



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O teorema de Lax-Milgram

María Charlín Menéndez

Xuño, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O teorema de Lax Milgram

María Charlín Menéndez

Xuño, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise matemática
Título: O teorema de Lax-Milgram
Breve descrición do contido
A execución comezará cunha revisión dos elementos básicos relativos á Análise Funcional. A continuación, realizarase unha revisión bibliográfica dos distintos enfoques para abordar o tema, co obxectivo de obter unha visión das posibles formas de estudar o resultado de Lax-Milgram. Por último, presentaranse os resultados máis destacados derivados do teorema central e algunhas das súas aplicacións máis salientables.

Índice

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Preliminares sobre análise funcional en espazos de Hilbert	1
1.1. Espazos métricos	1
1.2. Espazos normados	2
1.3. Espazos de Banach	2
1.3.1. Definición	2
1.3.2. Operadores lineais en espazos normados	3
1.4. Espazos de Hilbert	6
1.4.1. Definición e exemplos	6
1.4.2. O Teorema da Proxección Ortogonal	11
1.4.3. O Teorema de Representación de Riesz	14
2. O Teorema de Lax-Milgram	19
2.1. Primeira demostración	19
2.2. Segunda demostración	24
3. Unha xeneralización do teorema de Lax-Milgram	35
3.1. O Teorema de Stampacchia	35

3.1.1. O Teorema do Punto Fixo de Banach	35
3.1.2. Demostración do Teorema de Stampacchia	37
4. Aplicacións do Teorema de Lax-Milgram	41
4.1. Teoría previa sobre espazos de Sobolev	41
4.1.1. Os espazos de Sobolev	42
4.1.2. A formulación variacional	44
4.2. Resolución de problemas aplicando o teorema de Lax-Milgram	46
4.2.1. Resolución de problemas de ecuacións diferenciais ordinarias	47
4.2.2. Resolución de problemas de ecuacións en derivadas parciais	50
Bibliografía	53

Resumo

Neste Traballo de Fin de Grao propónse o estudo exhaustivo do Teorema de Lax-Milgram, comezando pola maneira na que xurdiu, seguindo coa súa respectiva demostración e rematando con algunhas das súas posibles aplicacións.

Antes de abordar o traballo, realizarase unha introdución para comprender como xurde este resultado a partir do estudo de ecuacións en derivadas parciais, ademais do seu contexto histórico.

No primeiro capítulo, levarase a cabo unha revisión de conceptos e resultados relativos á Análise Funcional que serán imprescindibles para a comprensión e demostración do dito teorema. A maioría destes elementos foron estudados ao longo do Grao de Matemáticas, especialmente na asignatura de cuarto curso "Análise Funcional en Espazos de Hilbert". Destacaremos a importancia de dous teoremas, ambos fortemente relacionados cos espazos de Hilbert: o Teorema da Proxección Ortogonal e o Teorema de Representación de Riesz. Este último será unha ferramenta fundamental para o estudo do Teorema de Lax-Milgram e as súas variantes.

Seguiremos co segundo capítulo, onde veremos a demostración desde dúas diferentes aproximacións do noso resultado central. Na primeira delas, apoiarémonos no Teorema de Representación de Riesz presentado no primeiro capítulo, mentres que para a segunda, faremos uso do Teorema de Hanah-Banach.

No terceiro capítulo, veremos a xeneralización máis importante deste teorema: o Teorema de Stampacchia. Con tal propósito, levaremos a cabo previamente o enunciado e demostración do Teorema do Punto Fixo de Banach.

Por último, no cuarto capítulo, centrarémonos en algunhas aplicacións dese teorema no ámbito das ecuacións diferenciais. Para iso, faremos previamente un repaso da teoría das distribucións e espazos de Sobolev. Ademais, presentaremos o Método Variacional, que empregaremos na segunda sección deste capítulo para a resolución dos diferentes problemas.

Abstract

In this final project we propose the exhaustive study of the Lax-Milgram Theorem, beginning with the way in which it arose, continuing with its respective demonstration and ending with some of its possible applications.

We will make before starting the report, an Introduction to understand how this arises, result from the study of partial differential equations, in addition to the historical context.

In the first chapter we will make a review of concepts and results related to the Functional Analysis that will be essential for the understanding and demonstration of the theorem. Most of these elements have been studied throughout the Mathematics Degree , especially in subject Functional Analysis in Hilbert Spaces. We will will emphasize in two theorems related to Hilbert spaces: the Projection Theorem and the Riesz Representation Theorem. The last one will be a fundamental tool for the study of the Lax-Milgram Theorem and its variants.

We will continue with the second chapter, where we will see the demonstration of our central result from two different approximations. In the first one we will use the Riesz Representation Theorem presented in the first chapter while for the second, we will use the Hanah-Banach Theorem.

In the third chapter, we will examine the most significant generalization of this theorem: the Stampacchia's theorem. Before proving it, we will provide a preliminary demonstration of the Banach fixed-point theorem.

Finally, in the fourth chapter, we will focus on some applications of this theorem in the field of differential equations. To do this, we will previously review the theory of distributions and Sobolev spaces. We will also describe the Variational Method, which we will use in the second section of this chapter to solve the different problems.

Introdución

A análise funcional xurdiu e desenvolveuse como unha disciplina independente no século XX, como resultado da evolución da análise clásica, a física, as matemáticas, a topoloxía e o álgebra. O seu xurdimento débese á necesidade de atopar novas técnicas para abordar novos problemas que os métodos tradicionais que existían no momento non eran capaces de resolver.

Unha das contribucións máis significativas no campo da análise funcional é o teorema que será abordado neste traballo, coñecido como o teorema de Lax-Milgram. Dito teorema foi formulado polos matemáticos Peter David-Lax e Arthur Norton Milgram.

Peter David Lax, nado o 1 de maio de 1926 en Budapest, Hungría, é un destacado matemático, coñecido polas súas importantes contribucións á matemática e física, é recoñecido a nivel internacional pola súa destacada carreira.

Lax comezou a súa traxectoria académica na súa cidade natal, onde mostrou unha gran habilidade e interese polas matemáticas dende unha idade temprana. No ano 1941, xunto cos seus pais, emigrou a Nova York buscando refuxio da Segunda Guerra Mundial. Foi alí onde continuou co seu percorrido académico e profesional.

Ao longo da súa carreira, Peter Lax realizou valiosas achegas en diversas áreas da matemática e física. Dedicou parte dos seus estudos ao estudo dos sistemas integrables, a dinámica de fluidos e ondas de choque, así como á física de solitóns. Tamén se destacou no desenvolvemento de leis de conservación hiperbólicas e no campo da computación científica e matemática.



Figura 1: Peter D. Lax



Figura 2: Peter D. Lax co profesor Juan J. Nieto na súa visita á USC no ano 2007

Arthur Norton Milgram (1912-1961) foi un destacado matemático estadounidense. Milgram destacou polo seu traballo na teoría dos números e na análise matemática. É sabido que Milgram formulou varios teoremas que lle permitiron avanzar no coñecemento matemático e que as súas investigacións axudaron a comprender e resolver problemas matemáticos fundamentais, deixando unha pegada duradeira na disciplina. Faleceu tan só seis anos despois da publicación do teorema.



Figura 3: Arthur Milgram

O papel crucial que xoga o teorema de Lax-Milgram no ámbito das ecuacións en derivadas parciais é innegable. Ata agora, a noción de solución para problemas relacionados con estas ecuacións limitábase á solución clásica. Con todo, na década dos anos 40, os matemáticos Sergei Sobolev e Schwarz introduciron os espazos de Sobolev, baseados no concepto de derivada débil.

Isto deu lugar a métodos como o Método Variacional para resolver eses problemas. A pre-

sentación do Teorema de Lax-Milgram foi de grande utilidade na formulación de problemas variacionais e problemas con solucións débiles, utilizando o Método Variacional para establecer a existencia e unicidade de solucións débiles.

Ademais das súas aplicacións directas, a súa importancia radica en todas as xeneralizacións e métodos que se derivaron a partir del.

Capítulo 1

Preliminares sobre análise funcional en espazos de Hilbert

Neste capítulo, centrarémonos no estudo detallado dos conceptos e resultados necesarios para comprender e demostrar o Teorema de Lax-Milgram. Estes conceptos e resultados foron presentados ao longo dos estudos do Grao de Matemáticas e son de vital importancia para o desenvolvemento do teorema.

Dentro destes resultados, dous dos máis relevantes e que merecen da nosa especial atención son o Teorema da Proxección Ortogonal e o Teorema de Representación de Riesz. O Teorema da Proxección Ortogonal establece a existencia e unicidade da proxección ortogonal dun espazo vectorial sobre un subespazo pechado, o que é fundamental no contexto do Teorema de Lax-Milgram. Por outro lado, o Teorema de Representación de Riesz permítenos establecer unha correspondencia entre os elementos dun espazo de Hilbert e os funcionais lineais continuos nese espazo, o que nos brinda poderosas ferramentas para a análise funcional e para abordar a proba do Teorema de Lax-Milgram e o estudo das súas diversas variantes.

Ao comprender estes resultados, estaremos preparados para enunciar e demostrar o Teorema de Lax-Milgram de maneira rigorosa e completa en capítulos posteriores.

1.1. Espazos métricos

Definición 1.1. (Espazo métrico). Un par (X, d) é un espazo métrico se X é un conxunto e $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é unha aplicación, chamada distancia ou métrica, tal que cumpre as seguintes propiedades:

(I)Lei de Leibniz: $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$.

(II)Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$, para todo, $x, y \in X$.

(III)Desigualdade triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y \in X$.

Definición 1.2. Dícese que unha sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X converxe a $x \in X$ nun espazo métrico se $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : d(x, x_n) < \epsilon, \forall n \geq n_0(\epsilon)$.

Definición 1.3. Dícese que unha sucesión $\{x_n\}$ é de Cauchy se $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : p, q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon$.

Definición 1.4. (Espazo métrico completo). Un espazo métrico completo é un espazo métrico X no cal se cumpre que calquera sucesión de Cauchy en X é converxente a algún elemento de X .

1.2. Espazos normados

Definición 1.5. (Espazo normado). Un par $(V, \|\cdot\|)$ dícese que é un espazo (vectorial) normado se V é un espazo vectorial sobre un corpo \mathbb{F} (xeralmente \mathbb{R} ou \mathbb{C}) e $\|\cdot\|$ é unha norma, é decir, unha aplicación $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ que satisfai as seguintes propiedades:

(I)Desigualdade triangular: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para $u, v \in V$.

(II)Homoxeneidade: $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ para $u \in V, \lambda \in \mathbb{F}$.

(III)Definición: Se $v \in V$ y $\|v\| = 0$ entón $v = 0$.

Observación 1.6. Nun espazo normado, a norma $\|\cdot\|$ leva á definición dunha métrica $d(x, y) := \|y - x\|$. Dita métrica induce á súa unha topoloxía. Ademais, calquera espazo normado é un espazo vectorial topolóxico coa topoloxía inducida pola norma e a topoloxía usual de \mathbb{F} .

1.3. Espazos de Banach

1.3.1. Definición

Definición 1.7. (Espazo de Banach). Sexa $(V, \|\cdot\|)$ un espazo normado, entón dícese que é un espazo de Banach se coa distancia inducida é un espazo métrico completo.

Observación 1.8. Un subespazo dun espazo métrico considérase completo se e só se é pechado con respecto á topoloxía inducida pola métrica. Por tanto, un subespazo vectorial dun espazo de Banach é un espazo de Banach se e só se é pechado; en tal caso, dícese que é un subespazo de Banach.

1.3.2. Operadores lineais en espazos normados

Observación 1.9. Cando tratemos con espazos normados, imos utilizar o termo “operador” en lugar de “función”. Ademais, ao facer referencia a un operador T entre espazos normados, empregaremos a notación Tx en lugar de $T(x)$. Por último, diremos que un operador que vai dende un espazo normado ata o corpo de escalares de dito operador denomínase “funcional”.

Definición 1.10. (Operador lineal). Consideremos X, Y dous espazos normados e o operador $T : X \rightarrow Y$. Entón, dícese que dito operador é lineal cando cúmprense as seguintes dúas propiedades:

(I) Aditividade: $T(x, y) = Tx + Ty \quad \forall x, y \in X$.

(II) Homoxeneidade: $T(\alpha x) = \alpha Tx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Notación 1.11. Sexan X e Y dous espazos normados, designamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ ao espazo dos operadores lineais de X en Y .

Notación 1.12. Sexa $T : D(T) \subseteq X \rightarrow Y$ un operador lineal, temos entón que:

(I) $D(T)$ denota o dominio de T e é o subespazo vectorial de X onde está definido.

(II) $R(T)$ denota O rango de T , é dicir, $R(T) = \{y \in Y \mid y = Tx, x \in D(T)\}$. $R(T)$ é un subespazo vectorial por ser T un operador lineal e $D(T)$ un subespazo vectorial.

$N(T)$ denota ao espazo nulo ou núcleo de T , é dicir, $N(T) = \{x \in D(T) \mid Tx = 0\}$.

Definición 1.13. (Operador lineal acotado). Escollemos un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ entre dous espazos normados X, Y . Entón dícese que é lineal e acotado se satisfai unha propiedade adicional de acotamento. É dicir, existe unha constante real e positiva $c \geq 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Notación 1.14. A partir deste momento faremos uso da notación $\mathcal{B}(X, Y)$ para facer referencia ao espazo dos operadores lineais e acotados que van dende o espazo normado X ata o espazo normado Y .

Exemplo 1.15. Cabe destacar que non todos os operadores lineais son acotados. En efecto, imos considerar o operador lineal multiplicación dado por

$$\begin{aligned} T : D(T) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ x &\rightarrow tx \end{aligned}$$

onde $D(T) \subset L^2(\mathbb{R})$.

O dominio $D(T)$ do operador T consiste en tódolos $x \in L^2(\mathbb{R})$ tales que $Tx \in L^2(\mathbb{R})$, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Agora ben, para cada $n \in \mathbb{N}$, sexa

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq t \leq n+1 \\ 0, & \text{calquera outro caso} \end{cases}$$

Claramente, $\|x_n\| = 1$ e ademais

$$\|Tx_n\|^2 = \int_n^{n+1} t^2 dt > n^2.$$

En consecuencia, $\|Tx_n\|/\|x_n\| > n$ onde $n \in \mathbb{N}$ pode ser elexido arbitrariamente grande. Podemos concluír entón que T non está acotado.

Teorema 1.16. *Consideremos un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ que vai dende un espacio normado X nun espacio normado Y . Entón cúmprese que o operador T é continuo se e só se é acotado.*

Demostración. Vexamos en primeiro lugar que o feito de que T estea acotado implica que T sea continuo. Para $T = 0$ a demostración é trivial. Consideremos entón que $T \neq 0$ e deste xeito $\|T\| \neq 0$. Asumimos que T é acotado por hipótese e consideramos un $x_0 \in D(T)$ arbitrario. Como T é lineal, para calquera $\epsilon > 0$ e para cada $x \in D(T)$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ onde } \delta = \frac{\epsilon}{\|T\|}$$

temos que

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \|T\| \delta = \epsilon.$$

Como fixemos a elección de x_0 arbitraria, T é continuo.

No sentido inverso, veremos que se T é continuo entón é acotado. Asumamos por hipótese que T é continuo nun punto $x_0 \in D(T)$ arbitrario. Entón para calquera $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \|x - x_0\| \leq \delta \text{ entón } \|T(x) - T(x_0)\| \leq \epsilon. \quad (1.1)$$

Tomamos agora $y \neq 0 \in D(T)$ e

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y.$$

Entón

$$x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$$

Así $\|x - x_0\| \leq \delta$ polo que podemos facer uso de 1.1.

Como T é un operador lineal, temos que

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\left(\frac{\delta}{\|y\|}y\right)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|T(y)\|$$

e por 1.1 isto implica que

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|T(y)\| \leq \epsilon$$

e así

$$\|T(y)\| \leq \frac{\epsilon}{\delta}\|y\|.$$

Tomando $c = \epsilon/\delta$ temos que $\|T(y)\| \leq c\|y\|$, o que proba que efectivamente o funcional T é acotado. \square

Definición 1.17. Se consideramos dous espazos normados X e Y , a norma

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}, T \in \mathcal{L}(X, Y)$$

e $\mathcal{LB}(X, Y) := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : \|T\| < \infty\}$. Entón $(\mathcal{LB}(X, Y), \|\cdot\|)$ é un espazo normado chamado espazo dos operadores lineais acotados de X en Y .

Definición 1.18. (Isomorfismo isométrico). Un isomorfismo isométrico é un operador lineal e bixectivo $T : X \rightarrow Y$ tal que preserva as normas, é dicir

$$\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Ademais de preservar as normas, tamén se conservan as propiedades relevantes como son a completitude e a compacidade. Así, dous espazos normados $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(Y, \|\cdot\|_2)$ dicese que son isométricos se existe un isomorfismo isométrico $T : X \rightarrow Y$.

Observación 1.19. Os espazos de Banach desempeñan un papel fundamental na análise funcional debido a que proporcionan un marco riguroso e completo para o estudo de funcións e operadores lineais.

Unha propiedade relevante que distingue a certos espazos de Banach é a reflexividade. Para poder comprender a reflexividade, examinaremos primeiro o concepto de espazo dual.

Definición 1.20. (Espazos dual e bidual). O espazo dual de un espazo normado X , denotado como X^* , é o conxunto de tódalas funcións lineais e continuas definidas en X . É dicir, $X^* = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ lineal e continua}\}$.

O bidual dun espazo normado X , denotado como X^{**} é o espazo dual do espazo dual de X . É dicir e o conxunto de tódalas funcións lineais continuas en X^* .

Definición 1.21. (Inmersión canónica). A inmersión canónica asociada a V , sendo V un espazo vectorial normado é a aplicación

$$J : X \rightarrow X^{**}$$

que mapea cada elemento $v \in V$ ao elemento correspondente no bidual V^{**} de acordo coa relación

$$(J(v))(f) := [f(v)] \quad v \in V, f \in V^*.$$

Definición 1.22. Dícese que un espazo \mathcal{B} de Banach é reflexivo se a inmersión canónica $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{**}$ entre \mathcal{B} e \mathcal{B}^{**} é un isomorfismo isométrico.

Observación 1.23. Podemos razoar o feito de que J sexa sobrexectiva é a única condición para que un espazo de Banach sexa reflexivo. En efecto recordamos que un isomorfismo isométrico non é máis que un operador lineal, bixectivo e tal e que preserve as normas. Pódese probar que nun espazo de Banach a inmersión canónica é sempre lineal e isométrica. Ademais tamén é inxectiva xa que por ser isométrica temos que $\|J(x)\| = \|x\|$, entón se $J(x_1) = J(x_2)$ cúmprese que $0 = \|J(x_1) - J(x_2)\| = \|x_1 - x_2\|$, polo que $x_1 = x_2$. Así, a única condición que temos que esixir é que J sexa sobrexectiva.

Exemplo 1.24. Non todo espazo de Banach é reflexivo. Consideremos para isto o espazo de Banach denotado como ℓ^∞ que non é máis que o espazo de todas as sucesións acotadas dotadas da seguinte norma:

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Sexa c_0 o subespazo que consta de todas as sucesións cuxo límite é cero. Este é un subespazo de Banach de ℓ^∞ xa que, como as sucesións de c_0 tenden a cero, teñen que estar acotadas e a norma de c_0 é a mesma que a de ℓ^∞ . O espazo de James, denotado por J , defínese como: tódolos elementos x de c_0 que satisfacen $\sup\{\|x\|_p \mid p \in \mathcal{P}\} < \infty$, dotado da norma $\|x\| := \sup\{\|x\|_p : p \in \mathcal{P}\}$. \mathcal{P} denota a familia de tódalas sucesións crecentes finitas de enteiros de lonxitude impar. Para calquera sucesión de números reais $x = (x_n)$ y $p = (p_1, p_2, \dots, p_{2n+1}) \in \mathcal{P}$ definimos

$$\|x\|_p := \left(x_{p_{2n+1}}^2 + \sum_{m=1}^n (x_{p_{2m-1}} - x_{p_{2m}})^2 \right)^{1/2}.$$

O espazo de James é un exemplo de espazo de Banach que non é reflexivo.

1.4. Espazos de Hilbert

1.4.1. Definición e exemplos

Definición 1.25. (Forma sesquilineal). Sexa X un espazo normado, $B : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ con $\mathbb{K} (= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, dícese que é unha forma sesquilineal se cumpre as seguintes dúas propiedades:

$$(I) B(\alpha x + y, z) = \alpha B(x, z) + B(y, z), \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

$$(II) B(x, \beta y + z) = \beta B(x, y) + B(x, z), \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Definición 1.26. (Forma bilinear). Consideremos X un espazo normado sobre \mathbb{R} . Entón dicese que $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é unha forma bilinear se cumpre as seguintes dúas condicións:

$$(I) a(\alpha x + \beta y, z) = \alpha a(x, z) + \beta a(y, z), \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(II) a(x, \alpha y + \beta z) = \alpha a(x, y) + \beta a(x, z), \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

As formas bilineais serán o principal obxecto de estudo do Teorema de Lax-Milgram e sobre elas aplicaremos a conclusión deste.

Definición 1.27. (Forma sesquilineal coerciva). Considérese un espazo normado X e unha forma sesquilineal $B : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$. Entón dicese que B é fortemente coerciva se existe unha constante real positiva $\alpha > 0$ tal que se cumpre a seguinte desigualdade:

$$B(x, x) \geq \alpha \|x\|^2, \forall x \in X.$$

Veremos que esta condición será a hipótese máis importante para a obtención da conclusión do Teorema de Lax-Milgram e evitar así que B poida ser nula o dexenerada.

Definición 1.28. (Forma sesquilineal positiva). Sexa X un espazo normado. Dicese que unha forma sesquilineal $B : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ é positiva se $B(x, x) \geq 0, \forall x \in X$.

Advértase que esta condición é menos forte que a condición de ser fortemente coerciva.

Definición 1.29. (Produto interior). Nun espazo vectorial X , defínese o produto interior, tamén coñecido como produto escalar, como unha forma bilinear simétrica e definida positiva. É dicir, unha aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfai as seguintes propiedades:

$$(I) \text{Linealidade na primeira variable: } \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$(II) \text{Simetría: } \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X.$$

(III) Definición positiva: Para calquera $x \in X$ cúmprese que $\langle x, x \rangle \geq 0$, e a igualdade ocorre só se $x = 0$.

$$(IV) \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Imos presentar seguidamente outro tipo de espazo fundamental na análise funcional, o espazo de Hilbert, o cal leva este nome en honor ao matemático David Hilbert. A teoría de espazos de Hilbert baséase no concepto de produto interior que definimos con anterioridade.

Definición 1.30. (Espazo prehilbertiano). Consideremos X un espazo vectorial. Entón dícese que X é un espazo prehilbertiano se está dotado dun produto interior.

Un espazo prehilbertiano non é máis que una xeneralización do concepto de espazo de Hilbert que veremos a continuación, onde se omiten as propiedades de completitude e ortogonalidade.

Definición 1.31. (Espazo de Hilbert). Un espazo de Hilbert é un espazo prehilbertiano $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ que é un espazo métrico completo coa norma inducida polo produto interior, é dicir, a norma $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

No ámbito da análise funcional, os espazos de Hilbert proporcionan un marco matemático para o estudo de funcións e operadores lineais en espazos normados. En particular, no teorema de Lax-Milgram, a formulación necesita da existencia dun espazo de Hilbert, sobre o cal definir unha forma bilinear, acotada e fortemente coerciva.

Imos agora a presentar un exemplo de espazo de Hilbert.

Exemplo 1.32. Consideremos os espazos de Lebesgue $L^p(X, \mu, \mathbb{F})$ onde \mathbb{F} é un corpo \mathbb{R} ou \mathbb{C} e μ é unha medida. Entón para o caso no que $p = 2$ temos que o espazo de funcións $L^2(X, \mu, \mathbb{F})$ é un espazo de Hilbert co produto interior $\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$.

Lema 1.33. (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*). Sexa X un espazo vectorial complexo con produto interior e dous elementos $x, y \in X$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz establece que:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota ao produto interior e $\|\cdot\|$ é a norma inducida por él. Ademais, a igualdade nesta desigualdade alcánzase se e só se x e y son linealmente independentes.

Na definición de espazo prehilbertiano, establécese a necesidade de definir unha norma a partir do produto interior. Isto é factible debido a que calquera espazo con produto interior pode ser considerado como un espazo normado. Esta afirmación baséase na posibilidade de definir a norma dun elemento x da seguinte forma:

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Esta construción sempre cumpre coas propiedades requiridas para ser considerada unha norma, xa que:

1. Se $x \neq 0$, entón $\langle x, x \rangle > 0$ e polo tanto $\|x\| > 0$.

2. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda}\lambda \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle$. E así $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

3. Facendo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz demostramos a propiedade de subaditividade da norma:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Así tódolos espazos prehilbertianos son espazos de Banach. Sen embargo, o recíproco non é certo e para que isto suceda tense que cumprir a identidade que imos definir a continuación.

Definición 1.34. Chamamos Identidade do Paralelogramo á seguinte identidade alxebrica

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.2)$$

Proposición 1.35. *Consideremos \mathcal{B} un espazo de Banach real. Entón, dito espazo \mathcal{B} é un espazo prehilbertiano se e só se cumpre a Identidade do Paralelogramo, é dicir:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Demostración. Supoñamos que \mathcal{B} é un espazo prehilbertiano, é dicir, é un espazo con produto interior e a súa norma é a inducida por este, polo que:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \quad (1.3)$$

Cun razoamento semellante, vemos que

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (1.4)$$

e sen máis que sumar as ecuacións 1.3 e 1.4 obtemos que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle - 2\langle x, y \rangle + 2\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Para ver a outra implicación, temos que ver que \mathcal{B} é un espazo con produto interior. Para iso, consideramos a Identidade de Polarización real (que expresa o produto interior en certo espazo normado en función da súa norma):

$$\xi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2). \quad (1.5)$$

Vexamos que ξ é un produto interior en \mathcal{B} . Para que isto aconteza temos que ver que se cumpren as catro propiedades enunciadas na Definición 1,29. En primeiro lugar, vemos que

$$\xi(x, x) = \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|0\|^2) = \|x\|^2$$

polo que claramente cúmprense as propiedades (III) e (IV). Ademais é doado ver que

$$\xi(x, y) = \xi(y, x).$$

Por último, para a propiedade (I), vemos que

$$\xi(x, z) + \xi(z, y) = \frac{1}{4}(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|z + y\|^2 - \|z - y\|^2). \quad (1.6)$$

Pero temos que

$$\begin{aligned} \|x + z\|^2 &= \left\| \left(\frac{x+y}{2} + z \right) + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) \right\|^2 \\ \|y + z\|^2 &= \left\| \left(\frac{x+y}{2} + z \right) - \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) \right\|^2. \end{aligned}$$

Facendo uso da Identidade do Paralelogramo que vemos en 1.2 obtemos que

$$\|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 = 2 \left(\left\| \frac{x+y}{2} + z \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right\|^2 \right).$$

De maneira análoga

$$\|x - z\|^2 + \|y - z\|^2 = 2 \left(\left\| \frac{x+y}{2} - z \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right\|^2 \right).$$

Deste xeito, sen máis que substituír en 1.6

$$\begin{aligned} \xi(x, z) + \xi(z, y) &= \frac{1}{4} \left[2 \left(\left\| \frac{x+y}{2} + z \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right\|^2 \right) - 2 \left(\left\| \frac{x+y}{2} - z \right\|^2 + \left\| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right\|^2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{x+y}{2} + z \right\|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} - z \right\|^2 \right) = 2\xi \left(\frac{x+y}{2}, z \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Se tomamos $y = 0$ na ecuación anterior, obtemos

$$\xi(x, z) + \xi(z, 0) = 2\xi \left(\frac{x+0}{2}, z \right) = 2\xi \left(\frac{x}{2}, z \right).$$

Pero pola identidade de Polarización Real 1.5

$$\xi(0, z) = \frac{1}{4}(\|0 + z\|^2 - \|0 - z\|^2) = 0,$$

polo que quedaríanos que

$$\xi(x, z) = 2\xi \left(\frac{x}{2}, z \right). \quad (1.8)$$

Se agora substituímos x por $x + y$ en 1.8, obteríamos que:

$$\xi(x + y, z) = \xi(x, z) + \xi(y, z). \quad (1.9)$$

Ao facer un razoamento indutivo, podemos ver que para as fraccións 2-ádicas (fraccións p -ádicas da forma $\alpha = \frac{a}{p^b}$ onde p é o número primo 2, a é un enteiro e b é un número natural) cúmprese a ecuación:

$$\xi(\alpha x, y) = \alpha \xi(x, y) \quad (1.10)$$

Dado que $\|\alpha x + y\|$ y $\|\alpha x - y\|$ son continuos con respecto a α , pola Identidade de Polarización Real 1.5 $\xi(\alpha x, y)$ tamén o é. Por último, debido a que o conxunto das fraccións 2-ádicas é denso na recta real, a ecuación 1.10 cúmprese para calquera $\alpha \in \mathbb{R}$. Coa ecuación 1.9 e a ecuación 1.10 queda rematada a proba da propiedade (I). \square

Observación 1.36. Se nos átopasemos no caso de espazos de Banach ou prehilbertianos complexos, a demostración realizaríase de xeito análogo pero facendo uso neste caso da Identidade de Polarización Complexa:

$$\xi(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + \|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

1.4.2. O Teorema da Proxección Ortogonal

Para finalizar este primeiro capítulo, imos probar dous resultados moi importantes relativos aos espazos de Hilbert, que serán ferramentas fundamentais para a posterior demostración do teorema de Lax-Milgram. O primeiro deles e que presentaremos nesta sección é o teorema da Proxección Ortogonal.

O teorema da Proxección Ortogonal garantiza a existencia e unicidade dunha proxección ortogonal nun espazo de Hilbert. Comencemos entón, definindo o concepto de ortogonalidade.

Definición 1.37. (Ortogonalidade). Sexa \mathcal{H} un espazo de Hilbert, $f, g \in \mathcal{H}$, dícese que f e g son ortogonais se $\langle f, g \rangle = 0$ e se escribe $f \perp g$. Se $A, B \in \mathcal{H}$ e $f \perp g$ para todo $f \in A$, $g \in B$, entón A e B son ortogonais e escríbese $A \perp B$. Chamamos espazo ortogonal ao conxunto $A^\perp := \{f \in \mathcal{H} : f \perp g, \forall g \in A\}$.

Definición 1.38. (Aproximación óptima). Sexa \mathcal{H} un espazo prehilbertiano e L un subespazo vectorial de \mathcal{H} . Dado un vector $x \in \mathcal{H}$, dicimos que y_0 é aproximación óptima de x relativa a L se $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$, é dicir, se $d(x, y_0) = \inf_{y \in L} d(x, y) = d(x, L)$.

Observación 1.39. O concepto de aproximación óptima, como se deduce da definición, só “utiliza” a estrutura métrica de \mathcal{H} , e pode definirse, polo tanto, nun espazo métrico e relativa a un subconxunto do mesmo. No caso de que \mathcal{H} sexa un espazo prehilbertiano, dicimos que y_0 é unha

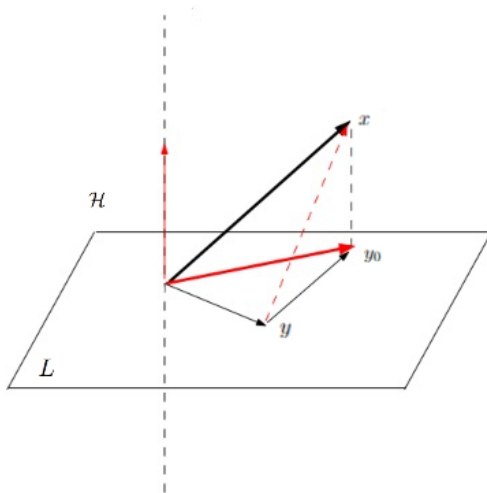


Figura 1.1: Ilustración en \mathbb{R}^2 do Teorema 1.40

aproximación óptima de x relativa a L se e só se, por definición, y_0 é a proxección ortogonal de x sobre L .

Teorema 1.40. (da Proxección Ortogonal). Consideremos \mathcal{H} un espazo de Hilbert e L un subespazo vectorial de \mathcal{H} cerrado, convexo e non vacío. Entón cúmprese que:

(I) Calquera punto $x \in \mathcal{H}$ ten unha e só unha proxección ortogonal sobre L .

(II) Sexa $x \in \mathcal{H}$ e $y_0 \in L$ a proxección ortogonal de x sobre L . Entón $z = x - y_0$ é ortogonal a L , é dicir, $x - y_0 \in L^\perp$.

Demostración. (I) Na primeira parte da demostración probaremos por orde a existencia e unicidade.

(Existencia). Se $x \in L$, é trivial, pois a aproximación óptima de x relativa a L sería x e é única. Supoñamos entón que $x \in \mathcal{H} - L$. O subespazo L é cerrado e, en consecuencia:

$$\alpha = d(x, L) = \inf_{y \in L} \|x - y\| > 0.$$

Por definición de α , existe en L unha sucesión $(y_n)_n$ tal que $\|x - y_n\|_n \rightarrow \alpha$.

Vexamos que $(y_n)_n$ é de Cauchy, o que probará que é converxente, por ser L completo (ao ser un subconxunto non vacío e cerrado nun espazo métrico completo), e o seu límite será una aproximación óptima de x relativa a L pois

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \|x - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n\|.$$

En virtude da Identidade do Paralelogramo 1.2:

$$2 \left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2 \right) = \|2x - y_p - y_q\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 = 4 \left\| x - \frac{1}{2}(y_p + y_q) \right\|^2 + \|y_p - y_q\|^2.$$

Polo tanto,

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2 \left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2 \right) - 4 \left\| x - \frac{1}{2}(y_p + y_q) \right\|^2.$$

Como $\frac{1}{2}(y_p + y_q) \in L$ (pois L é un subespazo convexo de H), por definición de α temos que

$$\left\| x - \frac{1}{2}(y_p + y_q) \right\| \geq \alpha \Rightarrow -4 \left\| x - \frac{1}{2}(y_p + y_q) \right\|^2 \leq -4\alpha^2.$$

Entón,

$$\|y_p - y_q\|^2 \leq 2 \left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2 \right) - 4\alpha^2.$$

Agora ben, por hipótese, $(\|x - y_n\|)_n \rightarrow \alpha$, logo $(\|x - y_n^2\|)_n \rightarrow \alpha^2$.

Polo tanto

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{N}/n > \delta \Rightarrow \|x - y_n\|^2 < \alpha^2 + \frac{\epsilon^2}{4}.$$

E así,

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta \in \mathbb{N}/p, q > \delta \Rightarrow \|y_p - y_q\|^2 &< 2 \left(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2 \right) - 4\alpha^2 \\ &< 2 \left(\alpha^2 + \frac{\epsilon^2}{4} + \alpha^2 + \frac{\epsilon^2}{4} \right) - 4\alpha^2 = \epsilon^2. \end{aligned}$$

Entón, se $p, q > \delta$ tense que $\|y_p - y_q\| < \epsilon$. Polo tanto $(y_n)_n$ é de Cauchy en L e, así, existe una proxección ortogonal de x sobre L .

(Unicidade). Supoñamos que y_0 e y'_0 son aproximacións óptimas de x relativas a L . En virtude da Identidade do Paralelogramo 1.2 temos que

$$\|y_0 - y'_0\|^2 = 2 \left(\|x - y_0\|^2 + \|x - y'_0\|^2 \right) - 4 \left\| x - \frac{1}{2}(y_0 + y'_0) \right\|^2$$

Como $\|x - y_0\| = \|x - y'_0\| = \alpha$ e ademais $4 \left\| x - \frac{1}{2}(y_0 + y'_0) \right\|^2 \geq 4\alpha^2$, xa que $\frac{1}{2}(y_0 + y'_0) \in L$, tense que

$$\|y_0 - y'_0\|^2 \leq 2(\alpha^2 + \alpha^2) - 4\alpha^2 = 0.$$

E así concluímos que $y_0 = y'_0$, probando a unicidade.

(II) Por contradición, supoñamos falso que $z \perp L$. Así, para cualquera $y_1 \in L$ tal que

$$\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0 \tag{1.11}$$

é obvio que $y_1 \neq 0$ pois se non teríamos que $\langle z, y_1 \rangle = 0$. Ademais, para cualquera escalar γ

$$\begin{aligned} \|z - \gamma y_1\|^2 = \langle z - \gamma y_1, z - \gamma y_1 \rangle &= \langle z, z \rangle - \bar{\gamma} \langle z, y_1 \rangle - \gamma [\langle y_1, z \rangle - \bar{\gamma} \langle y_1, y_1 \rangle] = \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\gamma} \beta - \gamma [\bar{\beta} - \bar{\gamma} \langle y_1, y_1 \rangle]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

A expresión 1.12 é cero se escollemos

$$\bar{\gamma} = \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle}.$$

Polo apartado (I) do teorema temos que $\|z\| = \|x - y_0\| = \alpha$. Sustituíndo isto na ecuación 1.12, nos queda que

$$\|z - \gamma y_1\|^2 = \|z\|^2 - \beta \frac{\bar{\beta}}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} = \alpha^2 - \frac{|\beta|^2}{\langle y_1, y_1 \rangle} < \alpha^2$$

Pero isto non é posible xa que $z - \gamma y_1 = (x - y_0) - \gamma y_1 = x - y_2$ onde $y_2 = y_0 + \gamma y_1 \in L$. Así, $\|z - \gamma y_1\| \geq \alpha$ pola definición de α . Ao non cumprirse 1.11 concluímos a demostración. \square

Definición 1.41. Sexa \mathcal{H} un espazo de Hilbert e L un subespazo vectorial de \mathcal{H} cerrado, convexo e non vacío, chamamos proxección ortogonal sobre L á aplicación $P_L : \mathcal{H} \rightarrow L$ que asocia a cada $x \in \mathbb{H}$ a súa proxección ortogonal sobre L .

1.4.3. O Teorema de Representación de Riesz

Imos a finalizar o primeiro capítulo co estudo de teorema de Representación de Riesz. Este importante teorema foi orixinalmente demostrado por D. Hilbert (1862-1943), Fréchet (1878-1973) e F.Riesz (1880-1956). Na década de 1920, os esforzos destes tres matemáticos culminaron coa publicación das súas respectivas demostracións do teorema.

O teorema de Representación de Riesz establece que todo elemento do espazo dual dun espazo de Hilbert pode ser representado de xeito único por un elemento do propio espazo de Hilbert. Sen embargo, antes de adentrarnos na demostración, é necesario verificar un resultado preliminar. Ao final desta sección proporcionaremos un importante resultado relativo aos espazos de Hilbert.

Definición 1.42. (Suma directa). Consideremos un espazo vectorial \mathbb{V} . Entón dícese que dito espazo vectorial é suma directa de dous subespazos Y e Z de \mathbb{V} , e escríbese

$$\mathbb{V} = Y \oplus Z$$

se cada elemento $x \in \mathbb{V}$ ten unha representación única do seguinte xeito:

$$x = y + z \text{ con } y \in Y, z \in Z.$$

Neste caso, chamamos a Z complementario alxeбраico de Y en \mathbb{V} e viceversa. O para Y, Z é chamado par complementario de subespazos de \mathbb{V} .

Para o noso traballo, interésanos o caso particular para espazos de Hilbert no que representamos o espazo \mathcal{H} como unha suma directa dun subespazo pechado Y . Dito subespazo é o complementario ortogonal

$$Y^\perp = \{z \in \mathcal{H} \mid z \perp Y\}.$$

Teorema 1.43. (*Teorema da suma directa*). Consideremos \mathcal{H} un espazo de Hilbert e Y un subespazo pechado calquera do espazo \mathcal{H} . Entón cúmprese que

$$\mathcal{H} = Y \oplus Z$$

con $Z = Y^\perp$.

Demostración. Como \mathcal{H} é completo e Y é un subespazo pechado, entón Y é completo. Ademais Y é convexo. Polo Teorema 1,40 da Proxección Ortogonal temos que para cada $x \in \mathcal{H}$ existe un $y \in Y$ tal que

$$x = y + z \tag{1.13}$$

onde $z \in Z = Y^\perp$. Para probar a unicidade, asumimos que

$$x = y + z = y_1 + z_1 \tag{1.14}$$

onde $y, y_1 \in Y$ e $z, z_1 \in Z$. Entón $y - y_1 = z_1 - z$. Como $y - y_1 \in Y$ e $z_1 - z \in Z = Y^\perp$, tense que $y - y_1 \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, o cal implica que $y = y_1$ e así $z = z_1$. \square

Teorema 1.44. (*Teorema de Representación de Riesz*). Cada funcional acotado $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ sobre un espazo de Hilbert \mathcal{H} pode ser representado como un produto interior do seguinte xeito

$$f(x) = \langle x, z \rangle, x \in \mathcal{H} \tag{1.15}$$

onde z é dependente de f , está determinado de maneira única por f e ten norma

$$\|z\| = \|f\|. \tag{1.16}$$

Demostración. Para comprender mellor a demostración de este teorema imos dividila en tres partes:

- (1) f ten representación única como $f(x) = \langle x, z \rangle$.
- (2) z en $f(x) = \langle x, z \rangle$ é único.
- (3) A norma de z es $\|z\| = \|f\|$.

(1) Se $f = 0$, entón $z = 0$ e tense de maneira trivial que

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, 0 \rangle = 0 \\ \|f\| &= \|z\| = 0 \end{aligned}$$

cumpríndose así as ecuacións 1.15 y 1.16.

Supoñamos entón que $f \neq 0$. En primeiro lugar temos que $z \neq 0$ pois de non acontecer isto atoparíamonos no caso anterior no que $f = 0$. En segundo lugar, se $\langle x, z \rangle = 0$ para todo x , teríamos que $f(x) = 0$, é dicir, sería o espazo nulo $N(f)$ de f . Así $z \perp N(f)$. Isto suxire

considerar $N(f)$ e o seu complementario ortogonal $N(f)^\perp$.

$N(f)$ é un espazo vectorial e é cerrado pola continuidade de f . Ademais como $f \neq 0$, existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $f(x) \neq 0$. Así $N(f) \neq \mathcal{H}$ e polo Teorema 1,43 da Suma Directa se conclúese que $N(f) \neq \emptyset$. Deste xeito $N(f)^\perp$ contén un z_0 e compoñemos o conxunto

$$v = \{v_0 \in \mathcal{H} \mid v_0 = f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \in N(f)^\perp \text{ e } x \in \mathcal{H}\}.$$

Aplicando f a v_0 temos

$$\begin{aligned} f(v_0) &= f(f(x)z_0 - f(z_0)x) \\ &= f(f(x)z_0) - f(f(z_0)x) \\ &= f(x)f(z_0) - f(z_0)f(x) = 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que $v_0 \in N(f)$. Do feito de que $z_0 \in N(f)^\perp$, tense que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_0, z_0 \rangle = \langle f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= \langle f(x)z_0, z_0 \rangle - \langle f(z_0)x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\langle z_0, z_0 \rangle - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \\ &= f(x)\|z_0\|^2 - f(z_0)\langle x, z_0 \rangle. \end{aligned}$$

Ademais $\|z_0\|^2 \neq 0$ e polo tanto da ecuación anterior obtemos que

$$\begin{aligned} f(x)\|z_0\|^2 &= f(z_0)\langle x, z_0 \rangle \\ f(x) &= \frac{f(z_0)}{\|z_0\|^2} \langle x, z_0 \rangle \\ f(x) &= \langle x, \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0 \rangle \end{aligned}$$

Así, se escollemos $z = \frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2} z_0$, conclúese que

$$f(x) = \langle x, z \rangle.$$

Como a elección de x fixémosla de maneira arbitraria, a primeira parte da demostración queda probada.

(2) Vexamos agora que z é único. Supoñamos entón que para todo $x \in \mathcal{H}$, existen $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ tales que

$$f(x) = \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle.$$

Entón

$$\langle x, z_1 \rangle - \langle x, z_2 \rangle = \langle x, z_1 - z_2 \rangle = 0 \forall x \in \mathcal{H}.$$

Escollendo $x = z_1 - z_2$ deste xeito, tense que

$$\langle z_1 - z_2, z_1 - z_2 \rangle = \|z_1 - z_2\|^2 = 0.$$

Desta maneira, $z_1 - z_2 = 0$, e así $z_1 = z_2$, é dicir, que o elemento z é único.

(3) Para rematar, vexamos que $\|z\| = \|f\|$. Sexa $f \neq 0$, entón $z \neq 0$. Se consideramos $x = z$ na ecuación $f(x) = \langle x, z \rangle$ probada na primeira parte e usamos a hipótese de que f é acotado, obtemos que

$$\|z\|^2 = \langle z, z \rangle = f(z) \leq \|f\| \|z\|.$$

Dividindo por $\|z\|$ na ecuación anterior (o cal é posible xa que $\|z\| \neq 0$) y obtemos que

$$\|f\| \geq \|z\|.$$

Para a outra desigualdade, facendo uso da ecuación $f(x) = \langle x, z \rangle$ e a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|f(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \|z\|.$$

Aplicando para rematar o supremo na circunferencia de radio un e centro cero, concluimos que

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, z \rangle| \leq \|z\|$$

e así xuntando as dúas desigualdades demóstrase que $\|f\| = \|z\|$. □

O feito de que o Teorema 1,44 de Riesz verifíquese para calquera espazo de Hilbert \mathcal{H} , permítenos identificar \mathcal{H} con \mathcal{H}^* .

Concretamente, tense que a aplicación $\Phi_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ definida por

$$\Phi_{\mathcal{H}}(h) = \langle \cdot, h \rangle, \forall h \in \mathcal{H}$$

é un isomorfismo isométrico, é dicir, é lineal, bixectiva e verifica que

$$\|\Phi_{\mathcal{H}}(h)\| = \|h\| \quad \forall h \in \mathcal{H}.$$

En particular, tanto $\Phi_{\mathcal{H}}$ como $\Phi_{\mathcal{H}}^{-1}$ son continuas. Isto axudaranos para cerrar o primeiro capítulo demostrando o feito de que todo espazo de Hilbert é reflexivo.

Teorema 1.45. *Todo espazo de Hilbert \mathcal{H} é reflexivo.*

Demostración. Para facer máis doada a demostración ímola dividir en dúas partes:

(1) O dual dun espazo de Hilbert é un espazo de Hilbert.

(2) Aplicamos o teorema de Riesz sobre \mathcal{H} e sobre o seu espazo dual \mathcal{H}^* .

(1) Sexa \mathcal{H} un espazo de Hilbert, vexamos que que cumpre que o seu espazo dual \mathcal{H}^* é tamén un espazo de Hilbert co produto interior dado por $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}^*} = f(\Phi_{\mathcal{H}}^{-1}g)$ para todo $f, g \in \mathcal{H}^*$. Sean $f, g \in \mathcal{H}^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$(I) \langle f + \alpha g, h \rangle_{H^*} = (f + \alpha g)(\Phi_H^{-1}h) = f(\Phi_H^{-1}h) + \alpha(g(\Phi_H^{-1}h)) = \langle f, h \rangle_{H^*} + \alpha \langle g, h \rangle_{H^*}.$$

$$(II) \text{ Por definición de } \Phi_H, \text{ temos que } f = \langle \cdot, \Phi_H^{-1}f \rangle, \text{ polo que } \langle f, g \rangle_{H^*} = f(\Phi_H^{-1}g) = \langle \Phi_H^{-1}g, \Phi_H^{-1}f \rangle = \langle \Phi_H^{-1}f, \Phi_H^{-1}g \rangle = \langle g, f \rangle_{H^*}.$$

$$(III) \langle f, f \rangle_{H^*} = \langle \Phi_H^{-1}f, \Phi_H^{-1}f \rangle \geq 0.$$

$$(IV) \langle \Phi_H^{-1}f, \Phi_H^{-1}f \rangle = 0 \text{ se e só se } \Phi_H^{-1}f = 0. \text{ Como } \Phi_H^{-1} \text{ é bixectiva, tense que } \Phi_H^{-1}f = 0 \text{ se e só se } f = 0.$$

(2) Temos que Φ_H é un isomorfismo isométrico. Como na primeira parte xa vimos que H^* é tamén un espazo de Hilbert, atopámonos en condicións de aplicar o Teorema 1,44 de Representación de Riesz ao dual H^* e así Φ_{H^*} é tamén un isomorfismo isométrico. Deste xeito, temos que $\Phi_{H^*} \circ \Phi_H$ é un isomorfismo isométrico entre os espazos H e H^{**} que coincide ademais coa inmersión canónica. Tense entón por definición tal e como queríamos comprobar que todo espazo de Hilbert H é reflexivo. \square

Capítulo 2

O Teorema de Lax-Milgram

O segundo capítulo do noso traballo dedicarémolo ao estudo do Teorema de Lax-Milgram. Dito teorema recibe este nome en honor aos matemáticos Peter Lax y Arthur Milgram que o demostraron por primeira vez no año 1954. Aínda que ao principio foi introducido coma un lema, máis tarde déuselle a consideración de teorema debido a su gran importancia tanto na Análise Funcional coma no estudio das ecuacións en derivadas parciais.

No primeiro capítulo proporcionáronse as ferramentas necesarias para a análise do mesmo. Veremos dúas posibles demostracións deste importante resultado co obxectivo de proporcionar distintos enfoques do mesmo:

-A primeira das demostracións, realizarémola la haremos apoiándonos fuertemente no Teorema de Representación de Riesz presentado no anterior capítulo.

-A segunda das demostracións levaráse a cabo facendo uso do Teorema de Hanah-Banach que probaremos previamente na segunda sección deste capítulo.

2.1. Primeira demostración

Nesta primeira sección do capítulo , imos enunciar por primeira vez o resultado central de estudo deste traballo, o Teorema de Lax Milgram.

Para esta demostración apoiarémonos nas demostracións que podemos atopar en [1] y [2].

Teorema 2.1. *(Teorema de Lax-Milgram).* *Sexa \mathcal{H} un espazo de Hilbert e sexa*

$$B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

unha función tal que cumpre as seguintes propiedades:

(1) $B(x, y)$ é unha forma bilineal

(2) B é acotada, é dicir existe unha constante c tal que

$$|B(x, y)| \leq c\|x\|\|y\| \forall x, y \in \mathcal{H} \quad (2.1)$$

(3) B é fortemente coerciva, é dicir, existe unha constante positiva δ tal que

$$B(x, x) \geq \delta\|x\|^2 \forall x \in \mathcal{H} \quad (2.2)$$

Entón para cada funcional acotado $F \in \mathcal{H}^*$, temos que existe un único vector $y_0 \in \mathcal{H}$ dependente de F e F pode representarse do seguinte xeito:

$$F(x) = B(x, y_0). \quad (2.3)$$

Demostración. Para facer máis doado o entendemento da demostración, imos dividila en catro partes:

(1) Primeiro construímos un operador T tal que sexa lineal e acotado.

(2) En segundo lugar vexamos que $R(T)$ é un subespazo pechado.

(3) Vexamos tamén que se cumpre que $R(T) = \mathcal{H}$.

(4) Comprobamos para rematar que $F(x) = B(x, y_0)$.

(1) Fixando o elemento $y_1 \in \mathcal{H}$, temos a aplicación

$$B_{y_1} = B(x, y_1) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dita aplicación B_{y_1} é lineal pois, facendo uso da hipótese de que $B(x, y)$ é unha forma bilineal, temos que para $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ verifícase que

$$B_{y_1}(\alpha x_1 + \beta x_2) = B(\alpha x_1 + \beta x_2, y_1) = \alpha B(x_1, y_1) + \beta B(x_2, y_1) = \alpha B_{y_1}(x_1) + \beta B_{y_1}(x_2).$$

Ademais, dado que B é acotada 2.1, tense que

$$\|B_{y_1}\| = \|B(x, y_1)\| \leq c\|x\|\|y_1\| = d\|x\|$$

con $d = c\|y_1\|$.

Desta maneira, B_{y_1} é un funcional lineal acotado e polo tanto polo Teorema 1,44 de Representación de Riesz existe un único $z \in \mathcal{H}$ dependente de B_{y_1} e tal que

$$B_{y_1} = B(x, y_1) = \langle x, z \rangle \forall x \in \mathcal{H}. \quad (2.4)$$

Como a elección de z depende do funcional B_{y_1} e cada funcional B_{y_1} depende da elección do y_1 podemos definir o seguinte operador

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ y &\rightarrow Ty = z \end{aligned}$$

Vexamos entón que o operador elixido é lineal e acotado. En efecto tense a linealidade pois para $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle x, T(\alpha y_1 + \beta y_2) \rangle &= B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2) \\ &= \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle \\ &= \langle x, \alpha T y_1 + \beta T y_2 \rangle \end{aligned}$$

xa que

$$\begin{aligned} B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow B(x, y) = \langle x, T y \rangle \end{aligned}$$

Ademais polo feito de que B é acotada 2.1 temos que

$$\begin{aligned} \|T y\|^2 &= \langle T y, T y \rangle = B(T y, y) \leq c \|T y\| \|y\| \\ \|T y\|^2 - c \|T y\| \|y\| &\leq 0 \\ \|T y\| (\|T y\| - c \|y\|) &\leq 0. \end{aligned}$$

A desigualdade anterior cúmprese se e só se $\|T y\| - c \|y\| \leq 0$, polo que dedúcese que $\|T y\| \leq c \|y\|$. Deste xeito queda demostrado que o operador T é lineal e acotado.

(2) Vexamos agora que o subespazo $R(T)$ é cerrado. Consideremos $x = y \neq 0$. Empregando o Teorema 1,44 de Riesz temos que

$$B(y, y) = \langle y, z \rangle.$$

Facendo uso entón da hipótese de coercitividade forte de B2.2 e aplicando a desigualdade de Schwarz tense que existe unha constante $\delta > 0$ tal que

$$\delta \|y\|^2 \leq B(y, y) = \langle y, z \rangle \leq |\langle y, z \rangle| \leq \|y\| \|z\|. \quad (2.5)$$

Dividindo entre $\|y\|$ a ámbolos lados da desigualdade (xa que $\|y\| \neq 0$), obtense que $\delta \|y\| \leq \|z\| = \|T y\|$. Por outro lado, usando a desigualdade anterior, se $y \in N(T)$

$$T y = 0 \iff \|T y\| = 0 \iff \|z\| = 0 \iff \delta \|y\| = 0 \iff \|y\| = 0.$$

Desta maneira $N(T) = \{0\}$ e polo tanto o operador T é inxectivo.

Supoñamos entón que a sucesión $\{z_n\}$ é de Cauchy en $R(T)$ e que $z_n \rightarrow z \in \mathcal{H}$. Acabamos de ver que T é inxectivo, polo que

$$\exists ! \{y_n\} \text{ tal que } z_n = T y_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entón vemos que

$$\|z_n - z_m\| = \|Ty_n - Ty_m\| = \|T(y_n - y_m)\| \geq \delta \|y_n - y_m\|. \quad (2.6)$$

Pero supuxemos que $\{z_n\}$ é de Cauchy, polo que

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|z_n - z_m\| = 0.$$

Logo, facendo uso da desigualdade 2.6, a sucesión $\{y_n\}$ tamén é de Cauchy. Aínda máis, por ser \mathcal{H} un espazo de Hilbert, $\{y_n\}$ é converxente coa norma usual a un elemento digamos $y \in \mathcal{H}$.

Para rematar utilizamos a continuidade de T para ver que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = T(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = Ty.$$

É dicir, $z = Ty \in R(T)$, o que proba que o subespazo $R(T)$ é completo.

Así, ao ser un subespazo completo nun espazo métrico completo tense que $R(T)$ é un subespazo cerrado.

(3) Vexamos en terceiro lugar que se cumpre a igualdade $R(T) = \mathcal{H}$.

Supoñamos, por redución ao absurdo, que $R(T) \neq \mathcal{H}$, isto é, que $R(T) \subset \mathcal{H}$. No apartado (2) probamos que o subespazo $R(T)$ é cerrado, polo que podemos usar o Teorema 1,43 da Suma Directa e representar \mathcal{H} como

$$\mathcal{H} = R(T) \oplus R(T)^\perp.$$

Deste modo, para $w_0 \neq 0$, $w_0 \in R(T)^\perp$, pola desigualdade 2.5 existe unha constante $\delta > 0$ tal que

$$\delta \|w_0\| \leq B(w_0, w_0) = \langle w_0, Tw_0 \rangle = 0.$$

A única opción viable é que $\|w_0\| = 0 \Leftrightarrow w = 0$ que resulta unha contradicción. Queda probado entón que $R(T) = \mathcal{H}$. Así, o operador T é bixectivo e pódese concluír a unicidade da solución para a ecuación $Ty = z$.

(4) Para rematar, aplicando o Teorema 1,44 de Riesz para calquera funcional F en \mathcal{H} lineal e acotado, tense que

$$F(x) = \langle x, z_F \rangle$$

para un único $z_F \in \mathcal{H}$. No apartado (3) viramos que só é posible encontrar un $y_0 \in \mathcal{H}$ satisfacendo a ecuación $Ty_0 = z_F$. Tendo isto en conta e regresando á ecuación 2.4 temos finalmente que

$$F(x) = \langle x, z_F \rangle = \langle x, Ty_0 \rangle = B(x, y_0)$$

tal e como queriamos demostrar. □

Poderíamos dicir entón que o Teorema 2,1 de Lax-Milgram non fai máis que xeneralizar o Teorema 1,44 de Riesz.

Mentres que no Teorema 1,44 a representación dun funcional lineal e acotado queda restrinxida ao produto interior, no Teorema 2,1 exténdese a calquera forma bilineal, acotada e fortemente coercitiva. En efecto, o produto interior por definición é simétrico. Ademais cumpre a hipótese de coercitividade pois

$$|\langle x, x \rangle| = \|x\|^2,$$

é dicir, é fortemente coercivo con constante $\delta = 1$.

Por último, está claro que tamén cumpre a hipótese de acotamento pois pola desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Por outro lado no Teorema de Representación de Riesz tense a igualdade entre $\|F\|$ e $\|y_0\|$. No caso do teorema de Lax-Milgram, a relación entre $\|F\|$ e $\|y_0\|$ ven dada polo seguinte teorema.

Teorema 2.2. *(da Dependencia Continua). Baixo as hipóteses do Teorema 2,1 de Lax-Milgram, se y_0 é o elemento asociado ao funcional F e δ é a constante coerciva tense a seguinte relación*

$$\|y_0\| \leq \frac{1}{\delta} \|F\|.$$

Demostración. Consideremos o operador T que empregamos na demostración do Teorema 2,1. Víramos que este operador é continuo e bixectivo, polo que a solución da ecuación $Ty = z_F$ é única. Agora, como B é fortemente coerciva existe unha constante $\delta > 0$ tal que

$$\delta \|y_0\| \leq B(y_0, y_0) \leq \langle y_0, Ty_0 \rangle \leq |\langle y_0, Ty_0 \rangle| \leq \|y_0\| \|Ty_0\| = \|y_0\| \|z_F\|. \quad (2.7)$$

Facendo uso do Teorema 1,44, temos que

$$\|F\| = \|z_F\|$$

e substituíndo esta igualdade en 2.7 obtemos, tal e como queríamos demostrar, que

$$\|y_0\| \leq \frac{1}{\delta} \|F\|.$$

□

Observación 2.3. A conclusión máis importante que nos proporciona o Teorema 2,2 da Dependencia Continua é una acotación para o elemento y_0 do cual non tiñamos ningunha información. Isto quere dicir que o elemento y_0 depende continuamente do funcional F .

2.2. Segunda demostración

Pecharemos o capítulo cunha demostración alternativa do Teorema de Lax-Milgram. Neste caso, e co obxectivo de presentar outro enfoque para o resultado central, apoiáremos no Teorema de Hahn-Banach, ou máis concretamente nun resultado consecuencia deste.

O teorema de Hahn-Banach debe o seu nome a dous matemáticos. O matemático austríaco Hans Hahn formulou por primeira vez unha versión preliminar do teorema. Máis tarde, en 1930, o polaco Stefan Banach presentou un enfoque máis completo do mesmo. Aínda que ambos traballaron de xeito independente, as súas contribucións resultaron esenciais para o seu desenvolvemento e difusión.

Este resultado establece condicións para a extensión de funcionais lineais e acotados definidos en subespazos vectoriais a todo o espazo vectorial que os contén.

Antes de aventurarnos na demostración, será necesaria a definición de varios conceptos, así como o enunciado e demostración dos resultados que sustentan a proba.

Para esta segunda demostración apoiáremos nas demostracións recollidas en [1] e [2].

Definición 2.4. (Orde parcial). Unha relación \preceq nun conxunto M dicese que é unha orde parcial se cumpre as seguintes tres condicións:

- (I) Reflexiva: $a \preceq a$, $\forall a \in M$.
- (II) Antisimétrica: $a \preceq b \wedge b \preceq a \implies a = b$, $\forall a, b \in M$.
- (III) Transitiva: $a \preceq b \wedge b \preceq c \implies a \preceq c$, $\forall a, b, c \in M$.

Do conxunto (M, \preceq) dicese que é parcialmente ordenado.

Se un conxunto parcialmente ordenado cumpre ademais a propiedade de que dados dous elementos calesquera entón sempre están relacionados, o conxunto ten orde total e chámase conxunto totalmente ordenado ou cadena.

Lema 2.5. (*Lema de Zorn*). Se $M \neq \emptyset$ é un conxunto parcialmente ordenado e cada cadena $C \subset M$ ten unha cota superior, entón M ten un elemento maximal.

Definición 2.6. (Función sublineal). Sexa X un espazo vectorial sobre un campo \mathbb{K} ($=\mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) e consideremos unha función $p : X \rightarrow \mathbb{K}$. Entón dita función dicese que é unha función sublineal (o funcional sublineal no caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) se cumpre as seguintes dúas propiedades:

- (I) Homoxeneidade positiva: $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $\forall x \in X$.
- (II) Subaditividade: $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in X$.

Esta función tamén recibe o nome de cuasi-seminorma ou funcional de Banach.

Definición 2.7. (Seminorma). Sexa X un espazo vectorial sobre un campo $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, unha función de valor real $p : X \rightarrow \mathbb{K}$ chámase función seminorma se cumpre as seguintes propiedades:

(I) Homoxeneidade absoluta: $p(\alpha x) = |\alpha|p(x) \forall x \in X$.

(II) Subaditividade: $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \forall x, y \in X$.

Estas condicións implican que $p(0) = 0$ e que cada seminorma p tamén ten a seguinte propiedade:

(III) Non negatividade: $p(x) \geq 0, \forall x \in X$.

Teorema 2.8. (Teorema de Hahn-Banach). Sexa X un espazo vectorial e M un subespazo vectorial do espazo X . Ademais consideremos $p(x)$ unha función sublineal e f un funcional real lineal definido no subespacio M e tal que

$$f(x) \leq p(x) \forall x \in M. \quad (2.8)$$

Entón baixo estas hipóteses demostrase a existencia dun funcional lineal \bar{f} definido en todo X e tal que

(i) \bar{f} é unha extensión de f , é dicir, $\bar{f}(x) = f(x) \forall x \in M$

(ii) $\bar{f}(x) \leq p(x) \forall x \in X$

Demostración. Para que a demostración resulte máis doada imos dividila en dúas partes:

(1) Demostración da existencia dun elemento maximal \bar{f} no conxunto de tódalas extensións lineais g de f tales que $g(x) \leq p(x)$ sobre $D(g)$.

(2) Proba da igualdade $D(\bar{f}) = X$

(1) Imos a comezar considerando o conxunto A de tódalas extensións lineais g de f tales que

$$g(x) \leq p(x) \forall x \in D(g).$$

É claro que A é non baleiro xa que $f \in A$, pois f é extensión de si mesma. Damos a este conxunto un orde parcial definindo a relación \preceq , onde

$$g \preceq h, \text{ se } h \text{ é unha extensión de } g.$$

Por definición de extensión $D(g) \subset D(h)$ e $g(x) = h(x)$ para cada $x \in D(g)$.

Vexamos agora que calquera cadena C ten unha cota superior. Nunha cadena arbitraria $C \subset E$ definimos \bar{g} como

$$\bar{g}(x) = g(x), \forall x \in D(g), g \in C$$

onde o seu dominio o definimos como

$$D(\bar{g}) = \bigcup_{g \in C} D(g)$$

que é un espazo vectorial dado o feito de que C é una cadena. Polo feito de que C é unha cadena, cúmprese que para $g_1, g_2 \in C$ se ten que $g_1 \preceq g_2$ o $g_2 \preceq g_1$.

Así pola definición que demos de \bar{g} e o seu dominio cúmprese que \bar{g} é cota superior de C . Deste modo polo Lema 2,5 de Zorn concluímos que A ten un elemento maximal \bar{f} tal que

$$\bar{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(\bar{f}).$$

(2) Vexamos agora a igualdade $D(\bar{f}) = X$. Para iso supoñemos por redución ao absurdo que $D(\bar{f}) \neq X$, é dicir, que $D(\bar{f}) \subset X$.

Deste xeito, existe un $y_0 \in X - D(\bar{f})$ cumprindo que $y_0 \neq 0$ (pois $0 \in D(\bar{f})$).

Consideremos agora o subespazo

$$Y = \{y = d + \alpha y_0 \mid d \in D(\bar{f}), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

A representación anterior de y é única.

En efecto, se $y = d + \alpha y_0 = d' + \beta y_0$, ao ter que $y_0 \neq 0$ obtense que $d - d' = (\beta - \alpha)y_0$ o que implica que $d - d' = 0$ e $\beta - \alpha = 0$, y obtendo desta maneira a unicidade. Agora definimos para calquera constante real c o funcional g sobre Y do seguinte xeito

$$g(x) := g(d + \alpha y_0) = \bar{f}(d) + \alpha c.$$

Este funcional g é lineal en X . Por definición de Y , tense que $D(\bar{f}) \subset D(g)$ polo que g é unha extensión de \bar{f} e $\bar{f}(x) \leq g(x)$. Vexamos agora que

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(g). \quad (2.9)$$

O feito de que $x = d + \alpha y_0$ é equivalente a que $g(d + \alpha y_0) = \bar{f}(d) + \alpha c \leq p(d + \alpha y_0)$, o cal tradúcese nas seguintes dúas condicións:

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(\frac{d}{\alpha}\right) + c &\leq p\left(\frac{d}{\alpha} + y_0\right) \quad \text{para } \alpha > 0 \\ \bar{f}\left(\frac{d}{(-\alpha)}\right) - c &\leq p\left(\frac{d}{(-\alpha)} - y_0\right) \quad \text{para } \alpha < 0 \end{aligned}$$

Sexan $d' = \frac{d}{(-\alpha)}$ e $d'' = \frac{d}{\alpha}$, para que se cumpran as dúas condicións é necesario tomar c tal que

$$\bar{f}(d') - p(d' - y_0) \leq c \leq p(d'' + y_0) - \bar{f}(d'') \quad \forall d', d'' \in D(\bar{f}).$$

Tal escolla é posible xa que como

$$\bar{f}(d') + \bar{f}(d'') = \bar{f}(d' + d'') \leq p(d' + d'') = p(d' - y_0 + d'' + y_0) \leq p(d' - y_0) + p(d'' + y_0)$$

basta tomar c entre os valores

$$\sup_{d' \in D(\bar{f})} [\bar{f}(d') - p(d' - y_0)] \quad \text{e} \quad \inf_{d'' \in D(\bar{f})} [p(d'' + y_0) - \bar{f}(d'')].$$

Como comprobamos 2.9, cúmprese que $g \in A$, é dicir, que g é unha extensión de f tal que $g(x) \leq p(x) \forall x \in D(g)$. Pero g é unha extensión de \bar{f} e no apartado anterior víramos que \bar{f} é o elemento maximal do conxunto A polo que chegamos a unha contradicción. Así $D(\bar{f}) = X$ tal e como queríamos comprobar. \square

Presentaremos a continuación unha xeneralización do Teorema 2,8 de Hahn-Banach para espazos vectoriais complexos.

Teorema 2.9. (Teorema de Hahn-Banach Xeneralizado). *Cónsidérese X un espazo vectorial (real ou complexo) e sexa M un subespazo vectorial de dito espazo X . Ademais sea $p(x)$ unha seminorma e f un funcional lineal complexo definido no subespazo M e tal que cumpre que*

$$|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in M. \quad (2.10)$$

Entón, baixo estas hipóteses temos a existencia dun funcional lineal \bar{f} definido en todo X e tal que:

(i) \bar{f} é unha extensión de f , é dicir, $\bar{f}(x) = f(x) \quad \forall x \in M$.

(ii) $|\bar{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$.

Demostración. (1) Caso espazo vectorial real: Se X é un espazo vectorial real, o feito de que $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in M$ implica que $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M$. Entón polo Teorema 2,8 de Hahn-Banach, existe unha extensión lineal \bar{f} de f que cumpre

$$\bar{f}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Por outro lado, como p é unha seminorma definida en X

$$-\bar{f}(x) = \bar{f}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x)$$

$$\bar{f}(x) \geq -p(x)$$

e deste xeito $|\bar{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$.

(2) Caso espazo vectorial complexo: Imos dividir a demostración para o caso complexo en tres partes:

(2.1) Vexamos en primeiro lugar que \bar{f} é unha extensión de f dende M ata X .

(2.2) Comprobamos que \bar{f} é un funcional lineal no espazo vectorial complexo X .

(2.3) A extensión \bar{f} cumpre que $|\bar{f}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$.

(2.1) En primeiro lugar, notemos que un espazo vectorial complexo é tamén un espazo vectorial real restrinxindo a multiplicación por escalar aos números reais. Temos que f é un funcional lineal sobre M por hipótese. Se expresamos $f(x)$ como a suma das funcións $g(x)$ e $ih(x)$, onde

$g(x)$ é a parte real e $h(x)$ a parte imaxinaria de f , tense que ditas funcións g e f son funcións reais definidas en M .

Agora ben, a parte real dun número imaxinario non pode exceder o seu valor absoluto, logo

$$g(x) \leq |f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in M.$$

Así, podemos aplicar o Teorema de Hahn-Banach e existe \bar{g} extensión lineal de g a X tal que

$$\bar{g}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Por outro lado, para a parte imaxinaria $h(x)$, do feito de que $f(x) = g(x) + ih(x)$ obtemos a ecuación

$$g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = i(g(x) + ih(x)) = -h(x) + ig(x) \quad \forall x \in M.$$

Se na anterior ecuación collemos e igualamos as partes reais, quedaríanos que

$$h(x) = -ig(x) \quad \forall x \in M.$$

Polo tanto, escollendo

$$\bar{f}(x) := \bar{g}(x) - i\bar{g}(ix) \tag{2.11}$$

teríase que \bar{f} é unha extensión de f , pois se $x \in M$

$$\bar{f}(x) = \bar{g}(x) - i\bar{g}(ix) = g(x) - ig(ix) = g(x) + ih(x) = f(x).$$

(2.2) Claramente o funcional complexo \bar{f} é lineal pois

$$\bar{f}(ix) = \bar{g}(ix) - i\bar{g}(-x) = i\bar{g}(x) + \bar{g}(ix) = i[\bar{g}(x) - i\bar{g}(ix)] = i\bar{f}(x).$$

(2.3) Finalmente, usando a forma polar para números complexos, escribimos \bar{f} como $\bar{f}(x) = |\bar{f}|e^{i\theta}$ de maneira que

$$|\bar{f}| = \bar{f}(x)e^{-i\theta} = \bar{f}(e^{-i\theta}x).$$

Como $|\bar{f}(x)|$ é real, usando a hipótese de que p é unha seminorma (propiedade de homoxeneidade absoluta) concluímos que

$$|\bar{f}(x)| = \bar{f}(e^{-i\theta}x) = \bar{g}(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

□

Definición 2.10. (Conxunto equilibrado). Dícese que un conxunto S é equilibrado se cumpre que $aS \subseteq S$ para tódolos escalares a tal que $|a| \leq 1$ onde:

$$aS := \{as \mid s \in S\}.$$

Deste xeito, o conxunto mantense “equilibrado” en relación á multiplicación por escalares no intervalo $[-1, 1]$.

Definición 2.11. (Conxunto absorbente). Considérese un espazo vectorial sobre un campo \mathbb{K} . Entón dicese que un subconxunto S do espazo X é absorbente se para cada vector $x \in X$ existe un número real $r > 0$ tal que:

$$x \in cS \text{ para calquera } c \in \mathbb{K} \text{ tal que } |c| \geq r. \quad (2.12)$$

É dicir, que escollendo un escalar positivo o suficientemente grande o conxunto S “absorbe” os vectores do espazo vectorial X .

Definición 2.12. (Absolutamente convexo). Sexa X un espazo vectorial sobre \mathbb{K} e coonsidérese un subconxunto S de X . Entón dicese que dito subconxunto S é absolutamente convexo se é convexo e equilibrado.

Definición 2.13. (Convexidade local). Consideremos un espazo vectorial topolóxico. Entón de tal espazo dicese que é localmente convexo se a orixe ten unha base local de conxuntos os cales cumpren que son absorbentes e absolutamente convexos.

Observación 2.14. Nun espazo localmente convexo sempre hai seminormas continuas as cales poden adxudicar valores diferentes a puntos distintos. Isto significa que, se temos dous puntos distintos x_1 e x_2 en X , podemos atopar unha seminorma continua p tal que $p(x_1)$ é distinto de $p(x_2)$.

Esta propiedade de separación de puntos mediante o uso de seminormas continuas é relevante na teoría de espazos localmente convexos, xa que nos permite establecer diferenzas e proporcionar unha noción de distinción entre puntos no espazo.

Definición 2.15. (Funcional de Minkowski). Sexa M un subconxunto convexo, equilibrado e absorbente dun espazo vectorial real ou complexo X . Entón defínese o funcional de Minkowski para o conxunto M como

$$p_M(x) = \inf\{t > 0 \mid \frac{x}{t} \in M, t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.13)$$

Pódese comprobar que:

1. $p_M(x)$ é continuo se e só se M é un entorno da orixe en X .
2. Se $p_M(x)$ é continuo, entón $\text{Int}(M) = \{x \in X \mid p_M(x) < 1\}$ y $\text{Cl}(M) = \{x \in X \mid p_M(x) \leq 1\}$.

Teorema 2.16. (*Existencia de funcional lineal continuo non trivial*). Sexa X un espazo vectorial topolóxico real ou complexo, x_0 un punto de X e $p(x)$ unha seminorma continua en X . Entón existe un funcional lineal continuo F sobre X tal que

$$F(x_0) = p(x_0) \text{ e } |F(x)| \leq p(x) \text{ en } X.$$

Demostración. Consideremos M o conxunto de tódolos elementos αx_0 e definamos f en M por $f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. Deste xeito f é lineal en M , pois para $\alpha_1 x_0, \alpha_2 x_0 \in M$ e $\beta \in (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ tense

que

$$\begin{aligned} f(\beta(\alpha_1 x_0) + \alpha_2 x_0) &= f((\beta\alpha_1 + \alpha_2)x_0) \\ &= (\beta\alpha_1 + \alpha_2)p(x_0) \\ &= \beta\alpha_1 p(x_0) + \alpha_2 p(x_0) \\ &= \beta f(\alpha_1 x_0) + f(\alpha_2 x_0) \end{aligned}$$

e ademais

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha p(x_0)| = p(\alpha x_0).$$

Deste modo atopámonos baixo as hipóteses do Teorema 2,9 de Hahn-Banach Xeneralizado e así existe unha extensión F de f tal que $|F(x)| \leq p(x) \in X$.

O funcional F é continuo con respecto a $p(x)$ no punto $x = 0$. Deste xeito, por ser F un funcional lineal, o feito de que sexa continuo nun punto implica polo Teorema 1,16 que é acotado, o cal implica á súa vez o feito de que é continuo en todo punto de X . \square

Corolario 2.17. *Sexa X un espazo localmente convexo e considérese $x_0 \neq 0$ un elemento do espazo X . Entón temos que existe un funcional lineal f en X cumprindo que:*

$$f(x_0) \neq 0 \text{ e } |f(x)| \leq p(x) \forall x \in X.$$

Demostración. Da hipótese de que $x_0 \neq 0$ e facendo uso da observación 2.14, tense que existe unha seminorma p en X cumprindo que $p(x_0) \neq 0$. Deste xeito, polo Teorema 2,16, próbase a existencia dun funcional f o cal verifica que $f(x_0) = p(x_0) \neq 0$ e $|f(x)| \leq p(x)$. \square

Teorema 2.18. *(Teorema de Mazur). Nun espazo vectorial real ou complexo X tal que sexa localmente convexo consideremos un subconxunto M pechado, convexo e equilibrado do espazo X . Entón, para cada elemento $x_0 \notin M$, pódese atopar un funcional lineal e continuo f sobre X cumprindo que*

$$f(x_0) > 1 \text{ e } |f(x)| \leq 1 \text{ en } M.$$

Demostración. Por ser M un subconxunto pechado, existe un entorno V da orixe convexo, equilibrado e tal que

$$M \cap (x_0 + V) = \emptyset.$$

Como o entorno V é equilibrado e convexo, tense que

$$(M + \frac{V}{2}) \cap (x_0 + \frac{V}{2}) = \emptyset.$$

Agora ben, o conxunto $(x_0 + \frac{V}{2})$ é un entorno de x_0 e a anterior intersección é baleira entón a clausura U de $(M + \frac{V}{2})$ non contén ao x_0 . O conxunto convexo equilibrado U é un entorno do 0 pois $0 \in M$ e U contén a $\frac{V}{2}$ como subconxunto.

Sexa p_U o funcional de Minkowski de U . Como U é un entorno da orixe, p_U é continuo. Ademais, como U é pechado, $p_U(x_0) > 1$ se $x_0 \notin U$ e $p_U(x) \leq 1$ se $x \in U$. Entón polo Corolario 2,17 existe un funcional lineal continuo f sobre X tal que

$$f(x_0) = p_M(x_0) > 1 \text{ y } |f(x)| \leq p_M(x) \leq 1 \text{ en } X.$$

□

Corolario 2.19. *Sexa X un espazo vectorial localmente convexo e M un subespazo lineal e pechado de X . Entón, para calquera $x_0 \in X - M$, existe un funcional lineal continuo f tal que*

$$f(x_0) > 1 \text{ y } f(x) = 0 \text{ con } x \in M.$$

Demostración. Por hipótese, M é un subconxunto convexo. Ademais por ser subespazo vectorial é equilibrado e herda de X o feito de ser localmente convexo. Entón polo Teorema 2,18 de Mazur existe un funcional f sobre X tal que

$$f(x_0) > 1 \text{ e } |f(x)| < 1 \text{ en } M.$$

Pero $f(M)$ ten que ser $\{0\}$ por ser subespazo propio do campo escalar. Entón $f(x) = 0$ con $x \in M$. □

Teorema 2.20. *(Teorema de Lax-Milgram). Sexa \mathcal{H} un espazo de Hilbert y sexa*

$$B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

unha función cumprindo as seguintes tres propiedades:

(i) $B(x, y)$ é unha forma bilineal.

(ii) A forma B é acotada, é dicir, existe unha constante c tal que

$$|B(x, y)| \leq c \|x\| \|y\| \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (2.14)$$

(iii) A forma B é fortemente coerciva, é dicir, existe unha constante positiva δ tal que

$$B(x, x) \geq \delta \|x\|^2 \forall x \in \mathcal{H}. \quad (2.15)$$

Entón baixo estas hipóteses para calquera funcional acotado $F \in \mathcal{H}^*$, existe un único vector $y_0 \in \mathcal{H}$ dependente de F e F pode representarse como

$$F(x) = B(x, y_0). \quad (2.16)$$

Demostración. Para que a demostración resulte máis doada imos dividila en catro partes:

- (1) Construción dun operador T lineal e acotado.
- (2) Proba de que o subespazo $R(T)$ é pechado.
- (3) Proba da igualdade $R(T) = \mathcal{H}^*$.
- (4) Comprobación da igualdade $F(x) = B(x, y_0)$.

(1) Fixando o elemento $y \in \mathcal{H}$, temos a aplicación

$$B_y = B(\cdot, y) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}.$$

B_y é lineal sobre \mathcal{H} dado que $B(x, y)$ é una forma bilinear, tal e como víramos na primeira demostración. Podemos definir entón o seguinte operador

$$\begin{aligned} T : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H}^* \\ y &\rightarrow Ty = B_y \end{aligned}$$

O operador T é lineal e tamén acotado (por ser lineal e acotado tamén é continuo) polo feito de que B é acotada 2.14 e bilinear (Ver demostración do Teorema 2,1).

(2) Vexamos agora que $R(T)$ é un subespazo pechado en \mathcal{H}^* . Facendo uso do feito de que B é fortemente coerciva 2.15 tense que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\delta \|y\|^2 \leq |B(y, y)| = |Ty(y)| = \|y\| \left| Ty \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right| \leq \|y\| \sup_{\|y\|=1} \{y \in \mathcal{H}\} = \|y\| \|Ty\|. \quad (2.17)$$

Dividindo entre $\|y\|$ a ambos lados da desigualdade obtense que $\delta \|y\| \leq \|Ty\|$. Por outro lado, usando a desigualdade anterior, se $y \in N(T)$

$$Ty = 0 \iff \|Ty\| = 0 \iff \delta \|y\| = 0 \iff \|y\| = 0.$$

Deste xeito $N(T) = \{0\}$ e polo tanto T é inxectivo.

Supoñamos entón que $\{z_n\}$ é unha sucesión de Cauchy en $R(T)$, o rango de T , e que $z_n \rightarrow z \in \mathcal{H}$.

Ao ser T inxectivo, sabemos que

$$\exists ! \{y_n\} \text{ tal que } z_n = Ty_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Entón vese que

$$\|z_n - z_m\| = \|Ty_n - Ty_m\| = \|T(y_n - y_m)\| \geq \delta \|y_n - y_m\|. \quad (2.18)$$

Pero $\{z_n\}$ en particular é de Cauchy, polo que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|z_n - z_m\| = 0$$

logo, pola desigualdade 2.18, a sucesión $\{y_n\}$ tamén é de Cauchy. Aínda máis, como \mathcal{H} é un espazo de Hilbert, a sucesión $\{y_n\}$ é convergente coa norma usual a un elemento digamos $y \in \mathcal{H}$. Para rematar utilizamos a continuidade de T para ver que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = T(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = Ty.$$

É dicir, $z = Ty \in R(T)$, o que demostra que $R(T)$ é completo. Así, ao ser un subespazo completo nun espazo completo tense que $R(T)$ é un subespazo pechado.

(3) Imos comprobar agora que $R(T) = \mathcal{H}^*$.

Supoñamos, por redución ao absurdo, que $R(T) \neq \mathcal{H}^*$, é dicir, que $R(T) \subset \mathcal{H}^*$. Entón existe $\bar{F} \in \mathcal{H}^*$ tal que $\bar{F} \notin R(T)$ ($\bar{F} \neq 0$).

Polo Corolario 2,19 do Teorema de Mazur, existe $z \in \mathcal{H}^{**}$ tal que

$$z(\bar{F}) > 1 \text{ e } z(F) = 0 \text{ para todo } F \in R(T).$$

Como \mathcal{H} é un espazo de Hilbert, é reflexivo e podemos identificar a $z \in \mathcal{H}^{**}$ con $x \in \mathcal{H}$, polo que

$$\bar{F}(x) > 1 \text{ e } B(x, y) = Ty(x) = 0 \text{ para todo } y \in \mathcal{H}.$$

Pola coercitividade forte de B , $B(x, y) = 0 \geq \delta \|x\|^2$. Así, $x = 0$ e como \bar{F} é lineal, entón $\bar{F}(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ (o cal contradice que $\bar{F} \neq 0$).

Logo tense que $R(T) = \mathcal{H}^*$.

(4) O apartado anterior implica que para cada $F \in \mathcal{H}^*$ existe un único $y_0 \in \mathcal{H}$ tal que $F = Ty_0$, é dicir

$$F(x) = Ty_0(x) = B(x, y_0) \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Ademais, dado que o operador T é inxectivo, o elemento y_0 é único, tal e como queríamos demostrar. \square

O feito de ter demostrado o teorema dende dous enfoques diferentes proporcionounos unha mellor comprensión do teorema, así coma unha visión máis completa e profunda do resultado central do traballo.

Na primeira demostración, a perspectiva elexida permítenos comprender a maneira na que se establece a equivalencia entre a existencia e unicidade de solucións para unha ecuación variacional. Por outro lado, o segundo enfoque fundaméntase na extensión de funcionais lineais definidos en subespazos.

Ademais este estudo de demostración de dous xeitos distintos permítenos ver a estreita relación entre os tres teoremas, todos grandes pilares da análise funcional. Por exemplo ao facer uso na segunda demostración da propiedade de reflexividade para espazos de Hilbert, usamos implícitamente o Teorema de Riesz, pois para a proba de tal propiedade fixemos uso do teorema.

Capítulo 3

Unha xeneralización do teorema de Lax-Milgram

Neste capítulo, adentrarémonos no estudo dunha xeneralización do Teorema de Lax-Milgram coñecida como o Teorema de Stampacchia.

3.1. O Teorema de Stampacchia

Este teorema debe o seu nome ao matemático Guido Stampacchia (1922-1978). Este matemático italiano nado na cidade de Nápoles, que gradouse no ano 1944 pola Universidade de Nápoles é coñecido polas súas contribucións á teoría de ecuacións diferenciais elípticas e ao cálculo variacional. Publicou o teorema do que falamos neste capítulo no ano 1966, o que serviulle para ser elixido presidente da Unión Matemática Italiana o ano seguinte.

Para a proba do Teorema de Stampacchia apoiarémonos nas demostracións recollidas en [3], [2] e [5].

3.1.1. O Teorema do Punto Fixo de Banach

Para poder levar a cabo a demostración do teorema protagonista deste terceiro capítulo, imos presentar en primeiro lugar o teorema do punto fixo. Recibe o seu nome en honor ao polaco Stefan Banach, quen o formulou e probou na década dos anos 1920. A demostración de dito teorema está recollida en [7].

Definición 3.1. (Punto fixo). Un punto fixo dunha aplicación $T : X \rightarrow X$ é un $x \in X$ tal que

$$Tx = x \quad (3.1)$$

é dicir, a súa imaxen é el mesmo.

Definición 3.2. (Contracción). Imos considerar un espazo métrico (X, d) e unha aplicación $T : X \rightarrow X$. Entón dícese que dita aplicación é unha contracción se cumpre que

$$\exists \alpha \in (0, 1) \text{ tal que } d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in X. \quad (3.2)$$

Teorema 3.3. (*Teorema do punto fixo de Banach*). Sexa (X, d) un espazo métrico completo e sexa $T : X \rightarrow X$ unha contracción. Entón baixo estas hipóteses cúmprese que T ten un único punto fixo.

Demostración. Imos dividir a proba en dúas partes: existencia e unicidade.

(1) Para comezar, tomamos $x \in X$ e definimos a sucesión

$$x_0 = x, x_n = T(x_{n-1}) \quad \forall n \geq 1.$$

O noso obxectivo é ver que dita sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1}$ cumpre que é de Cauchy. Por hipótese, temos que T é contractiva, polo que existe unha constante $\alpha \in (0, 1)$ tal que:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$$

Agora, facendo uso da desigualdade triangular, podemos obter a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \\ &\quad + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) \\ &\quad \dots + d(x_{n+1}, x_n). \end{aligned}$$

Deste xeito, tendo en conta as desigualdades 3.1.1 e 3.1.1, quedanos que

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \alpha^{n+k-1} d(x_1, x_0) + \alpha^{n+k-2} d(x_1, x_0) + \dots + \alpha^n d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).$$

É dicir, para $m \geq 0$

$$\sup d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).$$

A parte derecha tende a cero cando n tende a infinito xa que $\alpha \in (0, 1)$ e $d(x_1, x_0)$ é fixa. Deste xeito, a sucesión escollida é de Cauchy. Como o espazo métrico (X, d) por hipótese é completo tense que a sucesión é converxente.

Supoñamos agora que ese límite é x e vexamos que é un punto fixo de T . Pola continuidade de T ,

$$T(x) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x))\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^{n+1}(x)) = x.$$

(2) Por último, supoñamos a existencia de dous puntos fixos de X e distintos x_1 e x_2 . Entón, se $T(x_2) = x_2$ e $T(x_1) = x_1$, temos que $d(T(x_2), T(x_1)) = d(x_2, x_1)$ o cal contradice a hipótese de que T é una contracción. \square

O Teorema do Punto Fixo de Banach, o cal e coñécese tamén co nome de Teorema da Contracción ten moi diversas aplicacións nas matemáticas e na ciencia.

Unha das aplicacións máis coñecidas e salientables é a da proba do Teorema de Picard-Lindelöf, o cal proporciona para unha ecuación diferencial e ordinaria a existencia e unicidade de solución. Outra importante aplicación, neste caso das matemáticas aplicadas á economía, recae na proba da existencia de equilibrios de Nash. Como vimos na asignatura de último curso Teoría de Xogos, a existencia destes equilibrios en certos xogos e modelos matemáticos é de grande importancia para a toma de decisións estratéxicas e o análise do comportamento de posibles competidores.

3.1.2. Demostración do Teorema de Stampacchia

Previamente á demostración do Teorema de Stampacchia procederemos ao enunciado e proba dun teorema que será necesario para o mesmo.

Observación 3.4. Recordemos do primeir capítulo que sexa K un subconxunto cerrado e convexo dun espazo de Hilbert \mathcal{H} , entón a proxección de x sobre K é o elemento y_0 que cumpre que

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$$

e o escribimos como $y_0 = P_K(x)$.

Teorema 3.5. *Sexa \mathcal{H} un espazo de Hilbert e considérese $K \subset \mathcal{H}$ un conxunto pechado, convexo e non baleiro. Entón $y_0 = P_K(x)$ é a proxección de x en K se e só se,*

$$\langle x - y_0, y_1 - y_0 \rangle \leq 0, \forall y_1 \in K.$$

Demostración. Vexamos a primeira implicación. Por hipótese, como y_0 é a proxección de x en K , cumpre por definición que $\|x - y_0\| = \min_{y \in K} \|x - y\|$. Sexa $y_2 \in K$, temos pola convexidade que

$$y_1 = (1 - t)y_0 + ty_2 \in K, \forall t \in [0, 1]$$

e polo tanto

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y_1\| \leq \|x - [(1 - t)y_0 + ty_2]\| = \|(x - y_0) - t(y_2 - y_0)\|.$$

Deste modo

$$\|x - y_0\|^2 \leq \|x - y_0\|^2 - 2t\langle x - y_0, y_2 - y_0 \rangle + t^2\|y_2 - y_0\|^2, \forall t \in [0, 1].$$

Da ecuación anterior, pasando certos termos dun lado a outro, quedanos que

$$2\langle x - y_0, y_2 - y_0 \rangle \leq t \|y_2 - y_0\|^2, \forall t \in [0, 1].$$

Así, cando $t \rightarrow 0$ temos que

$$\langle x - y_0, y_2 - y_0 \rangle \leq 0.$$

Para a outra implicación, vexamos que y_0 cumpre ser a proxección. Por hipótese tense que y_0 satisfai a desigualdade $\langle x - y_0, y_1 - y_0 \rangle \leq 0$. Entón obtemos que

$$\begin{aligned} |y_0 - x|^2 - |y_1 - x|^2 &= \langle y_0 - x, y_0 - x \rangle - \langle y_1 - x, y_1 - x \rangle \\ &= \langle y_0 - x, y_0 - x - (y_1 - x) \rangle \\ &= \langle y_0 - x, y_0 - y_1 \rangle = \langle y_0 - x, y_0 \rangle - \langle y_0 - x, y_1 \rangle \\ &= \langle y_0, y_0 \rangle - \langle x, y_0 \rangle - \langle y_0, y_1 \rangle + \langle x, y_1 \rangle \\ &= -\langle x, y_0 \rangle - \langle y_0, y_1 \rangle + \langle x, y_1 \rangle \\ &= \langle x, -y_0 \rangle + \langle x, y_1 \rangle - \langle y_0, y_1 \rangle \\ &= \langle x, y_0 - y_1 \rangle + \langle x, y_1 \rangle - \langle y_0, y_1 \rangle \\ &= 2\langle x - y_0, y_1 - y_0 \rangle - \langle y_0 - y_1, y_0 - y_1 \rangle \\ &= 2\langle x - y_0, y_1 - y_0 \rangle - |y_0 - y_1|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Pola desigualdade obterior, tense que

$$|y_0 - x|^2 \leq |y_1 - x|^2 \text{ para calquera } y_1 \in K$$

polo cal podemos deducir que y_0 é a proxección de x sobre K . □

Corolario 3.6. *Sexa \mathcal{H} un espazo de Hilbert e consideremos K un subconxunto pechado, convexo e non baleiro do espazo \mathcal{H} . Entón baixo estas hipóteses tense que a proxección P_K é un operador non expansivo, é dicir,*

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

A propiedade de non expansividade é útil na análise e na optimización de algoritmos, xa que garantiza que a aplicación repetida dun operador non expansivo non aumenta a distancia entre os puntos, o cal en certos casos pode conducir á converxencia.

Teorema 3.7. *(Teorema de Stampacchia). Supoñamos \mathcal{H} un espazo de Hilbert e un subconxunto $K \subset \mathcal{H}$ de dito espazo tal que cumpre que é pechado, convexo e non baleiro. Entón, sexa $B(x, y)$ unha forma sesquilineal, coerciva e acotada, o teorema establece que para calquera $f \in \mathcal{H}^*$ tense a existencia dun único $y_0 \in K$ cumprindo a desigualdade:*

$$B(x - y_0, y_0) \geq f(x - y_0), \forall x \in K. \tag{3.3}$$

Demostración. Imos dividir a proba en dúas partes:

1. Atopar o elemento y_0 que cumpre a desigualdade 3.3.
2. Ver a súa unicidade.

(1) En primeiro lugar, atopámonos baixo as hipóteses do teorema Teorema 1,44 de Riesz. Ao aplicalo a f temos a existenciase dun único z cumprindo a igualdade

$$f(x) = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Doutra banda, fixando o elemento $y \in \mathcal{H}$ tense que a aplicación

$$\begin{aligned} \phi_y : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \phi_y(x) = B(x, y) \end{aligned}$$

é lineal e continuo. Imos aplicar novamente o Teorema de Riesz pero neste caso a ϕ_y . Logo atopamos un único elemento $z_\phi \in \mathcal{H}$ (ao cal chamaremos A_y xa que ϕ depende de y) que cumpre que

$$B(x, y) = \phi_y(x) = \langle x, A_y \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Claramente A é un operador satisfacendo que:

- É lineal: Como $\langle x, A(y_1 + y_2) \rangle = B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2) = \langle x, Ay_1 \rangle + \langle x, Ay_2 \rangle = \langle x, Ay_1 + Ay_2 \rangle$, temos que:

$$A(y_1 + y_2) = Ay_1 + Ay_2. \quad (3.4)$$

- É acotado: Como $B(Ay, y) = \langle Ay, Ay \rangle = \|Ay\|^2$ y $|B(Ay, y)| \leq k\|Ay\|\|y\|$, temos que:

$$\|Ay\| \leq k\|y\|. \quad (3.5)$$

- Cumpre esta propiedade derivada da coercitividade de B :

$$\langle y, Ay \rangle = B(y, y) \geq \delta\|y\|^2, \quad \forall y \in \mathcal{H}. \quad (3.6)$$

O noso problema 3.3 é entón atopar un único $y_0 \in K$ tal que para $\rho > 0$

$$\begin{aligned} \rho B(x, y) = \rho \langle x - y_0, Ay_0 \rangle &\geq \rho f(x - y_0) \quad \forall x \in K \\ 0 &\geq \rho f(x - y_0) - \rho \langle x - y_0, Ay_0 \rangle \quad \forall x \in K \\ 0 &\geq \rho \langle f, x - y_0 \rangle - \rho \langle Ay_0, x - y_0 \rangle \quad \forall x \in K \\ 0 &\geq \langle \rho f - \rho Ay_0 + y_0 - y_0, x - y_0 \rangle \quad \forall x \in K \end{aligned}$$

Polo Teorema 3,5,

$$y_0 = P_K(\rho f - \rho A y_0 + y_0).$$

(2) Deste xeito, para cada $y \in K$, definimos $T(y) = P_K(\rho f - \rho A y_0 + y)$.

O problema réducese entón a ver que y_0 é o único punto fixo, e en consecuencia a única solución ao noso problema.

Temos entón que escoller correctamente ρ para que T sexa unha contracción. Polo Corolario 3,6 tense que P_K cumpre que

$$\|P_K(x_1) - P_K(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$$

de onde obtemos facendo uso de 3.5 e 3.6 que:

$$\begin{aligned} \|T(y_1) - T(y_2)\|^2 &\leq \|(\rho f - \rho A y_1 + y_1) - (\rho f - \rho A y_2 + y_2)\|^2 \\ &= \|(y_1 - y_2) - \rho(A y_1 - A y_2)\|^2 \\ &= \|(y_1 - y_2) - \rho(A(y_1 - y_2))\|^2 \\ &= \langle (y_1 - y_2) - \rho(A(y_1 - y_2)), (y_1 - y_2) - \rho(A(y_1 - y_2)) \rangle \\ &= \|y_1 - y_2\|^2 - 2\rho \langle A(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \rangle + \rho^2 \|A(y_1 - y_2)\|^2 \\ &\leq \|y_1 - y_2\|^2 - 2\rho\delta \|y_1 - y_2\|^2 + \rho^2 k^2 \|y_1 - y_2\|^2 \\ &= \|y_1 - y_2\| (1 - 2\rho\delta + \rho^2 k^2). \end{aligned}$$

Escollendo entón $\rho > 0$ tal que $1 - 2\rho\delta + \rho^2 k^2 < 1$, é dicir, $0 < \rho < \frac{2\delta}{k^2}$, tense que T ten un único punto fixo polo Teorema do Punto Fixo de Banach. Así, y_0 é único e cumpre 3.3. \square

Tras a proba, queda claro que o Teorema 3,7 é un caso máis xeral do Teorema de Lax-Milgram. Efectivamente no Teorema 2,1 o subconxunto K tómase tal que $K = \mathcal{H}$.

Capítulo 4

Aplicacións do Teorema de Lax-Milgram

Neste último capítulo mostraremos algunhas aplicacións do Teorema de Lax-Milgram no ámbito das ecuacións en derivadas parciais e os espazos de Sobolev.

Para isto, faremos uso do que se coñece como o Método Variacional. Para este capítulo apoiáremonos en [3], [1], [6] e [5].

4.1. Teoría previa sobre espazos de Sobolev

Para poder levar a cabo a solución de problemas mediante o Método Variacional é imprescindible un estudo teórico previo sobre os espazos de Sobolev.

Os espazos de Sobolev que imos introducir máis adiante, reciben o seu nome grazas ao matemático Sergei Sobolev (1908-1989). Este matemático ruso graduado pola antes chamada Universidade de Leningrado introduciu ditos espazos na década dos anos 1930, os cales deron lugar a unha nova e completa área da análise funcional.

Nestes espazos de Sobolev, a idea central xira en torno á noción de formulación débil.

Para entender o concepto imos considerar o seguinte exemplo. Se, por exemplo temos un espazo V e dous elementos de dito espazo digamos $u, v \in V$ e un operador S , entón poderíamos reformular a ecuación

$$Su = v$$

de maneira débil do seguinte xeito:

$$\langle Su, w \rangle = \langle v, w \rangle, \forall w \in V.$$

O método variacional, apóiase nesta teoría ca finalidade de resolver problemas de EDPs. En troques de buscar solucións fortes ou clásicas (as cales requiren derivadas fortes e condicións de regularidade estritas), a finalidade é atopar unha solución débil. Desta maneira, ao ampliar a clase de funcións admitidas, resulta posible abordar problemas nos que as solucións clásicas ou ben non existen ou ben non teñen a regularidade necesaria. Toda esta teoría xunto co Teorema de Lax-Milgram vai a servirnos de ferramenta de cara á resolución de problemas de ecuacións diferenciais.

4.1.1. Os espazos de Sobolev

Nesta sección imos entón a introducir distintos conceptos e resultados sobre espazos de Sobolev.

Definición 4.1. (Espazo $L^p(\Omega)$). Consideremos un conxunto medible Ω equipado cunha medida μ . Entón temos que o espazo $L^p(\Omega)$ é o espazo de tódalas funcións medibles $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tales que a seguinte norma sexa finita:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

onde p é un número positivo. A norma $\|f\|_p$ coñécese como a norma L^p da función f e se é finita entón a función f dicese integrable en L^p .

Estes espazos teñen importantes propiedades como:

- O espazo $L^p(\Omega)$ é completo, o que quere dicir que calquera sucesión converxente de funcións no espazo, ten unha función límite que está tamén no espazo $L^p(\Omega)$.
- Se p é igual a dous, entón o espazo é de Hilbert co produto interior $\langle f, g \rangle = \left(\int_{\Omega} f(x)g(x)dx \right)$.

Definición 4.2. Sexa Ω un conxunto aberto en \mathbb{R}^n . Entón unha función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dicese que é localmente integrable se para calquera subconxunto compacto $K \in \Omega$ temos que existe unha constante $M > 0$ tal que:

$$\int_K |f(x)|dx < M. \tag{4.1}$$

Así, o espazo $L^1_{loc}(\Omega)$ é o conxunto de tódalas funcións localmente integrables en Ω .

Definición 4.3. (Multi-índice). Un multiíndice é unha n -dupla ordenada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de enteiros non negativos α_i . A cada multi-índice α asóciase o operador diferencial D^α , o cal defínese do seguinte xeito:

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}.$$

A orde de dito operador é

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Definición 4.4. (Funcións de soporte compacto). Dícese que unha función f ten soporte compacto se a clausura do conxunto onde a función non é nula cumpre que é un conxunto pechado e limitado, é dicir

$$K = \overline{\{x | f(x) \neq 0\}} \quad (4.2)$$

é un conxunto compacto.

Notación 4.5. Chamamos $D(\Omega) = C_0^\infty$ ao espazo das funcións de proba (ou test) de soporte compacto definidas no conxunto Ω . Estas funcións de proba son infinitamente diferenciables e empréganse para definir e traballar coas distribucións.

Definición 4.6. (Distribución). Se consideramos agora o espazo $D(\Omega)$, unha distribución en Ω é un funcional lineal e continuo en dito espazo.

Definición 4.7. (Derivada distribucional). Sexa u unha distribución en Ω e α un multi-índice. A α -ésima derivada distribucional de u (a cal denotamos por $D^\alpha u$) defínese do seguinte xeito:

$$\langle D^\alpha u, v \rangle := (-1)^\alpha \langle u, D^\alpha v \rangle, \forall v \in D(\Omega).$$

Definición 4.8. (Derivada débil). Sexa $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dícese que $u' \in L^1_{loc}(\Omega)$ é a derivada débil de u se cúmprese que

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u'(x) v(x) dx.$$

O espazo de Sobolev $W^{m,p}$

Definición 4.9. (Espazo de Sobolev $W^{m,p}$). Consideremos un conxunto Ω aberto en \mathbb{R}^n . Entón o espazo $W^{m,p}$ é o composto por tódalas funcións u definidas no conxunto Ω tales que as súas derivadas débiles ata orde m pertencen a L^p . Isto quere dicir que para multiíndice α onde $|\alpha| < m$ e sexa $p \geq 1$ un número real, tense que:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \subset L^p(\Omega)\}.$$

O espazo $W^{m,p}$ é un espazo de Banach coa norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha(u)\|_p.$$

Observación 4.10. No caso no que escollamos $p = 2$, o espazo $W^{m,2}(\Omega)$ denótase como $H^m(\Omega)$ e é un espazo de Hilbert co produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

O espazo de Sobolev $W_0^{m,p}$

Definición 4.11. (Espazo de Sobolev $W_0^{m,p}$). O espazo $W_0^{m,p}$ é un subespazo do espazo $W^{m,p}$ no que tódalas funcións teñen soporte compacto en Ω . Isto tradúcese nas dúas seguintes condicións:

1. Tódalas derivadas parciais de orde m de f son integrables no senso de L^p en Ω .
2. Existe un conxunto $K \in \Omega$ pechado e limitado tal que a función anúlase fóra del.

Observación 4.12. Para o caso $W_0^{1,2}$ temos un espazo de Hilbert e o denotamos como $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Teorema 4.13. (*Desigualdade de Poincaré*). Sexa Ω un conxunto aberto e limitado e un número real $p \geq 1$. Entón temos a existencia dunha constante C (dependente de Ω e p) a cal cumpre que:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Pódese consultar a proba en [3] ou [8]. □

Corolario 4.14. Sexa Ω un subconxunto aberto de \mathbb{R}^n . Entón temos a existencia dunha constante $C_1 > 0$ que cumpre a seguinte desigualdade:

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Facendo uso da Desigualdade de Poincaré para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ obtemos

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^p(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^2 \leq (1 + C) \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^2 = C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^2.$$

□

4.1.2. A formulación variacional

Co obxectivo de introducir o comprender de maneira máis doada a formulación variacional, imos a realizar unha serie de exemplos.

Exemplo 1

Considérese o seguinte problema:

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t) & \text{en } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (\text{P1})$$

onde as funcións f e c son funcións continuas en $[a, b]$. Imos supoñer ademais que a función c é estritamente positiva no intervalo $[a, b]$.

Definición 4.15. Unha **solución clásica** (ou **solución forte**) do problema P1 é unha función de $C^2([a, b])$ tal que $u(a) = u(b) = 0$ e $-u''(t) + c(t)u(t) = f(t) \forall t \in [a, b]$.

Se multiplicamos a ecuación $-u''(t) + c(t)u(t) = f(t)$ por unha función test v tal que $v \in D((a, b))$ e $v(a) = v(b) = 0$, temos que

$$-u''(t)v(t) + c(t)u(t)v(t) = f(t)v(t).$$

Se agora integramos no intervalo $[a, b]$ obtemos que

$$\int_a^b -u''(t)v(t)dt + \int_a^b c(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt.$$

Integramos por partes o primeiro termo e tense que

$$-u'(b)v(b) + u'(a)v(a) + \int_a^b u'(t)v'(t)dt + \int_a^b c(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt.$$

Pero $v(a) = v(b) = 0$ xa que $v \in D((a, b))$ e énton quédanos que

$$\int_a^b u'(t)v'(t)dt + \int_a^b c(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt.$$

Cada termo da ecuación ten en efecto sentido cando $v \in H^1((a, b))$. Ademais, sendo $D((a, b))$ denso en $H^1((a, b))$, a ecuación verificase para todo $v \in H^1((a, b))$.

Podemos entón definir de novo o problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Atopar } u \in H_0^1((a, b)) \text{ tal que} \\ \int_a^b u'(t)v'(t)dt + \int_a^b c(t)u(t)v(t)dt = \int_a^b f(t)v(t)dt \forall v \in H_0^1((a, b)) \end{array} \right. \quad (\text{Q1})$$

Este novo problema recibe o nome de **formulación variacional** (ou **formulación débil**) do problema P1. Ademais toda solución do problema Q1 chámase solución débil.

Exemplo 2

Sexa Ω un aberto limitado de \mathbb{R}^n . Quremos resolver agora o problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla u + u = f \quad \text{en } \Omega \\ \partial_n u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (\text{P2})$$

Definición 4.16. Unha **solución clásica** (ou **solución forte**) do problema P2 é unha función de $C^2(\overline{\Omega})$ tal que $-\nabla u + u = 0$ en Ω e $\partial_n u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Vemos que isto impón que f sexa $C^0(\overline{\Omega})$. Toda solución clásica verifica entón que:

$$\int_{\Omega} -\nabla u v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Se integramos agora por partes o primeiro termo, tendo en conta que $\partial_n u = 0$ sobre $\partial\Omega$, quedáanos que:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v.$$

Pero, $\overline{C^1(\Omega)} = H^1(\Omega)$ e podemos definir entón o novo problema como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Atopar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (\text{Q2})$$

Esta é a formulación variacional do problema P2. Decatámonos tamén que dito problema está definido cando $f \in L^2(\Omega)$.

Formulación xeral

Os exemplos anteriores mostran que, dun xeito xeral, a formulación variacional será obtida facendo o produto escalar $L^2(\Omega)$ da ecuación cunha función v a cal pertence a un espazo \mathcal{V} (o cal temos que precisar) e integrando por partes os termos de orde máis elevada tendo en conta as condicións na fronteira do problema. Chegamos entón a unha formulación do tipo

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (\text{PV})$$

onde $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ é unha forma bilineal e F é unha forma sobre \mathcal{V} .

4.2. Resolución de problemas aplicando o teorema de Lax-Milgram

Na anterior sección, levamos a cabo a presentación da teoría necesaria para a resolución de distintos problemas relativos ás ecuacións diferenciais. É aquí onde entra en xogo o teorema de Lax-Milgram sobre o que está centrado este traballo, pois veremos que tras realizar a formulación variacional do problema, poderemos probar a existencia e unicidade da solución débil grazas a el.

4.2.1. Resolución de problemas de ecuacións diferenciais ordinarias

Vexamos entón en primeiro lugar a resolución de varios problemas de ecuacións diferenciais ordinarias facendo uso do Método Variacional.

Problema de Dirichlet homoxéneo

Comezamos cun problema de tipo Dirichlet homoxéneo. Dito problema refírese a unha ecuación diferencial e unhas condicións de fronteira. Ditas condicións esixen que a solución anúlase na fronteira do dominio.

Sexa entón o problema:

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) & \text{en } I = (0, 1), f \in L^2(I), \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

1. **Levamos a cabo a formulación variacional do problema:** Unha solución clásica de 4.3 é unha función $u \in C^2((0, 1))$ que cumpre 4.3 no senso clásico. Se multiplicamos a nosa ecuación $-u''(t) + u(t) = f(t)$ por unha función $v \in H_0^1(I)$ (a escolla deste espazo débese a que a nosa solución ten que anularse na fronteira) temos que

$$-u''(t)v(t) + u(t)v(t) = f(t)v(t).$$

Integrando agora no intervalo $[0, 1]$ obtemos que

$$\int_0^1 -u''(t)v(t)dt + \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

A continuación, integrando por partes o primeiro termo tense que

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt + \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,$$

o cal equivale a que

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)dt + \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt, \forall v \in H_0^1(I). \quad (4.4)$$

2. **Pobamos a existencia e unicidade da solución:** Vexamos agora que a solución débil existe e ademais é única.

Proposición 4.17. *Escollemos o espazo de Hilbert $H_0^1(I)$. Entón sexa f un funcional $f \in L^2(I)$ e B unha forma bilineal simétrica cumprindo que:*

$$B(u, v) = \int_I u'(t)v'(t)dt + \int_I u(t)v(t)dt = \langle u, v \rangle.$$

Baixo estas hipóteses tense a existencia dunha única solución débil $u \in H_0^1(I)$ ao problema 4.3.

Demostración. A forma bilinear B é trivialmente continua e coerciva por tratarse do produto interno. Ademais, o funcional

$$F : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R} \\ v \rightarrow \int_I f v$$

é continuo, pois:

$$|F(v)| = \left| \int_I f v \right| = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq C \|v\|, \forall v \in H_0^1(I).$$

Deste xeito, atopámonos en condicións de aplicar o Teorema de Lax-Milgram e obtemos que u existe e ademais é única. \square

O problema de Dirichlet non homoxéneo

Consideremos agora o problema de Dirichlet non homoxéneo, no que a diferenza do homoxéneo as condicións de fronteira esixen que a solución na fronteira sexa non nula e igual a un valor coñecido:

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) & \text{en } I = (0, 1), f \in L^2(I), \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.5)$$

Neste problema basta escoller u_0 verificando que $u_0(0) = \alpha$ y $u_0(1) = \beta$ e tomar $\tilde{u} = u - u_0$ satisfacendo o problema

$$\begin{cases} -\tilde{u}''(t) + \tilde{u}(t) = f(t) + u_0'' - u_0 & \text{en } I = (0, 1), f \in L^2(I), \\ \tilde{u}(0) = 0, \tilde{u}(1) = 0 & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.6)$$

Deste xeito reformulamos o problema noutro que se resolve de maneira análoga ao problema 4.3.

Problema de Neumann homoxéneo

En terceiro lugar temos o problema de tipo Neumann non homoxéneo. O obxectivo é atopar unha solución a cal satisfai ademais da ecuación diferencial a condición de fronteira. Tal condición require que a derivada da solución sexa cero na fronteira. Sexa entón:

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) & \text{en } I = (0, 1), f \in L^2(I), \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

1. **Levamos a cabo primeiro a formulación variacional do problema:** Unha solución clásica do problema 4.7 é unha función $u \in C^2((0, 1))$ a cal cumpre 4.7 no sentido clásico. Se multiplicamos a nosa ecuación $-u''(t) + u(t) = f(t)$ por unha función $v \in H^1(I)$ (a escolla deste espazo débese a que os valores de u na fronteira son descoñecidos) temos que

$$-u''(t)v(t) + u(t)v(t) = f(t)v(t).$$

Integrando, obtemos que

$$\int_0^1 -u''(t)v(t)dt + \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt.$$

A continuación, integrando por partes o primeiro termo tense que

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(t)v'(t)dt + \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt,$$

o cal equivale a que

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)dt + \int_0^1 u(t)v(t)dt = \int_0^1 f(t)v(t)dt, \forall v \in H^1(I). \quad (4.8)$$

2. **Probamos a existencia e unicidade da solución:** Vexamos agora que a solución débil existe e ademais é única.

Proposición 4.18. *Consideremos o espazo de Hilbert $H^1(I)$, un funcional $f \in L^2(I)$ e a forma bilineal simétrica*

$$B(u, v) = \int_I u'(t)v'(t)dt + \int_I u(t)v(t)dt = \langle u, v \rangle.$$

Entón tense que existe unha única solución débil $u \in H^1(I)$ ao problema 4.7.

Demostración. A forma bilineal B é trivialmente continua e coerciva por tratarse do produto interno. Ademais, o funcional

$$\begin{aligned} F : H^1(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \int_I f v \end{aligned}$$

é continuo, pois:

$$|F(v)| = \left| \int_I f v \right| = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)} \|v\|_{L^2(I)} \leq C \|v\|, \forall v \in H^1(I).$$

Deste xeito, atopámonos en condicións de aplicar o Teorema de Lax-Milgram e obtemos que u existe e ademais é única. \square

Problema de Neumann non homoxéneo

Consideremos por último nesta sección o problema de Neumann non homoxéneo:

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = f(t) & \text{en } I = (0, 1), f \in L^2(I), \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.9)$$

Tendo en conta o problema anterior, se escollemos o espazo $H^1(I)$ e aplicamos o teorema de Lax-Milgram á mesma forma bilineal

$$B(u, v) = \int_I u'(t)v'(t)dt + \int_I u(t)v(t)dt = \langle u, v \rangle,$$

mais elixindo neste caso o funcional continuo

$$\begin{aligned} F : H^1(I) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1) \end{aligned}$$

o problema queda resolto.

4.2.2. Resolución de problemas de ecuacións en derivadas parciais

O teorema de Lax-Milgram emprégase para garantir a existencia e unicidade de solución de ecuacións en derivadas parciais.

Consideremos entón a ecuación de Poisson, xa que esta ecuación de gran importancia en áreas como a Inxeniería ou a Física, foi a que levou ao matemático Sergei Sobolev a definir o espazo $H^1(\Omega)$.

Ecuación de Poisson con condicións de fronteira de Dirichlet

Consideremos entón o problema:

$$\begin{cases} \nabla u = -f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (4.10)$$

Transformamos o noso problema nunho variacional.

Multiplicando por unha función test $v \in H^1(I)$, temos que

$$-v\nabla u = fv.$$

Integrando agora obtemos que

$$-\int_{\Omega} v \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

A Primeira Identidade de Green afirma que:

$$\int_{\Omega} (v \nabla u + \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma,$$

pero como $v = 0$ sobre Γ , o lado dereito da igualdade anúlase e quedáanos que

$$\int_{\Omega} (v \nabla u + \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = 0.$$

Deste xeito, obtemos finalmente que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = -\int_{\Omega} v \nabla u d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

Consideremos a forma

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

e o funcional

$$F(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega.$$

O noso problema redúcese entón a atopar $v \in H_0^1(\Omega)$ a cal cumpre que $B(u, v) = F(v) \forall v \in H_0^1(\Omega)$. Para funcións $v \in H_0^1(\Omega)$ que se anulan na fronteira tense que $\|v\|_{L^2(\Gamma)} = 0$ e pola Desigualdade de Poincaré temos

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C_1^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = C_1^2 B(v, v).$$

Así, B é fortemente coerciva con constante $\delta = C^{-1/2}$. Ademais, o funcional F é continuo xa que

$$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Podemos concluir, polo teorema de Lax-Milgram, que o problema 4.10 ten solución única.

Bibliografía

- [1] Álvarez David. (2011). *El Teorema de Lax-Milgram, Generalizaciones y Aplicaciones*, BSc Thesis. Instituto Tecnológico Autónomo de México. (people.csail.mit.edu/davidam/docs/BS_Thesis.pdf).
- [2] Gil Pinilla, E.A. (2016). *El Teorema de Lax-Milgram y una aplicación a las ecuaciones diferenciales parciales*, Proyecto curricular de matemáticas. Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá. (<https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/5580>).
- [3] Brezis, H. (1984). *Análisis funcional: Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid.
- [4] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, Nueva York.
- [5] López Pérez, M. (2017). *El Teorema de Lax-Milgram: origen, generalizaciones y aplicaciones*, Universidad de Granada. (<https://www.ugr.es/~acanada/docencia/matematicas/TFG%20-%20Lax-Milgram-DEFINITIVO-13junio2017.pdf>)
- [6] Román Alcaide, Y. (2020). *Introducción al Método Variacional: Aplicación a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Universidad de Almería.
- [7] García, D. (2020). *Teoremas del punto fijo y aplicaciones*, Universitat de Barcelona.
- [8] Evans, L.C. (1998). *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society.
- [9] Cárdenas Penas, L.A. (2017). *El Teorema de Lax-Milgram y su aplicación al método de elementos finitos*, Concurso de monografías de la Unión Matemática Argentina, Santa Fe. (<http://www.union-matematica.org.ar/v2/wp-content/uploads/2019/11/Czenky-Villagra.pdf>).
- [10] Correa Morales, R. (2019). *Teorema de Representación de Riesz en $C_c(R^n, R^m)$* , Centro de Investigación en Matemáticas A.C, Guanajuato, México. (<https://cimat.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1008/985/1/TE%20710.pdf>).

- [11] Le Van, Tho. (2008). *Un espacio de funciones tipo James*, Universidad de La Habana.
- [12] Reyes, J. (2017). *Operadores lineales no acotados en espacios de Hilbert*, Universidad de La Laguna.