



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Xeometría global de curvas

Candela Rodríguez Otero

Curso 2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# **Xeometría global de curvas**

Candela Rodríguez Otero

Xuño, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

|   |
|---|
| <b>Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía</b>   |
| <b>Título: Xeometría global de curvas</b>   |
| <b>Breve descrición do contido</b>  |
| Estudaranse varios resultados clásicos da xeometría global de curvas diferenciáveis no plano ou no espazo euclidiano, coma os teoremas da curva pechada de Jordan e da Umlaufsatz de Hopf, a desigualdade isoperimétrica para curvas planas, o teorema dos catro vértices, ou o teorema de Fenchel. |
| <b>Recomendacións</b>   |
| Recoméndase cursar a materia de Variedades Diferenciáveis.  |
| <b>Outras observacións</b>  |
|   |



# Índice

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Resumo</b>                            | <b>VIII</b> |
| <b>Introdución</b>                       | <b>XI</b>   |
| <b>1. Curvas diferenciables no plano</b> | <b>1</b>    |
| <b>2. Teorema da Umlaufsatz de Hopf</b>  | <b>7</b>    |
| 2.1. Grao dunha función . . . . .        | 7           |
| 2.2. Teorema e demostración . . . . .    | 9           |
| <b>3. Teorema da curva de Jordan</b>     | <b>19</b>   |
| 3.1. Veciñanza tubular . . . . .         | 20          |
| 3.2. Teorema e demostración . . . . .    | 22          |
| <b>4. A desigualdade isoperimétrica</b>  | <b>29</b>   |
| 4.1. Teorema e demostración . . . . .    | 31          |
| 4.2. Máis dimensións . . . . .           | 33          |
| <b>5. O teorema de Fenchel</b>           | <b>35</b>   |
| 5.1. Teorema e demostración . . . . .    | 39          |
| <b>6. Teorema dos catro vértices</b>     | <b>41</b>   |
| 6.1. Teorema e demostración . . . . .    | 42          |

---

|                                |           |
|--------------------------------|-----------|
| 6.2. Xeneralizacións . . . . . | 45        |
| <b>Bibliografía</b>            | <b>47</b> |





## Resumo

O obxectivo deste traballo é contextualizar, enunciar e demostrar algúns dos teoremas máis relevantes da teoría global de curvas planas desde a perspectiva da xeometría diferencial. Así, abordaremos o estudo da Umlaufsatz de Hopf, o teorema da curva pechada de Jordan, a desigualdade isoperimétrica, o teorema de Fenchel e o teorema dos catro vértices. Despois dunha breve introdución aos conceptos básicos da xeometría diferencial de curvas planas, presentaremos as ferramentas necesarias para o estudo de cada un dos resultados mencionados, para finalmente proporcionar unha proba de cada un deles. Tales probas serán eminentemente xeométricas, se ben en varios casos contarán cunha compoñente topolóxica e analítica importante.

## Abstract

The objective of this work is to contextualize, state and prove some of the most relevant theorems of the global theory of plane curves from a differential geometry perspective. Thus, we will address the study of Hopf's Umlaufsatz, Jordan's closed curve theorem, the isoperimetric inequality, Fenchel's theorem and the four-vertex theorem. After a short introduction to the basic concepts of differential geometry of plane curves, we will present the necessary tools for the study of each of the mentioned results, to finally provide a proof of each of them. Such proofs will be eminently geometric, although in several cases they will have an important topological and analytical component.



# Introdución

Nas seguintes páxinas levaremos a cabo o desenvolvemento dunha serie de teoremas e as súas respectivas demostracións, cuxo significado tivo unha grande importancia no éxito da xeometría diferencial ao longo das últimas décadas. A disciplina da xeometría diferencial está presente en gran cantidade de estudos das Matemáticas, aínda que certamente tamén resulta indispensable para outras ramas das ciencias.

Para o estudo da xeometría diferencial precisamos dunha serie de ideas e nocións básicas doutras ramas das matemáticas como poden ser a análise, a topoloxía ou a álgebra. Así, no primeiro capítulo, que servirá a modo introdutorio, recordaremos unha serie de ideas referidas á xeometría diferencial clásica e, en particular, á teoría de curvas planas, as cales resultarán esenciais para o posterior traballo dos teoremas. Así mesmo, ao longo de todo o traballo e cando sexa pertinente incluíranse as definicións e proposicións relativas a distintos campos das matemáticas que resulten cruciais para o entendemento completo das cuestións relativas ao tema que esteamos a tratar. Ademais, ao longo do traballo incluiremos unha serie de imaxes e debuxos, baseados principalmente nas figuras de [22], que serán de grande axuda á hora de entender as diversas demostracións de carácter xeométrico, pois moitos dos teoremas basearán a súa demostración nunha idea xeométrica. De todas formas, algunhas probas poderíamolas considerar tamén de carácter analítico, sendo por exemplo a demostración do teorema dos catro vértices unha demostración por redución ao absurdo tendo en conta o signo da derivada da función curvatura. Para a realización deste traballo botouse man dunha ampla bibliografía, aínda que os principais resultados e demostracións pódense atopar nas seguintes referencias: [2, 5, 17, 22], sendo algúns deles libros de grande relevancia na historia recente da xeometría diferencial.

Os teoremas que trataremos forman parte do que comunmente se nomea como teoría global de curvas planas, de aí o título do traballo. En xeral, traballaremos con curvas planas simples e pechadas, cuxo significado veremos no primeiro capítulo, e sempre consideraremos curvas parametrizadas diferenciábeis, caendo así no marco da xeometría diferencial. Nos capítulos que constitúen o núcleo principal do traballo faremos unha pequena introdución a cada un dos teoremas, xa sexa con contexto histórico ou coas definicións e lemas necesarios e, ás veces, con ambas

cousas. A continuación, procederemos ao enunciado e demostración dos diversos teoremas, onde nalgúns casos finalizaremos o capítulo cunha serie de xeneralizacións ou anotacións sobre o mesmo. Comentamos brevemente o contido de cada un destes capítulos.

No capítulo 2 trataremos sobre o teorema da Umlaufsatz de Hopf. Para iso, primeiramente definiremos o grao dunha función da circunferencia en si mesma, pois esta será a clave de toda a demostración. Coa axuda dun lema sobre o grao de funcións baixo certas hipóteses probaremos que o índice de rotación dunha curva cumprindo plana pechada simple é  $\pm 1$  (que é o contido da Umlaufsatz de Hopf), grazas á relación latente entre o índice de rotación dunha curva e o grao da mesma. Neste capítulo tamén destacaremos a relación existente entre o teorema que dá nome a este capítulo co do seguinte.

No terceiro capítulo trataremos un dos teoremas máis relevantes e coñecidos, que cunha grande sinxeleza no seu enunciado destaca pola súa complexidade á hora da demostración. Este é o teorema da curva de Jordan. Neste caso precisaremos definir o concepto de veciñanza tubular e os seus respectivos teoremas de existencia local e global. Ademais, poderíamos dividir a demostración en dúas partes, unha primeira de carácter xeométrico na que empregaremos o índice dunha curva respecto dun punto e a idea de grao dunha función, para despois finalizala cunha parte cuxo razoamento podemos considerar máis topolóxico. Ademais, comentaremos brevemente unha serie de xeneralizacións e demostracións alternativas. Cabe salienta neste punto que a demostración coa que traballaremos en profundidade ten a peculiaridade de que a curva que estamos a empregar debe ser diferenciable, pois o teorema orixinal só precisa da continuidade.

Seguindo co cuarto capítulo, comezaremos presentando a interesante orixe do problema da desigualdade isoperimétrica, que se enmarca nunha lenda da Antigüidade, aínda que o teorema tivo unha longa traxectoria na historia da Matemática. Previo á demostración, recordaremos un teorema fundamental do cálculo como o é o teorema de Green e un lema como consecuencia do mesmo. Procederemos entón co desenvolvemento da demostración baseándonos esta vez nunha serie de ideas analíticas pero que en gran medida poderemos relacionar coa xeometría. Para finalizar, analizaremos unha serie de xeneralizacións a dimensións superiores, en particular, ao caso de superficies e volumes no espazo euclidiano tridimensional.

Para o capítulo 5 comezaremos por definir novamente unha serie de termos que serán cruciais tanto para o teorema como para a demostración do mesmo. Neste caso estaremos a falar do teorema de Fenchel: trataremos de ver que a curvatura total dunha curva pechada simple no plano é maior ou igual ca  $2\pi$  e veremos a condición para que se cumpra a igualdade. Para iso, botaremos man dunha serie de lemas de grande interese xeométrico e que resultaran ser o punto clave para ver a posterior convexidade, cuxa definición e caracterización tamén estudaremos, da curva que esteamos a considerar.

Para finalizar o traballo estudaremos o coñecido como teorema dos catro vértices, que afirma que toda curva plana pechada e convexa ten polo menos catro vértices. Definindo primeiramente a noción de vértice dunha curva, despois veremos unha versión da demostración do teorema dos catro vértices. Para iso, usaremos un par de ideas relacionadas co cálculo integral. Adicionalmente, faremos unha introdución a dúas demostracións alternativas, baseándose a primeira nas circunferencias circunscritas e a segunda, na que afondaremos máis, nas circunferencias osculatrices. Ademais, enunciaremos o coñecido como teorema da lúa nun charco, que nos dará a chave para poder levar a cabo a demostración alternativa.

Deste xeito, neste traballo desenvolvemos unha análise dalgúns dos principais teoremas da teoría global de curvas planas diferenciables. Se ben estes resultados se poden catalogar como teoremas clásicos, é importante sinalar que teñen dado lugar a múltiples xeneralizacións e a liñas de investigación de relevancia no eido da xeometría diferencial e a análise xeométrica, algunhas das cales seguen vixentes na actualidade.



# Capítulo 1

## Curvas diferenciables no plano

Para poder iniciarnos co obxectivo do traballo, que vén a ser a demostración dalgúns dos teoremas sobre curvas planas máis importantes, teremos que primeiro ver e comprender unha serie de termos e ideas sobre xeometría diferencial, á vez que asentarán unha base para poder desenvolver os contidos teóricos. Por todo iso, este capítulo serviranos para recoller todas estes conceptos e conectalos de xeito que cando os nomeemos máis adiante xa teñamos unha idea do que estamos a falar. As definicións clásicas aquí escritas pódense atopar en [8, 17, 22, 23] entre outros, aínda que podería variar a notación. Todas elas serán explicados sen afondar demasiado, pero si coa concisión suficiente como para que a súa claridade nos permita o posterior uso.

Comecemos por introducir a definición de curva nun plano. Podemos pensar intuitivamente nunha curva como o movemento que realiza unha partícula. De xeito máis matemático, unha curva é unha aplicación  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  determinando para cada instante  $t$  unha posición no espazo euclidiano  $\mathbb{R}^n$  e onde o intervalo  $I$  se corresponde con calquera das seguintes posibilidades:  $(a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, \infty)$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ ; en particular, para o intervalo  $I = [a, b]$  estaremos a considerar o que ás veces se denomina segmento de curva. Podemos escribir as coordenadas dunha curva  $\alpha$  no espazo  $\mathbb{R}^n$  do seguinte xeito:  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ . Deste modo de definila podemos desenvolver unha serie de novas nocións e características a ter en conta, como poden ser a velocidade dunha curva ou a orientación, que veremos máis adiante.

Para poder falar da velocidade e da aceleración dunha curva debemos de ter en conta a diferenciabilidade da mesma. No noso caso estaremos a supoñer que todas as nosas curvas son de clase  $C^\infty$ , é dicir, infinitamente diferenciables. O noso concepto de curva neste traballo será, por tanto, o de curva parametrizada diferenciable. Ademais, cabe destacar que habitualmente se fai un uso abusivo da linguaxe empregando de xeito equivalente as ideas de curva e traza dunha curva parametrizada, sendo a segunda a imaxe da aplicación, isto é,  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$ .

Cando estamos a percorrer unha curva debemos de ter en conta como estamos a facelo. Por iso, diremos que parametrizar é o mesmo que ver o xeito que temos de percorrer a curva. Así mesmo, podemos definir outras nocións relacionadas cunha curva, como é o vector velocidade en cada instante  $t \in I$ , que consiste en tomar a respectiva derivada en cada compoñente de  $\alpha$ ,  $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))$ .

Outra característica que resultará de grande utilidade para algún dos resultados que veremos está relacionada co que poderíamos chamar a “existencia de puntos críticos na curva”. Por iso, recordamos a idea de curva regular:

**Definición 1.1.** Sexa  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  unha curva e  $I$  un intervalo aberto. Dicimos que a curva é **regular** se para todo  $t$  en  $I$  a derivada non se anula, é dicir,  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

No caso en que se cumpra  $\alpha'(t_0) = 0$  para algún  $t_0$  teremos que  $\alpha$  ten un punto **singular** en  $t_0$ .

Agora ben, algunhas veces interesaranos recorrer a (traza dunha) curva de xeito distinto a como vén definida. Para iso, faremos o que se denomina como reparametrización, é dicir, compoñer a nosa curva cun difeomorfismo de xeito que a resultante da composición será a nova curva. De xeito máis preciso temos:

**Definición 1.2.** Se  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é unha curva, chamamos **cambio de parámetro** a un difeomorfismo  $h: J \rightarrow I$ , onde  $J$  é un intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Así, denotamos por  $\beta = \alpha \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  á **reparametrización** de  $\alpha$  determinada polo cambio de parámetro  $\beta$ .

Neste caso, se queremos calcular a derivada da curva  $\beta$  chega con aplicar a regra da cadea,  $\beta'(t) = \alpha'(h(t)) \cdot h'(t)$  para todo  $t \in J$ . Ademais, sabemos que se  $\alpha$  é regular entón calquera reparametrización tamén o será, xa que por ser  $h$  un difeomorfismo tense que  $h'(t) \neq 0$  para todo  $t \in J$ . No caso de ser esta derivada positiva ou negativa estaremos mantendo ou invertendo a orientación da curva, respectivamente.

Outro concepto asociado a unha curva diferenciable que será crucial coñecer é o de lonxitude dunha curva. Se quixeramos calcular de xeito analítico a lonxitude dunha curva tomaríamos unha partición da mesma de xeito que canto máis fina fose máis axeitada sería a aproximación. Baseados nesta idea de lonxitude como límite, definimos a **lonxitude** dunha curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  no intervalo  $[a, b] \subset I$  como:

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt,$$

onde  $|\cdot|$  denota a norma do vector. Se se sobreentende polo contexto cal é o segmento de curva do que se está calculando a súa lonxitude, poderemos escribir simplemente  $L(\alpha)$ . Temos ademais que a lonxitude dunha curva permanece invariante por reparametrizacións.

Unha vez chegados a este punto, interesaranos considerar curvas parametrizadas diferenciables con propiedades concretas que nos facilitarán o traballo de contas para certas demostracións.

Estas son as chamadas curvas parametrizadas por lonxitude de arco.

**Definición 1.3.** Diremos que unha curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  está **parametrizada por lonxitude de arco** se se cumpre que para todo  $t \in I$  a velocidade ten módulo un,  $|\alpha'(t)| = 1$ . Denotáremola por *p.p.a.*

Podemos entón enunciar o seguinte resultado, crucial para poder desenvolver a teoría de curvas.

**Teorema 1.4.** *Toda curva regular admite unha reparametrización por lonxitude de arco cun cambio de parámetro que conserva a orientación.*

Este teorema non implica expresamente que vaíamos ser capaces de atopar tal reparametrización explicitamente, senón que, máis ben, teoricamente sempre poderemos supoñer que as curvas que tomemos están parametrizadas por lonxitude de arco.

Ao longo do traballo empregaremos curvas planas, é dicir, contidas nun plano. Antes de caracterizar este tipo de curvas cabe primeiro recordar como funciona a estrutura complexa en  $\mathbb{R}^2$ , é dicir, a rotación de  $\pi/2$  radiáns en sentido positivo dun vector. Se esta rotación a denotamos por  $J$ , podemos definila como a aplicación  $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de xeito que  $J(x, y) = (-y, x)$ . Así, chegamos á definición de vector normal a unha curva  $\alpha$  nun punto  $\alpha(t)$ :

**Definición 1.5.** Chamaremos **vector normal** nun instante  $t \in I$  a unha curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  plana regular e parametrizada por lonxitude de arco ao vector que denotaremos por  $N(t) = J(\alpha'(t))$ , onde a  $J$  é a estrutura complexa que acabamos de ver. O vector de velocidade e o vector normal dunha curva nun instante dado conforman unha base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ .

Podemos entón dar unha definición para a curvatura que describa de xeito local a nosa curva.

**Definición 1.6.** Chamaremos **curvatura** (con signo) dunha curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$  plana regular parametrizada por lonxitude de arco á aplicación  $k_s: I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$k_s(t) := \langle \alpha''(t), J(\alpha'(t)) \rangle.$$

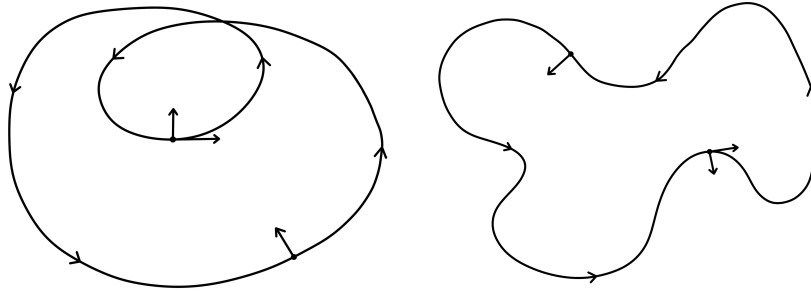
Dende un punto de vista local, unha curva plana ten “poucas posibilidades á hora de moverse”, por iso será de crucial importancia ter en conta a curvatura, que caracterizará a súa xeometría. Pois, segundo o teorema fundamental da teoría local de curvas planas, teremos que dada unha aplicación curvatura,  $k: I \rightarrow [0, \infty)$ , existe unha curva plana  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada por lonxitude de arco tal que a súa función curvatura con signo é precisamente  $k$ . Ademais, tal curva é única salvo movementos ríxidos do plano (é dicir, composicións de rotacións, reflexións e translacións no plano). Pódese consultar o enunciado completo e unha demostración do mesmo

en [5]. Ademais, para unha curva  $\alpha$  p.p.a. teremos que o valor absoluto  $|k_s|$  da súa curvatura con signo coincide coa súa curvatura  $k$ , definida como norma da aceleración de  $\alpha$ , xa que:

$$k(t) = |\alpha''(t)| = |k_s(t) \cdot J\alpha'(t)| = |k_s(t)|. \quad (1.1)$$

Para cada punto  $\alpha(t)$  dunha curva  $\alpha$ , podemos definir dúas rectas relevantes: a recta tanxente e a recta normal. Chamamos **recta tanxente** a aquela recta pasando polo punto  $\alpha(t)$  e con dirección  $\alpha'(t)$ , sempre e cando  $\alpha'(t) \neq 0$ , e que intuitivamente podemos pensala como a recta máis “pegada” á curva en tal punto. Pola contra, a **recta normal** a  $\alpha$  no instante  $t$  é a recta perpendicular á recta tanxente no instante  $t$  que pasa polo punto  $\alpha(t)$ . Notemos que estamos definindo os conceptos afíns de recta tanxente e normal. Con frecuencia, úsanse os mesmos termos para referirnos aos subespazos vectoriais de  $\mathbb{R}^2$  correspondentes. En cada caso debe sobreentenderse cal das dúas nocións (afín ou vectorial) convén empregar.

Unha vez vistas algunhas nocións máis básicas da teoría local de curvas planas, vexamos agora unha serie de definicións e ideas relacionadas coa teoría global, reflectidas na seguinte figura:



(a) Curva pechada non simple.

(b) Curva pechada simple.

Comecemos por definir unha curva pechada. Intuitivamente podemos velo como que unha curva é pechada se comeza e acaba no mesmo punto, con diferenciabilidade. É dicir, poderíamos pensar que dada unha curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  bastaría que se cumprise  $\alpha(a) = \alpha(b)$ , mais na noción de curva pechada requírese ademais que a curva peche “ben”. Vexamos unha definición formal máis precisa.

**Definición 1.7.** Diremos que unha curva parametrizada regular plana  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é **pechada** se cumpre que todas as derivadas coinciden no bordo do intervalo:

$$\alpha(a) = \alpha(b), \quad \alpha'(a) = \alpha'(b), \quad \alpha''(a) = \alpha''(b), \dots$$

Ás veces pode ser útil pensar unha curva pechada a través da súa extensión periódica a  $\mathbb{R}$ , é dicir, a única aplicación diferenciable  $\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de período  $b - a$  tal que  $\tilde{\alpha}|_{[a, b]} = \alpha$ . Podemos

tamén pensar unha curva pechada como unha aplicación (diferenciable) da circunferencia  $S^1$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Finalmente, con frecuencia interesaranos que a nosa curva non teña autointerseccións, para o cal se introduce a noción de curva simple.

**Definición 1.8.** Diremos que unha curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é **simple** se é inxectiva ou se, sendo periódica de período fundamental  $s$ , cumpre que  $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$  se, e só se,  $t_2 - t_1 = ns$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Habitualmente ao longo deste traballo consideraremos curvas diferenciables pechadas e simples, constituíndo estas, no caso plano, o obxecto fundamental de estudo.



## Capítulo 2

# Teorema da Umlaufsatz de Hopf

Neste capítulo afondaremos no teorema da Umlaufsatz de Hopf (que se podería traducir como “teorema da circulación”), debido ao matemático suízo-alemán Heinz Hopf (1894-1971). Como veremos, este resultado está relacionado co teorema que trataremos no seguinte capítulo, o teorema da curva pechada de Jordan. Ambos proporcionan unha condición para determinar a orientación dunha curva. No caso deste primeiro teorema proporcionaranos a condición de que unha curva  $\alpha$  está positivamente orientada se o seu índice de rotación é 1, que é a primeira entrada da Definición 3.6.

### 2.1. Grao dunha función

Antes de poñernos coa demostración do teorema de Hopf primeiro precisaremos ver unha serie de definicións e ideas que serán clave para a posterior demostración. Comezaremos por definir o concepto de grao dunha curva pechada. As definicións e proposicións desta sección pódense atopar en [5]. Consideremos a circunferencia

$$S^1 \cong \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 = 1\}$$

e a aplicación  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , que será un recubrimento de  $S^1$  pola recta real  $\mathbb{R}$ , dada por  $\pi(t) = e^{it}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Para poder ver un dos teoremas fundamentais sobre levantamentos, primeiro debemos definir o que é un recubrimento. Para iso, tomemos dous espazos topolóxicos  $B$  e  $\tilde{B}$ . Chamaremos **aplicación recubrimento** a unha aplicación  $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$  cumprindo:

1.  $\pi$  é continua e  $\pi(\tilde{B}) = B$ .

2. Cada punto  $p \in B$  ten unha veciñanza  $U$  en  $B$  cumprindo

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha},$$

onde os  $V_{\alpha}$  son subconxuntos abertos de  $\tilde{B}$  disxuntos dous a dous e tales que a restrición da aplicación  $\pi$  a cada conxunto  $V_{\alpha}$  é un homeomorfismo de  $V_{\alpha}$  en  $U$ .

Así, diremos que o espazo topolóxico  $\tilde{B}$  é un **recubrimento** de  $B$ .

**Proposición 2.1.** *Sexa  $\pi: \tilde{B} \rightarrow B$  un recubrimento,  $\varphi: [0, l] \rightarrow B$  unha aplicación continua e  $\tilde{p}_0 \in \tilde{B}$  un punto de  $\tilde{B}$  de xeito que  $\pi(\tilde{p}_0) = \varphi(0) = p_0$ . Entón, existe un único levantamento  $\tilde{\varphi}: [0, l] \rightarrow \tilde{B}$  de  $\alpha$  con orixe en  $\tilde{p}_0$ , é dicir, unha única aplicación continua  $\tilde{\varphi}$  cumprindo  $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$  e  $\tilde{\varphi}(0) = \tilde{p}_0$ .*

Para a demostración pódese consultar [5, páx. 382].

Consideremos unha aplicación continua  $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(l) = p \in S^1$ , a cal podemos denominar como arco pechado en  $S^1$  no punto  $p$ . O arco  $\varphi$  pódese levantar, vía o recubrimento  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $t \mapsto e^{it}$ , pola proposición anterior nunha única aplicación continua  $\tilde{\varphi}: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $\tilde{\varphi}(0) = x \in \mathbb{R}$  e  $\pi(x) = p$ . Como  $\pi(\tilde{\varphi}(0)) = \pi(\tilde{\varphi}(l))$ , tense que a diferenza  $\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)$  é un múltiplo de  $2\pi$ .

**Definición 2.2.** Chamamos **grao** de  $\varphi$ , e denotarémolo por  $\deg \varphi$ , ao número enteiro cumprindo que

$$\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0) = \deg \varphi \cdot 2\pi.$$

Pode demostrarse que o grao se conserva por homotopías, como se pode ver en [5, páx. 398].

Se o pensamos xeometricamente, é fácil ver que o grao de  $\varphi$  é o número de veces que a función  $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$  enrosca o intervalo  $[0, l]$  arredor de  $S^1$ . Ademais, a función  $\tilde{\varphi}: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  é unha determinación continua do ángulo positivo que o vector fixo  $\varphi(0) - \mathcal{O}$  fai co vector  $\varphi(t) - \mathcal{O}$ , onde  $t \in [0, l]$  e  $\mathcal{O} = (0, 0)$ .

Aplicaremos agora o concepto de grao ao caso de curvas planas pechadas. Sexa  $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  unha curva plana continua e pechada. Tomamos agora un punto  $p_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $p_0 \notin \alpha([0, l])$ , e sexa  $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$  dada por

$$\varphi(t) = \frac{\alpha(t) - p_0}{|\alpha(t) - p_0|}, \quad t \in [0, l].$$

Temos entón que  $\varphi(0) = \varphi(l)$ . Ademais,  $\varphi$  pódese identificar cunha aplicación de  $S^1$  en  $S^1$ , especificamente, coa aplicación dada por  $\psi(e^{\frac{2\pi it}{l}}) = \varphi(t)$ , para  $t \in [0, l]$ . Á aplicación  $\varphi$  denomínaselle **aplicación posición** de  $\alpha$  relativa a  $p_0$ . Ao grao de  $\varphi$  chamáremoslle **índice**

da curva  $\alpha$  respecto de  $p_0$  e denotarémolo por  $\text{ind}_{p_0} C$ , sendo  $C$  a traza da curva  $\alpha$ . Ademais, tense que o índice de  $\alpha$  respecto de  $p_0$  é independente do punto  $p_0$  que tomemos nunha mesma compoñente conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0, l])$ .

Pasando xa a considerar curvas diferenciables, o concepto de grao permítenos definir o que chamaremos **índice de rotación dunha curva**. Para iso, tomemos unha curva  $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  plana, regular e pechada e definamos a aplicación  $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$  como:

$$\varphi(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}, \quad t \in [0, l].$$

Neste caso teremos que a aplicación  $\varphi$  é diferenciable cumprindo  $\varphi(0) = \varphi(l)$ . O índice de rotación da curva  $\alpha$  será o grao da función  $\varphi$  asociada. Podemos interpretalo como o número de voltas enteiras que dá o vector tanxente á curva  $\alpha$  no seu percorrido.

## 2.2. Teorema e demostración

Se temos unha curva plana pechada que non se autointerseca o seu índice de rotación será 1 ou  $-1$ . Aínda que esta afirmación xa fora enunciada por Euler, a primeira vez que foi entendida e demostrada foi por H. Hopf. A demostración que veremos é un exemplo dunha combinación elegante de argumentos xeométricos e analíticos.

Antes de afondar no resultado como tal vexamos un lema previo que precisaremos para a súa demostración. Seguimos aquí a referencia [22, pax. 63] aínda que adaptado á notación que empregamos para a Definición 2.2 de grao. Dada unha función continua  $\varphi: [0, l] \rightarrow S^1$  coma na definición de grao, o seu levantamento  $\tilde{\varphi}: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  ten unha interpretación xeométrica interesante: trátase dunha determinación continua do ángulo, como xa indicamos xusto despois da Definición 2.2. Tal levantamento denominarémolo **función ángulo**. Reformulemos brevemente isto, introducindo unha nova notación. Consideraremos, sendo equivalente para a definición, que o intervalo no que está definida  $\varphi$  sexa  $[a, b]$  en lugar de  $[0, l]$ , pois é o dominio habitual que estabamos a empregar á hora de definir as curvas. Podemos entón escribir a seguinte función continua  $f: [a, b] \rightarrow S^1$  cumprindo  $f(a) = f(b)$  de xeito que a función ángulo  $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  cumpre para todo  $t \in [a, b]$  que:

$$f(t) = (\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t)).$$

Esta función é única salvo por adición dun múltiplo enteiro de  $2\pi$ . Así, definiremos de xeito equivalente á Definición 2.2 o  $\text{deg } f$  como o enteiro  $\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$ . Será de interese para futuros cálculos ver que relación existe entre a función ángulo que acabamos de definir e a definición de curvatura con signo que vimos no capítulo 1, Definición 1.6. Vexamos entón que:

$$\theta'(t) = k_s(t), \tag{2.1}$$

para unha curva  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Supoñamos dita curva  $\alpha$  p.p.a. de xeito que a súa velocidade se escribe en coordenadas como  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$  e cumprindo que  $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$ . Entón, existe a función  $\theta$  de clase  $C^\infty(I)$  de xeito que se pode escribir  $\alpha'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ . Comezamos co lado dereito da igualdade, usando a definición de curvatura chegamos á seguinte expresión:

$$k_s(t) = \langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle = \langle (x''(t), y''(t)), (-y'(t), x'(t)) \rangle = -x''(t)y'(t) + x'(t)y''(t). \quad (2.2)$$

Vexamos agora que ocorre coa función ángulo. Partindo da igualdade  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$  podemos obter que a función  $\theta$  se define como  $\theta(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)} + n_t \pi$ , sendo  $n_t \in \mathbb{Z}$  un enteiro dependente de  $t \in I$ . Temos que esta definición de  $\theta$  sirve só de xeito local e non global (xa que se podería ir a infinito, o que nos levaría a problemas na súa definición) mais pódese consultar [22, páx. 36] para ver a existencia global da función e da igualdade (2.1). Agora ben, se derivamos a función  $\theta(t)$  obtemos:

$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} \cdot \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} = \\ &= \frac{(x'(t))^2}{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} = \\ &= y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Claramente, tense que (2.2) e (2.3) son iguais, polo que temos probado que  $\theta'(t) = k_s(t)$ .

Vexamos agora o seguinte lema que nos di que se dúas funcións teñen unha imaxe que nunca apunta en direccións opostas entón deberán ter o mesmo grao.

**Lema 2.3.** *Sexan  $f_1, f_2: [a, b] \rightarrow S^1$  funcións continuas con  $f_1(a) = f_1(b)$  e  $f_2(a) = f_2(b)$ . Se  $f_1$  e  $f_2$  teñen grao distinto entón  $f_1(t_0) = -f_2(t_0)$  para algún  $t_0 \in [a, b]$ .*

*Demostración.* Sexan  $\theta_1, \theta_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funcións ángulo para  $f_1$  e  $f_2$ . Definimos a diferenza  $\delta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$ . Se acoutamos esta diferenza tendo en conta a definición de grao vista ao comezo da sección temos:

$$\begin{aligned} |\delta(b) - \delta(a)| &= |(\theta_2(b) - \theta_1(b)) - (\theta_2(a) - \theta_1(a))| = \\ &= |(\theta_2(b) - \theta_2(a)) - (\theta_1(b) - \theta_1(a))| = |2\pi \deg f_2 - 2\pi \deg f_1|. \end{aligned}$$

Se ademais temos en conta que os graos son distintos e que estamos a tomar a diferenza en valor absoluto existirá un valor  $k > 0$  de xeito que podemos reescribir a igualdade anterior como:

$$|2\pi \deg f_2 - 2\pi \deg f_1| = 2\pi \cdot |\deg f_2 - \deg f_1| = 2\pi k \geq 2\pi.$$

Como, entre  $a$  e  $b$ ,  $\delta$  varía un mínimo de  $2\pi$ , polo teorema do valor intermedio deberá existir un  $t_0 \in [a, b]$  tal que  $\delta(t_0)$  é un múltiplo enteiro impar de  $\pi$ . Isto quere dicir que podemos relacionar

as funcións ángulo nese punto como  $\theta_2(t_0) = \theta_1(t_0) + (2s + 1)\pi$  con  $s \in \mathbb{Z}$ , o que se traduce en  $f_1(t_0) = -f_2(t_0)$ .  $\square$

Podemos entón proceder co teorema da Umlaufsatz de Hopf, tendo en conta todos as ideais previas ata agora vistas.

**Teorema 2.4** (Teorema da Umlaufsatz de Hopf). *Sexa  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  unha curva plana pechada simple. Entón, o índice de rotación de  $\gamma$  é 1 ou  $-1$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $C = \gamma([a, b])$  a traza da curva  $\alpha$ . Tomemos un punto  $p \in C$  tal que  $C$  está totalmente dun lado da recta tanxente  $L$  a  $C$  no punto  $p$ . Podemos tomar este punto considerando a circunferencia centrada en calquera punto de  $\mathbb{R}^2$  con raio suficientemente grande para que conteña a  $C$ ; despois reduciremos o raio ata que a circunferencia toque por primeira vez a traza  $C$ . O punto onde se tocan é o punto  $p$  que buscábamos.

Supoñamos, sen perda de xeneralidade, que  $\gamma$  está parametrizada por lonxitude de arco cumprindo  $\gamma(a) = p$ . Consideremos o triángulo  $T = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t_1 \leq t_2 \leq b\}$ .

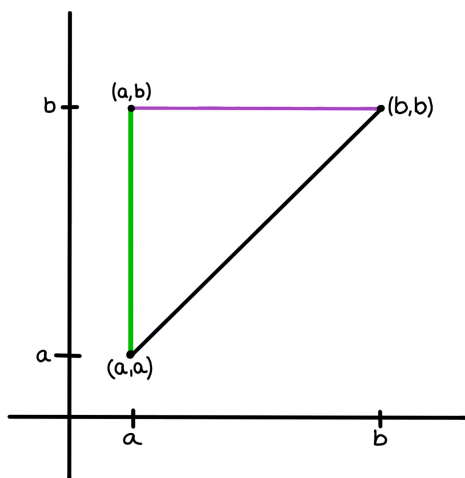


Figura 2.1: Triángulo  $T$ .

Definamos a función  $\Psi : T \rightarrow S^1$  como:

$$\Psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \gamma'(t_1) & \text{se } t_1 = t_2, \\ \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)|} & \text{se } t_1 \neq t_2 \text{ e } (t_1, t_2) \neq (a, b), \\ -\gamma'(a) & \text{se } (t_1, t_2) = (a, b). \end{cases}$$

Como consideramos  $\gamma$  parametrizada por lonxitude de arco sabemos que o vector  $\gamma'(t_1)$  é unitario, é dicir, cumpre  $\gamma'(t_1) \in S^1$  para todo  $t_1 \in [a, b]$  tal que  $(t_1, t_1) \in T$  (primeira parte da definición de  $\Psi$ ). Se tomamos o caso particular en que  $t_1 = a$  temos que o vector  $-\gamma'(a)$  é un vector unitario e polo tanto  $-\gamma'(a) \in S^1$ . No caso da segunda entrada da función  $\Psi$  estamos normalizando o vector que une os puntos  $\gamma(t_1)$  e  $\gamma(t_2)$ , polo que claramente volvemos ter que está en  $S^1$ . Podemos asegurar así que a función  $\Psi : T \rightarrow S^1$  está ben definida.

Vexamos que a función  $\Psi$  é continua. Para iso, chega con ver que o límite da definición da función no interior do triángulo coincide co valor da función no extremo  $(a, b)$  e na recta  $t_1 = t_2$ , pois no resto do seu dominio a función é continua por involucrar só sumas, produtos e composicións de funcións continuas. Calculemos os límites:

- Para calcular o primeiro límite cando nos aproximamos á recta  $t_1 = t_2$  redefinamos a variable  $t_2$  de xeito que  $t_2 = t_1 + h$ . Entón calcularemos, asumindo a súa existencia que veremos despois, o seguinte límite:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)}{|\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)}{(t_1 + h) - t_1} \cdot \frac{(t_1 + h) - t_1}{|\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t_1 + h) - t_1}{|\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)|}. \end{aligned}$$

Se nos fixamos é claro que o primeiro límite coincide coa derivada de  $\gamma$  avaliada en  $t_1$ . No segundo elemento do produto podemos englobar toda a fracción no valor absoluto xa que  $t_2 > t_1$ , que posteriormente intercambiamos co límite, pois o valor absoluto é unha función continua. Quédanos entón o seguinte:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t_1 + h) - t_1}{|\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)|} &= \gamma'(t_1) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{h}{\gamma(t_1 + h) - \gamma(t_1)} \right| = \\ &= \gamma'(t_1) \cdot \frac{1}{|\gamma'(t_1)|} = \gamma'(t_1). \end{aligned}$$

A última igualdade témola por ser a curva  $\gamma$  parametrizada por arco. Este límite coincide co valor da función no punto ao que nos aproximamos, polo que a función é continua na recta  $t_1 = t_2$ .

- Se queremos ver a continuidade da función no punto  $(a, b)$  chega con ver o valor do seguinte límite, no cal tomamos fixa a variable  $t_1$  pois, como veremos, existe tal límite e calculamos o límite orixinal só en función dunha variable:

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (a, b)} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)|} = \lim_{t_2 \rightarrow b} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(a)}{|\gamma(t_2) - \gamma(a)|}.$$

Como a curva  $\gamma$  que estamos tomando é pechada podemos intercambiar  $\gamma(a) = \gamma(b)$  de xeito que o límite queda:

$$\lim_{t_2 \rightarrow b} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(a)}{|\gamma(t_2) - \gamma(a)|} = \lim_{t_2 \rightarrow b} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(b)}{|\gamma(t_2) - \gamma(b)|} = \lim_{t_2 \rightarrow b} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(b)}{t_2 - b} \cdot \lim_{t_2 \rightarrow b} \frac{t_2 - b}{|\gamma(t_2) - \gamma(b)|}.$$

Agora ben, temos que  $t_2 - b < 0$  polo que para poder incluír o numerador no valor absoluto debemos meter un signo menos para compensar que o numerador teña signo negativo. Finalmente, igual que antes, intercambiamos o límite co valor absoluto e obtemos o valor final do límite:

$$\lim_{t_2 \rightarrow b} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(b)}{t_2 - b} \cdot \lim_{t_2 \rightarrow b} \frac{t_2 - b}{|\gamma(t_2) - \gamma(b)|} = \gamma'(b) \cdot \lim_{t_2 \rightarrow b} - \left| \frac{t_2 - b}{\gamma(t_2) - \gamma(b)} \right| = \gamma'(b) \cdot \frac{-1}{|\gamma'(b)|}.$$

Volvendo intercambiar o valor de  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e tendo en conta que a curva está parametrizada por lonxitude de arco obtemos o valor do límite:

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (a, b)} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)|} = -\gamma'(a).$$

É dicir, obtivemos finalmente que a función  $\Psi$  é continua no triángulo de definición.

Sexa agora  $\alpha_0 : [0, 1] \rightarrow T$  unha parametrización do segmento unindo  $(a, a)$  e  $(b, b)$ . Parametricemos esta curva como:

$$\alpha_0(t) = (a + t(b - a), a + t(b - a)).$$

Sexa  $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow T$  a parametrización do camiño que resulta de concatenar primeiro o segmento que une  $(a, a)$  co punto  $(a, b)$  co segmento que une  $(a, b)$  con  $(b, b)$ . Definímolos como:

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} (a, a + 2t(b - a)) & \text{se } t \leq \frac{1}{2}, \\ (a + 2(t - \frac{1}{2})(b - a), b) & \text{se } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Construímos unha homotopía entre os camiños que acabamos de definir, denotada por  $\alpha_s(t)$ , que será a interpolación continua de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ . Para definir a función de homotopía primeiro tomamos o punto medio do segmento unindo  $(a, a)$  con  $(b, b)$  que denotamos como  $m = (\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ . Parametricemos ademais o segmento que recorre o noso triángulo de definición  $T$  dende o punto medio  $m$  ata o punto  $(a, b)$ :

$$\beta(s) = \left( \frac{a+b}{2} + s \left( \frac{a-b}{2} \right), \frac{a+b}{2} + s \left( \frac{b-a}{2} \right) \right), \quad s \in [0, 1].$$

Definimos entón a función  $\alpha_s(t)$  tendo en conta o anterior:

$$\alpha_s(t) = \begin{cases} (a, a) + 2t(\beta(s) - (a, a)) & \text{se } t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(s) + 2(t - \frac{1}{2})((b, b) - \beta(s)) & \text{se } t > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

onde  $s \in [0, 1]$ . Graficamente as funcións que acabamos de definir represéntanse no triángulo  $T$  anterior como se mostra na seguinte Figura:

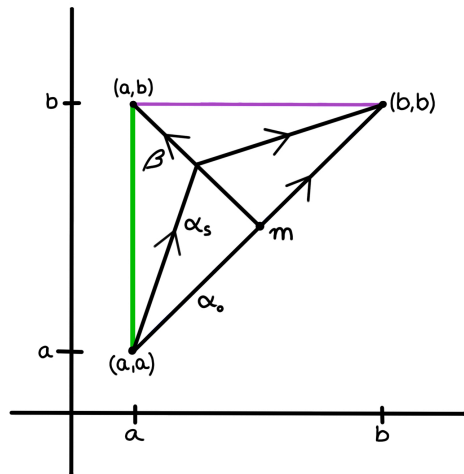


Figura 2.2: Camiños auxiliares.

É claro que  $\alpha_s|_{s=0} = \alpha_0$ , pois substituindo o valor  $s = 0$  obtemos:

- Se  $t \leq \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} (a, a) + 2t(\beta(0) - (a, a)) &= (a, a) + 2t \left( \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) - (a, a) \right) = \\ &= (a, a) + 2t \left( \frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2} \right) = \\ &= (a + t(b-a), a + t(b-a)). \end{aligned}$$

- Se  $t > \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)((b, b) - \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right)) &= \\ \left( \frac{a+b}{2} + 2\left(t - \frac{1}{2}\right) \left( \frac{b-a}{2} \right), \frac{a+b}{2} + 2\left(t - \frac{1}{2}\right) \left( \frac{b-a}{2} \right) \right) &= \\ \left( \frac{a+b}{2} + 2t \left( \frac{b-a}{2} \right) - \frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2} + 2t \left( \frac{b-a}{2} \right) - \frac{b-a}{2} \right) &= \\ (a + t(b-a), a + t(b-a)). \end{aligned}$$

Como arriba, coincide coa expresión de  $\alpha_0$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Vexamos agora que  $\alpha_s|_{s=1} = \alpha_1$  substituindo o valor  $s = 1$ :

- Se  $t \leq \frac{1}{2}$

$$(a, a) + 2t((a, b) - (a, a)) = (a, a + 2t(b-a)).$$

- Se  $t > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (a, b) + 2 \left( t - \frac{1}{2} \right) ((b, b) - (a, b)) &= (a, b) + 2 \left( t - \frac{1}{2} \right) (b - a, 0) \\ &= (a + 2 \left( t - \frac{1}{2} \right) (b - a), b), \end{aligned}$$

a cal coincide coa definición que demos anteriormente de  $\alpha_1$ .

Vexamos agora a continuidade de  $\alpha_s$ . Temos que no dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$  a función  $\alpha$  que leva  $(s, t) \mapsto \alpha_s(t) \in \mathbb{R}^2$  é unha función continua no aberto do dominio para os pares de puntos  $(s, t)$  tales que  $t \neq \frac{1}{2}$ . Vexamos entón que a función é continua no punto  $(s, \frac{1}{2})$ , con  $s \in [0, 1]$ . Para iso, temos que ver os límites da función cando se achega aos puntos de discontinuidade. Calculemos tales límites pola esquerda e pola dereita cando  $t$  se achega a  $\frac{1}{2}$ :

- $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^-} ((a, a) + 2t(\beta(s) - (a, a))) = (a, a) + \beta(s) - (a, a) = \beta(s)$ ,
- $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}^+} (\beta(s) + 2(t - \frac{1}{2})((b, b) - \beta(s))) = \beta(s)$ .

O valor dos límites coinciden en  $t = \frac{1}{2}$  polo que podemos asegurar a continuidade da función  $\alpha_s(t)$  para todo  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ , pois con respecto á variable  $s$  xa temos a continuidade en todo  $[0, 1]$ . Se redenotamos  $\alpha_s(t) = H(s, t)$  podemos dicir que a función homotopía  $H$  é continua de  $[0, 1] \times [0, 1]$  en  $T$ , como acabamos de ver.

Para cada  $s \in [0, 1]$ , sexa  $D(s)$  o grao de  $\Psi \circ \alpha_s: [0, 1] \rightarrow S^1$ . Vexamos que  $s \mapsto D(s)$  é localmente constante, para iso fixemos un  $t_0$  de xeito que  $t_0 \in [0, 1]$ . Por ser  $\Psi \circ \alpha_s$  continua respecto de  $s$ , xa que é composición de funcións continuas, tense que para todo  $\varepsilon$  positivo existe un  $\delta > 0$  tal que se  $|s - \tilde{s}| < \delta$  entón:

$$|\Psi \circ \alpha_s(t_0) - \Psi \circ \alpha_{\tilde{s}}(t_0)| < \varepsilon.$$

Como a imaxe de  $\Psi \circ \alpha_s$  está en  $S^1$ , tomemos  $\varepsilon < 2$ . Entón, teriamos que para todo  $\tilde{s}$  cumprindo  $|s - \tilde{s}| < \delta$  temos que:

$$\Psi \circ \alpha_s(t_0) \neq -\Psi \circ \alpha_{\tilde{s}}(t_0).$$

Isto tense do feito de que  $\Psi \circ \alpha_s(t_0)$  e  $\Psi \circ \alpha_{\tilde{s}}(t_0)$  están “suficientemente próximo” en  $S^1$  o que implica que non poden ser opostos.

Usando o Lema 2.3 tense que como non existe un  $t_0 \in [0, 1]$  tal que  $\Psi \circ \alpha_s(t_0) = -\Psi \circ \alpha_{\tilde{s}}(t_0)$  entón:

$$D(s) = \deg(\Psi \circ \alpha_s) = \deg(\Psi \circ \alpha_{\tilde{s}}) = D(\tilde{s}) \text{ para todo } s \text{ tal que } s \in (\tilde{s} - \delta, \tilde{s} + \delta).$$

O que implica que nunha veciñanza de  $\tilde{s}$  a función  $D$  toma valores constantes, é dicir,  $D$  é localmente constante.

O feito de que a función grao sexa localmente constante nun intervalo pechado e conexo implica directamente a continuidade da función no intervalo  $[0, 1]$  xa que para cada aberto que tomemos a función tomará o mesmo valor constante en cada veciñanza, o que implica a continuidade.

Temos entón que a función  $D$  é continua e pola definición de grao só toma valores enteiros. Podemos asegurar entón que, por ser o intervalo de definición un conxunto conexo e a función  $D$  cumprir as propiedades anteriores,  $D$  é constante en  $[0, 1]$ . É dicir,  $D(0) = D(1)$ . Por definición,  $D(0)$  é o grao da función tanxente unitaria de  $\gamma$ , que é precisamente o índice de rotación de  $\gamma$ . Polo tanto chega con demostrar que  $D(1)$  é 1 ou  $-1$ .

Dividamos o camiño  $\alpha_1$  en dous tramos para poder analizar que ocorre coa función a través dos dous segmentos claramente diferenciados. Tomemos primeiro o segmento  $\alpha_1$ , segmento verde da Figura 2.2, que une o punto  $(a, a)$  con  $(a, b)$ . Se facemos a composición coa función  $\Psi$  a función que obtemos é:

$$\Psi \circ \alpha_1(t_1, t_2) = \Psi(a, t_2) = \frac{\gamma(t_2) - \gamma(a)}{|\gamma(t_2) - \gamma(a)|}.$$

Por tal e como se define o índice respecto dun punto, neste caso respecto de  $\gamma(a)$ , teremos que os vectores resultantes de aplicar esta composición serán os vectores na circunferencia  $S^1$  que abarcan só a metade superior da circunferencia, sendo esta a circunferencia con centro  $p$  e tal que o diámetro contén a recta  $L$  definida anteriormente tanxente á curva en dito punto. Supoñeremos que a recta  $L$  é horizontal de forma que a curva quede por encima dela, sen perda de xeneralidade. Ademais, supoñamos que a curva se move de esquerda a dereita partindo do punto  $p$ . Graficamente, como se pode ver na Figura 2.3 o que se está representando son os vectores verdes que trazan a metade superior da circunferencia  $S^1$ . Ademais, debemos notar que estes vectores aparecerán de dereita a esquerda a medida que percorremos a curva.

Agora ben, se tomamos a parametrización do segmento  $\alpha_1$  que une o punto  $(a, b)$  co punto  $(b, b)$ , segmento de cor violeta na Figura 2.2, temos que o resultado da súa composición coa función  $\Psi$  resulta:

$$\Psi \circ \alpha_1(t_1, t_2) = \Psi(t_1, b) = \frac{\gamma(b) - \gamma(t_1)}{|\gamma(b) - \gamma(t_1)|}.$$

Igual que coa composición anterior, neste caso podemos interpretar os vectores como o índice respecto a  $\gamma(b)$  e estaríanos a dar os vectores que percorren a metade inferior da circunferencia de esquerda a dereita. Se vemos a Figura 2.3 neste caso estamos representando as liñas debuxadas en cor violeta.

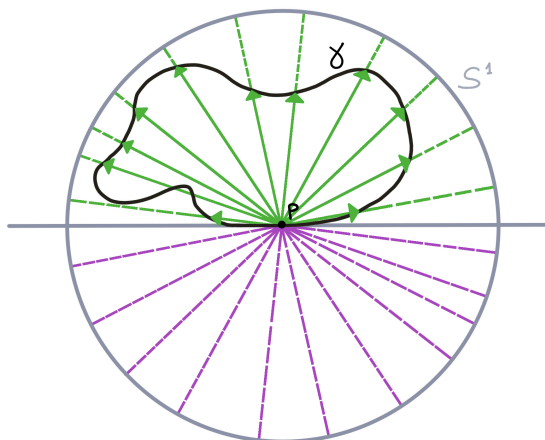


Figura 2.3: Representación do grao  $D$ .

Xuntando a interpretación xeométrica dos segmentos que representan  $\alpha_1$  teríamos que o índice total sería unha volta completa á circunferencia posto que primeiro estamos percorrendo a metade superior de  $S^1$  de dereita a esquerda e despois estamos percorrendo a circunferencia de esquerda a dereita, é dicir, obtivemos que  $D(1) = 1$ . Se supuxeramos que a curva se move de dereita a esquerda dende o punto  $p$ , é fácil ver que  $\gamma$  entón obteríamos  $D(1) = -1$ , pois os vectores recorrerían a circunferencia en sentido contrario.  $\square$



## Capítulo 3

# Teorema da curva de Jordan

O seguinte teorema que analizaremos é un dos máis importantes dentro da historia das matemáticas por diferentes motivos, sendo un deles o feito de que, a pesar de que o seu enunciado é intuitivamente evidente, a súa demostración non é trivial e, de feito, leváronse a cabo diversas demostracións ao longo do tempo, sendo algunhas máis rigorosas que outras. O teorema da curva de Jordan foi enunciado por vez primeira por Camille Jordan en 1887 no seu libro *Cours d'Analyse* e a súa demostración resultou realmente sorprendente para os matemáticos da época. Mais a sorpresa foi aínda maior cando ao afondar na proba proporcionada por Jordan se deron conta de que había ocos cuxo contido era considerablemente notable pola súa omisión [17, capítulo 9].

O enunciado involucra curvas continuas no plano, mais nós, seguindo a filosofía xeral deste traballo que se enmarca no eido da xeometría diferencial, centrarémonos no caso en que a curva sexa diferenciable. Para iso faremos unha demostración de carácter maioritariamente xeométrico, aínda que para poder concluír teremos que botar man dunha serie de ideas topolóxicas. É por iso que antes de demostrar este teorema veremos a definición de veciñanza tubular e os respectivos teoremas de existencia de tales veciñanzas.

Cabe mencionar que, cando se fala de curva de Jordan, estámonos referindo a unha curva simple e pechada no plano  $\mathbb{R}^2$ , é dicir, como xa vimos na Definición 1.7 trátase da imaxe  $C$  dunha aplicación continua e inxectiva dunha circunferencia no plano. Veremos entón neste capítulo que unha curva destas características divide a plano en dúas compoñentes conexas, sendo unha delas limitada e a outra non.

### 3.1. Veciñanza tubular

Precisamos definir a idea de veciñanza tubular posto que será de gran utilidade á hora de facer a demostración, xa que nos proporciona un subconxunto aberto do plano que resulta ser unha veciñanza da curva e que posúe, vía certo homeomorfismo, o que poderíamos chamar unha estrutura produto, da propia curva por un intervalo aberto. Tal intervalo corresponderase con segmentos normais á curva en cada punto. Aquí, por segmento normal de raio  $\epsilon$  a unha curva regular  $\alpha$  nun punto  $p = \alpha(t)$  entenderemos o conxunto de puntos  $\{p + sN(p) \in \mathbb{R}^2 : s \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ , onde recordemos que por  $N(p)$  denotamos un dos dous vectores normais unitarios a  $\alpha$  en  $p = \alpha(t)$ .

**Definición 3.1** (Veciñanza tubular). Sexa  $C$  a traza dunha curva diferenciable regular simple en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . A unión  $N_\epsilon(C)$  de todos os segmentos normais a  $C$  de raio  $\epsilon$  denomínase **veciñanza tubular** de  $C$  de raio  $\epsilon > 0$  se é un aberto de  $\mathbb{R}^2$  e a aplicación

$$\begin{aligned} \phi: (-\epsilon, \epsilon) \times C &\rightarrow N_\epsilon(C) \\ (s, p) &\mapsto \phi(s, p) = p + sN(p), \end{aligned}$$

sendo  $N(p) = J(\alpha'(t))$  se  $p = \alpha(t)$ , é un difeomorfismo.

Agora ben, precisamos diferenciar dous teoremas sobre a existencia de veciñanza tubular, sendo un deles a versión local e o outro, global. Supoñamos para ambos que a nosa curva está parametrizada por lonxitude de arco. Os teoremas e demostracións que veremos a continuación están sacados de [5, páx. 113, 115-116], mais adaptados para o noso caso, é dicir, tendo en conta que nós traballamos con curvas cuxa imaxe está en  $\mathbb{R}^2$  e non con superficies en  $\mathbb{R}^2$ .

Vexamos primeiro a versión local:

**Teorema 3.2.** *Sexa unha curva regular simple  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sendo  $I$  un intervalo aberto, cuxa traza denotaremos por  $C$ . Sexa  $p \in C$ . Entón, existe unha veciñanza  $W$  de  $p$  en  $C$  e un  $\epsilon > 0$  tal que  $W$  ten unha veciñanza tubular de raio  $\epsilon$ .*

*Demostración.* Tomemos a curva  $\alpha$  parametrizada por lonxitude de arco e dúas veces diferenciable. Para un  $\epsilon > 0$  definamos a función  $\varphi: (-\epsilon, \epsilon) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Esta aplicación defínese, de xeito equivalente á da Definición 3.1, como:

$$\varphi(s, t) = \alpha(t) + sJ(\alpha'(t)) = \alpha(t) + sN(t). \quad (3.1)$$

Escribindo a curva en coordenadas  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  teremos que:

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) \quad \text{e} \quad N(t) = (-y'(t), x'(t)).$$

Se calculamos a matriz jacobiana de  $\varphi$  teremos que:

$$J_\varphi(s, t) = \begin{pmatrix} -y'(t) & x'(t) - sy''(t) \\ x'(t) & y'(t) + sx''(t) \end{pmatrix}.$$

Se calculamos o determinante da matriz anterior nun  $s = 0$  e para  $t = t_0$  con  $\alpha(t_0) = p$  teremos que:

$$\det J_\varphi(0, t_0) = \begin{vmatrix} -y'(t_0) & x'(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = -(x'(t_0))^2 - (y'(t_0))^2 = -1 \neq 0.$$

Grazas ao visto podemos asegurar que polo teorema da función inversa para  $s = 0$  e para  $t = t_0$  existen un  $\varepsilon' > 0$ , un  $\delta > 0$  e un aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  de xeito que se definimos o aberto  $V = (-\varepsilon', \varepsilon') \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , teremos que a restrición  $\varphi|_V: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  é un difeomorfismo. É dicir, leva os rectángulos  $(-\varepsilon', \varepsilon') \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  no aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  que, pola definición de  $\varphi$ , non é máis cá veciñanza tubular do anaco de curva  $W = \alpha((t_0 - \delta, t_0 + \delta))$  de  $C$  con raio  $\varepsilon'$ .  $\square$

Ademais, debemos de ter en conta o seguinte lema:

**Lema 3.3** (Lebesgue). *Sexa  $V \subset \mathbb{R}^2$  un conxunto compacto e  $\{U_\alpha\}$  unha familia de subconxuntos abertos de  $V$  cumprindo  $\bigcup_\alpha U_\alpha = V$ . Entón, existe un número  $\delta > 0$ , chamado **número de Lebesgue** relativo á familia, de xeito que dous puntos  $p, \tilde{p} \in V$  que estean a unha distancia  $d(p, \tilde{p}) < \delta$  implicará que pertencen ao mesmo aberto  $U_\alpha$ .*

Pódese ver unha demostración deste resultado de topoloxía de espazos métricos en [15, páx. 192].

Probemos agora a existencia de veciñanza tubular para unha curva pechada simple no plano.

**Teorema 3.4.** *Sexa  $C \subset \mathbb{R}^2$  unha curva regular, pechada e simple. Entón, existe un  $\varepsilon > 0$  tal que para calquera  $p, q \in C$  os segmentos das rectas normais de lonxitude  $2\varepsilon$ , centrados en  $p$  e  $q$ , son disxuntos, é dicir, que existe unha veciñanza tubular de  $C$  de raio  $\varepsilon$ .*

*Demostración.* Polo teorema anterior 3.2, sabemos que para cada punto  $p$  en  $C$  existe unha veciñanza  $W_p$  de  $p$  en  $C$  e un  $\varepsilon_p > 0$  tal que o enunciado do teorema que estamos probando se cumpre para os puntos de  $W_p$  con  $\varepsilon = \varepsilon_p$ . Se desprazamos  $p$  a través de  $C$  temos a familia  $\{W_p\}$  con  $\bigcup_{p \in C} W_p = C$ . Por compacidade, podemos escoller un número finito de  $W_p$ , que denotaremos  $W_1, \dots, W_k$  cos seus respectivos  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , tal que  $\bigcup_{i=1}^k W_i = C$ . Vexamos que podemos tomar como  $\varepsilon > 0$  que cumpra o que se afirma no enunciado calquera dado por:

$$\varepsilon < \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \frac{\delta}{2}),$$

onde  $\delta$  é o número de Lebesgue dado polo Lema 3.3 para a familia  $\{W_i\}$ . Sexan dous puntos  $p, q \in C$ . Se ambos pertencen a algún  $W_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , os segmentos normais de centro  $p$  e  $q$  con lonxitude  $2\varepsilon$  non se cortan, pois  $\varepsilon < \varepsilon_i$ . Se os puntos non pertencen ao mesmo  $W_i$ , entón  $d(p, q) \geq \delta$ , e se supoñemos que os segmentos normais centrados en  $p$  e  $q$  e de lonxitude  $2\varepsilon$  se cortasen nun punto  $\tilde{p}$ , teríamos:

$$2\varepsilon \geq d(p, \tilde{p}) + d(\tilde{p}, q) \geq d(p, q) \geq \delta,$$

o que contradí a definición de  $\varepsilon$ . Temos así que existe un  $\varepsilon$  suficientemente pequeno co que podemos construír a aplicación de veciñanza tubular respecto da nosa curva con traza  $C$ .  $\square$

### 3.2. Teorema e demostración

Vexamos entón agora o enunciado e a demostración do teorema da curva de Jordan no caso diferenciable. A demostración que daremos está baseada en [2]. Na proba, veremos primeiro que a diferenza dos índices respecto de dous puntos é un, o cal nos permitirá en segundo lugar determinar cales son as compoñentes conexas que se mencionan no teorema.

**Teorema 3.5.** *Sexa  $C$  unha curva simple pechada de polo menos clase dous no plano euclidiano  $\mathbb{R}^2$ . O complementario  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  ten exactamente dúas compoñentes conexas, das cales unha é limitada. A compoñente limitada chamarémola interior e á outra exterior.*

*Demostración.* Sexa  $m$  un punto da curva simple e pechada  $C$ , e sexan  $u$  e  $v$  dous puntos distintos de  $m$  situados na recta normal á curva no punto  $m$ . Supoñamos, sen restrición de xeneralidade, que tomamos a recta tanxente a  $C$  en  $m$  como horizontal. Ademais, supoñamos os puntos suficientemente próximos a  $m$  pero cada un a un lado da recta tanxente horizontal. De feito, tomarémolos tal que a curva deixe á esquerda o punto  $u$  de xeito que percorremos a curva de esquerda a dereita partindo dende o punto  $m$ , como se pode ver na Figura 3.1. Tendo en conta a noción de índice respecto dun punto da curva que vimos na Definición 2.1,  $\text{ind}_{p_0} C$ , vexamos que  $|\text{ind}_u C - \text{ind}_v C| = 1$ . En concreto, coa forma de percorrer a curva que definimos teremos  $\text{ind}_u C - \text{ind}_v C = 1$ .

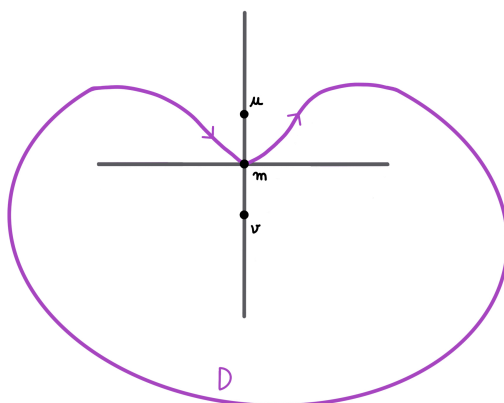


Figura 3.1: A curva e outros elementos.

Antes de probalo vexamos que nos quere dicir isto. Se estamos a supoñer que a curva se percorre como na Figura 3.1, de xeito que o punto que estamos a tomar “por fóra” é o punto  $u$  teríamos que o índice da curva respecto a este punto sería 0, xa que intuitivamente a curva non dá ningunha volta arredor de tal punto. Así mesmo, no caso do punto  $v$  teríamos que, en valor absoluto, a curva dá unha volta arredor deste punto, que tendo en conta a orientación horaria da curva traduciríase en que o índice respecto da curva sexa  $-1$ . Se xuntamos estas conclusións chegaríamos a que a diferenza dos índices é 1.

Vexamos entón que é certo. Para iso, tomemos un rectángulo  $R$  con centro  $m$  de xeito que a curva  $C$  preto de  $m$  sexa un grafo contido no rectángulo sobre a recta tanxente a  $C$  en  $m$  (toda curva é un grafo sobre a recta tanxente nun punto). Ademais, os puntos  $u$  e  $v$  que tomamos anteriormente deben quedar dentro do rectángulo, de aí que os tomemos moi próximos a  $m$  e de xeito que non pertencen á curva  $C$ .

Deformemos a curva por homotopía, de xeito que nos quede como na Figura 3.2.

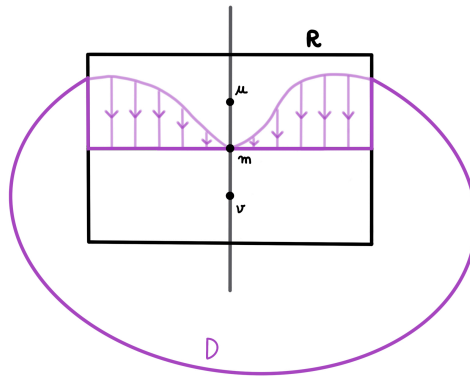


Figura 3.2: Deformación da curva.

É dicir, consideremos unha nova curva que pase a percorrer o segmento que divide horizontalmente o rectángulo e os bordes verticais ascendentes ata o punto onde a curva  $C$  cortaba ao rectángulo. Deste xeito, denotaremos por  $D$  a curva (só continua) parametrizada por arco en cada segmento onde é diferenciable. Observemos que a definición de índice de  $D$  respecto de  $m$  como o grao da aplicación  $\alpha_m(s) = \frac{\alpha(s)-m}{|\alpha(s)-m|} \in S^1$  segue tendo sentido a pesar da non diferenciability de  $D$ . Ademais, pola invariabilidade do grao a través de homotopías, temos que  $\text{ind}_u C = \text{ind}_u D$  e  $\text{ind}_v C = \text{ind}_v D$ . Do mesmo xeito, o índice non variará se movemos  $u$  e  $v$  ao longo da recta normal a  $m$  sen atravesar  $C$ .

Agora ben, fixemos dous puntos  $a$  e  $b$  equidistantes a  $m$  no segmento de recta horizontal da curva  $D$  contido no rectángulo  $R$  e suficientemente próximos, para que a circunferencia de diámetro  $ab$  e centro  $m$  estea contida no rectángulo, como se pode ver na Figura 3.3. Establezamos que os puntos  $u$  e  $v$  distan  $\varepsilon$  de  $m$  e vexamos que para os puntos  $p \in D \setminus \overline{ab}$  o ángulo formado polos vectores  $\vec{pu}$  e  $\vec{pv}$  aproxímase uniformemente a cero a medida que  $\varepsilon$  tende a cero.

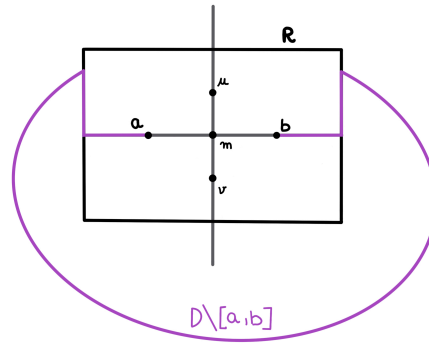


Figura 3.3: Curva  $D$ .

Recordemos que o lugar xeométrico de puntos do plano dende os cales o ángulo que subtende a un segmento  $\overline{uv}$  dado é constante será a unión de dous arcos de circunferencia de igual raio. De xeito que se tomamos unha circunferencia de maior raio que as anteriores dará lugar a ángulos máis pequenos. Estes ángulos son, en concreto, a metade do ángulo  $\widehat{uOv}$ , onde  $O$  é o centro de cada circunferencia.

Tendo isto claro, será sinxelo ver a converxencia uniforme. Sempre e cando se cumpra  $\varepsilon < \frac{ab}{2}$ , é dicir, que os puntos  $u$  e  $v$  caian dentro da circunferencia de diámetro  $ab$ , para todo  $p$  en  $D \setminus \overline{ab}$  teremos que se cumpre

$$\angle(\vec{pu}, \vec{pv}) \leq \angle(\vec{bu}, \vec{bv}).$$

Tomemos calquera punto  $p$  fóra da circunferencia de diámetro  $ab$  e centro  $m$  que, ao mesmo tempo, estará nun arco de circunferencia que acaba en  $u$  e  $v$  (excepto se  $u, v$  e  $p$  están aliñados, en cuxo caso o ángulo  $\angle pu, pv$  é 0). Esta circunferencia terá raio maior que a que pasa polos puntos  $u, v$  e  $b$ , de xeito que grazas ao que vimos anteriormente é claro que o ángulo que forman  $\vec{bu}$  e  $\vec{bv}$  é maior que o ángulo formado por  $\vec{pu}$  e  $\vec{pv}$ , como se observa na Figura 3.4.

Tomando límites cando  $\varepsilon$  tende a cero, obtemos o seguinte:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \angle(\vec{pu}, \vec{pv}) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \angle(\vec{bu}, \vec{bv}) = 0,$$

onde a valor do segundo límite é claro, pois ao diminuír a distancia que distan  $u$  e  $v$  do eixo horizontal o ángulo que forman con  $b$  aproxímase a cero. Deste xeito, obtemos a converxencia uniforme do ángulo entre  $\vec{pu}$  e  $\vec{pv}$  a 0, con  $p$  en  $D \setminus \overline{ab}$ .

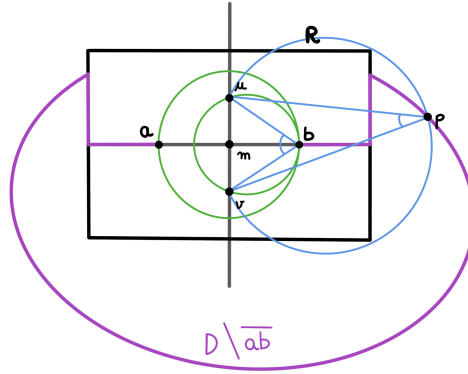


Figura 3.4: Ángulos.

Sexa  $\alpha$  unha parametrización da curva  $D$  con período  $L > 1$  e cumprindo  $\alpha(0) = a$  e  $\alpha(1) = b$ . Deste xeito, identificaremos o segmento  $\overline{ab}$  co intervalo de definición  $[0, 1]$  e  $D \setminus \overline{ab}$  co intervalo  $[1, L]$ . Definamos as aplicacións  $f, g: \mathbb{Z}/L\mathbb{Z} \rightarrow S^1$  como

$$f(t) = \frac{\alpha(t) - u}{|\alpha(t) - u|} \quad \text{e} \quad g(t) = \frac{\alpha(t) - v}{|\alpha(t) - v|}.$$

É dicir, estas funcións representan os vectores que unen os puntos ao longo da curva, os  $p$ , cos puntos  $u$  e  $v$ , despois de ser normalizados, na circunferencia unidade.

Por definición sabemos que  $\text{ind}_u D = \deg(f)$  e  $\text{ind}_v D = \deg(g)$ . Ademais, se  $\bar{f}$  é o levantamento de  $f$  a  $\mathbb{R}$ , respecto da proxección  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\pi(t) = e^{it}$ , Proposición 2.1, o grao de  $f$  é o enteiro  $n$  tal que  $\bar{f}(t+L) - \bar{f}(t) = 2n\pi$  para todo  $t$ , e de xeito equivalente para  $\bar{g}$ .

Tomemos un  $\varepsilon$  suficientemente pequeno para que o ángulo entre  $\vec{pu}$  e  $\vec{pv}$  sexa menor que un  $\eta < \pi$  fixado, para os  $p$  en  $D \setminus \overline{ab}$ . Agora ben, se escollemos  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  de xeito que  $|\bar{f}(1) - \bar{g}(1)| < \eta$ , visto graficamente isto significaría que  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  distan proxectados na circunferencia unidade un ángulo  $\eta$ , é dicir, a lonxitude do arco de circunferencia unindo  $\vec{ub}$  e  $\vec{vb}$  normalizados é menor que  $\eta$ , como podemos ver na Figura 3.5.

Entón, teríamos  $|\bar{f}(t) - \bar{g}(t)| < \eta$  para todo  $t$  en  $[1, L]$  dado que as funcións levantamento  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  son continuas e a proxección  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  é trivialmente inxectiva en calquera intervalo de lonxitude  $\pi$ . Por tanto, poderíamos establecer  $|\bar{f}(L) - \bar{g}(L)| < \eta$ .

Fixemos a orixe en  $S^1$  na dirección do vector  $\vec{ab}$ . Se tomamos un  $\varepsilon$  pequeno poderíamos posicionar na recta real as imaxes dos levantamentos de  $f$  e  $g$  de xeito que  $\bar{f}(0)$  e  $\bar{g}(0)$  estarán próximos a  $-\pi$  e a  $\pi$ , respectivamente. Do mesmo xeito, as imaxes  $\bar{f}(1)$  e  $\bar{g}(1)$  están próximas a  $0$ , a primeira por baixo e a segunda por riba.

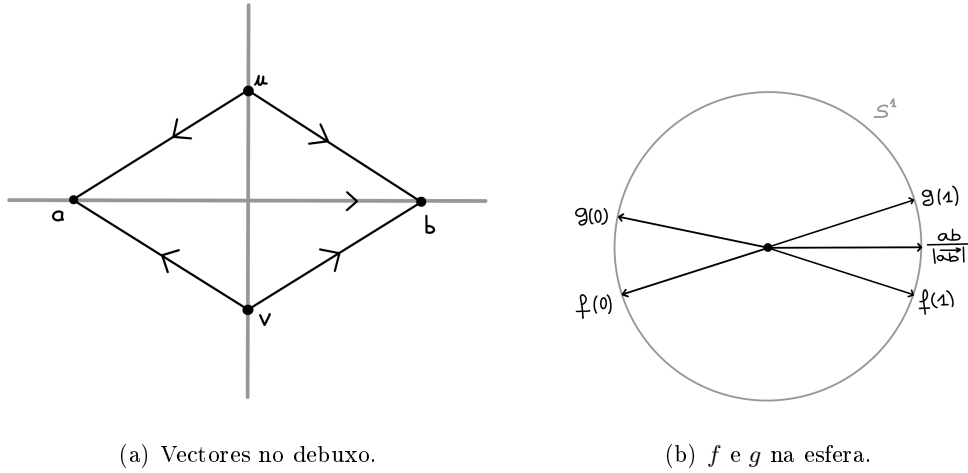


Figura 3.5: Funcións  $f$  e  $g$  en 0 e 1.

Entón, vemos que claramente se cumpre  $|\bar{f}(1) - \bar{g}(1)| < \eta$ . E polo que vimos no parágrafo anterior temos que  $|\bar{f}(L) - \bar{g}(L)| < \eta$ .

Pero entón a diferenza  $\text{ind}_u C - \text{ind}_v C$  equivale á diferenza dos graos de  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ . Se escribimos tal diferenza

$$(\bar{f}(L) - \bar{f}(0)) - (\bar{g}(L) - \bar{g}(0)) = (\bar{f}(L) - \bar{g}(L)) - (\bar{f}(0) - \bar{g}(0)),$$

esta equivalería ao número enteiro resultante da resta anterior dividida entre  $2\pi$ . Se nos fixamos, a primeira paréntese está limitada por  $\eta < \pi$  e a segunda, como se ve na Figura 3.6, deberá ser próxima a  $-2\pi$ . Como podemos facer tender  $\eta$  a cero (facendo tender  $\varepsilon$  a cero), chegamos ao resultado que queremos, é dicir,  $\text{ind}_u C - \text{ind}_v C = 1$ .

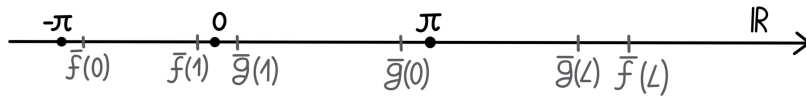


Figura 3.6: Funcións  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  na recta real.

Con isto, poderemos probar o teorema de Jordan propiamente dito. Polo teorema de existencia de veciñanza tubular, podemos tomar un  $\varepsilon > 0$  de xeito que a aplicación  $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times C \rightarrow N^\varepsilon C$  é un difeomorfismo, tal e como se definiu na Definición 3.1. Non obstante,  $((-\varepsilon, \varepsilon) \times C) \setminus (\{0\} \times C)$  ten exactamente dúas compoñentes conexas que chamaremos  $S_1$  e  $S_2$ . Como  $\varphi|_{(-\varepsilon, \varepsilon) \times C}$  é un

difeomorfismo e leva  $\{0\} \times C$  en  $C$ ,  $N^\varepsilon C \setminus C$  ten dúas compoñentes conexas. Denotáremolas por  $\varphi(S_1) = T_1$  e  $\varphi(S_2) = T_2$ .

Sexan agora  $W_1, W_2, \dots, W_k, \dots$  as compoñentes de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Claramente  $T_1$  e  $T_2$  están contidas en compoñentes de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , aínda que non poden estar na mesma compoñente porque o índice de  $C$  respecto a puntos de  $T_1$  e  $T_2$  son distintos, xa que como vimos máis arriba nunha compoñente o índice será 0 mentres que na outra será  $-1$ . Por tanto, podemos asumir  $T_1 \subset W_1$  e  $T_2 \subset W_2$ .

Como  $C$  é un subconxunto pechado de  $\mathbb{R}^2$ , cada compoñente conexa  $W_k$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  é un aberto de  $\mathbb{R}^2$ , polo que a fronteira de cada  $W_k$  está contida en  $C$ . Esta fronteira ademais é non baleira xa que senón  $W_k = \mathbb{R}^2$ , polo que podemos tomar un punto  $x$  na curva  $C$  de xeito que cada veciñanza de  $x$  interseca  $W_k$ . Pero  $N^\varepsilon C = T_1 \cup C \cap T_2$  é unha veciñanza de  $x$ , que interseca só a  $W_1$  e  $W_2$ , polo que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  non ten máis compoñentes conexas. Isto tamén demostra que a fronteira común aos abertos  $W_1$  e  $W_2$  é a curva  $C$ .  $\square$

Como se dixo a comezos do capítulo 2, existe unha relación entre a orientación dunha curva e as condicións que nos proporcionan este teorema máis o teorema de Hopf. Como se pode ver en [22, páx. 62], a equivalencia entre as condicións permítenos dar a seguinte definición, cuxo contido depende, como vimos de dicir, da validez dos teoremas de Hopf e de Jordan.

**Definición 3.6.** Unha curva pechada simple  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  diremos que está **positivamente orientada** se satisfai as seguintes condicións, que son equivalentes:

1. O índice de rotación da curva é 1.
2. O interior queda á esquerda a medida que percorremos a curva, é dicir, para cada punto  $t$  no intervalo  $[a, b]$  o vector  $J(\alpha'(t))$  apunta cara a rexión limitada (interior) de  $\mathbb{R}^2$  determinada por  $\alpha$ .

Claramente, diremos que a curva  $\alpha$  está negativamente orientada se o índice de rotación é  $-1$  e se o vector  $J(\alpha'(t))$ , con  $t \in [a, b]$ , apunta cara o exterior.

A demostración vista neste capítulo é a demostración dunha particularización do teorema da curva de Jordan para curvas diferenciables. Non obstante, o teorema orixinal debido a Jordan era xeral para curvas continuas e a súa demostración é de carácter topolóxico alxébrico.

O teorema para curvas continuas enúnciase como segue [17]:

**Teorema 3.7** (Teorema da curva de Jordan). *Sexa  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  unha aplicación continua tal que  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e  $\gamma|_{[a, b]}$  é inxectiva. Sexa  $C = \gamma([a, b])$  a súa traza. Entón  $\mathbb{R}^2 \setminus C = \{p \in \mathbb{R}^2 : p \notin C\}$  ten exactamente dúas compoñentes conexas.*

*O bordo común a ambas compoñentes é  $C$ . Á compoñente que está limitada chamarémola interior, mentres que á outra chamarémola exterior, que será non limitada.*

A demostración deste teorema é un caso particular do seguinte teorema, que consiste nunha xeneralización a máis dimensións dada a comezos do século pasado da man de Lebesgue e Brouwer. O seu enunciado di:

**Teorema 3.8.** *Sexa  $X$  unha esfera topolóxica de dimensión  $n$  do espazo  $\mathbb{R}^{n+1}$ , é dicir, a imaxe dunha aplicación continua e inxectiva da esfera  $S^n$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entón, o complementario de  $X$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ten exactamente dúas compoñentes conexas. Unha delas está limitada e chamarémola o interior, mentres que a outra non está limitada e será o exterior. Ademais, o bordo común a ambas compoñentes é o conxunto  $X$ .*

Para a demostración do teorema debemos recorrer á teoría de homoloxía. Grosso modo, unha homoloxía consiste en asignar a un espazo topolóxico certos obxectos alxébricos (grupos de homoloxía). Dita demostración baséase en que a homoloxía integral reducida de  $Y = \mathbb{R}^{n+1} \setminus X$ , sendo  $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$  homeomorfo a unha  $k$ -esfera, é:

$$\tilde{H}_q(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } q = n - k \text{ ou } q = n, \\ \{0\} & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Se  $n = k$  a homoloxía de orde cero de  $Y$  terá rango 1 o que mostraría que  $Y$  ten dúas compoñentes conexas (de feito, conexas por camiños) e ademais o bordo común é  $X$ . Para máis detalles véxase [9, páx. 169] ou [21, páx. 198].

Existe unha versión do teorema de curva de Jordan, chamada teorema de Jordan-Schönflies, que resulta máis forte có teorema xeral. Este teorema di que as rexións planas do interior e o exterior definidas por unha curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$  son homeomorfas ao interior e ao exterior da circunferencia unidade. Pódese consultar unha demostración en [4].

O paso dos anos deu lugar a que xurdiran novas demostracións. Unha das máis coñecidas ou destacables é a que se atribúe a Maehara [14]. Esta demostración baséase no uso do teorema do punto fixo de Brouwer cuxo resultado di:

**Teorema 3.9** (Punto fixo de Brouwer). *Toda aplicación continua dun disco en si mesmo ten un punto fixo.*

A súa demostración pódese ver en [12]. Esta versión da demostración do teorema da curva de Jordan é útil en matemática computacional.

## Capítulo 4

# A desigualdade isoperimétrica

Neste capítulo centrarémonos en contextualizar, enunciar e demostrar o teorema da desigualdade isoperimétrica para curvas planas. Este teorema ten a súa orixe ligada á creación da cidade de Cartago no séc. IX A.C. e na intención de achar cal de todas as curvas pechadas simples dunha lonxitude dada é a que encerra maior área.

Segundo conta a lenda, que se pode consultar en [13, páx. 135], tras escapar de Tiro, unha cidade fenicia, despois da vitoria do rei Pigmalión a raíña Elyssa (tamén chamada Dido na lenda) toma dirección ás costas de Túnez, onde negocia co rei da tribo local para poder adquirir unhas terras. Este proporcionalle unha pel dun touro e estipula que lle cederá o terreo que consiga abarcar con ela. Ante tal situación a raíña, que era bastante hábil, cortou a pel en finas tiras e formou unha tira de gran lonxitude (a nosa curva plana) coa que abarcou unha grande extensión de terreo tendo en conta ademais, que estaba situada á beira do Mediterráneo. A solución que deu a raíña Dido foi unha semicircunferencia con diámetro ao longo da costa. Isto serviu para asentar a base dos problemas que hoxe en día se coñecen como problemas de tipo Dido, nos que se emprega a fronteira como parte da curva.

Se continuamos coa historia “matematicamente falando” do problema isoperimétrico (véxase [17, páx. 311]) os gregos xa coñecían que a curva plana que encerraba a maior área, para un perímetro fixado, era a circunferencia. A primeira solución apareceu da man de grego Pappus, séc. IV A.C., establecendo que a solución era unha circunferencia. Durante séculos non houbo unha proba rigorosa desta afirmación, xa que moitas das probas asumían a existencia de solución. Non obstante, a Pappus este problema serviulle para crear un tratado contendo diversos problemas isoperimétricos como, por exemplo, por que as abellas decidían facer as celas en forma hexagonal, [11, páx. 7].

Tras vinte e dous séculos, Weierstrass publicou en 1870 a primeira proba rigorosa da desigualdade isoperimétrica no plano. Weierstrass deuse conta de que cuestións parecidas non tiñan

solución e deu unha demostración completa da existencia de solución para o problema isoperimétrico. Tal proba era realmente complexa xa que se trataba dun corolario da teoría que el mesmo desenvolvera para resolver problemas de maximizar e minimizar integrais, teoría que denominamos cálculo de variacións. É dicir, o problema isoperimétrico converteuse nun exemplo de cuestións matemáticas que poden ser abordadas polo cálculo de variacións [17, páx. 311].

Máis tarde apareceron novas demostracións, por exemplo da man de Hurwitz en 1902, na que empregaba expansións de Fourier, ou de Schmidt en 1939, que é a máis recorrente nos diversos libros de xeometría diferencial de curvas. Ambas demostracións pódense ver en [6, páx. 108].

A demostración que nós veremos é, en efecto, a de Schmidt, baseada na aplicación do teorema de Green. Por tanto, primeiramente lembraremos o devandito teorema e un corolario, que denotaremos como lema, que será fundamental para a demostración do problema isoperimétrico.

Antes de nada, concretemos que as curvas que usaremos ao longo de todo o capítulo serán curvas parametrizadas diferenciáveis e regulares. Ademais, dada unha curva plana pechada e simple  $C$ , falaremos da rexión que encerra tal curva (ou da rexión interior á curva), que non é máis cá compoñente conexas limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  cuxa existencia e unicidade queda garantida polo Teorema da curva de Jordan que estudamos no Capítulo 3. Recordemos tamén (Definición 3.6) que unha curva pechada simple  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  está positivamente orientada se o índice de rotación de  $\alpha$  é 1.

**Teorema 4.1** (Teorema de Green). *Sexa  $C$  unha curva plana, simple, pechada, positivamente orientada e regular a cachos e sexa  $D$  a rexión que encerra. Se  $L$  e  $M$  son funcións de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  definidas nunha rexión aberta contendo a  $D$  e de clase 1, entón:*

$$\int_C (Ldx + Mdy) = \int \int_D \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde o camiño de integración ao longo de  $C$  é antihorario.

A demostración deste teorema clásico da análise matemática pódese consultar en [16, páx. 492-494]. Vexamos agora un corolario deste teorema que nos será de utilidade para o cálculo de áreas e para cuxa demostración basta tomar  $L = 0$  e  $M = x$  (ou  $L = -y$  e  $M = 0$ ) e aplicar o teorema de Green. A demostración completa pódese consultar en [22, páx. 97].

**Lema 4.2.** *Sexa  $C$  unha curva plana simple pechada e positivamente orientada parametrizada por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ . A área da rexión interior á curva, que denotamos  $D$ , obtense como:*

$$\text{Area}(D) = \int_a^b x(t)y'(t)dt = - \int_a^b y(t)x'(t)dt.$$

## 4.1. Teorema e demostración

Temos entón agora todo o necesario para poder demostrar o teorema que dá nome a este capítulo. Para iso faremos uso dunha serie de resultados de análise á vez que o veremos xeometricamente usando unha figura recorrente ao longo da demostración.

**Teorema 4.3** (Desigualdade Isoperimétrica). *Sexa  $C$  unha curva plana pechada e simple. Denotemos por  $l$  a lonxitude de  $C$  e por  $A$  a área da rexión que encerra a curva  $C$ . Entón:*

$$l^2 \geq 4\pi A,$$

*cuxa igualdade se obtén se, e só se,  $C$  é unha circunferencia.*

*Demostración.* Tomemos dúas rectas paralelas que non intersecan a  $C$  e movámolas ata que ambas toquen a  $C$ , de forma que sexan tanxentes á curva en dous puntos distintos. Denotemos tales rectas tanxentes por  $R$  e  $R'$ . Entón, temos que a curva  $C$  está completamente contida na rexión limitada polas rectas  $R$  e  $R'$ .

Sexa  $S^1(r)$  unha circunferencia tanxente a  $R$  e  $R'$ , é dicir, na banda que forman ambas rectas, de forma que non corte a  $C$ . Denotemos por  $\mathcal{O}$  o centro de  $S^1$  e tomemos un sistema de coordenadas con orixe  $\mathcal{O}$  e cuxo eixo  $x$  é perpendicular ás rectas  $R$  e  $R'$ . Sen perda de xeneralidade asumimos que a curva está posicionada encima da circunferencia  $S^1$  e as rectas  $R$  e  $R'$  son verticais, como podemos ver na Figura 4.1.

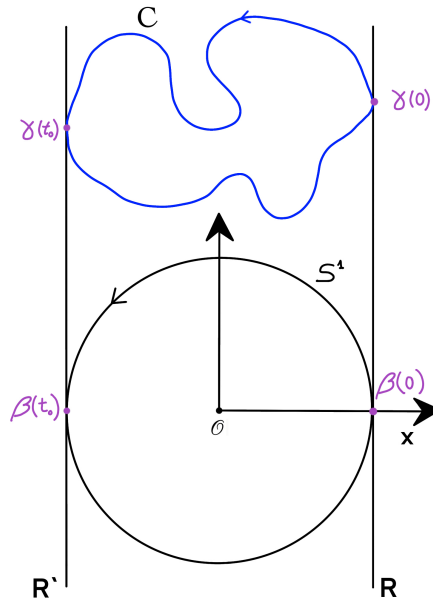


Figura 4.1: Posicións da curva e da circunferencia.

Denotemos por  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, l]$ , unha parametrización por lonxitude de arco de  $C$ , de forma que está positivamente orientada e cuxos puntos de tanxencia coas rectas  $R$  e  $R'$  son en  $t = 0$  e en  $t = t_0$ ,  $t_0 \in (0, l)$ , respectivamente.

Parametrizamos a circunferencia  $S^1$  por  $\beta(t) = (x(t), \tilde{y}(t))$  de forma que a primeira coordenada de  $\alpha(t)$  e de  $\beta(t)$  coincidan. Deste xeito, a medida que percorremos  $S^1$  estaremos verticalmente aliñados con percorrer  $C$  con velocidade un. É dicir, para un instante  $t$  fixado, unha partícula imaxinaria que recorre  $\alpha$  estará na mesma vertical ca outra partícula imaxinaria que recorra  $\beta$ . A compoñente  $\tilde{y}$  definíremola, por tanto, como:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x(t)^2} & \text{se } t \in [0, t_0), \\ -\sqrt{r^2 - x(t)^2} & \text{se } t \in [t_0, l]. \end{cases}$$

Temos que esta parametrización de  $\beta$  non é necesariamente regular nin inxectiva, pero isto non afectará á nosa demostración. Sexa  $2r$  a distancia entre  $R$  e  $R'$ . Polo lema previo, as áreas das rexións encerradas por  $C$  e  $S^1$  son respectivamente:

$$A = \int_0^l x(t)y'(t)dt \quad \text{e} \quad \pi r^2 = - \int_0^l \tilde{y}(t)x'(t)dt.$$

Sumándoas obtemos:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l xy' - \tilde{y}x' dt \leq \int_0^l |xy' - \tilde{y}x'| dt \leq \\ &\leq \int_0^l |(x, \tilde{y})| \cdot |(y', -x')| dt = \int_0^l \sqrt{x^2 + \tilde{y}^2} dt = \\ &= \int_0^l |\beta(t)| dt = \int_0^l \sqrt{x(t)^2 + r^2 - x(t)^2} dt = \int_0^l r dt = rl, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde se usou a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a hipótese de que  $\alpha$  está parametrizada por lonxitude de arco e a definición de  $\beta$ . Chegamos entón a que  $A + \pi r^2 \leq rl$ .

Agora ben, xa que a media xeométrica de dous números positivos é menor ou igual que a súa media aritmética, con igualdade se, e só se, ambos números son iguais, chegamos a que:

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{rl}{2}.$$

De onde obtemos finalmente a desigualdade que buscabamos:

$$4\pi A \leq l^2.$$

Chega con ver entón que ocorre cando  $4\pi A = l^2$ . Neste caso, todas as desigualdades tornaranse igualdades. Como temos a igualdade de extremos en (4.1),  $A + \pi r^2 = rl$ , teremos que as desigualdades entre elas serán tamén igualdades, polo que a desigualdade de Cauchy que aplicamos será unha igualdade, o que quere dicir que ambos vectores son proporcionais, é dicir,

$(x, \tilde{y}) = \lambda(y', -x')$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tomando normas obtemos o seguinte:

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{x^2 + \tilde{y}^2}}{\sqrt{(y')^2 + (x')^2}} = \pm r.$$

É fácil ver que o denominador é non nulo pois estamos a supoñer a curva parametrizada por lonxitude de arco. Temos entón que  $x = \pm ry'$ . Como  $r$  non depende da dirección escollida para  $R$ , pois a igualdade  $4\pi A = l^2$  implica a igualdade  $A + \pi r^2 = rl$ , como acabamos de ver, e ambas implican que  $r = l/2\pi$ , podemos intercambiar  $x$  e  $y$ , do que obteríamos  $y = \pm rx'$ . Entón:

$$x^2 + y^2 = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2,$$

co que teríamos que  $C$  é unha circunferencia. □

## 4.2. Máis dimensións

No artigo [18] trátanse casos máis xerais e detallados relacionados coa desigualdade isoperimétrica que acabamos de ver. Entre algunhas destas variacións relacionadas co problema isoperimétrico temos unha que está altamente relacionada coa física, onde se maximizan os autovalores dunha ecuación diferencial nun dominio circular, sendo este dominio a curva cuxa lonxitude traballáramos sobre ela.

Agora ben, este mesmo problema podémolo formular en máis dimensións, dende  $\mathbb{R}^n$  ata unha variedade riemanniana calquera. Se o vemos no primeiro caso teremos que o problema se traduce en minimizar a área dunha hipersuperficie pechada que encerra un volume dado ou, o que é o mesmo, maximizar o volume que encerra unha hipersuperficie pechada dada a área. Se o pensamos, a solución a este novo problema será análoga á anterior. Antes tiñamos que a solución para que se mantivese a igualdade é que a curva fose unha circunferencia, agora teremos que será unha esfera. Non obstante, o caso con  $n > 2$  é un problema que a día de hoxe segue vixente, pois non existe unha proba sinxela para un dominio nun plano. Como antes, a forma que poderíamos idear para resolver este problema sería o uso do cálculo de variacións, que é o que se usa para probar o seguinte resultado, onde se emprega unha modificación da contorna de xeito que se preserve o volume coa posibilidade de que a área diminúa, como se pode ver en [18, páx. 1187]. Disto podemos concluír o seguinte teorema:

**Teorema 4.4.** *Se a hipersuperficie de  $\mathbb{R}^n$  ten área mínima entre todas as que acoutan un volume, entón a curvatura media desta ten que ser constante.*

Á súa vez, isto permítenos formular toda unha serie de cuestións se relacionamos o teorema cos resultados que xa tiñamos en menos dimensións. Por exemplo, as hipersuperficies cuxa

curvatura media permanece constante son necesariamente esferas? Esta idea pode verse dende unha perspectiva física, de xeito que podemos reescribir a pregunta como: unha pompa de xabón pode ter outra forma que non sexa unha esfera? Se pensamos nas propiedades físicas da pompa, teremos que para cada punto da película a curvatura media será proporcional á diferenza da presión do aire en ambos lados. Entón, poderíamos concluír que a pompa debера ter unha curvatura media constante que virá dada pola diferenza de presión entre o exterior e o interior. Para unha información máis completa e detallada pódese seguir a lectura en [18].

Para finalizar coas xeneralizacións que temos sobre a desigualdade isoperimétrica usaremos [17] e falaremos sobre un par de resultados concretos sobre superficies e que son de grande importancia na actualidade. Supoñamos agora unha superficie  $S$  compacta e conexas en  $\mathbb{R}^3$ . Temos a mesma idea que antes, minimizar a área dado un volume. Para iso enunciaremos a desigualdade de Brunn-Minkowski, que se trata dunha proposición crucial na teoría da integración de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$ , onde vemos unha vez máis a gran relación que existe entre os diversos campos das Matemáticas. Antes de nada definamos a suma de conxuntos, dados  $A$  e  $B$  dous subconxuntos de  $\mathbb{R}^n$  escíbese:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Enunciamos entón o teorema de Brunn-Minkowski, que nos proporciona unha desigualdade entre a suma dos volumes dos subconxuntos.

**Teorema 4.5.** *Sexan  $A$  e  $B$  dous subconxuntos abertos e limitados do espazo  $\mathbb{R}^3$ , entón:*

$$(\text{vol } A)^{\frac{1}{3}} + (\text{vol } B)^{\frac{1}{3}} \leq (\text{vol } (A + B))^{\frac{1}{3}}$$

A demostración deste teorema pódese consultar en [17, páx. 189].

Isto non é máis que unha ferramenta de utilidade para poder ver o que realmente nos interesa, que sería poder escribir o análogo 2-dimensional da desigualdade isoperimétrica para curvas planas que vimos neste capítulo. É así polo que podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 4.6** (Desigualdade isoperimétrica espacial). *Sexa  $S$  unha superficie compacta e conexas en  $\mathbb{R}^3$ . Entón  $A(S)^3 \geq 36\pi(\text{vol } \Omega)^2$ , onde  $\Omega$  é o seu dominio interior. Ademais, a igualdade dáse se, e só se,  $S$  é unha esfera.*

Pódese consultar a demostración do mesmo en [17, páx. 195]. Este teorema permítenos, de xeito análogo ao teorema principal deste capítulo, relacionar a través dunha desigualdade a área e o volume da superficie. Do mesmo xeito que antes, a igualdade vén dada polo feito de que a superficie sexa unha esfera.

O estudo das desigualdades isoperimétricas segue a ser un tema de investigación de actualidade e pódense atopar moitas referencias que falan sobre o estudo en máis dimensións, en variedades riemannianas, ou sobre distintas relacións e desigualdades de motivación isoperimétrica. Suxírese a consulta de [1, 3, 10].

## Capítulo 5

# O teorema de Fenchel

A diferenza do resto de capítulos nos que traballamos con curvas planas, neste traballaremos cun teorema que se enuncia para curvas en  $\mathbb{R}^3$ , pero que caracteriza certas curvas espaciais como planas se se acada certa igualdade para a curvatura total. Se estamos a estudar a teoría local de curvas, unha observación importante é a de diferenciar entre as funcións curvatura referidas a curvas do plano ou do espazo, xa que para as do plano podemos definir unha curvatura orientada, mentres que para as segundas podemos só definir unha curvatura non negativa [17, páx. 312]. Por outra parte, pódese considerar o concepto de curvatura total das curvas en  $\mathbb{R}^3$  como unha media entre as curvaturas ao longo dos puntos. Neste capítulo veremos que unha cota inferior para a curvatura total será  $2\pi$  e, usando a idea da convexidade dunha curva, o teorema de Fenchel (debido ao matemático alemán Werner Fenchel en 1929) aseguraranos que esta cota é válida para curvas pechadas en  $\mathbb{R}^3$  (por simplicidade verémolo para  $n = 3$ , aínda que é válido en  $\mathbb{R}^n$ ). Usaremos como referencia para practicamente todo o capítulo o libro [22].

Formalmente podemos escribir a curvatura total como un promedio (a integral) das curvaturas tendo en conta a parametrización. Así temos:

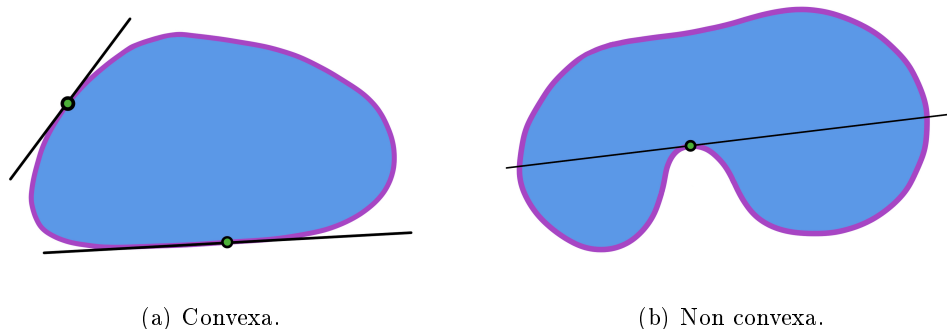
**Definición 5.1.** Defínese a **curvatura total** dunha curva regular  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$\text{curvatura total de } \alpha = \int_a^b k(t) |\alpha'(t)| dt,$$

onde  $k(t)$  denota a curvatura da curva  $\alpha$ .

Antes de meternos de cheo na demostración do teorema de Fenchel debemos de ter en conta unha serie de definicións e lemas que serán fundamentais para a posterior proba. Definamos a idea de curva convexa. Intuitivamente podemos pensar que unha curva pechada simple é convexa se dados dous puntos na rexión interior da curva a recta que os une tamén está nesa rexión interior. Formalmente diremos:

**Definición 5.2.** Unha curva simple plana e pechada é **convexa** se toda a súa traza queda a un lado de cada unha das súas rectas tanxentes.



(a) Convexa.

(b) Non convexa.

Existe unha caracterización para probar que unha curva sexa convexa mediante a súa curvatura con signo,  $k_s$ , deste xeito:

**Proposición 5.3.** *Sexa  $\alpha$  unha curva plana simple e pechada. Equivalen:*

1.  $\alpha$  é convexa.
2. A curvatura con signo  $k_s$  de  $\alpha$  non cambia de signo, é dicir, ou é  $\geq 0$  ou  $\leq 0$  en todo o seu dominio.

Ademais, unha curva plana periódica regular con índice de rotación  $\pm 1$  é convexa se, e só se, a súa curvatura non cambia de signo.

A demostración e a equivalencia con outra condición pódense ver en [22, páx. 75], así como unha demostración alternativa pódese atopar en [17, páx. 337].

Unha pregunta natural cando estamos a traballar con curvas pechadas é se existe algunha condición necesaria sobre a curvatura para que unha curva plana simple sexa pechada. A primeira conclusión que podemos sacar é consecuencia dun teorema que xa vimos en profundidade, o teorema da Umlaufsatz de Hopf, que nos proporciona a proba case directa do seguinte resultado.

**Lema 5.4.** *A curvatura total dunha curva  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  plana simple e pechada é  $\geq 2\pi$ , cuxa igualdade se dá se, e só se, é convexa.*

*Demostración.* Supoñamos a curva  $\alpha$  plana, simple, pechada e parametrizada por lonxitude de arco. Deste xeito, a integral da súa curvatura con signo vén dada polo teorema da Umlaufsatz

de Hopf. Así, retomando a notación da función ángulo e a relación xa vista en (2.1) entre a curvatura con signo e función ángulo teremos:

$$\int_a^b k_s(t)dt = \int_a^b \theta'(t)dt = \theta(b) - \theta(a) = 2\pi \cdot (\text{índice de rotación}) = \pm 2\pi.$$

Esta integral podemos relacionala facilmente coa integral sen signo do seguinte xeito, tendo en conta a igualdade vista en (1.1):

$$\int_a^b k(t)dt = \int_a^b |k_s(t)|dt \geq \left| \int_a^b k_s(t)dt \right| = 2\pi. \quad (5.1)$$

A igualdade virá dada se, e só se, a curvatura  $k_s$  non cambia de signo, que pola proposición anterior equivale a que a curva  $\alpha$  sexa convexa.  $\square$

O noso obxectivo será probar o Lema 5.4 para todas as curvas pechadas en  $\mathbb{R}^n$ . Mais, como xa dixemos, centrarémonos no caso en que  $n = 3$ . Agora ben, se consideremos a esfera  $S^2$  chamaremos curva en  $S^2$  a unha curva en  $\mathbb{R}^3$  cuxa traza sexa un subconxunto de  $S^2$ . En concreto, denominaremos círculo máximo á intersección de  $S^2$  cun plano de  $\mathbb{R}^3$  pasando polo centro da esfera. Ademais, dados dous puntos  $p$  e  $q$  en  $S^2$  denotaremos por  $\overline{pq}$  a distancia sobre a esfera entre os puntos, é dicir, a menor lonxitude de arco que tomará o segmento de curva regular que une ambos puntos.

Unha vez temos estas ideas claras, vexamos dous lemas: o primeiro relacionaranos a lonxitude de arco entre dous puntos cos círculos máximos, cuxa demostración é trivial, e o segundo relacionaranos a lonxitude de arco dunha curva co feito de que corte os círculos máximos da esfera.

**Lema 5.5.** *Se temos dous puntos  $p, q \in S^2$ , con  $p \neq q$ , entón  $\overline{pq} \leq \pi$ , cuxa igualdade virá dada se, e só se,  $p = -q$ . Existirá un segmento dun círculo máximo que une  $p$  e  $q$  con lonxitude  $\overline{pq}$ , e será único salvo que  $p = -q$ . A traza de cada curva en  $S^2$  unindo  $p$  e  $q$  con lonxitude de arco  $\overline{pq}$  é un segmento dun círculo máximo.*

O seguinte lema será crucial para a demostración do teorema, xa que nos facilitará en gran medida os razoamentos.

**Lema 5.6.** *Sexa  $\gamma$  unha curva regular pechada da esfera  $S^2$ . Se a traza da curva interseca a cada círculo máximo da esfera  $S^2$  teremos entón que a lonxitude de arco da curva será  $\geq 2\pi$ , cuxa igualdade virá dada se, e só se, a curva  $\gamma$  é unha parametrización simple dun círculo máximo.*

*Demostración.* Tomemos a curva  $\gamma: [0, l] \rightarrow S^2$  parametrizada por lonxitude de arco, sen perda de xeneralidade. Denotemos os puntos da curva  $p = \gamma(0) = \gamma(l)$  e  $q = \gamma(l/2)$ . Sexan agora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  as restricións da curva  $\gamma$  aos respectivos intervalos  $[0, l/2]$  e  $[l/2, l]$ . Distingamos dous casos:

- Caso  $p = -q$ . Neste caso estaríamos a tomar dous puntos que son antipodais, polo que claramente  $\overline{pq} = \pi$ . Deste xeito, as curvas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  terán lonxitude de arco  $\geq \pi$ , cuxa igualdade virá dada polo feito de que a traza de cada unha delas se corresponda coa metade dun círculo máximo. Así, a lonxitude de arco total para  $\gamma$  sería  $\geq 2\pi$ , con igualdade soamente se a traza de  $\gamma$  son dúas metades dun círculo máximo, que pola regularidade da curva  $\gamma$  terán que ser ambas metades do mesmo círculo máximo.
- Caso  $p \neq -q$ . Polo lema previo sabemos que existe un único círculo máximo,  $C$ , que conteña a  $p$  e  $q$ . Se tomamos o punto medio nas cordas que unen  $p$  e  $q$  neste círculo máximo, que denotaremos por  $Z$  e  $\tilde{Z}$ , trazaremos un círculo máximo  $M$  ortogonal a  $C$  que sexa perpendicular á liña recta unindo  $Z$  e  $\tilde{Z}$  pasando polo centro da esfera, de xeito que tal círculo máximo  $M$  estará á mesma distancia de  $p$  e de  $q$ , como se pode ver na Figura 5.1. Sen perda de xeneralidade, suporemos que  $Z$  e  $\tilde{Z}$  son o polo norte e sur de  $S^2$  respectivamente. Temos que a traza da curva  $\gamma$  interseca o círculo máximo  $M$ , xa que polo enunciado do lema sabemos que interseca cada círculo máximo da esfera, nun punto que denotaremos como  $s$ . Tense que  $\overline{sp} = \overline{-sq}$ , pois o xiro de 180 graos sobre o eixo vertical que acabamos de definir na esfera é un movemento ríxido que leva os elementos  $p \mapsto q$  e  $s \mapsto -s$ . Entón, temos

$$\overline{sp} + \overline{sq} = \overline{-sq} + \overline{sq} = \pi.$$

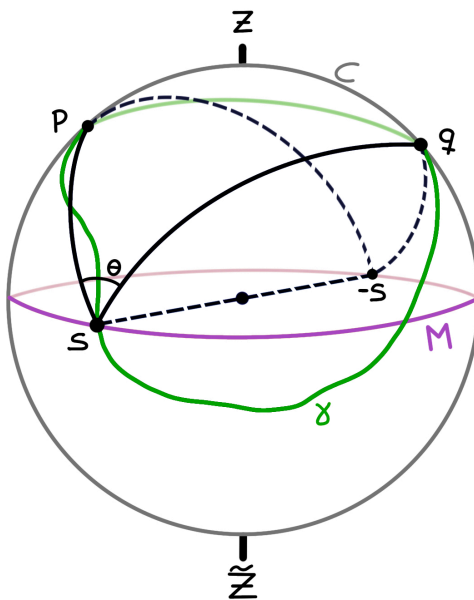


Figura 5.1: Elementos na esfera.

Tanto a curva  $\gamma_1$  como a curva  $\gamma_2$  pasan por  $p$  e  $q$  pasando por  $s$ , polo que a lonxitude de arco da curva unindo os puntos será como mínimo  $\overline{sp} + \overline{sq} = \pi$ . En concreto, esta lonxitude será maior estrito que  $\pi$ , pois se fose estritamente a igualdade teríamos que os cachos de curva entre os puntos  $p$  e  $s$  e entre  $s$  e  $q$  coinciden coas xeodésicas, as liñas negras da Figura 5.1, que unen eses mesmos puntos. Pero como estamos a traballar con  $\gamma$  diferenciable en todo o seu dominio implica que debe selo tamén no punto de unión, cousa que só ocorrería se o ángulo que forman as xeodésicas fose de 180 graos, o que implicaría  $p = -q$ , e que contradí a suposición inicial. Acabamos de ver, por tanto, que a lonxitude de  $\gamma_1$  e a lonxitude de  $\gamma_2$  son maiores que  $\pi$ , polo que a lonxitude de arco total da curva  $\gamma$  será  $> 2\pi$ , como queríamos ver.  $\square$

## 5.1. Teorema e demostración

Temos agora todo o necesario para poder presentar o resultado de Fenchel. Comezaremos por enunciálo e despois faremos a súa demostración cun razoamento sinxelo usando as circunferencias máximas da esfera e o vector velocidade da curva.

**Teorema 5.7** (de Fenchel). *A curvatura total cunha curva pechada en  $\mathbb{R}^3$  é  $\geq 2\pi$ , cuxa igualdade se dá se, e só se, a curva é simple, convexa e está contida nun plano de  $\mathbb{R}^3$ .*

*Demostración.* Sexa  $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^3$  unha curva pechada que supoñemos parametrizada por lonxitude de arco. Por ser  $\alpha$  parametrizada por lonxitude de arco denotamos  $\mathbf{v} = \alpha'$ , que será unha curva en  $S^2$ . Isto vén dado polo feito de que se tomamos a curva parametrizada deste xeito cada vector velocidade  $\mathbf{v}(t)$  débuxase con orixe na respectiva orixe da esfera, entón a correspondencia  $t \mapsto \mathbf{v}(t)$  trátase dun camiño na esfera  $S^2$ .

Usaremos o feito de que a curva sexa pechada para ver que a traza de  $\mathbf{v}$  interseca cada círculo máximo. Sexa entón  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3$  un subespazo dous dimensional calquera, de xeito que  $M = \mathcal{R} \cap S^2$  sexa un círculo máximo calquera da esfera. Sexa agora  $\mathbf{n}$  un vector normal a  $\mathcal{R}$ . Deste xeito, un punto de  $S^2$  estará en  $M$  se, e só se, este é ortogonal a  $\mathbf{n}$ , é dicir, se o vector posición do punto é ortogonal ao vector normal do plano. Como temos

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha(t), \mathbf{n} \rangle = \langle \alpha'(t), \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle,$$

entón polo teorema fundamental do cálculo podemos obter

$$\int_0^l \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle dt = \langle \alpha(l), \mathbf{n} \rangle - \langle \alpha(0), \mathbf{n} \rangle = 0,$$

onde a última igualdade vén dada polo feito de que a curva sexa pechada. Agora ben, pola continuidade da integral e polo feito de que o valor desta sexa cero sabemos que para algún

punto  $t_0 \in [0, l]$  teremos que  $\langle \mathbf{v}(t_0), \mathbf{n} \rangle = 0$ . Por tanto, a traza de  $\mathbf{v}$  corta a cada círculo máximo da esfera. Pero entón, polo Lema 5.6 temos que a lonxitude de arco de  $\mathbf{v}$  será  $\geq 2\pi$ . Xa vimos que, por estar a curva  $\alpha$  parametrizada por lonxitude de arco, a súa curvatura vén dada por  $k(t) = |\mathbf{v}'(t)|$ , polo que teremos:

$$\text{curvatura total de } \alpha = \int_0^l k(t)dt = \int_0^l |\mathbf{v}'(t)|dt = \text{lonxitude de arco de } \mathbf{v} \geq 2\pi.$$

Se tiveramos a igualdade na desigualdade anterior, polo Lema 5.6 entón teriamos que  $\mathbf{v}$  debiera ser unha parametrización simple dun círculo máximo, é dicir, do círculo máximo que denotamos  $M = \mathcal{R} \cup S^2$ . Podemos escribir a curva  $\alpha$  como

$$\alpha(t) = \int_0^t \mathbf{v}(u)du + \alpha(0),$$

polo que a traza da curva  $\alpha$  debiera estar no plano que escribiremos como  $\{\alpha(0) + z : z \in \mathcal{R}\}$ . Aplicando un movemento rixido a este plano, podemos asumir que estamos tomando o plano  $xy$ , considerando así a curva  $\alpha$  como unha curva plana. A súa función velocidade  $\mathbf{v}$  será unha parametrización simple da circunferencia unidade  $S^1$ . Pero entón teremos que a curva  $\alpha$  ten índice de rotación  $\pm 1$ , isto é pola propia definición de índice, xa que vimos en (2.1) que era igual ao grao da función velocidade para a nosa curva  $\alpha$ . Como acabamos de ver que  $\mathbf{v}$  é unha parametrización simple de  $S^1$  podemos concluír  $\deg \mathbf{v} = \pm 1$ . Ademais, temos que a curvatura non cambia de signo, é dicir,  $k_s \geq 0$  ou  $k_s \leq 0$ . Para ver isto teñamos en conta a seguinte relación de desigualdades:

$$2\pi = \int k(t)dt = \int |k_s(t)|dt \geq \left| \int k_s(t)dt \right| = 2\pi.$$

A primeira igualdade vén dada por hipótese xa que estamos a supoñer que a curvatura total é  $2\pi$ , a segunda vén dada polo feito de que  $k = |k_s|$ , a terceira desigualdade é debida á desigualdade triangular para integrais e a cuarta igualdade vén por que acabamos de ver que o índice de rotación é  $\pm 1$ , como no Lema 5.4. Temos entón que a desigualdade  $\geq$  é unha igualdade, pero se na desigualdade triangular temos unha igualdade isto implica que o integrando é  $\geq 0$  ou  $\leq 0$  e, por tanto, que  $k_s \geq 0$  ou  $k_s \leq 0$ . Con estas dúas hipóteses e grazas á Proposición 5.3 podemos asegurar que finalmente a curva  $\alpha$  cumpre ser convexa.  $\square$

## Capítulo 6

# Teorema dos catro vértices

Para rematar, trataremos un último teorema relativo á teoría global de curvas planas pechadas e convexas. Este é o chamado teorema dos catro vértices, que di que unha curva destas características ten polo menos catro vértices, cuxa definición veremos a continuación. Comece-mos cun breve contexto histórico sobre o teorema; para unha maior extensión véxase [17]. No ano 1909 foi demostrado por primeira vez da man do xeómetra indio H. Mukhopadhyaya e redescuberto por A. Kneser no ano 1912. Dende o seu descubrimento converteuse nun teorema de relevancia no eido da xeometría diferencial. Ao longo dos anos leváronse a cabo diversas demostracións; destacamos a realizada por H. Gluck en 1966 na que mostrou que o teorema dá unha condición suficiente para que unha función periódica sexa a función curvatura correspondente a unha elipse. Neste capítulo trataremos de demostrar o teorema no caso de que a curva sexa convexa e faremos un par de puntualizacións sobre a xeneralidade do teorema.

Antes de nada debemos entender que é un vértice. Intuitivamente pensamos nun vértice como o punto de unión entre dúas rectas, como podería ser o vértice dun triángulo. Neste caso estamos traballando cunha curva diferenciable, polo que a unión debe ser “suave”. Por iso, nós trataremos os vértices dunha curva como os puntos en que a curva fai un “pico” (diferenciable), é dicir, onde cambia notablemente a curvatura da curva. Formalmente temos, seguindo [17, 22]:

**Definición 6.1.** Sexa  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  unha curva plana regular e  $C$  a traza da curva. Diremos que un punto  $\alpha(t) \in C$  é un **vértice** se a súa función curvatura ten un máximo ou un mínimo local en  $t$ . Onde  $I$  é un intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ .

Dado que toda función continua nun compacto acada un máximo e un mínimo, podemos deducir que toda curva pechada no plano (que, polo tanto, ten traza compacta) ten polo menos dous vértices.

Se tratamos de pensar en dous casos nos que claramente existirá un número non finito de vértices podemos pensar en cousas tan sinxelas como unha recta ou unha circunferencia. Pois neste caso, cada punto será un máximo e un mínimo local, polo que todos estes puntos serán vértices.

A demostración que veremos en profundidade, que aparece en [22], usa o feito de que a curva sexa convexa. Pero previamente necesitamos un lema que relaciona a convexidade da curva coas rectas do plano.

**Lema 6.2.** *Sexan  $C$  a traza dunha curva simple, plana, pechada e convexa e  $L$  unha recta no plano. Entón, temos:*

1. *Se  $L$  é tanxente á traza en dous puntos distintos entón a traza contén o segmento de  $L$  comprendido entre os puntos.*
2. *Se a intersección  $C \cap L$  ten máis de dous puntos entón, a traza contén o segmento enteiro de  $L$  entre os respectivos pares de puntos.*

Pódese consultar a demostración en [22, páx. 73].

Só precisamos unha última cousa para poder comezar coa demostración, escribir a curva e a súa curvatura en compoñentes. Para iso, se supoñemos a curva p.p.a., sabemos que as coordenadas da curva se escriben  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  de xeito que podemos reescribir a ecuación da curvatura como:

$$\alpha''(t) = k_s(t)J(\alpha'(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} x''(t) = -k_s(t)y'(t), \\ y''(t) = k_s(t)x'(t). \end{cases}$$

## 6.1. Teorema e demostración

Temos agora todo o necesario para poder enunciar e demostrar o teorema dos catro vértices, para o caso convexo. A demostración está guiada pola que aparece en [22, páx. 74-75], aínda que podemos atopar unha demostración similar en [2].

**Teorema 6.3.** *Cada curva plana simple pechada e convexa ten polo menos catro vértices.*

*Demostración.* Sexa  $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva do enunciado e sexa  $C$  a súa traza. Supoñamos sen perda de xeneralidade que a curva  $\alpha$  está positivamente orientada. Supoñemos ademais que non hai ningún intervalo no que a curvatura de  $\alpha$  permaneza constante, senón teríamos que os puntos dese intervalo serían todos vértices, o que implicaría directamente que a curva tería unha cantidade infinita non numerable de vértices e, por tanto, máis de catro. Do mesmo xeito podemos asumir que a curva non contén ningunha liña recta.

- Supoñamos que a curva  $\alpha$  ten tres vértices. Isto implica que dous deses vértices serán do mesmo tipo, é dicir, ou hai dous máximos locais ou hai dous mínimos locais. Pero isto non pode ser, porque a función curvatura vimos que non era constante localmente e é diferenciable, polo que non pode ter extremos locais consecutivos do mesmo tipo. Visto doutra forma, se tiveramos dous máximos seguidos implicaría ou ben que a curva se mantén con curvatura constante polo medio, que vimos que non podía ser, ou ben a curvatura entre os puntos diminuíría polo que teríamos polo medio un punto para o cal habería un mínimo relativo, que tampouco pode ser.
- Supoñamos agora que a curva ten menos de tres vértices. Podemos denotalos por  $p \in C$ , sendo este o punto da curva onde se alcanza a curvatura máxima en  $C$ , e  $q \in C$ , que se correspondería co punto onde se alcanza a curvatura mínima en  $C$ . Claramente, os puntos son distintos, porque estamos supoñendo que a curvatura non é constante. Denotemos por  $L$  a liña recta que pasa polos puntos que acabamos de marcar,  $p$  e  $q$ . Polo segundo resultado do Lema 6.2 sabemos que a liña só corta á curva en  $p$  e  $q$ , pois senón  $C$  contería un segmento recto e iso levaríanos a unha contradición.

Supoñamos que a curva  $\alpha$  está parametrizada por lonxitude de arco. Podemos escribir os puntos  $p$  e  $q$  en función da parametrización como  $\alpha(0) = \alpha(l) = p$  e  $\alpha(a) = q$  para algún  $a \in (0, l)$ .

Analicemos como é a curvatura entre os respectivos intervalos comprendidos entre os puntos  $p$  e  $q$ . No intervalo  $(0, a)$  temos que a curvatura vai dun máximo a un mínimo, é dicir, a función é decrecente, polo que  $k'_s \leq 0$  no intervalo  $(0, a)$ . Do mesmo xeito, para o intervalo  $(a, l)$  teremos que curvatura vai dun mínimo a un máximo, polo que será crecente e podemos velo como  $k'_s \geq 0$  no intervalo  $(a, l)$ . Tomemos como eixo horizontal a recta  $L$  e como eixo vertical a recta ortogonal a  $L$  pasando polo punto  $p$ , sen perda de xeneralidade.

Teñamos agora en conta a curva  $\alpha$  en compoñentes,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ . Temos dúas posicións relativas posibles respecto dos puntos, que se ven reflectidas na Figura 6.1. Temos que:

- Se  $p$  queda á dereita de  $q$ : a imaxe da curva no intervalo  $(0, a)$  queda por encima da recta  $L$  e a imaxe no intervalo  $(a, l)$  queda por debaixo da recta  $L$ .
- Se  $p$  queda á esquerda de  $q$ : a imaxe da curva no intervalo  $(0, a)$  queda por debaixo de recta  $L$  e a imaxe no intervalo  $(a, l)$  queda por encima da recta  $L$ .

Ademais, temos que a compoñente  $y(t)$  só se anula en  $t = 0$ ,  $t = a$  e  $t = l$  (que son puntos onde a curvatura acada extremos relativos, polo que a derivada da curvatura tamén se anula). Entón, vexamos que para os dous casos anteriores o produto  $y(t)k'_s(t)$  non cambia de signo no intervalo  $[0, l]$  botando man da Figura 6.1.

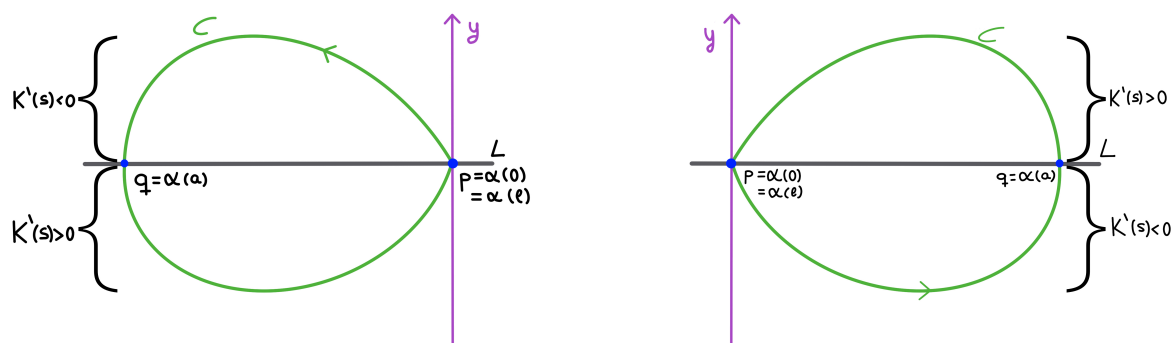
(a)  $p$  á dereita de  $q$ .(b)  $p$  á esquerda de  $q$ .

Figura 6.1: Posicións relativas dos puntos.

- Se  $p$  queda á dereita de  $q$ :

$$\begin{cases} \text{Se } t \in (0, a) : k'_s \leq 0 \text{ e } y(t) > 0 \Rightarrow yk'_s \leq 0 \\ \text{Se } t \in (a, l) : k'_s \geq 0 \text{ e } y(t) < 0 \Rightarrow yk'_s \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \{ y(t)k'_s(t) \leq 0 \text{ con } t \in [0, l].$$

- Se  $p$  queda á esquerda de  $q$ :

$$\begin{cases} \text{Se } t \in (0, a) : k'_s \leq 0 \text{ e } y(t) < 0 \Rightarrow yk'_s \geq 0 \\ \text{Se } t \in (a, l) : k'_s \geq 0 \text{ e } y(t) > 0 \Rightarrow yk'_s \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \{ y(t)k'_s(t) \geq 0 \text{ con } t \in [0, l].$$

Temos entón que o produto  $y(t)k'_s(t)$  permanece co signo constante no intervalo  $[0, l]$  e ademais só se anula cando tamén se anula a derivada da curvatura, que non sucede en ningún intervalo de medida non nula. É por iso que podemos afirmar o seguinte:

$$\int_0^l y(t)k'_s(t)dt \neq 0,$$

pois pola teoría que sabemos de integración estamos a integrar unha función con signo constante e cuxos únicos puntos onde se anula forman un conxunto de medida nula.

Non obstante, integrando por partes e tendo en conta que a curva  $\alpha$  é pechada temos:

$$\begin{aligned} \int_0^l y(t)k'_s(t)dt &= y(t)k_s(t) \Big|_0^l - \int_0^l k_s(t)y'(t)dt = \\ &= - \int_0^l k_s(t)y'(t)dt = \int_0^l x''(t)dt = x'(t) \Big|_0^l = 0. \end{aligned}$$

Polo que acabamos de ver que a curva  $\alpha$  non pode ter dous vértices.

Vimos entón que non pode ter nin dous nin tres vértices e como dixemos ao comezar o capítulo non pode haber menos que dous vértices. É así como chegamos a que como mínimo a curva debe ter catro vértices, como queríamos ver.  $\square$

## 6.2. Xeneralizacións

Como dixemos, o que acabamos de ver é unha demostración do teorema orixinal engadindo a condición de que a curva sexa convexa. Mais non é necesaria esta condición para que o resultado sexa válido. Como podemos ver en [19] a demostración xeral faise usando unha circunferencia circunscrita á curva. O teorema dos catro vértices, segundo se ve neste documento, non é máis que unha consecuencia do seguinte teorema.

**Teorema 6.4.** *Sexa  $\alpha$  unha curva plana, simple, pechada e regular de clase  $C^2$ . Denotemos por  $C$  a circunferencia circunscrita á curva  $\alpha$ . Entón:*

1.  $\alpha \cap C$  ten polo menos dous puntos.
2. Se  $\alpha \cap C$  ten polo menos  $n$  puntos, entón  $\alpha$  terá polo menos  $2n$  vértices.

Este resultado proporciónanos unha curiosa interpretación, pois relaciona o número de vértices co número de veces que a curva interseca a súa circunferencia circunscrita. Isto é unha gran diferenza coa demostración anterior, pois antes só asegurabamos a existencia dun mínimo de 4 vértices. Esta proba permítenos cuestionarnos se o mínimo número axeitado de vértices debe ser 6 e non 4, que é unha consecuencia do feito de que é máis común esperar que a curva circunscrita corte á curva en tres puntos e non en dous. De todas formas, esta segue a ser unha discusión aberta e vixente hoxe en día.

Outra demostración alternativa é a contida en [20]. Esta outra baséase na existencia de circunferencias osculatrizes nun certo número de puntos da curva. Podemos definir unha **circunferencia osculatriz** nun punto como aquela que ten por raio o inverso da curvatura da curva nese punto e que é tanxente á curva en tal punto [7]. Poderíámolo interpretar como a circunferencia que mellor aproxima a curva nun punto da mesma. Ademais, as derivadas primeira e segunda tanto da curva como da aplicación que parametriza a circunferencia osculatriz coinciden nese punto.

Para poder ver esta demostración precisamos primeiro entender a idea de que unha circunferencia osculatriz “suxeite” a curva  $\alpha$  nun punto  $p$ . Diremos que a circunferencia **suxeita**  $\alpha$  **nun punto**  $p$  se o punto está tanto na circunferencia como na curva e, ademais, a circunferencia está totalmente contida nunha das rexións que a curva  $\alpha$  divide no plano. Se a circunferencia

osculatriz queda na rexión limitada (interior) da curva diremos que a suxeita dende o interior, do contrario diremos que a suxeita dende o exterior. Se nos fixamos na Figura 6.2, vemos que nos puntos  $p$  e  $p'$  as circunferencias oscultrices suxeitan a curva  $\alpha$  dende o exterior e o interior, respectivamente, mentres que no punto  $q$  non, xa que a circunferencia non está contida só na rexión interior ou exterior limitadas pola curva  $\alpha$ .

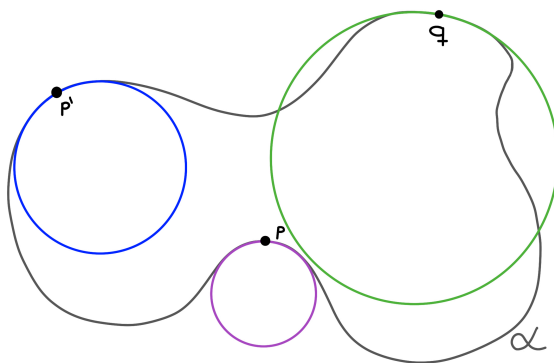


Figura 6.2: Curva  $\alpha$  suxeita en  $p$  e  $p'$ .

Tense ademais que se unha circunferencia oscultriz suxeita a curva  $\alpha$  nun punto  $p$ , entón este punto é un vértice. En consecuencia, podemos escribir o teorema dos catro vértices como:

**Teorema 6.5.** *Cada curva plana simple e regular está suxeita polas súas circunferencias oscultrices en catro puntos: dúas dende o interior e dúas dende o exterior.*

A demostración contida en [20] usa un lema que procede do que comunmente se chama “teorema da lúa nun charco” (cuxa demostración tamén está contida en [20]). Dito teorema di:

**Teorema 6.6** (da lúa nun charco). *Sexa  $\alpha$  unha curva plana, simple, pechada e regular tal que o valor absoluto da súa curvatura está limitado por un. Entón, a rexión interior á curva contén unha bóla aberta de raio un.*

Aínda que exista unha restrición sobre as condicións da curva, é dicir, sobre o bordo do charco, estaríamos a garantir a existencia dunha circunferencia unidade no seu interior, é dicir, o reflexo da lúa. Deste resultados sacamos o seguinte lema:

**Lema 6.7.** *Tomemos  $\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  unha curva pechada, plana, simple e regular. Entón, nun punto de  $\alpha$ , distinto de  $\alpha(0)$ , a súa circunferencia oscultriz suxeita á curva  $\alpha$  dende o interior.*

Así, a demostración do teorema dos catro vértices emprega a existencia deste punto onde se suxeita a curva dende o interior para probar a existencia de polo menos outro punto cumprindo as mesmas características. Finalmente, para ver a existencia de polo menos outros dous puntos onde a curva está suxeita dende o exterior faise uso dunha inversión da curva.

# Bibliografía

- [1] Balestro, V., & Martini, H. (2019). The Rosenthal–Szász inequality for normed planes. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 99(01), 130–136.
- [2] Berger, M., & Gostiaux, B. (1988). *Differential geometry: Manifolds, curves, and surfaces* (S. Levy, Trad.). Springer.
- [3] Blåsjö, V. (2005). The Isoperimetric Problem. *The American Mathematical Monthly*, 112(6), 526–566.
- [4] Brown, M. (1960). A proof of the generalized Schoefflies theorem. *Bulletin Of The American Mathematical Society*, 66(2), 74-76.
- [5] Carmo, M. P. D. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Courier Dover Publications.
- [6] Chern, S.-S. (1989). *Global Differential Geometry*. Mathematical Association of America.
- [7] Ghys, É., Tabachnikov, S., & Timorin, V. (2013). Osculating curves: Around the Tait-kneser theorem. *The Mathematical Intelligencer*, 35(1), 61–66.
- [8] González, J. A. P. (2010). *Un curso de geometría diferencial: teoría, problemas, soluciones y prácticas con ordenador*. Editorial CSIC - CSIC Press.
- [9] Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press.
- [10] Hernández Cifre, M. A., & Martínez Fernández, A. R. (2015). The isodiametric problem and other inequalities in the constant curvature 2-spaces. *Revista de la real academia de ciencias exactas, físicas y naturales. Serie A. Matemáticas*. RACSAM, 109(2), 315–325.
- [11] Jones, A. (1986). Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection. En *Sources in the history of mathematics and physical sciences*.
- [12] Kellogg, R. B., Li, T. Y., & Yorke, J. (1976). A constructive proof of the Brouwer fixed-point theorem and computational results. *SIAM Journal On Numerical Analysis*, 13(4), 473-483.

- 
- [13] Kline, M. (2013). *Mathematics for the Nonmathematician*. Dover Publications.
- [14] Maehara, R. (1984). The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem. *The American Mathematical Monthly*, 91(10), 641–643.
- [15] Manetti, M. (2015). *Topology*. Springer.
- [16] Marsden, J., & Tromba, A. (2012). *Vector Calculus* (6a ed.). W.H. Freeman.
- [17] Montiel, S., & Ros, A. (2005). *Curves and Surfaces*. American Mathematical Society.
- [18] Osserman, R. (1978). The isoperimetric inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 84(6), 1182–1328.
- [19] Osserman, R. (1985). The Four-or-More Vertex Theorem. *The American Mathematical Monthly*, 92(5), 332–337.
- [20] Petrunin, A., Barrera, S. Z., & Cáliz, A. C. C. (2022). Moon in a puddle and the four-vertex theorem. *The American Mathematical Monthly: The Official Journal of the Mathematical Association of America*, 129(5), 475–479.
- [21] Spanier, E. H. (2012). *Algebraic topology*. Springer Science & Business Media.
- [22] Tapp, K. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Springer.
- [23] Thorpe, J. A. (2011). *Elementary topics in differential geometry*. Springer.