USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Teoremas de Tonelli y Fubini en espacios de medida

Miguel Souto Parrado

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grado

Teoremas de Tonelli y Fubini en espacios de medida

Miguel Souto Parrado

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático
Título: Teoremas de Tonelli y Fubini en espacios de medida
Breve descripción del contenido
Se abordan conceptos sobre espacios de medida, generación de medidas, medida producto y secciones de conjuntos y funciones, además de una demostración detallada de los teoremas de Tonelli y Fubini.
Recomendaciones
Otras observaciones

Índice

Introducción **VIII**

1. Espacios de medida **1**

1.1. Conceptos básicos sobre espacios de medida 1

1.2. Generación de medidas 8

2. Medida producto **17**

3. Teoremas de Fubini y Tonelli **25**

3.1. Teoremas de Tonelli y Fubini en espacios de medida producto arbitrarios 27

3.2. Teoremas de Tonelli y Fubini en $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ 45

Bibliografía **53**

Resumen

Este trabajo se centra en los teoremas de Tonelli y Fubini dentro del contexto de los espacios de medida. Primero, se explican conceptos relacionados con los espacios de medida, cómo se generan las medidas, y la medida producto, que servirán para entender mejor estos teoremas. Luego, se analizan las secciones de conjuntos y funciones, además de algunas definiciones y lemas necesarios para poder presentar una demostración detallada de los teoremas de Tonelli y Fubini en diferentes tipos de espacios de medida. Finalmente, se discute el ejemplo específico de los teoremas en el espacio $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$, mostrando su utilidad en este espacio de medida concreto.

Abstract

This work focuses on Tonelli and Fubini's theorems within the context of measure spaces. First, it explains concepts related to measure spaces, how measures are generated, and the product measure, which will help in better understanding these theorems. Then, it analyzes the sections of sets and functions, along with some necessary definitions and lemmas to provide a detailed proof of Tonelli and Fubini's theorems in different types of measure spaces. Finally, it discusses the specific example of these theorems in the space $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$, demonstrating their utility in this particular measure space.

Introducción

En este trabajo trataremos de explorar en profundidad los teoremas de Tonelli y Fubini precedidos de un breve preámbulo. Comenzaremos explicando el concepto de espacio de medida, para lo que será necesario incluir la definición de medida y de σ-álgebra. Además, se presenta algún ejemplo que facilitará la comprensión de estos conceptos. Este primer capítulo será la base para los siguientes.

Con todo esto ya aclarado, nos centraremos en los espacios de medida producto. En este capítulo, por tanto, definiremos formalmente la medida producto y sus propiedades. Además, será clave para poder extender los teoremas de Tonelli y Fubini.

En el último capítulo, comenzaremos definiendo algún lema necesario para poder enunciar y demostrar los Teoremas de Tonelli y Fubini, como puede ser el principio de Cavalieri, que explica cómo integrando la medida de las secciones de un conjunto, podemos obtener la medida de éste. Posteriormente abordaremos los Teoremas de Tonelli y Fubini en distintos espacios de medida. Primero en espacios de medida producto arbitrarios; después en espacios de medida producto completados y terminaremos abordándolos en un espacio de medida producto completado concreto, el espacio de medida $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$.

Capítulo 1

Espacios de medida

1.1. Conceptos básicos sobre espacios de medida

Se presentan primero los conceptos más basicos de los espacios de medida.

Definición 1.1. Dado un conjunto X no vacio, $\mathcal{A}^* \subset P(X)$ es una σ-algebra si se cumple:

1. $\emptyset$, $X \subset \mathcal{A}^*$.

2. Si $E \in \mathcal{A}^*$, entonces, $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}^*$.

3. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^*$, entonces, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}^*$.

Definición 1.2. Dado un conjunto X y una σ-álgebra en X, al par formado por $(X, \mathcal{A}^*)$ lo llamaremos espacio medible.

En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades de la σ-álgebra de los espacios medibles. Podemos encontrar la demostración de estas propiedades en [4, 1.2.5. Comentarios sobre la definición 1.2.2.]

Proposición 1.3. *Sea $(X, \mathcal{A}^*)$ un espacio medible, entonces:*

1. *Dados E_k, para $k = 1, \dots, n$, un conjunto finito de elementos de la σ-álgebra, se tiene que $\bigcup_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A}^*$.*

2. *Dados E_n, para $n \in \mathbb{N}$, un conjunto de elementos de $\mathcal{A}^*$, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}^*$.*

3. *Dados E_k, para $k = 1, \dots, n$, un conjunto de elementos de $\mathcal{A}^*$, entonces $\bigcap_{k=1}^n E_k \in \mathcal{A}^*$.*

4. *Dados dos elementos $E, F \in \mathcal{A}^*$, se tiene que $E \setminus F \in \mathcal{A}^*$.*

Ahora que tenemos la definición de un espacio medible, veamos un ejemplo para aclararlo.

Ejemplo 1.4. $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ Vamos a considerar el espacio de los números naturales $\mathbb{N}$ y como σ-álgebra, consideramos todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ desde el conjunto vacío $\emptyset$ hasta el conjunto $\mathbb{N}$ mismo. Este conjunto es $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Veamos que la colección $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una σ-álgebra:

Por definición del conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ya tenemos la primera propiedad:

$$\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \quad \text{y} \quad \mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Sabemos que si el conjunto E está en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, también lo estará el complementario por seguir siendo un subconjunto de $\mathbb{N}$:

$$E^c = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Por tanto, solo nos queda ver si es cerrado bajo uniones numerables de subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección numerable de elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, entonces la unión de todos esos conjuntos también pertenece a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ya que esta unión sigue estando contenida en $\mathbb{N}$:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Por lo tanto, el par $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ es un espacio medible donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es su σ-álgebra de todos los subconjuntos.

Podemos ilustrarlo con un ejemplo muy sencillo que facilita ver que esto se cumple para todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$). Supongamos que tenemos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N}$:

$$A = \{1, 3, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6\}$$

que son elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Además, la unión de A y B es $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que claramente es un subconjunto de $\mathbb{N}$, por lo tanto está en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. El complemento de A con respecto a $\mathbb{N}$ es $A^c = \mathbb{N} \setminus A = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$, que también es un subconjunto de $\mathbb{N}$, y por lo tanto está en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

El último elemento necesario para formar un espacio de medida, es precisamente la medida, que requiere la explicación del concepto de recta real extendida antes de ser definida.

Definición 1.5 (Recta real extendida)**.** Denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}$ o, simplemente por $[-\infty, \infty]$, al espacio que se obtiene a partir de la recta real $\mathbb{R}$ añadiendo los elementos $+\infty$ y $-\infty$.

En análisis, a menudo encontramos funciones cuyos límites tienden a infinito, ya sea positivo o negativo. Al extender la recta real para incluir $+\infty$ y $-\infty$, se proporciona un "lugar"bien definido para estos límites. Otra de las razones viene motivada por el hecho de que con frecuencia consideraremos el supremo de un conjunto de números reales, ya que en la recta real si un conjunto de números reales no está acotado superiormente/inferiormente no podemos asignarle un supremo/ínfimo finito y con la recta real extendida podemos definir como $+\infty$ o $-\infty$ el supremo o ínfimo de un conjunto que no esté acotado.

Ya podemos definir una medida:

Definición 1.6. Si $\mathcal{A}^*$ es un σ-álgebra de subconjuntos de un conjunto X, entonces una medida en $\mathcal{A}^*$ es una función μ con imagen en la recta real extendida y definida en $\mathcal{A}^*$ tal que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{A}^*$.

3. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier secuencia de conjuntos disjunta en $\mathcal{A}^*$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Ahora que ya definimos una medida, ya estamos en disposición de definir espacio de medida.

Definición 1.7 (Espacio de Medida)**.** Dada una σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ en X y una medida μ en $\mathcal{A}^*$, diremos que el triple $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ es un espacio de medida.

Veamos algunas de las utilidades de los espacios de medida. Los espacios de medida sirven para definir la integración de funciones, como pueden ser la integración de Lebesgue, empleando el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, definido más adelante tal que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{L}_N, m_N)$, u otros espacios de medida; y aunque no esté directamente relacionado con este trabajo, también sirven para definir y manipular conceptos como la probabilidad, ya que el espacio de medida proporciona una base para definir la probabilidad de que ocurra un suceso. Se considera esta probabilidad como la medida sobre dicho espacio de medida y debe ser no negativa y obviamente la probabilidad o medida total del espacio de la muestra sumar 1.

Un espacio de medida puede ser finito, σ-finito o incluso ninguna de las dos. Definamos los conceptos de espacio de medida finito y σ-finito:

Definición 1.8 (Espacio de medida finito)**.** Decimos que un espacio de medida $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ es finito si $\mu(X) < \infty$.

Definición 1.9 (Espacio de medida σ-finito)**.** Decimos que un espacio de medida $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ es σ-finito si $\exists\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_n) < \infty$ y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Veamos algún ejemplo de espacio de medida σ-finito para entenderlo mejor.

Ejemplo 1.10. Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, donde:

- $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, es decir, la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$. Esta σ-álgebra está definida en [2, 14.3 Definition].
- m es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Este espacio de medida es σ-finito porque $\mathbb{R}$ puede ser escrito como una unión numerable de intervalos $[n, n+1)$, cada uno con medida de Lebesgue finita igual a 1. Esto nos ayuda a ver que, aunque un conjunto como $\mathbb{R}$ tiene medida infinita, puede ser descompuesto en partes manejables (con medida finita), lo que es una característica clave de los espacios de medida σ-finitos.

Como dijimos, también cabe la posibilidad de que el espacio de medida no sea ni finito ni σ-finito. Podemos verlo en este sencillo ejemplo: sea X un conjunto no vacío cualquiera y sea $\mathcal{A}^*$ el σ-álgebra de todos los subconjuntos de X. Definamos μ sobre $\mathcal{A}^*$ mediante:

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(E) = +\infty \text{ si } E \neq \emptyset.$$

Aunque no es una medida muy interesante, vemos que μ no es finita ni σ-finita.

Antes de mencionar el concepto de espacio de medida completo, veamos algunas propiedades básicas (pero fundamentales) más de un espacio de medida. El teorema siguiente establece algunas de estas propiedades, que encontramos demostradas en [2, Lemma 3.3] y [2, Lemma 3.4]

Teorema 1.11. *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$, se tendrá que:*

1. *Si $E, F \in \mathcal{A}^*$ son tales que $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$.*
2. *Si $E, F \in \mathcal{A}^*$ son tales que $E \subset F$ y $\mu(E) < \infty$, entonces $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$.*
3. *Si $E, F \in \mathcal{A}^*$ son dos conjuntos cualesquiera, entonces $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$. En particular, dada $\{E_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{A}^*$ una colección finita de conjuntos, entonces:*
$$\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right).$$
4. *Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^*$ con $E_n \subset E_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$
5. *Si $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}^*$ con $F_{n+1} \subset F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y $\mu(F_1) < +\infty$, entonces:*
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

Definamos ahora un espacio de medida completo:

Definición 1.12. Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$, diremos que es completo si cualquier subconjunto de un conjunto medible de medida nula es medible.

Un espacio de medida puede tener o no la propiedad de completitud y podemos ver un ejemplo que aclare un poco más esta propiedad.

Ejemplo 1.13. La medida de Lebesgue es completa en la σ-álgebra de los subconjuntos Lebesgue-medibles de $\mathbb{R}$; no obstante, no es completa en la σ-álgebra de Borel, ya que, por ejemplo, el conjunto ternario de Cantor, C, es un boreliano con medida de Lebesgue nula, como se puede ver en [4, Notas 2.5.3]. Pero no todos los subconjuntos de C son borelianos.

Un espacio de medida, aunque no sea completo, podemos completarlo a través del siguiente teorema. Después de enunciar y demostrar el teorema de completitud encontrado en [3, Theorem 2.4.8], también hablaremos de la importancia de estos espacios de medida completos.

Teorema 1.14 (Teorema de completitud)**.** *Sea $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ un espacio de medida. Existe un espacio de medida $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ tal que*

1. $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{A}_0$,
2. $\mu = \mu_0$ *en* $\mathcal{A}^*$,
3. $A \in \mathcal{A}_0 \Leftrightarrow A = B \cup E$, *donde* $B \in \mathcal{A}^*$ *y* $E \subseteq D$ *para algún* $D \in \mathcal{A}^*$ *que satisface* $\mu(D) = 0$,
4. *si* $A \in \mathcal{A}_0$, $\mu_0(A) = 0$, *y* $S \subseteq A$, *entonces* $S \in \mathcal{A}_0$ *y* $\mu_0(S) = 0$.

Demostración. Dividiremos la demostración en cuatro partes.

1. Antes de ver que $\mathcal{A}_0$ es una σ-álgebra, que será el objetivo de este apartado, vemos que con la definición de un $A \in \mathcal{A}_0$ definida en '3' obtenemos '1' . $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}_0$, ya que dado $A \in \mathcal{A}^*$ tenemos $A = A \cup \emptyset$. Ya tenemos '1'. Ahora veamos que $\mathcal{A}_0$, definido por '3', es una σ-álgebra. Dado $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}_0$ tenemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \cup E_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ con $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}^*$, ya que $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra. Claramente, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{A}^*$, ya que $D_n \in \mathcal{A}^*$ y $\mathcal{A}^*$ es una σ -álgebra; además, $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) = 0$, ya que siendo $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ un espacio de medida, para $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ tenemos que $\mu(\bigcup_n D_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n)$. En consecuencia, $\mathcal{A}_0$ está cerrado bajo uniones numerables. Necesitamos también $\emptyset \in \mathcal{A}_0$, lo cual es muy claro y por tanto solo nos falta ver que $A^c \in \mathcal{A}_0$ cuando $A \in \mathcal{A}_0$. Observa que $A^c = B^c \cap E^c = (B^c \cap D^c) \cup (D \cap E^c \cap B^c)$, donde $B^c \cap D^c \in \mathcal{A}^*$, $D \cap E^c \cap B^c \subseteq D \in \mathcal{A}^*$, y $\mu(D) = 0$. Así, $A^c \in \mathcal{A}_0$ por la definición de $\mathcal{A}_0$ dada en "3". Por lo tanto, $\mathcal{A}_0$ es una σ-álgebra, que es lo que buscábamos.

2. Veamos si $\mu = \mu_0$ en $\mathcal{A}^*$. Con la notación que tenemos en '3', es decir, $A = B \cup E$, definimos $\mu_0(A) = \mu(B)$, con lo que ya tendríamos '2'. Lo que nos falta es ver si μ_0, está bien definida. Tomando $A = B_1 \cup E_1 = B_2 \cup E_2$ nos basta ver $\mu(B_1) = \mu(B_2)$, y esto es sencillo ya que $B_1 \subseteq B_2 \cup E_2 \subseteq B_2 \cup D_2$ y también $B_2 \subseteq B_1 \cup E_1 \subseteq B_1 \cup D_1$, lo que por definición de μ nos lleva a $\mu(B_1) \leq \mu(B_2)$, y $\mu(B_2) \leq \mu(B_1)$. Por tanto concluimos que μ_0 está bien definida, y que $\mu = \mu_0$ en $\mathcal{A}^*$.

3. Ahora veamos que μ_0 es una medida. Tenemos que obviamente $\mu_0(\emptyset) = 0$, y que $\mu_0 \geq 0$ por la segunda parte. Nos falta ver que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_0$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$ entonces $\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$ para ello consideremos $A_n = B_n \cup E_n$ como describimos en '3'. Entonces $\mu_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu_0\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n)$, donde la segunda igualdad se da por no aportar $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ nada a la medida (los E_n son de medida nula), y porque además vimos en el anterior apartado que $\mu = \mu_0$ en $\mathcal{A}^*$. Por tanto, ya lo tendríamos concluido.

4. Por último, demostramos que si $A \in \mathcal{A}_0$, $\mu_0(A) = 0$ y $S \subseteq A$, entonces $S \in \mathcal{A}_0$ y $\mu_0(S) = 0$. Supongamos que $\mu_0(A) = 0$ para un $A \in \mathcal{A}^*$ y $S \subseteq A$. Una vez que ya hemos visto que $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ es un espacio de medida, consideramos $S = \emptyset \cup (A \cap S)$, con $A \cap S \subset D$ y sabemos que $\mu(D) = 0$. Por lo tanto, $S \in \mathcal{A}_0$ y $\mu_0(S) = \mu(\emptyset) = 0$ por el apartado 2.

$\square$

El teorema que acabamos de ver nos lleva de una medida definida en una σ-álgebra de conjuntos a una medida definida en una σ-álgebra de conjuntos también, pero más grande, sin perder propiedades como la monotonia o la σ-aditividad.

Para terminar este apartado vamos a incluir alguna definición y teorema que necesitaremos en apartados siguientes, ya que serán mencionados y utilizados en bastantes ocasiones.

Empecemos con los conceptos de función medible y de función simple medible, para poder definir la integral de Lebesgue para éstas.

Definición 1.15. (Función medible). Sea $E \in \mathcal{A}^*$ y $f : E \to \mathbb{R}$, diremos que f es medible en E, si:

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}^* \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.16. (Función simple medible). Dado un elemento $E \in \mathcal{A}^*$, se dice que una función $s : E \to \mathbb{R}$ es una función simple medible si existen: $\{E_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathcal{A}^*$ tales que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = E$ y $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}$, tales que:

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}(x).$$

Además de estas definiciones, vamos a enunciar el teorema de aproximación de funciones medibles por funciones simples medibles, el cual nos dice que siempre es posible aproximar una función medible no negativa por una sucesión monótona creciente de funciones simples medibles. Este teorema será necesario para demostrar los teoremas de Tonelli y Fubini y está demostado en [4, Teorema 1.4.2]. Veámoslo:

Teorema 1.17 (Aproximación de funciones medibles)**.** *Sean $E \in \Sigma$ y $f : E \to \mathbb{R}$, una función medible no negativa. Entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples medibles definidas sobre E tales que:*

1. *$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a f en E.*
2. *$0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \leq f(x)$, para todo $x \in E$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ya estamos en disposición de definir la integral de Lebesgue . La definiremos para una función simple medible, para una función medible no negativa y por último para una función medible definida en $\overline{\mathbb{R}}$.

Definición 1.18 (Integral de Lebesgue de una funcion simple medible no negativa)**.** Si s es una función **simple**, medible no negativa, definimos la **integral** de s con respecto a μ como el número real extendido

$$\int s\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E_k).$$

Empleamos la convención de que $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Definición 1.19 (Integral de Lebesgue de una función medible no negativa)**.** Sea una función $f : X \to [0, \infty]$ medible, definimos su integral tal que:

$$\int f\, d\mu = \sup \left(\int s\, d\mu \right)$$

siendo $s : X \to \mathbb{R}$ simple, medible, no negativa, con $0 \leq s(x) \leq f(x), \forall x \in X \in [0, \infty]$.

Definición 1.20 (Función Lebesgue integrable)**.** Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$ medible, diremos que es Lebesgue integrable si se verifica que tanto las partes positiva como negativa f^+, f^- de f tienen integrales finitas con respecto a μ. En este caso, definimos la integral de f con respecto a μ como

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu.$$

Si E pertenece a X, definimos

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu.$$

Vamos a incluir también el enunciado de dos teoremas interesantes demostrados en [2, Theorem 4.6] y en [2, Theorem 5.6], que también nos serán útiles en varias demostraciones de secciones siguientes.

Teorema 1.21 (Teorema de la convergencia monótona). *Sean $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, funciones medibles no negativas tales que:*

- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $x \in X$*.*
- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*, para todo* $x \in X$*, con* $f : X \to [0, \infty]$ *una función medible no negativa.*

Entonces:

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Teorema 1.22 (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles que converge casi en todo punto a una función medible f de valores reales. Si existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

1.2. Generación de medidas

Para llegar a definir el concepto de espacio de medida producto, primero es necesario generalizar algunas ideas de espacios de medida.

Será necesario definir el concepto de álgebra de conjuntos que será de importancia ya no solo en este capítulo, sino que tambien en los siguientes, pero también definiremos el concepto de semiálgebra de conjuntos que es similar al de álgebra y será útil en el siguiente capítulo sobre el producto de medida.

Definición 1.23 (Semiálgebra de conjuntos). Dada una familia de conjuntos $R \subset \mathcal{P}(X)$, se dice que R es una semiálgebra de conjuntos si cumple las siguientes condiciones:

- $\emptyset$ y X son elementos de R.
- Para todo $A, B \in R$, $A \cap B \in R$.
- Para todo $A \in R$, $X \setminus A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$, para algún conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset R$ de elementos disjuntos.

Definición 1.24 (Álgebra de conjuntos)**.** Decimos que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto X es un álgebra si se cumple que:

- $\emptyset$ y X pertenecen a $\mathcal{A}$.
- Si E pertenece a $\mathcal{A}$, entonces su complemento $X \setminus E$ también pertenece a $\mathcal{A}$.
- Si $E_1, \ldots, E_n$ pertenecen a $\mathcal{A}$, entonces su unión $\bigcup_{i=1}^n E_i$ también pertenece a $\mathcal{A}$.

Observación: Podemos considerar como parte de la definición o consecuencia de ella que si $E_1, \ldots, E_n$ pertenecen a $\mathcal{A}$ entonces $\bigcap_{i=1}^n E_i \in \mathcal{A}$. Esto se deduce de las leyes de Morgan y utilizando el punto 2 y 3 de la definición de álgebra de conjuntos.

Ahora veamos la definición de medida sobre un álgebra de conjuntos en lugar de una σ-álgebra, que realmente es muy similar.

Definición 1.25. Dado un álgebra de conjuntos $\mathcal{A} \subset P(X)$, diremos que una aplicación $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ es una medida si:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(E) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{A}$.
3. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ es una colección de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$.

Definición 1.26. Sea $\mathcal{A} \subset P(X)$ un álgebra de conjuntos y μ una medida definida sobre $\mathcal{A}$. Definimos la medida exterior asociada a μ como sigue:

$$\mu^* : B \in P(X) \to \mu^*(B) \in \mathbb{R},$$

donde:

$$\mu^*(B) = \text{ínf}\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : B \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}\right\}.$$

La medida exterior definida ahora (referida a cualquier medida μ definida sobre un álgebra de conjuntos) puede no ser numerablemente aditiva. Esta propiedad quiere decir que cualquier colección numerable $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos disjuntos dos a dos (es decir, $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$), cumple que la medida del conjunto unión es igual a la suma de las medidas de todos los conjuntos individualmente:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n).$$

Veamos que al restringir la medida exterior a cierta colección de conjuntos, conocida como la colección de conjuntos de Carathéodory, la medida exterior se convierte en una medida.

Definición 1.27 (Condición de Caratheodory)**.** Sea μ una medida definida sobre un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$, y μ^* la medida exterior asociada. Diremos que un conjunto $E \subseteq X$ cumple la condición de Carathéodory si:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E), \quad \forall A \subseteq X.$$

Denotaremos $\mathcal{A}^*$ al conjunto de todos los subconjuntos de X que cumplen esta condición. Es decir,

$$\mathcal{A}^* = \{E \subseteq X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E), \forall A \subseteq X\}$$

.

Siguiendo esto, tenemos el teorema de extensión de Caratheodory que nos dice que una medida μ definida en un álgebra $\mathcal{A}$ puede ser extendida a una medida μ^* en un σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ que contiene a $\mathcal{A}$. La σ-álgebra $\mathcal{A}^*$, que es precisamente la que hemos obtenido anteriormente, es completa. Se ha utilizado la siguiente bibliografía para abordar este teorema: [1, Theorem 1.3.6] y [2, Theorem 9.7]

Teorema 1.28 (Teorema de extensión de Caratheodory)**.** *Sea μ una medida definida sobre un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ y μ^* la medida exterior asociada. Se tendrá que el conjunto $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$. Además, la restricción de μ^* a $\mathcal{A}^*$ es una medida.*

Demostración. Primero, demostraremos que el conjunto que forman todos los conjuntos que cumplen la condición de Carathéodory será una σ-álgebra.

- Recordamos la condición de Carathéodory, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall A \subseteq X$.

  Considerando $E = X$ y $E = \emptyset$, vemos que cumplen ambos esta condición:

  $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \cap X^c) = \mu^*(A) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A).$$

  $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap \emptyset^c) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

  Ahora veremos que si $E \in \mathcal{A}^*$, entonces E^c pertenece a $\mathcal{A}^*$. En efecto

  $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \forall A \subset X.$$

  Por tanto, para E^c, tenemos

  $$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A \cap E), \forall A \subset X,$$

  lo que nos lleva a que $E^c \in \mathcal{A}^*$.

Por último, suponiendo que $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}^*$ sean disjuntos dos a dos, necesitamos demostrar que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}^*$. Es decir,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^c),$$

Vamos a ver antes, para poder llegar ahí, que dado $E, F \in \mathcal{A}^*$, se tiene que $E \cap F \in \mathcal{A}^*$. Sean $E, F \in \mathcal{A}^*$, por un lado tenemos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

y por el otro que

$$\mu^*(A \cap E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c).$$

Ahora, juntándolas:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*(A \cap E \cap F^c) + \mu^*(A \cap E^c). \tag{1}$$

Si tomamos el conjunto $A \cap (E \cap F^c)$ en la condición de Carathéodory asociado a $E \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap (E \cap F)^c) &= \mu^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E) + \mu^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap F^c \cap E) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned} \tag{2}$$

donde la última igualdad se deduce por propiedades de conjuntos. Si sustituimos (2) en (1):

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cap F)) + \mu^*(A \cap (E \cap F)^c)$$

y puesto que A es arbitrario, $E \cap F \in \mathcal{A}^*$.

Recordamos que tenemos que ver para $E_k, F_k \subseteq A$ disjuntos dos a dos implica que:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq A$$

y además que:

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

Por lo visto antes de que $E \cap F \in \mathcal{A}^*$, sabemos que $E \cup F \in \mathcal{A}^*$. Esto nos ayudará ahora a ver para $n = 2$ la afirmación que dijimos de μ^*:

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$$

Dado A arbitrario, si consideramos $A \cap (E \cup F)$ en la condición de Carathéodory asociada a $E \in \mathcal{A}^*$:

$$\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$$

y ya lo tenemos demostrado para $n = 2$.

Por inducción, lo tendríamos demostrado para cualquier n.

Veamos, ahora sí, que dados $E_k \subset \mathcal{A}^*$, tendremos $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subseteq \mathcal{A}^*$

Sabemos que $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}^*$, $n \in \mathbb{N}$ por el apartado anterior. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right))) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)^c\right)$$

$$= \mu^*(\bigcup_{k=1}^{n}(A \cap (E_k))) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)^c\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)^c\right)$$

Obviamente $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, y por tanto $A\cap(\bigcup_{k=1}^{n} E_k)^c \subseteq A\cap(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)$, con lo cual

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)^c\right)$$

También tendremos simplemente tomando límite cuando $n \to \infty$

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)^c\right)$$

Por tanto, ya llegamos a que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right))) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)^c\right)$.

Como la otra desigualdad es clara, llegamos a que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ cumple la condición de Carathéodory y así, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{A}^*$ (conjunto de todos los subconjuntos que cumplen Carathéodory) es una σ-álgebra. Ahora nos falta ver que μ^* restringida a $\mathcal{A}^*$ es una medida. Con esta desigualdad: $\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)^c\right)$ y esta: $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap (\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right))) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)^c\right)$ nos llegará para demostrarlo (son desigualdades obtenidas en la otra parte de esta demostración).

- Veamos que μ^* es σ-aditiva. Consideremos $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ disjuntos dos a dos y consideremos $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Si tomamos $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ en las desigualdades enunciadas justo encima.

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k),$$

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k),$$

esto es:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Las otras dos propiedades necesarias de la medida exterior para ser una medida sobre $\mathcal{A}^*$ se cumplen trivialmente ($\mu^*(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}^*$ y la medida exterior de $\mu^*(\emptyset)$ es 0).

Por tanto, tenemos ya totalmente demostrado el teorema de extensión de Caratheodory. $\square$

Veamos ahora otro teorema interesante que restringe la medida a ser σ-finita. En este caso, existirá una única extensión de μ a $\mathcal{A}^*$. Antes vamos a ver un ejemplo en el que μ no sea única.

Ejemplo 1.29. Consideremos la medida de contar, que nos será útil también en ejemplos posteriores. Vamos a definirla: sea la función de conjunto $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ definida por:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A) & \text{si } A \text{ es finito} \\ \infty & \text{si } A \text{ es no finito} \end{cases}$$

donde card(A) es el número de elementos que tiene A, a esta función la llamaremos la medida de contar. Esta medida es σ-finita si y solo si X es un conjunto numerable. Consideramos $X = \mathbb{R}$, y concluímos que μ no es σ-finita, ya que

$$\nexists \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X), \quad \text{de manera que} \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{y} \quad \mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.30 (Teorema de extensión de Hahn)**.** *Supongamos que μ es una medida σ-finita en un álgebra $\mathcal{A}$. Entonces existe una extensión única de μ a una medida en $\mathcal{A}^*$.*

Demostración. Ya vimos enunciando el teorema de extensión de Caratheodory que μ^* define una medida en $\mathcal{A}^*$ sin suponer que μ sea una medida σ-finita. Ahora veamos la unicidad de ésta. Sea ν una medida en $\mathcal{A}^*$ que coincide con μ en $\mathcal{A}$. Primero, supongamos que μ es finita y, por lo tanto, también μ^* y ν son medidas finitas.

- En este caso $\nu(X) = \mu(X)$ porque, por definición, ν y μ coinciden en todos los conjuntos de $\mathcal{A}$, incluido el conjunto completo X. Sea E cualquier conjunto en $\mathcal{A}^*$ y sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia en $\mathcal{A}$ tal que $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dado que ν es una medida y coincide con μ en $\mathcal{A}$, tenemos
$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Por lo tanto, $\nu(E) \leq \mu^*(E)$ para cualquier $E \in \mathcal{A}^*$ por la definicion de medida exterior en una álgebra de conjuntos. Concluímos que $\mu^*(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}^*$, gracias a la propiedad de aditividad de μ^* y ν. En efecto, $\mu^*(E) + \mu^*(X \setminus E) = \mu^*(X) = \nu(X) = \nu(E) + \nu(X \setminus E)$ y como los términos en el lado derecho son finitos y no mayores que los términos correspondientes en el lado izquierdo, ya tenemos la igualdad. Esto establece la unicidad cuando μ es una medida finita.

- Supongamos ahora que μ es σ-finita y sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia creciente de conjuntos en $\mathcal{A}$ con $\mu(F_n) < +\infty$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Del párrafo anterior, $\mu^*(E \cap F_n) = \nu(E \cap F)$ para cada $E \in \mathcal{A}^*$. Por lo tanto,

$$\mu^*(E) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(E \cap F_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E \cap F_n) = \nu(E),$$

por lo que μ^* y ν coinciden en $\mathcal{A}^*$.

□

Para terminar este apartado, vamos a hablar del espacio de medida de Lebesgue, ya que a partir del siguiente capítulo será utilizado con más frecuencia. En concreto, nos referiremos al espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$. Vamos a definir su medida exterior, pero en la definición hay algún término que puede generar confusión, como puede ser el de celda de $\mathbb{R}^N$. Nos referiremos a una celda con la notación I_k.

Definición 1.31. Una celda I_k en $\mathbb{R}^N$ se puede expresar como el producto cartesiano de n intervalos (a_i, b_i) con a_i y b_i pertenecientes a $\mathbb{R}$. Estos intervalos pueden ser cerrados, abiertos o semiabiertos.

En cuanto a $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k)$, esto representa la suma de las longitudes (o áreas, o volúmenes) de una colección infinita de celdas I_k. Por tanto, $l(I_k)$ denota la longitud (o medida) de la celda I_k. Ahora ya podemos definir la medida exterior de un subconjunto de $\mathbb{R}^N$.

Definición 1.32. (Medida Exterior de un Subconjunto de $\mathbb{R}^N$) Dado $E \subset \mathbb{R}^N$, definimos la medida exterior de E, $m^*(E)$, como:

$$m^*(E) = \inf \left(\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \text{ con } I_k \text{ una celda de } \mathbb{R}^N, \forall k \in \mathbb{N} \right).$$

Esta medida exterior claramente tendrá todas las propiedades generales que dimos a una medida exterior general. Veamos ahora cómo llegamos al espacio de medida de Lebesgue a partir de esta medida exterior.

Definición 1.33. (Condición de Carathéodory)

Sea m^* la medida exterior definida sobre los subconjuntos de $\mathbb{R}^N$. Diremos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ cumple la condición de Carathéodory si:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^N.$$

Llamamos al conjunto de todos los subconjuntos que cumplen la condición anterior, la σ-álgebra de Lebesgue, $\mathcal{L}_N$. Se puede ver con el teorema de extensión de Caratheodory, que demostramos para un caso general en este capítulo, que $\mathcal{L}_N$ es una σ-álgebra. Además, la restricción de la medida exterior (dada anteriormente) a la σ-álgebra de Lebesgue es una medida sobre $\mathcal{L}_N$, la medida de Lebesgue.

Capítulo 2

Medida producto

La medida producto surge al querer extender el concepto de medida de dos espacios de medida (X, Σ_X, μ_x) e (Y, Σ_Y, μ_Y) al espacio producto $X \times Y$. A partir de ahora utilizaremos Σ_X y Σ_Y para referirnos a la σ-álgebra de los conjuntos arbitrarios X e Y; y μ_X y μ_Y para referirnos a las medidas definidas sobre Σ_X y Σ_Y.

A continuación, definiremos el concepto de rectángulo medible, elemento imprescindible para la construcción del espacio de medida producto.

Definición 2.1 (Rectángulo medible)**.** Si (X, Σ_X, μ_X) y (Y, Σ_Y, μ_Y) son espacios de medida, entonces un conjunto de la forma $A \times B$ con $A \in \Sigma_X$ y $B \in \Sigma_Y$ se llama un rectángulo medible, o simplemente un rectángulo, en $Z = X \times Y$.

El conjunto de rectángulos medibles es una semiálgebra de conjuntos. Lo vemos en la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Dados* (X, Σ_X, μ_X) *y* (Y, Σ_Y, μ_Y) *dos espacios medibles, se tendrá que:*

$$R = \{A \times B : A \in \Sigma_X, B \in \Sigma_Y\} \subset P(X \times Y)$$

es una semiálgebra de conjuntos.

Demostración. Vamos a probar que cumple las tres condiciones de la definición de semialgebra. Por un lado, veamos que el conjunto $\emptyset$ y el conjunto $Z = X \times Y$ están en R. El conjunto vacío puede ser expresado como $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$, y teniendo $\emptyset \in \Sigma_X$ y $\emptyset \in \Sigma_Y$, ya llegamos a que $\emptyset \times \emptyset \in R$. Es decir, el conjunto vacío está en R. Fácilmente vemos también que el conjunto $Z = X \times Y$ está en R. $Z = X \times Y$ es el producto cartesiano de X e Y y como $X \in \Sigma_X$ y $Y \in \Sigma_Y$, tenemos que $X \times Y \in R$. Por lo tanto, el conjunto $X \times Y$ está en R. Veamos ahora que R es cerrada para las intersecciones finitas de elementos de R. Sean $(A_1 \times B_1), (A_2 \times B_2) \in R$, se tendrá que:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in R.$$

Nos queda ver que para todo $E = A \times B \in R$, $Z \setminus E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$, para algún conjunto $\{E_1, \dots, E_n\} \subset R$ de elementos disjuntos. Esto se cumple, ya que dado un elemento $(A \times B) \in R$,

$$Z \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times B) \cup (A \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times (Y \setminus B)),$$

con lo cual, el complementario de un elemento de R se puede expresar como la unión finita de elementos de R. Ya tenemos entonces que R es una semialgebra de conjuntos en $Z = X \times Y$. □

A partir de esta semiálgebra de conjuntos podemos generar un álgebra de conjuntos, que sería sencillamente la coleccion de todas las uniones finitas de estos rectángulos $A \times B$.

Lema 2.3. *La colección de todas las uniones finitas de rectángulos* $\{A \times B : A \in \Sigma_X, B \in \Sigma_Y\}$ *es un álgebra de conjuntos de* $Z = X \times Y$*. Denotaremos esta colección como* Σ_{Z_0}*.*

Demostración. Primero, obviamente $\emptyset$ y $Z = X \times Y$ son elementos del conjunto Σ_{Z_0}. También es fácil ver que Σ_{Z_0} es cerrado para las intersecciones finitas de elementos de Σ_{Z_0}. Si tomamos $(A_1 \times B_1), (A_2 \times B_2) \in \Sigma_{Z_0}$, llegamos a que:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \Sigma_{Z_0}$$

Solo nos falta ver que el complementario de un elemento de Σ_{Z_0} es un elemento de Σ_{Z_0}. Sea $(A \times B) \in \Sigma_{Z_0}$,

$$Z \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times B) \cup (A \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times (Y \setminus B))$$

Es decir, el complementario de un elemento de Σ_{Z_0} se puede expresar como la unión finita de rectángulos $\{A \times B : A \in \Sigma_X, B \in \Sigma_Y\}$ y sabemos que la unión finita de estos elementos está en Σ_{Z_0} precisamente por cómo definimos Σ_{Z_0}. Por tanto, ya tenemos demostrado que Σ_{Z_0} es un álgebra de subconjuntos de Z. □

Ahora vamos a definir la medida producto sobre Σ_{Z_0}.

Definición 2.4 (Medida producto sobre Σ_{Z_0})**.** Dado un rectángulo medible $A \times B \in X \times Y$, definimos su medida producto de la siguiente forma:

$$\pi_0(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B), \quad A \in X,\, B \in Y$$

donde estamos asumiendo la convención de que $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Veamos a través del siguiente teorema que siempre se va a poder definir la medida π_0 de la definición 2.4 en los subconjuntos del álgebra Σ_{Z_0}

Este teorema nos permite también definir la integral de funciones en espacios producto que será necesario más adelante para definir los teoremas de Tonelli y Fubini. Nos hemos apoyado en [2, Theorem 10.4] para demostrarlo.

Teorema 2.5 (Medida producto sobre Σ_{Z_0}). *Si (X, Σ_X, μ_x) y (Y, Σ_Y, μ_y) son espacios medibles, entonces existe una medida π_0 definida en el álgebra de conjuntos Σ_{Z_0} tal que*

$$\pi_0(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B)$$

para todo $A \in \Sigma_X$ y $B \in \Sigma_Y$.

Demostración. Supongamos que el rectángulo $A \times B$ es la unión disjunta de una secuencia $(A_j \times B_j)$ de rectángulos; así

$$\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{Aj}(x) \times \chi_{Bj}(y)$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$. Manteniendo fijo x, integramos con respecto a y, aplicamos el Teorema de Convergencia Monótona y la definición de función simple medible, para obtener

$$\chi_A(x)\mu_Y(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}\mu_Y(B_j)$$

Veamos cómo llegar a esa igualdad paso a paso: sabemos por la definicion de función simple medible que

$$\chi_A(x)\mu_Y(B) = \chi_A(x) \int \chi_B(y) d\mu_Y$$

y es claro que

$$\chi_A(x) \int \chi_B(y) d\mu_Y = \int \chi_A(x)\chi_B(y) d\mu_Y$$

Tenemos ya definida la igualdad $\chi_A(x) \cdot \chi_B(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x) \times \chi_{B_j}(y)$ y por tanto

$$\int \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j} d\mu_Y = \int (\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}) d\mu_Y$$

Esta igualdad viene de ser $\chi_{A_j}(x) \geq 0$ y $\chi_{B_j} \geq 0$.

Ahora aplicando el teorema de convergencia monótona en la primera igualdad de las tres siguientes, tenemos

$$\int (\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}) d\mu_Y = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j} d\mu_Y$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j} d\mu_Y = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j}(x)\mu_Y(B_j)$$

Ahora, integramos en x con respecto a la medida μ_X y aplicamos de nuevo el Teorema de Convergencia Monótona para llegar a

$$\mu_X(A)\mu_Y(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_X(A_j)\mu_Y(B_j)$$

Para terminar, sea $E \in \Sigma_{Z_0}$, que se pueda expresar como una unión numerable de elementos de Σ_{Z_0} definimos su medida producto:

$$\pi_0(E) = \pi_0\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \times B_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_0(A_j \times B_j) = \pi_0(A \times B) = \mu_X(A)\cdot\mu_Y(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_X(A_j)\cdot\mu_Y(B_j).$$

Por tanto, por lo visto en el párrafo anterior, π_0 está bien definida y es numerablemente aditiva en Σ_{Z_0}, y así concluimos, que tenemos una medida definida sobre el álgebra de conjuntos Σ_{Z_0}.

□

Definición 2.6 (σ-álgebra producto)**.** Si (X, Σ_X, μ_x) , (Y, Σ_Y, μ_y) son espacios de medida, definimos $\Sigma_Z = \Sigma_x \times \Sigma_Y$ como la σ-álgebra de subconjuntos de $Z = X \times Y$ generada por el álgebra de conjuntos Σ_{Z_0}. Esta σ-álgebra será la menor que contiene a los rectángulos medibles.

En el siguiente teorema veremos la extensión de π_0 a una σ-álgebra que contiene a Σ_{Z_0}. Además como Σ_Z está contenida en cualquier σ-álgebra que contenga a Σ_{Z_0}, la extensión de π_0 está bien definida para la σ-álgebra producto.

Teorema 2.7. *(Extensión de la medida producto). Consideremos (X, Σ_X, μ_X) , (Y, Σ_Y, μ_Y) como dos espacios de medida. Entonces, existe una medida π definida en la σ-álgebra producto $\Sigma_Z = \Sigma_X \times \Sigma_Y$ tal que:*

$$\pi(A \times B) = \mu_X(A) \cdot \mu_Y(B), \quad \forall A \in \Sigma_X, \forall B \in \Sigma_Y.$$

Si los espacios de medida son σ-finitos, la medida π que satisface la propiedad anterior es única.

Demostración. La existencia es una consecuencia del teorema de extensión de Carathéodory, y la unicidad está determinada por el teorema de extensión de Hahn. Si alguno de los espacios involucrados no es σ-finito, la extensión no es necesariamente es única. □

Veamos un ejemplo en el que precisamente uno de los espacios de medida no sea σ-finito.

Ejemplo 2.8. Consideremos dos espacios de medida (X, Σ_X, μ_X) e (Y, Σ_Y, μ_Y), donde uno de ellos no es σ-finito. Tomemos Y como un espacio de medida no σ-finito.

- $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_X)$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel y μ_X es la medida de Lebesgue, que es σ-finita.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_Y)$, donde $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es el conjunto de todas las partes de $\mathbb{R}$), y μ_Y es la medida de contar, que ya hemos definido en el capítulo anterior.

Usando el teorema de extensión de la medida producto, existe π una medida en la σ-álgebra generada por $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Sin embargo, debido a que μ_Y no es σ-finita, la extensión de π no es única, ya que ya vimos que esta medida es σ-finita si y solamente si X es un conjunto numerable, pero $\mathbb{R}$ no es numerable.

A pesar de cumplirse que si (X, Σ_X, μ_X) y (Y, Σ_Y, μ_Y) son σ-finitos, entonces π es una medida σ-finita en la σ-álgebra Σ_Z (al igual que ocurre en espacios de medida no producto), no es tan sencillo con la propiedad de completitud, ya que no está garantizada para el espacio de medida producto aún siendo los dos espacios de medida completos. Se ve en la siguiente proposición, la cual se enuncia en [3, Proposition 3.7.1]:

Proposición 2.9. *Sean (X, Σ_x, μ_X) y (Y, Σ_y, μ_Y) espacios de medida. Si (X, Σ_x, μ_X) y (Y, Σ_y, μ_Y) son espacios de medida completos y σ-finitos, entonces (Z, Σ_Z, π) no es necesariamente completo.*

Veamos un ejemplo de dos espacios de medida completos que generan un espacio de medida producto que no es completo.

Ejemplo 2.10. Vamos a tomar $(X, \Sigma_X, \mu_X) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ e $(Y, \Sigma_Y, \mu_Y) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. Es decir, ambos son el espacio de medida de Lebesgue, el cual sabemos que es completo (está demostrado en [1, Proposition 1.5.2]). Consideremos entonces el espacio de medida producto $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m) \times (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. Consideramos $A = \{0\} \times \mathbb{R} \in \Sigma_Z$. Este conjunto tiene $\pi(A) = 0 \cdot \infty = 0$. Si ahora tomamos un conjunto $B = \{0\} \times \mathcal{V}$, siendo $\mathcal{V}$ el conjunto de Vitali, que es un conjunto no medible en el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ (se demuestra que no es medible en [2, Theorem 17.6]), vemos que $B \notin \Sigma_Z$ por no ser medible una de sus secciones (veremos esta implicación en un lema un poco más adelante). Además $B \subset A$, por tanto el espacio de medida producto mencionado, **NO** es completo.

Aunque estemos en la medida producto, seguimos teniendo un modo de extender el espacio de medida a otro espacio de medida completo. También se hará a través del teorema de extensión de Caratheodory, que como ya vimos para un espacio de medida que no es producto, este teorema ya nos da la extensión a un espacio de medida completo. Vemos que el álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$

mencionado en el teorema de extensión de Caratheodory para una medida μ se corresponde con Σ_{Z_0}, y la medida μ con la medida π_0 definida en el teorema de medida producto. Por lo tanto, podemos extender la medida π_0 a una medida π^* definida en una σ-álgebra, que no tiene que ser igual a Σ_Z (puede ser más grande) y que contiene a Σ_{Z_0}. Lo que hay que destacar es que el espacio de medida $(Z, \Sigma_{Z_0}^*, \pi^*)$ es completo y en cambio si hablamos de la σ-álgebra producto $\Sigma_Z \subset \Sigma_{Z_0}^*$, el espacio de medida resultante (Z, Σ_Z, π) no tiene por qué ser completo.

Dado que Σ_Z es la σ-álgebra más pequeña que contiene a Σ_{Z_0}, como ya dijimos, cualquier conjunto en Σ_Z estará también en $\Sigma_{Z_0}^*$. Esto es porque $\Sigma_{Z_0}^*$ no solo contiene a Σ_{Z_0}, sino también todos los conjuntos que son necesarios para completar la σ-álgebra bajo la medida exterior, incluyendo aquellos en Σ_Z.

Ahora vamos a pasar al concepto de sección de un conjunto que nos hará falta para relacionar la integración con respecto a una medida producto y la integración iterada.

Definición 2.11 (Sección de un conjunto)**.** Si E es un subconjunto de $Z = X \times Y$ y $x \in X$, entonces la sección en x de E es el conjunto $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$. De manera similar, si $y \in Y$, entonces la sección en y de E es el conjunto $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$.

Siguiendo la definición, veamos este lema sobre las secciones de un conjunto, cuyo enunciado y demostración podemos encontrar en [1, Lemma 5.1.2] :

Lema 2.12. *Sean (X, Σ_X, μ_X) y (Y, Σ_Y, μ_Y) espacios de medida, se tendrá que:*

- *Si $E \in \Sigma_Z$, entonces cada sección E_x pertenece a Σ_Y y cada sección E^y pertenece a Σ_X.*

Demostración. Supongamos que x pertenece a X. Definamos $\mathcal{F}$ como la colección de todos los subconjuntos E de Z tales que E_x pertenece a Σ_Y y veamos que es una σ-álgebra. $\mathcal{F}$ contiene todos los rectángulos $A \times B$ donde $A \in \Sigma_X$ y $B \in \Sigma_Y$, ya que la sección $(A \times B)_x$ es B si $x \in A$ y $\emptyset$ si $x \notin A$. Tambien tenemos $X \times Y = Z \in \mathcal{F}$ porque $(X \times Y)_x = Y \in \Sigma_Y$. Nos queda ver que si $E \in \mathcal{F}$, implica que $E^c \in \mathcal{F}$. Esto se cumple porque $(E^c)_x = (E_x)^c$. Por último, si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$, entonces

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \right)_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x.$$

y por tanto también es cerrado para las uniones numerables. Ya queda comprobado que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

Puesto que $\mathcal{F}$ incluye todos los rectángulos $A \times B$ y Σ_Z es la menor σ-álgebra generada por estos rectángulos, se sigue que $\Sigma_Z \subseteq \mathcal{F}$ Por lo tanto, si $E \in \Sigma_Z$, entonces $E_x \in \Sigma_Y$. Con un argumento similar mostraríamos que $E^y \in \Sigma_X$. $\square$

Gracias a la idea de sección y de este lema, podemos descomponer un conjunto medible E, en el espacio producto $X \times Y$ (con X espacio medible cuya medida asociada es μ_X y con Y espacio medible con μ_Y como medida asociada), en $A \times B$ conjuntos medibles, ($A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$).

Esto lo hacemos de la siguiente forma:

$$E = \bigcup_{y \in Y} (E^y \times \{y\}) = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times E_x)$$

Vimos en el lema anterior que las secciones de un conjunto son medibles, por tanto, cada conjunto $E^y \times \{y\}$ es un conjunto medible en $X \times Y$, y cada conjunto $\{x\} \times E_x$ es un conjunto medible en $X \times Y$. Con E descompuesto en los anteriores conjuntos medibles, podemos integrar funciones sobre E a través de integrales más simples al tener dividido el dominio de integración en partes más manejables, que es justamente la idea de la integración iterada.

Para terminar este apartado, es interesante comentar un concepto que notaremos en el siguiente apartado al enunciar y demostrar los teoremas de Tonelli y Fubini. Hasta ahora, y en la primera parte del siguiente capitulo, trabajamos en espacios de medida arbitrarios, ya que no habría apenas diferencias con lo que podríamos decir en el caso de trabajar en los espacios $(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}^*, \mu)$, y realmente hay una diferencia importante de trabajar en espacios de medida arbitrarios a hacerlo en $\mathbb{R}^n$ y se explicará en el siguiente capítulo.

Ya vimos que si (X, Σ_X, μ_X) y (Y, Σ_Y, μ_Y) son espacios de medida arbitrarios y queremos relacionar las integrales de funciones definidas en $X \times Y$ con integrales de funciones definidas en los espacios factores, X e Y, resulta necesario introducir en $X \times Y$ una colección de conjuntos medibles que tengan cierta relación con los conjuntos medibles en X y en Y, es decir, requiere construir una σ-álgebra de subconjuntos de $X \times Y$, bien relacionada con las σ-álgebras Σ_X y Σ_Y, lo que lleva a introducir la σ-álgebra producto. Claramente necesitamos también disponer de una medida en $X \times Y$ que tenga ciertas relaciones con las medidas μ_X y μ_Y originales. Toda esta construcción previa, vista en este apartado, no sería necesaria en el marco de los espacios $\mathbb{R}^N$, pues en cada uno de los $\mathbb{R}^N$ ya tenemos una estructura de espacio de medida, sea cual sea la dimensión del espacio en cuestión.

Más adelante, veremos los teoremas de Tonelli y Fubini en el caso particular de este marco de los espacios $\mathbb{R}^N$ además de verlos en los espacios de medida arbitrarios.

Capítulo 3

Teoremas de Fubini y Tonelli

Los teoremas de Fubini y Tonelli están inicialmente relacionados con la integral de Riemann, pero tienen formulaciones más generales en el contexto de la teoría de la medida, lo que permite su aplicación en espacios de medida producto. Necesitaremos que estas medidas en los espacios de medida producto sean σ-finitas para que los teoremas sean aplicables, y en el caso del teorema de Fubini, que la función $F : Z = X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ sea integrable en el sentido de Lebesgue.

Aún siendo necesaria la integrabilidad de Lebesgue de la función F para aplicar el teorema de Fubini, vamos a ver estos teoremas recientemente mencionados para espacios de medida arbitrarios. Esto es posible ya que las definiciones y propiedades como la medibilidad e integrabilidad son generales (visto en el primero de los capítulos) y no se restringen a una medida concreta, como podría ser la de Lebesgue.

Antes de nada, vamos a entender lo que son las aplicaciones secciones de f (secciones de una función). Después, será necesario hacer mención a algunas definiciones, y enunciar y demostrar algún lema como el principio de Cavalieri para poder llegar a los teoremas de Tonelli y Fubini en el espacio de medida producto.

Supongamos pues, que $f : I = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa en el rectángulo I, en cuyo caso, la integral $\iint_I f$ (que consideramos una integral de Riemann), nos dará el volumen bajo la gráfica de f.

Para cada x en el intervalo horizontal $[a, b]$ consideremos la función $f_x : y \in [c, d] \mapsto f(x, y) =: f_x(y)$. La continuidad de f en I, nos dice que las funciones f_x así definidas son continuas y, por lo tanto, integrables en el intervalo $[c, d]$. Si $x_0 \in [a, b]$, podemos interpretar la integral $\int_c^d f_{x_0}(y)\, dy$ tal que nos da el área de la sección vertical de la región bajo la gráfica de f_{x_0}.

Supongamos que el conjunto de descontinuidades de una función f en el segmento $[a, b] \times [c, d]$, sea $x_0 \times [c, d]$ de forma que f_{x_0}, es discontinua en todo punto de $[c, d]$. En esta situación, la integral de la función correspondiente $f_{x_0}(y)$ sobre $[c, d]$, es decir,

$$\int_c^d f_{x_0}(y)\, dy$$

carece de sentido en términos de una integral de Riemann convencional. Sin embargo, siempre tiene sentido hablar de las integrales inferior y superior de la función f_{x_0} sobre el intervalo $[c, d]$.

Este inicio de la explicación de cómo aplicar el método de Riemann para integrales dobles nos sirve para entender bien la utilidad de las secciones (concretamente secciones de una función), que facilitan el cálculo de estas integrales dobles. Vamos a definir formalmente sección de una función:

Definición 3.1 (Sección de una función)**.** Sean $f : Z \to \mathbb{R}$ y $x \in X$, definimos la sección con respecto a x de f como la siguiente función:

$$f_x : y \in Y \to f_x(y) = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Análogamente, dado $y \in Y$, definimos la sección con respecto a y de f como la siguiente función:

$$f^y : x \in X \to f^y(x) = f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

(recordar: (Z, Σ_Z, π) es el espacio de medida producto)

Los conceptos de sección de un conjunto y sección de una función son realmente similares, y vemos que tenemos el mismo lema sobre la medibilidad, tanto para la sección de una función como para la sección de un conjunto. Al igual que para el caso de la sección de un conjunto, podemos encontrar este lema en [1, Lemma 5.1.2].

Lema 3.2. *Sean* (X, Σ_X, μ_X) *y* (Y, Σ_Y, μ_Y) *espacios de medida, se tendrá que:*

- *Si* $f : Z \to \bar{\mathbb{R}}$ *es medible en* (Z, Σ_Z)*, entonces* $f_x : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ *y* $f^y : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *son medibles en, respectivamente,* (Y, Σ_Y) *y* (X, Σ_X)*.*

Demostración. Este lema se sigue del lema 2.12 y de las identidades siguientes:

$$(f_x)^{-1}(D) = (f^{-1}(D))_x$$

$$(f^y)^{-1}(D) = (f^{-1}(D))^y$$

Para cualquier conjunto medible D, el conjunto de preimágenes bajo f_x y f^y es medible, debido a que las preimágenes de f lo son. Esto asegura que f_x es Σ_Y-medible y f^y es Σ_X-medible. En efecto, como f es Σ_Z-medible, la preimagen $f^{-1}(D)$ de cualquier conjunto medible D es un conjunto en la σ-álgebra Σ_Z, es decir, también es medible. Por el lema 2.12, tenemos que cada sección $(f^{-1}(D))_x$ pertenece a Σ_Y y cada sección $(f^{-1}(D))^y$ pertenece a Σ_X.

Por lo tanto, $(f_x)^{-1}(D)$ es medible en Σ_Y y $(f^y)^{-1}(D)$ es medible en Σ_X. □

3.1. Teoremas de Tonelli y Fubini en espacios de medida producto arbitrarios

El teorema de Tonelli no se aplica directamente en la integral de Riemann, pero en cambio el teorema de Fubini, tiene aplicaciones similares para integrales de Riemann y para espacios de medida producto. Si, por ejemplo, hablamos de estos teoremas para la integral Riemann y para el espacio de medida de producto de Lebesgue, habrá muchas funciones para las que podremos aplicar los teoremas para el espacio de medida producto de Lebesgue, y también aplicarlos en Riemann. Ocurrirá en muchas ocasiones, cuando la función sobre la que lo aplicamos sea Riemann integrable y a la vez Lebesgue integrable.

Para llegar a demostrar estos teoremas para espacios de medida producto necesitamos, como ya mencionamos anteriormente, demostrar el principio de Cavalieri para espacios de medida producto. Nos hace falta definir el concepto de clase monótona, que será utilizado en la demostración de dicho principio.

Definición 3.3. Una clase monótona es una colección no vacía de conjuntos $\mathcal{M} \in \mathcal{P}(X)$ que satisface las siguientes condiciones:

- Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{M}$, ($A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces la unión de esta sucesión está en $\mathcal{M}$:
$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \text{ tal que, } \forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1} \implies \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}.$$
- Si $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos en $\mathcal{M}$, ($B_n \supseteq B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), entonces la intersección de esta sucesión está en $\mathcal{M}$:
$$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \text{ tal que, } \forall n \in \mathbb{N}, B_n \supseteq B_{n+1} \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{M}.$$

Es fácil demostrar que si $\mathcal{A}$ es una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto $\mathcal{A}^*$, entonces la σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ generada por $\mathcal{A}$ contiene a la clase monótona $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{A}$. Veámoslo como ejercicio:

Ejercicio 3.4. *Demuestra que una σ-álgebra es una clase monótona. Además, dado $\mathcal{A} \subset P(X)$, siempre es posible encontrar la menor clase monótona que contiene a los elementos de $\mathcal{A}$ (clase monótona generada por $\mathcal{A}$). En particular, la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ está contenida en la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.*

Demostración. Primero vamos a ver que una σ-álgebra es una clase monótona y después que la clase monótona generada por $\mathcal{A}$ está contenida en la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$. Una σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ por definición cumple con:

1. Si $E \in \mathcal{A}^*$, entonces $E^c \in \mathcal{A}^*$.

2. Si $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}^*$.

Para demostrar que $\mathcal{A}^*$ también es una clase monótona, consideremos:

Una sucesión $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ monótona creciente ($E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo n). Por la propiedad de las σ-álgebras: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{A}^*$.

Ahora consideremos una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ monótona decreciente ($F_n \supseteq F_{n+1}$ para todo n). Consideremos los conjuntos $G_n = F_1 \setminus F_n$, que forman una sucesión monótona creciente ($G_n \subseteq G_{n+1}$). Por la propiedad de las σ-álgebras:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F_1 \setminus F_n) = F_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{A}^*,$$

y tomando el complemento: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \in \mathcal{A}^*$.

Ahora veamos la menor clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$, y para ello consideramos la intersección de todas las clases monótonas que contienen a $\mathcal{A}$. Denotemos esta clase monótona por $\mathcal{M}(A)$. La intersección de clases monótonas que contienen a $\mathcal{A}$ es no vacía, porque $\mathcal{P}(X)$ es una clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(A)$ es no vacía y es una clase monótona. Es fácil ver también que $\mathcal{M}(A)$ es la menor clase monótona que contiene a A porque se define como la intersección de todas las clases monótonas que contienen a A. Sólo nos falta ver la relación con la σ-álgebra generada por A y como cualquier σ-álgebra es una clase monótona, la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ también contiene a $\mathcal{M}(A)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(A)$ está contenida en la menor σ-álgebra generada por A.

$\square$

Otro detalle importante para demostrar el principio de Cavalieri es que si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $\mathcal{A}^* = \mathcal{M}$. Esto se denomina como lema de la clase monótona.

Lema 3.5. *(Lema clase monótona). Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de conjuntos, entonces la σ-álgebra $\mathcal{A}^*$ generada por $\mathcal{A}$ coincide con la clase monótona $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}^*$. Por tanto, veamos ahora que también se tiene que $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{M}$. Esta última afirmación quedará demostrada si comprobamos que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra de conjuntos, ya que $\mathcal{A}^*$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}^*$. Sea $E \in \mathcal{M}$, definimos:

$$\mathcal{M}(E) = \{F \in \mathcal{M} : E \setminus F, E \cap F, F \setminus E \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{M}.$$

Evidentemente $\emptyset, E \in \mathcal{M}(E)$, además, $\mathcal{M}(E)$ es una clase monótona. Veámoslo: supongamos que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia creciente de conjuntos en $\mathcal{M}(E)$ y que cada $F_n \in \mathcal{M}(E)$. Queremos demostrar que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{M}(E)$.

Sea $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$,queremos probar que $E \setminus F$, $E \cap F$, y $F \setminus E$ están en $\mathcal{M}$, ya que así llegaríamos a que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ está en $\mathcal{M}(E)$.

$$E \setminus F = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n).$$

Claramente $\{E \setminus F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia decreciente de conjuntos en $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es una clase monótona, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(E\setminus F_n) \in M$. Veamos ahora que teniendo $E\cap F = E\cap\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E\cap F_n)$, y como $\{E \cap F_n\}$ es una secuencia creciente de conjuntos en $\mathcal{M}$, llegamos a que $E \cap F \in \mathcal{M}$. En cuanto a $F \setminus E$, con un procedimiento similar llegamos a la misma conclusión. Ahora suponiendo que $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia decreciente de conjuntos en $\mathcal{M}(E)$ con cada $G_n \in \mathcal{M}(E)$, llegamos de una forma muy similar a que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{M}(E)$. Con esto ya tendriamos probado que $\mathcal{M}(E)$ es una clase montótona. A esto que probamos , le sumamos que se cumple que $F \in \mathcal{M}(E)$ si y solamente si $E \in \mathcal{M}(F)$. Si $E \in \mathcal{A}$, entonces, es claro que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(E)$, puesto que $\mathcal{A}$ genera $\mathcal{M}$. Ahora bien, como $\mathcal{M}$ es la menor clase monótona que contiene a $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{M}(E) = \mathcal{M}$, para todo $E \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, si $E \in \mathcal{A}$ y $F \in \mathcal{M}$, entonces, $F \in \mathcal{M}(E)$. En particular, si $E \in \mathcal{A}$ y $F \in \mathcal{M}$, se tiene que $E \in \mathcal{M}(F)$, de donde, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}(F)$. Volviendo a emplear otra vez el carácter minimal de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}$, para todo $F \in \mathcal{M}$. Se cumple entonces que $\mathcal{M}$ es cerrada para las intersecciones finitas y complementarios relativos. Pero como $X \in \mathcal{M}$, sea $E \in \mathcal{M}$ entonces E^c esta en $\mathcal{M}$. Por tanto, $\mathcal{M}$ es un álgebra y, como también es una clase monótona, $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra. □

Después de estos enunciados ya estamos en disposición de enunciar y demostrar el lema del principio de Cavalieri en espacios producto. Nos hemos apoyado en [4, Teorema 7.2.1].

Lema 3.6 (Principio de Cavalieri en espacios producto). *Sean (X, Σ_X, μ_X) y (Y, Σ_Y, μ_Y) dos espacios de medida σ-finitos y $E \in \Sigma_Z = \Sigma_X \times \Sigma_Y$. Se tendrá que, entonces, las funciones:*

$$f(x) = \mu_Y(E_x), \quad g(y) = \mu_X(E^y)$$

son medibles y, además,

$$\int_X f\, d\mu_X = \pi(E) = \int_Y g\, d\mu_Y.$$

Demostración. Denotemos por $\mathcal{M}$ el conjunto de los elementos de Σ_Z para los cuales la afirmación es cierta:

$$\mathcal{M} = \left\{ E \in \Sigma_Z : \pi(E) = \int_X \mu_Y(E_x) d\mu_X(x) = \int_Y \mu_X(E^y) d\mu_Y(y) \right\}$$

y veamos que $\mathcal{M} = \Sigma_Z$.

Para demostrar la afirmación anterior, es suficiente con demostrar que $\mathcal{M}$ es una clase monótona que contiene al álgebra de conjuntos Σ_{Z_0} ya que, gracias al lema de la clase monótona, $\mathcal{M} = \Sigma_Z$.

Ahora bien, dado un rectángulo medible $E = A \times B$, con $A \in \Sigma_X$ y $B \in \Sigma_Y$, se tiene que $f(x) = \mu_Y(E_x)$ y $g(y) = \mu_X(E_y)$ se pueden escribir tal que:

$$f(x) = \chi_A(x)\mu_Y(B) \quad \text{y} \quad g(y) = \chi_B(y)\mu_X(A),$$

por lo tanto:

$$\int_X f\, d\mu_X = \mu_X(A)\mu_Y(B) = \int_Y g\, d\mu_Y.$$

Sabemos que los elementos de Σ_{Z_0} se pueden escribir como unión finita de rectángulos por definición del álgebra de conjuntos para espacios de medida producto, y juntando esto con la línea anterior llegamos a que $\Sigma_{Z_0} \subseteq \mathcal{M}$.

Ahora solo nos queda ver que $\mathcal{M}$ es una clase monótona, y esto será más fácil verlo para espacios finitos, y luego generalizarlo a espacios σ-finitos.

Supongamos que $\mu_X(X) < \infty$ y que $\mu_Y(Y) < \infty$. Necesitamos ver que la unión y la intersección numerable de conjuntos está en $\mathcal{M}$ para llegar a que es una clase monótona. Por tanto, comencemos por ver que está la unión. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ con $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tendrá que:

$$f_n(x) = \mu_Y((E_{n_x})) \quad \text{y} \quad g_n(y) = \mu_X((E_n^y))$$

son tales que:

$$\int_X f_n\, d\mu_X = \pi(E_n) = \int_Y g_n\, d\mu_Y,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denotemos ahora por $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, gracias al punto 4 del teorema 1.11:

$$\pi(E) = \pi\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \pi(E_n).$$

Como $E_n \subseteq E_{n+1}$ entonces $(E_n)_x \subseteq (E_{n+1})_x$ y $(E_n)^y \subseteq (E_{n+1})^y$. Esto también nos lleva a que

$$f_n \leq f_{n+1} \quad \text{y} \quad g_n \leq g_{n+1}$$

entonces f_n, g_n son monótonas crecientes y no negativas. Por tanto, solo nos falta ver la convergencia puntual. Si $x \in X$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_Y((E_n)_x) = \mu_Y\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x\right) = \mu_Y(E_x) = f(x)$$

y si $y \in Y$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} g_n(y) = g(y) = \mu_X((E^y))$$

En este punto ya tenemos comprobada la convergencia puntual y por tanto se cumplen todas las hipótesis del Teorema de Convergencia Monótona. Lo aplicamos como sigue:

$$\int_X f\, d\mu_X = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu_X = \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n\, d\mu_Y = \lim_{n\to\infty} \pi(E_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_Y g_n\, d\mu_Y = \int_Y \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu_Y = \int_Y g\, d\mu_Y$$

Además es claro que $\lim_{n\to\infty} \pi(E_n) = \pi(E)$. Por tanto queda demostrado que $E \in \mathcal{M}$. En el caso $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $F_n \in \mathcal{M}$ con $F_{n+1} \subseteq F_n$, hay que ver que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Para comenzar, mencionamos que puesto que los espacios son finitos, entonces $\pi(F_1) < \infty$, y así podemos podremos utilizar el quinto punto del teorema 1.11, que es el que se relaciona con la intersección numerable de conjuntos:

$$\pi(E) = \pi\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \pi(E_n).$$

Vamos ahora a demostrar que se cumplen las hipótesis del teorema de convergencia dominada utilizando el hecho de que estamos con medidas finitas y el quinto punto del teorema 1.11 recientemente mencionado. Tomamos

$$f_n(x) = \mu_Y((F_n)_x) \quad \text{y} \quad g_n(y) = \mu_X((F_n)^y)$$

que serán monótonas decrecientes de términos no negativos. Como las medidas son finitas, podemos decir

$$f_n(x) \leq \chi_x(x)\mu_Y(Y) \quad \text{y} \quad g_n(y) \leq \mu_X(X)\chi_y(y)$$

y por tanto las funciones están dominadas.

Tenemos que probar también la convergencia puntual. Para ello podremos aplicar la propiedad 5 del teorema 1.11. Si $x \in X$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_Y((F_n)_x) = \mu_Y\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (F_n)_x\right) = \mu_Y(F_x) = f(x)$$

Si $y \in Y$, entonces con el mismo razonamiento

$$\lim_{n\to\infty} g_n(y) = g(y) = \mu_X((F^y))$$

Por último, al igual que en el caso de la unión numerable de conjuntos, aplicamos el teorema de convergencia monótona y concluimos que

$$\int_X f\, d\mu_X = \int_Y g\, d\mu_Y = \pi(E)$$

es decir, $F \in \mathcal{M}$.

Terminado ya para los espacios finitos, veamos ahora lo que ocurre si los espacios de medida son σ-finitos. Si lo son, tenemos que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq X$ con $\mu_X(A_n) < \infty$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$ y que $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots \subseteq Y$ con $\mu_Y(B_n) < \infty$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = Y$. En particular la medida producto es σ-finita, por lo que existirá una sucesión de rectángulos medibles $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{A_n \times B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

- $Z_n \subset Z_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $\pi(Z_n) < \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
- $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Z_n$.

Sea $E \in \Sigma_Z$ medible, tal que $E_n = E \cap Z_n$ con $\mu(E_n) < \infty$. Como los Z_n forman una sucesión creciente en el producto, que además llena a todo el producto, tenemos que $E_n \subseteq E_{n+1}$ y que $\lim_{n\to\infty} E_n = E$. Ahora, definiendo para cada E_n, $f_n(x) = \mu_Y((E_n)_x)$, $g_n(y) = \mu_X((E_n)^y)$ y $f(x) = \mu_Y(E_x)$, $g(y) = \mu_X(E^y)$, podemos repetir el argumento que hicimos con la sucesión creciente para el caso finito, con la sucesión de conjuntos $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{E \cap Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, y tendremos entonces, usando el teorema de convergencia monótona, lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_X f\, d\mu_X &= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu_X = \lim_{n\to\infty} \int_Y f_n\, d\mu_Y = \lim_{n\to\infty} \pi(E_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_Y g_n\, d\mu_Y = \int_Y \lim_{n\to\infty} g_n\, d\mu_Y = \int_Y g\, d\mu_Y\end{aligned}$$

Este $\lim_{n\to\infty} \pi(E_n)$ es igual a $\pi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \pi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E \cap Z_n))$, aplicando la propiedad 5 del teorema 1.11 a la sucesión $\{E \cap Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Por tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$ y en conclusión $\mathcal{M}$ es una clase monótona considerando medidas σ-finitas.

□

El principio de Cavalieri se usa principalmente para calcular medidas de conjuntos en espacios producto y secciones, y a diferencia de los teoremas de Tonelli y Fubini que veremos ahora, no sirve para intercambiar el órden de integración de las variables. Por tanto, el Principio de Cavalieri, aunque se relaciona con la medición de volúmenes usando secciones, no es tan general como los teoremas como los teoremas de Tonelli y Fubini.

Visto esto, vamos a ver los teoremas de Tonelli y Fubini. Para enunciarlos y demostrarlos nos hemos apoyado en [2, Theorem 10.9] y en [2, Theorem 10.10].

Teorema 3.7. *(Teorema de Tonelli). Sean (X, Σ_X, μ_X) e (Y, Σ_Y, μ_Y) dos espacios de medida σ-finitos y (Z, Σ_Z, π) el espacio de medida producto. Dada $F : Z = X \times Y \to \mathbb{R}$ una función medible con respecto a (Z, Σ_Z) y no negativa, entonces:*

- *Para todo* $x \in X$ *la función* $F_x : Y \to [0, \infty]$ *es medible con respecto a* (Y, Σ_Y).
- *Para todo* $y \in Y$ *la función* $F^y : X \to [0, \infty]$ *es medible con respecto a* (X, Σ_X).
- *La función* $f : x \in X \to f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y \in [0, \infty]$ *es medible con respecto a* (X, Σ_X).
- *La función* $g : y \in Y \to g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X \in [0, \infty]$ *es medible con respecto a* (Y, Σ_Y).

Se cumple que:

$$\int_X f \, d\mu_X = \int_Z F \, d\pi = \int_Y g \, d\mu_Y,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\int_X \left(\int_Y F \, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Z F \, d\pi = \int_Y \left(\int_X F \, d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Demostración. Si F es la función característica de un conjunto en Z, la afirmación se deduce por el principio de Cavalieri como vemos a continuación: consideramos F como la función característica de un conjunto $A \subseteq X \times Y$. Queremos demostrar que las integrales en X y Y se pueden intercambiar.

Primero, observemos que para cualquier $x \in X$, la función F_x, definida como $F_x(y) = F(x, y)$, es medible con respecto a (Y, Σ_Y), ya que F es la función característica de un conjunto.

Similarmente, para cualquier $y \in Y$, la función F^y, definida como $F^y(x) = F(x, y)$, es medible con respecto a (X, Σ_X).

Ahora, queremos intercambiar el orden de integración. Esto significa que queremos demostrar que:

$$\int_X \left(\int_Y F(x, y) \, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Y \left(\int_X F(x, y) \, d\mu_X \right) d\mu_Y$$

Para hacerlo, podemos utilizar la definición de la función característica y llegamos al principio de Cavalieri para espacios producto:

$$\int_X \left(\int_Y \chi_A(x, y) \, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Y \left(\int_X \chi_A(x, y) \, d\mu_X \right) d\mu_Y$$

Ahora demostrémoslo para una función simple medible. Una función simple medible F puede expresarse tal que:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \chi_{A_i}(x, y)$$

donde c_i son constantes y A_i son conjuntos medibles.

Como la integral de una función simple se puede calcular como la suma de las integrales de sus componentes, podemos separar la integral de F en una suma de integrales de funciones características:

$$\int_X \left(\int_Y F(x,y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \int_Y \chi_{A_i}(x,y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X$$

Continuamos sacando las constantes c_i fuera de la integral por la linealidad de esta:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_X \left(\int_Y \chi_{A_i}(x,y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X$$

Ahora, como vimos anteriormente, para cada i, la función $\chi_{A_i}(x,y)$ es medible con respecto a (Y, Σ_Y). Entonces, podemos aplicar el Teorema de Tonelli para funciones caracerísticas, y podemos intercambiar el orden de integración dentro de cada término de la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \int_Y \left(\int_X \chi_{A_i}(x,y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y$$

Por último, usamos otra vez la linealidad de la integral para combinar las integrales y llegar a:

$$\int_Y \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \int_X \chi_{A_i}(x,y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y = \int_Y \left(\int_X F(x,y)\, d\mu_X \right) d\mu_Y$$

Por lo tanto, hemos demostrado que el Teorema de Tonelli se cumple para funciones simples medibles. Nos queda solamente verlo para F siendo una función medible no negativa, para lo que nos apoyaremos en lo que hemos hecho hasta ahora. Por el teorema de aproximación de funciones medibles que enunciamos anteriormente, tenemos que existe una secuencia $(\Phi_n) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} \chi_{E_{k,n}}$ de funciones simples medibles no negativas que converge de manera monótona creciente en Z a F, siendo $\alpha_{k,n}$ constantes y $E_{k,n}$ son conjuntos medibles. Si φ_n y ψ_n se definen por:

$$\varphi_n(x) = \int_Y (\phi_n)_x \, d\mu_Y = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} \mu_Y \left((E_{k,n})_x \right)$$

$$\psi_n(y) = \int_X (\phi_n)_y \, d\mu_X = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k,n} \mu_X \left((E_{k,n})_y \right),$$

es decir, φ_n y ψ_n medibles, monótonas crecientes y no negativas, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces por el

Teorema de la Convergencia Monótona estas sucesiones dadas convergen respectivamente a

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y \quad \text{y} \quad g(y) = \int_X F_y \, d\mu_X$$

Otra aplicación del Teorema de la Convergencia Monótona implica que

$$\int_X f \, d\mu_X = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n \, d\mu_X = \lim_{n\to\infty} \int_Z \Phi_n \, d\pi = \lim_{n\to\infty} \int_Y \psi_n \, d\mu_Y = \int_Y g \, d\mu_Y.$$

El mismo teorema también muestra que

$$\int_Z F \, d\pi = \lim_{n\to\infty} \int_Z \Phi_n \, d\pi,$$

de lo cual se sigue la conclusión:

$$\int_X f \, d\mu_X = \int_Z F \, d\pi = \int_Y g \, d\mu_Y$$

□

El teorema de Tonelli es más flexible con respecto a integrales infinitas, siempre que la función sea no negativa y los espacios de medida sean σ-finitos. El teorema de Fubini permite funciones que no tienen que ser no negativas, pero exige integrabilidad en el sentido de Lebesgue, y así garantiza que las integrales iteradas $\int_X f \, d\mu_X$ y $\int_Y g \, d\mu_Y$ sean finitas. Esto, además de exigir la σ-finitud de los espacios de medida, al igual que ocurre el teorema de Tonelli. Los conjuntos donde la función $f : x \in X \to f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y \in [0, \infty]$ y la función $g : y \in Y \to g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X \in [0, \infty]$ toman los valores infinito deben ser conjuntos de medida cero, es decir, no aportar nada a la integración en infinito, ya que en otro caso las integrales de f y de g serían infinitas.

Teorema 3.8. *(Teorema de Fubini). Sean (X, Σ_X, μ_X) e (Y, Σ_Y, μ_Y) dos espacios de medida σ-finitos y (Z, Σ_Z, π) el espacio de medida producto. Dada $F : Z = X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función Lebesgue integrable con respecto a (Z, Σ_Z, π), entonces:*

- *Casi para todo $x \in X$ la función $F_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es Lebesgue integrable con respecto a (Y, Σ_Y, μ_Y).*
- *Casi para todo $y \in Y$ la función $F^y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es Lebesgue integrable con respecto a (X, Σ_X, μ_X).*
- *La función definida en casi todo $x \in X$ por $f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y \in \overline{\mathbb{R}}$ es Lebesgue integrable con respecto a (X, Σ_X, μ_X).*

- *La función definida en casi todo* $y \in Y$ *por* $g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X \in \overline{\mathbb{R}}$ *es Lebesgue integrable con respecto a* (Y, Σ_Y, μ_Y).

- *Se cumple que:*
$$\int_X f \, d\mu_X = \int_Z F \, d\pi = \int_Y g \, d\mu_Y,$$
o, lo que es lo mismo:
$$\int_X \left(\int_Y F \, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Z F \, d\pi = \int_Y \left(\int_X F \, d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Demostración. Sabemos que $F : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ una función Lebesgue integrable con respecto a la medida producto π. Se tiene que, por definición de una función Lebesgue integrable $\int_Z |F| \, d\pi < \infty$, y por tanto, su parte positiva F^+ y su parte negativa F^- tienen integral finita. Ahora aplicamos el teorema de Tonelli a estas funciones F^+ y F^-, y como son medibles por serlo F tenemos que:
$$\tilde{f}^+(x) = \int_Y (F^+)_x \, d\mu_Y, \quad \tilde{f}^-(x) = \int_Y (F^-)_x \, d\mu_Y,$$
$$\tilde{g}^+(y) = \int_X (F^+)^y \, d\mu_X, \quad \tilde{g}^-(y) = \int_X (F^-)^y \, d\mu_X,$$
son medibles para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$, respectivamente. Entonces, ya tenemos que F^+ y F^- son medibles y tienen integral finita. Gracias a esto último:
$$\int_X \tilde{f}^+ \, d\mu_X = \int_Y \tilde{g}^+ \, d\mu_Y = \int_Z F^+ \, d\pi < \infty,$$
$$\int_X \tilde{f}^- \, d\mu_X = \int_Y \tilde{g}^- \, d\mu_Y = \int_Z F^- \, d\pi < \infty,$$
y así, $\tilde{f}^+, \tilde{f}^- \in \mathcal{L}(X)$ y $\tilde{g}^+, \tilde{g}^- \in \mathcal{L}(Y)$, es decir, son todas Lebesgue integrables. Por tanto, tendremos $\tilde{f}^+(x), \tilde{f}^-(x) < \infty$ y $\tilde{g}^+(y), \tilde{g}^-(y) < \infty$ excepto en conjuntos $A \in \Sigma_X$ y $B \in \Sigma_Y$ con $\mu_X(A) = \mu_Y(B) = 0$, para los cuales no se tiene porqué cumplir. Es decir, tenemos garantizado que:
$$\tilde{f}^+(x), \tilde{f}^-(x) < \infty, \forall x \in X \setminus A,$$
$$\tilde{g}^+(y), \tilde{g}^-(y) < \infty, \forall y \in Y \setminus B.$$

Por otro lado, es claro que:
$$F_x = (F^+)_x - (F^-)_x, \quad F^y = (F^+)^y - (F^-)^y,$$
de donde, dado un elemento $x \in X \setminus A$, tenemos garantizado que $F_x \in \mathcal{L}(Y)$ y, dado un elemento $y \in Y \setminus B$, $F^y \in \mathcal{L}(X)$. Con lo cual, las funciones
$$f : x \in X \setminus A \to f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y,$$

$$g : y \in Y \setminus B \to g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X,$$

están definidas en casi todo punto de, respectivamente, X e Y. Tenemos además que:

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y = \int_Y (F^+)_x \, d\mu_Y - \int_Y (F^-)_x \, d\mu_Y = \tilde{f}^+(x) - \tilde{f}^-(x),$$

$$g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X = \int_X (F^+)^y \, d\mu_X - \int_X (F^-)^y \, d\mu_X = \tilde{g}^+(y) - \tilde{g}^-(y).$$

Por tanto, como ya vimos que $\tilde{f}^+, \tilde{f}^-, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-$ son funciones Lebesgue integrables, f y g también serán funciones Lebesgue integrables al poder expresarse como combinación lineal de funciones integrables. Para terminar:

- $$\int_X f \, d\mu_X = \int_X \tilde{f}^+ \, d\mu_X - \int_X \tilde{f}^- \, d\mu_X = \int_X (\int_Y (F^+)_x \, d\mu_Y) d\mu_X - \int_X (\int_Y (F^-)_x \, d\mu_Y) d\mu_X$$
  $$= \int_Z F^+ \, d\pi - \int_Z F^- \, d\pi = \int_Z F \, d\pi,$$

- $$\int_Y g \, d\mu_Y = \int_Y \tilde{g}^+ \, d\mu_Y - \int_Y \tilde{g}^- \, d\mu_Y = \int_Y (\int_X (F^+)^y \, d\mu_X) d\mu_Y - \int_Y (\int_X (F^-)^y \, d\mu_X) d\mu_Y$$
  $$= \int_Z F^+ \, d\pi - \int_Z F^- \, d\pi = \int_Z F \, d\pi,$$

y así quedaría demostrado el teorema de Fubini. □

Un concepto interesante que obtenemos del teorema de Fubini es que, teniendo en cuenta que requiere verificar la condición de que f sea Lebesgue integrable en Z, si $f : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, entonces, cada una de las integrales:

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x), \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)| \, d\mu_X(x) \right) d\mu_Y(y),$$

y

$$\int_Z |f(x,y)| \, d\pi(x,y),$$

es finita si, y solo si, lo son también las otras dos. Esto se deduce facilmente con ayuda del teorema de Tonelli.

En las condiciones expuestas en estos dos teoremas, vimos que se garantiza la existencia de las integrales iteradas (que podrían no ser finitas, en el caso del Teorema de Tonelli), pero estas integrales podrían existir sin que exista la integral de la función correspondiente f en $Z = X \times Y$. En tal situación, no tenemos garantizada la igualdad de estas integrales. Sin embargo, podría darse que fuesen iguales las iteradas, aunque f no sea integrable. Veamos un ejemplo que ilustra esto último:

Ejemplo 3.9. En este ejemplo trabajaremos con el espacio de medida producto de Lebesgue. Consideremos el rectángulo de $\mathbb{R}^2$, $I = [0,1] \times [0,1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean, $r_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ y $E_n = (r_n, r_{n+1}) \times (r_n, r_{n+1})$.

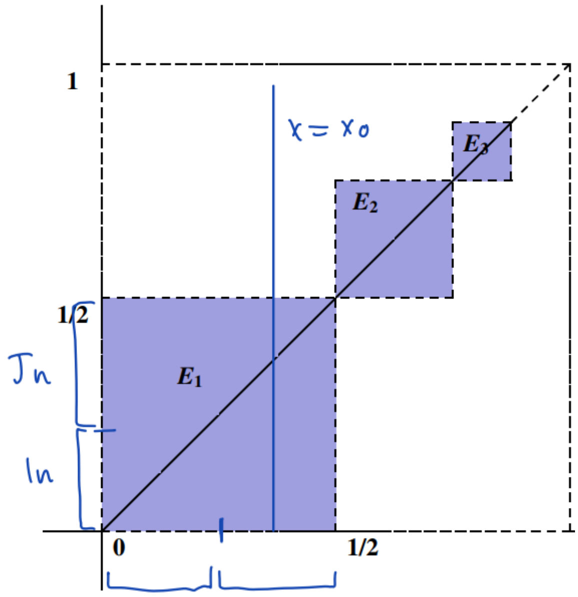

Figura 3.1: Representación de la función

El conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es un elemento de la σ-álgebra $\mathcal{L}_2$ (que será la σ-álgebra del espacio producto de Lebesgue), por ser una unión numerable de rectángulos bidimensionales. Subdividamos cada rectángulo E_n en 4 subrectángulos, $E_n^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, como se muestra en la siguiente figura.

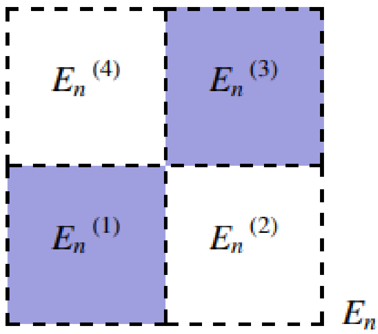

Figura 3.2: División en subrectángulos

Además, definimos la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{m_2(E_n)} = 4^n, & \text{si } (x,y) \in \mathring{E}_n^{(1)} \cup \mathring{E}_n^{(3)}, \\ -\frac{1}{m_2(E_n)} = -4^n, & \text{si } (x,y) \in \mathring{E}_n^{(2)} \cup \mathring{E}_n^{(4)}, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Vamos a ver que

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(y) dm_1(y) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

Si $x \notin (0,1)$, entonces $x = r_n$, $x = r_{n+1}$ o $x = (r_n + r_{n+1})/2$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces f_x es identicamente nula en $\mathbb{R}$ por definición de la función f y, siendo medible y, además, $\int_{\mathbb{R}} f_x(y) dm_1(y) = 0$.

Pero, si x no está en las anteriores condiciones, entonces, para algún $n \in \mathbb{N}$, o bien $x \in \left(r_n, \frac{r_n + r_{n+1}}{2}\right)$ o bien $x \in \left(\frac{r_n + r_{n+1}}{2}, r_{n+1}\right)$.

Vamos a llamar, al igual que pusimos en la figura, $I_n = \left(r_n, \frac{r_n + r_{n+1}}{2}\right)$ y $J_n = \left(\frac{r_n + r_{n+1}}{2}, r_{n+1}\right)$. Así, si $x \in I_n$, f_x es, claramente, una función simple medible y tendremos, trivialmente:

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(y) dm_1(y) = \int_{I_n} f_x(y) dy + \int_{J_n} f_x(y) dy = 0.$$

Como I_n y J_n tienen la misma longitud exactamente, la función f toma valores constantes y opuestos. Si $x \in J_n$, con el mismo razonamiento llegamos a que $\int_{\mathbb{R}} f_x(y) dm_1(y) = 0$.

Así que ya tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(y) dm_1(y) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y) dm_1(y) \right) dm_1(x) = 0.$$

Además, teniendo en cuenta la simetría de comportamiento de f, respecto de las variables x e y, llegaremos a la relación:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f^y(x) dm_1(x) \right) dm_1(y) = 0.$$

Por lo tanto, existen ambas integrales iteradas y coinciden, como queríamos ver.

Vemos que, ya no es solo que no podamos concluir de esta igualdad que f sea Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^2$, sino que

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f| dm_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{E_n} |f| dm_2 = \sum_{n=1}^{\infty} m_2(E_n) \cdot 4^n = \infty,$$

de lo que deducimos que f no es Lebesgue integrable $(\mathbb{R}^2)$.

De manera análoga, obtendríamos también,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f^{+} dm_2 = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f^{-} dm_2 = \infty.$$

Es decir, la integral $\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f dm_2$ no existe ni siquiera en sentido amplio.

Podemos también ver un ejemplo para entender mejor lo que ocurre si una de las medidas no es σ-finita, ya que, como comentamos después de demostrar el teorema de Tonelli, es una condición necesaria para que se cumplan los teoremas:

Ejemplo 3.10. Sea $X = Y = [0,1]$, μ_X la medida de Lebesgue en $[0,1]$, μ_Y la medida de contar en Y, y definamos $f(x,y)$ como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Entonces tenemos:

$$\int_X f^y(x)\, d\mu_X = 0, \qquad \int_Y f_x(y)\, d\mu_Y = 1.$$

La primera de las integrales tiene valor 0, puesto que $f(x,y) = 1$ solamente en un conjunto de medida nula para la medida de Lebesgue. En cambio, para la segunda de las integrales, como hablamos de la medida de contar y $f(x,y) = 1$ en un sólo punto, manteniendo x fijo (en el punto $x = y$), ésta es igual a 1.

$$\int_Y \left(\int_X f^y(x)\, d\mu_X \right) d\mu_Y = 0$$
$$\int_X \left(\int_Y f_x(y)\, d\mu_Y \right) d\mu_X = 1$$

Por tanto, no se cumplen los teoremas de Tonelli y Fubini. Esto se debe a que μ_Y no es σ-finita.

Nos surge ahora la duda si estos teoremas siguen manteniéndose en espacios de medida completos, puesto que estos espacios de medida producto no tienen porqué serlo, a pesar de que sí sabemos que podemos completar cualquier espacio de medida producto.

Pero para poder demostrar estos teoremas en espacios producto completados, necesitamos enunciar algún lema primero que nos ayudará en la demostración. Este primer lema no estará referido específicamente a espacios de medida producto. Podemos encontrarlo demostrado en [4, Lema 1].

Lema 3.11. *Sea* $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ *un espacio de medida y* $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ *el espacio de medida completado. Dada una función* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *medible con respecto a* $(X, \mathcal{A}_0)$*, siempre es posible encontrar una función* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *medible con respecto a* $(X, \mathcal{A}^*)$*, de forma que* $f(x) = g(x)$*, para todo* $x \in X \setminus E$*, siendo* $E \in \mathcal{A}^*$ *tal que* $\mu(E) = 0$.

Aunque podemos encontrar una función g en $\mathcal{A}^*$ que sea igual en casi todo punto a f (excepto en un conjunto de medida cero), no podemos asegurar que f sea medible en $\mathcal{A}^*$, a menos que $(X, \mathcal{A}^*, \mu)$ sea completo. Esto último es obvio, ya que en un espacio de medida completo $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_0$.

Ahora ya volviendo a espacios de medida producto, veamos otro lema que será indispensable para poder demostrar los teoremas.

Lema 3.12. *Sean* (X, Σ_X, μ_X) *e* (Y, Σ_Y, μ_Y) *dos espacios de medida completos y* σ*-finitos, y* (Z, Σ_Z, π) *el espacio de medida producto. Consideremos ahora* h *una función medible con respecto a* $(Z, \Sigma^*_{Z_0})$*, tal que existe* $E \in \Sigma_Z$*, con* $\pi(E) = 0$*, de forma que* $h(x, y) = 0$*, para todo* $(x, y) \in Z \setminus E$*. Entonces:*

1. *Casi para todo* $x \in X$*,* h_x *es medible con respecto a* (Y, Σ_Y) *y* $h_x(y) = 0$*, casi para todo* $y \in Y$.
2. *Casi para todo* $y \in Y$*,* h^y *es medible con respecto a* (X, Σ_X) *y* $h^y(x) = 0$*, casi para todo* $x \in X$.

Demostración. Por el principio de Cavalieri, tenemos lo siguiente:

$$0 = \int_X \mu_Y(E_x)\, d\mu_X = \pi(E) = \int_Y \mu_X(E^y)\, d\mu_Y.$$

Esto será clave en la demostración.

Llamemos U al siguiente conjunto: $U = \{x \in X : \mu_Y(E_x) > 0\} \in \Sigma_X$. Ahora, vamos a suponer que $\mu_X(U) > 0$, entonces U tendría una medida positiva en X. Por tanto, hay un subconjunto de X con medida positiva, concretamente U, donde $\mu_Y(E_x) > 0$. Entonces, como U tiene medida positiva y $\mu_Y(E_x) > 0$ en U:

$$\int_U \mu_Y(E_x)\, d\mu_X > 0.$$

Esto es una contradicción porque hemos visto que $\int_U \mu_Y(E_x)\, d\mu_X = 0$. Como U es el conjunto de puntos x en X para los que la medida de la sección E_x en Y es mayor que cero, claramente si $x \notin U$ pues $\mu_Y(E_x) = 0 = \pi(E_x)$. Es más, dado $x \notin U$, $h_x(y) = 0$ para todo $y \notin E_x$. Además ya vimos que para $x \notin U$, E_x tiene medida cero en Y ($\mu_Y(E_x) = 0 = \pi(E_x)$), lo que significa que $h_x(y) = 0$ para casi todos los $y \in Y$. Por tanto, si escogemos un elemento $x \notin U$, h_x es igual en casi todo punto a la función constante cero y, puesto que además, el espacio de medida (Y, Σ_Y, μ_Y) es completo, h_x es medible con respecto a (Y, Σ_Y).

El segundo caso, casi para todo $y \in Y$, h^y es medible con respecto a (X, Σ_X) y $h^y(x) = 0$, casi para todo $x \in X$, es análogo. □

Con estos dos lemas ya tenemos gran parte del teorema de Tonelli demostrado, y por tanto también del de Fubini. Estos dos teoremas se presentan en uno sólo con el nombre de Fubini-Tonelli en [3, Theorem 3.7.9], pero veámoslos por separado para que sea más facil su comprensión.

Teorema 3.13 (Teorema de Tonelli en el espacio producto completado)**.** *Sean (X, Σ_X, μ_X) y (Y, Σ_Y, μ_Y) dos espacios de medida completos y σ-finitos, y (Z, Σ_Z, π) el espacio de medida producto. Denotemos por $(Z, \Sigma^*_{Z_0}, \pi^*)$ el espacio de medida producto completado. Dada una función $F : Z \to [0, \infty]$ medible con respecto a $(Z, \Sigma^*_{Z_0}, \pi^*)$, entonces:*

1. *Casi para todo $x \in X$, la función $F_x : Y \to [0, \infty]$ es medible con respecto a (Y, Σ_Y).*
2. *Casi para todo $y \in Y$, la función $F^y : X \to [0, \infty]$ es medible con respecto a (X, Σ_X).*
3. *La función definida en casi todo punto $x \in X$ por $f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y \in [0, \infty]$ es medible con respecto a (X, Σ_X).*
4. *La función definida en casi todo punto $y \in Y$ por $g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X \in [0, \infty]$ es medible con respecto a (Y, Σ_Y).*

Se cumple que:

$$\int_X f \, d\mu_X = \int_Z F \, d\pi^* = \int_Y g \, d\mu_Y,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\int_X \left(\int_Y F \, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Z F \, d\pi^* = \int_Y \left(\int_X F \, d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Demostración. Dada una función no negativa $F : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con respecto a $(Z, \Sigma^*_{Z_0})$, por el lema 3.11, existe una función no negativa $G : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ medible con respecto a (Z, Σ_Z) y un conjunto $E \in \Sigma_Z$, con $\pi(E) = 0$, tal que $F(x, y) = G(x, y)$ para todo $(x, y) \in Z \setminus E$. En particular, si denotamos por $H = F - G$, se tendrá que $H(x, y) = 0$ para todo $(x, y) \in Z \setminus E$. Por el lema anterior, tenemos que casi para todo $x \in X$, H_x es medible con respecto a (Y, Σ_Y), y también que casi para todo $y \in Y$, H^y es medible con respecto a (X, Σ_X). Veamos primero qué implica que H_x es medible con respecto a (Y, Σ_Y).

Como G_x es medible con respecto a (Y, Σ_Y) para todo $x \in X$ (por serlo G), se tiene que $F_x = H_x + G_x$ es medible con respecto a (Y, Σ_Y), casi para todo $x \in X$. Además, $F_x(y) = G_x(y)$, casi para todo $y \in Y$. Aunque el hecho de que H^y es medible con respecto a (X, Σ_X) nos lleva con un razonamiento análogo a que F^y es medible casi para todo $y \in Y$. Vamos a verlo igualmente.

Como G^y es medible con respecto a (X, Σ_X) para todo $y \in Y$, se tiene que $F^y = H^y + G^y$ es medible con respecto a (X, Σ_X), casi para todo $y \in Y$. Además, $F^y(x) = G^y(x)$, casi para todo $x \in X$.

Teniendo en cuenta lo visto hasta ahora y, gracias a la aplicación del teorema de Tonelli a la función G, demostremos ahora que la función, definida para casi todo $x \in X$, $f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y \in [0, \infty]$ es medible con respecto a (X, Σ_X) para todo $x \in X$ y la función, definida para casi todo $y \in Y$, $g(y) = \int_X G^y \, d\mu_X$ es medible con respecto a (X, Σ_X) para todo $x \in X$.

La función $f(x) = \int_Y G_x \, d\mu_Y$ es medible con respecto a (X, Σ_X) para todo $x \in X$. Por tanto, sabemos que $f(x) = \int_Y G_x \, d\mu_Y = \int_Y F_x \, d\mu_Y$ está bien definida casi para todo $x \in X$ y es medible con respecto a (X, Σ_X). En cuanto a la función $g(y) = \int_X G^y \, d\mu_X$, ésta es medible con respecto a (Y, Σ_Y) para todo $y \in Y$. Con lo cual, $g(y) = \int_X G^y \, d\mu_X = \int_X F^y \, d\mu_X$ está bien definida casi para todo $y \in Y$, y es medible con respecto a (Y, Σ_Y).

Se cumple, por lo tanto, que:

$$\int_X \left(\int_Y F \, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Z G \, d\pi^* = \int_Y \left(\int_X F \, d\mu_X \right) d\mu_Y.$$

Ahora, como $F(x, y) = G(x, y)$ para todo $(x, y) \in Z \setminus E$, y además siendo $\pi(E) = 0$ y F medible con respecto a (Z, Σ_Z), $\int_Z G \, d\pi^* = \int_Z F \, d\pi^*$. Concluímos con que, $\int_Z F \, d\pi^* = \int_Z F \, d\pi$. Esto se debe a que el hecho de haber completado la medida π a π^* no modifica el valor de la integral de F.

$$\int_Z G \, d\pi^* = \int_Z F \, d\pi^* = \int_Z F \, d\pi.$$

Es decir, ya tenemos demostrado el teorema. □

Teorema 3.14 (Teorema de Fubini en el espacio producto completado)**.** *Consideremos (X, Σ_X, μ_X) e (Y, Σ_Y, μ_Y) dos espacios de medida σ-finitos y (Z, Σ_Z, π) el espacio de medida producto. Denotemos por $(Z, \Sigma^*_{Z_0}, \pi^*)$ el espacio de medida producto completado. Dada una función $F : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue integrable con respecto a $(Z, \Sigma^*_{Z_0}, \pi^*)$, entonces:*

- *Casi para todo $x \in X$ la función $F_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es Lebesgue integrable con respecto a (Y, Σ_Y, μ_Y).*
- *Casi para todo $y \in Y$ la función $F^y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es Lebesgue integrable con respecto a (X, Σ_X, μ_X).*
- *La función definida en casi todo $x \in X$ por $f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y \in \overline{\mathbb{R}}$ es Lebesgue integrable con respecto a (X, Σ_X, μ_X).*

- *La función definida en casi todo* $y \in Y$ *por* $g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X \in \overline{\mathbb{R}}$ *es Lebesgue integrable con respecto a* (Y, Σ_Y, μ_Y)

- *Se cumple que:*
$$\int_X f \, d\mu_X = \int_Z F \, d\pi^* = \int_Y g \, d\mu_Y$$
o, lo que es lo mismo:
$$\int_X \left(\int_Y F \, d\mu_Y \right) d\mu_X = \int_Z F \, d\pi^* = \int_Y \left(\int_X F \, d\mu_X \right) d\mu_Y .$$

Demostración. Para demostrar el teorema de Fubini en el espacio producto completado, utilizaremos el ya demostrado teorema de Tonelli para el espacio de producto completado. Esta demostración será idéntica al del teorema de Fubini en espacios producto, por tener ya demostrado el teorema de Tonelli. Para aplicar el teorema de Tonelli a una función F general (no necesariamente no negativa), consideramos la función F como una diferencia de funciones no negativas:
$$F = F^+ - F^-,$$
donde $F^+ = \text{máx}\{F, 0\}$ y $F^- = \text{máx}\{-F, 0\}$.

Dado que F es Lebesgue integrable, ya sabemos que ambas F^+ y F^- son Lebesgue integrables y podremos aplicar el teorema de Tonelli a cada una de ellas por separado. Como son Lebesgue integrables, serán medibles y tendrán integral finita. Además, como F es medible, se tendrá por el teorema de Tonelli que $\int_Y (F^+)_x \, d\mu_Y$, $\int_Y (F^+)_x \, d\mu_Y$, $\int_X (F^+)^y \, d\mu_X$ y $\int_X (F^-)^y \, d\mu_X$ son medibles, y como ya dijimos, la integral de estas integrales tiene que ser finita (son Lebesgue integrables). Por tanto, estas funciones, que denominaremos como sigue, $\tilde{f}^+(x), \tilde{f}^-(x)$ y $\tilde{g}^+(y), \tilde{g}^-(y)$, serán menores que infinito excepto en conjuntos $A \in \Sigma_X$ y $B \in \Sigma_Y$ con $\mu_X(A) = \mu_Y(B) = 0$, para los cuales no se tiene porqué cumplir. Es decir, tenemos garantizado que:
$$\tilde{f}^+(x), \tilde{f}^-(x) < \infty, \forall x \in X \setminus A,$$
$$\tilde{g}^+(y), \tilde{g}^-(y) < \infty, \forall y \in Y \setminus B.$$

Ademas, claramente:
$$F_x = (F^+)_x - (F^-)_x, \quad F^y = (F^+)^y - (F^-)^y,$$
de donde, dado un elemento $x \in X \setminus A$, tenemos garantizado que $F_x \in \mathcal{L}(Y)$ y, dado un elemento $y \in Y \setminus B$, $F^y \in \mathcal{L}(X)$. Con lo cual, las funciones
$$f : x \in X \setminus A \to f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y,$$
$$g : y \in Y \setminus B \to g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X,$$

están definidas en casi todo punto de, respectivamente, X e Y. Tenemos además que:

$$f(x) = \int_Y F_x \, d\mu_Y = \int_Y (F^+)_x \, d\mu_Y - \int_Y (F^-)_x \, d\mu_Y = \tilde{f}^+(x) - \tilde{f}^-(x),$$

$$g(y) = \int_X F^y \, d\mu_X = \int_X (F^+)^y \, d\mu_X - \int_X (F^-)^y \, d\mu_X = \tilde{g}^+(y) - \tilde{g}^-(y).$$

Por tanto, como ya vimos que $\tilde{f}^+, \tilde{f}^-, \tilde{g}^+, \tilde{g}^-$ son funciones Lebesgue integrables, f y g también serán funciones Lebesgue integrables, al poder expresarse como combinación lineal de funciones integrables. Para terminar:

- $$\int_X f \, d\mu_X = \int_X \tilde{f}^+ \, d\mu_X - \int_X \tilde{f}^- \, d\mu_X = \int_X (\int_Y (F^+)_x \, d\mu_Y) d\mu_X - \int_X (\int_Y (F^-)_x \, d\mu_Y) d\mu_X$$
  $$= \int_Z F^+ \, d\pi - \int_Z F^- \, d\pi = \int_Z F \, d\pi,$$

- $$\int_Y g \, d\mu_Y = \int_Y \tilde{g}^+ \, d\mu_Y - \int_Y \tilde{g}^- \, d\mu_Y = \int_Y (\int_X (F^+)^y \, d\mu_X) d\mu_Y - \int_Y (\int_X (F^-)^y \, d\mu_X) d\mu_Y$$
  $$= \int_Z F^+ \, d\pi - \int_Z F^- \, d\pi = \int_Z F \, d\pi,$$

y así quedaría demostrado el teorema de Fubini.

□

3.2. Teoremas de Tonelli y Fubini en $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$

En esta sección veremos los resultados particulares de los teoremas de Tonelli y Fubini, pero en el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$. Lo primero que vamos a hacer es, considerando el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, que este espacio de medida es la compleción del espacio de medida producto $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_p, m_p)$ por $(\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, m_q)$, con $p + q = N$. Esto lo demostraremos después de enunciar un teorema que será necesario en su demostración. Su demostración se encuentra en [4, Teorema 2.5.2].

Vamos a utilizar $\mathcal{F}_\sigma$ para referirnos a uniones numerables de conjuntos cerrados, y $\mathcal{G}_\delta$ para referirnos a intersecciones numerables de conjuntos abiertos. Estos conjuntos son Borel y Lebesgue medibles.

Teorema 3.15. *Para un subconjunto E de $\mathbb{R}^n$, tenemos las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *E es Lebesgue medible.*
- *Existen conjuntos A y B, de modo que A es un $\mathcal{F}_\sigma$, B un $\mathcal{G}_\delta$, $A \subseteq E \subseteq B$ y $m_N(B \setminus A) = 0$.*

Con este teorema, ya tenemos herramientas suficientes para demostrar que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ es la compleción del espacio de medida producto de $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_p, m_p)$ por $(\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, m_q)$. Nos hemos apoyado en [4, Teorema 7.4.2].

Teorema 3.16 (Compleción del espacio de medida producto de Lebesgue)**.** *Sea $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, se tendrá que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ es la compleción del espacio de medida producto de $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_p, m_p)$ por $(\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, m_q)$, con $p + q = N$, $p, q \geq 1$*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{B}_N$ a la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^N$, es decir, es la menor σ-álgebra que contiene a las celdas abiertas de $\mathbb{R}^N$. Denotemos por $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q, m_p \times m_q)$ al espacio de medida producto de $(\mathbb{R}^p, \mathcal{L}_p, m_p)$ por $(\mathbb{R}^q, \mathcal{L}_q, m_q)$. Se tendrá que:

$$\mathcal{B}_N \subset \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_N.$$

En efecto, por un lado, resulta claro que las celdas abiertas de $\mathbb{R}^N$ son elementos de la σ-álgebra producto $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$. Por tanto, claramente $\mathcal{B}_N \subset \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$. Por otro lado, por el teorema que acabamos de enunciar, sabemos que, sea un rectángulo medible $E \times F \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$, se tiene que tanto el conjunto $E \times \mathbb{R}^q$, como el conjunto $\mathbb{R}^p \times F$, son elementos de la σ-álgebra de Lebesgue $\mathcal{L}_N$ en $\mathbb{R}^N$. En particular, $E \times F = (E \times \mathbb{R}^q) \cap (\mathbb{R}^p \times F) \in \mathcal{L}_N$ y, puesto que todos los rectángulos medibles de $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$ son elementos de $\mathcal{L}_N$, se deduce que $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_N$.

Sea ahora $E \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_N$, gracias al teorema anterior, existen elementos $A, B \in \mathcal{B}_N$ tales que $A \subset E \subset B$ y, además, $m_N(B \setminus A) = 0$. Puesto que, tanto m_N como $m_p \times m_q$, son medidas invariantes por translaciones que toman el mismo valor en las celdas abiertas de $\mathbb{R}^N$, se tendrá que ambas coinciden en la σ-álgebra $\mathcal{B}_N$ (se demostrará en forma de ejercicio). En particular,

$$m_p \times m_q(E \setminus A) \leq m_p \times m_q(B \setminus A) = m_N(B \setminus A) = 0.$$

Con lo cual:

$$m_p \times m_q(E) = m_p \times m_q(A) = m_N(A) = m_N(E).$$

Esto es, las medidas $m_p \times m_q$ y m_N toman el mismo valor en los elementos de la σ-álgebra producto $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$.

Veamos finalmente que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ es la compleción de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q, m_p \times m_q)$. Para ello, es suficiente con que demostremos que los elementos de $\mathcal{L}_N$ se pueden expresar como la unión de un conjunto de $\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$ y un subconjunto de un conjunto de medida producto cero, esto es: $\mathcal{L}_N = (\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q)'$, siendo

$$(\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q)' = \{E \subset \mathbb{R}^N : E = F \cup H_1, F \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q, H_1 \subset H, H \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q, m_p \times m_q(H) = 0\}.$$

Ahora bien, dado un elemento $E \in \mathcal{L}_N$, gracias al teorema anterior, existen elementos $A, B \in \mathcal{B}_N$ tales que $A \subset E \subset B$ y, además, $m_N(B \setminus A) = 0$. Por lo tanto:

$$E = F \cup H_1,$$

donde $F = A \in \mathcal{B}_N \subset \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$ y $H_1 = E \setminus A \subset H = B \setminus A \in \mathcal{B}_N \subset \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q$, además $m_p \times m_q(H) = m_N(H) = 0$, con lo cual $E \in (\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q)'$. Por otro lado, dado un elemento $E \in (\mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q)'$,

$$E = F \cup H_1, F \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q, H_1 \subset H, H \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q, m_p \times m_q(H) = 0,$$

se tiene que $F \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_N$ y $H_1 \in \mathcal{L}_N$, ya que $H_1 \subset H$, siendo $H \in \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_N$ tal que $m_p \times m_q(H) = m_N(H) = 0$ (recordemos que el espacio de medida $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ es completo). Con lo cual $E \in \mathcal{L}_N$. □

Veamos ahora la demostración que nos queda pendiente de este teorema.

Ejercicio 3.17. *Prueba, teniendo en cuenta que,* m_N *y* $m_p \times m_q$ *son medidas invariantes por translaciones, que* m_N *y* $m_p \times m_q$ *toman el mismo valor en las celdas abiertas de* $\mathbb{R}^N$ *y que por tanto se tiene que ambas coinciden en la* σ*-álgebra* $\mathcal{B}_N$*.*

Demostración. La invarianza por traslaciones indica que para cualquier conjunto medible A en $\mathbb{R}^N$ y cualquier vector v en $\mathbb{R}^N$, se cumple que $m_N(A) = m_N(A+v)$ y $(m_p \times m_q)(A) = (m_p \times m_q)(A+v)$

Por tanto, asegura que trasladar un conjunto no influye en su medida. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es invariante por traslaciones, lo cual se sabe por la propia definición de medida de Lebesgue.

La medida producto $m_p \times m_q$ en $\mathbb{R}^N$ con $N = p + q$ también es invariante por traslaciones. Esto se debe a que trasladar el producto cartesiano de los conjuntos de un $A \times B$ por un vector (u, v) es equivalente a trasladar A por u y B por v.

Ahora veamos que estas medidas toman el mismo valor en las celdas abiertas de $\mathbb{R}^N$ y así ya tendríamos que coinciden en la σ-álgebra $\mathcal{B}_N$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^q$, sea $C \subseteq \mathbb{R}^N$.

Si tenemos una celda abierta en $\mathbb{R}^N$, $C = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$, su medida de Lebesgue m_N será:

$$m_N(C) = (b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_N - a_N)$$

Si ahora consideramos la medida de Lebesgue en m_p y en m_q en $A \subseteq \mathbb{R}^p$ y $B \subseteq \mathbb{R}^q$ respectivamente:

$$A = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_p, b_p)$$
$$B = (a_{p+1}, b_{p+1}) \times \ldots \times (a_N, b_N)$$

Tendremos:

$$m_p(A) = (b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_p - a_p)$$
$$m_q(B) = (b_{p+1} - a_{p+1}) \times \ldots \times (b_N - a_N)$$

Si ahora consideramos $C = A \times B$, veamos a qué es igual $(m_p \times m_q)(C)$:

$$(m_p \times m_q)(C) = m_p(A) \times m_q(B) = (b_1 - a_1) \times \ldots \times (b_p - a_p) \times (b_{p+1} - a_{p+1}) \times \ldots \times (b_N - a_N)$$

que precisamente es $m_N(C)$. Por tanto, ya sabemos que coinciden en las celdas abiertas de $\mathbb{R}^N$y como la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}^N$ es la menor σ-álgebra que contiene a las celdas abiertas de $\mathbb{R}^N$, podemos decir que coinciden m_N y $m_p \times m_q$ en esta σ-álgebra. □

Ahora que ya vimos que $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ es la compleción de $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \mathcal{L}_p \times \mathcal{L}_q, m_p \times m_q)$, podemos aplicar los teoremas de Tonelli y Fubini que hemos demostrado para un espacio producto completado $(Z, \Sigma^*_{Z_0}, \pi^*)$ en este caso concreto. Es $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$ el espacio de medida producto completado.

De todas formas, podemos enunciarlos y demostrarlos concretamente para el espacio de medida de Lebesgue, .

Teorema 3.18 (Teorema de Tonelli en $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ una aplicación $\mathcal{L}_N$-medible. Se cumple:*

a1) Para casi todos $x \in \mathbb{R}^p$, respecto de m_p, f_x es $\mathcal{L}_q$-medible.

a2) Para casi todos $y \in \mathbb{R}^q$, respecto de m_q, f_y es $\mathcal{L}_p$-medible.

b1) La aplicación $\varphi : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} f_x \, dm_q$ definida c.t.p.(m_p) de $\mathbb{R}^p$, es $\mathcal{L}_p$-medible.

b2) La aplicación $\psi : y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} f^y \, dm_p$ definida c.t.p.(m_q) de $\mathbb{R}^q$, es $\mathcal{L}_q$-medible.

c) $\int_{\mathbb{R}^N} f \, dm_N = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi \, dm_p = \int_{\mathbb{R}^q} \psi \, dm_q$ es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y) \, dm_N(x,y)) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y) \, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f^y(x) \, dm_p(x) \right) dm_q(y).$$

Demostración. Sea $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ una aplicación $\mathcal{L}_N$-medible. Probaremos las afirmaciones relativas a las secciones por $x \in \mathbb{R}^p$, de los apartados: a1), b1) y la primera igualdad de c), siendo similares las pruebas relativas a las secciones por $y \in \mathbb{R}^q$.

Realizaremos la prueba gradualmente, empezando por el caso de las funciones características de los conjuntos medibles.

- Si $f = \chi_E$, $E \subseteq \mathbb{R}^N$, hay que tener en cuenta que: $E \subseteq \mathcal{L}^N \implies \chi_E$ es $\mathcal{L}_N$-medible. Ademas, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, $E_x \in \mathcal{L}_q$ y por tanto, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$, χ_{E_x} es $\mathcal{L}_q$-medible. Por lo tanto, casi todas las funciones secciones de $f = \chi_E$ son medibles.

- Observemos ahora que la afirmación del apartado b1) equivale a la afirmación de que la aplicación $\varphi : x \in \mathbb{R}^p \mapsto \varphi(x) = m_q(E_x)$ (definida c.t.p.(m_p) de $\mathbb{R}^p$) es $\mathcal{L}_p$-medible, ya que $\int_{\mathbb{R}^q} f_x \, dm_q = \int_{\mathbb{R}^q} \chi_{E_x} \, dm_q = m_q(E_x)$. Por último, vamos a probar la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y) \, dm_N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y) \, dm_q(y) \right) dm_p(x)$$

  del apartado c). Vamos a deducirlo:

  - $\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y) \, dm_N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_E \, dm_N(x,y) = m_N(E)$
  - $\int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y) \, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} \chi_{E_x}(y) \, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x) \, dm_p(x)$

  Concluimos con el principio de Cavalieri que se cumple la igualdad, ya que:

$$m_N(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m_q(E_x) \, dm_p(x)$$

  Por tanto el teorema es válido para funciones características de conjuntos medibles.

- Si ahora suponemos que f es una función medible, simple y no negativa, es decir $f = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \chi_{E_i}(x,y)$ donde $c_i \geq 0$ son constantes y $E_i \subseteq \mathbb{R}^N$ son conjuntos medibles, entonces, la parte previa en la que lo probamos para funciones características de conjuntos medibles, junto con la linealidad de la integral, completarán la prueba.

- Finalmente, si $f : \mathbb{R}^N \to [0, \infty]$ es una aplicación $\mathcal{L}_N$-medible, entonces existe una sucesión de funciones medibles, simples y no negativas $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, que es monótona creciente y converge puntualmente a f en $\mathbb{R}^N$. Tendremos entonces que, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, la sucesión $\{(s_m)_x\}_{m \in \mathbb{N}}$ de las secciones por x, es una sucesión monótona creciente que converge puntualmente a la sección en f_x en $\mathbb{R}^{\shortparallel}$.

  Además, siendo s_m funciones medibles, simples y no negativas, tenemos, por los visto antes, que cada s_{m_x} es $\mathcal{L}_q$-medible para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$. Por tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto $N_m = \{x \in \mathbb{R}^p : s_{m,x} \text{ no es medible}\}$ es un conjunto de medida nula. Por lo tanto, si $N = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} N_m$, las secciones f_x serán Lebesgue medibles en $\mathbb{R}^q$, salvo, posiblemente, para los $x \in N$, siendo N un conjunto de medida nula por ser una unión numerable de los conjuntos N_m de medida nula. Por lo tanto, se cumple el apartado a1) para las funciones medibles no negativas.

Vamos a probar ahora b1). Si, para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos la función definida $\varphi_m : \mathbb{R}^p \to [0, \infty]$, c.t.p. ($m_p$) de $\mathbb{R}^p$ por:

$$\varphi_m(x) = \int_{\mathbb{R}^q} s_{m,x}\, dm_q$$

tendremos, por lo visto en la etapa previa, que por ser s_m una función simple medible y no negativa, que φ_m es medible y:

$$\int_{\mathbb{R}^N} s_m\, dm_N = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_m\, dm_p = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} s_{m_x}\, dm_q \right) dm_p.$$

Como la sucesión $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es también monótona creciente, aplicando el Teorema de la convergencia monótona tendremos que, para casi todo $x \in \mathbb{R}^p$:

$$\lim_{m \to \infty} \varphi_m(x) = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^q} s_{m_x}\, dm_q = \int_{\mathbb{R}^q} \lim_{m \to \infty} s_{m_x}\, dm_q = \int_{\mathbb{R}^q} f_x\, dm_q = \varphi(x)$$

de lo que deducimos que φ es medible.

Por tanto, solo nos falta probar c). Aplicando de nuevo el Teorema de la convergencia monótona a la sucesión $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tendremos, finalmente:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f\, dm_N &= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{m \to \infty} s_m\, dm_N = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} s_m\, dm_N = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^p} (\int_{\mathbb{R}^q} s_{m,x}\, dm_q)\, dm_p \\ &= \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \varphi_m\, dm_p = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi\, dm_p = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x\, dm_q \right) dm_p. \end{aligned}$$

□

Para concluir, veamos el teorema de Fubini.

Teorema 3.19 (Teorema de Fubini en $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, m_N)$). *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una aplicación de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$, es decir, Lebesgue integrable en $\mathbb{R}^N$.*

Se cumple:

a1) Para casi todos los $x \in \mathbb{R}^p$, respecto de m_p, f_x es de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$.

a2) Para casi todos los $y \in \mathbb{R}^q$, respecto de m_q, f^y es de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$.

b1) La aplicación ϕ, definida casi en todo punto (c.t.p.) de $\mathbb{R}^p$, es de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$:

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y)\, dm_q(y).$$

b2) La aplicación ψ, definida c.t.p. de $\mathbb{R}^q$, es de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$:

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y)\, dm_p(x).$$

c)

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\, dm_N = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi\, dm_p = \int_{\mathbb{R}^q} \psi\, dm_q,$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, dm_N(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y) \right) dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\, dm_p(x) \right) dm_q(y).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ y pongamos

$$f = f^+ - f^-.$$

Como sabemos, tendremos $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ y, además,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\, dm_N = \int_{\mathbb{R}^N} f^+\, dm_N - \int_{\mathbb{R}^N} f^-\, dm_N.$$

Observando que, para $x \in \mathbb{R}^p$ y para $y \in \mathbb{R}^q$, se cumple, respectivamente, $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x = (f_x)^+ - (f_x)^-$ y $f^y = (f^+)^y - (f^-)^y = (f^y)^+ - (f^y)^-$.

Si juntamos el teorema de Tonelli con el hecho de que f^+ y f^- sean Lebesgue integrables y no negativas, entonces tenemos las igualdades

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^+\, dm_N = \int_p \varphi^+\, dm_p = \int_q \psi^+\, dm_q$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^-\, dm_N = \int_p \varphi^-\, dm_p = \int_q \psi^-\, dm_q.$$

Éstas implican que φ^+, φ^- y ψ^+, ψ^- son, también, Lebesgue integrables. Por tanto, quiere decir que:

- φ^+, φ^- son finitas en c.t.p.(m_p) de $\mathbb{R}^p$
- ψ^+, ψ^- son finitas en c.t.p.(m_q) de $\mathbb{R}^q$

Sabiendo esto, como

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x(y)\, dm_q(y) = \int_{\mathbb{R}^q} f_x^+(y)\, dm_q(y) - \int_{\mathbb{R}^q} f_x^-(y)\, dm_q(y) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x)$$

para casi todos los x en $\mathbb{R}^p$, respecto de m_p, f_x es Lebesgue integrable; y como

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^p} f^y(x)\, dm_p(x) = \int_{\mathbb{R}^p} (f^y)^+(x)\, dm_p(x) - \int_{\mathbb{R}^p} (f^y)^+(x)\, dm_p(x)$$

para casi todos los y en $\mathbb{R}^q$, respecto de m_q, f^y es Lebesgue integrable. Podemos concluir que, $f_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p)$ para casi todo x, respecto de m_p, y que, $f^y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^q)$ para casi todos los y en q, respecto de m_q. Claramente, como φ^+, φ^- y ψ^+, ψ^- son, también, Lebesgue integrables, b1) y b2) se cumplen; y por último, la igualdad en c) se deduce también de lo visto hasta ahora en la demostración junto al teorema de Tonelli. $\square$

Bibliografía

[1] Cohn, D. L. (2013) *Measure theory*, 2nd ed., Birkhäuser, Basel.

[2] Bartle, R. G. (1995) *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, Inc., New York.

[3] Benedetto, J. J. (2009) *Integration and Modern Analysis*, Birkhäuser, Maryland.

[4] Rudin, W. (1987). *Análisis Real y Complejo*, Primera edición española, Alhambra, Madrid.