



Universidade de Santiago de Compostela

Facultade de Farmacia

Departamento de Matemáticas

Matemáticas para Farmacia

Notas de Clase

Cuarta Edición

Curso 2009–2010

Enrique Macías-Virgós

Santiago de Compostela

Matemáticas para Farmacia

Enrique Macías Virgós

Notas de Clase
Cuarta Edición
Curso 2009–10

«La filosofía está escrita en el gran libro del universo, siempre abierto ante nuestros ojos. Pero no podemos entenderlo si no aprendemos primero el lenguaje en que está escrito y sabemos leer sus signos. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas, y sus signos son las figuras geométricas. Sin ellas, estamos perdidos en un oscuro laberinto». (Galileo Galilei, 1623).

ISBN: en trámite na Axencia do ISBN de España

Licenza: Creative Commons BY 4.0.

Índice general

2. Funciones elementales	5
2.1. Rectas y parábolas	5
2.2. Las funciones exponenciales	7
2.3. Funciones trigonométricas	8
2.4. Funciones inversas	10
2.5. Continuidad	13
2.6. Series	13
3. Diferenciación	17
3.1. Derivada de una función en un punto	17
3.2. Reglas de derivación	19
3.3. El teorema del valor intermedio	22
4. Aplicaciones del cálculo diferencial	25
4.1. Regla de L'Hôpital	25
4.2. Cinemática.*	29
4.3. Representación de funciones	30
4.4. Problemas de optimización	36
5. Integración	37
5.1. El problema del cálculo de áreas	37
5.2. Integral definida	39
5.3. Valor medio de una función	39
5.4. Teorema Fundamental del Cálculo	40
5.5. Cálculo de primitivas	43
5.5.1. Integración por partes	44
5.5.2. Cambio de variable	45
5.6. Integrales impropias	47

5.7.	Integración de fracciones racionales	49
5.8.	Volúmenes de cuerpos de revolución*	54
6.	Ecuaciones Diferenciales	57
6.1.	Ecuación Diferencial	57
6.2.	Existencia y unicidad de soluciones	58
6.3.	Ejemplo de modelo matemático	59
6.4.	Ecuaciones con variables separables	63
6.5.	Ecuaciones lineales	63
6.5.1.	Homogéneas con coeficientes constantes	64
6.5.2.	Homogéneas con coeficientes no constantes	64
6.5.3.	No homogénea, pero con coeficientes constantes	65
6.5.4.	Caso general	65
6.6.	Ecuaciones de Bernoulli*	67
7.	Aplicaciones de las EDO	69
7.1.	Modelos lineales	69
7.2.	Ley de enfriamiento de Newton	72
7.3.	La ecuación logística de Verhulst*	73
8.	Farmacocinética	75
8.1.	Inyección intravenosa rápida (<i>bolus</i>)	75
8.2.	Perfusión continua (<i>gota a gota</i>)	78
8.3.	Perfusión conjuntamente con i.v.	80
8.4.	Inyección intramuscular / Ingesta oral *	81
8.5.	Inyecciones intravenosas periódicas	83
9.	Estadística	87
9.1.	Análisis de datos	87
9.2.	Estadística descriptiva	89
9.2.1.	Medidas de tendencia central	89
9.2.2.	Medidas de posición	90
9.2.3.	Medidas de dispersión	91
9.2.4.	Varianza y Desviación típica	91
9.2.5.	Transformación de datos	94
9.3.	Regresión y correlación	96
9.3.1.	Regresión lineal	96
9.3.2.	Recta de regresión	96

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	1
9.3.3. Coeficiente de correlación	99
9.3.4. Ajuste potencial (<i>regresión doble-log</i>)*	102
9.3.5. Ajuste exponencial	103
10. Apéndice: Manejo de la calculadora*	107

¹V8v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

Introducción

² Presentación. Boletines. Controles. Exámenes. Tutorías. Consejos. Prerrequisitos. Programa. Descripción genérica de la asignatura.

La única forma eficaz de aprender Matemáticas es haciendo muchos problemas. Procura hacer sobre todo los que te parezcan difíciles, y no pierdas el tiempo haciendo los que ya sabes hacer.

Un examen tipo

1. Representación de funciones (veremos funciones elementales);
2. Derivadas (derivada es el ritmo de crecimiento de una función);
3. Integrales (cálculo de áreas);
4. Ecuaciones diferenciales (noción de modelo matemático: farmacocinética);
5. Estadística (análisis de datos; determinación experimental de constantes).

²v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

Capítulo 2

Funciones elementales

Funciones elementales que debemos conocer «de vista».

2.1. Rectas y parábolas

Coordenadas cartesianas. Eje de abscisas, eje de ordenadas.

Rectas. Ecuación $y = bx + a$ de una recta. Pendiente b . Ordenada en el origen a . Ecuación en la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = b(x - x_1).$$

Recta que pasa por dos puntos distintos:

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Parábolas. La parábola $y = x^2$. Cambio de escala en el eje OY . Cambio de orientación. Traslaciones en los ejes. Cuadrado de un binomio. Reducción de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ a la forma canónica $y = a(x - p)^2 + q$.

La ecuación de segundo grado La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Existencia y número de soluciones:

$$s = (-b \pm \Delta^{1/2})/2a.$$

Factorización:

$$a(x - s_1)(x - s_2).$$

Problemas:

1. Dar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(2, 4)$ y $(5, 7)$. SOL:
 $y = x + 2$.
2. Reducir a la forma canónica la parábola $y = -9x^2 + 36x - 35$. SOL:
 $y = -9(x - 2)^2 + 1$.
3. Discutir y en su caso resolver la ecuación $5x^2 - 25x + 30 = 0$. SOL:
 $\Delta = 25 > 0$, $x = 2, 3$.

Matemáticas y Astronomía en Babilonia. En Mesopotamia (entre los ríos Tigris y Eufrates, hoy Irak) los babilonios adoptaron en 2000 a.C. la escritura cuneiforme de los sumerios.

Se conservan miles de tablillas de arcilla cocida, entre ellas algunas con matemáticas (por ejemplo los cuadrados de los números del 1 al 60, el cálculo de áreas de rectángulos y la resolución de ecuaciones de segundo grado). Usaban un sistema de numeración de posición en base 60, y por eso todavía dividimos la circunferencia en 360 grados, la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos, cuatro mil años después!



Figura 2.1: Tablilla del siglo 19 a.C. con datos para resolver ecuaciones cúbicas. © Colección Schøyen

2.2. Las funciones exponenciales

La función 1^x es constante.

La función exponencial de base $b > 1$.

La función $y = 2^x$: si $m > 0$ es un entero positivo,

$$2^m := 2 \times \overset{m)}{\dots} \times 2.$$

Se cumple

$$2^m \times 2^n = 2^{m+n}.$$

Para que $2^0 \times 2^m = 2^m$ debe ser $2^0 = 1$. Por motivos análogos, $2^{-m} = 1/2^m$.

Por otro lado, como $(2^m)^n = (2^m) \times \overset{n)}{\dots} \times (2^m) = 2^{m \cdot n}$, debe ser $2^{1/n} = \sqrt[n]{2}$

y

$$2^{m/n} = \sqrt[n]{2^m}.$$

Para describir su gráfica usamos la notación

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0.$$

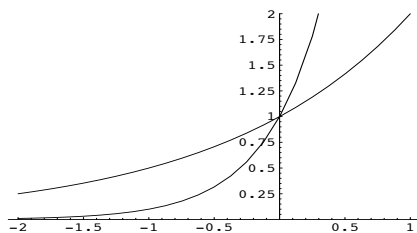


Figura 2.2: Las funciones exponenciales de base 2 y 10.

La base más usada será el número

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \cong 2,718281828459045235360287 \dots$$

La función exponencial de base $0 < b < 1$. La función $y = (1/2)^x = 1/2^x = 2^{-x}$. En este caso

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/2)^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1/2)^x = +\infty.$$

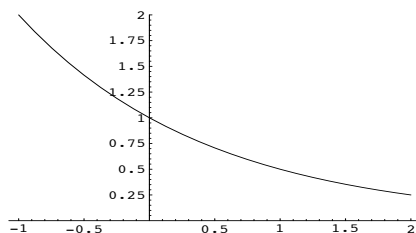


Figura 2.3: La función exponencial $y = 2^{-x}$.

2.3. Funciones trigonométricas

Trigonometría. Del griego *gonos metros* (medida de los ángulos)

Medida de un ángulo. Longitud de la circunferencia. Radián. Ángulo recto, ángulo llano. El número

$$\pi = 3,141592653589793238462643 \dots$$

Seno. Proporcionalidad en los triángulos semejantes. Seno de un ángulo. La función seno.

Coseno. Coseno de un ángulo. La función coseno. $\cos x = \sin(x + \pi/2)$.

El teorema de Pitágoras. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. La notación $\sin^2 x = (\sin x)^2$ para distinguirlo de $\sin x^2 = \sin(x^2)$. Análogamente $\cos^2 x$, $\operatorname{tg}^3 x$, $\log^2 x$, etc.

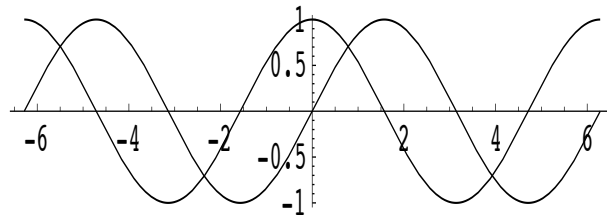


Figura 2.4: Las funciones seno y coseno.

Tangente. Tangente de un ángulo. La función tangente. Asíntotas verticales y límites laterales. La notación

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

La relación $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \operatorname{cos} x$.

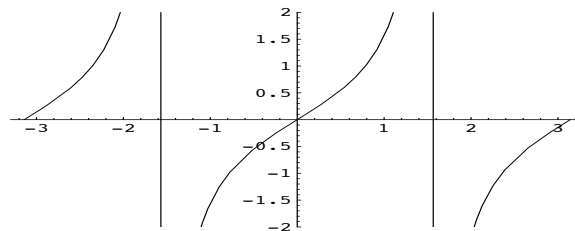


Figura 2.5: La función tangente.

Los premios IgNobel Los premios «Innoble» se conceden cada año a proyectos de investigación reales, que al principio hacen reír pero después nos hacen pensar. Más información en <http://www.improb.com>.

➤ Ejemplos de los premios IgNobel son: al inventor del karaoke (premio de la paz); demostración del decaimiento exponencial usando espuma de cerveza (física); estimación del área total de un elefante indio (matemáticas); ¿por qué los pájaros carpinteros no tienen dolor de cabeza? (ornitología); preferencias alimenticias de los escarabajos peloteros (nutrición); un tono de móvil que oyen los adolescentes pero no los adultos (paz); dinámica del hula-hoop (física); por qué los spaghetti no se

rompen por la mitad (física); el mosquito de la malaria es igualmente atraído por el olor del queso y el de los pies humanos (biología); influencia de la música country en el suicidio (medicina); los taxistas tienen el cerebro más desarrollado que el resto de la gente (medicina); porcentaje de personas que llevan la visera de la gorra hacia atrás (literatura); heridas por caída de cocos (medicina); identificación de insectos aplastados en el parabrisas (entomología); oír música ambiental previene el catarro (medicina); la ley de Murphy: las tostadas casi siempre caen del lado de la mantequilla (economía); entrenamiento de palomas para que distingan entre cuadros de Picasso y de Monet (psicología); fracaso del tratamiento de picadura venenosa mediante descargas eléctricas en los labios con una batería de coche (medicina); un artículo de 9 páginas con 972 autores (literatura); el Tamagotchi (economía); y estimación del número de fotos que hay que hacerle a un grupo de personas para que nadie salga con los ojos cerrados (matemáticas).

2.4. Funciones inversas

Las funciones como máquinas Noción de algoritmo. Función real de variable real. Dominio de definición. Rango.

Función inversa. Necesidad de restringir el dominio para despejar la variable (problema de no inyectividad). Ejemplos:

- Función $y = bx + a$, dominio $-\infty < x < +\infty$, imagen $-\infty < y < +\infty$, función inversa $x = (1/b)(y - a)$;
- Función $y = x^2$, dominio $0 \leq x$, imagen $0 \leq y$, función inversa $x = +\sqrt{y}$.

Gráfica de la función inversa de una función dada.

La función arco seno La función $y = \text{sen } x$ tiene dominio $-\infty < x < +\infty$ e imagen $-1 \leq y \leq +1$. Debemos restringir el dominio a $-\pi/2 \leq y \leq +\pi/2$ para definir la función $x = \text{arc sen } y$ que significa «el ángulo cuyo seno es y ».

La función arco coseno Análogamente la inversa de la función $y = \text{cos } x$ es la función $x = \text{arc cos } y$, $0 \leq x \leq \pi$, $-1 \leq y \leq +1$.

PROBLEMAS Calcular:

- $+\sqrt{x^2}$ para un número real x ;
- $\arcsin(\sin \pi/2)$;
- $\arcsin(\sin -9\pi/2)$;
- $\arccos(\sin 10\pi)$.

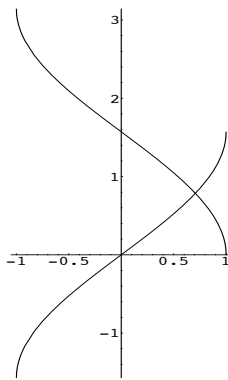


Figura 2.6: Las funciones $x = \arcsin y$ y $x = \arccos y$.

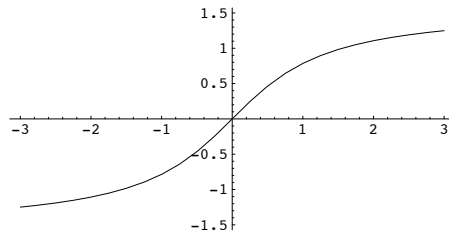


Figura 2.7: La función $x = \arctan y$.

La función arco tangente $y = \operatorname{tg} x$ tiene imagen $-\infty < y < +\infty$ y restringimos el dominio a $-\pi/2 < x < +\pi/2$ para evitar las asíntotas verticales. La función inversa es $x = \arctan y$.

Logaritmos Consideremos la función $y = 2^x$, exponencial de base 2, con $-\infty < x < +\infty$, $0 < y$. Su función inversa es $x = \log_2 y$, logaritmo de base 2. Análogamente logaritmos en base 10 (logaritmos vulgares) o en base e (logaritmos neperianos).

Como regla general usaremos el número e como base de las exponenciales, es decir para cualquier base $b > 0$,

$$b^x = e^{\ln b \cdot x}.$$

Por ejemplo $(1/2)^x = e^{-0.69\dots x}$.

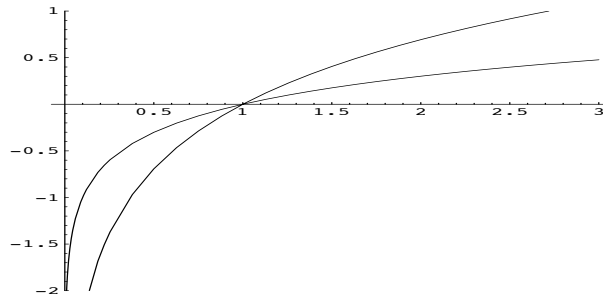


Figura 2.8: Las funciones $x = \log_b y$ para $b = e, 10$.

Operaciones con logaritmos

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b;$$

$$\log(p^q) = p \cdot \log q.$$

Biografía de «John Napier» (1550-1617). Inventor de los logaritmos, el escocés Jhone Neper no era matemático profesional.

Publicó en 1614 *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, pero las primeras tablas de logaritmos (en base 10) las publicó Henry Briggs, tras visitar a Neper en Edimburgo.

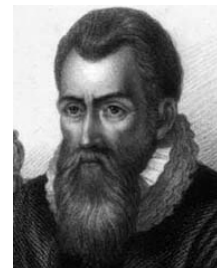


Figura 2.9: J. Neper

2.5. Continuidad

Funciones continuas Decimos que la función $y = y(x)$ es continua en un punto $x = a$ si existen y coinciden los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^+} y(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} y(x)$ con el valor $y(a)$.

Por ejemplo la siguiente función es continua en todos los puntos excepto en $x = 1$:

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

2.6. Series

«Serie» significa suma infinita. Son ejemplos de series el número

$$\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + \dots,$$

el número

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots,$$

o el desarrollo decimal

$$1/7 = 0,142857142857 \dots = 1/10 + 4/100 + 7/1000 + \dots.$$

En cada caso tenemos una fórmula del tipo

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

con la que queremos expresar que S se calcula cada vez con mejor aproximación mediante las *sumas parciales*

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ejemplo. Por ejemplo para calcular la suma de la serie

$$S = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots \tag{2.1}$$

vemos que

S_1	1
S_2	1.5
S_3	1.75
S_4	1.875
S_5	1.9375
S_6	1.96875
S_7	1.98438
S_8	1.99219
S_9	1.99609
S_{10}	1.99805
S_{11}	1.99902
S_{12}	1.99951

y conjeturamos que $S = 2$. Esto lo comprobaremos en el párrafo sobre series geométricas.

Ejemplo. La suma de la serie $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$ es $+\infty$. Esto significa que sumando términos podemos conseguir resultados tan grandes como queramos, aunque en este caso sea muy lentamente:

S_1	1
S_2	1.5
S_4	2.08333
S_{11}	3.01988
S_{31}	4.02725
S_{83}	5.00207

Ejemplo. La serie $1 - 2 + 3 - 4 + \dots$ es *divergente*, es decir las sumas parciales no convergen hacia ningún valor definido.

Series geométricas La serie (2.1) es del tipo

$$S(r) = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

que se llama *serie geométrica de razón r*.

Suma de una serie geométrica:

- Si $r = 1$, está claro que $S(r) = 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty$.
- Lo mismo pasa si $r > 1$. Por ejemplo para $r = 2$ tenemos $S(2) = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots = +\infty$.

- Cuando $0 \leq r < 1$, la suma de la serie es

$$S(r) = \frac{1}{1-r}.$$

Para convencernos de lo anterior, primero vemos que las sumas parciales cumplen $1 = S_1 < S_2 < S_3 < \dots$, por lo que la serie no es oscilante. Llamemos $S = 1 + r + r^2 + \dots$ a la suma de la serie. Tenemos

$$S - 1 = r + r^2 + r^3 + \dots = r(1 + r + r^2 + \dots) = rS,$$

luego $S - 1 = rS$, de donde despejando queda $S = 1/(1 - r)$.

Otra manera (más correcta) de verlo es observar que la suma parcial

$$S_n = 1 + r + \dots + r^n$$

es un cociente de polinomios

$$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}.$$

Como $r < 1$, al crecer n tenemos que en el numerador $r^{n+1} \rightarrow 0$ y queda $S = -1/(r - 1) = 1/(1 - r)$.

Ejemplo: Si $r = 1/2$ la suma de la serie geométrica (2.1) es $1/(1 - 1/2) = 2$.

Usaremos estas series cuando estudiemos inyecciones intravenosas repetidas.

PROBLEMA Calcular la suma de la serie

$$0,55555\dots = 5 + 5 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3} + \dots.$$

(Sol.: 50/9).

Capítulo 3

Diferenciación

1

3.1. Derivada de una función en un punto

Ritmo (o razón, o tasa) de cambio de una función en un momento dado. Pendiente de la recta tangente. Aproximación por la pendiente de las rectas secantes.

Fórmula de la derivada de una función $y(x)$ en el punto x :

$$y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \quad (3.1)$$

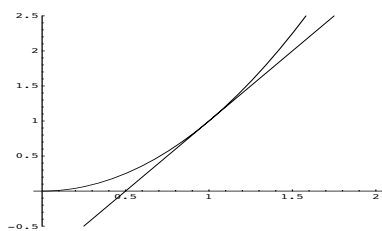


Figura 3.1: Recta tangente a $y = x^2$ en $x = 1$

¹versión 8. v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *Mac-Tutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

Ejemplo Cálculo de la derivada de $y = x^2$ en el punto $x = 1$:

$$\begin{aligned} y'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(1+h) - y(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2. \end{aligned}$$

Biografía de Sir Isaac Newton (1643-1727). Es probablemente la figura científica más importante de todos los tiempos. En un período de menos de dos años (desde el verano de 1665 hasta 1667) en que la universidad de Cambridge estuvo cerrada por la peste, y cuando aún no había cumplido los 25, Isaac Newton hizo revolucionarios avances en Matemáticas (cálculo diferencial e integral), Óptica (descomposición de la luz blanca en colores), Física (ley de la gravitación universal) y Astronomía (telescopio de reflexión).

En 1669 sucedió a su maestro I. Barrow en la cátedra Lucasiana (que actualmente ocupa Stephen Hawking). Fue presidente de la Royal Society.

Su libro *De Methodis Serierum et Fluxionum*, escrito en 1671, se publicó póstumamente en 1736 (traducido al inglés). Los *Philosophiae naturalis principia mathematica* son de 1687.



Figura 3.2: I. Newton

Infinitésimos La introducción del cálculo diferencial fue lenta y polémica en algunos países debido a prevenciones de tipo filosófico y religioso.

Notación de Leibniz Incremento de la variable Δx ; incremento de la función Δy . Derivada

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tiene la ventaja de mostrar siempre qué variable estamos usando, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^2 &= 2x, \\ \frac{d}{dx} x^2 \Big|_{x=1} &= 2. \end{aligned}$$

3.2. Reglas de derivación

Tabla de derivadas Al derivar $y = x^2$ en un punto arbitrario x obtenemos $y'(x) = 2x$. Análogamente tenemos las siguientes funciones derivadas que conviene conocer de memoria:

$y(x)$	$y'(x)$
cte.	0
x^n	nx^{n-1}
\sqrt{x}	$1/2\sqrt{x}$
sen x	cos x
cos x	$-\text{sen } x$
tg x	$1 + \text{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$
e^x	e^x
$b^x, 0 < b,$	$b^x \cdot \ln b$
ln x	$1/x$
$\log_b x$	$1/(x \ln b)$
arc sen x	$1/\sqrt{1-x^2}$
arc cos x	$-1/\sqrt{1-x^2}$
arc tg x	$1/(1+x^2)$

Derivada de una suma Las funciones pueden sumarse, $(u+v)(x) = u(x)+v(x)$. La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas,

$$(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Por ejemplo

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } x + \text{cos } x) = \text{cos } x - \text{sen } x.$$

Derivada de un producto Las funciones pueden multiplicarse, $(u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x)$. La derivada de un producto de funciones está dada por la regla de Leibniz,

$$(uv)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Por ejemplo

$$\frac{d}{dx}(xe^x) = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

Noticia de G. W. Leibniz (1646-1716) Alemán, opuesto a las ideas de Newton sobre la la materia y la energía, trabajó en Lógica y desarrolló una máquina calculadora. En 1675 inventó el cálculo diferencial, independientemente de Newton.



Figura 3.3: G. W. Leibniz

Derivada de un cociente La derivada de $(u/v)(x) = u(x)/v(x)$ es

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{u(x)^2},$$

como se deduce de la regla de Leibniz escribiendo $u(x)/v(x) = u(x) \cdot v(x)^{-1}$.

Ejemplo Derivar $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \operatorname{cos} x$. Sol.: $1 + \operatorname{tg}^2 x$ o equivalentemente $1/\operatorname{cos}^2 x$.

Ejemplo Derivada de $y = \sqrt{x}$ en un punto arbitrario $x > 0$ de su dominio. Como $y = x^{1/2}$,

$$y'(x) = (1/2)x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ejemplo Derivada de una constante por una función. Usando la regla de Leibniz,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cte} \cdot u(x)) = \operatorname{cte} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Regla de la cadena

Composición de funciones Las funciones pueden componerse o encadenarse. La función $z = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$ es compuesta, es decir la calculamos en dos etapas. Si llamamos u a la función $x \mapsto y = x^2 + 1$ y v a la función $y \mapsto z = \operatorname{sen} y$, nuestra función será la *composición*

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)).$$

En notación de Leibniz pondríamos $y = y(x) = x^2 + 1$, $z = z(y) = \operatorname{sen} y$, y la composición se llamaría $z = z(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$.

Derivada de una composición Se usa la regla de la cadena:

$$(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Ejemplo: Para $y = \text{sen}(x^2 + 1)$, la función derivada es $y'(x) = \cos(x^2 + 1) \cdot (2x)$.

La regla de la cadena, en notación de Leibniz, se escribe

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

lo que facilita los cálculos.

En el mismo ejemplo $dz/dy = \cos y$, $dy/dx = 2x$, luego

$$dz/dx = (\cos y) \cdot (2x)$$

y al sustituir y por su valor en función de x queda $dz/dx = 2x \cos(x^2 + 1)$.

PROBLEMAS

1. El número y de células en un cultivo depende de la cantidad de luz x , que a su vez depende de la hora del día t . Si por ejemplo $y(x) = x^2 - 1$, $x(t) = \text{sen}(t + 2)$, calcular a qué ritmo está cambiando la población de células en el momento $t = 6$.
2. El radio r de una célula depende de la concentración C de nutrientes. Si la célula es esférica, su volumen V viene dado por $V(r) = (4/3)\pi r^3$ (fórmula descubierta por Arquímedes). Calcular a qué ritmo está cambiando el volumen cuando $C = 6$.
3. Dejamos caer arena a un ritmo de 1000 cm^3 por minuto, de manera que se va formando una montón de forma cónica. ¿A qué velocidad está aumentando la altura h del cono en el momento en que $h = 10 \text{ cm}$? (la fórmula del volumen de un cono circular también se debe a Arquímedes: $1/3\pi r^2 h$).

Derivada de las funciones inversas Si tenemos una función $y = y(x)$ y su inversa $x = x(y)$, la regla de la cadena nos dice que

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1,$$

porque esta última derivada es la de la función identidad $x \mapsto x$ (gráfica: la diagonal, recta de pendiente 1). Por tanto la derivada de una función y la de su inversa, en los puntos correspondientes, al multiplicarlas dan 1, o lo que es lo mismo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Ejemplo Para derivar $x = \arctg y$, $\pi/2 < y < +\pi/2$, sabemos que $y = \operatorname{tg} x$ y que $dy/dx = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, luego

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Ejemplo Derivar la función $v = \arcsen u$, en un punto arbitrario de su dominio $-1 \leq u \leq +1$. Sabemos que $u = \operatorname{sen} v$ y que $du/dv = \cos v$, por tanto

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

(el último paso se deduce de $\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1$).

Ejemplo Derivar $z = \ln t$, $t > 0$. Como $t = e^z$ cumple $dt/dz = e^z$, será $dz/dt = 1/e^z = 1/t$.

3.3. El teorema del valor intermedio

Estudio de la derivabilidad Al derivar una función $y = y(x)$ puede haber puntos x en los que $y(x)$ no es derivable (porque el límite de la definición de derivada no existe). En general iremos obteniendo una función derivada $y'(x)$ cuyo dominio es igual o menor que el inicial.

Ejemplo La siguiente función no es derivable en $x = 0$ ni en $x = 1$:

$$y(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 3x - 2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Ejemplo La función $x \operatorname{sen}(1/x)$ (ver figura 3.4) puede hacerse continua en $x = 0$, pero no diferenciable.

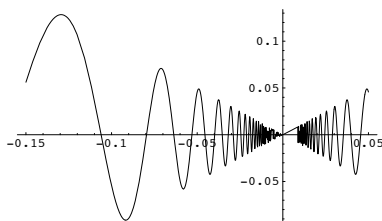


Figura 3.4: $y(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$

Derivabilidad y continuidad Si una función no es continua en un punto x entonces ya no puede ser derivable en ese punto. En cambio, si es continua en x puede ser derivable o no, dependiendo de que la gráfica sea «suave» o no (hay que estudiar las rectas tangentes laterales).

Teorema del valor intermedio Tiene muchas aplicaciones, teóricas y prácticas. Algunas las veremos en este curso.

. Si una función $y = y(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) , entonces existe algún punto intermedio $a < c < b$ donde se cumple que

$$y'(c) = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}.$$

Esto significa que la recta tangente en $x = c$ es paralela (es, decir, tiene la misma pendiente) a la recta que une los extremos de la gráfica. El punto c no tiene por qué ser único (ver figura 3.5).

Contraejemplo La función $y = |x|$, $-1 \leq x \leq +1$ no cumple el teorema. La razón es que no es diferenciable en $x = 0$.

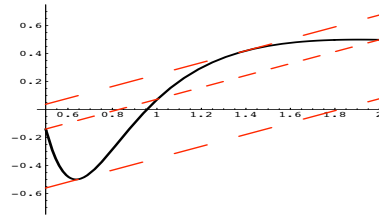


Figura 3.5: Teorema del valor intermedio

Contraejemplo La función

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2008 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

no cumple el teorema. La razón es que no es continua en $x = 1$.

Cálculo aproximado de funciones Aritmética de la calculadora: cantidad fija de dígitos y coma flotante.

Podemos escribir la fórmula del teorema del valor intermedio como

$$y(x+h) = y(x) + y'(c)h$$

para algún c intermedio entre x y $x+h$ (puede que h sea negativo).

Ejemplo Para calcular $\text{sen } 0,1$ tomamos $y(x) = \text{sen } x$, $x = 0$, $y(0) = 0$, $h = 0,1$. Entonces $\text{sen } 0,1 = 0 + 0,1 \cos(c)$ para algún $0 < c < 1$. Podemos estimar el *error de aproximación* $y'(c)h$ como sigue: como $0 < \cos(c) < 1$ se deduce $0 < \text{sen } 0,1 < 0,1$, es decir $\text{sen } 0,1 = 0,0\dots$ con una cifra decimal exacta. Para una aproximación mejor hay que usar derivadas de orden superior (polinomios de Taylor).

PROBLEMAS

1. Encontrar un punto $0 < c < 1$ en el que se cumpla el teorema del valor intermedio para la función $y = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq 1$.
2. Calcular aproximadamente $2^{0,9}$ (hay que usar que $2 < e$ y por tanto $\ln 2 < 1$).
3. Calcular aproximadamente $\cos 1,01$.

Capítulo 4

Aplicaciones del cálculo diferencial

1

4.1. Regla de L'Hôpital

Para resolver las indeterminaciones $0/0$ (cociente de dos infinitésimos), se comparan las velocidades respectivas de convergencia, es decir se calcula el límite del cociente de las derivadas. La demostración de esta regla se obtiene del teorema del valor intermedio (en una forma especial que se debe a Cauchy). El enunciado exacto es:

. Si queremos calcular

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y encontramos que existe el límite

$$L^* = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces L también existe y vale lo mismo que L^* .

¹v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Las fechas son orientativas. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

Para poder aplicar esta regla es necesario que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ sean diferenciables en algún intervalo $(a, a + \varepsilon)$, en el que además $g'(x) \neq 0$.

Este resultado es igualmente válido para:

- Límites ordinarios $\lim_{x \rightarrow a}$ (combinando ambos límites laterales);
- Indeterminaciones de la forma $\pm\infty/\infty$;
- Límites del tipo $x \rightarrow \pm\infty$;
- Cuando $L^* = \pm\infty$.

Ejemplo

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

porque

$$L^* = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

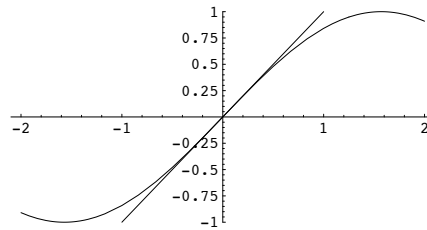


Figura 4.1: sen x y x son infinitésimos equivalentes

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = 3.$$

Ejemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Las exponenciales b^x , $b > 1$, crecen más rápido que cualquier polinomio.

Ejemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Los logaritmos $\log_b x$ crecen más lentamente que cualquier polinomio.

Observación No es correcto escribir directamente $L = L^*$, como podemos deducir del siguiente ejemplo. Si $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x$, entonces existe

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1,$$

aunque no exista

$$L^* = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x).$$

(ver figura 4.2).

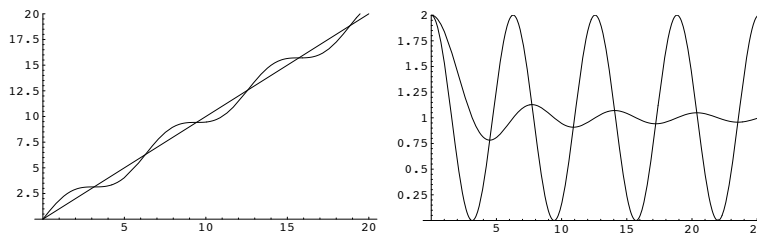


Figura 4.2: Asintóticamente $x + \operatorname{sen} x$ es como x (figura de la izquierda). Por tanto $L = 1$. La figura de la derecha muestra el cociente de las funciones y el de sus derivadas. Se ve que L^* no existe.

Otras indeterminaciones La regla de L'Hôpital sirve también para resolver otro tipo de indeterminaciones.

■ $0 \cdot \infty$:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x};$$

$$L^* = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0.$$

■ 0^0 :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x;$$

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

luego $L = 1$.

■ 1^∞ :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{1/x}; \\ \ln L &= \lim_{x \rightarrow 0} (1/x) \ln(x + e^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e^x)}{x} = \frac{0}{0} \\ (\ln L)^* &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^x}{x + e^x} = 2 \end{aligned}$$

luego $L = e^2$.

■ $\infty - \infty$:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = 1/2.$$

Es

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1-\ln x}{(\ln x)(x-1)} = \frac{0}{0}$$

y

$$L^* = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-1/x}{(1/x)(x-1)+\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1+x \ln x} = \frac{0}{0}$$

luego

$$L^{**} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1+\ln x+1} = \frac{1}{2}$$

por tanto

$$L = L^* = L^{**} = \frac{1}{2}.$$

■ ∞^0 :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{x}; \\ \ln L &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^{1/x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}; \\ (\ln L)^* &= \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0 \end{aligned}$$

luego $L = e^0 = 1$.

■ 0^∞ :

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}; \\ \ln L &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (1/x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{aligned}$$

luego $L = 0$.

PROBLEMA Probar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Esta fórmula sirve para calcular el número e tomando $x = 1, 2, 3, \dots$

4.2. Cinemática.*

Para Newton, la idea de derivada («fluxión») estaba íntimamente ligada a la de velocidad instantánea.

Movimiento rectilíneo Velocidad: ritmo al que cambia una distancia a medida que pasa el tiempo. Posición de un móvil. Desplazamiento $e = e(t)$. Velocidad instantánea $v = de'(t)$. Unidades: $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado Movimiento de caída de los cuerpos bajo los efectos de la gravedad. Ecuación de Galileo $e''(t) = g$. En la Tierra $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Puedes entrar en esta página web para ver una demostración animada:
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cinematica/graves/graves.htm>

PROBLEMAS

1. Una escalera de mano está apoyada en un muro vertical. Si el extremo que se apoya en el suelo comienza a deslizarse a una velocidad de 2 m/s , ¿a qué velocidad está cayendo el extremo apoyado en la pared cuando éste se encuentra a una altura de 1 metro ?
2. Si dejamos caer un objeto (sin velocidad inicial) desde un tercer piso (altura de 9 metros) ¿cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? (se prescinde de la resistencia del aire)
3. En unas fiestas del pueblo lanzan una bomba de palenque que sube hasta estallar en el punto más alto de su trayectoria. Si ha tardado 4 segundos ¿a qué velocidad fué lanzada?

Galileo Galilei (1564 – 1642) Profesor de matemáticas en Florencia, Siena, Pisa y Padua, enseñó geometría y astronomía. Estudió los métodos de Arquímedes para determinar la densidad de los cuerpos e introdujo la idea de que se puede poner a prueba una teoría realizando experimentos.

Descubrió las leyes de la caída de los cuerpos y del movimiento de los proyectiles estudiando planos inclinados y péndulos. Construyó los primeros telescopios de cuatro/ocho aumentos y con ellos realizó sensacionales descubrimientos: los mares y montes de la Luna, las estrellas de la Via Láctea, los satélites de Júpiter, los anillos de Saturno.

En 1633 fué condenado como hereje por la Inquisición, a arresto domiciliario perpetuo, por defender la teoría de Copérnico de que la Tierra gira alrededor del Sol. El proceso fué revisado en 1992.



Figura 4.3: Galileo

Derivación implícita Si tenemos dos funciones $e = e(t)$ y $h = h(t)$ ligadas por una relación, por ejemplo, $e^2 + h^2 = 1$, no hace falta despejar explícitamente $h = \sqrt{1 - e^2}$ para derivar

$$\frac{dh}{de} = \frac{1}{2\sqrt{1 - e^2}} \cdot (-2e).$$

Es más cómodo derivar implícitamente, es decir, escoger la variable que vamos a usar (en este caso e) y hacer

$$2e \frac{de}{de} + 2h \frac{dh}{de} = 0.$$

Por supuesto $de/de = 1$, lo que nos da

$$\frac{dh}{de} = \frac{-2e}{2h} = \frac{-e}{\sqrt{1 - e^2}}$$

que es el resultado deseado.

4.3. Representación de funciones

Consideraremos funciones $y = y(x)$ definidas en un intervalo abierto (a, b) que se puedan derivar en todos los puntos todas las veces que queramos.

En consecuencia supondremos que ni las funciones ni sus derivadas presentan saltos ni discontinuidades.

Crecimiento y decrecimiento La función *crece* si $x_1 < x_2$ implica que $y(x_1) \leq y(x_2)$. Puede ser *estrictamente creciente* o no. La función *decrece* si $x_1 < x_2$ implica $y(x_1) \geq y(x_2)$. En algunos casos será *estrictamente decreciente*.

. La función $y = y(x)$ crece si (y solamente en ese caso) su derivada en cualquier punto es no negativa, $y'(x) \geq 0$.

Es una consecuencia del teorema del valor intermedio, ya que se deduce de la fórmula $y(x+h) = y(x) + y'(c)h$, que podemos escribir $\Delta y = y'(c)\Delta x$. Por tanto, el incremento de y y de x tienen el mismo signo (función creciente) debido al signo positivo de la derivada.

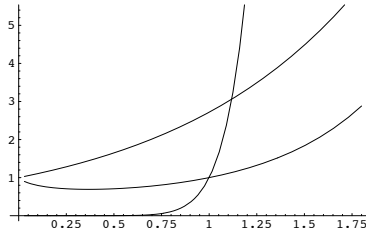


Figura 4.4: Crecimiento comparativo de las funciones x^{10} , e^x y x^x

Análogamente, la función decrece si (y solamente si) $y'(x) \leq 0$ para cualquier x . Esta vez, los incrementos tienen distinto signo (función decreciente) porque el signo de la derivada es negativo.

Máximos y mínimos locales La función tiene un *máximo local* (o máximo relativo) en x si pasa de creciente a decreciente. Y tiene un *mínimo local* o relativo si pasa de decreciente a creciente.

Los máximos y mínimos locales no tienen por qué ser *globales* (absolutos), pues depende del comportamiento de la función al acercarnos a los bordes de su intervalo de definición.

En un máximo o mínimo local, la derivada vale cero (es decir, la recta tangente es horizontal). Se dice que son puntos críticos. Sin embargo hay otras clases de puntos críticos que no son ni máximos ni mínimos.

Derivadas de orden superior La derivada de la función derivada, $(y')'(x)$, se denota $y''(x)$ o también $y^{(2)}(x)$ o d^2y/dx^2 (derivada segunda).

Concavidad, convexidad Si $y'' \geq 0$ la función $y = y(x)$ tiene la concavidad hacia arriba. Si $y'' \leq 0$ la función tiene la concavidad hacia abajo.

Una función $y = y(x)$ puede acelerar es decir cambiar cada vez más rápido. En este caso su derivada crece, por tanto $y'' \geq 0$. Esto es independiente de que la función crezca o decrezca.

O puede decelerar (frenar). En este caso su pendiente será cada vez menor (independientemente de que la pendiente sea positiva o negativa).

Ejemplo La función logaritmo $y = \ln x$ crece estrictamente (por tanto $y' > 0$). Sin embargo cada vez crece más lento, es decir decelera (por tanto $y'' < 0$). En consecuencia, la función tiene la concavidad hacia abajo.

Ejemplo La parábola $y = x^2$ pasa de tener pendientes muy negativas (decrece, $y' < 0$) a tener pendientes positivas (crece, $y' > 0$). Por tanto la derivada está creciendo, $y'' \geq 0$, la función tiene la concavidad hacia arriba.

Puntos de inflexión Un punto de inflexión x es donde la concavidad cambia de sentido. Por tanto en un punto de inflexión la derivada segunda cambia de signo, $y''(x) = 0$.

Ojo: hay puntos con $y''(x) = 0$ que no son puntos de inflexión. Por ejemplo $y = x^4$ en $x = 0$ tiene un mínimo .

Puntos críticos Un punto crítico es un valor x en el que se anula la primera derivada, $y'(x) = 0$ (la tangente a la gráfica es horizontal). Un punto crítico puede ser un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión.

Ojo: hay puntos de inflexión que no son puntos críticos, es decir en los que la derivada *primera* no se anula! Por ejemplo $y = \sin x$ tiene un punto de inflexión en $x = 0$, aunque $y'(0) = 1$.

Para determinar qué tipo de punto crítico tenemos se usa una versión extendida del teorema del valor intermedio, la fórmula de Taylor, que hace intervenir derivadas de orden superior. El criterio es:

. Si $y'(x) = 0$, calculemos las derivadas sucesivas $y^{(2)}(x), y^{(3)}(x), \dots$ en el mismo punto crítico x , hasta encontrar la primera que no sea nula, $y^{(k)}(x) \neq 0$ ($k \geq 2$). Entonces

	$y^{(k)}(x) > 0$	$y^{(k)}(x) < 0$
k par	∪ mínimo local	∩ máximo local
k impar	punto de inflexión	punto de inflexión

Ojo: Este criterio suele enunciarse para el caso $k = 2$. Pero es un error creer que $y''(x) = 0$ signifique que es un punto de inflexión, incluso si es un punto crítico: por ejemplo la función $y = x^4$ tiene en $x = 0$ un mínimo, con $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 0$.

PROBLEMAS

1. La función $y = x^{2008}$ tiene en $x = 0$ un punto crítico. ¿De qué tipo es?
2. Determinar los puntos de inflexión de $y = \arccos x$.
3. Determinar los máximos relativos de $y = \sin x$.

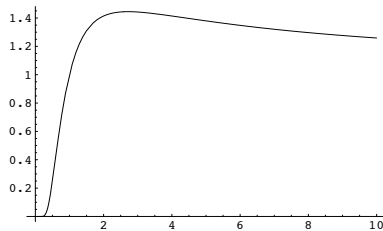


Figura 4.5: La función $y = x\sqrt{x}$, $x > 0$, tiene un máximo local en $x = e$; dos puntos de inflexión; y una asíntota horizontal $y = 1$.

Asíntotas La función $y = y(x)$ tiene una *asíntota vertical* en $x = c$ si algún límite lateral $\lim_{x \rightarrow c^+} y(x)$ o $\lim_{x \rightarrow c^-} y(x)$ vale $\pm\infty$ ($x = c$ es un punto del borde del dominio).

Tiene una *asíntota horizontal* $y = a$ por la derecha si $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = a$, y por la izquierda si $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a$.

Cuando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = \pm\infty$ es posible que la función se aproxime tanto como queramos a una recta $y = bx + a$ (*asíntota oblicua*); para detectarlo hay que calcular

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x},$$

y, si existe, determinar

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - bx).$$

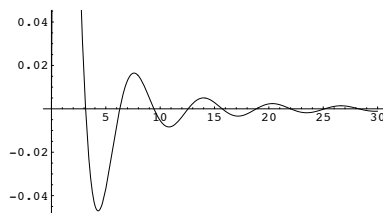


Figura 4.6: Asíntota horizontal $y = 0$ de $y(x) = \frac{\text{sen } x}{1+x^2}$.

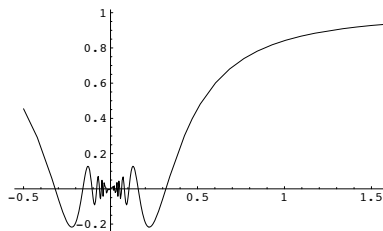


Figura 4.7: El comportamiento a largo plazo de una función puede ser imprevisible... Asíntota horizontal $y = 1$ de $y = x \text{ sen}(1/x)$.

Gráfica de una función. Representación de funciones. Seguiremos los siguientes pasos:

1. Dominio
2. Puntos críticos
3. Crecimiento/ decrecimiento
4. Puntos de inflexión
5. Concavidad / convexidad
6. Asíntotas verticales, horizontales, oblicuas
7. Puntos de corte con los ejes
8. Valores en puntos notables

PROBLEMAS Representar el polinomio $y(x) = x(x - 15)(x + 9)$.

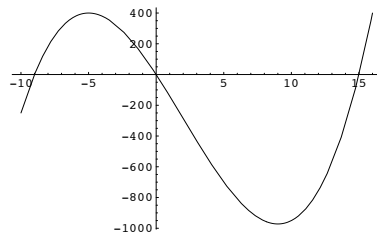


Figura 4.8: El polinomio de tercer grado $y = x(x - 15)(x + 9)$ tiene puntos críticos en $x = -5$ y $x = 9$, y un punto de inflexión en $x = 2$.

4.4. Problemas de optimización

Planteamiento y Método de resolución Esquema gráfico. Estudio de casos extremos e intermedios. Función a optimizar. Ligaduras entre variables. Reducción a una variable. Dominio de la función. Puntos críticos. Extremos relativos. Discusión. Extremos absolutos. Interpretación.

Ejemplo Entre todos los rectángulos con un perímetro de 100 metros, el cuadrado de 25×25 es el de mayor área.

PROBLEMA Las ganancias G de una inmobiliaria dependen del número x de pisos que alquilan y del precio p del alquiler. La experiencia muestra que cada subida de 10 euros supone una pérdida de 5 inquilinos, es decir $dx/dp = -5/10$. Actualmente $x = 200$ y $p = 500$. ¿Cómo debe alterar el precio para maximizar la ganancia?

PROBLEMA ¿Cuál es el punto de la parábola $y = x^2$ que está más cerca de la recta $y = x - 1$?



Figura 4.9: Libro de texto de Cálculo de Maria Gaetana Agnesi, Milán 1748

Capítulo 5

Integración

1

5.1. El problema del cálculo de áreas

Unidad de medida: área del cuadrado. Área de un rectángulo, de un triángulo, de un paralelogramo, de un rombo, de un trapecio, de un polígono regular.

Exhaución Era el método usado por Arquímedes para calcular el área de un círculo (y por tanto un valor aproximado de π) mediante polígonos inscritos y circunscritos, y el área de una sección de parábola (en este caso mediante triángulos inscritos).

Ejemplo de cálculo* Sea A el área bajo la parábola $y = x^2$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Dividimos el dominio en n partes iguales (ver figura 5.1).

La suma de las áreas de los rectángulos *inferiores* vale

$$I(n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{0}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

¹v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Las fechas son orientativas. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

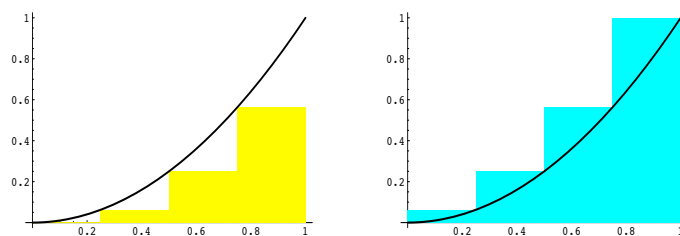


Figura 5.1: Suma inferior y superior cuando $n = 4$.

Puede comprobarse que al simplificar queda

$$I(n) = \frac{0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = 2/6 = 1/3.$$

Análogamente, la suma de los rectángulos *superiores* es

$$S(n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n}\right)^2,$$

que nos da

$$S(n) = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = 2/6 = 1/3.$$

Como para cualquier n tenemos $I(n) \leq A \leq S(n)$, se deduce

$$1/3 = \lim_{n \rightarrow \infty} I(n) \leq A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = 1/3,$$

y por tanto $A = 1/3$.

No hubo avances hasta la introducción del cálculo diferencial e integral por Newton, Leibniz y Barrow. Hay una relación completamente inesperada entre derivadas («flexiones») y áreas («fluxiones»).

Vida de Arquímedes (87 a.C. - 212 a.C.) El rey Herón II de Siracusa. Eureka: el principio de Arquímedes. La polea compuesta. Las leyes de la palanca: «dadme un punto de apoyo y moveré el mundo». Cálculo del número π . Las guerras púnicas. La muerte de Arquímedes: «mátame pero no borres mis fórmulas».

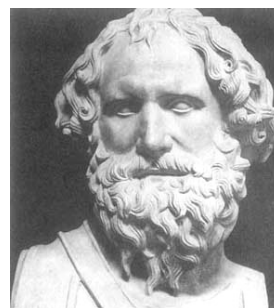


Figura 5.2: Arquímedes

5.2. Integral definida

La palabra integral significa *área*. Se usa un símbolo \int que era originalmente una letra S (de suma). Lo usó por primera vez W. Leibniz en 1686 en la revista *Actas Eroditorum*.

Si $y = y(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$ utilizamos la notación

$$\int_a^b y(x)dx$$

para el área bajo la gráfica.

Subdividiendo cada vez más el intervalo de definición, y tomando rectángulos de base Δx y altura $y(x)$ podríamos escribir

$$\int_a^b y(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum y(x)\Delta x.$$

Es un área *con signo*. Se cumple $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$ y entendemos que $\int_b^a = -\int_a^b$.

Ejemplo $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$ (lo veremos) pero $\int_0^{\pi} \cos x dx = 0$.

5.3. Valor medio de una función

El valor medio (en el sentido de *promedio*) de una función $y = y(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se define como

$$\text{v.m.} = \frac{\int_a^b y(x)dx}{b-a}.$$

Es el análogo de la fórmula de la media aritmética.

Ejemplo En el intervalo $[0, \pi/2]$ la función coseno varía entre 0 y 1. Su valor promedio es $2/\pi \cong 0,64$.

PROBLEMA Recorremos la distancia (100 km) entre Vigo y Santiago a 60 km/h, y hacemos el viaje de vuelta a 80 km/h ¿Cuál fue la velocidad media?

Solución. Como tardamos en total $100/60 + 100/80 = 5/3 + 5/4 = 35/12$ horas, la velocidad media fue de $200/(35/12) = 2400/35 \cong 68,57$ km/h. Es exactamente el valor medio, en el intervalo $[0, 35/12]$ de la función

$$v(t) = \begin{cases} 60 & \text{si } 0 \leq t \leq 5/3, \\ 80 & \text{si } 5/3 \leq t \leq 35/12, \end{cases}$$

es decir

$$\frac{\int_0^{35/12} v(t) dt}{35/12 - 0} = 68,57.$$

Teorema del valor medio El *teorema del valor medio del cálculo integral* dice que si la función $y = y(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ entonces en algún punto $a < c < b$ alcanza su valor medio, es decir

$$y(c)(b - a) = \int_a^b y(x) dx.$$

Esto es una consecuencia fácil del hecho de que el valor medio está necesariamente comprendido entre el valor mínimo y el valor máximo. Este teorema es útil para demostrar el siguiente resultado fundamental.

5.4. Teorema Fundamental del Cálculo

Es la herramienta más importante para el cálculo de áreas.

. Sea $y = y(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces la función $G(x) = \int_a^x y(t) dt$ es diferenciable, y su derivada es la función inicial, es decir $G'(x) = y(x)$.

Esto significa que, al ir variando x , el ritmo al que crece el área bajo la gráfica de la función $y(x)$ es la propia función $y(x)$.

Demostración del TFC Para justificar el resultado anterior, calculamos la derivada

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} y(x) dx.$$

Como la última integral vale $y(c)h$, para algún c intermedio entre x y $x+h$, nos queda

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} y(c) = y(x).$$

Ejemplo Sea la función $y(x) = 3x$. El área del triángulo desde 0 hasta x viene dada por $F(x) = 3x^2/2$, cuya derivada es $3x = y(x)$.

Regla de Barrow Como consecuencia del TFC tenemos la siguiente manera de calcular un área $A = \int_a^b y(x) dx$ cuando la función es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Busquemos cualquier función $F(x)$ que al derivarla dé la función $y(x)$;
2. Evaluemos el área simplemente como $A = F(b) - F(a)$.

$F(x)$ se llama una *primitiva* o antiderivada o *integral indefinida* de $y = y(x)$, y se simboliza $F = \int y$. La regla de Barrow se escribe en la práctica

$$\int_a^b y(x) dx = \int y \Big|_a^b.$$

Ejemplo Al derivar la función $F(x) = x^3/3$ obtenemos $y(x) = x^2$. Entonces podemos usar esa primitiva para calcular el área bajo la parábola,

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = 1/3.$$

Ejemplo Si $A = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$ hallamos $F(x) = -\cos x + 2009$, y entonces $A = F(\pi/2) - F(0) = 1$.

Ejemplo

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Observación La primitiva de una función $y = y(x)$ no es única. Pero dos primitivas sólo pueden diferenciarse en una constante. En efecto, si tenemos dos primitivas F, G de la misma función $y(x)$, la derivada de la diferencia es cero en todos los puntos:

$$(F - G)' = F'(x) - G'(x) = y(x) - y(x) = 0.$$

Entonces la diferencia tiene que ser constante, $F - G = \text{cte}$. Esto es así porque por el teorema del valor intermedio si una función u tiene derivada cero en todos los puntos entonces $u(x) - u(a) = u'(c)(x - a) = 0$, es decir $u(x)$ siempre vale $u(a)$.

Demostración de la regla de Barrow Por su importancia vamos a justificar la Regla de Barrow.

Por el teorema fundamental, sabemos que la función $G(x) = \int_a^x y(t) dt$ es una primitiva de $y(x)$. La $F(x)$ que nosotros hemos encontrado puede ser diferente de $G(x)$; pero la diferencia es como mucho una constante C . Entonces

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \\ (G(b) + C) - (G(a) + C) &= \\ G(b) - G(a) &= G(b) = \int_a^b y(t) dt, \end{aligned}$$

porque $G(a) = \int_a^a = 0$.

Isaac Barrow (1630–1677) Profesor y mentor de Newton en Cambridge, fue el primero en darse cuenta de la relación entre derivadas y áreas. Renunció a su cátedra para que la ocupase el joven Newton.



Figura 5.3: I. Barrow

5.5. Cálculo de primitivas

Primitivas inmediatas La siguiente tabla se deduce de la tabla correspondiente de derivadas.

y	$\int y$ (salvo una cte.)
cte.	cte $\cdot x$
$x^m, m \neq -1$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$
$1/x, x \neq 0$	$\ln x $
z'/z	$\ln z $
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$\operatorname{cos} x$	$+\operatorname{sen} x$
e^x	e^x
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc} \operatorname{sen} x, -\operatorname{arc} \operatorname{cos} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

Nota: La función $y = \ln |x|$ está definida para $x \neq 0$ (ver figura).

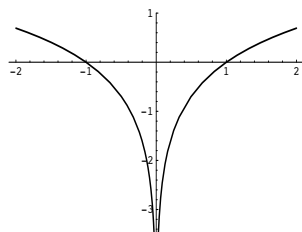


Figura 5.4: La función $y = \ln |x|$.

Reglas de integración Se deducen de las correspondientes reglas de derivación. Por ejemplo la integración por partes se deduce de la regla de Leibniz para derivar un producto; y el cambio de variable procede de la regla de la cadena.

- $\int \text{cte.}y(x)dx = \text{cte.} \int y(x)dx;$
- $\int (u(x) + v(x))dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx;$
- (integración por partes) $\int u dv = uv - \int v du;$
- (cambio de variable) Si $u = u(x)$ entonces $\int v(u)du = \int v(x)u'(x)dx.$

5.5.1. Integración por partes

Ejemplo $\int xe^x = e^x(x - 1) + C.$

Ejemplo $\int \ln x = x \ln(x/e) + C$ (hacemos $u = \ln x$, $dv = 1 \cdot dx$).

Ejemplo* Calculemos $P = \int \text{sen}^2 t dt$ por partes. Haciendo $u = \text{sen } t$, $dv = \text{sen } t dt$, entonces $du = \text{cos } t$, $v = -\text{cos } t$, luego

$$P = -\text{sen } t \text{cos } t - \int (-\text{cos}^2 t) = -\text{sen } t \text{cos } t + \int (1 - \text{sen}^2 t),$$

es decir

$$P = -\text{sen } t \text{cos } t + t - P \quad (\text{salvo una constante})$$

por lo que

$$2P = -\text{sen } t \text{cos } t + t + \text{cte.}$$

y

$$P = (-1/2) \text{sen } t \text{cos } t + t + \text{cte.}$$

Usaremos esta primitiva más adelante para calcular el área de un círculo. Puede hacerse más rápidamente usando las fórmulas

$$\begin{aligned} \cos(2t) &= 1 - 2\text{sen}^2 t; \\ \text{sen}(2t) &= 2\text{sen } t \text{cos } t. \end{aligned}$$

5.5.2. Cambio de variable

El cambio de variable $u = u(x)$ tiene que ser una función inversible. Usaremos la derivación implícita en notación de Leibniz.

Ejemplo Para calcular la primitiva $P = \int e^{-2x+1} dx$ hacemos $u = -2x + 1$, $du = -2dx$. Entonces

$$P = \int e^u \frac{du}{-2} = (-1/2)e^u = (-1/2)e^{-2x+1} + \text{cte.}$$

Ejemplo $\int \sin(3t + 2) dt = (-1/3) \cos(3t + 2)$, mediante el cambio $u = 3t + 2$ cuya función inversa es $t = (1/3)(t - 2)$.

Cambio de variable en las integrales definidas Si para calcular

$$A = \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

hemos introducido un cambio de variable $u = u(x)$, entonces

$$A = \int_{u(a)}^{u(b)} v(u)du,$$

es decir en vez de «deshacer el cambio» cambiamos los límites de integración.

Ejemplo

$$\int_0^1 e^{-2x+1} dx = (-1/2)e^u \Big|_{u(0)=1}^{u(1)=-1} = (-1/2)\left(\frac{1}{e} - e\right) \cong 1,1752,$$

donde hemos hecho el cambio $u = -2x + 1$.

Ejemplo Calcular

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = \ln \sqrt{2}.$$

La primitiva se resuelve por el cambio de variable $t = \cos x$:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{t} (-dt) = -\ln |t| + C$$

Cambiando los límites de integración obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{si } x = 0, t &= \cos 0 = 1; \\ \text{si } x = \pi/4, t &= \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

por tanto

$$-\ln |t| \Big|_1^{\sqrt{2}/2} = -\ln(1/\sqrt{2}).$$

Ejemplo: Área de un círculo de radio r Primero calculamos el área A de un cuadrante circular (ver figura 5.5),

$$A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$, por el cambio de variable $x = r \cos t$, $\pi/2 \geq t \geq 0$, es $dx = -r \sin t$ y $r^2 - x^2 = r^2 \sin^2 t$. Entonces

$$A = -r^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = r^2 \frac{1}{2} (-\sin t \cos t + t) \Big|_0^{\pi/2} = r^2 \frac{\pi}{4}.$$

En consecuencia el área del círculo completo es $4A = \pi r^2$.



Figura 5.5: Un cuadrante circular

Ejemplo: área de una elipse* Una elipse (ver figura 5.6) está dada por una ecuación del tipo

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1,$$

donde $a, b > 0$ (la circunferencia es el caso $a = b = r$). El área de la elipse será

$$A = 4b \int_0^a \sqrt{1 - (x/a)^2} dx.$$

Como antes, hacemos el cambio $x = a \cos t$, $dx = -a \sin t dt$ y queda

$$A = 4b \int_{\pi/2}^0 (-a \sin^2 t) dt = 4ab \frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

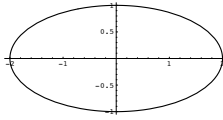


Figura 5.6: Una elipse con $a = 2$, $b = 1$.

5.6. Integrales impropias

En ocasiones no podemos aplicar la regla de Barrow, bien porque la función no es continua (existencia de saltos o asíntotas verticales), bien porque el intervalo no es del tipo $[a, b]$ (se dice intervalo cerrado acotado).

Ejemplo Calcular el área A bajo la gráfica de la función $y(x) = 1/(1+x^2)$, $x \geq 0$ (fig. 5.7). El área sobre el intervalo $[0, b]$ vale

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^b = \arctan b.$$

Entonces $A = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = \pi/2$.

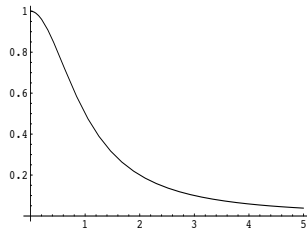


Figura 5.7: El área total bajo la gráfica de $y = \frac{1}{1+x^2}$ vale $\pi/2$.

Ejemplo La concentración plasmática (mg/l) de un medicamento evolucionó según la ley

$$C(t) = 200 e^{-0,3t} \quad t \geq 0 \text{ (horas)}.$$

Calcular el área total bajo la gráfica (fig. 5.8).

$$\int_0^{\infty} C(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b C(t) dt.$$

Por Barrow,

$$A(b) = \int_0^b 200e^{-0,3t} dt = 200e^{-0,3t} \left. \frac{1}{-0,3} \right]_0^b = \frac{-200}{0,3} (e^{-0,3b} - 1),$$

luego $A = \lim_{b \rightarrow \infty} A(b) = \frac{+200}{0,3} = 667$.

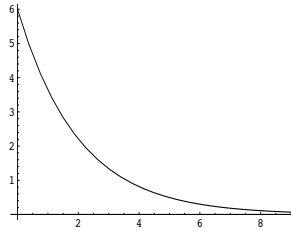


Figura 5.8: El área total bajo la gráfica de $C = C_0 e^{-kt}$, $t \geq 0$, vale C_0/k .

Ejemplo El área A bajo la función $y(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$ (figura 5.9).

Por el cambio de variable $x = \cos t$, $dx = -\operatorname{sen} t dt$, tenemos

$$\int y(x) dx = \int -dt = -t = -\operatorname{arc} \cos x.$$

Por tanto

$$A(b) = \int_0^b y(x) dx = (-\operatorname{arc} \cos b) - (-\pi/2)$$

y

$$A = \lim_{b \rightarrow 1^-} A(b) = (0) + \pi/2 = \pi/2.$$

Ejemplo El área bajo la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, es $\lim_{b \rightarrow \pi/2} (-\ln(\cos b)) = +\infty$.

Ejemplo El área bajo la gráfica de $y = 1/x$, $0 \leq x \leq 1$, es $\lim_{a \rightarrow 0^+} (-\ln a) = +\infty$.

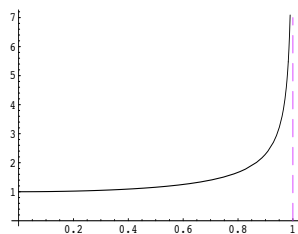


Figura 5.9: El área bajo la gráfica de $y = 1/\sqrt{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$, vale $\pi/2$.

5.7. Integración de fracciones racionales

Una *fracción racional* es de la forma $P(x)/Q(x)$, con P, Q polinomios.

Si $\text{grado } P \geq \text{grado } Q$ podemos hacer la división entera $P = C \cdot Q + R$, o lo que es lo mismo, $P/Q = C + R/Q$, donde el resto $R(x)$ ya tiene $\text{grado } R < \text{grado } Q$.

Ejemplo

$$\frac{x^3 - 2}{x^2 + x - 1} = x - 1 + \frac{2x - 3}{x^2 + x - 1}.$$

A partir de ahora supondremos que $\text{grado } P < \text{grado } Q$.

Caso 1.

$$\int Q'/Q:$$

En este caso obtenemos un logaritmo $\ln |Q|$. Es lo que ocurre cuando $\text{grado } Q = 1$ y P es una constante.

Ejemplo

$$\int \frac{2dx}{3x-1} = \frac{2}{3} \int \frac{3dx}{3x-1} = \ln |3x-1| + \text{cte.}$$

Caso 2.

$$P = \text{cte.}, \text{ grado } Q = 2, \text{ discrim } Q > 0:$$

La fracción puede descomponerse, de manera única, en fracciones simples.

Ejemplo

$$I = \int \frac{3dx}{x^2 + x - 2} = 3 \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

Ponemos

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

es decir

$$1 = A(x+2) + B(x-1)$$

y damos valores $x = 1$, $x = -2$. Se sigue $A = 1/3$ y $B = -1/3$. Entonces

$$I = \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{2}{3} \ln|x+2| = \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|^{2/3} + \text{cte.}$$

Caso 2bis.

grado $P = 1$, grado $Q = 2$ con discrim $Q > 0$:

También haremos una descomposición en fracciones simples para obtener logaritmos.

Ejemplo

$$I = \int \frac{2x-1}{x^2-3x-10} dx.$$

Tenemos $x^2 - 3x - 10 = (x-2)(x+5)$. Comparamos numeradores

$$2x-1 = A(x-5) + B(x+2)$$

y obtenemos $A = 5/7$, $B = 9/7$, luego

$$I = \frac{5}{7} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{9}{7} \int \frac{dx}{x-5} = \ln|x+2|^{5/7} + \ln|x-5|^{9/7} + \text{cte.}$$

Ejemplo Aunque no nos demos cuenta de que el numerador es la derivada del denominador, por descomposición en fracciones simples llegaremos a buen puerto:

$$\int \frac{6x-1}{3x^2-x} = \ln x + \ln(3x-1) + \text{cte.}$$

que es lo mismo que $\ln x(3x-1) + \text{cte.}$

Caso 3. $P = \text{cte.}, \text{ grado } Q = 2, \text{ discrim } Q = 0:$

Es una potencia.

Ejemplo

$$\int \frac{2dx}{x^2 - 4x + 4} = 2 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x-2} + \text{cte.}$$

Caso 4. $\text{grado } P = 1, \text{ grado } Q = 2 \text{ con discrim } Q = 0:$

Es $Q(x) = a(x+p)^2$. Hacemos el cambio $t = x+p$. Entonces hay una parte potencia y una parte logaritmo, en ambas aparece $x+p$.

Ejemplo

$$I = \int \frac{3x+2}{(x+5)^2} dx.$$

Con el cambio $t = x+5$, $dt = dx$,

$$I = \int \frac{3(t-5)+2}{t^2} dt = \int \frac{3dt}{t} + \int \frac{-13dt}{t^2}$$

queda

$$I = 3 \ln |t| + \frac{13}{t} = \ln |x+5|^3 + \frac{13}{x+5} + \text{cte.}$$

También podemos hacerlo por descomposición en fracciones simples, de la siguiente forma:

$$\frac{3x+2}{(x+5)^2} = \frac{A}{(x+5)^2} + \frac{B}{x+5},$$

y obtenemos $A = -13$, $B = 3$.

Caso 5. $P = \text{cte.}, \text{ grado } Q = 2, \text{ discrim } Q < 0:$

Ahora el denominador es irreducible. Supuesto que $a = 1$, podemos escribirlo en la forma

$$Q = (x+p)^2 + q$$

(siempre saldrá $p = b/2$ y $q = c - \frac{b^2}{4} > 0$). Después se reduce a la forma $t^2 + 1$, que nos da un arco tangente.

Ejemplo

$$I = \int \frac{9dx}{2x^2 + 4x + 6} = \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3}.$$

Ponemos

$$Q(x) = (x + 1)^2 + 2 = 2 \left[\left(\frac{x + 1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right].$$

Al hacer el cambio

$$t = \frac{x + 1}{\sqrt{2}}$$

es $dx = \sqrt{2}dt$ y queda

$$I = \frac{9}{4} \int \frac{\sqrt{2}dt}{t^2 + 1} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \arctg t = \frac{9\sqrt{2}}{4} \arctg \frac{x + 1}{\sqrt{2}} + \text{cte.}$$

Caso 6.

grado $P = 1$, grado $Q = 2$ con discrim $Q < 0$:

En este caso habrá una parte logaritmo y una parte arcotangente. Lo primero es ajustar el coeficiente de la x en el numerador; después ajustar el término constante.

Ejemplo

$$I = \int \frac{5x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Como $Q'(x) = 2x + 1$, ajustamos el coeficiente de la x ,

$$I = 5 \int \frac{x + (1/5)}{Q(x)} = \frac{5}{2} \int \frac{2x + (2/5)}{Q(x)}$$

y ahora hacemos

$$2x + (2/5) = Q'(x) + q = (2x + 1) + (-3/5).$$

Es decir

$$I = \frac{5}{2} \int \frac{Q'(x)dx}{Q(x)} + \frac{5}{2} \int \frac{-3/5 dx}{Q(x)}.$$

El primer sumando nos dará directamente

$$\frac{5}{2} \ln |Q(x)|;$$

mientras que el segundo sabemos hacerlo (caso 4) y da

$$-\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right).$$

Caso 7. grado $Q \geq 2$:

Cualquier polinomio de grado superior a 2 puede escribirse como producto de dos tipos de polinomios sencillos:

- potencias $(bx + a)^m$ de polinomios de grado 1;
- y potencias $(ax^2 + bx + c)^n$ de polinomios *irreducibles* de grado 2.

No es fácil encontrar la descomposición de un polinomio dado.

Ejemplo* El polinomio

$$Q(x) = 5 + 6x + 6x^2 - 9x^3 - 12x^4 - 12x^5 + 3x^6 + 6x^7 + 6x^8 + x^9$$

se descompone como

$$(x - 1)^2(x + 5)(x^2 + x + 1)^3.$$

Podemos entonces reducir cualquier fracción racional $P(x)/Q(x)$ a una suma de fracciones simples, con denominadores de los siguientes tipos:

- fracciones con denominadores $x - 1$ (porque su exponente era 2), y $x^2 + x + 1$ y $(x^2 + x + 1)^2$ (porque su exponente era 3), pero en cambio no aparecerá $x + 5$ (que sólo tenía exponente 1);
- logaritmos de $x - 1$ y de $x + 5$;
- arco tangente donde interviene la derivada $2x + 1$ de $x^2 + x + 1$ (que es un polinomio irreducible).

Un método eficaz para hacer esto fué inventado por M. V. Ostrogradski en 1845. Este método tiene la ventaja de separar explícitamente, y sin necesidad de factorizar, la parte algebraica (fracción racional) y la parte trascendente (logaritmo y arco tangente) del resultado. Puede verse por ejemplo en el libro de B. Demidovich et al. en <http://mpec.sc.mahidol.ac.th/RADOK/physmath/mat12/start.htm>.

Hay otros métodos más elementales, pero mucho más lentos.

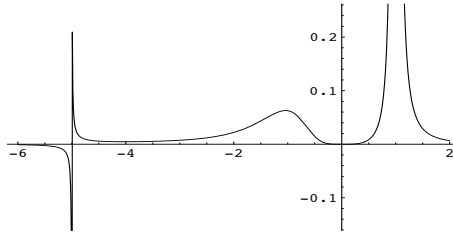


Figura 5.10: La gráfica de la función racional $x^7/Q(x)$ muestra claramente las asintotas verticales $x = -5$ y $x = +1$.

PROBLEMAS Resolución de problemas.

5.8. Volúmenes de cuerpos de revolución*

Tomemos una *función perfil* $y = y(x)$ (para simplificar suponemos que $y \geq 0$) y la hacemos girar alrededor del eje OX . Obtenemos una *superficie de revolución*. Queremos calcular el volumen V del sólido limitado por ella. Si subdividimos el intervalo $[a, b]$ y hacemos girar los rectángulos correspondientes, obtenemos cilindros sólidos cuyo volumen es $\pi y(x)^2 \Delta x$. Al calcular el límite cuando las subdivisiones son cada vez más finas obtenemos

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \pi y(x)^2 \Delta x = \pi \int_a^b y(x)^2 dx.$$

Las dos siguientes fórmulas fueron descubiertas por Arquímedes.

Volumen del cono Tomemos la función $y = rx/h$, $0 \leq x \leq h$. El sólido de revolución correspondiente es el *cono circular recto* de radio $r > 0$ y altura $h > 0$. Su volumen será

$$\pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

Volumen de la esfera Al girar la gráfica de $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \leq x \leq r$, obtenemos la esfera de radio r . Su volumen será

$$\pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^{+r} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

PROBLEMA Calcular el volumen de una botella cuyo perfil está dado como

$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ x & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

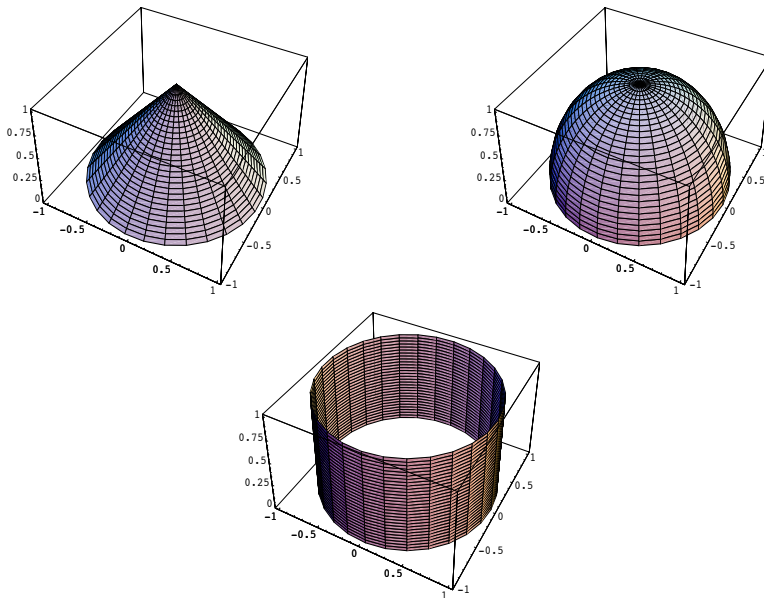


Figura 5.11: Para la misma base y la misma altura, los volúmenes del cono, la semiesfera y el cilindro están en la proporción 1, 2, 3.

Capítulo 6

Ecuaciones Diferenciales

1

Ecuaciones algebraicas Las ecuaciones que hemos encontrado hasta ahora, como por ejemplo

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

se llaman ecuaciones *algebraicas*. La incógnita x representa un número.

6.1. Ecuación Diferencial

En una ecuación diferencial la incógnita es una *función* $y = y(x)$. En la ecuación aparece la función, sus derivadas, y la variable. Por ejemplo

$$y' + 3y + \operatorname{sen} x = 0.$$

Las ecuaciones que estudiaremos tienen por incógnita una función real con una variable real. Se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDO). Cuando las incógnitas son funciones con varias variables (que no veremos) se llaman *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* (EDP).

Ejemplo Una solución de la ecuación $y'' + y = 0$ podría ser $y = \operatorname{sen} x$.

¹v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

Ejemplo Una solución de la ecuación $y' = 3y$ podría ser $y = 5e^{3x}$.

Muchos fenómenos (físicos, químicos, biológicos) y muchas situaciones de la vida real (una estrella, un puente, una mandíbula humana) pueden modelarse gracias a una ecuación diferencial.

Trataremos tres asuntos:

- existencia y unicidad de las soluciones de una EDO;
- métodos para resolver las ecuaciones;
- aplicación a la elaboración de modelos matemáticos.

Las EDO que estudiaremos son fundamentalmente :

- De primer orden, es decir aparece y' pero no las derivadas sucesivas y'', y''', \dots
- De primer grado, es decir aparece la función y pero no sus potencias y^2, y^3, \dots

6.2. Existencia y unicidad de soluciones

Al resolver una ecuación diferencial como $y' = 3y$ observaremos que todas las soluciones son de la forma

$$y = Ce^{3x},$$

donde la constante C puede ser cualquier número. Diremos que hemos obtenido la *solución general* de la ecuación. Si queremos que la solución cumpla una determinada condición experimental o *condición inicial*, deberemos ajustar la constante. En el ejemplo anterior, si necesitamos que $y(0) = 5$ entonces debemos poner $C = 5$ y tendremos la *solución particular* $y = 5e^{3x}$.

Un resultado fundamental es el siguiente

. Si la ecuación diferencial se expresa como $y' = F(x, y)$ y la función F es derivable, entonces, para cada condición inicial $y(a) = b$, la ecuación tiene solución. Esta solución es localmente única, lo que significa que dos soluciones sólo pueden distinguirse en el tamaño de su dominio.

Ejemplo La solución general de la ecuación $y' = 3$ es la recta $y(x) = 3x + C$. La solución que pasa por el punto $(1, 2)$ es $y(x) = 3x - 1$, $-\infty < x < +\infty$, solución que es única salvo que tomemos un dominio más pequeño.

Ejemplo En la figura 6.1 se ven las soluciones $y(t) = Ce^{-0,5t}$ de la ecuación $y' + 0,5y = 0$. Aparecen destacadas las soluciones particulares $C = 3$ y $C = 0$.

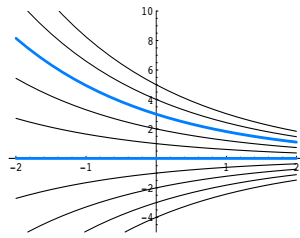


Figura 6.1: Soluciones de la ecuación $y' + 0,5y = 0$.

6.3. Ejemplo de modelo matemático

Desarrollamos este ejemplo con detalle.

Decaimiento radioactivo Algunos átomos (como por ejemplo el isótopo C^{14} del carbono) tienen un núcleo inestable y emiten espontáneamente una partícula beta (es decir, un neutrón se descompone en un protón y un electrón, y este último se emite), con lo que pasan a un estado estable (nitrógeno N^{14}). Este fenómeno radioactivo es aleatorio, así que la cantidad $M = M(t)$ de átomos radioactivos cambia a un ritmo proporcional a la cantidad de átomos radioactivos que aún quedan, es decir

$$dM/dt = -kM,$$

donde $k > 0$ (*constante de desintegración*) es un indicador de la frecuencia con que el fenómeno se produce en un momento dado.

Experimento Podemos simular el fenómeno con mil monedas (cara=radioactivo, cruz=no radioactivo) que lanzamos repetidamente (eliminando las que han dejado de ser radioactivas). Obtendremos una curva parecida a $1000 \times (0,61)^t$.

Modelo Para resolver la ecuación $M' + kM = 0$, como $M > 0$ la escribimos en la forma

$$\frac{dM}{M} = -kdt$$

y calculamos primitivas

$$\ln M = -kt + \text{cte.}$$

(la constante es arbitraria), es decir $M = e^{\text{cte.}} e^{-kt}$ que escribimos

$$M = Ce^{-kt}$$

(esta vez la constante $C > 0$ es estrictamente positiva). Haciendo $t = 0$ vemos que $C = M(0)$, la cantidad de material que teníamos inicialmente. Por tanto el modelo matemático es

$$M(t) = M(0)e^{-kt}.$$

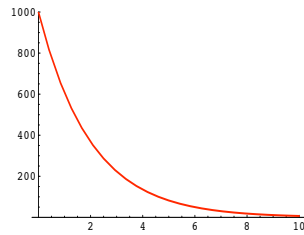


Figura 6.2: Decaimiento exponencial $M = M_0e^{-kt}$.

Ejemplo Para determinar las constantes $M(0)$ y k bastan dos observaciones experimentales M_1 y M_2 en dos momentos dados t_1 y t_2 .

Por ejemplo (simulado con monedas) si para $t_1 = 3$ y $t_2 = 5$ tuviésemos $M_1 = 223$ y $M_2 = 82$ podemos escribir

$$M_1 = M_0e^{-3k}$$

y

$$M_2 = M_0e^{-5k}$$

que tomando logaritmos nos dan

$$\ln M_1 = -3k + \ln M_0$$

y

$$\ln M_2 = -5k + \ln M_0.$$

Al restar queda

$$\ln \frac{M_1}{M_2} = (-t_1 + t_2)k$$

es decir $k = \ln 2,72/2 = 0,5$. Ahora de la primera ecuación sacamos $M_0 = 223e^{+3 \times 0,5} = 999$.

Más adelante estudiaremos técnicas estadísticas para corregir los errores experimentales.

Semivida El modelo $M = M_0e^{-kt}$ del decaimiento exponencial tiene una peculiaridad. El tiempo necesario para pasar de una cantidad cualquiera M a la mitad es siempre el mismo, se llama la *semivida* de la sustancia radioactiva.

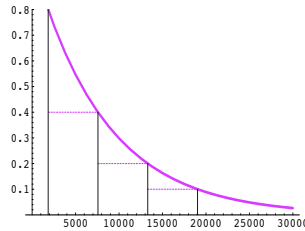


Figura 6.3: Semivida

En efecto, si en el momento t teníamos

$$M = M(t) = M_0e^{-kt},$$

al pasar un tiempo s y tener la mitad será

$$M/2 = M(t + s) = M_0e^{-k(t+s)} = M_0e^{-kt}e^{-ks} = Me^{-ks}$$

de donde deducimos que $1/2 = e^{-ks}$, es decir

$$s = \frac{\ln 2}{k}.$$

No debe confundirse la semivida s (muchas veces denotada por $t_{1/2}$, en inglés HALF TIME) con la *vida media* (en inglés AVERAGE LIFE) que es $1/k$,

el tiempo que por término medio tarda en descomponerse un átomo dado. La semivida sirve también para escribir la cantidad de masa en base 2,

$$M = M_0 2^{-t/s}.$$

Ejemplo El carbono C^{14} tiene una semivida de 5730 años. Por tanto su constante de desintegración es $k = \ln 2/s = 0,000120968$.

PROBLEMA La semivida del Plutonio 238 es 87,74 años; al emitir una partícula alfa (formada por dos protones y dos neutrones) se convierte en uranio U^{234} . En 1971, la misión Apolo XIV dejó en la Luna un pequeño reactor nuclear con 3,35 kg de Pu^{238} ¿Qué cantidad de plutonio continúa siendo radioactiva en el año 2008?

Semividas de algunos isótopos radioactivos

C^{14}	Carbono	5.730 años
Co^{60}	Cobalto	5,26 años
I^{131}	Yodo	8,07 días
Cs^{137}	Cesio	30,23 años
Pu^{239}	Plutonio	24.400 años
Ra^{226}	Radio	1.602 años
U^{235}	Uranio	710.000.000 años

PROBLEMA El becquerel (Bq) es una unidad que mide la radioactividad en términos de M' , el ritmo de decaimiento radiactivo (1 Bq= un átomo decae cada segundo). Tras el accidente de la central nuclear de Chernobil en 1986, el nivel de contaminación del suelo por Cesio 137 en Bielorrusia era de 37 kBq/m² ¿Cuál será en la actualidad?

Datación por C^{14} *. El C^{14} se forma en las capas altas de la atmósfera por la acción de los rayos cósmicos. Para simplificar, podemos suponer que la proporción en el dióxido de carbono del aire se mantiene constante, aproximadamente $1,3 \times 10^{-12}$. Esta es la proporción que hay en las plantas y otros muchos seres vivos. Pero cuando un organismo muere, la proporción de C^{14} disminuye exponencialmente, pues no se renueva, y viendo la proporción actual del isótopo es posible deducir la antigüedad del fósil. Por inventar este método, Willard F. Libby ganó el Nobel de Química en 1960.

6.4. Ecuaciones con variables separables

Son las más fáciles de solucionar. Escribiéndolas en notación de Leibniz puede separarse la función incógnita de la variable. Se resuelven tomando primitivas.

Ejemplo Encontrar una función $y = y(x)$ que satisfaga

$$y' + \frac{3y^2}{x+3} = 0$$

con la condición inicial $y(0) = 1$. La escribimos como

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{-3dx}{x+3}.$$

Al tomar primitivas,

$$\frac{-1}{y} = -3 \ln(x+3) + \text{cte.}$$

Determinamos la constante gracias a la condición $x = 0, y = 1$; al sustituir queda $\text{cte.} = -\ln 27$. Entonces

$$\frac{-1}{y} = -\ln(x+3)^3 - \ln 27.$$

Finalmente

$$y = \frac{1}{3 \ln 3(x+3)}.$$

PROBLEMA Resolver $y' = (3x + xy^2)/(2y + x^2y)$.

6.5. Ecuaciones lineales

Una ecuación diferencial con incógnita $y = y(x)$ es *lineal* si puede escribirse en la forma

$$y' + p(x)y + q(x) = 0.$$

Es decir, es una ecuación *de primer grado y de primer orden*. Cuando falta el término independiente, o sea $q = 0$, la ecuación se llama *homogénea*.

6.5.1. Homogéneas con coeficientes constantes

Este caso ya lo hemos visto, es la ecuación

$$y' + ky = 0$$

del decaimiento radioactivo. La solución era

$$|y| = Ce^{-kt}, \quad C > 0.$$

Al eliminar el valor absoluto, e incluyendo la solución evidente $y = 0$ queda como solución general

$$y = Ce^{-kt}$$

para una constante arbitraria C .

6.5.2. Homogéneas con coeficientes no constantes

Una ecuación lineal del tipo $y' + p(x)y = 0$ se resuelve, por ejemplo, separando variables.

Ejemplo Resolver $y' + x^2y = 0$.

La función $y = 0$ es solución. Supongamos ahora que $y(x) \neq 0$. Ponemos

$$\frac{dy}{y} = -x^2 dx$$

y al hacer primitivas $\ln |y| = -x^3/3 + \text{cte.}$, es decir $y = Ce^{-x^3/3}$ con $C \neq 0$.

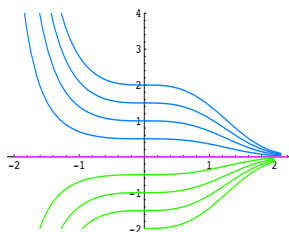


Figura 6.4: Soluciones de la ecuación $y' + x^2y = 0$.

6.5.3. No homogénea, pero con coeficientes constantes

En $y' + ky + q = 0$ también pueden separarse variables, se obtendrá como solución una trasladada de la correspondiente homogénea.

En efecto, la escribimos como

$$\frac{dy}{ky + q} = -dx$$

y tomamos primitivas

$$\frac{1}{k} \ln(ky + q) = -x + \text{cte.}$$

Entonces

$$ky + q = \text{cte.} e^{-kx}$$

y queda

$$y = Ce^{-kx} - \frac{q}{k}.$$

Otro método También podemos resolverla de la siguiente manera. Primero trasladamos la incógnita y mediante una constante a determinar, para volver homogénea la ecuación. Es decir, sea $z = y + b$, entonces $z' = y'$ y la ecuación $y' + ky + q = 0$ se convierte en $z' + kz + kb + q = 0$. Haciendo $kb + q = 0$, es decir $b = -q/k$, nos quedará la ecuación $z' + kz = 0$, cuya solución sabemos que es $z = Ce^{-kx}$. Entonces $y = z - b = Ce^{-kx} - q/k$.

6.5.4. Caso general

Ahora $p = p(x)$, $q = q(x)$ son funciones arbitrarias.

Método Para resolver la ecuación $y' + py + q = 0$,

1. Escribiremos la incógnita $y = y(x)$ como producto de dos funciones (con la misma variable x), es decir $y(x) = u(x)v(x)$. Entonces $y' = u'v + uv'$ y sustituyendo en la ecuación y agrupando los términos con v queda

$$(u' + pu)v + uv' + q = 0.$$

2. El segundo paso es encontrar *alguna* función $u = u(x)$ tal que

$$u' + p(x)u = 0.$$

Esto sabemos hacerlo separando variables. La función u se llama *factor integrante*.

3. De esta manera la ecuación original queda reducida a

$$uv' + q(x) = 0,$$

que se resuelve también separando variables.

Ejemplo Resolver $y' + 3y + \sin x = 0$ (ver figura 6.5).
Hagamos $y = uv$, luego

$$0 = u'v + uv' + 3uv + \sin x = (u' + 3u)v + uv' + \sin x.$$

Podemos conseguir que $u' + 3u = 0$ tomando por ejemplo $u(x) = e^{-3x}$.
Sustituyendo tenemos

$$0 = uv' + \sin x = e^{-3x}v' + \sin x$$

que se resuelve separando variables:

$$dv = -e^{+3x} \sin x \, dx.$$

La primitiva, que se hace por partes, nos da

$$v = -(1/10)e^{3x}(\cos x - 3 \sin x) + C.$$

Entonces

$$y = uv = \frac{-1}{10}(\cos x - 3 \sin x) + Ce^{-3x}.$$

Nota Nótese que si la ecuación es homogénea, $y' + p(x)y = 0$, es más fácil resolverla separando variables.

Ejemplo La ecuación $y' + xy = 0$ se resuelve escribiéndola como $dy/y = -x dx$, cuya solución general es $y = Ce^{-x^2/2}$.

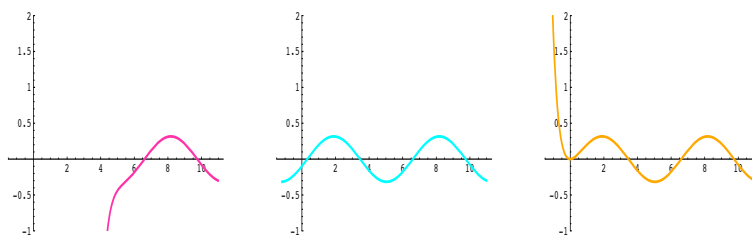


Figura 6.5: Tres soluciones particulares de la ecuación $y' + 3y + \sin x = 0$.

6.6. Ecuaciones de Bernoulli*

Un ecuación de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

se llama ecuación de Bernoulli. Se reduce a lineal dividiéndola por y^n y haciendo el cambio de variable $z = y^{1-n}$.

En efecto, como

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q$$

y $z' = (1 - n)y^{-n}y'$, queda

$$\frac{1}{1 - n}z' + pz = q.$$

En este proceso podría perderse alguna solución de la ecuación original, pues al dividir suponemos que $y(x) \neq 0$.

PROBLEMA Resolver la ecuación $y' - y = xy^2$.

Leonhard Euler (1707–1783) Este genial matemático suizo (y además teólogo y médico militar) trabajó en la Academia de Ciencias de San Petersburgo, fundada por Catalina I y Pedro el Grande, y en la Academia de Ciencias de Berlín, invitado por Federico el Grande. Publicó unos 800 artículos y libros en matemática aplicada (acústica, óptica, elasticidad, diseño de barcos, hidráulica, balística), mecánica, análisis matemático (ecuaciones diferenciales, cálculo de variaciones) y teoría de números.

Euler, que era una persona de carácter muy humilde, quedó ciego a los 60 años. Tuvo trece hijos, y decía que sus grandes descubrimientos matemáticos los hizo *con un niño en brazos y otro enredándose los pies*.

Al número e se le llama a veces *número de Euler*. Se define con una serie (=suma infinita)

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

y vale aproximadamente 2,71828...



Figura 6.6: L. Euler

Capítulo 7

Aplicaciones de las EDO

1

Las EDO lineales modelan situaciones estables (es decir la solución no cambia mucho aunque varíen ligeramente las condiciones iniciales). En cambio, las olas de una playa, las cotizaciones de la Bolsa o la predicción del tiempo son fenómenos no lineales.

7.1. Modelos lineales

Los siguientes modelos lineales son un breve resumen de los casos vistos en clase.

Ejemplo 1. *Imaginemos un lago de volumen V (en m^3), alimentado por un río con un caudal de α m^3/h . El lago desagua por un canal con el mismo caudal. En un momento dado alguien echa una cantidad determinada M_0 de una sustancia contaminante. Queremos saber cómo va a evolucionar la concentración de contaminante en el lago.*

El volumen V es constante porque los caudales de entrada y salida son iguales. Sea $M = M(t)$ la cantidad total de contaminante (medida en kg) en cada momento. Al principio hay $M(0) = M_0$ kg. La concentración es

$$C(t) = M(t)/V.$$

¹v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

En un intervalo corto de tiempo $[t, t + \Delta t]$ el cambio en la cantidad de contaminante es

$$\Delta M = M(t + \Delta t) - M(t) = +0 - \alpha \text{ m}^3/\text{h} \times \Delta t \text{ h} \times C \text{ kg}/\text{m}^3$$

con lo que tenemos

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = -\alpha \times \frac{M}{V}.$$

El balance (positivo y/o negativo) siempre es de la forma
caudal \times tiempo \times concentración

Tomando el intervalo de tiempo cada vez más corto, es decir haciendo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta M/\Delta t$$

obtenemos la derivada en el momento t y queda

$$M'(t) = -\frac{\alpha M(t)}{V}.$$

Si llamamos $k = \alpha/V$ queda

$$M'(t) = -kM(t).$$

Para la concentración, como $C(t) = M(t)/V$, será $C'(t) = M'(t)/V$, luego

$$C'(t) = -kC(t).$$

La constante k se mide en unidades $1/h$. Es el cociente α/V , es decir la proporción de volumen que se desagua por unidad de tiempo.

Este modelo $C' = -kC$ es el mismo que el decaimiento exponencial. La solución es

$$C(t) = C_0 e^{-kt}.$$

Nótese que la ecuación lineal es homogénea (no hay contaminación río arriba) con coeficientes constantes (el volumen del lago es constante).

PROBLEMA En un lago de $8 \times 10^6 \text{ m}^3$ han caído 10 kg de contaminante. Si el caudal de entrada y salida es de $20000 \text{ m}^3/\text{h}$ ¿cuánto tiempo ha de pasar hasta que la concentración sea inferior a $0,05 \times 10^{-6} \text{ g/l}$?

Sol.: Tenemos $k = 20000/(8 \times 10^6) = 2,5 \times 10^{-3} \text{ h}^{-1}$. La concentración inicial es $C_0 = 10000/(8 \times 10^6) = 1,25 \times 10^{-3} \text{ g/m}^3$. Bastará encontrar t tal que

$$0,05 \times 10^{-3} = 1,25 \times 10^{-3} e^{-2,5 \times 10^{-3} t},$$

de donde $\ln 0,04 = -2,5 \times 10^{-3}$ y queda $t \cong 1287 \text{ h}$.

Es necesario unificar las unidades de volumen, masa, tiempo, etc. antes de empezar a resolver el problema.

Ejemplo 2. *Un depósito de volumen V (en litros) contiene agua salada, que está inicialmente a una concentración C_0 (en g/l). Hay una tubería de entrada, que aporta agua limpia, a un ritmo de α l/h, y una cañería de salida, con un caudal superior, de γ l/h.*

En este caso el volumen $V = V(t)$ no es constante sino que disminuye a ritmo constante $dV/dt = \alpha - \gamma$. Por tanto

$$V(t) = (\alpha - \gamma)t + V_0.$$

Ahora, en un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ el cambio en la cantidad de sal es

$$\Delta M = +0 - \gamma \text{ l/h} \times \Delta t \text{ h} \times C \text{ g/l}$$

es decir

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = -\gamma \frac{M}{V}$$

y al tomar el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, queda

$$M'(t) = \frac{-\gamma M(t)}{(\alpha - \gamma)t + V_0}.$$

Ésta es una EDO lineal homogénea, pero con coeficientes no constantes. Se resuelve separando variables.

PROBLEMA El caudal de entrada es $\alpha = 3$ l/h y el de salida $\gamma = 9$ l/h. Inicialmente había $M_0 = 300$ g de sal disueltos en $V_0 = 500$ l de agua ¿en qué momento quedará vacío el depósito? ¿cuál será la concentración al cabo de 30 horas?

Sol.: Primero observamos que $dV/dt = (3 - 9) = -6$ y $V_0 = 500$, con lo que deducimos que $V(t) = -6t + 500$. Por tanto el depósito tardará $500/6$ horas en vaciarse. Ahora debemos resolver la ecuación

$$\frac{dM}{M} = \frac{-9dt}{-6t + 500}$$

que nos da

$$\ln M = (+9/6) \ln(-6t + 500) + \text{cte.}$$

Para $t = 0$ es

$$\ln 300 = (+3/2) \ln(500) + \text{cte.}$$

por tanto $\text{cte.} \cong -3,62$. Entonces

$$M(t) = e^{-3,62}(-6t + 500)^{3/2}.$$

Finalmente, para obtener la concentración dividimos por el volumen,

$$C(t) = 0,027(-6t + 500)^{1/2}.$$

La concentración pedida será

$$C(30) = 0,48 \text{ g/l}$$

Nótese que la concentración inicial era $C_0 = 300/500 = 0,6$.

7.2. Ley de enfriamiento de Newton

Un cuerpo caliente a temperatura T_0 se coloca en un ambiente más frío a temperatura T_a . Entonces la temperatura $T = T(t)$ del cuerpo va bajando a un ritmo que es proporcional a la diferencia $T - T_a$, es decir

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

donde la constante $k > 0$ depende de la composición del cuerpo y de las unidades que usemos.

Como es una EDO lineal no homogénea con coeficientes constantes, la solución general es $T = Ce^{-kt} + T_a$. Para $t = 0$ obtenemos que la constante es $C = T_0 - T_a$, por tanto

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a.$$

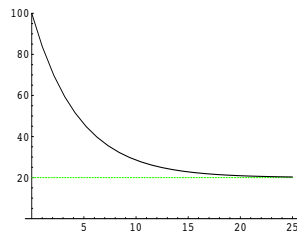


Figura 7.1: Enfriamiento de un cuerpo desde $T_0 = 100$ hasta $T_a = 20$.

PROBLEMA Un huevo de tamaño medio (57 gramos) está bien cocido cuando la temperatura de la yema llega a 65°C . Si echamos en agua hirviendo un huevo recién sacado de la nevera ($T_0 = 4^{\circ}\text{C}$) ¿cuánto tiempo debe cocer si sabemos que al cabo de tres minutos la temperatura es de 51°C ?

SOL.: 4,5 minutos ($T_a = 100^{\circ}\text{C}$).

Difusión del calor La ecuación de Newton es una sobresimplificación de la llamada *ecuación del calor* de Fourier. No tiene en cuenta la transmisión del calor en el interior de los cuerpos, pero es útil cuando hay que ahorrar tiempo de computación (por ejemplo en las predicciones climáticas).

7.3. La ecuación logística de Verhulst*

Es un modelo de crecimiento de una población, un organismo, un embrión, etc. Supone que la tasa de crecimiento es directamente proporcional tanto al

tamaño alcanzado como a la cantidad de recursos disponibles. Se formaliza como

$$\frac{dP}{dt} = kP(m - P)$$

donde m sería el tamaño máximo o límite y $k > 0$.

La solución general tiene la forma

$$P(t) = \frac{mP_0}{P_0 + (m - P_0)e^{-kmt}}.$$

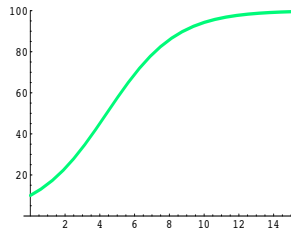


Figura 7.2: Ecuación logística. A partir del punto de inflexión, la población compite por los recursos y el crecimiento se frena.

Capítulo 8

Farmacocinética

1

Vamos a dar unas nociones básicas de Farmacocinética, como aplicación de las EDO lineales.

8.1. Inyección intravenosa rápida (*bolus*)

Un *bolus* es una dosis grande de medicamento, administrada casi siempre al principio de un tratamiento, para aumentar la concentración en sangre hasta un nivel terapéutico. El término denota una dosis de efecto rápido, en contraposición a *basal*, que se refiere a una actuación lenta en pequeñas dosis o a perfusión continua.

Inyectamos una determinada cantidad M_0 (en mg) de medicamento por vía intravenosa (i.v.) Suponemos para simplificar que la difusión en el torrente sanguíneo es instantánea (en realidad tarda unos minutos).

Volumen de distribución El medicamento va a difundirse (suponemos que uniformemente) en órganos o tejidos que ocupan un cierto volumen V (en litros); se le llama el *volumen aparente de distribución*. No podemos conocerlo directamente, pero sí estimarlo, como veremos. De hecho no es un volumen real, pues depende de la intensidad de la unión del fármaco con los tejidos o con el plasma sanguíneo.

¹v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

Aclaramiento El paciente va a ir eliminando el medicamento por distintos medios (sudor, orina, heces, leche, saliva, metabolismo), a un ritmo que tampoco conocemos. El volumen de plasma depurado por unidad de tiempo se llama *aclaramiento*.

Modelo matemático Para hacer un modelo matemático, consideremos primero la cantidad total $M = M(t)$ de medicamento en el organismo, que va a ir cambiando con el tiempo. Nunca podremos conocerla directamente, pero sí podremos conocer la concentración plasmática $C(t) = M(t)/V$ (en mg/l), sin más que extraer una muestra de sangre.

Veamos cómo varía M en un breve intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$. Si el paciente excreta con un caudal γ l/h,

$$\Delta M = +0 - \gamma \times \Delta t \times C$$

donde C es la concentración del líquido eliminado. Por tanto

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = -\gamma C$$

y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ queda

$$M'(t) = -\gamma C(t) = -\gamma \frac{M(t)}{V}.$$

El cociente $k = \gamma/V$ se llama la *constante de eliminación* del medicamento, y se mide en 1/h.

El producto $\gamma = kV$ se llama *constante de aclaramiento*.

Por tanto queda la EDO

$$M'(t) = -kM(t)$$

que es lineal, homogénea, con coeficientes constantes (ya la hemos visto).

La solución general es $M(t) = \text{cte.}e^{-kt}$ y tomando $t = 0$ queda

$$M(t) = M_0 e^{-kt},$$

que es el modelo de decaimiento exponencial que ya conocemos. Dividiendo todo por V , obtenemos la concentración,

$$C(t) = C_0 e^{-kt}.$$

medicamento	k	$t_{1/2}$
Acetaminofeno (Paracetamol)	0.277	2.50
Diazepam (Valium)	0.021	33
Digoxina	0.0161	43
Gentamicina	0.347	2
Lidocaína	0.39	1.8
Teofilina	0.126	5.5

Cuadro 8.1: Constante de eliminación k (en 1/h) y semivida $t_{1/2}$ (en h) de algunos medicamentos

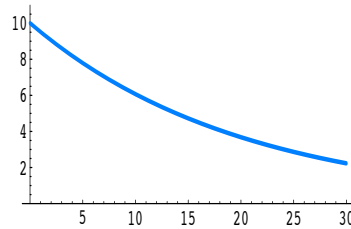


Figura 8.1: Concentración plasmática de un medicamento, $C_0 = 10$, $k = 0,05$, semivida 14.

Semivida Igual que en el decaimiento radioactivo, la semivida de un medicamento es el tiempo en que la concentración cae a la mitad. La fórmula es

$$t_{1/2} = \ln 2/k.$$

Puedes visitar la página web

<http://vam.anest.ufl.edu/demos/onecompbolus.html>

para una simulación de este modelo.

PROBLEMA Administramos un medicamento por vía intravenosa (semivida 20 min., volumen aparente de distribución $V = 15$ l.) ¿Cuál debe ser la cantidad de medicamento inyectada para que durante 8 horas la concentración plasmática sea superior a 20 microgramos/ml?

Estimación experimental de las constantes Para estimar la concentración inicial C_0 , el volumen de distribución V y la constante de eliminación k se procede como sigue.

Se toman dos muestras de sangre en los momentos t_1 y t_2 , obteniendo unas concentraciones C_1 y C_2 . Así tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} C_1 &= C_0 e^{-kt_1} \\ C_2 &= C_0 e^{-kt_2}. \end{aligned}$$

Para resolverlo se toman logaritmos, o se divide una ecuación por la otra.

Una vez conocida C_0 , de la fórmula $C_0 = M_0/V$ se deduce V , pues conocemos la cantidad de medicamento que hemos inyectado.

PROBLEMA Se administran 500 mg de un antibiótico por vía intravenosa. A las 6 horas la concentración plasmática es de 10 mg/l. Seis horas después vuelve a extraerse sangre y la concentración ha bajado a 4 mg/l. Calcular el volumen de distribución y la semi-vida.

8.2. Perfusión continua (*gota a gota*)

Tenemos un gotero, con una bolsa o botella que contiene un medicamento con una cierta concentración α (en mg/l). Regulamos el paso del gotero con una llave, para tener un caudal constante β (en l/h). El producto $k_0 = \alpha\beta$ es el *ritmo de perfusión*, que se mide en mg/h.

Modelo matemático Igual que antes, nuestro paciente tiene un volumen aparente de distribución V (en litros) y elimina medicamento con una constante de aclaramiento γ l/h (ambos desconocidos). El cociente $k = \gamma/V$ es la constante de eliminación del medicamento.

Para tener un modelo matemático, veamos cómo varía la cantidad total de medicamento $M = M(t)$ en un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$:

$$\Delta M = +\beta \times \Delta t \times \alpha - \gamma \times \Delta t \times C,$$

es decir

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = +k_0 - \gamma C$$

y al hacer el límite cuando $\Delta \rightarrow 0$,

$$M'(0) = k_0 - \gamma C(t) = k_0 - \gamma \frac{M(t)}{V} = k_0 - kM(t).$$

Esta EDO

$$M' + kM - k_0 = 0$$

es lineal, con coeficientes constantes, pero no es homogénea. La resolvemos (ya lo vimos) bien separando variables, bien trasladando la solución de la homogénea, y queda

$$M(t) = \text{cte} \cdot e^{-kt} + \frac{k_0}{k}$$

Fijémonos que esta vez al principio no había nada de medicamento en el organismo, y lo hemos ido dando lentamente, por tanto la condición inicial es $M(0) = 0$. Por eso, haciendo $t = 0$ obtenemos que la constante vale $-k_0/k$, y queda

$$M(t) = \frac{k_0}{k}(1 - e^{-kt}).$$

Dividiendo por V obtenemos la concentración,

$$C(t) = \frac{k_0}{kV}(1 - e^{-kt}).$$

Representación gráfica Ver figura 8.2. La función $C(t)$ es creciente, con la concavidad hacia abajo, sin puntos de inflexión, y tiene una asíntota horizontal, que es justamente el coeficiente

$$C_e = \frac{k_0}{kV}.$$

Se le llama la *concentración de equilibrio* (también se la denota por C_∞).

Tiempo necesario En la práctica clínica, se considera que la concentración se estabiliza indefinidamente una vez que se ha alcanzado el 99% de la concentración de equilibrio. Esto se consigue cuando han pasado aproximadamente *siete semi-vidas* (la semi-vida era $t_{1/2} = \ln 2/k$, este dato lo dan los laboratorios). En efecto,

$$0,99C_e = C_e(1 - e^{-kt})$$

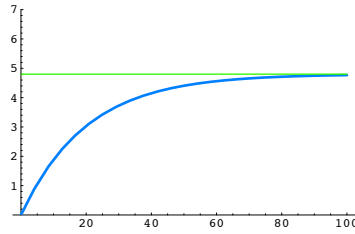


Figura 8.2: Perfusión continua de un medicamento, $k_0 = 12$, $k = 0,05$, semivida 14, $C_e = 4,8$.

significa que

$$e^{-kt} = 0,01$$

luego $t = -\ln 0,01/k$. Como $k = \ln 2/t_{1/2}$ queda

$$t = \frac{-\ln 0,01}{\ln 2} t_{1/2} \cong 6,64 t_{1/2}.$$

PROBLEMA Es necesario administrar un medicamento por perfusión continua a un paciente con un volumen aparente de distribución de 15 litros. La constante de eliminación del medicamento es $0,23 \text{ h}^{-1}$. Calcúlese la velocidad de perfusión k_0 necesaria para alcanzar una concentración en estado de equilibrio de 20 microgramos/ml.

8.3. Perfusión conjuntamente con i.v.

Para cubrir el intervalo en que no se alcanza todavía la concentración de equilibrio suele administrarse simultáneamente con la perfusión una inyección intravenosa que tenga C_e como concentración inicial. En ese caso la suma de la concentración de perfusión $C_e(1 - e^{-kt})$ y la concentración de la i.v. $C_e e^{-kt}$ es exactamente C_e , por lo que se consigue la concentración de equilibrio desde el primer momento.

Como $C_e = k_0/kV$ y la concentración inicial es M_0/V , la cantidad de medicamento que debemos inyectar es

$$M_0 = k_0/k.$$

8.4. Inyección intramuscular / Ingesta oral *

En este modelo administramos de una sola vez una cierta cantidad M^0 (en mg) de medicamento. Éste se distribuye instantáneamente sólo en una determinada *zona de absorción* (por ejemplo la nalga o el estómago) y desde ahí va difundándose lentamente al resto del organismo.

Modelo matemático Llamemos $M_a = M_a(t)$ a la cantidad de medicamento en la zona de absorción. Tenemos $M_a(0) = M^0$. Llamemos V_a al volumen de distribución de la zona de absorción, y $C_a = M_a/V_a$ a la concentración en esa zona. Sea δ al caudal (en l/h) con que el medicamento diluido va pasando al organismo. En la zona de absorción tenemos entonces el modelo de decaimiento exponencial, es decir

$$C_a(t) = C^0 e^{-k_a t}, \quad (8.1)$$

donde la concentración inicial $C_a(0)$ en esa zona es

$$C^0 = M^0/V_a. \quad (8.2)$$

y $k_a = \delta/V_a$ no es la constante de eliminación en el organismo, sino sólo en la zona de absorción (habitualmente k_a es mucho mayor que k).

Llamemos $M = M(t)$ a la cantidad de medicamento en el organismo, y veamos cómo varía en un pequeño intervalo de tiempo. Si llamamos γ (en l/h) al caudal con que se excreta del organismo, tenemos

$$\Delta M = +\delta \times \Delta t \times C_a - \gamma \times \Delta t \times C,$$

donde C es la concentración en el organismo y C_a la concentración en la zona de absorción. Entonces

$$M'(t) = \delta C_a(t) - \gamma \frac{M(t)}{V}$$

donde V es el volumen aparente de distribución del medicamento en el organismo. Por tanto, aplicando las fórmulas (8.1) y (8.2) queda

$$M'(t) = \delta \frac{M^0}{V_a} e^{-k_a t} - kM(t),$$

y finalmente

$$M' = k_a M^0 e^{-k_a t} - kM.$$

Es una EDO lineal, no homogénea y con coeficientes no constantes.

Resolución de la ecuación* Para resolver como sabemos

$$M' + kM - k_a M^0 e^{-k_a t} = 0$$

llamamos $M = uv$ y resolvemos primero $u' + ku = 0$, para lo que nos vale

$$u(t) = e^{-kt}.$$

Nos queda entonces

$$e^{-kt}v' - k_a M^0 e^{-k_a t} = 0$$

que convertimos en

$$v' = +k_a M^0 e^{-k_a t} e^{+kt} = k_a M_0 e^{(k-k_a)t}.$$

Al integrar,

$$v = \frac{k_a M^0}{k - k_a} e^{(k-k_a)t} + \text{cte.}$$

Entonces

$$M = uv = e^{-kt} \left[\frac{k_a M^0}{k - k_a} e^{(k-k_a)t} + \text{cte.} \right]. \quad (8.3)$$

Para determinar la constante, hacemos $t = 0$, luego

$$0 = \frac{k_a M^0}{k - k_a} + \text{cte.}$$

porque inicialmente no hay medicamento *en el organismo*. Sustituyendo y sacando factor común en (8.3) queda

$$M(t) = e^{-kt} \frac{k_a M^0}{k - k_a} [e^{(k-k_a)t} - 1] = \frac{k_a M^0}{k - k_a} [e^{-k_a t} - e^{-kt}].$$

Para tener la concentración, dividimos por V ,

$$C(t) = \frac{k_a M^0}{(k - k_a)V} [e^{-k_a t} - e^{-kt}]. \quad (8.4)$$

Nótese que M^0 es la cantidad inyectada, V es el volumen de distribución en el organismo, pero C_0 (concentración inicial en el organismo) es *cero*, no M^0/V .

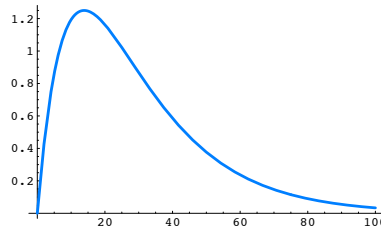


Figura 8.3: Inyección intramuscular de un medicamento, $k_a = 0,1$, $k = 0,05$, $M_0 = 100$, $V = 20$.

Representación gráfica Puede verse (figura 8.3) que hay una *fase de absorción* y después una *fase de eliminación*.

Al derivar (8.4) e igualar $C'(t) = 0$ obtenemos que hay un máximo en el punto

$$t = \frac{\ln(k_a/k)}{k_a - k}.$$

La función tiene una asíntota horizontal $C = 0$.

8.5. Inyecciones intravenosas periódicas

Supongamos que inyectamos cada cierto tiempo P una cantidad M_0 de medicamento por vía intravenosa. En el intervalo $[0, P]$ la concentración plasmática decae exponencialmente desde C_0 hasta un mínimo final

$$m_1 = C_0 e^{-kP}.$$

Al poner la segunda inyección, la concentración sube instantáneamente a

$$M_2 = m_1 + C_0,$$

pues añadimos M_0 a la cantidad de medicamento que aún queda en el organismo. Ésta va a ser la concentración inicial del segundo período $[P, 2P]$. Al final de este intervalo la concentración cae hasta

$$m_2 = M_2 e^{-kP}$$

y con la inyección va a saltar de nuevo, esta vez hasta

$$M_3 = m_2 + C_0.$$

Para simplificar llamemos $r = e^{-kP}$. Entonces

$$M_2 = m_1 + C_0 = C_0r + C_0 = C_0(1 + r).$$

Análogamente

$$\begin{aligned} M_3 &= C_0(1 + r + r^2) \\ M_4 &= C_0(1 + r + r^2 + r^3) \\ &\dots \end{aligned}$$

En cuanto a las concentraciones finales de cada período, son las iniciales multiplicadas por r , es decir

$$\begin{aligned} m_1 &= C_0r, \\ m_2 &= C_0(r + r^2) \\ m_3 &= C_0(r + r^2 + r^3) \\ &\dots \end{aligned}$$

Vemos entonces que los picos máximos se van acercando a una concentración de equilibrio

$$M_e = C_0(1 + r + r^2 + \dots)$$

y los mínimos a

$$m_e = M_e r = C_0(r + r^2 + \dots) = M_e - C_0.$$

Como la serie de la suma geométrica de razón $0 < r < 1$ es

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1 - r},$$

obtenemos

$$M_e = C_0 \frac{1}{1 - e^{-kP}}$$

mientras que

$$m_e = C_0 \frac{e^{-kP}}{1 - e^{-kP}}.$$

Multiplicando numerador y denominador por e^{-kP} se tiene también

$$M_e = \frac{C_0 e^{kP}}{e^{kP} - 1}$$

mientras que

$$m_e = \frac{C_0}{e^{kP} - 1}.$$

A largo plazo la concentración $C(t)$ se va a mantener oscilando en esa franja $[m_e, M_e]$ de ancho C_0 (ver figura 8.4).

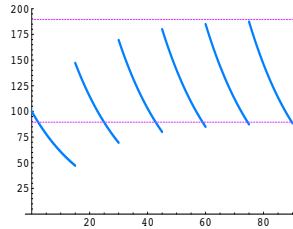


Figura 8.4: i.v. repetidas con período $P = 15$

PROBLEMA Inyectamos cada 8 horas por vía intravenosa 100 mg. de un medicamento que tiene una constante de eliminación $k = 0,02 \text{ h}^{-1}$. Si el volumen de distribución es $V = 20$ litros ¿entre qué valores oscilará la concentración de equilibrio?

SOL: 23,8 y 28,8 mg/l.

PROBLEMA Las concentraciones de equilibrio máxima (M_e) y mínima (m_e) dependen del período P . Probar que cuando P es muy grande, esas concentraciones tienden a ser C_0 y 0 respectivamente. Probar que lo mismo ocurre cuando P es muy pequeño.

Capítulo 9

Estadística

1

Para determinar experimentalmente las constantes que aparecen en los modelos matemáticos que hemos visto, debemos estar seguros de qué tipo de datos manejamos, y cuál es su precisión. Por otra parte, al no ser exactas las mediciones debemos poder «estimar» las constantes a partir de datos que contienen fluctuaciones aleatorias.

9.1. Análisis de datos

Tipos de datos* Al medir asociamos a cada magnitud un número. Según el tipo de escala que usemos estarán permitidas ciertas operaciones y otras no. Hay cuatro tipos de datos o escalas (cada una es más amplia que la siguiente):

- **Datos nominales.** Son meras etiquetas para distinguir unos datos de otros. Por ejemplo, si estamos estudiando la variable «sexo», podemos asignar a las mujeres un 1 y a los hombres un 0. La única operación permitida es calcular los porcentajes o frecuencias para cada clase (pero no tiene sentido, por ejemplo, hablar del sexo medio).
- **Escalas ordinales** No sólo distinguimos los datos sino que les asignamos un orden. Sin embargo las diferencias entre los grados de la escala

¹v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh. Los comentarios biográficos están adaptados en su mayor parte de *MacTutor History of Mathematics archive*: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>.

no tienen ningún significado.

Por ejemplo, a los tres primeros equipos A,B,C de la clasificación de la liga de fútbol podemos asignarles los números 1, 2 y 3. Esto indica el orden entre ellos. Pero la diferencia de puntos entre A y B no tiene por qué ser la misma que entre B y C; en otras palabras podríamos haberles asignado los números 1, 10 y 100. Para este tipo de datos puede calcularse la mediana y los percentiles, pero no tiene sentido calcular la media aritmética. Por el mismo motivo en ocasiones se prefiere que las notas de un examen estén dadas con letras o palabras (por ejemplo notable, aprobado, suspenso) y no con una escala numérica.

- **Escalas de intervalo** Son los datos que encontraremos usualmente en el laboratorio, y podemos hacer cualquier cálculo con ellos (media, varianza, etc.). Por ejemplo la temperatura medida en $^{\circ}\text{C}$, la antigüedad medida en a.d.C. Sin embargo, en estas escalas no tiene significado físico la proporción o razón entre grados de la escala: un objeto del año 1000 no es el «doble de antiguo» que uno del año 2000, ni una temperatura de 20°C indica que haya el «doble de calor» que en una de 10°C (esto se entiende perfectamente al ver que si pasamos a grados Kelvin ya no se guarda la proporción, pues 293°K no es el doble de 283°K).
- **Escalas de razón** Son de intervalo, y además tienen un cero absoluto, con significado físico. Por ejemplo: la altura en cm, el peso en kg, la temperatura en $^{\circ}\text{K}$. Ahora sí que un objeto de 2 metros es el doble de largo que uno de 1 metro.

Precisión de los datos Si decimos que un objeto tiene una masa de 10 gramos, estamos indicando que la balanza que hemos usado para medir estaba graduada en gramos, y que hemos observado que el resultado estaba más cerca de 10 que de 9 o que 11, sin poder precisar más. Por tanto en realidad la masa del objeto puede ser cualquiera entre 9,5 y 10,5. En otras palabras, nuestro 10 significa en realidad $10 \pm 0,5$.

Si en cambio decimos que la masa es 10,0 gramos es que hemos usado una balanza donde aparecían marcas para los decigramos, y hemos observado que el resultado estaba más cerca de 10,0 que de la marca anterior (9,9) o de la siguiente (10,1). Por tanto en realidad la masa puede ser cualquiera comprendida entre 9,95 y 10,05. En otras palabras, 10,0 significa $10,0 \pm 0,05$.

Estos errores en las mediciones, debidos a la sensibilidad e imprecisiones de los instrumentos, así como los redondeos que realicemos, y los errores sistemáticos o accidentales que podamos cometer, se van propagando y creciendo a medida que hacemos operaciones, y pueden dar lugar a resultados completamente falsos.

9.2. Estadística descriptiva

Para resumir los datos de que dispongamos usaremos varios tipos de descriptores. Nos indican dónde están concentrados nuestros datos (dándonos una idea de su orden de magnitud) y de cómo se distribuyen (si lo hacen de forma simétrica, si están muy agrupados o dispersos).

9.2.1. Medidas de tendencia central

Indican dónde están centrados los datos.

Moda*

Para cualquier tipo de datos. Se define como *el valor más frecuente*.

Ejemplo En una clase utilizamos la siguiente escala (nominal) para determinar la procedencia de los alumnos:

1=A Coruña, 2=Lugo, 3=Ourense, 4= Pontevedra, 5=otra.

Los porcentajes son respectivamente 38 %, 7 %, 15 %, 30 % y 10 %. Entonces la moda es 1.

Mediana

Para datos de tipo ordinal. Una vez ordenados los datos, la *mediana* o valor central es la puntuación que los divide por la mitad.

Ejemplo Un corredor de «fórmula 1» ha disputado diez grandes premios y ha quedado en los puestos:

$$\text{pos} = 1, 1, 3, 1, 5, 2, 3, 4, 1, 8. \quad (9.1)$$

Entonces por término medio ha quedado en el puesto 2–3. Para ello basta ordenar los datos y observar cuál (o cuáles) está en la posición central. En este caso se toma como mediana $Md = 2,5$.

Media

La *media aritmética* puede usarse para datos medidos en una escala de intervalo (o de razón, que es un caso particular), pero no en datos que sean sólo ordinales. Para datos $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ la fórmula es

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

que abreviaremos como

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

o simplemente

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n}.$$

Hay otros tipos de medias (armónica, geométrica) que no veremos.

9.2.2. Medidas de posición

Dan una idea de la forma en que se distribuyen los datos.

Cuartiles

Para datos ordenados, son las puntuaciones Q_1, Q_2, Q_3 que los dividen en cuartas partes. El segundo cuartil es la mediana.

Ejemplo Las notas (ordenadas) de una clase han sido

$$1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 10.$$

La puntuación central (la mediana) es $Q_2 = 4$. El primer cuartil es la mediana de la mitad izquierda

$$1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4$$

es decir $Q_1 = 3$. Análogamente $Q_3 = 7$.

Percentiles*

Esta vez dividimos la distribución en 100 partes iguales. La mediana es P_{50} . Los otros cuartiles son $Q_1 = P_{25}$ y $Q_3 = P_{75}$.

Ejemplo El tercer cuartil de las posiciones **pos** en las carreras de coches de (9.1) es 4. El percentil P_{60} es 3.

Ejemplo Diagramas de pesos para niños (cartilla de salud infantil).

9.2.3. Medidas de dispersión

Nos indican si los datos están dispersos o concentrados alrededor del valor central.

Rango*

La diferencia entre los dos valores extremos. Para el ejemplo **pos** en (9.1) el rango es $8 - 1 = 7$.

Amplitud intercuartil

La diferencia entre Q_3 y Q_1 . Para las posiciones **pos** en (9.1) vale $4 - 1 = 3$.

Desviación mediana*

Se toman las desviaciones $|X - Md|$ en valor absoluto respecto de la mediana, se ordenan y se calcula su mediana (=valor central).

Ejemplo Para los datos **pos** en (9.1) la mediana era $Md = 2,5$. Las desviaciones (ya ordenadas) son

$$0.5, 0.5, 0.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 2.5, 5.5,$$

cuyo valor central es 1,5.

9.2.4. Varianza y Desviación típica

Para escalas de intervalo, además de los anteriores, pueden calcularse los siguientes índices de dispersión o variabilidad.

Varianza

Es una medida de dispersión inspirada en la fórmula de la distancia entre dos puntos. Para datos $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ se calculan primero las desviaciones respecto de la media

$$x = X - \bar{X}$$

y luego se hace

$$s_X^2 = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n}. \quad (9.2)$$

En la práctica se usa una fórmula diferente, aunque equivalente:

$$s_X^2 = \frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2,$$

que se lee: media de los cuadrados menos cuadrado de la media.

Desviación típica

La raíz cuadrada de la varianza se llama **desviación típica** y se denota por s_X (sin el cuadrado).

Ejemplo Las concentraciones de un medicamento en cinco muestras de tejido han sido $X : 50, 60, 54, 62, 48$. La media es $\bar{X} = 274/5 = 54,8$. La varianza es $s_X^2 = 186/5 = 37,2$ y la desviación típica es $s_X = \sqrt{37,2} = 6,1$.

Propiedades Del examen de la fórmula (9.2) se sigue que la desviación típica y la varianza no pueden ser negativas; y que sólo son cero si todas las desviaciones $x = X - \bar{X}$ son cero, es decir si todos los datos son iguales a la media y por tanto iguales entre sí.

Disposición de los cálculos Hemos obtenido las siguientes medidas de concentración (mg/l):

$$X : 93, 95, 97, 99.$$

Los datos se disponen como en el cuadro 9.1, y se introducen en la calculadora para obtener las sumas totales.

Entonces la media es

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{384}{4} = 96,$$

X	X^2
93	8649
95	
97	
99	
384	36884

Cuadro 9.1: Disposición de los cálculos de la media y la varianza

la varianza es

$$s_X^2 = \frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2 = \frac{36884}{4} - (96)^2 = 5$$

y la desviación típica es

$$s_X = \sqrt{5} \cong 2,24.$$

Datos con repeticiones* Es usual que cada dato aparezca repetido varias veces. Por ejemplo

$X : 93, 95, 97, 93, 99, 95, 99, 93, 95, 93, 95, 93, 93, 97, 97, 97.$

En este caso anotamos la frecuencia f con que aparece cada dato.

X	f	fX	X^2	fX^2
93	5	465	8649	43245
95	3			
97	4			
99	2			
	16	1524		145232

Cuadro 9.2: Datos con repeticiones

Las fórmulas de la media y la varianza, teniendo en cuenta las repeticiones, son

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{n} = \frac{1524}{16} = 95,25$$

y

$$s_X^2 = \frac{\sum fX^2}{n} - (\bar{X})^2 = \frac{145232}{16} - (95,25)^2 = 4,7333$$

que se calculan siguiendo el modelo del cuadro 9.2. La desviación típica es

$$s_X = \sqrt{4,7333} = 2,18.$$

Covarianza La covarianza de dos variables X, Y se define como

$$s_{XY} = \frac{\sum xy}{n} = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n}.$$

En la práctica se usa esta otra fórmula equivalente:

$$S_{XY} = \frac{\sum XY}{n} - (\bar{X})(\bar{Y}),$$

que se lee: media de los productos menos producto de las medias.

Nota: La covarianza de una variable consigo misma es la varianza:

$$S_{XX} = \frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2 = s_X^2.$$

Nota: Hay que tener cuidado en no confundir $\sum X^2$ (suma de cuadrados) con $(\sum X)^2$ (cuadrado de la suma), ni $\sum XY$ (suma de productos) con $(\sum X)(\sum Y)$ (producto de las sumas).

9.2.5. Transformación de datos

Si tenemos unos datos X con media \bar{X} y varianza s_X^2 , en ocasiones será necesario transformarlos (por ejemplo para cambiar de unidades o de escala). Sean

$$Y = bX + a$$

los datos transformados. Entonces se tiene:

- La media se transforma igual que los datos,

$$\bar{Y} = b\bar{X} + a;$$

- La varianza sólo cambia de escala, pero no le influye el desplazamiento a (pues es una medida de dispersión). La fórmula precisa es

$$s_Y^2 = b^2 s_X^2.$$

- Para la desviación típica, al hacer la raíz cuadrada queda

$$s_Y = |b|s_X;$$

recordemos que no puede ser negativa, por eso aparece el valor absoluto.

Ejemplo Las siguientes temperaturas en grados Celsius

$$X : 22, 30, 26, 29, 22, 29, 23, 27, 29, 27, 29, 29, 21.$$

tienen media

$$\bar{X} = 26,38$$

y desviación típica

$$s_X = 3,25.$$

Al pasarlas a grados Fahrenheit,

$$Y = \frac{9}{5}X + 32$$

tenemos los nuevos datos

$$Y : 71,6; 86,0; 78,8; 84,2; 71,6; 84,2; 73,4; 80,6; 84,2; 80,6; 84,2; 84,2; 69,8.$$

Podemos comprobar que

$$\bar{Y} = (9/5)\bar{X} + 32 = 47,49$$

y

$$S_Y = (9/5)S_X = 5,86.$$

9.3. Regresión y correlación

9.3.1. Regresión lineal

Hemos recolectado los siguientes datos correspondientes a tiempo transcurrido (s) y velocidad de caída (m/s) de un objeto:

t	1	2	3	4	5
v	20.52	29.14	36.76	47.80	58.72

Cuadro 9.3: Velocidad de caída de un objeto

Si los representamos gráficamente (cuadro 9.3) veremos que la «nube de puntos» (diagrama de dispersión) está prácticamente alineada, lo que sugiere que existe una relación del tipo $v = bt + a$ entre las dos variables, y que las discrepancias se deben a errores de precisión.

El problema matemático será determinar la recta «que más se parece» a los datos.

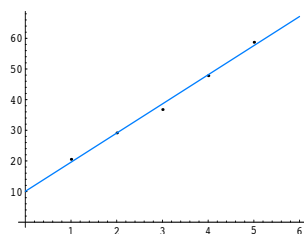


Figura 9.1: Tiempos (s) y velocidades de caída (m/s) de un objeto

9.3.2. Recta de regresión

Si tenemos unas observaciones

$$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$$

de dos variables X e Y , queremos encontrar una relación del tipo

$$Y^* = bX + a.$$

Distinguimos Y^* (la estimación que vamos a hacer teóricamente) de Y (el valor que hemos obtenido experimentalmente). Llamaremos errores de estimación (o «valores residuales») a las diferencias

$$e = Y - Y^*.$$

Queremos encontrar una recta («recta de regresión») que cumpla las siguientes condiciones:

- La media de los errores es cero, $\bar{e} = 0$. Esto quiere decir que unos errores se compensan con otros.
- La varianza s_e^2 de los errores es mínima. Esto quiere decir que los errores están lo más concentrados posible.

Con las dos condiciones anteriores, la *recta de regresión* existe y es única, como se comprueba usando el llamado método de mínimos cuadrados (ver más adelante).

Se obtienen las siguientes fórmulas:

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2}$$

donde s_{XY} es la covarianza.

Nota: La fórmula para a significa que la recta de ajuste siempre pasa por el punto (\bar{X}, \bar{Y}) . Entonces la ecuación de la recta puede escribirse también como

$$(Y^* - \bar{Y}) = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(X - \bar{X}).$$

Nota: En general no se puede conseguir que $s_e^2 = 0$, pues ésto significaría que todos los errores son iguales entre sí e iguales a la media $\bar{e} = 0$, es decir que todos los $e = 0$, lo que sólo es cierto si los puntos de los datos están perfectamente alineados.

Mínimos cuadrados* Veamos cómo se obtienen las fórmulas de la regresión. Como $Y = Y^* + e$, al calcular las medias se obtiene que $\bar{Y}^* = \bar{Y}$, pues la media de los errores es cero.

Ahora la varianza de los errores es

$$s_e^2 = \frac{\sum e^2}{n}$$

y vamos a buscarle un mínimo absoluto al variar b . Como, usando la fórmula de a , es

$$e = Y - Y^* = Y - (bX + a) = (Y - \bar{Y}) - b(X - \bar{X}) = y - bx,$$

tenemos

$$e^2 = (y - bx)^2 = y^2 - 2bxy + b^2x^2$$

luego

$$s_e^2 = \frac{1}{n}(\sum y^2 - 2b \sum xy + b^2 \sum x^2) = s_y^2 - 2bs_{xy} + b^2s_x^2$$

y al derivar queda

$$\frac{ds_e^2}{db} = -2s_{xy} + 2bs_x^2.$$

Al igualar a cero, $0 = -s_{xy} + bs_x^2$, luego

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}.$$

Como las puntuaciones desviadas $x = X - \bar{X}$ y las directas X se distinguen sólo en una constante, tienen la misma varianza, $s_x^2 = s_X^2$. Análogamente $s_{xy} = s_{XY}$. Nótese que es un mínimo, porque la derivada segunda de s_e^2 es $2s_x^2 > 0$.

Disposición de los cálculos Retomemos los datos de velocidades y tiempos del cuadro 9.3. Los datos se disponen como en el cuadro 9.4 y se introducen en la calculadora para obtener las sumas totales. Entonces

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{15}{5} = 3,$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{192,94}{5} = 38,59,$$

$X = t$	$Y = v$	X^2	XY	Y^2
1	20.52	1	20.52	
2	29.14	4	58.28	
3	36.76			
4	47.80			
5	58.72			
15	192.94	55	673.88	8354.39

Cuadro 9.4: Disposición de los cálculos para la regresión

$$s_X^2 = \frac{\sum X^2}{n} - (\bar{X})^2 = \frac{55}{5} - (3)^2 = 2,$$

$$s_{XY} = \frac{\sum XY}{n} - (\bar{X})(\bar{Y}) = \frac{673,88}{5} - (3)(38,59) = 19,01.$$

Obtenemos

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{18,41}{2} = 9,51$$

y

$$a = \bar{Y} - b\bar{X} = 38,59 - 9,51 \times 3 = 10,07.$$

con lo que la ecuación de la regresión de v sobre t es

$$v^* = 9,51t + 10,07.$$

Estimación Podemos comparar los valores estimados por esta fórmula con los valores experimentales v de la velocidad: por ejemplo si $t = 3$, $v^* = 38,6$ aunque $v = 36,76$.

También podemos estimar que al cabo de $t = 10$ segundos la velocidad de caída será $v^* \cong 105,17$.

Nota: Deben explicitarse siempre todas las fórmulas para detectar más fácilmente posibles errores.

9.3.3. Coeficiente de correlación

El *coeficiente de correlación de Pearson* viene dado por la fórmula

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}.$$

Es un indicador de si el ajuste lineal que hemos realizado es bueno o malo. Su cuadrado r^2 se llama *coeficiente de determinación*.

Propiedades

- El coeficiente de correlación r tiene el mismo signo que b , porque

$$r = b \frac{s_X}{s_Y}; \quad (9.3)$$

- $0 \leq r^2 \leq 1$ y por tanto $-1 \leq r \leq +1$;

Interpretación Cuando $r = \pm 1$ la varianza de los errores es nula, lo que quiere decir que nuestros datos se ajustan perfectamente a la recta. Como el signo de r es el mismo que el de b , una $r = +1$ quiere decir que el ajuste es perfecto y positivo (al crecer X crece Y), mientras que si $r = -1$ el ajuste es perfecto pero $b < 0$, es decir al crecer X disminuye Y .

Una $r \sim 0$ significa que el ajuste es malo.

Justificación* Veamos por qué es cierta esa interpretación del coeficiente de correlación r .

Ya vimos que la varianza de los errores de estimación $e = Y - Y^*$ es

$$s_e^2 = s_Y^2 - 2bs_{XY} + b^2s_X^2.$$

Como, por la fórmula de b , es $s_{XY} = bs_X^2$ queda

$$s_e^2 = s_Y^2 - b^2s_X^2.$$

Y por la relación entre r y b finalmente tenemos

$$s_e^2 = (1 - r^2)s_Y^2.$$

Por tanto cuando $r^2 = 1$ no hay errores.

Varianza explicada* Hay otra interpretación análoga. Por la fórmula de transformación de datos, bs_X es la desviación típica de $Y^* = bX + a$, luego

$$s_e^2 = s_Y^2 - s_{Y^*}^2.$$

Esto se interpreta así: la variabilidad

$$s_Y^2 = s_{Y^*}^2 + s_e^2$$

de la *variable dependiente* Y tiene dos partes. Una es la variabilidad de las estimaciones Y^* , que se deducen directamente de la variable independiente X por la fórmula de regresión (esta parte se llama variabilidad «explicada»). La otra parte es la variabilidad debida a los errores de estimación, que no controlamos. Por tanto el ajuste es mejor o peor según sea la proporción $s_{Y^*}^2/s_Y^2$ entre la varianza explicada y la varianza total. Pero por la relación entre r y b de la fórmula (9.3) tenemos que esa proporción es r^2 , el coeficiente de determinación, porque:

$$\frac{s_{Y^*}^2}{s_Y^2} = \frac{b^2 s_X^2}{s_Y^2} = r^2.$$

Por eso $r = \pm 1$ (es decir $r^2 = 1$) significa que el ajuste es perfecto, pues el 100% de la varianza estaría explicada por la regresión y no habría errores de estimación.

Por otro lado, una r próxima a cero indica un ajuste malo.

Nota*: En la práctica se considera que un coeficiente de correlación es nulo si se cumple que

$$\frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

está por debajo del valor t de la siguiente tabla (n es el número de pares de observaciones):

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	9.92	5.84	4.60	4.03	3.71	3.50	3.36	3.25	3.17

Cuadro 9.5: Valores t_{n-2} para un nivel de confianza del 99%

X	1.70	1.60	1.64	1.68	1.60	1.65	1.72	1.69	1.68	1.71
Y	74	51	47	64	61	48	55	56	63	75

Cuadro 9.6

Ejemplo La tabla 9.6 contiene alturas X (en cm) y pesos Y (en kg) de diez personas:

Calculamos $b = 116,3$ y $a = -135,5$. Sin embargo el coeficiente de correlación de Pearson vale $r = 0,51$, es decir el ajuste es bastante malo. La razón es que la relación entre alturas y pesos es *cuadrática* (una parábola) en vez de lineal.

IMC* El índice de masa corporal es el cociente Y/X^2 entre el peso Y (en kg) y el cuadrado de la altura X (en m). Se considera que este índice debe estar comprendido entre 20 y 25 para un adulto joven. Por debajo de 18 hay desnutrición y por encima de 25 se habla de sobrepeso. A partir de 30 es obesidad leve, y por encima de 40 obesidad mórbida.

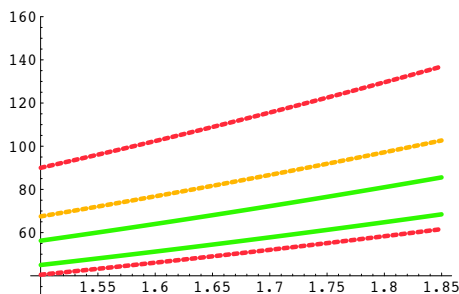


Figura 9.2: Índices de masa corporal para un adulto de 20 a 30 años: imc adecuado en verde (20–25). Para otras edades, añadir un punto al índice por cada diez años

9.3.4. Ajuste potencial (*regresión doble-log*)*

Es un ajuste del tipo $P^* = \alpha A^\beta$. Se convierte en lineal tomando logaritmos,

$$\ln P^* = \beta \ln A + \ln \alpha.$$

Por tanto haremos un ajuste lineal entre $X = \ln A$ e $Y = \ln P$. Los parámetros de la regresión serán $b = \beta$ y $a = \ln \alpha$, es decir $\alpha = e^a$.

Ejemplo Para A altura (en m) y P peso (en kg) según el cuadro 9.6 obtenemos $b = 2,01531$, $a = 3,07709$, luego $\beta = b \cong 2$ y $\alpha = e^{3,07709} \cong 22$. Los cálculos se detallan en la tabla 9.7.

A	P	$X = \ln A$	$Y = \ln P$	X^2	XY
1.70	64	0.530628	4.17439	0.281566	2.21505
1.60	55	0.470004	4.14313		
1.64	60	0.494696	4.15888		
1.68	64	0.518794	4.17439		
1.60	55	0.470004	4.07754		
1.65	59	0.500775	4.00733		
1.72	65	0.542324	4.15888		
1.69	64	0.524729	4.09434		
1.68	63	0.518794	4.00733		
1.71	65	0.536493	4.15888		
		5.10724	41.1551	2.61445	21.0227

Cuadro 9.7: Disposición de los cálculos para un ajuste potencial

En resumen nuestros datos se ajustan a la curva $P^* = 22A^2$. Por ejemplo, con nuestros datos, para una persona de altura $A = 1,72$ m estimaríamos un peso de $P^* = 65$ kg.

9.3.5. Ajuste exponencial

Al poner una inyección intravenosa, el modelo teórico es $C = C_0 e^{-kt}$. Pero desconocemos la concentración inicial C_0 (porque no sabemos el volumen de distribución). También queremos estimar la constante de eliminación k (y por tanto la semivida). Sabemos que es posible conocer C_0 y k si disponemos de dos medidas experimentales *exactas*. Pero en la práctica sólo tendremos varias medidas aproximadas y debemos estimar la curva exponencial

$$C^* = C_0 e^{-kt}$$

que mejor se ajusta a nuestros datos.

Tomando logaritmos

$$\ln C^* = -kt + \ln C_0$$

lo convertimos en un ajuste lineal con $X = t$, $Y = \ln C$. De los parámetros de la regresión $b = -k$ y $a = \ln C_0$ deducimos

$$k = -b$$

y

$$C_0 = e^a.$$

Ejemplo Inyectamos por i.v. $M_0 = 125$ mg de un medicamento. Tenemos las siguientes concentraciones plasmáticas a medida que pasa el tiempo (cuadro 9.8):

$X = t$	C	$Y = \ln C$	X^2	XY
1	5.0	1.6094	1	
2	3.0	1.0986	4	
3	2.0	0.6931	9	
4	1.5	0.4055	16	
10		3.8067	30	7.5080

Cuadro 9.8: Tiempos (h) y concentraciones (mg/l) tras una i.v.

Obtenemos $b = -0,40$ y $a = 1,96$, por tanto $k = 0,40$ y $C_0 = e^{1,96} \cong 7,1$.

Papel semi-logarítmico* Si representamos tiempos y concentraciones en un papel «semi-logarítmico» como el de la figura 9.3 ya se obtiene directamente la representación lineal (pues en el eje vertical están marcados en realidad los logaritmos de las concentraciones. Con una regla puede obtenerse aproximadamente la recta de ajuste, y sobre el mismo papel estimar C_0 (ordenada en el origen) y k (la pendiente cambiada de signo).

En la página web <http://incompetech.com/beta/plainGraphPaper> tienes la posibilidad de generar e imprimir todo tipo de papel técnico.

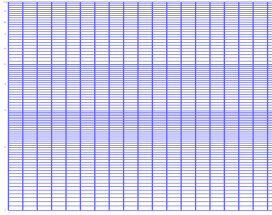


Figura 9.3: Papel semilogarítmico

Otros logaritmos* Para cualquier número $x > 0$ se tiene

$$\ln x \cong 2,30 \log x$$

donde aparece la constante

$$\ln 10 = 2,30259 \dots$$

Por eso, si en el ajuste exponencial usásemos logaritmos decimales (\log) en vez de logaritmos neperianos (\ln), tendríamos

$$\log C^* = -kt \log e + \log C_0$$

y al hacer un ajuste lineal con $X = t$, $Y = \log C$ obtendremos unos parámetros de regresión $b_L = -2,30k$ y $a_L = \log C_0$, es decir

$$k = \frac{-b_L}{2,30}$$

y

$$C_0 = 10^{a_L}.$$

Análogamente procederíamos en el ajuste potencial o cuando usemos papel semilogarítmico.

Carl F. Gauß (1777–1855) Gauss es, con Arquímedes y Newton, uno de los mayores genios matemáticos de la historia. Estudió en Göttingen, y a los veinte años se hizo famoso por resolver un antiguo problema griego (la construcción con regla y compás del polígono regular de 17 lados). A lo largo de su vida trabajó en astronomía, geodesia, geometría (teoría de superficies), álgebra (teoría de números) y física (magnetismo, teoría del potencial).

Suyos son la curva «campana de Gauss» $y = e^{-x^2/2}$ y el método de los mínimos cuadrados, que inventó para estimar órbitas de planetas. A Gauss se le llama *princeps mathematicorum*, el príncipe de las Matemáticas.



Figura 9.4: K. F. Gauss

Capítulo 10

Apéndice: Manejo de la calculadora*

1

Hay tres tipos de calculadoras:

- aritméticas (para hacer cuentas sencillas: $+$, $-$, \times , $/$);
- **científicas**, que incluyen funciones (como \sin , \cos , \log , \exp), memorias y «modos»: por ejemplo **COMP** (cálculos), **SD** o **STAT** (estadística), **LR** o **REG** (regresión lineal, regresión);
- y las calculadoras programables.

Vamos a dar una idea general de cómo usar las calculadoras científicas, aunque las teclas concretas varían con cada modelo. Es indispensable **leer el manual**.

Modo aritmético Podemos borrar el último dato introducido (**C** *clear*) o todos (**AC** *all clear*). Normalmente hay al menos una memoria donde podemos introducir un primer dato (**Min**), lo que borra el contenido anterior; ir añadiendo más datos (**M+**) para irlos sumando; y leer el contenido de la memoria (**MR**).

¹Versión 8. v8©2006–2009 Enrique Macías Virgós. Hecho con TeXShop y Mathematica en un Macintosh.

Ejemplo Calcular $50.32 + 3.1 \times 2.8 = 59$. Si la calculadora tiene paréntesis, escribiremos $50.32 + (3.1 \times 2.8)$; si tiene pantalla gráfica bastará poner $50.32 + 3.1 \times 2.8$ pues respeta la prioridad en las operaciones. Con las memorias la secuencia es

50.32 Min 3.1 \times 2.8 M+ MR 59.

Modo estadístico Hay que activar el modo estadístico, que se localiza con la tecla **mode** o similar. Suele llamarse **SD** o **STAT**. Después es muy importante borrar la memoria estadística, que es diferente de la memoria usual, para eliminar datos que hayan podido quedar almacenados. Se consigue, según el modelo de calculadora, por ejemplo haciendo **CLR Sc1** o **SCL**.

Para introducir los datos se usa la tecla **DATA** o **DT**, en una secuencia del tipo

50 DT 60 DT 54 DT 62 DT 48 DT.

Ahora hay que comprobar el número de datos introducidos **n = 5** (está en el teclado o en **S-SUM**).

La calculadora nos proporcionará (bien directamente desde el teclado o a través de la pantalla gráfica en **S-SUM** o **S-VAR**) los valores de

$$\sum x, \sum x^2, \bar{x}, s_x.$$

Modo regresión lineal Se activa con **LR** o **REG**. En este modo es posible introducir simultáneamente dos variables X, Y en una secuencia del tipo

1 , 20.52 DT ... 5 , 58.72 DT

(la coma de separación depende de los modelos). La calculadora nos dará los datos de las dos variables (por ejemplo \bar{x} , s_x , \bar{y} y s_y), los datos conjuntos ($\sum XY$) y los parámetros de la regresión **b**, **a** y **r**

Calculadoras en red En caso desesperado, es posible conectarse con alguna calculadora en red, por ejemplo <http://www.mirror-service.org/sites/home.ubalt.edu/ntsbarsh/Business-stat/otherapplets/scientificCal.htm>

Karl Pearson (1857–1936) Karl Pearson era inglés. Estudió en Cambridge, Heidelberg y Berlín (no sólo Matemáticas sino también Derecho Romano o Literatura Alemana), y desde 1885 fue profesor de Matemática Aplicada en el University College de Londres. Se le considera el fundador de la estadística científica, por la que se interesó para estudiar las leyes de la evolución y la herencia.

La palabra «regresión» es del siglo XIX, cuando se notó que aunque los padres muy altos podían tener hijos altos, había una tendencia a «regresar» a la media.

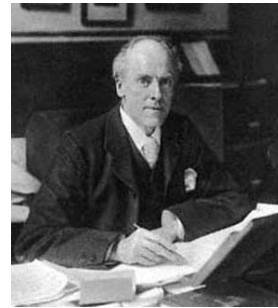


Figura 10.1: K. Pearson