitar soluciones triviales. En `rutas1.dat` incluimos también los parámetros a , b y c explicados en la Subsección 1.3.2, los cuales usaremos para calcular la eficacia y la eficiencia.
- En los archivos del tipo `.mod` definimos los modelos del problema teniendo en cuenta las restricciones y el objetivo. En `rutas.mod` resolvemos el modelo de eficiencia sin prestar atención a ningún otro objetivo y partiendo únicamente de las demandas y las distancias.

En `rutas1.mod`, `rutas2.mod`, y `rutas3.mod` resolvemos los modelos de eficiencia, eficacia, y equidad, respectivamente, calculando en cada caso los valores de las tres métricas Z_1 , Z_2 , y Z_3^b . En `rutas4.mod` resolvemos un modelo que minimiza el objetivo de eficiencia y equidad $Z_3^b + 0,4 \cdot Z_1$. Finalmente, en `rutas5.mod` resolvemos un modelo que minimiza el objetivo de eficacia y equidad $Z_3^b + 0,4 \cdot Z_2$.

- En los archivos del tipo `.run` seleccionamos el *solver* Gurobi y cargamos los archivos necesarios para la ejecución de los modelos, especificando qué valores de las métricas queremos mostrar como resultados. En `rutas.run` cargamos `rutas.dat` y `rutas.mod`, mostrando únicamente el valor de Z_1 . En `rutas1.run` cargamos `rutas1.dat` y seleccionamos el modelo escogido entre `rutas1.mod`, `rutas2.mod` y `rutas3.mod`, mostrando los valores de Z_1 , Z_2 , y Z_3^b . Finalmente, en `rutas2.run` cargamos `rutas1.dat` y seleccionamos uno de los modelos de objetivo combinado, mostrando los valores de Z_1 , Z_2 , Z_3^b , $Z_3^b + 0,4 \cdot Z_1$, y $Z_3^b + 0,4 \cdot Z_2$.

Tras la ejecución de los comandos `include rutas.run`, `include rutas1.run`, e `include rutas2.run` (estos últimos considerando cada modelo), obtenemos las salidas recogidas en la Sección III.4 del Anexo III. Analicemos cada caso.

1.6.1. Eficiencia

El valor de Z_1 obtenido tras la ejecución de `include rutas.run` es de 27. Como se aprecia en la Tabla I.1 del Anexo I, este valor de la eficiencia coincide con el valor óptimo hallado en [17], luego los resultados son coherentes. Notamos que la solución óptima obtenida no es la misma que la de la Figura 1.3, pero esto no supone ninguna contradicción ya que la solución óptima no es única. Ejecutando `include rutas1.run` con el modelo `rutas1.mod`, obtenemos valores de Z_2 y Z_3^b de 80 y 3,09015, respectivamente.

1.6.2. Eficacia

El valor de Z_2 obtenido con este modelo es de 76, luego mejora respecto del obtenido con el modelo de eficiencia. Por su parte, Z_1 y Z_3^b toman valores de 34 y 3,29948, respectivamente, ambos ligeramente peores que los obtenidos con el modelo anterior. Notamos que, como se aprecia en la Tabla I.1, todos los valores coinciden con los óptimos hallados en [17].

1.6.3. Equidad

El valor de Z_3^b obtenido con este modelo es de 0, lo cual es una clara mejoría respecto de los anteriores modelos. Evidentemente, es el valor óptimo. En cuanto a las otras dos métricas,

Z_1 y Z_2 toman valores de 38 y 114, respectivamente. Si bien Z_1 no empeora considerablemente respecto de los modelos considerados anteriormente, Z_2 sí empeora de manera significativa. Al igual que en el modelo anterior, como se aprecia en la Tabla I.1, todos los valores coinciden con los óptimo hallado en [17].

1.6.4. Equidad y eficiencia

En este caso, obtenemos valores de Z_1 , Z_2 y Z_3^b de 29, 82, y 0,513889, respectivamente. Aunque no hayamos considerado Z_2 en el objetivo, observamos un valor muy similar al obtenido en el modelo de eficacia. En cuanto a las métricas sí consideradas en el objetivo, ambas tienen valores cercanos a sus respectivos óptimos, por lo que concluimos que este modelo es superior a los estudiados anteriormente.

1.6.5. Equidad y eficacia

En este último modelo obtenemos valores de Z_1 , Z_2 y Z_3^b de 38, 82, y 0,513889, respectivamente. Notablemente, Z_2 y Z_3^b no varían respecto del modelo de equidad y eficiencia. Por su parte, el valor de Z_1 es peor que el de dicho modelo.

En definitiva, en base a este pequeño estudio podríamos pensar que en un problema real el modelo más adecuado podría ser el que combina objetivos de equidad y eficiencia. En el caso considerado, la combinación de objetivos de equidad y eficacia no ofrece ningún beneficio respecto a este último modelo, y sí empeora la eficiencia. En función de los requisitos de la situación específica, se podría modificar el valor considerado de 0,4 en la compensación de los objetivos para una mejor adaptación a los requisitos particulares. De todos modos, en general, necesitaríamos más pruebas en escenarios diferentes para poder extrapolar los resultados.

1.7. Conclusión

Los resultados vistos en este capítulo ofrecen varios análisis acerca de las situaciones de ayuda humanitaria. En la práctica, las organizaciones de ayuda tienden a usar una flota de vehículos formada por muchos vehículos pequeños. Por un lado, esto es más barato que movilizar vehículos grandes durante distancias muy largas. Por otro lado, a menudo se dan situaciones en las que hay que acceder a zonas a las que es imposible acceder con vehículos de mayor tamaño. Además, los conductores locales conocen mejor las zonas y por tanto son más aptos para realizar los envíos. De todos modos, coordinar tantos vehículos resulta a menudo muy complejo. Así, los algoritmos

heurísticos descritos en las Subsecciones 1.5.1 y 1.5.2 pueden servir como herramienta decisiva para manejar operaciones a gran escala. Además, las Observaciones 1.5 y 1.6 acerca de la forma de las rutas pueden servir como regla general si no se dispone de recursos informáticos avanzados.

En situaciones de ayuda es habitual que haya zonas más afectadas y que por tanto necesiten un mayor número de recursos. Con este fin, se puede adaptar el algoritmo propuesto en la Subsección 1.5.2 modificando los valores β_i y t para priorizar las zonas más vulnerables. Además, se puede definir un valor de β adecuado para cada situación en base a lo explicado en el Apartado *Elección de β* .

Finalmente, notamos que, para mayor comprensión del problema, nos hemos centrado en diferentes modelos basados en la eficiencia, la eficacia y la equidad de forma independiente. De todos modos, en una situación real, las organizaciones de ayuda deben considerar los tres objetivos simultáneamente. Por tanto, sería de interés el estudio de una función multiobjetivo que integrase los tres factores, si bien dicho análisis queda fuera del alcance del presente trabajo.

Capítulo 2

Equidad en problemas de localización

La localización óptima de instalaciones constituye una rama de la optimización matemática de especial relevancia en el ámbito económico. La necesidad de un enfoque equitativo surge naturalmente al considerar sus repercusiones sociales, ya que, por ejemplo, la construcción de los hospitales está sujeta a este tipo de decisiones. En este capítulo se aborda este tema siguiendo la metodología propuesta en [7]. La estructura es la siguiente. En la Sección 2.1 presentaremos una exposición introductoria. En la Sección 2.2 revisaremos la literatura centrada en los problemas de localización. En la Sección 2.3 modelizaremos el problema y estudiaremos algunas propiedades relacionadas con la equidad. En las Secciones 2.4 y 2.5 estudiaremos los casos, respectivamente, continuo y discreto. En la Sección 2.6 analizaremos los resultados de un estudio computacional. Finalmente, en la Sección 2.7 presentaremos las conclusiones.

2.1. Introducción

Los problemas de localización han sido considerablemente estudiados en la rama de optimización matemática. En general, consisten en la asignación de la mejor ubicación posible para una o varias instalaciones dentro de una región concreta, atendiendo a distintos criterios. Por un lado, estos problemas tienen utilidad a nivel de satisfacción pública si pensamos, por ejemplo, en hallar la posición óptima de hospitales para minimizar tiempo de llegada de los pacientes. Por otro lado, las empresas privadas trabajan con este tipo de problemas para encontrar una asignación de centros de distribución que permita reducir al máximo los costes logísticos para aumentar el beneficio económico.

En nuestro caso, seguiremos la metodología explicada en [7] para proponer un criterio de equidad basado en el descontento para problemas de asignación de plantas de distribución en dominios tanto discretos como continuos. Generalmente, cuando se estudia el descontento en

problemas de localización, se consideran las preferencias de todos los participantes y se parte de que un usuario siente descontento cuando prefiere la planta asignada a otro usuario antes que la propia. De todos modos, estos problemas parten de que se conocen las preferencias de todos los usuarios, lo cual no siempre es realista. Por ello, el criterio propuesto en [7] trata de minimizar el descontento interno, suponiendo que los usuarios sienten descontento únicamente respecto a aquellos asignados a su misma planta.

Esta definición surge de manera natural en contextos locales, en los que las personas consideran que su asignación es injusta en comparación con otros miembros de su comunidad, pero no en una escala global. Por ejemplo, pensemos en habitantes de un mismo barrio que mantienen lazos sociales. Debido a que comparten información personal, es natural que surja descontento cuando uno de ellos descubre que otro está asignado a un centro de salud más cercano. Sin embargo, ya que no conocen la asignación de otras zonas de la ciudad, no lo sentirán hacia personas ajenas a su comunidad. Así, en una solución sin descontento ideal, todos los individuos asignados a un mismo centro estarían igualmente satisfechos.

2.2. Revisión de la literatura

En esta sección revisaremos la literatura relacionada con los problemas de localización y, en especial, con los que se rigen por criterios de equidad.

En primer lugar, notamos que en [32] se afirma que las medidas de eficiencia y eficacia no son adecuadas para problemas de localización centrados en instalaciones públicas. De este modo, en [15] se propone un marco general para medir la desigualdad y se presentan varios axiomas para la adecuación de dichas medidas. Por otra parte, en [4] se trata la cuestión de la equidad en el contexto de los impuestos, mientras que en [27], se aborda el tema a través de la función de mediana ordenada en problemas de localización discretos. Recientemente, en [6] se introduce una nueva medida de equidad para el problema de localización con cobertura máxima, el cual busca maximizar la demanda cubierta por un número limitado de instalaciones en un área determinada.

En [3] se puede encontrar una revisión detallada de todas las medidas de equidad propuestas para problemas de localización. De todos modos, las medidas más utilizadas son (i) el centro ([40]), que considera la mínima distancia máxima entre puntos de demanda; (ii) la desviación absoluta y sus variantes ([28]), que considera cuánto se alejan los puntos en promedio; (iii) la medida de Gini ([10]), que mide la distribución equitativa del acceso a las instalaciones; y (iv) el rango ([19]), que considera la diferencia entre las zonas con mejor y con peor acceso.

2.3. Modelización y análisis del problema

En esta sección modelizaremos el problema y analizaremos algunas de sus propiedades generales relativas a la equidad.

2.3.1. Formulación general

Sean $d, n \in \mathbb{Z}$, $d, n \geq 1$, denotemos $N = \{1, \dots, n\}$ y consideremos $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto finito de puntos de demanda o usuarios. Haciendo un abuso de notación, nos referiremos indistintamente a los puntos de demanda por a_i o i , para cada $a_i \in A$ e $i \in N$. Sea $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ el conjunto no necesariamente finito de posibles ubicaciones para una instalación. Para cuantificar los costes asociados a las distintas asignaciones de los puntos de demanda, consideramos, para cada $i \in N$, $\Phi_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^+$, que representa el coste de asignar a_i a cada una de las instalaciones potenciales en \mathcal{X} . Ahora, dado $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$, consideremos $P = \{1, \dots, p\}$ el conjunto de índices de las instalaciones que debemos ubicar. Así, el problema consiste en elegir las p ubicaciones $\{X_1, \dots, X_p\} \subset \mathcal{X}$ que minimicen una función de costes. Suponemos que los puntos de demanda se asignan a la instalación disponible con menor coste o, equivalentemente, con mayor preferencia. Además, suponemos que, en caso de empate, los puntos se asignan a las instalaciones de modo que se produzca el menor descontento global.

Para evaluar la calidad de un conjunto de instalaciones, consideraremos el descontento global derivado de los costes de asignación entre los pares de puntos de demanda asignados a la misma instalación. En particular, sean $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_p\} \subset \mathcal{X}$ un conjunto dado de instalaciones, y $j(l) := \arg \min_{j \in P} \Phi_l(X_j)$ la instalación preferida por a_l , para cada $l \in N$. Entonces, dados $i, k \in N$,

$$DI_{ik}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \Phi_i(X_{j(i)}) - \Phi_k(X_{j(k)}), & \text{si } \Phi_k(X_{j(k)}) < \Phi_i(X_{j(i)}) \quad \text{y} \quad j(i) = j(k), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

computa el descontento interno de i hacia k . De este modo, si la instalación disponible con menor coste para i y k es la misma, y el coste asociado a k es más bajo que el asociado a i , surge un descontento interno de i hacia k igual a la diferencia entre los costes.

El objetivo del problema es elegir las p instalaciones de \mathcal{X} que minimicen la suma total del descontento interno de cada par de puntos asociados a la misma instalación. Formalmente, viene dado por

$$\min_{\mathbf{X} \subset \mathcal{X}, |\mathbf{X}|=p} \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} DI_{ik}(\mathbf{X}).$$

Omitiendo los términos nulos, podemos escribir

$$\sum_{i \in N} \sum_{k \in N} DI_{ik}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=i+1 \\ j(k)=j(i)}}^n |\Phi_i(X_{j(i)}) - \Phi_k(X_{j(k)})|.$$

Ahora, definamos, para cada $i \in N$ y cada $j \in P$,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \text{ es la instalación disponible con menor coste para } i, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces, podemos escribir el problema como

$$\min \sum_{j \in P} \sum_{i \in N} \sum_{\substack{k \in N \\ k > i}} |\Phi_i(X_j) - \Phi_k(X_j)| x_{ij} x_{kj}, \quad (\text{O1})$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j \in P} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (\text{R1})$$

$$\Phi_i(X_j) \cdot x_{ij} \leq \min_{l \in P} \Phi_i(X_l), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P \quad (\text{R2})$$

$$X_1, \dots, X_p \in \mathcal{X}, \quad (\text{R3})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P. \quad (\text{R4})$$

El objetivo (O1) implica minimizar el descontento interno entre cada par de puntos asignados a la misma instalación. Las restricciones (R1) aseguran que para cada punto de demanda se asigna a una única instalación. Las restricciones (R2) implican que cada punto de demanda se asigna a la instalación con menor coste. Las restricciones (R3) y (R4) indican el dominio al que pertenecen las ubicaciones de instalaciones.

2.3.2. Equidad

Existen una serie de propiedades que permiten considerar una medida como equitativa. En [3], estas propiedades se clasifican en dos ramas. Por un lado, las propiedades binarias axiomáticas son aquellas que una medida de igualdad puede o no verificar: el principio de transferencia, el principio de invarianza de escala, la propiedad de normalización y la propiedad de imparcialidad. Por otro lado, las propiedades computables axiomáticas son aquellas que se pueden verificar en distintos grados de intensidad: la trazabilidad analítica, la Pareto-optimalidad y la adecuación. Además, se proponen tres «propiedades de optimización»: la invarianza ante transformaciones, la propiedad asintótica y la propiedad de monotonía. En lo que sigue, explicaremos cada una de estas propiedades y estudiaremos si la medida propuesta de descontento interno las verifica.

- **Principio de transferencia.** Una medida verifica esta propiedad si prioriza satisfacer a los usuarios asignados a sus instalaciones más preferidas antes que a aquellos asignados a instalaciones con menor preferencia. Como el descontento interno es una medida tipo Gini, verifica esta propiedad ([24]).
- **Principio de invarianza de escala y normalización.** Esta propiedad se refiere a que la medida no depende de las unidades en las que se midan la insatisfacción o los costes. Claramente, la medida propuesta la verifica.
- **Propiedad de imparcialidad.** Esta propiedad afirma que la equidad solo depende de factores sociales y de los datos, en lugar de otros aspectos como la etnia, el color o la edad. En problemas de localización, se verifica automáticamente porque los usuarios no se distinguen en base a estos aspectos ([3]).
- **Trazabilidad analítica.** Este axioma se refiere a la viabilidad computacional del problema. El descontento interno de un conjunto dado de p instalaciones es fácilmente computable, luego verifica el axioma.
- **Pareto-optimalidad.** Esta propiedad implica que a medida que la solución mejora, ninguno de los usuarios estará en una situación peor. El descontento interno no satisface esta propiedad, como tampoco lo hacen el índice de Gini o el descontento global.
- **Adecuación.** Esta propiedad asegura que una medida se puede entender fácilmente y definir adecuadamente en el contexto de la toma de decisiones. El descontento interno lo verifica.
- **Invarianza ante transformaciones.** Una medida verifica este axioma si, tras aplicar la misma transformación a la posición de todas las instalaciones y de todos los puntos de demanda, se obtiene la misma solución. Por tanto, el descontento interno lo satisface, ya que depende de las posiciones relativas.
- **Propiedades asintótica y de monotonía.** Estas propiedades analizan las tendencias de las diferentes posiciones de las instalaciones y los puntos de demanda. La verificación formal de estas propiedades se basa en la simulación y requiere un estudio que excede los objetivos de este trabajo.

2.4. Caso continuo

En esta sección estudiaremos el problema de localización de p instalaciones suponiendo que estas se pueden posicionar en todo el espacio.

Supongamos que la función de preferencia del punto de demanda $i \in N$ con respecto a una instalación ubicada en $X \in \mathbb{R}^d$ viene dada por la distancia definida por la norma l_1 en \mathbb{R}^d , esto es,

$$\Phi_i(X) = \|a_i - X\|_1 = \sum_{l=1}^d |a_{il} - X_l|.$$

Propondremos tres formulaciones distintas del problema. La primera se basa en representar el descontento como diferencias de distancias por pares. En contraste, en las otras dos formulaciones hacemos uso de la estructura del descontento interno como una función de mediana ordenada de las distancias. Para representar adecuadamente la distancia en función de las variables que representan las posiciones de las ubicaciones, usaremos las siguientes variables de decisión:

- X_{jl} , para denotar la coordenada l de la instalación j , para cada $j \in P$ y cada $l \in \{1, \dots, d\}$,
- $\phi_{ij} = \Phi_i(X_j) = \|a_i - X_j\|_1$, para cada $i \in N$ y cada $j \in P$,
- x_{ij} , para cada $i \in N$ y cada $j \in P$, definidas en la Subsección 2.3.1.

2.4.1. Primera formulación

Sean dos puntos de demanda $i, k \in N$, con $k > i$, y el conjunto de p instalaciones $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_p\}$. Entonces, para modelar el descontento interno entre i y k , consideramos las variables de decisión, $\theta_{ik} = \text{DI}_{ik}(\mathbf{X})$. Entonces, si consideramos una constante $U > 0$ lo suficientemente grande, el problema se puede escribir con la siguiente formulación, que denotaremos M_1^C :

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{\substack{k \in N \\ k > i}} \theta_{ik}, \quad (\text{O1}^C)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j \in P} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (\text{R5})$$

$$\theta_{ik} \geq \phi_{ij} - \phi_{kj} - U(2 - x_{ij} - x_{kj}), \quad \forall i, k \in N, k > i, \forall j \in P \quad (\text{R6})$$

$$\theta_{ik} \geq \phi_{kj} - \phi_{ij} - U(2 - x_{ij} - x_{kj}), \quad \forall i, k \in N, k > i, \forall j \in P \quad (\text{R7})$$

$$\phi_{ij} \leq \phi_{il} + U(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in N, \forall j, l \in P, j \neq l, \quad (\text{R8})$$

$$\phi_{ij} = \Phi_i(X_j), \quad \forall i \in N, \forall j \in P, \quad (\text{R9})$$

$$X_1, \dots, X_p \in \mathbb{R}^d, \quad (\text{R10})$$

$$\theta_{ik} \geq 0, \quad \forall i, k \in N, k > i, \quad (\text{R11})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \forall j \in P. \quad (\text{R12})$$

Notamos que se podría considerar una constante U para las restricciones (R6) y (R7) y otra constante $U' \neq U$ para las restricciones (R8). No obstante, en este caso no lo haremos por razones de simplicidad.

En este modelo, la función objetivo (O1^C) se refiere al descontento interno percibido por cada usuario con respecto a todos los demás. Las restricciones (R6) y (R7) permiten representar adecuadamente el descontento entre los usuarios i y k , esto es, o bien $DI_{ik}(\mathbf{X}) = \Phi_i(X_j) - \Phi_k(X_j)$, o bien $DI_{ki}(\mathbf{X}) = \Phi_k(X_j) - \Phi_i(X_j)$, para cuando i y k están asignados a la instalación j . Las restricciones (R8) aseguran la suposición de la asignación más cercana. Las restricciones (R9) representan las distancias l_1 entre puntos de demanda e instalaciones. Estas últimas restricciones pueden ser modeladas de forma lineal considerando dos conjuntos de variables adicionales. Para cada $i \in N$, $j \in P$, y $l \in \{1, \dots, d\}$, sean las variables auxiliares adicionales:

- $\omega_{ijl} = |a_{il} - X_{jl}| \geq 0$,
- $\xi_{ijl} = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_{ijl} = a_{il} - X_{jl} \geq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

Entonces, podemos escribir, para todo $i \in N$ y $j \in P$:

$$\omega_{ijl} \leq a_{il} - X_{jl} + U(1 - \xi_{ijl}), \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R13})$$

$$\omega_{ijl} \geq a_{il} - X_{jl}, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R14})$$

$$\omega_{ijl} \leq -a_{il} + X_{jl} + U\xi_{ijl}, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R15})$$

$$\omega_{ijl} \geq -a_{il} + X_{jl}, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R16})$$

$$\phi_{ij} = \sum_{l=1}^d \omega_{ijl}, \quad (\text{R17})$$

$$\omega_{ijl} \geq 0, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R18})$$

$$\xi_{ijl} \in \{0, 1\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}. \quad (\text{R19})$$

Las restricciones (R13) y (R15) aseguran que $\omega_{ijl} \leq \max\{a_{il} - X_{jl}, -a_{il} + X_{jl}\}$, mientras que (R14) y (R16) aseguran que $\omega_{ijl} \geq \max\{a_{il} - X_{jl}, -a_{il} + X_{jl}\}$, luego el valor absoluto $|a_{il} - X_{jl}|$ está correctamente definido. Las restricciones (R17) definen la distancia l_1 mediante la suma de los valores absolutos de las diferencias en todas las coordenadas entre el punto de demanda y la instalación. Notamos que, con esta representación la distancia, $\|X_j - a_i\|_1$ se puede expresar como la suma de las variables ω adecuadas.

2.4.2. Segunda formulación

La segunda formulación se basa en el siguiente lema, cuya demostración se encuentra en la Sección II.2 del Anexo II.

Lema 2.1. *Sea $\phi_{ij} = \Phi_i(X_j)$ si a_i está asignado a X_j , y 0 en caso contrario, para $i \in N$ y $j \in P$. Sea $\phi_{(k)j}$ la k -ésima distancia más grande en la sucesión de las distancias desde cada punto de demanda a X_j , con k_j el número de puntos asignados a X_j . Entonces, la función de descontento interno se puede escribir como*

$$\sum_{i \in N} \sum_{k \in N} DI_{ik}(X_1, \dots, X_p) = \sum_{j \in P} \sum_{k \in N} (k_j - 2k + 1) \phi_{(k)j}.$$

El lema anterior permite identificar la función objetivo del problema como una función de mediana ordenada de los costes de asignación dados por Φ ([29]). Este tipo de funciones han sido ampliamente estudiadas en la ciencia de localización y admiten varias representaciones a la hora de dar la formulación del problema. Una de las más efectivas es a través de las denominadas k -sumas, que consiste en la expresión de la función de mediana ordenada como una suma ponderada de k -sumas

$$S_k(\phi_{\cdot j}) = \sum_{l=1}^k \phi_{(l)j}.$$

De este modo, presentamos el siguiente lema, cuya demostración se encuentra en la Sección II.2 del Anexo II.

Lema 2.2. *Dados $j \in P$ y $X_j \in \mathbb{R}^d$, sean $\phi_{\cdot j} = (\phi_{1j}, \dots, \phi_{nj})$ los costes de asignación de todos los puntos de demanda a X_j . Entonces, se satisface la siguiente igualdad:*

$$\sum_{k \in N} (k_j - 2k + 1) \phi_{(k)j} = 2 \sum_{\substack{k \in N \\ k < k_j}} \sum_{l=1}^k \phi_{(l)j} - (2n + 1 - k_j) \sum_{l=1}^n \phi_{(l)j}.$$

Con los resultados anteriores, podemos reescribir la función objetivo del problema como

$$\sum_{i \in N} \sum_{k \in N} DI_{ik}(\mathbf{X}) = 2 \sum_{j \in P} \sum_{k \in N} \sum_{l=1}^k \phi_{(l)j} - \sum_{j \in P} (2n + 1 - k_j) \sum_{l=1}^n \phi_{(l)j}.$$

A la hora de formular el problema de optimización, se pueden usar distintas representaciones de las k -sumas. En particular, usaremos la propuesta en [5]. Además de las variables auxiliares ya definidas, consideraremos las variables $\alpha_{ij} = \sum_{l \in N} \phi_{lj} x_{ij}$ para representar, en la función objetivo, la expresión

$$k_j \sum_{l \in N} \phi_{lj} = \left(\sum_{i \in N} x_{ij} \right) \sum_{l \in N} \phi_{lj} = \sum_{i, l \in N} \phi_{lj} x_{ij}.$$

Entonces, podemos escribir el problema con la siguiente formulación, que denotaremos M_2^C :

$$\min \quad 2 \sum_{j \in P} \sum_{k \in N} \left(\sum_{l \in N} u_{klj} + \sum_{i \in N} v_{kij} \right) - (2n + 1) \sum_{j \in P} \sum_{i \in N} \phi_{ij} + \sum_{j \in P} \sum_{i \in N} \alpha_{ij}, \quad (\text{O2}^C)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j \in P} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (\text{R20})$$

$$\omega_{ijl} \leq a_{il} - X_{jl} + U(1 - \xi_{ijl}), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R21})$$

$$\omega_{ijl} \geq a_{il} - X_{jl}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R22})$$

$$\omega_{ijl} \leq -a_{il} + X_{jl} + U\xi_{ijl}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R23})$$

$$\omega_{ijl} \geq -a_{il} + X_{jl}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R24})$$

$$\phi_{ij} \leq \sum_{l=1}^d \omega_{ijl} + U(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R25})$$

$$\phi_{ij} \geq \sum_{l=1}^d \omega_{ijl} - U(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R26})$$

$$\phi_{ij} \leq Ux_{ij}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R27})$$

$$\alpha_{ij} \geq \sum_{l \in N} \phi_{lj} - U(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R28})$$

$$u_{klj} + v_{kij} \geq \phi_{ij}, \quad \forall i, k \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R29})$$

$$u_{kij}, v_{kij} \geq 0, \quad \forall i, k \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R30})$$

$$\phi_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R31})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R32})$$

$$\alpha_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P. \quad (\text{R33})$$

El objetivo (O2^C) representa el descontento interno total como ya se ha explicado. Las restricciones (R20) son las de única asignación. Las restricciones (R21) a (R24) aseguran la correcta definición de los valores absolutos $\omega_{ijl} = |a_{il} - X_{jl}|$ necesarios para deducir las distancias l_1 entre los puntos de demanda y las instalaciones. Las restricciones (R25) y (R26) aseguran que, en caso de que el punto de demanda $i \in N$ esté asignado a la instalación $j \in P$, el coste asociado ϕ_{ij} esté definido como la distancia entre a_i y X_j dada por la norma l_1 . En otro caso, las restricciones (R27) fijan el coste ϕ_{ij} a 0. Las restricciones (R28) aseguran que las variables α estén bien definidas. Finalmente, las restricciones (R29) permiten la computación adecuada de las k -sumas.

2.4.3. Tercera formulación

Además de la representación de las k -sumas aplicada en la subsección anterior, otras representaciones son posibles. Específicamente, en [30], se prueba que calcular $S_k(\phi_{.j})$ es equivalente

a resolver

$$\begin{aligned} \min \quad & kt_{kj} + \sum_{i \in N} \omega_{kij}, \\ \text{sujeto a} \quad & t_{kj} + \omega_{kij} \geq \phi_{ij}, \quad \forall i \in N, \\ & t_{kj} \geq 0, \\ & \omega_{kij} \geq 0, \quad \forall i \in N. \end{aligned}$$

Con esta representación, podemos escribir la siguiente formulación del problema, que denotaremos M_3^C :

$$\begin{aligned} \min \quad & 2 \sum_{j \in P} \sum_{k \in N} \left(kt_{kj} + \sum_{i \in N} \omega_{kij} \right) - (2n+1) \sum_{j \in P} \sum_{i \in N} \phi_{ij} + \sum_{j \in P} \sum_{i \in N} \alpha_{ij}, \quad (\text{O3}^C) \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j \in P} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (\text{R34}) \\ & \omega_{ijl} \leq a_{il} - X_{jl} + U(1 - \xi_{ijl}), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R35}) \\ & \omega_{ijl} \geq a_{il} - X_{jl}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R36}) \\ & \omega_{ijl} \leq -a_{il} + X_{jl} + U\xi_{ijl}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R37}) \\ & \omega_{ijl} \geq -a_{il} + X_{jl}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad \forall l \in \{1, \dots, d\}, \quad (\text{R38}) \\ & \phi_{ij} \leq \sum_{l=1}^d \omega_{ijl} + U(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R39}) \\ & \phi_{ij} \geq \sum_{l=1}^d \omega_{ijl} - U(1 - x_{ij}), \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R40}) \\ & \phi_{ij} \leq Ux_{ij}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R41}) \\ & \alpha_{ij} \geq \sum_{l \in N} \phi_{lj} - U(1 - x_{ij}), \quad \forall i, l \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R42}) \\ & t_{kj} + \omega_{kij} \geq \phi_{ij}, \quad \forall i, k \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R43}) \\ & \phi_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R44}) \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R45}) \\ & t_{kj} \geq 0, \quad \forall k \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R46}) \\ & \omega_{kij} \geq 0, \quad \forall i, k \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R47}) \\ & \alpha_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P. \quad (\text{R48}) \end{aligned}$$

Notamos que las restricciones (R34)–(R42) coinciden con las restricciones (R20)–(R28) de M_2^C . Para adaptar el problema a la representación de las k -sumas ahora considerada, se sustituye el objetivo (O2^C) por el objetivo (O3^C), que tiene en cuenta el cálculo de $S_k(\phi_{\cdot j})$ ya explicado. Además, se sustituyen las restricciones (R29) por las restricciones (R43).

2.5. Caso discreto

En esta sección estudiaremos el problema de localización de p instalaciones suponiendo que el conjunto de sus ubicaciones potenciales es finito, esto es, $\mathcal{X} = \{b_1, \dots, b_m\} \subset \mathbb{R}^d$.

Denotemos por $M = \{1, \dots, m\}$ al conjunto de índices para las instalaciones potenciales y supongamos que tenemos que ubicar $1 \leq p \leq m - 1$ instalaciones. Notamos que, en el caso discreto, los costes (las distancias) entre los puntos de demanda y las plantas se pueden computar en una fase previa. Denotemos por $C = (\phi_{ij})_{n \times m}$ a la matriz de costes, donde $\phi_{ij} = \Phi_i(b_j)$ es la medida de insatisfacción que el usuario i siente si se le asigna el lugar j .

En este caso, el problema se reduce a elegir p instalaciones entre las m potenciales de modo que se minimice el descontento total entre los puntos de demanda. Por tanto, además de las variables ya definidas x , que indican la asignación de los usuarios a las plantas, y θ , usadas para modelar el descontento entre puntos de demanda, definiremos, para cada $j \in M$,

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si la instalación se ubica en el lugar } j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Al igual que en la sección anterior, propondremos tres formulaciones distintas del problema.

2.5.1. Primera formulación

Con la notación anterior, podemos modelar el problema con la siguiente formulación, que denotaremos M_1^D :

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \theta_{ik}, \quad (\text{O1}^D)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j \in M} y_j = p, \quad (\text{R49})$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (\text{R50})$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R51})$$

$$y_j + \sum_{\substack{l \in M \\ \phi_{ij} < \phi_{il}}} x_{il} \leq 1, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R52})$$

$$\theta_{ik} \geq |\phi_{ij} - \phi_{kj}|(x_{ij} + x_{kj} - 1), \quad \forall i, k \in N, \quad k > i, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R53})$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R54})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in M. \quad (\text{R55})$$

Las restricciones (R49)–(R51) son restricciones clásicas que aseguran, respectivamente, que se abren p instalaciones, que a cada usuario se le asigna solo una, y que solo se les puede asignar a instalaciones abiertas. Las restricciones (R52) son las de la asignación más cercana. Las restricciones (R53) aseguran la correcta definición de las variables de descontento θ . Notamos que θ_{ik} toma el valor $|\phi_{ij} - \phi_{ik}|$ en caso de que i y k estén asignados a la misma planta j , es decir, cuando $x_{ij} \cdot x_{kj} = 1$, lo cual aparece expresado en forma lineal como $(x_{ij} + x_{kj} - 1)$ en la restricción (R53).

Como y_j vale 1 siempre que $x_{ij} \cdot x_{kj}$ también tome este valor, las restricciones anteriores se pueden fortalecer añadiendo las siguientes:

$$\theta_{ik} \geq |\phi_{ij} - \phi_{kj}|(x_{ij} + x_{kj} - y_j), \quad \forall i, k \in N, \quad k > i, \quad \forall j \in M. \quad (\text{R56})$$

2.5.2. Segunda formulación

La formulación anterior se basa en las variables y restricciones clásicas de los problemas discretos de localización. De todos modos, usando solo las variables y , podemos deducir la siguiente formulación reducida, que denotaremos M_2^D :

$$\min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \theta_{ik}, \quad (\text{O2}^D)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j \in M} y_j = p, \quad (\text{R57})$$

$$\theta_{ik} \geq |\phi_{ij} - \phi_{kj}| \left(y_j - \sum_{\substack{l \in M \\ \phi_{il} < \phi_{ij} \text{ o } \phi_{kl} < \phi_{kj}}} y_l \right), \quad \forall i, k \in N, \quad k > i, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R58})$$

$$\theta_{ik} \geq 0, \quad \forall i, k \in N, \quad k > i, \quad (\text{R59})$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R60})$$

Las restricciones (R58) aseguran que θ_{ik} tome el valor $|\phi_{ij} - \phi_{kj}|$ cuando (i) se abre la planta j , y (ii) no se abre ninguna otra planta l más cercana de i o de k que la planta j . Esto significa que la planta más cercana, o una de las más cercanas, en caso de empate, a i y a k es j . Por tanto, i y k serán asignados a j , y el descontento de esta asignación será, al menos, en caso de empate, $|\phi_{ij} - \phi_{kj}|$.

Para fortalecer la formulación, se puede usar el siguiente conjunto de desigualdades válidas:

$$\theta_{ik} \geq \sum_{j \in J} |\phi_{ij} - \phi_{kj}| \left(y_j - \sum_{\substack{l \in M \\ \phi_{il} < \phi_{ij} \text{ o } \phi_{kl} < \phi_{kj}}} y_l \right), \quad \forall J \subset M.$$

2.5.3. Tercera formulación

Con un razonamiento similar al explicado en la Subsección 2.4.2, podemos escribir

$$\sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \text{DI}_{ik}(\mathbf{X}) = 2 \sum_{j \in P} \sum_{k \in N} \sum_{l=1}^k \phi_{(l)j} - \sum_{j \in P} (2n + 1 - k_j) \sum_{l=1}^n \phi_{lj} x_{lj},$$

donde k_j es el número de puntos de demanda asignados a la planta j . Por tanto, podemos considerar la siguiente formulación, que denotaremos M_3^D :

$$\min \quad 2 \sum_{j \in P} \sum_{k \in N} \left(\sum_{l \in N} u_{klj} + \sum_{i \in N} v_{kij} \right) - (2n + 1) \sum_{j \in P} \sum_{i \in N} \phi_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in P} \sum_{i \in N} \phi_{ij} \alpha_{ij}, \quad (\text{O3}^D)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j \in M} y_j = p, \quad (\text{R61})$$

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N, \quad (\text{R62})$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R63})$$

$$y_j + \sum_{\substack{l \in M \\ \phi_{ij} < \phi_{il}}} x_{il} \leq 1, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in M, \quad (\text{R64})$$

$$\alpha_{ij} \geq \sum_{l \in M} x_{lj} - (n - p)(1 - x_{ij}), \quad \forall i, l \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R65})$$

$$u_{klj} + v_{kij} \geq \phi_{ij} x_{ij}, \quad \forall i, k, l \in N, \quad l \leq k, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R66})$$

$$u_{kij}, v_{kij} \geq 0, \quad \forall i, k \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R67})$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, \quad \forall j \in P, \quad (\text{R68})$$

$$\alpha_{ij} \geq 0, \quad \forall i, l \in N, \quad \forall j \in P. \quad (\text{R69})$$

En este caso, las restricciones (R61)–(R64) coinciden con las restricciones (R49)–(R52) de M_1^D . Los cambios principales respecto de este último modelo son (i) la modificación del objetivo, (ii) la eliminación de la restricción (R53), y (iii) la incorporación de las restricciones (R65) y (R66).

2.6. Estudio computacional

En esta sección resumiremos los resultados de un estudio computacional realizado con el *solver* Gurobi para evaluar el rendimiento de los modelos. La información detallada del procedimiento se encuentra en [7].

2.6.1. Análisis de resultados

En primer lugar, con el fin de evaluar la conveniencia del descontento interno como métrica, se resuelven tres modelos de localización para cada uno de los dominios de solución (continuo y discreto) con distintos criterios de optimización: la p -mediana, el descontento global y el descontento interno.

En el modelo de la p -mediana, el objetivo es minimizar la suma total de las distancias de cada usuario a su instalación más cercana. Formalmente, corresponde a

$$\min_{\mathbf{X} \subset \mathcal{X}, |\mathbf{X}|=p} \sum_{i \in N} \min_{j \in P} \phi_i(X_{j(i)}).$$

En el modelo del descontento global, el objetivo es minimizar el descontento total percibido por los usuarios independientemente de la instalación a la que hayan sido asignados. Formalmente, corresponde a

$$\min_{\mathbf{X} \subset \mathcal{X}, |\mathbf{X}|=p} \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} D_{ik}(\mathbf{X}),$$

donde

$$D_{ik}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \Phi_i(X_{j(i)}) - \Phi_k(X_{j(k)}), & \text{si } \Phi_k(X_{j(i)}) < \Phi_i(X_{j(k)}), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Para cada una de las soluciones, se evalúan las tres funciones objetivo y se analizan los resultados, expuestos en las Figuras 2.1 a 2.6.

En las Figuras 2.1 y 2.2 se aprecian las desviaciones medias (por valores de p y de n) del descontento interno en los modelos de la p -mediana y del descontento global, para los casos discreto y continuo, respectivamente. En primer lugar, observamos que las soluciones del modelo basado en el descontento interno no coinciden con las del resto. En particular, existen instancias del problema de la p -mediana en las que las soluciones difieren del óptimo de descontento interno en más de un 20 %, para el caso discreto, y en aproximadamente un 90 %, para el continuo. En el caso discreto, la desviación disminuye según los valores de p , mientras que para el continuo, aumenta. Esto se debe a que las del modelo continuo permiten más flexibilidad y un descontento interno cercano a 0 a medida que p aumenta. Notamos que una solución con descontento interno nulo es aquella en la que todos los usuarios asignados a la misma planta tienen el mismo coste asociado.

En las Figuras 2.3 y 2.4 se aprecian los resultados provenientes de medir el objetivo mediano (costes totales de asignación) en las soluciones basadas en el descontento con respecto a las de la p -mediana, para los casos discreto y continuo, respectivamente. Como era de esperar,

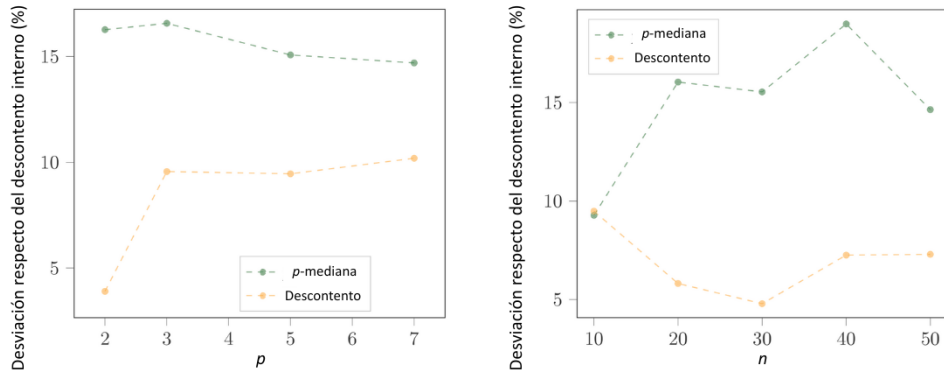


Figura 2.1: Desviaciones medias por valores de p (izquierda) y n (derecha) del descuento interno en los modelos de la p -mediana y del descuento global para los casos discretos. Fuente: [7].

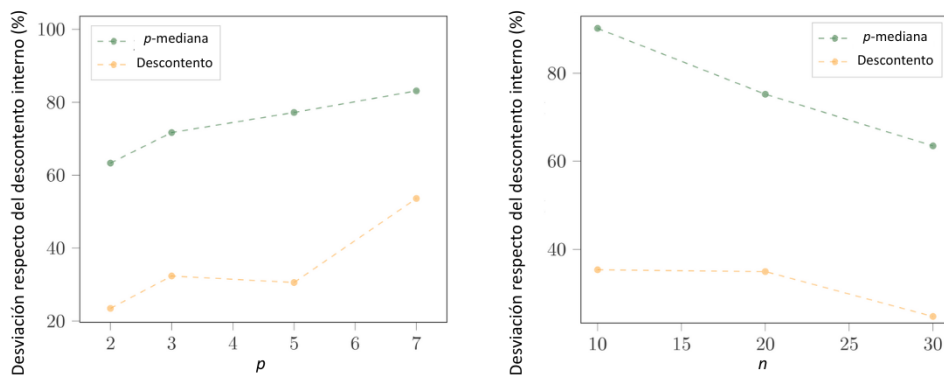


Figura 2.2: Desviaciones medias por valores de p (izquierda) y n (derecha) del descuento interno en los modelos de la p -mediana y del descuento global para los casos continuos. Fuente: [7].

las soluciones con descuento global bajo resultan en soluciones con un mayor coste total de asignación mediano. De todos modos, las desviaciones en estos costes para las soluciones de las instancias discretas no son tan elevadas. En particular, el coste añadido total del modelo de descuento interno es inferior al 9% con respecto a la mejor solución de la p -mediana. En cuanto a las instancias continuas, las desviaciones medias superan el 15% en todos los casos.

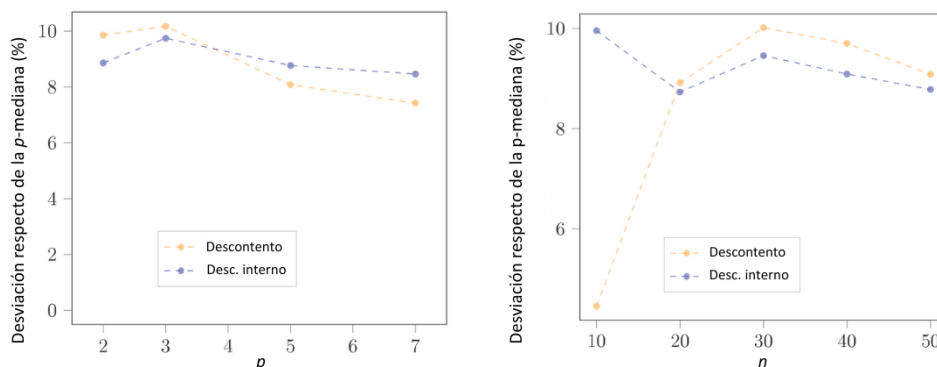


Figura 2.3: Desviaciones medias por valores de p (izquierda) y n (derecha) de la p -mediana en los modelos del descuento global y del descuento interno para los casos discretos. Fuente: [7].

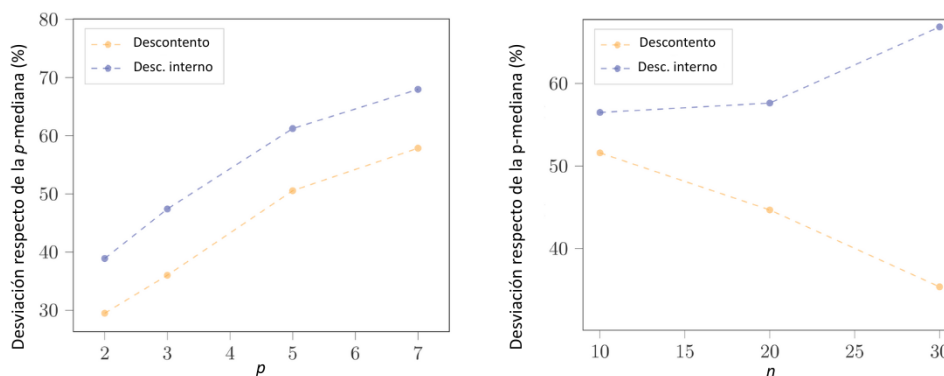


Figura 2.4: Desviaciones medias por valores de p (izquierda) y n (derecha) de la p -mediana en los modelos del descuento global y del descuento interno para los casos continuos. Fuente: [7].

En las Figuras 2.5 y 2.6 se evalúan los modelos de la p -mediana y del descuento interno con respecto al descuento global. Para valores bajos de p , el modelo de la p -mediana presenta una mayor desviación respecto al modelo basado en el descuento en ambas instancias. De todos modos, para valores más elevados de p , dichas desviaciones se vuelven despreciables en las instancias discretas. En estos casos, el descuento global del modelo de la p -mediana es similar al del modelo basado en el descuento. De todos modos, notamos que en el modelo del descuento

interno, las soluciones difieren de las del descuento global, con una desviación consistentemente cercana a su media (alrededor del 3,5%).

En resumen, las soluciones obtenidas a través del modelo del descuento interno difieren de aquellas obtenidas con los modelo de la p -mediana y del descuento global.

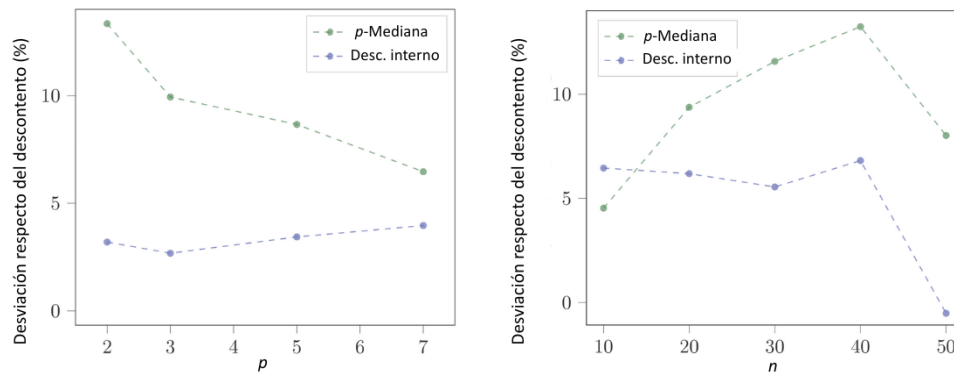


Figura 2.5: Desviaciones medias por valores de p (izquierda) y n (derecha) del descuento global en los modelos de la p -mediana y del descuento interno para los casos discretos. Fuente: [7].

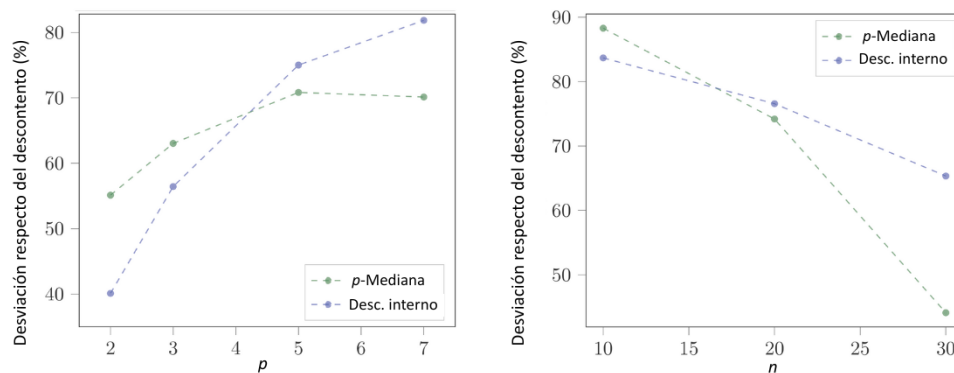


Figura 2.6: Desviaciones medias por valores de p (izquierda) y n (derecha) del descuento global en los modelos de la p -mediana y del descuento interno para los casos continuos. Fuente: [7].

2.6.2. Rendimiento computacional

Para la resolución de los modelos, se fijó un tiempo máximo de dos horas y se generaron dos tipos de instancias:

- aleatoria, con puntos de demanda generados uniformemente en $[0, 100]^d$,

- mancha gaussiana, con puntos de demanda generados en manchas gaussianas isotrópicas en $[0, 100]^d$ con $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ centros de agrupación y desviación típica 1.

En la Tabla I.9 del Anexo I se aprecia el tiempo de CPU promedio, en segundos, necesario para resolver las distintas formulaciones del problema discreto con valores de n hasta 30. Los datos se agrupan en función de n (número de puntos de demanda), p (número de instalaciones que hay que localizar), tipo de instancia (mancha gaussiana, aleatoria) y formulación del problema (M_1^D , M_2^D , M_3^D). En caso de que no se hallase la solución óptima en el tiempo máximo, se denota TM.

Observamos que el modelo M_3^D , basado en la reformulación de mediana ordenada del problema, es considerablemente peor que los otros dos en términos de viabilidad computacional. Notamos que esta formulación requiere $3n^2p$ variables auxiliares (u y v) y $np + n$ variables de decisión (x e y), mientras que M_1^D y M_2^D requieren n^2 auxiliares (θ) y, respectivamente, $np + p$ y n de decisión.

Para los modelos M_1^D y M_2^D , todas las instancias se resolvieron de forma óptima. De todos modos, para M_3^D , no se pudieron resolver óptimamente aquellas con $n = 30$ ni el 50% de las de $n = 20$.

Al comparar M_1^D y M_2^D , observamos que M_2^D requiere menor tiempo de CPU para resolver las instancias con valores bajos de p ($p \in \{2, 3\}$). En contraste, para valores más altos de p ($p \in \{5, 7\}$), M_1^D requiere menos tiempo.

En la Tabla I.10 del Anexo I se resumen los resultados obtenidos para instancias más grandes de M_1^D y M_2^D . En particular, se muestran el tiempo de CPU en segundos y el porcentaje de instancias no resueltas óptimamente en el límite de tiempo. Observamos el mismo comportamiento que para las instancias más pequeñas: M_2^D tiene mejor rendimiento para valores bajos de p , mientras que lo contrario sucede para valores más elevados.

En la Tabla I.11 del Anexo I se aprecian resultados similares para las instancias del problema continuo. Observamos que M_1^C tiene un mejor rendimiento que el resto de modelos en cuanto al tiempo de CPU y el número de instancias resueltas óptimamente. En particular, para M_1^C , se resolvieron óptimamente el 47% de las instancias, mientras que para M_2^C y M_3^C fueron, respectivamente, el 19% y el 15%.

Notamos que, en general, las instancias continuas presentan mayor dificultad computacional que las discretas. En particular, en las instancias continuas, solo se logró el óptimo para aquellas de hasta 30 usuarios, mientras que, en el caso discreto, esta cifra asciende a 50.

En la Figura 2.7 se aprecia el rendimiento computacional para cada uno de los modelos, tanto para el caso discreto (izquierda) como para el continuo (derecha). Observamos que aproximada-

mente un 60 % de las instancias discretas con valores bajos de p se pudieron resolver óptimamente para M_1^D y M_2^D en menos de 500 segundos. En contraste, para M_3^D , solo fue posible resolver cerca de un 20 % en este tiempo.

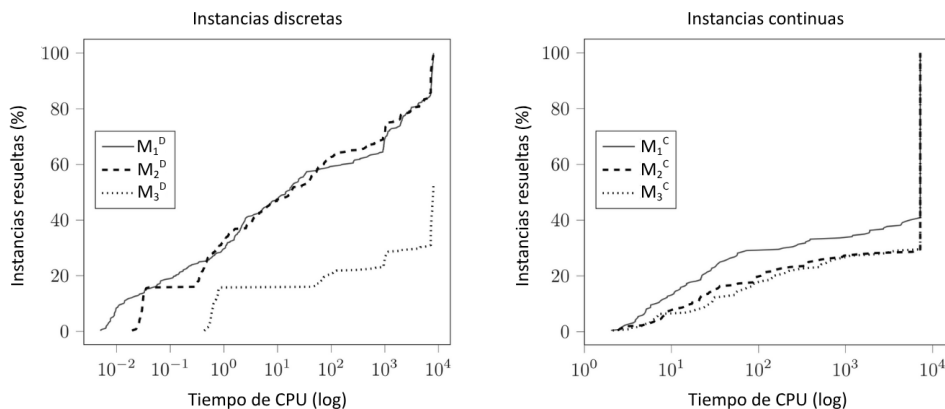


Figura 2.7: Rendimiento computacional para cada uno de los modelos de los casos discretos (izquierda) y continuo (derecha). Fuente: [7].

2.7. Conclusión

En problemas de localización equitativa, a menudo consideramos que los usuarios sienten descontento cuando su posición es peor que la de cualquier otro, con independencia de la instalación a que estén asignados. De todos modos, esto no es algo que ocurra con frecuencia en la práctica, ya que en problemas reales, la información de la que disponemos es limitada. Al tener en cuenta el descontento interno, pasamos a un marco de estudio más fiel a la realidad, al considerar, por ejemplo, que un usuario determinado puede conocer la situación de los miembros de su zona residencial pero no la de otras ciudades.

Los resultados explicados en este capítulo proporcionan un punto del que partir a la hora de abordar problemas en los que la equidad es importante. Pensemos, por ejemplo, en la construcción de hospitales o de estaciones de bomberos en una ciudad determinada. En este contexto, es de gran interés lograr que la distancia a las distintas áreas residenciales sea lo más baja posible para asegurar tiempos razonables de respuesta ante emergencias, pero también es necesario un enfoque equitativo.

Notamos que, para resolver un caso real, sería de interés diseñar algoritmos heurísticos que aseguren una buena solución con tiempos de computación bajos. De este modo, podríamos llegar a una solución que, si bien no fuese matemáticamente óptima, sería un equilibrio razonable entre costes bajos y equidad, lo cual, a menudo, es suficiente.

Capítulo 3

Asignación multiobjetivo de recursos hídricos

El reparto equitativo de recursos hídricos constituye un tema de suma importancia en un mundo cada vez más afectado por la contaminación y la escasez. En este capítulo seguiremos el esquema propuesto en [37] para abordar esta problemática. La estructura es la siguiente. En la Sección 3.1 presentaremos el marco introductorio. En la Sección 3.2 modelizaremos el problema de asignación multiobjetivo y estudiaremos un enfoque equitativo del mismo. En la Sección 3.3 analizaremos un caso real localizado en el río Han de China. Finalmente, en la Sección 3.4 presentaremos las conclusiones.

3.1. Introducción

Debido al rápido desarrollo socioeconómico, la contaminación generalizada del agua y el continuo crecimiento poblacional, el agua dulce está experimentando una creciente escasez ([16]). En esta situación de incertidumbre acentuada por el cambio climático, la asignación óptima de los recursos hídricos es una de las soluciones más efectivas para resolver el conflicto entre la creciente demanda de agua y el abastecimiento insuficiente de agua superficial ([21]). De todos modos, existen diversos factores que pueden dificultar esta distribución cuando los intereses de distintos grupos entran en conflicto. Por ejemplo, ciertos grupos pueden priorizar el máximo beneficio económico, mientras que otros tratan de minimizar la emisión de sustancias contaminantes en el agua. En consecuencia, resulta evidente la necesidad de una asignación multiobjetivo.

La mayor parte de la literatura enfocada en la asignación del agua se centra en conflictos político-económicos y en la degradación de ecosistemas a nivel regional, generando un grupo de

soluciones Pareto-óptimas (por ejemplo, [20] o [31]). Cuando la selección de soluciones resulta difícil para los tomadores de decisiones, el equilibrio de Nash les proporciona una base desde la que pueden tomar una decisión y proceder ([23]). De todos modos, este método convencional de asignación considera los beneficios de todo el sistema en lugar de las preferencias de los individuos, lo cual puede generar conflictos cuando las decisiones óptimas individuales difieran del óptimo agregado. Además, es probable que las regiones marginales tengan más falta de agua que otras zonas más pobladas, por lo que los resultados de la asignación pueden no satisfacer a todos los individuos. En este contexto, la equidad en la asignación de recursos hídricos desempeña un papel fundamental para garantizar su uso sostenible, el cual está muy relacionado con la estabilidad social ([13]).

Para analizar este problema seguiremos la metodología propuesta en [37] para estudiar la asignación de recursos hídricos mediante el desarrollo de un modelo que simula el proceso de negociación entre más de dos regiones en conflicto por el reparto del agua. En primer lugar, para incorporar las preferencias de compensación multiobjetivo de cada individuo, se construye un modelo de asignación óptima mediante optimización independiente con el fin de equilibrar el interés económico y la cantidad de contaminantes orgánicos en el agua. Entonces, se hace uso del lema de Sperner ([34]) para seleccionar alternativas de manera equitativa dentro de las preferencias de cada región. Este método para la división equitativa es útil para alcanzar soluciones aproximadamente *envy-free* (sin descontento) y constituye un campo especializado de la teoría de juegos. En este juego, las regiones en una cuenca hidrográfica se consideran jugadores, y los conjuntos de soluciones no inferiores (Pareto-óptimas) obtenidos mediante la asignación multiobjetivo óptima representan sus preferencias de compensación. Mediante la búsqueda del conjunto de soluciones aceptables dentro de la frontera de Pareto (el conjunto de soluciones Pareto-óptimas), y haciendo uso de herramientas de la teoría de juegos y de restricciones racionales, se logra resolver conflictos no solo entre los jugadores, sino también entre los distintos objetivos de cada jugador.

3.2. Modelización y análisis del problema

En esta sección modelizaremos el problema de asignación multiobjetivo de recursos hídricos, con especial interés en la aplicación de un enfoque equitativo.

Para estudiar la equidad, consideramos principios de optimalidad de Pareto, monotonía, consistencia, imparcialidad, prioridad y *envy-free*. Dependiendo de la naturaleza de los recursos, puede que no todos estos principios sean obtenibles y, por tanto, que sea necesario tomar una elección en función de lo que más se valore. En nuestro caso, elegiremos la optimalidad de Pareto y el *envy-free* como los principios de equidad en la asignación de recursos hídricos.

En cuanto a la resolución numérica de la asignación equitativa, se diseñará un enfoque pa-

ra resolver el problema de negociación con múltiples objetivos y participantes (en lo sucesivo, jugadores). En primer lugar, se resuelve el problema de los conflictos a través de un modelo multiobjetivo de asignación óptima en el que cada jugador busca optimizar sus propios objetivos. Entonces, se resuelve el juego a través de la asignación equitativa basada en el lema de Sperner, en el que cada jugador elige su ganancia del esquema de asignación en base a sus preferencias individuales, sujeto a (i) la cantidad total de recursos disponibles y (ii) el acuerdo de todos los jugadores.

En el proceso de optimización independiente, suponemos que cada jugador actúa de forma autónoma con el objetivo de obtener la mayor cantidad de agua posible y maximizar sus beneficios, sin tener en cuenta los beneficios del resto de jugadores.

3.2.1. Formulación general

Para presentar la formulación del modelo de asignación multiobjetivo, consideramos dos funciones objetivo para (i) maximizar el interés económico y (ii) minimizar la cantidad de contaminantes orgánicos.

- Maximización del interés económico:

$$\max f_1(x) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^m (NER_{ij} \cdot x_{ij}^t), \quad (O1)$$

donde NER_{ij} representa el beneficio económico neto por unidad de cantidad de agua del sector j en la zona operativa i ; x_{ij}^t representa la cantidad de agua asignada al sector j en la zona operativa i y en el mes t ; T es el número de meses; y m es el número de sectores.

- Minimización de la cantidad de contaminantes orgánicos:

$$\min f_2(x) = \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^m (d_{ij} \cdot p_{ij} \cdot x_{ij}^t), \quad (O2)$$

donde d_{ij} representa la demanda química de oxígeno por unidad de aguas residuales del sector j en la zona operativa i , utilizada como indicador del nivel de contaminación orgánica; y p_{ij} es el coeficiente de descarga de aguas residuales del sector j en la zona i , empleado para estimar la carga contaminante asociada a los distintos usos del agua.

Además, contemplamos una serie de restricciones.

- Balance hídrico en las zonas operativas:

$$W_i^t = \sum_{n=1}^{N_i} (\alpha_{ni} \cdot W_n^t) + R_i^t + \sum_{k=1}^{K_i} (\beta_{ki} \cdot O_k^t) - \sum_{j=1}^m x_{ij}^t + \sum_{j=1}^m (cc_{ij}^t \cdot x_{ij}^t) - L_i^t - TW_i^t, \quad (R1)$$

donde W_i^t es el caudal de salida de la zona i en el mes t ; W_n^t es el caudal procedente de la n -ésima zona aguas arriba que tiene conexión hidráulica con la zona i ; α_{ni} es el coeficiente que toma valores de 0 o 1 dependiendo de si la n -ésima zona aguas arriba está interrelacionada con la zona i ; R_i^t es la suma de la aportación hídrica local generada por la zona i ; O_k^t es el caudal de salida del embalse k ; β_{ki} es la conexión hidráulica entre la zona i y el embalse k , que se puede determinar como la proporción de desvío de agua de los ríos entre la zona i y el embalse k , con $0 \leq \beta_{ki} \leq 1$; cc_{ij}^t es el coeficiente de retorno del sector j en la zona i , $0 \leq cc_{ij}^t \leq 1$; L_i^t es la cantidad de pérdida de agua, incluyendo la evaporación, la pérdida por filtración y la pérdida por conducción; y TW_i^t es la cantidad de agua trasladada fuera de la cuenca.

- Requisitos ecológicos y medioambientales del agua de un sistema fluvial:

Algunos flujos de agua deberían permanecer en los ríos para mantener una condición medioambiental estable, lo cual puede favorecer la supervivencia de la fauna acuática y satisfacer otros usos ecológicos. Así,

$$W_{it} \geq EWD_i^t, \quad (R2)$$

donde EWD_i^t es el requisito ecológico y medioambiental del sistema fluvial en la zona i y en el mes t .

- Ecuación del balance hídrico de los embalses:

$$V_{t+1} = V_t + I_t - O_t - EV_t, \quad (R3)$$

donde V_t y V_{t+1} son los volúmenes de los embalses en los meses t y $t + 1$, respectivamente; I_t es el caudal de entrada en los embalses en el mes t ; O_t es el caudal de salida en los embalses basado en las reglas operativas; y EV_t es la pérdida de agua en los embalses en el mes t .

- Volumen de los embalses:

$$V_{\min,t} \leq V_t \leq V_{\max,t}, \quad (R3)$$

donde $V_{\min,t}$ es el límite inferior del volumen de los embalses en el mes t , correspondiente al almacenamiento muerto; y $V_{\max,t}$ es el límite superior, correspondiente al almacenamiento por debajo del nivel de agua limitado por inundación en la temporada de inundaciones y al almacenamiento por debajo del nivel de agua normal en la temporada no inundada.

- Demanda de agua:

$$x_{ij}^t \leq WD_{ij}^t, \quad (R4)$$

donde WD_{ij}^t es la demanda de agua del sector j en la zona i y en el mes t .

- Disponibilidad de agua:

$$\sum_{j=1}^m x_{ij}^t \leq AW R_i^t, \quad (\text{R5})$$

donde $AW R_i^t$ es el agua disponible en la zona i y en el mes t .

- No negatividad:

$$x_{ij}^t \geq 0, \quad (\text{R6})$$

donde recordamos que x_{ij}^t representa la cantidad de agua asignada al sector j en la zona i y en el mes t .

El último elemento del modelo de asignación multiobjetivo es el algoritmo de optimización. El algoritmo genético de ordenación no dominada II (NSGA-II) propuesto en [12] es uno de los algoritmos evolutivos más eficientes y populares para la optimización multiobjetivo. Permite hallar las compensaciones óptimas entre los objetivos y consiste en cinco operadores: inicialización, ordenación rápida no dominada, cruce, mutación y el operador elitista de comparación con densidad. El algoritmo genera las soluciones Pareto-óptimas basadas en un esquema multiobjetivo mediante el análisis del dominio de las soluciones en lugar de una única solución, incorporando las características de un archivo elitista y una regla de asignación adaptativa que considera tanto el rango como la distancia de cada solución con respecto a las demás. En el proceso de elitismo se selecciona la mejor solución de entre las no dominadas para pasar a la siguiente generación (conjunto de soluciones en una iteración del algoritmo). Este proceso continúa hasta hallar una solución que no esté dominada por ninguna otra, la cual se considera Pareto-óptima. En general, una solución Pareto-óptima es una combinación de valores de las variables tal que no hay otra combinación que dé lugar a la mejoría de algún objetivo sin empeorar a los demás. En otras palabras, es posible dar otros valores a las variables que mejoren algún objetivo, pero será a costa de que otros objetivos empeoren.

El NSGA-II ha sido ampliamente usado en la optimización de sistemas de recursos hídricos, donde se simula su asignación óptima en el marco de la evolución biológica asignando el suministro de agua de cada subregión como variables de decisión. De este modo, usaremos este algoritmo para buscar las soluciones Pareto-óptimas del modelo propuesto de asignación multiobjetivo.

3.2.2. Equidad

Basaremos el enfoque para la asignación equitativa de recursos hídricos en el lema de Sperner ([34]), para el cual necesitamos el concepto de n -símplice.

Definición 3.1 (n -símplice). Consideremos $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, y sean $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, el n -símplice determinado por esos puntos es el conjunto

$$\text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_n\} = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\},$$

esto es, la envolvente convexa de v_0, \dots, v_n . Los puntos v_0, \dots, v_n se denominan vértices del símplice y las coordenadas $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ se denominan coordenadas baricéntricas. De este modo, un 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento, un 2-símplice, un triángulo, y así sucesivamente.

Lema 3.2 (Sperner, 1928). *Sea S un n -símplice y T una subdivisión simplicial finita de S . Supongamos que se etiqueta cada vértice de T con una etiqueta del conjunto $\{1, 2, \dots, n+1\}$ verificando las siguientes condiciones:*

1. *Cada vértice de S recibe una etiqueta distinta.*
2. *Si un vértice pertenece a una cara¹ de S , su etiqueta debe coincidir con alguna de las etiquetas asignadas a los vértices que definen dicha cara.*
3. *Las etiquetas de los vértices interiores son arbitrarias.*

Entonces, debe existir un número impar (y, en particular, al menos uno) de n -símplices completamente etiquetados, es decir, cuyos vértices tienen todas las etiquetas del conjunto $\{1, 2, \dots, n+1\}$.

Supongamos que el número de jugadores es n y que se quiere repartir la cantidad 1 de agua. Denotemos por y_i a la cantidad de agua asignada al jugador i . Entonces, es claro que $y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$ y que $y_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Así, el espacio de soluciones forma un $(n-1)$ -símplice en \mathbb{R}^n donde cada punto corresponde a una asignación del agua.

En muchos problemas de asignación, como el de la división de la tarta entre n jugadores, una asignación cumple equidad simple si cada jugador recibe al menos una porción n -ésima de la tarta. Sin embargo, en la asignación de recursos hídricos, puede que una porción n -ésima no se encuentre dentro de las preferencias de algún jugador. Entonces, supondremos que un jugador siente envidia si recibe menos de la cantidad promedio de entre sus preferencias pero algún otro jugador, no. Es decir, una asignación será *envy-free* si se cumple alguna de las condiciones siguientes:

$$\blacksquare y_i \geq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r s_j, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

¹En el caso $n = 2$, las caras son las aristas del triángulo.

$$\blacksquare y_i \leq \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r s_j, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

donde s_j es un conjunto de soluciones de entre los conjuntos de preferencia del jugador i y r es el número de conjuntos de soluciones.

Además, supongamos que:

1. Todos los jugadores necesitan agua. Por tanto, prefieren una porción con agua antes que una vacía, y pueden preferir más de una según los conjuntos de preferencia definidos.
2. Los conjuntos de preferencia son cerrados y corresponden a las soluciones de la superficie de la frontera de Pareto obtenidas mediante el modelo de asignación multiobjetivo óptima de recursos hídricos.

Entonces, por el Lema 3.2, existe una asignación *envy-free*, es decir, una asignación en la que cada jugador está satisfecho con la porción que se le ha asignado y por tanto no siente envidia por ningún otro jugador. Para construir dicha asignación, se usará el algoritmo propuesto en [35] con algunas modificaciones. Dadas la cantidad total de agua, la longitud del paso de búsqueda y los conjuntos de preferencias de todos los jugadores, el espacio del conjunto de soluciones está compuesto por un n -símplice. El algoritmo comienza desde la frontera del n -símplice y busca un símplice elemental completamente etiquetado. Entonces, se seleccionan vértices arbitrarios del símplice elemental, obteniendo una asignación del agua en la que los valores de las cantidades y_i , $i = 1, \dots, n$, se asignan a los jugadores en base a la proximidad entre los valores y los conjuntos de preferencias. Esta asignación está restringida por la cantidad máxima de agua a distribuir, esto es, $\sum_{i=1}^n y_i \leq Y$, donde Y representa esta cantidad máxima. El algoritmo compara los valores de y_i con los conjuntos de preferencia de cada jugador por turnos. Si para el jugador i , y_i no está en su conjunto de preferencias o no se verifica la condición *envy-free*, el jugador no acepta la asignación y el algoritmo selecciona otro símplice elemental completamente etiquetado. Entonces, se repite la división hasta que todos los símplices elementales del n -símplice hayan sido seleccionados. Finalmente, se encuentra un conjunto de asignaciones de modo que ningún jugador sienta envidia. Nótese que, de no estar satisfechos con los resultados, se puede disminuir el paso de búsqueda para aumentar el número de asignaciones posibles que busca el algoritmo.

3.3. Análisis de un caso

En esta sección estudiaremos un caso real localizado en el río Han de China, el cual es el mayor afluente del tramo medio del río Yangtsé.

3.3.1. Elección del área de estudio

En el río Han, la disponibilidad de agua en los tramos medio y bajo de la cuenca del río se ve afectada tanto por el cambio climático como por un proyecto de transferencia de agua en China. Además, debido al crecimiento poblacional y al desarrollo de la economía local, la demanda de agua se encuentra en aumento, al igual que, de forma consecuente, los conflictos en torno a su uso. Por todos estos motivos, en los últimos años, la gestión y el aprovechamiento de los recursos hídricos, así como la protección del entorno acuático en los tramos medio y bajo de la cuenca del río, se han vuelto especialmente complejos. En consecuencia, resulta urgente estudiar la asignación óptima de los recursos hídricos en las zonas mencionadas del río, con el fin de implementar el sistema más estricto de control de recursos hídricos en China ([11]).

Los tramos medio y bajo de la cuenca del río Han tienen un área de drenaje de 63800 km², abarcando los distritos bajo la jurisdicción de 9 ciudades, que de aquí en adelante denotaremos por jugadores: Jingmen, Qianjiang, Shennongjia, Shiyan, Tianmen, Wuhan, Xiangyang, Xiantao, y Xiaogan. Para construir el modelo de asignación óptima de recursos hídricos, dividimos el estudio de caso en 28 zonas operativas en base a las intersecciones entre la cuenca hidrográfica y las regiones administrativas de los condados. En total, tendremos en cuenta 17 embalses de tamaños grandes y medianos. La distribución espacial de las zonas operativas y de los embalses se puede consultar en [37].

3.3.2. Datos

Caudal histórico

Como datos de entrada consideramos las series de datos históricos de escurrentía en la salida de cada zona operativa y los aportes a los embalses desde 1956 hasta 2010, recopilados de los almanaques hidrológicos de la Comisión de Recursos Hídricos del Yangtsé ([9]).

Demanda de agua

Consideramos cuatro sectores usuarios de agua: agua doméstica, agua industrial, agua agrícola y agua ecológica en el cauce. Notamos que la demanda de agua ecológica fuera del cauce forma parte de la demanda de agua doméstica. Los datos de demanda de cada zona operativa en 2010 fueron recopilados para el informe sobre el plan integral de gestión de los recursos hídricos para la cuenca del río Han ([9]). Aplicamos el método Tennant ([36]) para estimar la demanda de agua ecológica en el cauce para cada zona tomando el producto de su caudal medio de escurrentía anual y la proporción mínima necesaria de escurrentía en la temporada de inundaciones o no

inundaciones, respectivamente.

Por su parte, la demanda de agua agrícola está relacionada con la precipitación efectiva anual correspondiente a varias frecuencias típicas de excedencia. Adoptaremos cuatro tipos de demanda de agua agrícola, asociados a frecuencias de aporte de agua del 50 %, 75 %, 90 % y 95 %, que representan, respectivamente, un año normal, seco, muy seco y extremadamente seco. Esto significa que, cuanto mayor es la frecuencia de excedencia de la precipitación anual, más seco es el año y se necesita una mayor cantidad de agua suplementaria extraída del río y de los embalses. Para estimar la demanda de agua agrícola correspondiente a cualquier frecuencia de caudal histórico, se estima en primer lugar la demanda hídrica de los cultivos de referencia, ET_0 , que refleja principalmente la influencia de factores meteorológicos como la temperatura o la humedad en la demanda hídrica de los cultivos. Aplicamos la ecuación recomendada por la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura ([1]):

$$ET_0 = \frac{0,408\Delta(R_n - G) + \gamma \frac{900}{\theta + 273} u_2 (e_a - e_d)}{\Delta + \gamma(1 + 0,34u_2)},$$

donde R_n es la radiación neta de la superficie de cultivos; G es el flujo de calor del suelo; γ es la constante del psicómetro; θ es la media diaria de temperatura; u_2 es la velocidad del viento medida a la altura de dos metros sobre el suelo; e_a es la presión de vapor saturado; e_d es la presión actual del vapor de agua; y Δ es la pendiente de la curva del vapor de agua saturado con respecto a la temperatura.

Estimamos la demanda de agua para riego en cualquier frecuencia a partir de la proporción entre la demanda real del cultivo de referencia en los años con cuatro frecuencias de caudal específicas y en el resto de los años, entre 1956 y 2010. En la Tabla I.12 del Anexo I se aprecian los resultados de la demanda anual de agua ecológica fuera del cauce por sectores en la década de 2010.

Embalses

Hay 17 embalses grandes y medianos en el área de estudio. Sus características y reglas operativas se han recopilado de los programas de operación del Departamento Provincial de Recursos Hídricos de Hubei ([18]). Para una descripción detallada de los embalses se puede consultar [26].

Coefficiente de eficiencia económica

Debido a que el agua ecológica en el cauce y el agua doméstica son los sectores de agua más básicos y sus beneficios económicos no se pueden calcular, solo consideraremos los beneficios económicos del agua agrícola y del agua industrial. En la Tabla I.13 del Anexo I se aprecia el

retorno económico por unidad de volumen de agua de las ciudades, calculado como cociente del beneficio del uso del agua dividido entre el volumen de la demanda de agua. Notamos que la unidad monetaria utilizada es el renminbi (RMB).

3.3.3. Asignación multiobjetivo de recursos hídricos

A partir del modelo de asignación multiobjetivo de recursos hídricos, obtenemos las 30 soluciones Pareto-óptimas tras 500 generaciones. En la Figura 3.1 se muestran soluciones que ilustran la compensación entre el interés económico y la demanda química de oxígeno (DQO) bajo una tasa de garantía del 75 % para los jugadores. Observamos que el interés económico y la cantidad de DQO están positivamente relacionados, es decir, que un mayor interés económico implica una mayor cantidad de DQO. Por tanto, si se prioriza el beneficio económico, el modelo tiende a suministrar más agua a cada ciudad bajo una optimización independiente (sin restricciones ambientales). Además, la cantidad de DQO está influenciada por el suministro de agua de modo que una reducción en dicho suministro conlleva una disminución tanto del interés económico como de la carga de DQO. En la Figura 3.2 se aprecia un resumen de los resultados referidos a toda el área de estudio.

En la Tabla I.14 del Anexo I se aprecian los valores mínimo y máximo de la cantidad de agua en la frontera de Pareto para cada ciudad. Como podemos observar, el suministro de agua de la ciudad de Xiangyang es el más elevado, tanto si se busca maximizar el interés económico como minimizar la cantidad de contaminantes orgánicos. Esto se debe a que de las 28 zonas operativas consideradas, 11 se encuentran en Xiangyang, luego la demanda de agua en todos los sectores es más alta. De todos modos, la ciudad que recibe mayores beneficios económicos es Wuhan para ambos objetivos. Esto se debe a que su coeficiente de eficiencia económica es el más elevado. Observamos que, al comparar los resultados de la cantidad de agua dentro de una misma ciudad, se aprecia mucha diferencia entre los valores mínimo y máximo, luego el rango aceptable será amplio. Este margen aparece representado en la Figura 3.3. Notamos que si una asignación determinada de recursos hídricos se encuentra en la zona gris de la figura, puede ser aceptada por todos los jugadores, pero no necesariamente de manera equitativa (*envy-free*).

3.3.4. Asignación equitativa de recursos hídricos

En los tramos medio y bajo de la cuenca del río, la superficie de agua disponible anualmente bajo el nivel de garantía del 75 % es de $1,0162 \times 10^{10} \text{ m}^3$ ([9]). Como tenemos 9 jugadores, el espacio de soluciones será un 8-símplice. Tomamos 100 pasos de búsqueda en cada lado de este

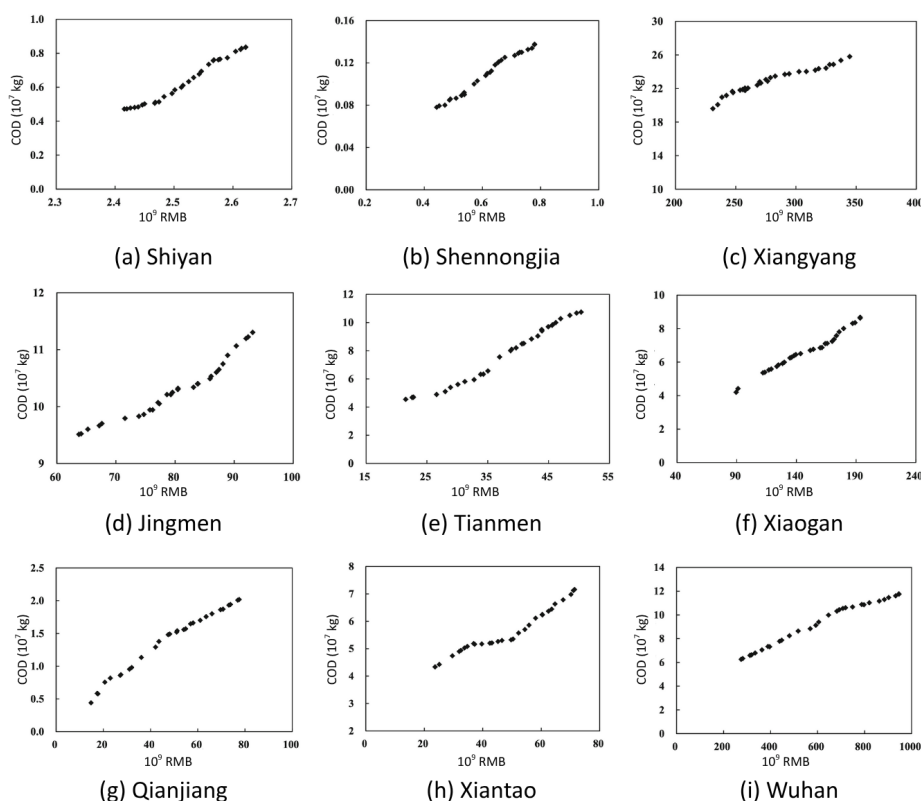


Figura 3.1: Compensación entre el interés económico y la demanda química de oxígeno (DQO) bajo una tasa de garantía del 75 % para los jugadores en las 9 ciudades. Fuente: [37].

espacio. Entonces, para la aplicación del algoritmo explicado en la Subsección 3.2.2, estableceremos la longitud de paso como $1,0162 \times 10^8 \text{ m}^3$, es decir, la cantidad total de agua a repartir, dividida entre 100.

Inicialmente, cada jugador selecciona sus preferencias de cantidad de agua en función de la Tabla I.14 y según el objetivo que priorice. Entonces, el algoritmo busca un conjunto aceptable de soluciones en la frontera de Pareto de cada jugador en base a las restricciones asociadas de tipo *envy-free*. Finalmente, se seleccionan 27 modelos de asignación equitativa. En la Figura 3.4 se aprecian las cantidades de agua asignadas a cada ciudad para los distintos modelos. Como podemos observar, la cantidad asignada a la ciudad de Shennongjia es constante en todos los modelos. Esto se debe a que, como podemos apreciar en la Tabla I.14 del Anexo I, la cantidad de agua aceptable para esta ciudad se encuentra comprendida entre 0,07 y 0,12 mil millones de m^3 , luego la longitud del intervalo aceptable ($0,05 \times 10^9 \text{ m}^3$) es inferior a la longitud de paso ($0,10162 \times 10^9 \text{ m}^3$).

En la Figura 3.5 se aprecian, en color rojo, los rangos aceptables de los conjuntos de preferencia de cada jugador, esto es, el rango en el que la solución es *envy-free*. Con una asignación

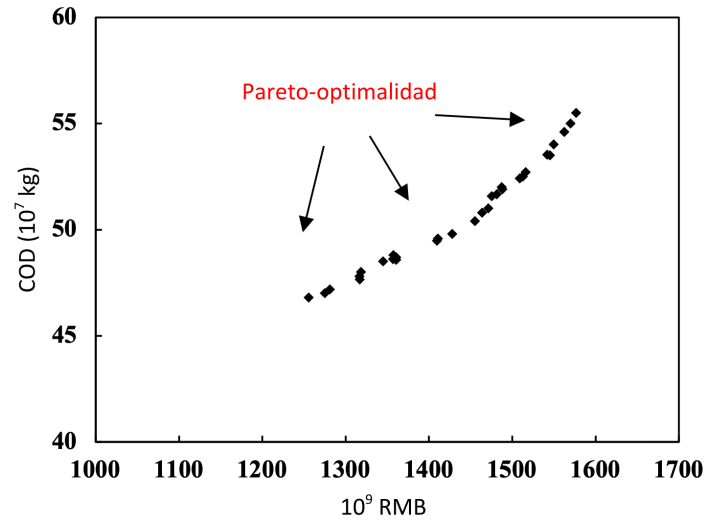


Figura 3.2: Resumen de los rangos aceptables en toda el área de estudio. Fuente: [37].

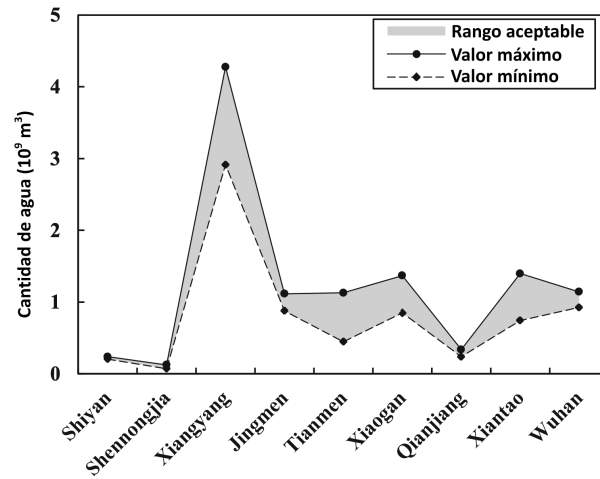


Figura 3.3: Rango aceptable para las asignaciones de recursos hídricos en las 9 ciudades. Fuente: [37].

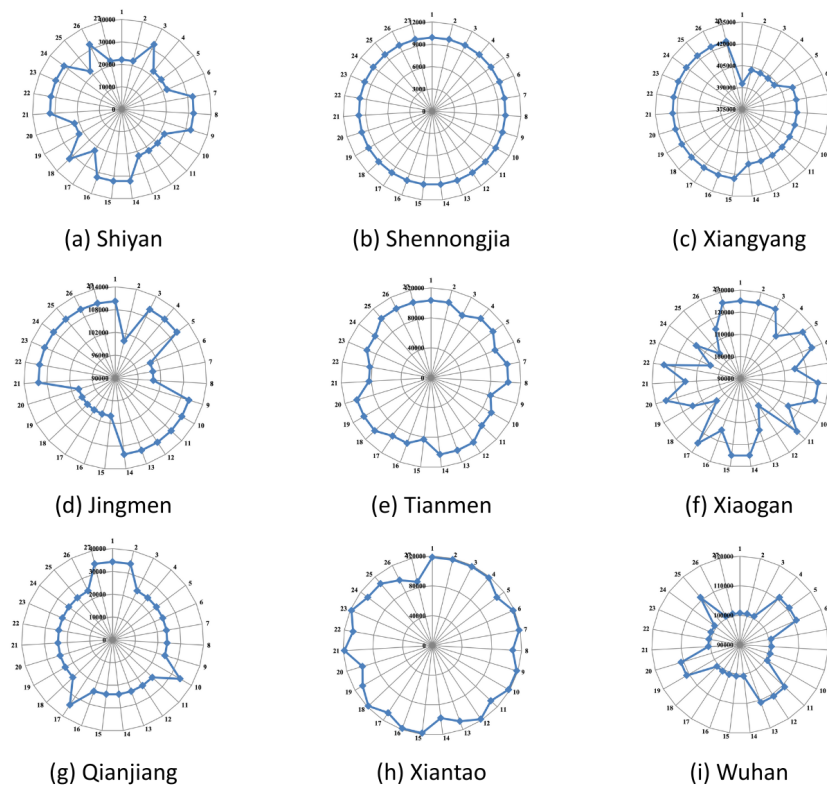


Figura 3.4: Cantidades de agua asignadas a las 9 ciudades en 27 asignaciones (10^4 m^3). Fuente: [37].

tal, alcanzaríamos una situación de equilibrio en la que todos los jugadores estarían satisfechos con el modelo de asignación de recursos hídricos. Este equilibrio permite una base con la cual los tomadores de decisiones pueden hacer elecciones teniendo en cuenta los conjuntos que benefician a todo el sistema.

En la Figura 3.6 se aprecian el interés económico y la cantidad de DQO para los 27 modelos de asignación equitativa. Como podemos observar, los beneficios económicos superan un billón de RMB en todas las asignaciones, pero no se aprecian diferencias muy significativas entre ellas. Haciendo uso de las gráficas, los gestores de agua pueden tomar decisiones en base a sus prioridades. Por ejemplo, si se busca un mayor desarrollo económico, es recomendable considerar la asignación 26, que alcanza el beneficio económico más alto, superando los $1,46 \times 10^{12}$ RMB. En contraste, si se prioriza controlar la contaminación de la cuenca, se recomienda la asignación 25, ya que supone la menor cantidad de DQO con $7,099 \times 10^5$ toneladas.

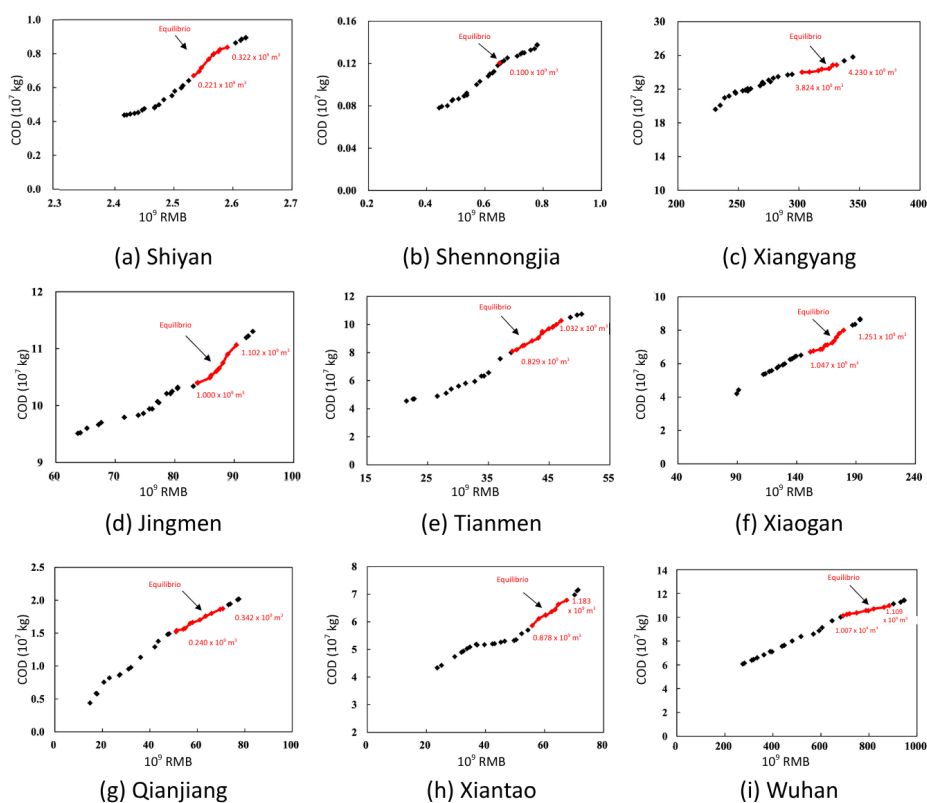


Figura 3.5: Rangos aceptables para la asignación en las 9 ciudades. Fuente: [37].

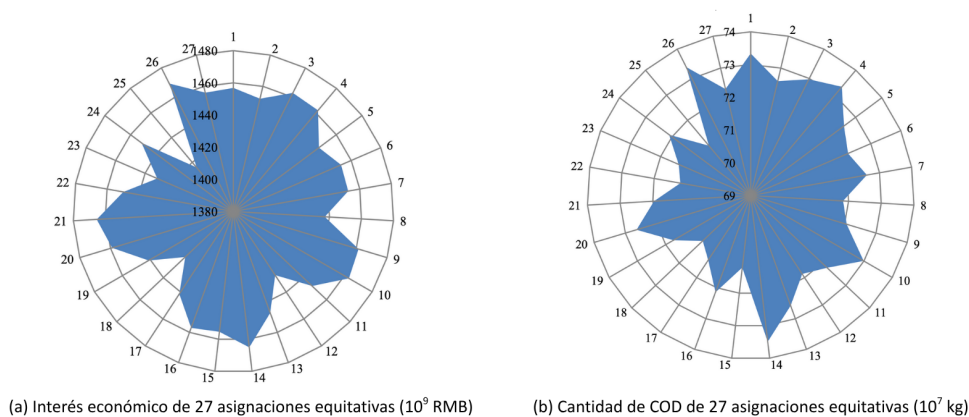


Figura 3.6: Interés económico y cantidades de COD de 27 asignaciones de recursos hídricos. Fuente: [37].

3.4. Conclusión

La asignación equitativa de recursos hídricos es un asunto de suma importancia, especialmente cuando los efectos del cambio climático y del rápido desarrollo económico suponen una

disminución en la cantidad de agua disponible. Los modelos discutidos en este capítulo se pueden usar para buscar asignaciones equitativas aceptables desde un punto de vista económico y medioambiental. El proceso de asignación equitativa consiste en dos niveles. En primer lugar, se genera la superficie de la frontera de Pareto de cada jugador a través de un modelo de asignación óptima independiente, buscando maximizar el interés económico y reducir la cantidad de contaminantes. Posteriormente, se aplica una estrategia de resolución de conflictos para lograr que la asignación sea equitativa en base a los conjuntos de preferencia de cada jugador.

Haciendo uso del Lema de Sperner, se diseña un algoritmo aproximado de construcción que permite buscar modelos de asignación y lo aplicamos a una situación real en los tramos medio y bajo de la cuenca del río Han. Estudiando los resultados, observamos que es posible lograr asignaciones equitativas que satisfacen a todos los jugadores. En la práctica, se decide entre unas u otras en base a los objetivos que se consideran prioritarios en cada situación.

Conclusiones

En este trabajo hemos abordado el estudio y la aplicación de un enfoque equitativo para problemas de optimización a través de tres problemas. Los resultados estudiados en el Capítulo 1 proponen una serie de orientaciones a tener en cuenta para coordinar una flota de vehículos en una situación de ayuda humanitaria. En el Capítulo 2 hemos analizado la medida de descontento interno para problemas de localización, la cual puede ser de utilidad para tener una perspectiva más equitativa a la hora de construir infraestructuras públicas. Finalmente, el análisis del Capítulo 3 muestra que es posible hallar asignaciones equitativas de recursos hídricos y propone recomendaciones en base a los objetivos que se prioricen.

Futuras líneas de estudio podrían enfocarse en el análisis de modelos más complejos sin las suposiciones realizadas en este trabajo. Además, sería de interés el desarrollo de algoritmos que pudiesen resolver los problemas propuestos optimizando los tiempos de cálculo. Finalmente, resultaría relevante un mayor estudio de casos reales para poder analizar la aplicación práctica de lo aquí recogido.

Anexo I

Tablas de datos

En este anexo recogemos las tablas de datos a las que se hace referencia en el trabajo con el objetivo de no interrumpir el desarrollo principal del texto.

Problema	Nivel de servicio por nodo			Métrica				
	s_1	s_2	s_3	Z_1	Z_2	Z_3^a	Z_3^b	Z_3
P(Z_1)	11	5	4	27	80	7	3,09	19,46
P(Z_2)	11	4	4	34	76	7	3,3	19
P(Z_3^a)	9,5	9,5	9,5	38	114	0	0	21,77
P(Z_3^b)	9,5	9,5	9,5	38	114	0	0	21,77
P(Z_3)	6	7,75	6,75	29	82	1,75	0,72	17,38

Tabla I.1: Rendimiento de las soluciones óptimas asociadas a diferentes objetivos. Fuente: [17].

Número de nodos	Modelo	Vehículos usados		% Último nodo es el más lejano	Tiempo de llegada promedio			
		Mín (%)	Mín+ 1 (%)		1	2	3	4
8 nodos	P(Z_1)	88	12	49	85,0	70,2	58,8	49,1
	P(Z_2)	0	100	89	60,5	52,6	47,5	42,4
	P(Z_3)	0	100	93	53,3	51,9	50,9	46,3
10 nodos	P(Z_1)	80	20	38	88,3	72,0	56,3	42,7
	P(Z_2)	0	100	79	62,7	53,1	45,5	39,4
	P(Z_3)	0	100	86	55,8	53,5	48,4	41,2

Tabla I.2: Resumen de resultados en relación a la estructura de las rutas para instancias de 8 y 10 nodos. Fuente: [17].

Modelo		Desviación respecto del óptimo por métrica (%)									
		Instancias de 8 nodos					Instancias de 10 nodos				
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_3^a	Δ_3^b	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_3^a	Δ_3^b
P(Z_1)	Promedio	–	29	33	65	64	–	29	34	72	68
	Máximo	–	65	74	135	119	–	61	68	332	222
	Mínimo	–	7	7	0	0	–	3	2	0	0
P(Z_2)	Promedio	18	–	1	2	2	17	–	2	7	4
	Máximo	39	–	11	15	13	39	–	14	49	30
	Mínimo	5	–	0	0	0	2	–	0	0	0
P(Z_3)	Promedio	17	2	–	0	0	17	2	–	2	1
	Máximo	38	33	–	5	2	39	13	–	23	18
	Mínimo	8	0	–	0	0	1	0	–	0	0

Tabla I.3: Resumen de la desviación en valores de las métricas de los modelos del problema. Fuente: [17].

Modelo		Desviación respecto del óptimo por métrica (%)				
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_3^a	Δ_3^b
P(Z_1)	Promedio	–	8	12	17	15
	Máximo	–	32	56	109	74
	Mínimo	–	0	0	0	0
P(Z_2)	Promedio	8	–	5	10	11
	Máximo	26	–	32	54	38
	Mínimo	0	–	0	0	0
P(Z_3)	Promedio	7	4	–	1	1
	Máximo	29	21	–	23	18
	Mínimo	0	0	–	0	0

Tabla I.4: Resumen de la desviación en valores de las métricas para los modelos del problema de instancias de 8 nodos con el mínimo número de vehículos. Fuente: [17].

Modelo	Distribución de la demanda	Tiempo en minutos de CPU por distribución de los nodos									
		Instancias de 8 nodos					Instancias de 10 nodos				
		G	E	A1	A2	A3	G	E	A1	A2	A3
P(Z_1)	G	3	1	1	1	1	23	30	26	21	100
	E	1	2	1	1	1	12	12	19	12	20
	A1	1	14	6	6	1	24	40	23	88	31
	A2	720	10	1	6	1	722	50	57	66	57
	A3	1	1	1	2	1	21	20	27	35	23
P(Z_2)	G	0	0	0	0	0	1	1	1	3	1
	E	2	0	0	0	0	5	23	6	3	3
	A1	0	0	0	0	0	2	2	2	1	1
	A2	0	0	0	0	1	21	2	2	3	3
	A3	0	0	0	0	0	1	2	1	1	1
P(Z_3)	G	48	1974	10	130	13	117	3619	3541	1014	3614
	E	176	3613	40	223	97	3611	3607	3616	766	3620
	A1	15	191	138	982	840	32	193	1098	897	3618
	A2	6	369	153	2053	964	113	507	2275	1082	3615
	A3	62	1390	8	66	13	15	29	695	96	3631

Tabla I.5: Tiempos de resolución en minutos de CPU. Fuente: [17].

Modelo	Número medio de nodos visitados por		
	1 vehículo	2 vehículos	3 o más vehículos
P(Z_1)	93,38	6,60	0,02
P(Z_2)	90,65	8,87	0,48
P(Z_3)	89,52	9,73	0,75

Tabla I.6: Número medio de repartos en los envíos para instancias de 100 nodos. Fuente: [17].

Modelo		Desviación por métrica (%)				
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_3^a	Δ_3^b
P(Z_1)	Promedio	0	27	31	63	37
	Máximo	0	41	43	115	63
	Mínimo	0	15	14	6	9
P(Z_2)	Promedio	16	1	4	8	4
	Máximo	26	3	9	50	21
	Mínimo	9	0	1	0	0
P(Z_3)	Promedio	16	1	0	1	0
	Máximo	26	11	0	18	5
	Mínimo	6	0	0	0	0

Tabla I.7: Resumen de la desviación en los valores de las métricas de las soluciones heurísticas para los modelos del problema. Fuente: [17].

Número de vehículos	Modelo	Desviación por métrica (%)				
		Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_3^a	Δ_3^b
$K = M$	P(Z_1)	0	24	29	55	33
	P(Z_2)	19	4	11	34	18
	P(Z_3)	15	0	0	1	0
$K = M + 1$	P(Z_1)	0	27	31	63	37
	P(Z_2)	16	1	4	8	4
	P(Z_3)	16	1	0	1	0
$K = M + 2$	P(Z_1)	0	32	35	73	44
	P(Z_2)	20	1	3	7	3
	P(Z_3)	19	1	0	1	1
$K = M + 3$	P(Z_1)	0	35	38	79	51
	P(Z_2)	23	0	3	7	3
	P(Z_3)	23	0	0	1	0

Tabla I.8: Desviación media en los valores de las métricas para las soluciones heurísticas de cada modelo por número de vehículos. Fuente: [17].

n	p	Mancha gaussiana			Aleatoria		
		M_1^D	M_2^D	M_3^D	M_1^D	M_2^D	M_3^D
10	2	0,01	0,03	0,56	0,02	0,03	0,69
	3	0,01	0,03	0,61	0,03	0,03	0,63
	5	0,01	0,03	0,61	0,01	0,03	0,70
20	2	1,89	0,32	307,16	1,82	0,4	737,49
	3	1,05	0,42	76,28	1,42	0,53	807,96
	5	0,14	0,51	1050,24	0,54	1,00	6585,21
	7	0,06	1,01	4247,95	0,19	1,22	6525,11
30	2	402,80	2,90	TM	412,41	103,39	TM
	3	392,30	5,36	TM	131,35	9,74	TM
	5	4,38	125,07	TM	9,44	635,34	TM
	7	1,34	164,70	TM	4,34	1173,37	TM

Tabla I.9: Resultados computacionales para instancias discretas con $n \in \{10, 20, 30\}$. TM: tiempo máximo. Fuente: [7].

n	p	Tiempo de CPU (s)		Instancias no resueltas (%)	
		M_1^D	M_2^D	M_1^D	M_2^D
40	2	1558,92	182,05	0	0
	3	2024,13	380,26	0	0
	5	1008,44	3944,59	0	25
	7	421,95	6235,06	0	60
50	2	6756,18	558,82	80	0
	3	7090,95	2933,55	95	0
	5	6619,14	6994,48	70	90
	7	4435,05	TM	40	100

Tabla I.10: Resultados computacionales para instancias discretas con $n \in \{40, 50\}$. TM: tiempo máximo. Fuente: [7].

n	p	Tiempo de CPU (s)			Instancias no resueltas (%)		
		M_1^C	M_2^C	M_3^C	M_1^C	M_2^C	M_3^C
10	2	20,81	68,76	108,92	0	0	0
	3	22,72	286,76	398,21	0	0	0
	5	5,41	9,11	17,60	0	0	0
20	2	2017,43	TM	TM	15	100	100
	3	6681,26	TM	TM	85	100	100
	5	TM	TM	TM	100	100	100
	7	5085,74	6557,49	6359,81	60	80	85
30	2	7151,42	TM	TM	95	100	100
	3	TM	TM	TM	100	100	100
	5	TM	TM	TM	100	100	100
	7	TM	TM	TM	100	100	100

Tabla I.11: Resultados computacionales para instancias continuas. TM: tiempo máximo. Fuente: [7].

Ciudad	Doméstica	Industrial	Agrícola				Ecológica fuera del cauce			
			$P = 50\%$	$P = 75\%$	$P = 90\%$	$P = 95\%$	$P = 50\%$	$P = 75\%$	$P = 90\%$	$P = 95\%$
Jingmen	91	614	956	1039	1170	1199	1661	1744	1875	1905
Qianjiang	16	120	128	145	169	196	264	280	305	332
Shennongjia	2	9	4	5	9	9	15	16	19	20
Shiyan	11	11	122	140	165	188	143	161	186	209
Tianmen	59	238	792	850	960	1048	1089	1147	1257	1345
Wuhan	63	612	221	253	282	299	896	928	957	974
Xiangyang	218	1820	2123	2464	2682	2882	4161	4502	4720	4919
Xiantao	62	405	554	663	759	830	1021	1130	1226	1297
Xiaogan	57	446	604	684	735	787	1107	1186	1237	1290
Total	579	4273	5505	6241	6930	7438	10357	11094	11782	12291

Tabla I.12: Demanda anual de agua ecológica fuera del cauce por sectores para cada ciudad en la década de 2010 (10^6 m^3). Fuente: [37].

Ciudad	Industria	Agricultura
Jingmen	282,23	28,11
Qianjiang	565,50	64,76
Shennongjia	77,25	55,45
Shiyan	183,59	17,17
Tianmen	182,79	10,96
Wuhan	1436,21	130,46
Xiangyang	180,06	20,42
Xiantao	156,67	17,11
Xiaogan	322,68	52,07

Tabla I.13: Retorno económico por unidad de volumen de agua en cada ciudad (RMB/m³). Fuente: [37].

Ciudad	Cantidad máxima de agua			Cantidad mínima de agua		
	Cantidad (10 ⁹ m ³)	Valor (O1) (10 ⁹ RMB)	Valor (O2) (10 ⁷ kg)	Cantidad (10 ⁹ m ³)	Valor (O1) (10 ⁹ RMB)	Valor (O2) (10 ⁷ kg)
Jingmen	1,12	86,00	11,30	0,88	67,57	9,51
Qianjiang	0,34	76,07	2,02	0,22	49,22	1,44
Shennongjia	0,12	0,73	0,14	0,07	0,43	0,08
Shiyan	0,34	2,60	0,84	0,20	1,53	0,47
Tianmen	1,13	40,91	9,80	0,65	23,53	4,55
Wuhan	1,14	898,13	11,77	0,85	748,44	6,25
Xiangyang	4,28	276,84	22,88	2,92	188,87	15,80
Xiantao	1,40	73,21	7,16	0,74	38,70	5,17
Xiaogan	1,37	165,18	8,68	0,85	102,48	4,20

Tabla I.14: Valores máximos y mínimos de la cantidad de agua en la frontera de Pareto en las 9 ciudades. Fuente: [37].

Anexo II

Demostraciones

En este anexo recogemos las demostraciones formales de algunos de los resultados presentados en el trabajo con el objetivo de no interrumpir el desarrollo principal del texto.

II.1. Demostraciones del Capítulo 1

En esta sección recogemos las demostraciones correspondientes al Capítulo 1.

Proposición 1.2. *El resultado de la Proposición 1.1 se verifica para $P(Z_2)$.*

Demostración. Consideremos una solución de $P(Z_2)$ tal que los nodos $i, j \in N$ son visitados por dos vehículos 1 y 2. Sean $y_{k\pi(l)}$ la cantidad enviada al nodo k por el vehículo $l \in \{1, 2\}$, y $a_{k\pi(l)}$ el tiempo de llegada de dicha entrega. Sin pérdida de generalidad, consideramos el nodo i y el vehículo 1 tales que $y_{i\pi(1)} = \min\{y_{i\pi(1)}, y_{i\pi(2)}, y_{j\pi(1)}, y_{j\pi(2)}\}$. Analicemos dos casos:

1. Si $a_{i\pi(1)} - a_{i\pi(2)} \geq a_{j\pi(1)} - a_{j\pi(2)}$, consideramos la siguiente reasignación:

$$y_{i\pi(1)}^* = 0, \quad y_{i\pi(2)}^* = y_{i\pi(1)} + y_{i\pi(2)}, \quad y_{j\pi(1)}^* = y_{j\pi(1)} + y_{i\pi(1)}, \quad y_{j\pi(2)}^* = y_{j\pi(2)} - y_{i\pi(1)}.$$

Para los nodos i, j , la reasignación envía la misma cantidad que la asignación inicial. Además,

$$Z_2(x, y) - Z_2(x, y^*) = a_{i\pi(1)}y_{i\pi(1)} - a_{i\pi(2)}y_{i\pi(1)} - a_{j\pi(1)}y_{i\pi(1)} + a_{j\pi(2)}y_{i\pi(1)} \geq 0,$$

luego el objetivo mejora.

2. Si $a_{i\pi(1)} - a_{i\pi(2)} < a_{j\pi(1)} - a_{j\pi(2)}$, consideramos la siguiente reasignación:

$$y_{i\pi(1)}^* = y_{i\pi(1)} + y_{j\pi(1)}, \quad y_{i\pi(2)}^* = y_{i\pi(2)} - y_{j\pi(1)}, \quad y_{j\pi(1)}^* = 0, \quad y_{j\pi(2)}^* = y_{j\pi(2)} + y_{j\pi(1)}.$$

Entonces,

$$Z_2(x, y) - Z_2(x, y^*) = -a_{i\pi(1)}y_{j\pi(1)} + a_{i\pi(2)}y_{j\pi(1)} + a_{j\pi(1)}y_{j\pi(1)} - a_{j\pi(2)}y_{j\pi(1)} > 0.$$

En ambos casos, el valor de Z_2 se mantiene o mejora tras una reasignación que establece la cantidad enviada por un vehículo a un nodo en 0. Esta solución se puede mejorar aún más eliminando la visita a dicho nodo. Debido a la desigualdad triangular, el tiempo de llegada de todos los nodos que se visitaban originalmente tras el nodo eliminado en la misma ruta se reducen. Por tanto, existe una solución igual o mejor en la que solo uno de los nodos es visitado por ambos vehículos. \square

Proposición 1.3. *El resultado de la Proposición 1.1 no se verifica para $P(Z_3)$.*

Demostración. La Figura 1.3 (d) es un contraejemplo, ya que los nodos 2 y 3 son visitados por ambas rutas. La demanda del nodo 3 está dividida porque el vehículo 2 conserva un palé para que el nodo 2 pueda recibirlo en el tiempo 6. Debido a la función convexa de disutilidad en Z_3 , servir parte de la demanda pronto en todos los nodos es más importante. \square

II.2. Demostraciones del Capítulo 2

En esta sección recogemos las demostraciones correspondientes al Capítulo 2.

Lema 2.1. *Sea $\phi_{ij} = \Phi_i(X_j)$ si a_i está asignado a X_j , y 0 en caso contrario, para $i \in N$ y $j \in P$. Sea $\phi_{(k)j}$ la k -ésima distancia más grande en la sucesión de las distancias desde cada punto de demanda a X_j , con k_j el número de puntos asignados a X_j . Entonces, la función de descuento interno se puede escribir como*

$$\sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \text{DI}_{ik}(X_1, \dots, X_p) = \sum_{j \in P} \sum_{k \in N} (k_j - 2k + 1) \phi_{(k)j}.$$

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_p \in \mathbb{R}^d$ las instalaciones escogidas y $\phi_{\cdot j} = (\phi_{1j}, \dots, \phi_{nj})$ los costes de asignación de todos los puntos de demanda a X_j . Supongamos que el coste de asignación de un punto de demanda no asignado a X_j es nulo. Consideremos $(\phi_{(1)j}, \phi_{(2)j}, \dots, \phi_{(k_j)j}, 0, \dots, 0)$, donde hemos reordenado $\phi_{\cdot j}$ de modo que $\phi_{(1)j} \geq \phi_{(2)j} \geq \dots \geq \phi_{(k_j)j} \geq 0$. Entonces, el descuento interno del punto de demanda reordenado en la posición k para la instalación $j \in P$ se puede calcular como

$$\sum_{i=k+1}^{k_j} (\phi_{(k)j} - \phi_{(i)j}) = (k_j - k) \phi_{(k)j} - \sum_{i=k+1}^{k_j} \phi_{(i)j} = (k_j - k) \phi_{(k)j} - \phi_{(k+1)j} - \dots - \phi_{(k_j)j}.$$

Sumando en k , obtenemos que el descuento interno para la instalación j se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{k_j-1} \sum_{i=k+1}^{k_j} (\phi_{(k)j} - \phi_{(i)j}) &= \sum_{k=1}^{k_j-1} \left((k_j - k)\phi_{(k)j} - \phi_{(k+1)j}^j - \cdots - \phi_{(k_j)j} \right) \\
 &= (k_j - 1)\phi_{(1)j}^j + (k_j - 3)\phi_{(2)j}^j + \cdots + (1 - k_j)\phi_{(k_j)j} \\
 &= \sum_{k=1}^{k_j} (k_j - 2k + 1)\phi_{(k)j} \\
 &= \sum_{k \in N} (k_j - 2k + 1)\phi_{(k)j}.
 \end{aligned}$$

□

Lema 2.2. *Dados $j \in P$ y $X_j \in \mathbb{R}^d$, sean $\phi_{\cdot j} = (\phi_{1j}, \dots, \phi_{nj})$ los costes de asignación de todos los puntos de demanda a X_j . Entonces, se satisface la siguiente igualdad:*

$$\sum_{k \in N} (k_j - 2k + 1)\phi_{(k)j} = 2 \sum_{\substack{k \in N \\ k < k_j}} \sum_{l=1}^k \phi_{(l)j} - (2n + 1 - k_j) \sum_{l=1}^n \phi_{(l)j}.$$

Demostración. Para cada $k \in N$, definamos

$$\Delta_k^j = \begin{cases} 2, & \text{si } k < k_j, \\ 1 - k_j, & \text{si } k = k_j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $k > k_j$, se cumple $\phi_{(k)j} = 0$, luego $S_k(\phi_{\cdot j}) = S_{k_j}(\phi^j) = \sum_{l=1}^n \phi_{lj}$. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \in N} (k_j - 2k + 1)\phi_{(k)j} &= \sum_{k \in N} \Delta_k^j S_k(\phi_{\cdot j}) \\
 &= \sum_{k \in N} \Delta_k^j \sum_{l=1}^k \phi_{(l)j} \\
 &= 2 \sum_{\substack{k \in N \\ k < k_j}} S_k(\phi^j) + (1 - k_j) S_{k_j}(\phi^j) \\
 &= 2 \sum_{k \in N} S_k(\phi^j) - 2(n - k_j + 1) \sum_{l=1}^n \phi_{lj} + (1 - k_j) \sum_{l=1}^n \phi_{lj} \\
 &= 2 \sum_{k \in N} S_k(\phi_{\cdot j}) - (2n + 1 - k_j) \sum_{l=1}^n \phi_{lj}.
 \end{aligned}$$

□

Anexo III

Código de AMPL

En este anexo recogemos el código de AMPL usado en la Sección 1.6 del Capítulo 1 con el objetivo de no interrumpir el desarrollo principal del texto.

III.1. Datos

En esta sección recogemos el código de los archivos de tipo `.dat`.

Listing III.1: Archivo `rutas.dat`

```
1 param C := 6;
2
3 set N := 1 2 3 4;
4
5 set N1 := 2, 3, 4;
6 set R := R1 R2;
7
8 param d :=
9     1 0
10    2 4
11    3 4
12    4 4;
13
14 param e :   1   2   3   4:=
15    1  100  6   4   4
16    2   6  100  7   7
17    3   4   7  100  2
18    4   4   7   2  100;
```

Listing III.2: Archivo rutas1.dat

```

1 param T_max := 19;
2 param k := 2;
3 param C := 6;
4
5 set N := 1 2 3;
6 set R := R1 R2 R3 R4 R5;
7
8 param d :=
9     1 4
10    2 4
11    3 4;
12
13 param b :   R1 R2 R3 R4 R5 :=
14     1   1 0 1 1 1
15     2   1 1 0 1 1
16     3   0 1 1 1 1;
17
18 param a :   R1 R2 R3 R4 R5 :=
19     1  11 19 11 6 13
20     2   4  6  19 13 6
21     3  19 4  4  15 4;
22
23 param c :=
24     R1  17
25     R2  10
26     R3  17
27     R4  19
28     R5  19;

```

III.2. Modelos

En esta sección recogemos el código de los archivos de tipo .mod.

Listing III.3: Archivo rutas.mod

```

1 param C >= 0;    # Capacidad
2
3 set N;          # Nodos
4 set N1;         # Demandantes
5 set R;          # Rutas
6

```

```

7 param d{N} >= 0;          # Demandas
8 param e{N,N};            # Distancias
9
10 var x{N,N,R} binary;      # Eligiendo arcos de cada ruta
11 var y{N, R} integer >= 0; # Linkando agente y ruta
12 var u{N, R} integer >= 0; # Variable auxiliar
13
14 # Se visita cliente solo si se le lleva algo
15 subject to solo_visitados {i in N, r in R: i!=1}:
16     y[i,r] <= d[i]*(sum{j in N}x[i,j,r]);
17
18 # Ruta empieza en deposito
19 subject to r1{r in R}:
20     sum{j in N} x[1,j,r]=1;
21
22 # Ruta acaba en deposito
23 subject to r2{r in R}:
24     sum{j in N} x[j,1,r]=1;
25
26 # Si se va, luego se sale
27 subject to r3{r in R, i in N}:
28     sum{j in N} x[i,j,r]=sum{j in N} x[j,i,r];
29
30 # No superar la capacidad
31 subject to capacidad {r in R}:
32     sum{i in N} y[i,r] <= C;
33
34 # Servir las demandas
35 subject to demanda {i in N}:
36     sum{r in R} y[i,r] = d[i];
37
38 # Evitar subciclos
39 subject to camion_ruta {r in R,i in N , j in N : j!=1}:
40     u[i,r]-u[j,r]+3*x[i,j,r]<=2;
41
42 # Minimizar el coste total de las rutas
43 minimize eficiencia: sum{i in N, j in N, r in R} x[i,j,r]*e[i,j];

```

Listing III.4: Archivo rutas1.mod

```

1 # Definicion de parametros
2 param T_max integer >= 1; # Tiempo maximo (horas)
3 param k integer; # Numero de vehiculos
4 param C >= 0; # Capacidad de cada vehiculo

```

```

5
6 # Definicion de conjuntos
7 set N; # Nodos
8 set R; # Rutas
9 set T := 1..T_max; # Tiempo (horas)
10
11 # Definicion de parametros con subindices
12 param d{N} >= 0; # Demanda de cada nodo
13 param b{N, R} binary; # Presencia del nodo i en la ruta r
14 param a{N, R} default T_max; # Tiempo de llegada de la ruta r al nodo i
    (en horas)
15 param c{R} >= 0; # Costes de las rutas
16
17 # Definicion de variables
18 var x{R} binary; # Seleccion de la ruta r
19 var y{N, R} integer >= 0; # Cantidad asignada al nodo i en la ruta r
20
21 # Definicion de variables del objetivo
22 var s{N}; # Nivel de servicio normalizado por nodo
23 var s_barra; # Nivel de servicio promedio
24 var Z3b; #  $Z_3^b$ 
25 var Z1 = sum{r in R} c[r] * x[r]; #  $Z_1$ 
26 var Z2 = sum{i in N, r in R} a[i,r] * y[i,r]; #  $Z_2$ 
27
28 # Imposicion de restricciones
29 subject to rutas_maximas:
30     sum{r in R} x[r] <= k;
31
32 subject to solo_visitados {i in N, r in R}:
33     y[i,r] <= d[i] * b[i,r] * x[r];
34
35 subject to capacidad {r in R}:
36     sum{i in N} y[i,r] <= C;
37
38 subject to demanda {i in N}:
39     sum{r in R} y[i,r] = d[i];
40
41 subject to nivel_servicio {i in N}:
42     s[i] = (sum{r in R} a[i,r] * y[i,r]) / d[i];
43
44 subject to nivel_promedio:
45     s_barra = (sum{i in N} s[i]) / card(N);
46

```

```

47 subject to equidad:
48     Z3b = sqrt(sum{i in N} (s[i] - s_barra)^2 / card(N));
49
50 # Objetivo
51 minimize eficiencia: Z1;

```

Listing III.5: Archivo rutas2.mod

```

1  # Definicion de parametros
2  param T_max integer >= 1; # Tiempo maximo (horas)
3  param k integer; # Numero de vehiculos
4  param C >= 0; # Capacidad de cada vehiculo
5
6  # Definicion de conjuntos
7  set N; # Nodos
8  set R; # Rutas
9  set T := 1..T_max; # Tiempo (horas)
10
11 # Definicion de parametros con subindices
12 param d{N} >= 0; # Demanda de cada nodo
13 param b{N, R} binary; # Presencia del nodo i en la ruta r
14 param a{N, R} default T_max; # Tiempo de llegada de la ruta r al nodo i
15 param c{R} >= 0; # Costes de las rutas
16
17 # Definicion de variables
18 var x{R} binary; # Seleccion de la ruta r
19 var y{N, R} integer >= 0; # Cantidad asignada al nodo i en la ruta r
20
21 # Definicion de variables del objetivo
22 var s{N}; # Nivel de servicio normalizado por nodo
23 var s_barra; # Nivel de servicio promedio
24 var Z3b; # Z_3^b
25 var Z1 = sum{r in R} c[r] * x[r]; # Z_1
26 var Z2 = sum{i in N, r in R} a[i,r] * y[i,r]; # Z_2
27
28 # Imposicion de restricciones
29 subject to rutas_maximas:
30     sum{r in R} x[r] <= k;
31
32 subject to solo_visitados {i in N, r in R}:
33     y[i,r] <= d[i] * b[i,r] * x[r];
34
35 subject to capacidad {r in R}:
36     sum{i in N} y[i,r] <= C;

```

```

37
38 subject to demanda {i in N}:
39     sum{r in R} y[i,r] = d[i];
40
41 subject to nivel_servicio {i in N}:
42     s[i] = (sum{r in R} a[i,r] * y[i,r]) / d[i];
43
44 subject to nivel_promedio:
45     s_barra = (sum{i in N} s[i]) / card(N);
46
47 subject to equidad:
48     Z3b = sqrt(sum{i in N} (s[i] - s_barra)^2 / card(N));
49
50 # Objetivo
51 minimize eficacia: Z2;

```

Listing III.6: Archivo rutas3.mod

```

1 # Definicion de parametros
2 param T_max integer >= 1; # Tiempo maximo (horas)
3 param k integer; # Numero de vehiculos
4 param C >= 0; # Capacidad de cada vehiculo
5
6 # Definicion de conjuntos
7 set N; # Nodos
8 set R; # Rutas
9 set T := 1..T_max; # Tiempo (horas)
10
11 # Definicion de parametros con subindices
12 param d{N} >= 0; # Demanda de cada nodo
13 param b{N, R} binary; # Presencia del nodo i en la ruta r
14 param a{N, R} default T_max; # Tiempo de llegada de la ruta r al nodo i
    (en horas)
15 param c{R} >= 0; # Costes de las rutas
16
17 # Definicion de variables
18 var x{R} binary; # Seleccion de la ruta r
19 var y{N, R} integer >= 0; # Cantidad asignada al nodo i en la ruta r
20
21 # Definicion de variables del objetivo
22 var s{N}; # Nivel de servicio normalizado por nodo
23 var s_barra; # Nivel de servicio promedio
24 var Z3b; # Z_3^b
25 var Z1 = sum{r in R} c[r] * x[r]; # Z_1

```

```

26 var Z2 = sum{i in N, r in R} a[i,r] * y[i,r]; # Z_2
27
28 # Imposicion de restricciones
29 subject to rutas_maximas:
30     sum{r in R} x[r] <= k;
31
32 subject to solo_visitados {i in N, r in R}:
33     y[i,r] <= d[i] * b[i,r] * x[r];
34
35 subject to capacidad {r in R}:
36     sum{i in N} y[i,r] <= C;
37
38 subject to demanda {i in N}:
39     sum{r in R} y[i,r] = d[i];
40
41 subject to nivel_servicio {i in N}:
42     s[i] = (sum{r in R} a[i,r] * y[i,r]) / d[i];
43
44 subject to nivel_promedio:
45     s_barra = (sum{i in N} s[i]) / card(N);
46
47 subject to equidad:
48     Z3b = sqrt(sum{i in N} (s[i] - s_barra)^2 / card(N));
49
50 # Objetivo
51 minimize equidad_: Z3b;

```

Listing III.7: Archivo rutas4.mod

```

1 # Definicion de parametros
2 param T_max integer >= 1; # Tiempo maximo (horas)
3 param k integer; # Numero de vehiculos
4 param C >= 0; # Capacidad de cada vehiculo
5
6 # Definicion de conjuntos
7 set N; # Nodos
8 set R; # Rutas
9 set T := 1..T_max; # Tiempo (horas)
10
11 # Definicion de parametros con subindices
12 param d{N} >= 0; # Demanda de cada nodo
13 param b{N, R} binary; # Presencia del nodo i en la ruta r
14 param a{N, R} default T_max; # Tiempo de llegada de la ruta r al nodo i
    (en horas)

```

```

15 param c{R} >= 0; # Costes de las rutas
16
17 # Definicion de variables
18 var x{R} binary; # Seleccion de la ruta r
19 var y{N, R} integer >= 0; # Cantidad asignada al nodo i en la ruta r
20
21 # Definicion de variables del objetivo
22 var s{N}; # Nivel de servicio normalizado por nodo
23 var s_barra; # Nivel de servicio promedio
24 var Z3b; #  $Z_3^b$ 
25 var Z1 = sum{r in R} c[r] * x[r]; #  $Z_1$ 
26 var Z2 = sum{i in N, r in R} a[i,r] * y[i,r]; #  $Z_2$ 
27
28 # Imposicion de restricciones
29 subject to rutas_maximas:
30     sum{r in R} x[r] <= k;
31
32 subject to solo_visitados {i in N, r in R}:
33     y[i,r] <= d[i] * b[i,r] * x[r];
34
35 subject to capacidad {r in R}:
36     sum{i in N} y[i,r] <= C;
37
38 subject to demanda {i in N}:
39     sum{r in R} y[i,r] = d[i];
40
41 subject to nivel_servicio {i in N}:
42     s[i] = (sum{r in R} a[i,r] * y[i,r]) / d[i];
43
44 subject to nivel_promedio:
45     s_barra = (sum{i in N} s[i]) / card(N);
46
47 subject to equidad:
48     Z3b = sqrt(sum{i in N} (s[i] - s_barra)^2 / card(N));
49
50 # Equidad y eficacia
51 var Z3b_Z2 = Z3b+0.4*Z2;
52
53 # Equidad y eficiencia
54 minimize Z3b_Z1: Z3b+0.4*Z1;

```

Listing III.8: Archivo rutas5.mod

```

1 # Definicion de parametros

```

```

2 param T_max integer >= 1; # Tiempo maximo (horas)
3 param k integer; # Numero de vehiculos
4 param C >= 0; # Capacidad de cada vehiculo
5
6 # Definicion de conjuntos
7 set N; # Nodos
8 set R; # Rutas
9 set T := 1..T_max; # Tiempo (horas)
10
11 # Definicion de parametros con subindices
12 param d{N} >= 0; # Demanda de cada nodo
13 param b{N, R} binary; # Presencia del nodo i en la ruta r
14 param a{N, R} default T_max; # Tiempo de llegada de la ruta r al nodo i
    (en horas)
15 param c{R} >= 0; # Costes de las rutas
16
17 # Definicion de variables
18 var x{R} binary; # Seleccion de la ruta r
19 var y{N, R} integer >= 0; # Cantidad asignada al nodo i en la ruta r
20
21 # Definicion de variables del objetivo
22 var s{N}; # Nivel de servicio normalizado por nodo
23 var s_barra; # Nivel de servicio promedio
24 var Z3b; #  $Z_3^b$ 
25 var Z1 = sum{r in R} c[r] * x[r]; #  $Z_1$ 
26 var Z2 = sum{i in N, r in R} a[i,r] * y[i,r]; #  $Z_2$ 
27
28 # Imposicion de restricciones
29 subject to rutas_maximas:
30     sum{r in R} x[r] <= k;
31
32 subject to solo_visitados {i in N, r in R}:
33     y[i,r] <= d[i] * b[i,r] * x[r];
34
35 subject to capacidad {r in R}:
36     sum{i in N} y[i,r] <= C;
37
38 subject to demanda {i in N}:
39     sum{r in R} y[i,r] = d[i];
40
41 subject to nivel_servicio {i in N}:
42     s[i] = (sum{r in R} a[i,r] * y[i,r]) / d[i];
43

```

```
44 subject to nivel_promedio:
45     s_barra = (sum{i in N} s[i]) / card(N);
46
47 subject to equidad:
48     Z3b = sqrt(sum{i in N} (s[i] - s_barra)^2 / card(N));
49
50 # Equidad y eficiencia
51 var Z3b_Z1 = Z3b+0.4*Z1;
52
53 # Equidad y eficacia
54 minimize Z3b_Z2: Z3b+0.4*Z2;
```

III.3. Ejecución

En esta sección recogemos el código de los archivos de tipo `.run`. Notamos que comentando con `#` seleccionamos el modelo a resolver en `rutas1.run` y `rutas2.run`.

Listing III.9: Archivo `rutas.run`

```
1 # Reseteo inicial
2 reset;
3
4 # Cargar modelo y datos
5 model rutas.mod;
6 data rutas.dat;
7
8 # Seleccionar solver
9 option solver gurobi;
10
11 # Resolver
12 solve;
13
14 # Mostrar resultados
15 display x; # Rutas
16 display y; # Pales
17
18 display eficiencia; # Z_1
```

Listing III.10: Archivo `rutas1.run`

```
1 # Reseteo inicial
2 reset;
```

```
3
4 # Cargar modelo y datos
5 model rutas1.mod;
6 # model rutas2.mod;
7 # model rutas3.mod;
8 data rutas1.dat;
9
10 # Seleccionar solver
11 option solver gurobi;
12
13 # Resolver
14 solve;
15
16 # Mostrar resultados
17 display x; # Rutas
18 display y; # Pales
19 display Z3b; #  $Z_3^b$ 
20 display Z1; #  $Z_1$ 
21 display Z2; #  $Z_2$ 
```

Listing III.11: Archivo rutas2.run

```
1 # Reseteo inicial
2 reset;
3
4 # Cargar modelo y datos
5 model rutas4.mod;
6 #model rutas5.mod;
7 data rutas1.dat;
8
9 # Seleccionar solver
10 option solver gurobi;
11
12 # Resolver
13 solve;
14
15 # Mostrar resultados
16 display x; # Rutas
17 display y; # Pales
18 display Z3b; #  $Z_3^b$ 
19 display Z1; #  $Z_1$ 
20 display Z2; #  $Z_2$ 
21 display Z3b_Z1; #  $Z_3^b + 0.4 * Z_1$ 
22 display Z3b_Z2; #  $Z_3^b + 0.4 * Z_2$ 
```

III.4. Salidas

En esta sección recogemos las salidas de AMPL tras la ejecución de los comandos `include rutas.run`, `include rutas1.run`, e `include rutas2.run`, estos últimos para cada uno de los modelos explicados.

Listing III.12: Salida de `include rutas.run`

```
1 x [* , * , R1]
2 :   1   2   3   4   :=
3 1   0   0   0   1
4 2   1   0   0   0
5 3   0   0   0   0
6 4   0   1   0   0
7
8   [* , * , R2]
9 :   1   2   3   4   :=
10 1   0   0   1   0
11 2   0   0   0   0
12 3   0   0   0   1
13 4   1   0   0   0
14 ;
15
16 y :=
17 1 R1  0
18 1 R2  0
19 2 R1  4
20 2 R2  0
21 3 R1  0
22 3 R2  4
23 4 R1  2
24 4 R2  2
25 ;
26
27 eficiencia = 27
```

Listing III.13: Salida de `include rutas1.run` usando `rutas1.mod`

```
1 x [*] :=
2 R1  1
3 R2  1
```

```
4 R3 0
5 R4 0
6 R5 0
7 ;
8
9 y :=
10 1 R1 4
11 1 R2 0
12 1 R3 0
13 1 R4 0
14 1 R5 0
15 2 R1 2
16 2 R2 2
17 2 R3 0
18 2 R4 0
19 2 R5 0
20 3 R1 0
21 3 R2 4
22 3 R3 0
23 3 R4 0
24 3 R5 0
25 ;
26
27 Z3b = 3.09015
28
29 Z1 = 27
30
31 Z2 = 80
```

Listing III.14: Salida de include rutas1.run usando rutas2.mod

```
1 x [*] :=
2 R1 1
3 R2 0
4 R3 1
5 R4 0
6 R5 0
7 ;
8
9 y :=
10 1 R1 2
11 1 R2 0
12 1 R3 2
13 1 R4 0
```

```
14 1 R5 0
15 2 R1 4
16 2 R2 0
17 2 R3 0
18 2 R4 0
19 2 R5 0
20 3 R1 0
21 3 R2 0
22 3 R3 4
23 3 R4 0
24 3 R5 0
25 ;
26
27 Z3b = 3.29948
28
29 Z1 = 34
30
31 Z2 = 76
```

Listing III.15: Salida de include rutas1.run usando rutas3.mod

```
1 x [*] :=
2 R1 0
3 R2 0
4 R3 0
5 R4 1
6 R5 1
7 ;
8
9 y :=
10 1 R1 0
11 1 R2 0
12 1 R3 0
13 1 R4 2
14 1 R5 2
15 2 R1 0
16 2 R2 0
17 2 R3 0
18 2 R4 2
19 2 R5 2
20 3 R1 0
21 3 R2 0
22 3 R3 0
23 3 R4 2
```

```
24 3 R5 2
25 ;
26
27 Z3b = 0
28
29 Z1 = 38
30
31 Z2 = 114
```

Listing III.16: Salida de include rutas2.run usando rutas4.mod

```
1 x [*] :=
2 R1 0
3 R2 1
4 R3 0
5 R4 1
6 R5 0
7 ;
8
9 y :=
10 1 R1 0
11 1 R2 0
12 1 R3 0
13 1 R4 4
14 1 R5 0
15 2 R1 0
16 2 R2 3
17 2 R3 0
18 2 R4 1
19 2 R5 0
20 3 R1 0
21 3 R2 3
22 3 R3 0
23 3 R4 1
24 3 R5 0
25 ;
26
27 Z3b = 0.513889
28
29 Z1 = 29
30
31 Z2 = 82
32
33 Z3b_Z1 = 12.1139
```

```
34  
35 Z3b_Z2 = 33.3139
```

Listing III.17: Salida de include rutas1.run usando rutas5.mod

```
1 x [*] :=  
2 R1 0  
3 R2 0  
4 R3 0  
5 R4 1  
6 R5 1  
7 ;  
8  
9 y :=  
10 1 R1 0  
11 1 R2 0  
12 1 R3 0  
13 1 R4 4  
14 1 R5 0  
15 2 R1 0  
16 2 R2 0  
17 2 R3 0  
18 2 R4 1  
19 2 R5 3  
20 3 R1 0  
21 3 R2 0  
22 3 R3 0  
23 3 R4 1  
24 3 R5 3  
25 ;  
26  
27 Z3b = 0.513889  
28  
29 Z1 = 38  
30  
31 Z2 = 82  
32  
33 Z3b_Z1 = 15.7139  
34  
35 Z3b_Z2 = 33.3139
```

Bibliografía

- [1] Allen, R.G., Pereira, L.S., Raes, D., Smith, M., 1998. *Crop evapotranspiration: guidelines for computing crop water requirements*. FAO Irrigation and Drainage paper 56. FAO, Rome, 300(9), D05109.
- [2] Balcik, B., Beamon, B., Smilowitz, K., 2008. *Last mile distribution in humanitarian relief*. Journal of Intelligent Transportation Systems 12(2), 51–63.
- [3] Barbati, M., Piccolo, C., 2016. *Equality measures properties for location problems*. Optimization Letters 10, 903–920.
- [4] Berman, O., Kaplan, E.H., 1990. *Equity maximizing facility location schemes*. Transportation Science 24, 137–144.
- [5] Blanco, V., Puerto, J., El-Haj Ben-Ali, S., 2014. *Revisiting several problems and algorithms in continuous location with l_τ norms*. Computational Optimization and Applications 58, 563–595.
- [6] Blanco, V., Gázquez, R., 2023. *Fairness in maximal covering location problems*. Computers & Operations Research 157, 106287.
- [7] Blanco, V., Marín, A., Puerto, J., 2024. *Intra-facility equity in discrete and continuous p -facility location problems*. Computers and Operations Research 162, 106487.
- [8] Campbell, A., Vandenbussche, D., Hermann, W., 2008. *Routing for relief efforts*. Transportation Science 42(2), 127–145.
- [9] Changjiang Water Resources Commission, 2011. *Report on the comprehensive management plan on water resources for Hanjiang river basin, China*.
- [10] Chanta, S., Mayorga, M.E., Kurz, M.E., McLay, L.A., 2011. *The minimum p -envy location problem: a new model for equitable distribution of emergency resources*. IISE Transactions on Healthcare Systems Engineering 1(2), 101–115.

- [11] The Chinese State Council, 2012. *Opinions of applying the strictest water resources control system*.
- [12] Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., Meyarivan, T., 2002. *A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II*. IEEE Transactions Evolutionary Computation 6(2), 182–197.
- [13] D’Exelle, B., Lecoutere, E., Van Campenhout, B., 2012. *Equity-efficiency trade-offs in irrigation water sharing: evidence from a field lab in rural Tanzania*. World Development 40(12), 2537–2551.
- [14] Dror, M., Trudeau, G., 1990. *Split delivery routing*. Naval Research Logistics 37, 383–402.
- [15] Erkut, E., 1993. *Inequality measures for location problems*. Location Science 1, 199–217.
- [16] Hipel K.W., Fang L.P., Wang L.Z., 2013. *Fair water resources allocation with application to the saskatchewan river basin*. Canadian Water Resources Journal 38(1), 47–60.
- [17] Huang, M., Smilowitz, K., Balcik, B., 2012. *Models for relief routing: Equity, efficiency and efficacy*. Transportation Research Part E 48, 2–18.
- [18] Hubei Provincial Department of Water Resources, 2014. *Dispatching schedules of Hubei provincial large reservoirs; Wuhan, China*.
- [19] Kalcsics, J., Nickel, S., Puerto, J., Rodríguez-Chía, A.M., 2015. *Several 2-facility location problems on networks with equity objectives*. Networks 65(1), 1–9.
- [20] Kasprzyk, J.R., Nataraj, S., Reed, P.M., Lempert, R.J., 2013. *Many objective robust decision making for complex environmental systems undergoing change*. Environmental Modelling & Software 42, 55–71.
- [21] Khare, D., Jat, M.K., Sunder, J.D., 2007. *Assessment of water resources allocation options: conjunctive use planning in a link canal command*. Resources, Conservation & Recycling 51(2), 487–506.
- [22] Knott, R., 1987. *The logistics of bulk relief supplies*. Disasters 11(2), 113–115.
- [23] Lee, C.S., 2012. *Multi-objective game-theory models for conflict analysis in reservoir watershed management*. Chemosphere 87(6), 608–613.
- [24] Levy, J.I., Chemerynski, S.M., Tuchmann, J.L., 2006. *Incorporating concepts of inequality and inequity into health benefits analysis*. International Journal for Equity in Health 5, 1–19.
- [25] Lin, Y.-H., Batta, R., Rogerson, P., Blatt, A., Flanigan, M., 2009. *A logistics model for delivery of prioritized items: application to a disaster relief effort*. Department of Industrial and Systems Engineering, University at Buffalo (SUNY), Buffalo.

-
- [26] Liu, D.D., Guo, S.L., Shao, Q.X., Liu, P., Xiong, L.H., Wang, L., Hong, X.J., Xu, Y., Wang, Z.L., 2018. *Assessing the effects of adaptation measures on optimal water resources allocation under varied water availability conditions*. Journal of Hydrology 556, 759–774.
- [27] Marín, A., Nickel, S., Velten, S., 2010. *An extended covering model for flexible discrete and equity location problems*. Mathematical Methods of Operations Research 71, 125–163.
- [28] McAllister, D.M., 2010. *Equity and efficiency in public facility location*. Geographical Analysis 8, 47–63.
- [29] Mesa, J.A., Puerto, J., Tamir, A., 2003. *Improved algorithms for several network location problems with equality measures*. Discrete Applied Mathematics 130, 437–448.
- [30] Ogryczak, W., Tamir, A., 2003. *Minimizing the sum of the k largest functions in linear time*. Information Processing Letters 85, 117–122.
- [31] Raquel, S., Ferenc, S., Emery, C., Abraham, R., 2007. *Application of game theory for a groundwater conflict in Mexico*. Journal of Environmental Management 84(4), 560–571.
- [32] Savas, E.S., 1978. *On equity in providing public services*. Management Science 24, 800–808.
- [33] Solomon, M., 1987. *Algorithms for the vehicle routing and scheduling problem with time windows*. Operations Research 35, 254–265.
- [34] Sperner, E., 1928. *Neuer beweis für die invarianz der dimensionszahl und des gebietes*. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg 6, 265–272.
- [35] Su, F.E., 1999. *Rental harmony: Sperner's lemma in fair division*. American Mathematical Monthly 106(10), 930–942.
- [36] Tennant, D.L., 1976. *Instream flow regimens for fish, wildlife, recreation and related environmental resources*. Fisheries 1, 6–10.
- [37] Tian, J., Guo, S., Liu, D., Pan, Z., Hong, X., 2019. *A fair approach for multi-objective water resources allocation*. Water Resources Management, 3633–3653.
- [38] Tzeng, G., Cheng, H., Huang, T., 2007. *Multi-objective optimal planning for designing relief delivery systems*. Transportation Research Part E 43(6), 673–686.
- [39] Van Hentenryck, P., Bent, R., Coffrin, C., 2010. *Strategic planning for disaster recovery with stochastic last mile distribution*. Lecture Notes in Computer Science 6140.
- [40] Xu, J., Murray, A.T., Church, R.L., Wei, R., 2023. *Service allocation equity in location coverage analytics*. European Journal of Operational Research 305, 21–37.