FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O método de sub e sobresolucións para problemas diferenciais ordinarios

Santiago Rozas Trastoy

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O método de sub e sobresolucións para problemas diferenciais ordinarios

Santiago Rozas Trastoy

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: O método de sub e sobresolucións para problemas diferenciais ordinarios
Breve descrición do contido
Neste traballo estudarase o método das sub e sobresolucións, unha ferramenta clásica para probar a existencia de solución de problemas non lineais con condicións de fronteira. Esencialmente, o método funciona do seguinte xeito: a existencia dunha subsolución e dunha sobresolución do problema diferencial, ben ordenadas, implica a existencia dunha solución do problema localizada entre a subsolución e a sobresolución.

Índice xeral

Resumo

O obxectivo principal deste traballo será estudar o procedemento para atopar solucións dunha ecuación diferencial coñecido como método das sub e sobresolucións. Este método céntrase principalmente na obtención do que chamaremos sub e sobresolucións do problema para despois, grazas a diferentes resultados que presentaremos ao longo do traballo, poder afirmar que o problema orixinal posúe unha solución entre estas dúas funcións.

Primeiramente sentaremos as bases do método para despois xeneralizar as hipóteses utilizadas, por exemplo relaxando a suposición de continuidade. Enunciaremos tamén importantes propiedades que cumpren as solucións obtidas por este método. Finalmente botaremos un vistazo a outras formas de formular o problema, cambiando condicións de fronteira ou engadindo dependencia na derivada.

Abstract

The main goal of this work is to study the process of obtaining solutions of a differential equation known as the method of lower and upper solutions. This method is based on the idea of obtaining what is known as lower and upper solutions of the problem to then, thanks to the various results displayed along these pages, be able to ensure the existence of a solution for the original problem between these two functions.

Firstly we will establish the foundations of the method and then we will generalize the hypotheses used, for example relaxing the assumption of continuity. We will also set forth relevant properties that the obtained solutions will satisfy. Finally we will look into other ways of formulating our problem, changing some boundary value conditions or including dependency on the derivative.

Introdución

O problema de buscar solucións de ecuacións diferenciais pode ser, facilmente, unha das cuestións matemáticas con máis utilidade e máis estudadas ao longo da historia. Dentro dos numerosos procedementos que podemos utilizar atopamos o método das sub e sobre-solucións, no cal está centrado este traballo. Os primeiros pasos, no que repecta a este método, foron dados por Émilie Picard, tan cedo como 1893, que usando aproximacións sucesivas buscaba solucións do problema diferencial ordinario

$$\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0, \quad t \in [a,b], \\ u(a) = 0, \ u(b) = 0, \end{cases}$$

onde se asume que $u = 0$ é unha solución e que $f(t,\cdot)$ é crecente. Concretamente a idea era construír unha sucesión monótona de aproximacións $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que converxa a unha solución,

$$\alpha_0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots,$$

satisfacendo que $\alpha_0(t) > 0$ con $t \in (a,b)$ para evitar a solución trivial. Picard conseguiu probar a existencia dunha primeira aproximación positiva, α_0, tal que

$$\begin{cases} \alpha_0'' + f(t,\alpha_0) > 0, \quad t \in (a,b), \\ \alpha_0(a) = 0, \ \alpha_0(b) = 0. \end{cases}$$

Na actualidade esta función é a que chamamos subsolución, e o método empregado por Picard é o método iterativo monótono.

O primeiro gran avance veu da man do matemático Giuseppe Scorza quen, en 1931, chegou a probar a existencia dunha solución do problema de Dirichlet localizada entre α e β, funcións case equivalentes ás sub e sobresolucións utilizadas neste traballo. Este resultado é considerado como a base do método de sub e sobresolucións. Os seguintes avances neste tema veñen dados polo estudo de Michio Nagumo. Este demostrou a existencia de, polo menos, unha solución para o problema no que se introduce dependencia de f da derivada de u. Isto está intimamente relacionado co estudo da condición de Nagumo, iniciado por Serge Berstein, e finalizado polo matemático cuxo nome leva a condición. Máis tarde, e froito dos avances de Nagumo, Scorza consideraría o problema con dependencia da derivada onde só se pedía que f fose Carathéodory. Esta modificación será tratada na segunda sección do Capítulo 3 do noso traballo.

En relación coa busca de solucións maximais e minimais, tema que tratamos neste traballo, os primeiros avances foron feitos para ecuacións diferenciais ordinarias de primeiro grao por Giuseppe Peano e Oskar Perron considerando o problema de Cauchy. Máis tarde Perron publicou resultados similares para o problema de Laplace. Outros problemas, como o de condicións mixtas, tratado por Helmut Epheser, ou o de Neumann, foron estudados máis recentemene debido á súa maior complexidade.

Este traballo estará estruturado en catro capítulos diferentes. O primeiro trata os conceptos necesarios para poder abordar o traballo e os tres restantes están dedicados a explorar, cada vez con maior profundidade, o tema a tratar.

No primeiro capítulo comezaremos definindo os conceptos básicos relacionados con espazos de Banach, ata poder chegar a enunciar os dous teoremas máis relevantes, á hora de probar resultados, deste traballo. Seguidamente introduciremos a coñecida función de Green e enunciaremos un importante teorema que relaciona esta función coa solución do problema

$$\begin{cases} L_n u(t) = \sigma(t), \ t \in [a,b], \\ U_i(u) = 0, \qquad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

No segundo capítulo faremos unha primeira aproximación ao método, pedindo moita regularidade ás sub e sobresolucións e requirindo que a función f sexa continua. Comezaremos definindo as mencionadas sub e sobresolucións para despois presentar o principal resultado do traballo, o Teorema 2.2, que afirma a existencia de, polo menos, unha solución entre unha sub e unha sobresolución. Despois de ilustrar con detalle a demostración deste teorema introduciremos algúns exemplos sinxelos aplicando este resultado. Remataremos este segundo capítulo cunha breve, á vez que interesante, observación e un corolario que aplicaremos nun exemplo.

Continuaremos co estudo do método no Capítulo 3, nel o obxectivo principal será a súa xeneralización. Con esta finalidade introduciremos na primeira sección as $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións, que xeneralizan as sub e sobresolucións presentadas no segundo capítulo. Pese a este cambio na definición seguimos a ter un resultado, o Teorema 3.5, que garante a existencia de como mínimo, unha solución. Seguidamente veremos que nestas hipóteses podemos garantir a existencia de solucións maximais e minimais, feito que probaremos axudándonos de proposicións presentadas anteriormente no capítulo. A continuación analizaremos que condicións debe verificar f para que o conxunto de solucións sexa un continuo e daremos unha condición suficiente para que o problema teña unha única solución. Todo isto estará acompañado de exemplos, tendo como obxectivo clarificar os conceptos.

Seguindo no Capítulo 3 temos a sección dedicada ás soluciöns en $W^{2,1}$. Esta é unha nova xeneralización, pero neste caso, ademais de relaxar as hipóteses das sub e sobresolucións tamén o faremos na función f. Comezaremos introducindo algúns conceptos necesarios para despois definir, como na sección anterior, as novas sub e sobresolucións, que denominaremos $W^{2,1}$-sub e sobresolucións. A estrutura desta sección será moi similar á da anterior xa que simplemente nos centraremos en enunciar os teoremas análogos adaptados ás novas hipóteses.

Finalmente botaremos unha ollada a outras formulacións do problema orixinal, isto é o que trataremos no Capítulo 4. Na primeira sección introduciremos en f dependencia da derivada de u, de forma que, para poder aplicar os resultados obtidos en capítulos anteriores, debemos establecer cotas a priori sobre a derivada. Con este obxectivo daremos algúns exemplos de casos nos que se poden deducir ditas cotas da estrutura de f para, máis tarde, falar da coñecida condición de Nagumo. Despois de introducir estas ferramentas xa podemos engadir a definición de sub e sobresolución correspondente e o teorema análogo ao Teorema 2.2. Para finalizar o traballo modificaremos as condicións de fronteira do problema orixinal e reproduciremos algúns resultados adaptándonos a estas novas condicións.

Capítulo 1

Definicións e teoremas previos

O noso primeiro capítulo estará dedicado a introducir algúns teoremas e definicións auxiliares que empregaremos ao longo do traballo. Estes resultados inclúen dende importantes teoremas de punto fixo, ata a definición de función de Green. Cabe destacar que tamén será preciso definir os conceptos previos necesarios para chegar a ditos resultados.

1.1. Espazos de Banach e operadores

Comezaremos definindo os conceptos de espazo de Banach e operador, que serán empregados reiteradamente nun futuro. Para isto é preciso tamén introducir outras definicións como o de espazo vectorial normado ou a de espazo métrico. Estes conceptos pódense atopar en calquera manual de análise funcional como, por exemplo, [6].

Definición 1.1. Chamamos espazo métrico ao par (X, d), sendo X un conxunto e d unha aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{R}$ (coñecida como *distancia* ou *métrica*), que cumpren as propiedades:

1. Non negatividade: $d(x, y) \geq 0$.

2. Lei de Leibniz: $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$.

3. Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.

4. Desigualdade triangular: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Un espazo métrico dirase completo se toda sucesión de Cauchy é converxente.

En numerosas situacións esta métrica virá dada por unha norma, dando así lugar aos espazos normados. Vexámolo.

Definición 1.2. Sexa $\mathbb{F}$ un corpo. Un $\mathbb{F}$-espazo vectorial V dise normado se a súa topoloxía deriva dunha aplicación $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$, chamada norma, que satisfai as seguintes propiedades:

1. Desigualdade triangular: $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ para $u, v \in V$.
2. Homoxeneidade: $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ para $u \in V, \lambda \in \mathbb{F}$.
3. Se $v \in V$ entón $\|v\| = 0$ se e só se $v = 0$.

Nótese que todo espazo normado $(V, \|\cdot\|)$ é un espazo métrico coa métrica $d(x, y) = \|x - y\|$ en V.

Definición 1.3. Un espazo normado $(V, \|\cdot\|)$ dirase de Banach se, coa distancia inducida pola norma, é un espazo métrico completo.

Exemplo 1.4. Algúns dos exemplos máis coñecidos de espazos de Banach son o espazo das funcións continuas con dominio $[a, b]$, $\mathcal{C}([a, b])$, coa norma do supremo, dada por $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \text{ tal que } t \in [a, b]\}$ e os espazos euclidianos, onde a norma neste caso vén dada por $\|t\| = (\sum_{j=1}^{n} |t_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ con $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Definición 1.5. Chamaremos operadores ás funcións entre espazos normados e denotarémolos habitualmente por Tx no lugar de $T(x)$.

Definición 1.6. Sexan X, Y espazos de Banach e $T : X \to Y$ un operador. T dirase compacto se é continuo e se $T(U) \subset Y$ é relativamente compacto (é dicir, $\overline{T(U)}$ é compacto) para todo $U \subset X$ limitado.

Definición 1.7. Sexa X un espazo topolóxico, Y un espazo métrico e F unha familia de funcións de X en Y. Diremos que F é equicontinuo se, para cada $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe un contorno U_x de x, tal que $d_Y(f(y), f(x)) < \varepsilon$, para todo $y \in U_x$ e $f \in F$, sendo d_Y a distancia inducida pola métrica de Y.

Procederemos agora a enunciar dous importantes teoremas, Ascoli-Arzelá e o do punto fixo de Schauder. A importancia destes reside na súa utilidade para buscar solucións de problemas diferenciais.

Teorema 1.8. *(Ascoli-Arzelá). [4] Sexa X un espazo topolóxico compacto Hausdorff e Y un espazo métrico completo e sexa $\mathcal{C}(X, Y)$ o conxunto de funcións continuas de X a Y. Tomando $\mathcal{C}(X, Y)$ coa topoloxía da converxencia uniforme temos que $F \subset \mathcal{C}(X, Y)$ ten clausura compacta se e só se F é uniformemente limitado e equicontinuo.*

Teorema 1.9. *(Punto fixo de Schauder). [7] Sexa $S \neq \varnothing$ un subconxunto limitado, pechado e convexo do espazo normado X e T un operador compacto que cumpra que $T(S) \subset S$. Entón T ten un punto fixo en S.*

1.2. Funcións de Green

Para esta sección, dedicada ás funcións de Green, enunciaremos principalmente resultados recollidos en [2]. As citadas funcións servirannos para caracterizar as solucións do noso problema así como para transformar problemas diferenciais en problemas integrais de punto fixo, como indicaremos máis adiante.

Consideremos o problema diferencial lineal xeral de orde n:

$$\begin{cases} L_n u(t) = \sigma(t), \ t \in [a,b], \\ U_i(u) = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{1.1}$$

con

$$L_n u(t) \equiv u^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t) u'(t) + a_0(t) u(t),$$
$$U_i(u) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_j^i u^{(j)}(a) + \beta_j^i u^{(j)}(b)), \ i = 1, \dots, n,$$

sendo $\alpha_j^i, \ \beta_j^i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$ e $\sigma, \ a_k \in \mathrm{L}^1([a,b])$, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, onde $\mathrm{L}^p([a,b])$ denotará o espazo de funcións que van de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ cumprindo que

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p}^p = \int_a^b |u(t)|^p \, dt < \infty.$$

Definimos agora as anteriormente mencionadas funcións de Green.

Definición 1.10. Diremos que G é unha función de Green para o problema (1.1) se satisfai as seguintes propiedades:

i. G está definida no cadrado $[a,b] \times [a,b]$ (agás nos puntos $t = s$ cando $n = 1$).

ii. Para $k = 0, \dots, n-2$ as derivadas parciais $\frac{\partial^k G}{\partial t^k}$ existen e son continuas en $[a,b] \times [a,b]$.

iii. Existen e son continuas nos triángulos $a \le s < t \le b$ e $a \le t < s \le b$ as derivadas parciais $\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}$ e $\frac{\partial^n G}{\partial t^n}$.

iv. Para cada $s \in (a,b)$, a función $G(\cdot, s)$ é solución da ecuación diferencial $L_n y = 0$ c.p.t. $t \in [a,s) \cup (s,b]$, isto é:

$$\frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t,s) + a_{n-1}(t) \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}}(t,s) + \cdots + a_1(t) \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) + \alpha_0(t) G(t,s) = 0,$$

c.p.t. $t \in [a,b] \setminus \{s\}$. A notación c.p.t. $t \in X$ indica que certa propiedade se cumpre case para todo t en X, é dicir, en todo punto do conxunto X excepto un subconxunto de medida nula.

v. Para cada $t \in (a,b)$ existen os límites laterais

$$\frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t^-,t) = \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t,t^+) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t,t^-) = \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t^+,t)$$

e ademais,

$$\frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t^+,t) - \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t^-,t) = \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t,t^-) - \frac{\partial^{n-1}G}{\partial t^{n-1}}(t,t^+) = 1.$$

vi. Para cada $s \in (a,b)$, a función $G(\cdot,s)$ satisfai as condicións de fronteira $U_i(G(\cdot,s)) = 0$, $i = 1,\dots,n$, isto é:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_j^i \frac{\partial^j G}{\partial t^j}(a,s) + \beta_j^i \frac{\partial^j G}{\partial t^j}(b,s)\right) = 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Nótese que estas propiedades son tamén unha caracterización da función de Green, polo que permiten obter a súa expresión nalgúns exemplos sinxelos coma os seguintes.

Exemplo 1.11. Consideremos o problema

$$\begin{cases} u''(t) = 0, & t \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

e busquemos unha función de Green usando as súas propiedades.

Por i., iii. e iv. temos que a nosa función de Green ten que ser da forma:

$$G(t,s) = \begin{cases} c_1(s)t + c_2(s), & t \le s, \\ c_3(s)t + c_4(s), & t > s. \end{cases} \tag{1.2}$$

Pasamos a comprobar a vi. e obter:

$$G(0,s) = 0 \ \ \forall s \in (0,1) \implies c_2(s) = 0,$$
$$G(1,s) = 0 \ \ \forall s \in (0,1) \implies c_3(s) = -c_4(s).$$

Volvendo agora á propiedade ii., que nos indica que G é continua, temos que

$$c_1(s)s = c_3(s)s - c_3(s) \iff c_1(s) = c_3(s)\frac{(s-1)}{s}$$

e, finalmente, pola propiedade v.,

$$c_3(s) - c_1(s) = 1 \iff c_3(s)\left(1 - \frac{(s-1)}{s}\right) = 1 \iff c_3(s) = s.$$

Substituíndo na expresión (1.2) chegamos a que a nosa función de Green é

$$G(t,s) = \begin{cases} (s-1)t, & t \le s, \\ s(t-1), & t > s. \end{cases}$$

Exemplo 1.12. Neste exemplo mostraremos unha función de Green algo máis complexa, na que a solución virá dada por funcións trigonométricas.

A función de Green do problema

$$\begin{cases} u''(t) + u(t) = t, & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ u(0) = u(\pi/2) = 0, \end{cases}$$

será

$$G(t,s) = \begin{cases} -\cos s \operatorname{sen} t, & t \le s, \\ -\operatorname{sen} s \cos t, & t > s. \end{cases}$$

Mostraremos agora o procedemento levado a cabo: primeiramente, sabemos que a función de Green é continua en $t = s$, a súa derivada ten unha discontinuidade nese mesmo punto e satisfai as mesmas condicións de fronteira que u. Temos entón que, pola propiedade iv,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) + G(t,s) = 0, \quad \text{para } t \neq s.$$

Esta é unha ecuación harmónica, na que a solución vén dada por $c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t)$, polo que a función de Green será da forma:

$$G(t,s) = \begin{cases} A(s) \operatorname{sen}(t) + B(s) \cos(t), & t \le s, \\ C(s) \operatorname{sen}(t) + D(s) \cos(t), & t > s. \end{cases}$$

Calcularemos agora as funcións A, B, C e D de forma que cumpran as condicións de fronteira. Por $u(0) = 0$ temos que $B(s) = 0$ e, de igual forma, por $u(\frac{\pi}{2}) = 0$ tense que $C(s) = 0$. A continuidade de G dinos que $A(s)\operatorname{sen}(s) = D(s)\cos(s)$ e, pola propiedade v. deducimos que $-D(s)\operatorname{sen}(s) - A(s)\cos(s) = 1$. Finalmente substituíndo D na segunda ecuación chegamos a que

$$-A(s)\frac{\operatorname{sen}^2(s)}{\cos(s)} - A(s)\cos(s) = 1 \Rightarrow A(s) = \frac{-\cos(s)}{\operatorname{sen}^2(s) + \cos^2(s)} = -\cos(s)$$

e, polo tanto, $D(s) = -\operatorname{sen}(s)$ chegando ao resultado final.

Definición 1.13. Dado un espazo de Banach X diremos que o operador L_n é non resoante en X se e só se a ecuación homoxénea

$$L_n u(t) = 0, \quad \text{c.p.t. } t \in [a,b], \ u \in X,$$

ten como única solución a trivial.

Definiremos agora os seguintes conxuntos:

$$W^{n,1}([a,b]) = \{u \in \mathcal{C}^{n-1}([a,b]) \ / \ u^{(n-1)} \in \mathcal{AC}([a,b])\},$$

con $\mathcal{AC}([a,b])$ o conxunto de funcións absolutamente continuas en $[a,b]$, e

$$Y = \{u \in W^{n,1}([a,b]) \; / \; U_i(u) = 0, i = 1, \dots, n\} \subset W^{n,1}([a,b]).$$

Tense que Y é un espazo de Banach coa norma usual

$$\|u\|_X = \text{máx}\left\{ \left\| u^{(i)} \right\|_\infty \text{ tal que } i = 0, \dots, n-1 \right\}.$$

O seguinte teorema seranos de moita utilidade, xa que nos permitirá saber cando o problema (1.1) ten solución única e que forma adoptará esta.

Teorema 1.14. *As seguintes afirmacións son equivalentes:*

I. *O operador L_n é non resonante en Y.*

II. *Existe unha única función de Green asociada ao problema* (1.1).

III. *O problema* (1.1) *ten unha única solución $u \in W^{n,1}([a,b])$.*

Neste caso, a solución única virá dada pola seguinte expresión

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)\sigma(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

sendo G a función de Green do problema (1.1).

Ademais de permitir obter mediante integración directa as solucións de problemas lineais coma (1.1), a función de Green é unha ferramenta de moita utilidade á hora de probar a existencia de solucións de problemas diferenciais non lineais. A súa utilidade radica no feito de que a función de Green permite transformar problemas diferenciais non lineais en problemas integrais de punto fixo. Esta idea, que ampliaremos a continuación, utilizarémola para demostrar varios resultados do Capítulo 2. En efecto, consideremos o problema:

$$\begin{cases} L_n u(t) = f(t,u(t)), \ t \in [a,b], \ u \in X \\ U_i(u) = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

sendo X un espazo de Banach e f unha función non lineal. Tense entón que as solucións deste problema se corresponden cos puntos fixos do seguinte operador integral:

$$\begin{aligned} T : X &\rightarrow X \\ u &\rightsquigarrow Tu, \end{aligned}$$

con

$$Tu(t) = \int_a^b G(t,s) f(s,u(s)) \, ds,$$

sendo G a función de Green asociada ao problema

$$\begin{cases} L_n u(t) = 0, & t \in [a,b], \; u \in X, \\ U_i(u) = 0, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Deste xeito, tal e como veremos no seguinte capítulo, a existencia de solucións de problemas diferenciais non lineais probarase a partir da existencia de puntos fixos do operador integral correspondente, para o cal empregaremos o Teorema de Schauder. Neste contexto, o método das sub e sobresolucións, que desenvolveremos no Capítulo 2, permitiranos ademais dar unha rexión na cal se localizará o punto fixo do operador integral e, equivalentemente, a solución do problema diferencial non lineal.

Capítulo 2

O método de sub e sobresolucións

Neste segundo capítulo enunciaremos e probaremos o resultado principal relacionado co tema do noso traballo, o método de sub e sobresolucións, para logo en capítulos posteriores estender máis estas ideas. Comentaremos tamén importantes observacións sobre algunhas características do método, todo isto acompañado dalgúns exemplos.

A idea principal na que se basea este método, para atopar solucións de problemas diferenciais, é atopar o que chamamos sub e sobresolucións do problema. Logo, como veremos neste capítulo, probaremos que a solución se atopa entre estas dúas funcións.

Todos os resultados e observacións deste capítulo estarán baseados na referencia [3]. Outros traballos de interese relacionados con este método poden ser consultados en [1] e [5].

2.1. Fundamentos do método

Por simplicidade, trataremos nesta sección o problema con condicións de fronteira periódicas e limitarémonos a problemas diferenciais de orde dous. Cabe mencionar que estes resultados se poden xeneralizar para unha orde n arbitraria e diferentes condicións de fronteira, como veremos no Capítulo 4.

Consideraremos o seguinte problema con condicións de contorno periódicas

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{2.1}$$

con $a < b$ e f unha función continua.

Definición 2.1. Diremos que $\alpha \in \mathcal{C}^2((a, b)) \cap \mathcal{C}^1([a, b])$ é unha subsolución do problema (2.1) se:

i. $\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$, para todo $t \in (a, b)$,

ii. $\alpha(a) = \alpha(b)$, $\alpha'(a) \geq \alpha'(b)$.

Á súa vez, $\beta \in \mathcal{C}^2((a,b)) \cap \mathcal{C}^1([a,b])$ é unha sobresolución de (2.1) se:

i. $\beta''(t) \leq f(t, \beta(t))$ para todo $t \in (a, b)$,

ii. $\beta(a) = \beta(b)$, $\beta'(a) \leq \beta'(b)$.

Probaremos agora o teorema principal deste capítulo, que afirma a existencia dunha solución do problema (2.1) empregando sub e sobresolucións.

Teorema 2.2. *Sexan α, β sub e sobresolucións do problema* (2.1) *respectivamente, tales que $\alpha \leq \beta$. Asumamos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua sendo*

$$E = \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} \text{ tal que } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

Entón o problema (2.1) *ten, cando menos, unha solución $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tal que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Demostración. Consideremos para a nosa proba a función $\gamma : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(t, u(t)) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } u(t) < \alpha(t), \\ u(t), & \text{se } \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \\ \beta(t), & \text{se } u(t) > \beta(t), \end{cases}$$

e o problema auxiliar

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = f(t, \gamma(t, u(t))) - \gamma(t, u(t)), & t \in [a, b], \\ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b). \end{cases} \tag{2.2}$$

Comezaremos probando que o problema (2.2) ten, polo menos, unha solución. Para isto comezamos observando que, tal e como se xustificou ao final do Capítulo 1, as solucións do problema (2.2) se corresponden coas solucións da seguinte ecuación integral

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)[f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s))]\, ds,$$

sendo G a función de Green do problema

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = 0, & t \in [a, b], \\ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b). \end{cases}$$

Como xa mencionamos no Exemplo 1.4 do primeiro capítulo, $\mathcal{C}[a,b]$ coa norma do supremo é un espazo de Banach e, desta forma teremos que o operador $T:\mathcal{C}([a,b])\longrightarrow\mathcal{C}([a,b])$, definido pola integral

$$(Tu)(t)=\int_a^b G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s)))-\gamma(s,u(s))]\,ds,$$

é compacto. Para probar isto veremos que T é continuo e que dado $\Gamma\subset\mathcal{C}([a,b])$ limitado, $T(\Gamma)$ é relativamente compacto.

- Ver a continuidade de T é sinxelo dado que γ e f, por definición, e G, pola segunda propiedade da función de Green, son continuas.

- Para probar que T leva conxuntos limitados en conxuntos relativamente compactos utilizaremos o Teorema de Ascoli-Arzelá. Sexa $r>0$ e

  $$\Gamma=\{u\in\mathcal{C}([a,b])\text{ tal que }\|u\|<r\}$$

  un subconxunto limitado de $\mathcal{C}([a,b])$. Vexamos primeiro que $T(\Gamma)$ é equicontinuo. Dados $t,t'\in[a,b]$, tense que

  $$\begin{aligned}|(Tu)(t)-(Tu)(t')|&\leq\int_a^b|G(t,s)-G(t',s)|[|f(s,\gamma(s,u(s)))|+|\gamma(s,u(s))|]\,ds\\&\leq\int_a^b|G(t,s)-G(t',s)|[R_1+R_2]\,ds,\end{aligned}$$

  sendo R_1 unha cota de f (f limitada por ser continua definida nun pechado) e R_2 unha cota de γ da forma $|\gamma(s,u(s))|<\text{máx}\{\|\alpha\|,\|\beta\|\}=R_2$. Como G é, por ser función continua nun conxunto pechado e limitado, uniformemente continua en $[a,b]\times[a,b]$, temos que para todo $\varepsilon>0$ existe un $\delta(\varepsilon)>0$ tal que, $(t_1,s_1),(t_2,s_2)\in[a,b]\times[a,b]$ cumprindo $\|(t_1,s_1)-(t_2,s_2)\|<\delta(\varepsilon)$ implica que $|G(t_1,s_1)-G(t_2,s_2)|<\varepsilon$. Entón, se collemos sempre a mesma s teremos que $\|(t,s)-(t',s)\|=\|(t-t',0)\|=|t-t'|<\delta(\varepsilon)$ implica que $|G(t,s)-G(t',s)|<\varepsilon$, e así,

  $$|(Tu)(t)-(Tu)(t')|\leq\varepsilon\int_a^b(R_1+R_2)\,ds,$$

  polo que $T(\Gamma)$ é equicontinuo.

  Finalmente, para facer uso do Teorema de Ascoli-Arzelá precisaremos ver tamén que $T(\Gamma)$ é uniformemente limitado. En efecto, tense que

  $$\|Tu\|=\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s)))-\gamma(s,u(s))]\,ds\right|\leq\int_a^b M[R_1+R_2]\,ds,$$

  sendo M unha cota de G (que existe por ser G continua en $[a,b]\times[a,b]$).

Logo temos que T é un operador compacto e, para empregar o Teorema de Schauder, precisamos comprobar tamén que existe un conxunto S convexo, limitado e pechado que cumpra que $T(S) \subset S$.

Como

$$\begin{aligned}|(Tu)(t)| &\leq \int_a^b |G(t,s)|[|f(s,\gamma(s,u(s)))| + |\gamma(s,u(s))|]\, ds \\ &\leq \int_a^b M(R_1 + R_2)\, ds = (b-a)M(R_1 + R_2) \quad \forall t \in [a,b],\end{aligned}$$

tomando $k = (b-a)M(R_1+R_2)$ e $S = \{u \in \mathcal{C}([a,b]) \ / \ \|u\| \leq k\}$ vese facilmente que $T(S) \subset S$. Vexamos agora que S é convexo:

$$u, v \in S \Rightarrow \lambda u + (1-\lambda)v \in S \text{ para todo } \lambda \in [0,1]$$

xa que

$$\|\lambda u + (1-\lambda)v\| \leq \lambda\|u\| + (1-\lambda)\|v\| \leq \lambda k + (1-\lambda)k = k.$$

Ao ser S limitado, de forma trivial, só nos queda ver que é pechado, ou o que é o mesmo, que contén aos límites das súas sucesións converxentes. Sexa $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S$ converxente a u (coa norma do espazo de Banach, é dicir, converxente uniformemente). Como u é continua, por selo as u_n (consecuencia da converxencia uniforme), entón

$$\|u_n\| \leq k \Rightarrow \|u\| \leq k$$

e temos que $u \in S$, que é o que queriamos ver.

Xa estamos en condicións de empregar o Teorema do punto fixo de Schauder, que garante que T ten un punto fixo, o cal é solución do problema (2.1).

Para finalizar a demostración temos que probar que todas as solucións u do problema (2.2) están entre a sub e a sobresolución no noso intervalo, é dicir,

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Farémolo por redución ao absurdo, supoñendo que, para algún $t_0 \in [a,b]$,

$$\min_{t\in[a,b]}(u(t) - \alpha(t)) = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

Se $t_0 \in (a,b)$, temos a seguinte contradición

$$0 \leq u''(t_0) - \alpha''(t_0) = f(t_0, \alpha(t_0)) + u(t_0) - \alpha(t_0) - \alpha''(t_0) < 0,$$

onde a primeira desigualdade dedúcese de que $u''(t_0) - \alpha''(t_0) \geq 0$ por ser $u(t_0) - \alpha(t_0)$ mínimo, mentres que a segunda vén de substituír na desigualdade a u'' do problema (2.2), tendo en conta que o valor de $\gamma(t_0,u)$ será $\alpha(t_0)$, e fixándonos en que $f(t_0,\alpha(t_0)) - \alpha''(t_0) \le 0$ por definición de subsolución e que $u(t_0)-\alpha(t_0) < 0$ pola hipótese que fixemos para o noso argumento.

No caso no que o mínimo estea nos extremos, é dicir

$$\min_{t\in[a,b]}(u(t)-\alpha(t)) = u(a)-\alpha(a) = u(b)-\alpha(b) < 0,$$

chegamos a que

$$u'(a)-\alpha'(a) \ge 0 \ge u'(b)-\alpha'(b)$$

por ter $u-\alpha$ mínimos en a e b (a derivada á dereita dun mínimo é maior ou igual que cero e á esquerda menor ou igual que cero). Tendo en conta parte da definición de subsolución ($u'(a) = u'(b)$, $\alpha'(a) \ge \alpha'(b)$) temos que

$$u'(a)-\alpha'(a) \le u'(b)-\alpha'(b),$$

co que deducimos que $u'(a)-\alpha'(a) = 0$. Integrando agora a expresión $u''(s)-\alpha''(s)$ entre a e t, temos, por un lado, que

$$\int_a^t u''(s)-\alpha''(s)\,ds = [u'(t)-u'(a)] - [\alpha'(t)-\alpha'(a)] = u'(t)-\alpha'(t),$$

e por outro, substituíndo a u'' do problema (2.2),

$$\int_a^t u''(s)-\alpha''(s)\,ds = \int_a^t [f(s,\alpha(s)) + u(s)-\alpha(s)-\alpha''(s)]\,ds.$$

Nótese que esta segunda integral é negativa, xa que $f(s,\alpha(s))-\alpha''(s) \le 0$ por definición de subsolución e, como $u(a)-\alpha(a) < 0$ entón existe $t > 0$ tal que $u(s)-\alpha(s) < 0$ $\forall s \in [a,t]$, o cal é unha contradición con que $u-\alpha$ teña un mínimo en a, probando así que $\alpha \le u$.

A proba de que $u \le \beta$ é totalmente análoga.

En resumo, usando o Teorema de Schauder demostramos que (2.2) ten solución e, por redución ao absurdo, probamos que esta cumpre (2.3). Logo, pola forma na que está construida $\gamma(t,u(t))$, esta será igual a $u(t)$, e a solución do problema (2.2) tamén o será de (2.1). □

Exemplo 2.3. Unha primeira aplicación do método sub e sobresolucións podería vir dado polo seguinte problema onde nos poderemos dar conta do importante feito de que o Teorema 2.2 non só proporciona existencia de solución, senón que tamén nos aporta a localización da(s) solución(s).

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u''(t) = u^3(t) - \cos^3(t), \quad t \in [0,2\pi], \\ u(0) = u(2\pi),\ u'(0) = u'(2\pi), \end{cases}$$

con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0\}$. Temos que $\alpha(t) = \cos(t) - 2\varepsilon$ é subsolución xa que $\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$ con,

$$f(t, \alpha(t)) = \frac{(\cos(t) - 2\varepsilon)^3 - \cos^3(t)}{\varepsilon^2}.$$

En efecto, como $\alpha''(t) = -\cos(t)$,

$$\begin{aligned}
\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)) &\iff -\cos(t) \geq \frac{(\cos(t) - 2\varepsilon)^3 - \cos^3(t)}{\varepsilon^2} \\
&\iff -\cos(t) \geq \frac{-8\varepsilon^3 + 12\varepsilon^2 \cos(t) - 6\varepsilon \cos^2(t)}{\varepsilon^2} \\
&\iff 8\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon} \cos^2(t) - 13\cos(t) \geq 0
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$. Chamando g a esta última función, temos que esta é maior ou igual que 0 en $[0, 2\pi]$ se e só se, por ser g continua e $[0, 2\pi]$ compacto, o mínimo neste intervalo é tamén maior ou igual que 0. Para ver isto procedemos a atopar os puntos críticos de g, xa que o mínimo se atopará nun destes puntos ou nun dos extremos do intervalo. Así, derivando g, obtemos

$$g'(t) = -\frac{12}{\varepsilon} \cos(t) \operatorname{sen}(t) + 13 \operatorname{sen}(t),$$

e

$$\begin{aligned}
g'(t) = 0 &\iff 13 \operatorname{sen}(t) = \frac{12}{\varepsilon} \cos(t) \operatorname{sen}(t) \\
&\iff [\operatorname{sen}(t) = 0] \text{ ou } \left[\cos(t) = \frac{13}{12}\varepsilon\right] \\
&\iff [t = 0], [t = \pi], [t = 2\pi] \text{ ou } \left[\cos(t) = \frac{13}{12}\varepsilon\right].
\end{aligned}$$

Estes son os posibles mínimos da nosa función no intervalo a considerar que, como vemos, inclúen os extremos deste. Vexamos agora todos os posibles escenarios:

- $g(0) = g(2\pi) = 8\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon} - 13 > 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Isto se verifica de forma sinxela collendo $h(\varepsilon) = 8\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon} - 13$ e derivando. Chegamos entón a que $h'(\varepsilon) = 8 - \frac{6}{\varepsilon^2}$ é igual a cero só cando $\varepsilon = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Miraremos exclusivamente $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ xa que é o único de ambos que pertence ao intervalo. Agora como $h'(\varepsilon) < 0$ á esquerda deste punto e $h'(\varepsilon) > 0$ á dereita, este punto será un mínimo polo que se $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0$ teremos que $h(\varepsilon) \geq 0$. Evaluando a función obtemos $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -13 + 8\sqrt{3} > 0$ e finalmente, por todo o mencionado anteriormente, concluímos que $g(0) = g(2\pi) > 0$.

- $g(\pi) = 8\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon} + 13 > 0$ para todo $\varepsilon > 0$ xa que todos os sumandos son estritamente positivos.

- Se $t \in [0, 2\pi]$ tal que $\cos(t) = \frac{13}{12}\varepsilon$, entón $g(t) = 8\varepsilon + \frac{6}{\varepsilon}\left(\frac{13}{12}\varepsilon\right)^2 - 13\frac{13}{12}\varepsilon = \frac{23}{24}\varepsilon > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

De forma análoga vemos que $\beta(t) = \cos(t) + 2\varepsilon$ é sobresolución. Logo, polo Teorema 2.2 sabemos que existe unha solución u tal que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$, para todo $t \in [0, 2\pi]$. Finalmente, esta solución terá a forma, para un ε pequeno, da aproximación asintótica

$$u(t) = \cos(t) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Isto pode observarse na Figura 2.1.

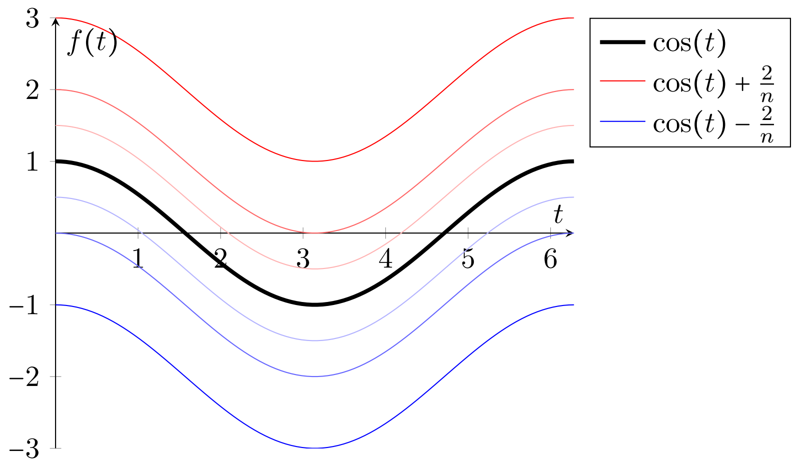

Figura 2.1: Representación da "converxencia" das sub e sobresolucións conforme ε tende a 0, coas subsolucións en azul e as sobresolucións en vermello.

O seguinte exemplo serviranos para ver que, en efecto, o problema non ten por que ter solución única baixo estas primeiras hipóteses.

Exemplo 2.4. Tomemos o problema

$$\begin{cases} u''(t) = -u^4(t) + u^2(t) - t^2, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ u(0) = u\left(\frac{1}{2}\right), \; u'(0) = u'\left(\frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

É sinxelo ver que tanto $\alpha_1(t) = -1$ coma $\alpha_2(t) = 0$ son subsolucións xa que $\alpha_i''(t) = 0$ e $f(t, \alpha_i(t)) = -t^2$ para $i = 1, 2$ tendo así que se $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(t, \alpha(t)) \in [-0{,}25, 0]$ e que as condicións de fronteira se cumpren de forma trivial.

Á súa vez podemos atopar $\beta_1(t) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ e $\beta_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sobresolucións tamén porque para ambas $\beta''(t) = 0 \leq f(t, \beta(t)) \in [0, 0{,}25]$. Grazas ao Teorema 2.2 sabemos que existirán, ao menos, dúas solucións u_1, u_2 en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tales que

$$-1 \leq u_1(t) \leq \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad 0 \leq u_2(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Esta idea plasmarémola de forma clara na Figura 2.2.

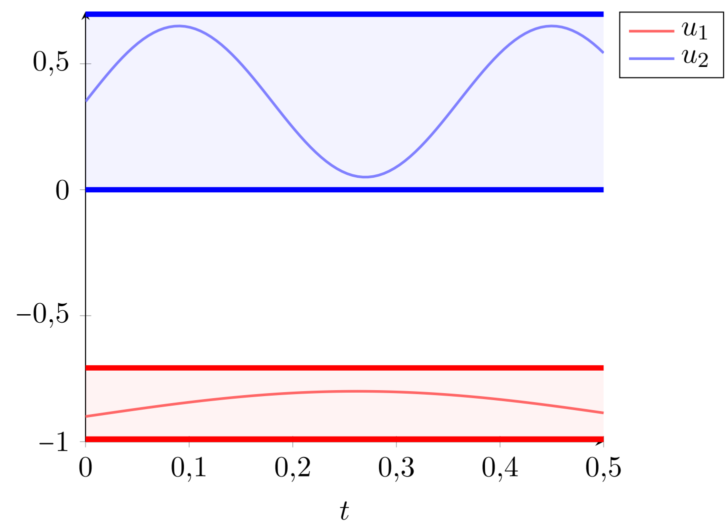

Figura 2.2: Representación do Exemplo 2.4, con u_1 e u_2 hipotéticas solucións do noso problema. Debuxamos α_1, β_1 en vermello e α_2, β_2 en azul. Nótese que as áreas coloreadas sinalan as rexións onde se encontran as verdadeiras solucións do noso problema. Como vemos deberán existir, ao menos, dúas solucións do problema, situadas cada unha nunha das rexións coloreadas.

Observación 2.5. Unha interesante interpretación do Teorema 2.2 é que, no caso en que a función de Green teña signo constante, este pode verse como unha variación do Teorema do Valor Intermedio para o operador

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]\, ds.$$

En efecto, se a función de Green é non negativa

$$T\alpha = \int_a^b G(\cdot,s)[f(s,\alpha(s)) - \alpha(s)]\, ds \geq \int_a^b G(\cdot,s)[\alpha''(s) - \alpha(s)]\, ds \geq \alpha$$

e analogamente, $T\beta \leq \beta$. Se a función de Green fose non positiva, teríase que $T\alpha \leq \alpha$ e $T\beta \geq \beta$. En ambos casos o Teorema 2.2 proba a existencia dun valor intermedio u entre α e β tal que $Tu = u$.

É obvio que a maior dificultade que se nos presenta á hora de aplicar este método é atopar sub e sobresolucións convenientes. A idea máis simple, isto é, a de usar funcións constantes, é a base do seguinte corolario.

Corolario 2.6. *Sexa* $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *unha función continua tal que para algúns* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$*,* $r_1 \leq r_2$ *e para todo* $t \in [a,b]$ *se cumpra que*

$$f(t, r_1) \leq 0 \leq f(t, r_2).$$

Entón o problema (2.1) *ten, cando menos, unha solución* $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ *tal que, para todo* $t \in [a,b]$*,*

$$r_1 \leq u(t) \leq r_2.$$

Exemplo 2.7. Como xa mencionamos, este corolario simplifica moito a procura de solucións nalgúns casos. O seguinte exemplo ilustra esta idea. Consideremos o problema

$$\begin{cases} u''(t) = g(t) - \cos(u(t)), \quad t \in [0, 2\pi], \\ u(0) = u(2\pi), \;\; u'(0) = u'(2\pi), \end{cases}$$

con $g \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$. Entón se $\|g\|_\infty \leq 1$ e tomando $f(t, u(t)) = g(t) - \cos(u(t))$ temos que

$$f(t, 0) \leq 0 \leq f(t, \pi).$$

Polo corolario anterior sabemos que existirá ao menos unha solución $u \in \mathcal{C}([0, 2\pi])$ entre 0 e π, que serán sub e sobresolucións respectivamente.

Capítulo 3

Xeneralización do método

Neste terceiro capítulo teremos como principal obxectivo a xeneralización do método presentado no capítulo anterior mediante a relaxación das hipóteses, tanto nas sub e sobresolucións como no problema en si. Falaremos tamén sobre algunhas características do método nas novas hipóteses e certas propiedades que cumpren as solucións do mesmo. Máis tarde veremos como podemos atopar unha solución do problema usando conxuntos de sub e sobresolucións e cando este conxunto de solucións é un continuo.

Como no capítulo anterior, os resultados aquí atopados estarán baseados na referencia [3].

3.1. Solucións en $\mathcal{C}^2$ e as súas propiedades

Nesta sección xeneralizaremos a Definición 2.1 requirindo menos regularidade ás sub e sobresolucións, para logo presentar interesantes resultados relacionados co método das sub e sobresolucións. Tamén ilustraremos algúns exemplos para axudar á comprensión destes conceptos.

Definición 3.1. Diremos que $\alpha \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ é unha $\mathcal{C}^2$-subsolución de (2.1) se a súa extensión periódica a $\mathbb{R}$, $\alpha(t+b-a)$, que por simplicidade tamén denotaremos α, é tal que para calquera $t_0 \in \mathbb{R}$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$, onde $D_-\alpha(t_0)$ e $D^+\alpha(t_0)$ denotan as derivadas de Dini inferior esquerda e superior dereita de α en t_0, é dicir,

$$D_-\alpha(t_0) = \liminf_{t\to t_0^-} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \quad \text{e} \quad D^+\alpha(t_0) = \limsup_{t\to t_0^+} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0}.$$

- Existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$, e unha funcion $\alpha_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$ tal que

i. $\alpha(t_0) = \alpha_0(t_0)$ e $\alpha(t) \geq \alpha_0(t)$ para todo $t \in I_0$,

ii. $\alpha_0''(t_0)$ existe e $\alpha_0''(t_0) \geq f(t_0, \alpha_0(t_0))$.

Á súa vez, $\beta \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $\beta(a) = \beta(b)$ é unha $\mathcal{C}^2$-sobresolución de (2.1) se a súa extensión periódica a $\mathbb{R}$, $\beta(t+b-a)$, que por simplicidade denotaremos tamén por β, é tal que para calquera $t_0 \in \mathbb{R}$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D_+\beta(t_0) < D^-\beta(t_0)$, onde $D_+\beta(t_0)$ e $D^-\beta(t_0)$ denotan as derivadas de Dini inferior dereita e superior esquerda de β en t_0, é dicir,

$$D_+\beta(t_0) = \liminf_{t \to t_0^+} \frac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0} \quad \text{e} \quad D^-\beta(t_0) = \limsup_{t \to t_0^-} \frac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0}.$$

- Existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$, e unha funcion $\beta_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$ tal que

  i. $\beta(t_0) = \beta_0(t_0)$ e $\beta(t) \leq \beta_0(t)$ para todo $t \in I_0$,

  ii. $\beta_0''(t_0)$ existe e $\beta_0''(t_0) \leq f(t_0, \beta_0(t_0))$.

Nótese que o que estamos a facer é estender periodicamente α e β a $\mathbb{R}$. Se tentásemos facer isto na Definición 2.1 resultaría que a derivada das sub e sobresolucións podería ter saltos en a e b polas condicións pedidas $\alpha'(a) \geq \alpha'(b)$ e $\beta'(a) \leq \beta'(b)$. Cabe tamén observar que as Definicións 2.1 e 3.1 son equivalentes cando f é continua e cando α, β están en $\mathcal{C}^2([a,b])$; nesta situación, ou cando non haxa posible confusión entre definicións, falaremos simplemente de sub e sobresolucións de (2.1).

Observación 3.2. Comentaremos agora brevemente a interpretación xeométrica da definición anterior, co obxectivo de visualizar de forma máis sinxela o significado das condicións mencionadas. Centrándonos primeiramente nas condicións relacionadas coas derivadas de Dini, estas virían a dicir que as sub e sobresolucións poden presentar ángulos (ou discontinuidades na derivada) pero estes ángulos deberán ser abertos por enriba no caso das subsolucións e por abaixo nas sobresolucións tal e como se observa na Figura 3.1. Ademais as solucións non poderán ser tanxentes, pola parte aberta do ángulo, ao vértice $t = t_0$. Por outra parte, as condicións relacionadas coa segunda derivada indícannos que, asumindo as desigualdades en ii. como estritas, as solucións non poderán ser tanxentes por enriba á subsolución ou por abaixo á sobresolución, de forma moi similar ao comentado anteriormente. Cabe mencionar que esta interpretación segue a ser válida para as sub e sobresolucións coas que traballaremos a continuación.

As seguintes proposicións indícannos que existe unha $\mathcal{C}^2$-sub (sobre) solución, definida a partir dun conxunto finito de $\mathcal{C}^2$-sub (sobre) solucións, que será, en cada punto, o máximo (ou mínimo) de todas as funcións anteirores. Isto estará intimamente relacionado cos resultados que exporemos a continuación.

Proposición 3.3. *Sexan* $\alpha_i \in \mathcal{C}([a,b])$ *con* $i \in \{1,\dots,n\}$ $\mathcal{C}^2$*-subsolucións de* (2.1)*. Logo a función*

$$\alpha(t) = \max_{1\le i\le n} \alpha_i(t), \quad t \in [a,b]$$

é unha $\mathcal{C}^2$*-subsolución de* (2.1)*.*

Demostración. Temos que para calquera $t_0 \in [a,b]$ que collamos, existe unha función α_k tal que $\alpha(t_0) = \alpha_k(t_0)$ e $\alpha(t) \ge \alpha_k(t)$. Logo, ou ben $D_-\alpha_k(t_0) < D^+\alpha_k(t_0)$, o que implica que $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$, ou existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$ e unha función $\alpha_{k0} \in \mathcal{C}^1(I_0)$ satisfacendo i. e ii. na Definición 3.1. Todo isto, no seu conxunto, implica que α é unha $\mathcal{C}^2$-subsolución de (2.1). □

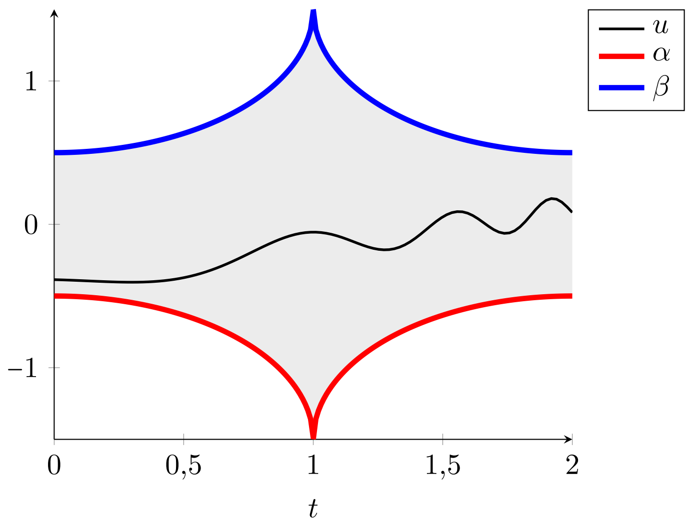

Figura 3.1: Representación xeométrica das condicións para ser sub e sobresolución con u unha hipotética solución válida. Nótese que, polas condicións impostas ás sub e sobresolucións, as discontinuidades nestas deben ter esta forma.

Proposición 3.4. *Sexan* $\beta_j \in \mathcal{C}([a,b])$ *con* $j \in \{1,\dots,m\}$ $\mathcal{C}^2$*-sobresolucións de* (2.1)*. Logo a función*

$$\beta(t) = \min_{1\le j\le m} \beta_j(t), \quad t \in [a,b]$$

é unha $\mathcal{C}^2$*-sobresolución de* (2.1)*.*

Demostración. Esta proba sería análoga á realizada para a Proposición 3.3. □

Como podiamos supoñer, o Teorema 2.2, que probaba a existencia dunha solución do problema (2.1), pódese xeneralizar para o novo tipo de sub e sobresolucións definidas nesta sección.

Teorema 3.5. *Sexan α, β $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións do problema* (2.1) *respectivamente, tales que $\alpha \leq \beta$. Asumamos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua, con*

$$E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} \text{ tal que } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

Entón o problema (2.1) *ten, cando menos, unha solución $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tal que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Demostración. Como a maioría desta proba é análoga á do Teorema 2.2 centrarémonos nas partes que difiren. Volvemos a considerar o problema (2.2). Despois de cambiar as nosas hipóteses, a proba de que o problema (2.1) ten solución segue a ser análoga á presentada para o Teorema 2.2, polo que só quedaría ver que dita solución cumpre que

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Farémolo de novo por redución ao absurdo. Despois de estender periodicamente α e u, supoñemos que, para algún $t_0 \in [a,b)$,

$$\min_{t \in [a,b]} (u(t) - \alpha(t)) = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

Derivando, obtemos a seguinte desigualdade

$$u'(t_0) - D_{-}\alpha(t_0) \leq u'(t_0) - D^{+}\alpha(t_0).$$

Isto dáse xa que, ao ser t_0 un mínimo, no caso de que α tivese unha discontinuidade na derivada, a función $u - \alpha$ formará un ángulo aberto por enriba (por ser mínimo), chegando así a que a derivada pola esquerda será menor que a derivada pola dereita. Logo, como é imposible que $D_{-}\alpha(t_0) < D^{+}\alpha(t_0)$, pola definición de $\mathcal{C}^2$-subsolución, terase que cumprir que existe $t_0 \in I_0$, sendo I_0 un intervalo aberto, e $\alpha_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$ tal que

i. $\alpha(t_0) = \alpha_0(t_0)$ e $\alpha(t) \geq \alpha_0(t)$ para todo $t_0 \in I_0$.

ii. Existe $\alpha_0''(t_0)$ cumprindo que $\alpha_0''(t_0) \geq f(t_0, \alpha_0(t_0))$.

Por isto, temos que

$$u(t) - \alpha(t) \leq u(t) - \alpha_0(t),$$

do que podemos deducir que $u - \alpha_0$ ten un mínimo en t_0 ao ser esta función igual a $u - \alpha$ en t_0, a cal ten un mínimo neste punto pero, por outra banda, $u - \alpha_0$ é maior ou igual a esta no resto. Deducimos tamén que $(u-\alpha_0)'(t_0)=0$ e que $(u-\alpha_0)''(t_0)\geq 0$. Chegamos así á seguinte contradición

$$0\leq u''(t_0)-\alpha_0''(t_0)\leq f(t_0,\alpha_0(t_0))-\alpha_0(t_0)+u(t_0)-f(t_0,\alpha_0(t_0))<0,$$

onde a primeira desigualdade vén polo comentado anteriormente, a segunda da propiedade de $\mathcal{C}^2$-subsolución, $\alpha''\geq f(\cdot,\alpha)$, e de substituír u'' pola súa expresión no problema (2.2). Temos por último que $u(t_0)-\alpha_0(t_0)<0$, que foi a hipótese da nosa demostración.

De maneira análoga probariamos que $u\leq\beta$, e de igual forma que na demostración do Teorema 2.2 chegamos a que u, solución de (2.2), é solución de (2.1). □

Veremos agora que, tras esta xeneralización, o conxunto de solucións cumpre as seguintes afirmacións.

Teorema 3.6. *Sexan α, β $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións do problema* (2.1) *respectivamente, tales que $\alpha\leq\beta$. Asumamos que $f:E\longrightarrow\mathbb{R}$ é unha función continua sendo*

$$E=\{(t,u)\in[a,b]\times\mathbb{R}\ /\ \alpha(t)\leq u\leq\beta(t)\}.$$

Entón o problema (2.1) *ten solucións $u_{\text{mín}}$, $u_{\text{máx}}\in\mathcal{C}^2([a,b])$, chamadas solucións minimais e maximais, tales que*

$$\alpha\leq u_{\text{mín}}\leq u_{\text{máx}}\leq\beta,$$

e calquera outra solución u de (2.1)*, con $\alpha\leq u\leq\beta$, cumpre que*

$$u_{\text{mín}}\leq u\leq u_{\text{máx}}.$$

Demostración. Sabemos por resultados anteriores que as solucións de (2.1) son puntos fixos do operador $T:\mathcal{C}([a.b])\longrightarrow\mathcal{C}([a,b])$, definido por

$$(Tu)(t)=\int_a^b G(t,s)[f(s,u(s))-u(s)]ds,$$

con G a función de Green do problema

$$\begin{cases} u''(t)-u(t)=0, & t\in[a,b],\\ u(a)=u(b),\ u'(a)=u'(b). \end{cases}$$

Collemos entón o conxunto

$$S=\{u\in\mathcal{C}([a,b])\text{ tal que}u=Tu,\ \alpha\leq u\leq\beta\}$$

que, polo Teorema 3.5, é non baleiro e, grazas ao que vimos na demostración deste mesmo problema (T operador compacto), é tamén compacto xa que $S=TS$. Consideremos agora a familia de conxuntos

$$F_x=\{u\in S\ /\ u\geq x\},\quad x\in S.$$

Esta familia, polo Teorema 3.5 e pola Proposición 3.3, posúe a propiedade da intersección finita, é dicir, a intersección dos conxuntos de calquera subfamilia finita é non baleira. Podemos afirmar isto xa que na intersección sempre estaría a x maximal. Finalmente polo demostrado no Teorema 5.1 de [4], existe

$$u_{\text{máx}} \in \bigcap_{x \in S} F_x,$$

que é, obviamente, unha solución maximal.

A proba da existencia dunha solución minimal é totalmente análoga. □

Se ademais engadimos a hipótese de crecemento ou monotonía con respecto a u atopamos que este conxunto de solucións é un continuo. Esta idea plasmarémola na Figura 3.2.

Teorema 3.7. *Sexan α, β $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións do problema* (2.1) *respectivamente, tales que $\alpha \le \beta$. Asumamos que $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é unha función continua e monótona crecente con respecto a u, sendo $E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t) \le u \le \beta(t)\}$. Tomemos $t_0 \in [a,b]$ e $u_{t_0} \in \mathbb{R}$ con $u_{\text{mín}}(t_0) \le u_{t_0} \le u_{\text{máx}}(t_0)$. Entón o problema* (2.1) *ten unha solución u, pertencente a $\in \mathcal{C}^2([a,b])$, tal que $u_{\text{mín}} \le u \le u_{\text{máx}}$ e $u(t_0) = u_{t_0}$.*

Demostración. Sexan $t_0 \in [a,b]$ e $u_{t_0} \in \mathbb{R}$ tal que $u_{\text{mín}}(t_0) \le u_{t_0} \le u_{\text{máx}}(t_0)$. Collamos agora $\varepsilon > 0$ de forma que $u_{\text{máx}} - \varepsilon \le u_{\text{mín}} + \varepsilon$ e definimos

$$\alpha_1(t) = \text{máx}\{u_{\text{mín}}(t),\ u_{\text{máx}}(t) - \varepsilon\},$$
$$\beta_1(t) = \text{mín}\{u_{\text{máx}}(t),\ u_{\text{mín}}(t) + \varepsilon\}.$$

Nótese que α_1 e β_1 son $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións de (2.1) respectivamente, vexamos porque:

- $u_{\text{máx}}$ e $u_{\text{mín}}$ son solucións e por tanto $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións.
- $u_{\text{máx}} \in \mathcal{C}^2$ por ser solución, e logo $u_{\text{máx}}(t) - \varepsilon \in \mathcal{C}^2$. Temos que, por ser f crecente con respecto a u, que $(u(t) - \varepsilon)'' = u''(t) = f(t, u(t)) \ge f(t, u(t) - \varepsilon)$, cumprindo así a segunda condición para ser $\mathcal{C}^2$-subsolución, polo que $u_{\text{máx}}(t) - \varepsilon$ será $\mathcal{C}^2$-subsolución. O razoamento para ver que $u_{\text{mín}}(t) + \varepsilon$ é $\mathcal{C}^2$-sobresolución sería análogo.
- o máximo de dúas $\mathcal{C}^2$-subsolucións é unha $\mathcal{C}^2$-subsolución e o mínimo de dúas $\mathcal{C}^2$-sobresolucións é unha $\mathcal{C}^2$-sobresolución.

Entón este problema ten, polo Teorema 3.5, unha solución u_1 tal que $\alpha_1(t) \le u_1(t) \le \beta_1(t)$ para todo $t \in [a,b]$, do cal se deduce que

$$u_{\text{mín}}(t) \le u_1(t) \le u_{\text{mín}}(t) + \varepsilon,$$
$$u_{\text{máx}}(t) \ge u_1(t) \ge u_{\text{máx}}(t) - \varepsilon.$$

Agora, se $u_{t_0} \in [u_{\text{mín}}(t_0), u_1(t_0)]$ definimos

$$\alpha_2(t) = \text{máx}\{u_{\text{mín}}(t),\ u_1(t) - \varepsilon/2\},$$
$$\beta_2(t) = \text{mín}\{u_1(t),\ u_{\text{mín}}(t) + \varepsilon/2\}.$$

De novo, como α_2 e β_2 son $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións respectivamente, polo Teorema 2.2, temos unha solución u_2 tal que, para todo $t \in [a,b]$, $\alpha_2(t) \le u_2(t) \le \beta_2(t)$, do cal se deduce que

$$u_{\text{mín}}(t) \le u_2(t) \le u_{\text{mín}}(t) + \varepsilon/2,$$
$$u_1(t) \ge u_2(t) \ge u_1(t) - \varepsilon/2.$$

Se $u_{t_0} \in (u_1(t_0), u_{\text{máx}}(t_0)]$, realizamos o proceso análogo. Seguindo este procedemento obteriamos unha sucesión de solucións $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisfacendo $|u_k(t_0) - u_{t_0}| \le \varepsilon/2^{k-1}$. Finalmente, facendo unha adaptación do Teorema de Ascoli-Arzelá, podemos afirmar que existe unha subsucesión $\{u_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para algún $u \in \mathcal{C}([a,b])$, u_{k_n} converxe a u en $\mathcal{C}([a,b])$. Concluímos entón que u é un punto fixo de

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t,s)[f(s,\gamma(s,u(s))) - \gamma(s,u(s))]\,ds,$$

ou o que é o mesmo, a función u é solución do problema (2.1), tendo ademais que $u(t_0) = \lim_{n\to\infty} u_{k_n}(t_0) = u_{t_0}$. □

Vexamos cun exemplo que a monotonía de f é, de feito, necesaria para a continuidade das solucións.

Exemplo 3.8. Consideremos o seguinte problema diferencial

$$\begin{cases} u''(t) = u^3(t) - u^2(t), \quad t \in [0,1], \\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

É sinxelo ver que $\alpha(t) = -2$ é subsolución xa que $\alpha''(t) = 0 \ge -12 = (-2)^3 - (-2)^2$ e cumpre trivialmente as condicións de fronteira. Á súa vez temos que $\beta(t) = 2$ é sobresolución. É trivial ver que $u = 1$ e $u = 0$ son solucións, pero por exemplo $u = 0{,}5$ non o sería, violando así a continuidade das solucións. Isto débese a que $f(t,u(t))$ non é monótona crecente, como podemos claramente observar na Figura 3.3.

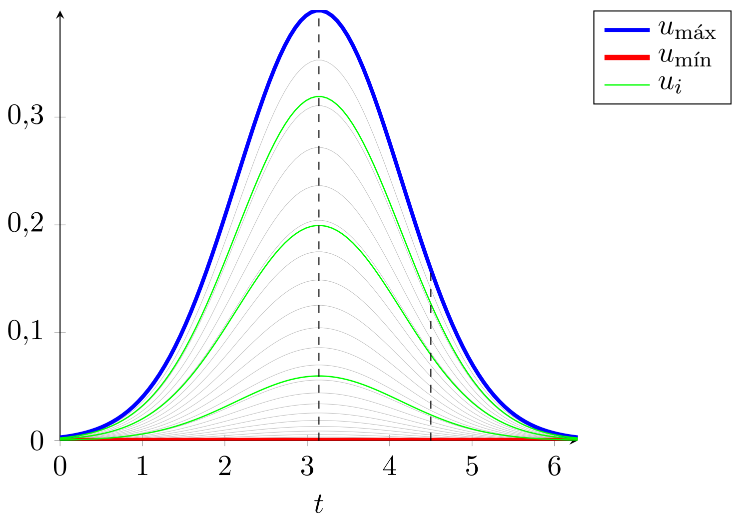

Figura 3.2: Representamos nesta figura o concepto da continuidade das solucións. Podemos ver representados $u_{\text{máx}}$ e $u_{\text{mín}}$ en azul e vermello, respectivamente e en verde as hipotéticas solución pasando polos puntos u_{t_i}. Vemos que para calquera t_i que collamos en $[0, 2\pi]$, existe unha solución u pasando por calquera punto u_{t_0} situado entre $u_{\text{mín}(t_i)}$ e $u_{\text{máx}}(t_i)$.

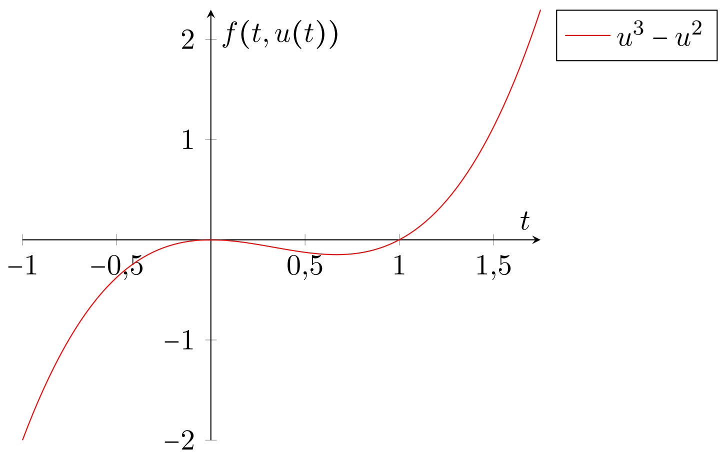

Figura 3.3: Representación da $f(t, u(t))$ do Exemplo 3.8, onde podemos observar que non é monotonamente crecente empregando $u(t) = t$.

Probaremos agora a afirmación realizada no Exercicio 2.1 de [3], que nos proporciona unha condición suficiente para a unicidade da solución nas hipóteses do Teorema 3.6.

Teorema 3.9. *Baixo as hipóteses do Teorema 3.6, se para algún $M > 0$ e para todo $(t, u_1), (t, u_2) \in E$*

$$u_1 \leq u_2 \Rightarrow f(t, u_1) - f(t, u_2) \leq M(u_1 - u_2),$$

entón existe unha única solución u do problema (2.1) *tal que* $\alpha \leq u \leq \beta$.

Demostración. Para comezar, por mor de estar nas hipóteses do Teorema 3.6, sabemos que existen solucións $u_{\text{máx}}$ e $u_{\text{mín}}$ tal que calquera outra solución u do problema cumpre

$$u_{\text{máx}} \leq u \leq u_{\text{mín}},$$

polo que, se demostramos que estas dúas son iguais quedaría demostrada a unicidade da solución.

Denotemos $u_{\text{mín}} = u_1$ e $u_{\text{máx}} = u_2$. Como ambas son solución temos que

$$u_1''(t) = f(t, u_1) \quad \text{e} \quad u_2''(t) = f(t, u_2),$$

con $u_i(a) = u_i(b)$ e $u_i'(a) = u_i'(b)$ para $i = 1, 2$. Logo, pola hipótese proposta polo noso teorema,

$$u_1''(t) - u_2''(t) = f(t, u_1(t)) - f(t, u_2(t)) \leq M(u_1(t) - u_2(t)) \leq 0.$$

Se agora denotamos $h(t) = u_1(t) - u_2(t)$ temos que $h''(t) \leq 0$ o que implica que $h'(t)$ é decrecente e polo tanto $h'(b) \leq h'(a)$ ou, o que é o mesmo,

$$u_1'(b) - u_2'(b) \leq u_1'(a) - u_2'(a).$$

Como $u_i'(a) = u_i'(b)$ para $i = 1, 2$, sabemos que isto último é unha igualdade. De todo o anterior deducimos que h' é unha función constante e que polo tanto h será da forma $h(t) = ct$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Finalmente, como tamén sabemos que $h(a) = h(b)$, podemos concluír que $h(t) = 0$ e que polo tanto $u_{\text{máx}} = u_{\text{mín}}$, habendo, por tanto, unha soa solución para o noso problema. □

3.2. Solucións en $W^{2,1}$ e as súas propiedades

Nesta nova sección seguiremos un esquema moi similar á anterior, xeneralizaremos aínda máis a Definición 2.1 e seguiremos a considerar o problema (2.1), pero neste caso pedindo soamente que a función f sexa L^1-Carathéodory. Ademais, enunciaremos os teoremas e resultados equivalentes aos presentados anteriormente, engadindo algún e acompañando todo isto de exemplos.

Definición 3.10. Dicimos que unha función $f : I \subset [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfai as condicións de Carathéodory ou que é unha función de Carathéodory se:

i. C.p.t. $t \in [a, b]$, a función $f(t, \cdot)$ definida en $\{s \in \mathbb{R}^n$ tal que $(t, s) \in I\}$ é continua,

ii. Para todo $s \in \mathbb{R}^n$, a función $f(\cdot, s)$ definida en $\{t \in [a,b]$ tal que $(t,s) \in I\}$ é medible.

Se ademais, para algún $p \in [1, \infty]$, a función Carathéodory f satisfai:

iii. para todo $r \in \mathbb{R}^+$, existe $h_r \in \mathrm{L}^p([a,b])$ tal que para todo $(t,s) \in I$ cumprindo $|s| \le r$, $|f(t,s)| \le h_r(t)$,

diremos que f é unha función L^p-Carathéodory ou que satisfai as condicións L^p-Carathéodory.

Como as solucións de (2.1) están en $W^{2,1}([a,b])$, espazo definido no Capítulo 1, se f é unha función L^1-Carathéodory podemos, de forma natural, buscar sub e sobresolucións en $W^{2,1}([a,b])$. Esta idea vese plasmada na seguinte definición onde, por simplicidade, estendemos $f(t,u)$ periodicamente da forma $f(t,u) = f(t+T, u)$, con $T = b - a$.

Definición 3.11. A función $\alpha \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ é unha $W^{2,1}$-subsolución de (2.1) se a súa extensión periódica a $\mathbb{R}$, definida por $\alpha(t) = \alpha(t+b-a)$, é tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$,
- Existe un intervalo aberto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ e c.p.t. $t \in I_0$ se cumpre que
$$\alpha''(t) \ge f(t, \alpha(t)).$$

Á súa vez, $\beta \in \mathcal{C}([a,b])$ con $\beta(a) = \beta(b)$ é unha $W^{2,1}$-sobresolución de (2.1) se a súa extensión periódica a $\mathbb{R}$, definida por $\beta(t) = \beta(t+b-a)$, é tal que para todo $t_0 \in \mathbb{R}$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$,
- Existe un intervalo aberto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$ e c.p.t. $t \in I_0$ cúmprese que
$$\beta''(t) \le f(t, \beta(t)).$$

Enunciaremos e probaremos agora o teorema principal relacionado coa existencia de solucións de (2.1), localizadas no espazo de funcións $W^{2,1}([a,b])$.

Teorema 3.12. *Sexan α e β $W^{2,1}$-sub e sobresolucións de* (2.1) *tal que $\alpha \le \beta$ e $f : E \to \mathbb{R}$ unha función* L^1*-Carathéodory, con*
$$E = \{(t,u) \in [a,b] \times \mathbb{R} \text{ tal que } \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)\}.$$
Entón o problema (2.1) *ten, ao menos, unha solución $u \in W^{2,1}([a,b])$ tal que, para todo $t \in [a,b]$ se cumpre que*
$$\alpha(t) \le u(t) \le \beta(t).$$

Demostración. De novo, como na demostración do Teorema 2.2, consideramos o problema (2.2). Para probar que este problema ten, ao menos, unha solución faremos un razoamento practicamente análogo ao realizado no Teorema 2.2. Podemos ver que o único aspecto relacionado co que buscamos probar que se modifica dunha demostración á outra é que agora f xa non é continua, senón que pasa a ser L^1-Carathéodory, unha propiedade máis débil. Este cambio o único que supón é que agora f xa non se pode acoutar por unha constante R_1 polo tanto, se atopamos unha nova cota de f para todos os casos nos que acoutabamos f por R_1 poderiamos aplicar de forma análoga todo o razoamento feito para o Teorema 2.2, chegando así á mesma conclusión. Busquemos agora esta nova cota.

Ao ser f unha función L^1-Carathéodory sabemos que se verifica iii. da Definición 3.10. Entón se tomamos $r = R_2$ sendo R_2 a cota utilizada para $\gamma(s, u(s))$ no resto da demostración, teremos que

$$|f(t, \gamma(s, u(s)))| \leq h_{R_2}(t),$$

con $h_{R_2} \in \mathrm{L}^1([a, b])$. Isto implica que f pode ser acoutada por unha función h_{R_2} integrable, que é o que buscabamos.

Só queda probar que esta solución cumpre que

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad t \in [a, b].$$

Procedemos outra vez de forma similar á demostración do Teorema 2.2, asumindo primeiramente o oposto desta afirmación, para chegar despois a unha contradición. Así, para algún $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\min_{t \in [a,b]} (u(t) - \alpha(t)) = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

Polo mesmo razoamento que fixemos na demostración do Teorema 3.5, derivamos e chegamos a que

$$u'(t_0) - D_- \alpha(t_0) \leq u'(t_0) - D^+ \alpha(t_0),$$

que descarta a opción de que $D^- \alpha(t_0) < D_+ \alpha(t_0)$, e, pola definición de $W^{2,1}$-subsolución, debe existir un intervalo aberto I_0, con $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ e c.p.t $t \in I_0$,

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)). \tag{3.1}$$

Ademais por ser t_0 un mínimo de $u - \alpha$ deducimos que $u'(t_0) - \alpha'(t_0) = 0$. Sabemos entón que existe un $r > 0$ tal que,

$$u'(t) - \alpha'(t) = \int_{t_0}^{t} (u''(s) - \alpha''(s))\, ds \leq \int_{t_0}^{t} [f(s, \alpha(s)) + u(s) - \alpha(s) - f(s, \alpha(s))]\, ds < 0,$$

para todo $t \in [t_0, r)$. É sinxelo ver que esta primeira desigualdade vén de substituír $u''(s)$ por $f(s, \alpha(s)) + u(s) - \alpha(s)$, segundo (2.2), e de considerar (3.1). Á segunda desigualdade, estrita neste caso, chegamos cun argumento moi similar ao realizado no Teorema 2.2, que nos di que ao coller un s moi próximo a t_0, i.e. $s \in [t_0, t]$, tense que $u(s) - \alpha(s) < 0$. Isto é unha contradición coa nosa hipótese de que t_0 é un mínimo da función $u - \alpha$.

De forma análoga probamos que $u(t) \leq \beta(t)$ e de igual forma que no Teorema 2.2 chegamos a que u, solución de (2.2), é solución de (2.1). □

Neste exemplo veremos a utilidade do Teorema 3.12 á hora de bucar solucións de problemas diferenciais.

Exemplo 3.13. Consideremos o problema

$$\begin{cases} u''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} u^2(t) = q(t), \quad t \in [0, 2\pi], \\ u(0) = u(2\pi), \; u'(0) = u'(2\pi), \end{cases}$$

onde $q \in \mathrm{L}^1([0, 2\pi])$. Para construír agora a nosa subsolución escribimos $q(t) = \bar{q} + \tilde{q}(t)$, con $\bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(s)\, ds$ o promedio de q, e buscamos unha subsolución da forma $\alpha(t) = A + w(t)$ con $\bar{w} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(s)\, ds = 0$ e $A \in \mathbb{R}$, Ademais queremos

$$\alpha''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \alpha^2(t) = w''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \alpha^2(t) \geq \bar{q} + \tilde{q}(t).$$

Tomemos w como a solución de

$$\begin{cases} w''(t) = \tilde{q}(t), \quad t \in [0, 2\pi], \\ w(0) = w(2\pi), \; w'(0) = w'(2\pi), \; \bar{w} = 0. \end{cases}$$

Sabemos que este problema ten solución xa que, por integración directa:

$$w''(t) = \tilde{q}(t) \Rightarrow w'(t) = w'(0) + \int_0^t \tilde{q}(s)\, ds \Rightarrow w(t) = w(0) + w'(0)t + \int_0^t \int_0^r \tilde{q}(s)\, ds\, dr,$$

e, usando as condicións de fronteira $w(0) = w(2\pi)$ obtemos $w'(0)$ despexando en

$$0 = w'(0) 2\pi + \int_0^{2\pi} \int_0^r \tilde{q}(s)\, ds\, dr.$$

De $w'(0) = w'(2\pi)$ deducimos que $\tilde{q}$ ten promedio 0, o cal xa era coñecido. Por último para obter $w(0)$ despexamos en

$$0 = \int_0^{2\pi} w(t)\, dt = \left[w(0)t + w'(0) \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \int_0^t \int_0^r \tilde{q}(s)\, ds\, dr\, dt,$$

donde esta última expresión vén dada polo feito de que w ten promedio 0.

Así, $\|\alpha'\|_\infty = \|w'\|_\infty \leq \|\tilde{q}\|_{\mathrm{L}^1}$ e escollendo $A = -w(0)$, podemos escribir, para todo $t \in [0, 2\pi]$, $|\alpha(t)| \leq \|\tilde{q}\|_{\mathrm{L}^1} t$. Comprobamos estas dúas últimas desigualdades:

- $\|w'\|_\infty \leq \|\tilde{q}\|_{L^1}$.
  Polo Teorema de Rolle, como $w(0) = w(2\pi)$, se ten que existe $t_0 \in (0, 2\pi)$, tal que $w'(t_0) = 0$ e entón, para $t \geq t_0$,
  $$w''(t) = \tilde{q}(t) \Rightarrow w'(t) = w'(t_0) + \int_{t_0}^{t} \tilde{q}(s)\, ds$$
  $$\Rightarrow \|w'\|_\infty = |w'(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} \tilde{q}(s)\, ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |\tilde{q}(s)|\, ds \leq \int_0^{2\pi} |\tilde{q}(s)|\, ds = \|\tilde{q}\|_{L^1}.$$
  Analogamente para $t < t_0$.

- $|\alpha(t)| \leq \|\tilde{q}\|_{L^1} t$.
  Como $A = -w(0)$, entón $\alpha(0) = 0$ e deducimos que
  $$\alpha(t) = \alpha(0) + \int_0^t \alpha'(s)\, ds \Rightarrow |\alpha(t)| = \left| \int_0^t \alpha'(s)\, ds \right| \leq \int_0^t |\alpha'(s)|\, ds$$
  $$\leq \int_0^t \|\tilde{q}\|_{L^1}\, ds = \|\tilde{q}\|_{L^1} t.$$

Finalmente comprobamos que
$$\alpha''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} \alpha^2(t) - \bar{q} - \tilde{q}(t) \geq -\|\tilde{q}\|_{L^1}^2 (2\pi)^{3/2} - \bar{q},$$
o cal, dado que $\alpha''(t) = \tilde{q}(t)$, se reduce a comprobar que
$$-\frac{1}{\sqrt{t}} \alpha^2(t) \geq -\|\tilde{q}\|_{L^1}^2 (2\pi)^{3/2}.$$
En efecto,
$$\frac{1}{\sqrt{t}} \alpha(t)^2 = \frac{1}{\sqrt{t}} |\alpha(t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{t}} \left| \int_0^t \alpha'(s)\, ds \right|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\int_0^t |\alpha'(s)|\, ds \right)^2$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\int_0^t \|\tilde{q}\|_{L^1}\, ds \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\Big[\|\tilde{q}\|_{L^1} s \Big]_0^t \right)^2$$
$$= \|\tilde{q}\|_{L^1}^2 t^{3/2} \leq \|\tilde{q}\|_{L^1}^2 (2\pi)^{3/2}$$
e $\alpha(t) = w(t) - w(0)$ é unha subsolución se
$$\|\tilde{q}\|_{L^1}^2 (2\pi)^{3/2} + \bar{q} \leq 0,$$
xa que α verifica as condicións de fronteira.

Definimos agora $\beta(t) = \alpha(t) + B \geq \alpha(t)$ e vexamos que é sobresolución. É claro que β cumpre as condicións de fronteira, xa que tamén as cumpre α. Por outro lado temos que $\beta''(t) = \alpha''(t) = \tilde{q}(t)$ e logo
$$\beta''(t) - \frac{1}{\sqrt{t}} (\beta(t))^2 \leq \bar{q} + \tilde{q}(t) \iff -\frac{1}{\sqrt{t}} (\alpha(t) + B)^2 \leq \bar{q}.$$
Como $\bar{q}$ é unha constante, se B é suficientemente grande entón, β é sobresolución, podendo aplicar así o Teorema 3.12.

Despois de modificar as definicións, as Proposicións 3.3 e 3.4 deixan de ser certas, mais podemos probar un resultado practicamente equivalente o que nos leva a afirmar a existencia de solucións entre o máximo das subsolucións e o mínimo das sobresolucións.

Teorema 3.14. *Sexan* α_i *con* $i \in \{1, \dots, n\}$ $W^{2,1}$*-subsolucións e* β_j *con* $j \in \{1, \dots, m\}$ $W^{2,1}$*-sobresolucións do problema* (2.1)*. Consideremos á súa vez*

$$\alpha(t) := \max_{1 \le i \le n} \alpha_i(t) \quad e \quad \beta(t) := \min_{1 \le j \le m} \beta_j(t),$$

tales que $\alpha \le \beta$*. Sexa agora* $f : E \to \mathbb{R}$ *unha función* L^1*-Carathéodory con*

$$E = \{(t, u) \in [a, b] \times \mathbb{R} \text{ tal que } \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)\}.$$

Logo o problema (2.1) *ten, ao menos, unha solución* $u \in W^{2,1}([a, b])$ *tal que para todo* $t \in [a, b]$*,*

$$\alpha(t) \le u(t) \le \beta(t).$$

Demostración. Consideramos o problema auxiliar

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = \bar{f}(t, u(t)) - \gamma(t, u(t)), & t \in [a, b], \\ u(a) = u(b), \ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{3.2}$$

con $\gamma(t, u(t))$ a función definida no Teorema 2.2 co mesmo nome, é dicir,

$$\gamma(t, u(t)) = \begin{cases} \alpha(t), & \text{se } u(t) < \alpha(t), \\ u(t), & \text{se } \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t), \\ \beta(t), & \text{se } u(t) > \beta(t), \end{cases}$$

e $\bar{f}(t, u(t))$ a función dada por

$$\bar{f}(t, u(t)) = \begin{cases} \min\limits_{1 \le i \le n} f(t, \max\{\alpha_i(t), u(t)\}), & \text{se } u(t) \le \alpha(t), \\ f(t, u(t)), & \text{se } \alpha(t) < u(t) < \beta(t), \\ \max\limits_{1 \le j \le m} f(t, \min\{\beta_j(t), u(t)\}), & \text{se } u(t) \ge \beta(t). \end{cases}$$

Temos outra vez que a demostración deste teorema é análoga á do Teorema 3.12 co cal o problema (3.2) ten unha solución e só nos queda probar que para todo $t \in [a, b]$,

$$\alpha(t) \le u(t) \le \beta(t).$$

Pera demostrar este feito procederemos de novo por redución ao absurdo asumindo que, despois de estender α e u periodicamente, para algún $t_0 \in [a, b]$ e $i \in \{1, \dots, n\}$ temos que

$$\min_{t \in [a,b]} (u(t) - \alpha(t)) = u(t_0) - \alpha_i(t_0) = \min_{t \in [a,b]} (u(t) - \alpha_i(t)) < 0.$$

Por un razoamento análogo ao seguido no Teorema 3.12 chegamos á contradición buscada e, de igual forma, probamos tamén $u(t) \le \beta(t)$ para chegar ao resultado. $\square$

A diferenza de capítulos anteriores, neste caso mencionaremos un resultado que enuncia condicións suficientes para que o problema (2.1) teña infinitas solucións. Pese a que neste traballo non indagaremos na súa demostración, a proba completa pode atoparse en [3].

Proposición 3.15. *Sexa $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfacendo as condicións L^1-Carathéodory. Tomamos agora as sucesións $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ cumprindo $p_k < q_k < r_k < s_k < p_{k+1}$. Definimos $g_{i,k} = \bar{g}_{i,k} + \tilde{g}_{i,k}$, onde $\bar{g}_{i,k}$ vén dada por*

$$\bar{g}_{i,k} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g_{i,k}(t)\, dt,$$

e construímos as sucesións $\{g_{0,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{g_{1,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1([a,b])$ Finalmente, asumamos que:

i. c.p.t. $t \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in (p_k, q_k)$, temos que

$$f(t,u(t)) \le g_{0,k}(t) \text{ e } \bar{g}_{0,k}(t) \le 0.$$

ii. c.p.t. $t \in [a,b]$ e para todo $u \in (r_k, s_k)$,

$$f(t,u(t)) \ge g_{1,k}(t) \text{ e } \bar{g}_{1,k} \ge 0.$$

iii. $q_k - p_k \ge \frac{b-a}{6}\|\tilde{g}_{0,k}\|_{\mathrm{L}^1}$ e $s_k - r_k \ge \frac{b-a}{6}\|\tilde{g}_{1,k}\|_{\mathrm{L}^1}$.

Entón o problema (2.1) ten infinitas solucións $u_k \in [p_k, s_k]$.

A continuación enunciaremos e probaremos teoremas relacionados coa estrutura do conxunto de solucións adaptándonos ás novas definicións de sub e sobresolucións. Estes teoremas veñen a ser unha adaptación dos ilustrados no capítulo anterior. As probas destes dous teoremas seguintes resultan análogas ás feitas para os Teoremas 3.6 e 3.7, pero agora usando que a existencia das solucións vén dada polo Teorema 3.12.

Neste primeiro teorema probaremos a existencia de solucións maximais e minimais, de forma que todas as solucións do noso problema quedarán localizadas entre estas.

Teorema 3.16. *Sexan α e β $W^{2,1}$-sub e sobresolucións de (2.1) verificando $\alpha \le \beta$ e sendo $f : E \to \mathbb{R}$ unha función que cumpra as condicións L^1-Carathéodory con*

$$E = \{(t,u(t)) \in [a,b] \times \mathbb{R} \text{ tal que } \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)\}.$$

Entón o problema (2.1) ten unha solución minimal $u_{\text{mín}} \in W^{2,1}([a,b])$ e unha solución maximal $u_{\text{máx}} \in W^{2,1}([a,b])$ en $[\alpha,\beta]$, de xeito que

$$\alpha \le u_{\text{mín}} \le u_{\text{máx}} \le \beta,$$

e de tal forma que todas as solucións restantes, satisfacendo $\alpha \le u \le \beta$, se encontrarán entre estas dúas, é dicir,

$$u_{\text{mín}} \le u \le u_{\text{máx}}.$$

Finalmente daremos unha condición suficiente para a existencia dun continuo de solucións. Nótese que unha importante diferenza con respecto ao Teorema 3.5 do capítulo anterior é que neste caso non pedimos que f sexa continua.

Teorema 3.17. *Asumamos as hipóteses do Teorema 3.16 e supoñamos que f é monótona crecente con respecto a u. Tomemos $t_0 \in [a, b]$ e $u_{t_0} \in \mathbb{R}$ con $u_{\text{mín}}(t_0) \leq u_{t_0} \leq u_{\text{máx}}(t_0)$. Entón o problema* (2.1) *ten unha solución $u \in W^{2,1}([a, b])$ tal que $u_{\text{mín}} \leq u \leq u_{\text{máx}}$ e $u(t_0) = u_{t_0}$.*

Capítulo 4

Variacións do problema

Ata o de agora todo o noso traballo estivo enfocado á procura de solucións, e ao estudo das propiedades das mesmas, dun problema direrencial en concreto. Despois buscamos xeneralizar as propiedades que pediamos para este problema pero sen modificar o problema base en si. Polo tanto imos dedicar este último capítulo a posibles variacións que podemos realizar no problema a considerar, en particular introduciremos dependencia da derivada de u e modificaremos as condicións de fronteira.

Neste capítulo non realizaremos as probas dos enunciados presentados, posto que o obxectivo é mostrar a versatilidade do método á hora de buscar solucións, non entrar en detalle nos resultados mostrados, os cales moitas veces serán de proba similar aos presentados en anteriores capítulos.

4.1. Dependencia da derivada

Introduciremos nesta sección a dependencia da derivada, isto é, agora a función f dependerá tamén da derivada de u. Isto causará que para poder resolver o problema necesitemos certas condicións engadidas ás que xa coñecemos. A continuación detallaremos algunhas delas e presentaremos algúns resultados relevantes.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in [a,b], \\ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b). \end{cases} \tag{4.1}$$

Teremos entón que o operador $Nu := f(\cdot, u, u')$ estará definido en $\mathcal{C}^1([a,b])$, polo que tamén o estará o problema de punto fixo correspondente. Como xa sabemos dos capítulos precedentes, para aplicar o Teorema de Schauder precisamos cotas a priori sobre u, as cales virán dadas polas sub e sobresolucións correspondentes. A principal diferenza chega en que agora tamén precisaremos cotas a priori sobre a derivada, u'. Estas condicións poderán ser obtidas de diferentes formas, como a condición de Nagumo ou a natureza da non linealidade de f.

Unha das primeiras formas que veremos de introducir cotas a priori na derivada será no caso particular de considerar a ecuación de Rayleigh, que vén dada por

$$\begin{cases} u''(t) + g(u'(t)) + h(t, u(t), u'(t)) = 0, & t \in [a,b], \\ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{4.2}$$

con $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e h unha función Carathéodory.

Proposición 4.1. *Sexa $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e h unha función Carathéodory. Supoñamos que para todo $s > 0$ e para algún $h_s \in \mathrm{L}^2([a,b])$, h satisfai*

$$c.p.t.\ t \in [a,b],\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad |u| \le s \Rightarrow |h(t, u(t), v(t))| \le h_s(t).$$

Entón, para todo $r > 0$ existe $R > 0$ tal que toda solución u de (4.2) con $\|u\|_\infty \le r$ cumpre que $\|u'\|_\infty < R$.

Se agora facemos máis esixente a cota de h, poderemos obter unha cota de u' independente de r.

Proposición 4.2. *Sexa $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e h unha función Carathéodory. Supoñamos que existe $h_0 \in \mathrm{L}^2([a,b])$ tal que*

$$c.p.t.\ t \in [a,b],\ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad |h(t, u(t), v(t))| \le h_0(t).$$

Entón, existe $R > 0$ tal que toda solución u de (4.2) cumpre que $\|u'\|_\infty < R$.

Outro exemplo para o que podemos calcular cotas a priori na derivada é o caso da ecuación de Liénard, definida por

$$\begin{cases} u''(t) + g(u(t))u'(t) + h(t, u(t)) = 0, & t \in [a,b], \\ u(a) = u(b),\ u'(a) = u'(b), \end{cases} \tag{4.3}$$

con $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e h unha función L^1-Carathéodory.

Proposición 4.3. *Sexan $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ e h unha función L^1-Carathéodory. Entón, para todo $r > 0$, existe $R > 0$ tal que toda solución u de (4.3) con $\|u\|_\infty \le r$ cumpre que $\|u'\|_\infty < R$.*

Falaremos agora da chamada condición de Nagumo, que será requirida cando a ecuación non teña ningunha estrutura especial. Nestes casos unha cota a priori na derivada pode obterse para ecuacións non lineais que non medren moi rápido con respecto da derivada. Un primeiro exemplo será a condición de Bernstein, dada por

$$|f(t,u(t),v(t))| \le A + Bv^2(t),$$

para a cal se pode probar que, para calquera $r > 0$, existe $R > 0$ tal que calquera solución u de

$$u''(t) = f(t,u(t),u'(t)), \quad t \in [a,b], \tag{4.4}$$

con $\|u\|_\infty \le r$ cumpre que $\|u'\|_\infty \le R$.

Este resultado foi xeneralizado por M. Nagumo obtendo así a que hoxe coñecemos por condición de Nagumo, a cal é amplamente utilizada para obter cotas a priori para a derivada dunha función. Para enunciar dita condición consideremos $\alpha, \beta \in \mathcal{C}([a,b])$ tales que $\alpha \le \beta$, e definamos

$$E = \{(t,u(t),v(t)) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \alpha(t) \le u(t) \le \beta(t)\}.$$

Diremos que $f : E \to \mathbb{R}$ cumpre a condición de Nagumo se satisfai que

$$|f(t,u(t),v(t))| \le \phi(|v|), \quad \forall (t,u(t),v(t)) \in E,$$

con $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ unha función continua positiva cumprindo que

$$\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\phi(s)} = \infty.$$

A seguinte proposición indícanos como obter a cota a priori na derivada a partir da condición de Nagumo, que era o que estabamos a buscar.

Proposición 4.4. *Sexan $\bar\alpha, \bar\beta \in \mathcal{C}([a,b])$ tales que $\bar\alpha \le \bar\beta$. Definamos*

$$E = \{(t,u(t),v(t)) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \bar\alpha(t) \le u(t) \le \bar\beta(t)\},$$

e sexa $\bar\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ unha función continua positiva satisfacendo que

$$\int_r^\infty \frac{s\,ds}{\bar\phi(s)} > \max_{t\in[a,b]} \bar\beta(t) - \min_{t\in[a,b]} \bar\alpha(t),$$

onde $r = \max\left\{\frac{\bar\beta(b)-\bar\alpha(a)}{b-a}, \frac{\bar\beta(a)-\bar\alpha(b)}{b-a}\right\} \ge 0$.

Entón existe $R > 0$ tal que para toda función continua $f : E \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$|f(t,u(t),v(t))| \le \bar\phi(|v|), \quad \forall (t,u(t),v(t)) \in E,$$

e para toda solución u de (4.4) en $[a,b]$ tal que $\bar\alpha \le u \le \bar\beta$, temos que

$$\|u'\|_\infty < R.$$

Finalmente enunciaremos o resultado, equivalente aos vistos en anteriores capítulos, referente á existencia de solucións entre $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións cando se introduce dependencia da derivada.

Consideremos de novo o problema (4.1). Nótese que a dependecia da derivada non vai cambiar de forma significativa a nosa definición de $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolución.

Definición 4.5. Diremos que $\alpha \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ é unha $\mathcal{C}^2$-subsolución de (4.1) se a súa extensión periódica a $\mathbb{R}$, $\alpha(t+b-a)$ que por simplicidade tamén denotaremos α, é tal que para calquera $t_0 \in \mathbb{R}$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$.
- Existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$, e unha función $\alpha_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$ tal que
  i. $\alpha(t_0) = \alpha_0(t_0)$ e $\alpha(t) \geq \alpha_0(t)$ para todo $t \in I_0$,
  ii. $\alpha_0''(t_0)$ existe e $\alpha_0''(t_0) \geq f(t_0, \alpha_0(t_0), \alpha_0'(t_0))$.

Á súa vez, $\beta \in \mathcal{C}([a,b])$ tal que $\beta(a) = \beta(b)$ é unha $\mathcal{C}^2$-sobresolución de (4.1) se a súa extensión periódica a $\mathbb{R}$, $\beta(t+b-a)$ que por simplicidade denotaremos tamén por β, é tal que para calquera $t_0 \in \mathbb{R}$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D_+\beta(t_0) < D^-\beta(t_0)$.
- Existe un intervalo aberto I_0 con $t_0 \in I_0$, e unha función $\beta_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$ tal que
  i. $\beta(t_0) = \beta_0(t_0)$ e $\beta(t) \leq \beta_0(t)$ para todo $t \in I_0$,
  ii. $\beta_0''(t_0)$ existe e $\beta_0''(t_0) \leq f(t_0, \beta_0(t_0), \beta_0'(t_0))$.

Teorema 4.6. *Sexan α e β $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións de* (4.1) *tales que $\alpha \leq \beta$,*

$$E = \{(t, u(t), v(t)) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)\},$$

$\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ unha función contiunua positiva con

$$\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\phi(s)} = \infty,$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ unha función continua que cumpre a condición de Nagumo. Entón o problema (4.1) *ten, ao menos, unha solución $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tal que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

De forma análoga poderiamos xeneralizar estos resultados engadindo dependencia da derivada ao traballo realizado no capítulo anterior, relativo ás solucións en $W^{2,1}$.

4.2. Outras condicións de fronteira

Nesta sección final modificaremos as condicións de fronteira periódicas impostas sobre o problema orixinal e desenvolveremos, baixo estas novas condicións, resultados análogos aos presentados anteriormente, para as $\mathcal{C}^2$-solucións. Nótese que aínda que só enunciaremos resultados relacionados coas $\mathcal{C}^2$-solucións, estes se poden xeneralizar para $W^{1,2}$ de forma similar ao xa realizado.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ a_1 u(a) - a_2 u'(a) = A_0, \\ b_1 u(b) - b_2 u'(b) = B_0, \end{cases} \tag{4.5}$$

con $A_0, B_0, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2, b_2 \in \mathbb{R}^+$, $a_1^2 + a_2^2 > 0$ e $b_1^2 + b_2^2 > 0$. Este problema, coñecido como problema de condicións de fronteira separadas, contén como casos particulares a:

- Problema de Dirichlet

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u(a) = A_0, \ u(b) = B_0. \end{cases}$$

- Problema de Neumann

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u'(a) = A_0, \ u'(b) = B_0. \end{cases}$$

- Problema de Robin

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u'(a) = A_0, \ u(b) = B_0. \end{cases}$$

Adaptamos agora as definicións de $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións a este novo problema.

Definición 4.7. Diremos que unha función $\alpha \in \mathcal{C}([a, b])$ é unha $\mathcal{C}^2$-subsolución de (4.5) se:

(a) Para calquera $t_0 \in (a, b)$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$.
- Existe un intervalo aberto $I_0 \subset (a, b)$ con $t_0 \in I_0$, e unha función $\alpha_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$ tal que

    i. $\alpha(t_0) = \alpha_0(t_0)$ e $\alpha(t) \geq \alpha_0(t)$ para todo $t \in I_0$,

ii. $\alpha_0''(t_0)$ existe e $\alpha_0''(t_0) \geq f(t_0, \alpha_0(t_0))$.

(b) $a_1\alpha(a) - a_2 D^+\alpha(a) \leq A_0,\ b_1\alpha(b) + b_2 D_-\alpha(b) \leq B_0$.

Á súa vez diremos que unha función $\beta \in \mathcal{C}([a,b])$ é unha $\mathcal{C}^2$-sobresolución de (4.5) se:

(a) para calquera $t_0 \in (a,b)$ se ten unha das seguintes condicións:

- $D_+\beta(t_0) < D^-\beta(t_0)$.
- Existe un intervalo aberto $I_0 \subset (a,b)$ con $t_0 \in I_0$, e unha función $\beta_0 \in \mathcal{C}^1(I_0)$ tal que

  i. $\beta(t_0) = \beta_0(t_0)$ e $\beta(t) \leq \beta_0(t)$ para todo $t \in I_0$,

  ii. $\beta_0''(t_0)$ existe e $\beta_0''(t_0) \leq f(t_0, \beta_0(t_0))$.

(b) $a_1\beta(a) - a_2 D_+\beta(a) \geq A_0,\ b_1\beta(b) + b_2 D^-\beta(b) \geq B_0$.

A continuación formularemos os teoremas, correspondentes ao problema (4.5), de existencia de solución e da súa localización entre solucións minimais e maximais.

Teorema 4.8. *Sexan $A_0, B_0, a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2, b_2 \in \mathbb{R}^+$, $a_1^2 + a_2^2 > 0$ e $b_1^2 + b_2^2 > 0$. Supoñamos que α, $\beta \in \mathcal{C}([a,b])$ son $\mathcal{C}^2$-sub e sobresolucións do problema* (4.5) *tales que $\alpha \leq \beta$. Tomemos agora*

$$E = \{(t, u(t)) \in [a,b] \times \mathbb{R} \text{ tales que } \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)\}$$

e $f : E \to \mathbb{R}$ unha función continua.

Entón o problema (4.5) *ten, ao menos, unha solución $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ tal que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in [a,b].$$

Bibliografía

[1] S. R. Bernfeld e V. Lakshmikantham. *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems*. Elsevier Science, 1974.

[2] A. Cabada. *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer Briefs in Mathematics, 2014.

[3] C. De Coster e P. Habets. *Two-point Boundary Value Problems: Lower and Upper Solutions*. Elsevier Science, 2006.

[4] J. L. Kelley. *General topology*. Springer Verlag, 1955.

[5] G.S. Ladde, V. Lakshmikantham e A.S. Vatsala. *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*. Pitman, 1985.

[6] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.

[7] J. Schauder. *Der Fixpunktsatz in Funktionalraümen*. Studia Mathematica **2**, (1930), pp. 171–180.