FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Aplicacións da teoría de xogos ao problema do passepartout

Antón de la Fuente Suárez-Pumariega

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Aplicacións da teoría de xogos ao problema do passepartout

Antón de la Fuente Suárez-Pumariega

Xullo de 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Estatística e Investigación Operativa
Título: Aplicacións da teoría de xogos ao problema do passepartout
Breve descrición do contido
Nun sistema de passepartout, un grupo de provedores dun certo servizo deciden emitir un passepartout aos seus clientes que permite utilizar servizos específicos durante un período limitado de tempo a un prezo fixo. Este tipo de sistema é bastante común e atopámolo, por exemplo, no ámbito do transporte público ou de diversas actividades culturais. O problema do passepartout consiste en como dividir os beneficios conxuntos obtidos pola venta dos passepartouts. Neste traballo, preténdese facer unha revisión de diferentes solucións a este problema ofrecidas dende a teoría de xogos cooperativos, tendo en conta que neste tipo de xogos, suponse que un conxunto de axentes obteñen un beneficio común e ten entre os seus obxectivos proporcionar mecanismos de repartición do mesmo entre os axentes involucrados. O estudo das propiedades matemáticas das distintas solucións acompañarase da ilustración de conceptos e resultados, polo medio de datos tomados dun problema real.
Recomendacións
É de interese o uso de ferramentas informáticas para a obtención de solucións, como por exemplo a libraría Game Theory de R.

Índice xeral

Resumo **VIII**

Introdución **XI**

0.1. A teoría de xogos . . . XI
0.2. Motivación do problema do passepartout . . . XII

1. Introdución aos xogos cooperativos **1**

1.1. Xogos cooperativos . . . 1
1.2. O núcleo . . . 2
1.3. O valor de Shapley . . . 4
1.4. Xogos convexos . . . 17
1.5. Problemas de bancarrota . . . 19

2. O problema do passepartout **25**

2.1. O modelo de V. Ginsburgh e I. Zang . . . 25
2.1.1. Presentación do modelo . . . 25
2.1.2. O valor de Shapley como solución . . . 26
2.2. O modelo de A. Estévez Fernández . . . 30
2.2.1. Modelo de bancarrota . . . 30
2.2.2. Discusión sobre a regra de división . . . 31

3. Outros modelos e un caso real **35**

3.1. Os modelos de G. Bergantiños e J. D. Moreno Ternero . . . 36
3.1.1. O primeiro modelo . . . 36
3.1.2. O segundo modelo . . . 42
3.2. Estudo dun caso real . . . 48

Conclusións **53**

Bibliografía **55**

A. Código de R **57**

Resumo

Nun sistema de passepartout, un grupo de provedores de servizos deciden emitir un passepartout que permite aos seus clientes acceder aos seus servizos durante un período limitado de tempo e a un prezo fixo. O problema do passepartout consiste en como dividir os beneficios comúns obtidos pola venda dos passepartouts.

Neste traballo abordamos esta cuestión empregando diferentes ferramentas que nos proporciona a teoría de xogos cooperativos, centrándonos no caso no que o sistema de passepartout está formado exclusivamente por museos.

Abstract

In a passepartout system, a group of service providers decide to offer a passepartout to their clients which allows them to access to its services for a limited period of time for a fixed price. The passepartout's problem consists in how to divide the common benefits obtained by the passepartouts' sale.

In this work we approach this issue employing different tools provided by the cooperative game theory, focusing in the case in which the passepartout system is formed exclusively by museums.

Introdución

0.1. A teoría de xogos

En González-Díaz et al. (2010), libro que tomamos como referencia e no que principalmente se basea o primeiro capítulo deste traballo, defínese a *teoría de xogos* como unha teoría matemática que se encarga do estudo de problemas de decisión interactivos. Estes problemas son aqueles nos que hai un grupo de dous ou máis axentes que teñen que tomar decisións particulares. En función das decisións que toman todos os axentes, obtense un resultado, e cada axente ten as súas preferencias dentro do conxunto dos diferentes posibles resultados.

Seguindo a terminoloxía habitual da teoría de xogos, chamamos *xogadores* aos axentes, *xogos* aos propios problemas de decisión e *estratexias* ás decisións dispoñibles para os xogadores.

A teoría de xogos clásica é unha teoría normativa ideal, pois indica, para cada xogo en particular, como deberían comportarse xogadores racionais. Por xogadores racionais entendemos aqueles que: saben o que queren, o seu único obxectivo é conseguilo e son capaces de saber cales son as mellores estratexias para facelo. En Osborne and Rubinstein (1994), considérase que este feito pode resultar rechamante e exponse o seguinte: "Cando falamos de xogos na vida real, acotío valoramos a asimetría entre individuos en tanto en canto as súas habilidades ou intelixencia. Por exemplo, algúns xogadores poderían ter un mellor entendemento dunha situación, ou máis habilidade para analizala. Estas diferenzas, que son críticas se analizamos situacións reais, non son estudadas na teoría de xogos actual, [...] polo que modelar asimetrías nas habilidades dos diferentes xogadores para analizar unha situación presenta un reto para a investigación futura, que xa comezou a ser abordado polos modelos de racionalidade limitada."

En Myerson (1991) exponse que os teóricos de xogos tratan de entender o conflito e a cooperación mediante o estudo de modelos cuantitativos e exemplos hipotéticos. Estes exemplos poden ser versións incriblemente simplificadas de problemas da vida real, o cal permite realizar sobre eles, de maneira máis sinxela, unha análise sobre cales son as cuestións principais que os caracterizan. Deste modo, aínda que un nunca vaia a atoparse nunha situación na que as posicións dos distintos axentes sexan tan claras e estean tan ben determinadas, poderá entender mellor o problema real ao que se afronta mediante o estudo destas abstraccións.

A teoría de xogos ocúpase de modelos tanto cooperativos como non cooperativos. A diferenza entre estes dous tipos de modelos é explicada en González-Díaz et al. (2010), a través de van Damme and Furth (2002): os modelos non cooperativos asumen que todas as posibilidades de cooperación foron incluídas como movementos formais no xogo, mentres que os xogos cooperativos son "incompletos" e permiten aos xogadores actuar ao marxe das normas específicas que foron detalladas no xogo. A necesidade de usar modelos cooperativos foi percibida polos teóricos de xogos dende os primeiros traballos, pois nalgunhas situacións os mecanismos de cooperación son demasiado complexos para ser descritos na súa totalidade por un modelo matemático. Deste xeito, a teoría de xogos cooperativa trata con coalicións e asignacións, considerando grupos de xogadores que queren repartir o beneficio derivado da súa colaboración. Por outro lado, a teoría de xogos non cooperativa trata con estratexias e pagos, considerando que os xogadores queren usar diferentes estratexias para maximizar o pago que obteñen.

0.2. Motivación do problema do passepartout

Supoñamos que unha serie de provedores de servizos deciden asociarse para dar conxuntamente aos seus clientes a posibilidade de ter, durante un determinado período de tempo, libre acceso as súas prestacións mediante a compra dun bono. Nesta situación, preséntase o problema de como dividir os beneficios obtidos pola venda deste bono, que de aquí en adiante denominamos *passepartout*, entre os diferentes axentes asociados que o ofertan. Denominada en Estévez-Fernández et al. (2012) como *problema do passepartout*, esta cuestión aparece por primeira vez na literatura en Ginsburgh e Zang (2001).

Podemos atopar multitude de exemplos na vida real nos que unha serie de provedores de servizos elixen este modelo de negocio, que chamamos *sistema de passepartout*, como por exemplo o "Nederlandse Museumjaarkaart" en Holanda e o "Great British Heritage Pass" en Reino Unido, no que participan distintos museos; ou o "Card Plus" en Copenhague, co que ademais de ter acceso aos museos e parques de atraccións da cidade, tamén pode usarse o transporte público da mesma. Neste traballo centrámonos no caso no que a natureza dos servizos aos que brinda acceso o passepartout é a mesma, e seguindo o exemplo da literatura actual na que se estuda o problema do passepartout, consideramos que os distintos axentes que se asocian son museos. Na busca dunha regra de repartición que asigne de forma xusta a cada un dos museos a parte que lle corresponde dos beneficios xerados coa venda dos passepartouts, xorden preguntas como se debemos ter en conta o número de visitantes que ten cada museo e o prezo das súas entradas individuais, ou que propiedades debe cumprir dita regra.

No capítulo 1 deste traballo facemos unha repaso dos conceptos teóricos da teoría de xogos cooperativos que empregamos máis adiante para abordar o problema do passepartout. No capítulo 2 estudamos os modelos de Victor Ginsburgh e Israel Zang (2001, 2003) e de Arantza Estévez Fernández, Peter Borm e Herbert Hammers (2012), nos que se aproxima o problema que estamos a tratar dende distintas perspectivas. No capítulo 3 presentamos os modelos propostos por Gustavo Bergantiños e Juan D. Moreno Ternero (2015, 2016), que xeneralizan os vistos no capítulo 2. Terminamos o traballo estudando o caso concreto dos museos de Xénova, Italia, no ano 2007. Para rematar, incluímos a bibliografía empregada e un apéndice onde amosamos o código de **R** que necesitamos para a análise do caso dos museos de Xénova mencionado.

Capítulo 1

Introdución aos xogos cooperativos

1.1. Xogos cooperativos

Nos xogos cooperativos, os xogadores comprométense a actuar dunha forma socialmente óptima e a cuestión principal a tratar é como repartir os beneficios froito da súa cooperación. Polo tanto, son elementos fundamentais deste tipo de xogos os diferentes subgrupos de xogadores que se poden formar, que denominamos *coaliciónS*, e o conxunto de resultados que cada coalición pode obter sen importar o que fagan o resto de xogadores que non forman parte dela. Asumindo tamén que os xogadores poden establecer acordos vinculantes, son obxecto de atención nocións como a xustiza, a estabilidade e a equidade.

De aquí en adiante, denotamos por $N := \{1, ..., n\}$ o conxunto de xogadores. Dicimos ademais que cada $S \subset N$ é unha coalición, sendo $|S|$ o número de xogadores que forman a coalición S.

Neste capítulo centrámonos en tratar a clase dos xogos cooperativos formada polos xogos de *utilidade transferible*, ou xogos TU, que se caracterizan porque os beneficios xerados polas distintas coalicións poden repartirse libremente e sen ningunha restrición entre os xogadores que as forman.

Definición 1.1. Un *xogo de utilidade transferible* é un par (N, v), sendo N o conxunto de xogadores e $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$, denominada *función característica*, unha función tal que $v(\emptyset) = 0$, onde 2^N é o conxunto de todos os subconxuntos de N e por $\mathbb{R}$ denotamos o conxunto dos números reais.

Dada unha coalición $S \subset N$, dicimos que $v(S)$ é o seu valor, e representa o beneficio que poden obter os membros da coalición S independentemente do que fagan o resto de xogadores. Denotamos por G^N o conxunto de todos os xogos de utilidade transferible cun conxunto de xogadores N e, en xeral, identificamos o xogo (N, v) simplemente coa súa función característica v.

Pasamos agora a definir unha clase de xogos TU especialmente importante, a dos xogos superaditivos.

Definición 1.2. Un xogo $v \in G^N$ é *superaditivo* se, para cada par $S, T \subset N$, con $S \cap T = \emptyset$,

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Denotamos por SG^N o conxunto de todos os xogos TU de G^N que son superaditivos. Nesta clase de xogos, os xogadores sempre teñen incentivos para cooperar nunha coalición maior, polo que asumimos que se acadará a coalición N, formada por todos os xogadores e que chamamos *gran coalición*. Polo tanto, é de interese establecer un xeito para repartir $v(N)$.

1.2. O núcleo

Unha noción básica a considerar cando falamos de xogos cooperativos de utilidade transferible é a de estabilidade, que está intrinsecamente ligada co concepto do *núcleo*. Antes de definir formalmente que é o núcleo, introducimos a idea de *asignación*, tal é como aparece recollida en Myerson (1991), e algunhas das súas propiedades.

Definición 1.3. Sexa un xogo de utilidade transferible $v \in G^N$. Unha *asignación* é calquera vector $x \in \mathbb{R}^N$, onde cada compoñente x_i é interpretada como o pago que recibe o xogador i.

Definición 1.4. Sexan un xogo $v \in G^N$ e unha asignación $x \in \mathbb{R}^n$. Dicimos que x é *eficiente* se

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N),$$

o cal implica que, se v é superaditivo, se reparte entre os xogadores o beneficio total da cooperación.

Definición 1.5. Sexa un xogo $v \in G^N$ e unha asignación $x \in \mathbb{R}^n$. Dicimos que x é *individualmente racional* se

$$x_i \geq v(i), \ \forall\, i \in N;$$

é dicir, se ningún xogador recibe menos do que pode obter por si só.

Definimos agora o conxunto de asignacións que son individualmente racionais e eficientes.

Definición 1.6. Sexa un xogo $v \in G^N$. Dicimos que unha asignación x é unha *imputación* se é eficiente e individualmente racional. Definimos o conxunto de imputacións de v como

$$I(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i \in N} x_i = v(N);\ x_i \geq v(i),\ \forall i \in N\}.$$

Cabe destacar que o conxunto de imputacións dun xogo superaditivo é non vacío.

A racionalidade individual das asignacións en $I(v)$ garante que ningún xogador teña motivos para bloquear unha imputación, xa que por si só non poderá obter nada mellor. Non obstante, podería darse o caso no que unha coalición de xogadores sí teña interese en bloquear un acordo que implique algunha das asignacións de $I(v)$. Isto lévanos a definir o *núcleo*, un subconxunto do conxunto de imputacións cuxos elementos cumpren a seguinte propiedade.

Definición 1.7. Sexa un xogo $v \in G^N$ e unha asignación $x \in \mathbb{R}^n$. Dicimos que x é *coalicionalmente racional* se,

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall\ S \subset N.$$

Observamos que a racionalidade coalicional é unha extensión da racionalidade individual. Ningunha coalición ten interese en bloquear unha asignación coalicionalmente racional, pois non pode obter un pago maior por si soa.

Definición 1.8. Sexa un xogo $v \in G^N$. O *núcleo* de v, $C(v)$, é o conxunto

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)\ \forall S \subset N\}.$$

En tanto en canto unha asignación do núcleo non deixa insatisfeita a ningunha coalición, e polo tanto non teñen motivos para bloqueala, dicimos que as asignacións do núcleo son *estables*. A continuación ilustramos o concepto do núcleo con dous exemplos clásicos.

Exemplo 1.9. *O xogo da herdanza:* Unha persoa deixa un millón de euros como herdanza a tres herdeiras baixo a condición de que só recibirán os cartos se polo menos dúas delas se poñen de acordo en como repartilos. En caso contrario, o millón de euros será doado a algunha causa benéfica. Podemos representar esta situación como un xogo de utilidade transferible $v \in G^N$ do seguinte xeito: $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = 0$ e $v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1$. Pois ben, é sinxelo ver que o núcleo deste xogo é vacío.

Exemplo 1.10. *O xogo do guante:* Tres persoas están dispostas a repartirse os beneficios xerados pola venda dun par de guantes. Unha delas ten un guante da man dereita mentres que as outras dúas teñen, cada unha, un da man esquerda. Como é natural, para poder vender os guantes necesitan vender un par completo. Podemos representar esta situación como un xogo de utilidade transferible $v \in G^N$ do seguinte xeito: $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$ e $v(12) = v(13) = v(N) = 1$, onde o xogador 1 é o que ten o guante dereito. O núcleo deste xogo é non vacío e ten un único elemento: $C(v) = \{(1, 0, 0)\}$.

Vemos agora, doutro xeito, a relación existente entre o núcleo e a noción de estabilidade.

Definición 1.11. Sexa un xogo $v \in G^N$. Sexan $S \subset N$, $S \neq \emptyset$ e $x, y \in I(v)$. Dicimos que *y domina a x a través de S* se:

a) $y_i > x_i \ \forall i \in N$.

b) $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$.

Dicimos ademais que *y domina a x* se hai unha coalición non baleira $S \in 2^N$ tal que *y domina a x a través de S*. Por outro lado x é *non dominada* se non existe $y \in I(v)$ tal que y domine a x.

Observamos que y domina a x a través de S se todos os membros de S prefiren y a x, sendo ademais y unha asignación razoable para S, pois é menor ou igual ao pago que pode garantirse a coalición por si soa. Deste xeito, se y domina a x, haberá coalicións que quererán e poderán bloquear x. Isto lévanos a concluír que, para que unha imputación sexa estable, debe ser non dominada.

Proposición 1.12. *Sexa $v \in G^N$. Entón:*

a) Se $x \in C(v)$, x é non dominada.

b) Se $v \in SG^N$, $C(v) = \{x \in I(v) \colon x \text{ é non dominada}\}$.

1.3. O valor de Shapley

Se na sección anterior tratamos o concepto do núcleo, estreitamente relacionado coa noción de estabilidade, nesta presentamos o *valor de Shapley*, a regra de repartición máis importante nos xogos de utilidade transferible, e que está relacionada coas ideas de equidade e xustiza. Comezamos definindo que é unha regra de repartición.

Definición 1.13. Unha *regra de repartición* para xogos en G^N é unha aplicación $\varphi \colon G^N \to \mathbb{R}^N$.

Seguindo o proceso realizado en Shapley (1953), onde se presenta o valor de Shapley dunha forma axiomática, en primeiro lugar introducimos a notación e unha serie de definicións necesarias para poder continuar, e presentamos tres axiomas que pode cumprir unha regra de repartición. Por último, mediante unha serie de lemas, demostramos que estes axiomas caracterizan unha única regra de repartición: o valor de Shapley.

Definición 1.14. Sexa U o universo de todos os xogadores potenciais dun xogo e definamos un xogo superaditivo con función característica v tal que, $\forall\ S, T \subset U$,

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(S) \geq v(S \cap T) + v(S \setminus T).$$

Dicimos que un *soporte* de v é calquera $N \subset U$ tal que, $\forall\ S \subset U$,

$$v(S) = v(N \cap S).$$

Observamos que todo conxunto que contén a un soporte de v é tamén un soporte de v. Os xogadores que se atopan fóra dalgún soporte non teñen influencia directa no xogo, posto que non contribúen a ningunha coalición. Ademais, é sinxelo ver que se N e $\widehat{N}$ son soportes de v, entón $v(N) = v(\widehat{N})$. Con esta notación obviamos a clasificación habitual dos xogos segundo o seu número de xogadores.

Denotamos por $\Pi(U)$ o conxunto de *permutacións* de U, é dicir, as aplicacións que levan a U en si mesmo. Se $\pi \in \Pi(U)$, escribimos a imaxe de S baixo a aplicación π como πS, e definimos a función πv por

$$\pi v(\pi S) = v(S),\ \forall\ S \subset U.$$

Sexa entón φ unha regra de repartición que cumpre os axiomas expostos a continuación.

Axioma 1.15. ***Anonimato:*** *Unha regra de repartición φ satisfai o Axioma de Anonimato se, para todo π en $\Pi(U)$, para todo v e para todo $i \in U$,*

$$\varphi_{\pi i}(\pi v) = \varphi_i(v).$$

Axioma 1.16. ***Soporte:*** *Unha regra de repartición φ satisfai o Axioma do Soporte se, para todo v e todo soporte N de v,*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

Axioma 1.17. ***Aditividade:*** *Unha regra de repartición φ satisfai o Axioma de Aditividade se, para todo par de xogos v e w,*

$$\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w),$$

onde $v+w$ é o xogo definido por $(v+w)(S) = v(S) + w(S)$, $\forall S \subset U$.

En Roth (1988) ofrécese a seguinte interpretación dos dous primeiros axiomas: o Axioma de Anonimato garante que os nomes ou etiquetas dos xogadores non se teñan en conta á hora de determinar o seu valor, senón que unicamente se observe como responde a función característica do xogo ante a presencia do xogador nunha coalición. O Axioma do Soporte garante que a suma do valor de cada un dos xogadores, $\varphi_i(v)$, de calquera soporte N, sexa $v(N)$. Ás veces considérase que este axioma se pode descompoñer noutros dous: o *Axioma de Eficiencia* ($\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$ para algún soporte N), e o *Axioma do Xogador nulo* (se $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$ para todo $S \ni i$ con $S \subset N$ e N un soporte, entón $\varphi_i(v) = 0$).

Vemos agora unha serie de resultados que usamos para probar que hai unha única regra de repartición, φ, que satisfai os tres axiomas anteriores.

Lema 1.18. *Se N é un soporte finito de $v \in G^N$, entón para todo $i \notin N$, $\varphi_i(v) = 0$.*

Demostración. Sexa $i \notin N$. Tanto N como $N \cup \{i\}$ son soportes de v, polo que $v(N) = v(N \cup \{i\})$. Logo, polo Axioma do Soporte,

$$\sum_{j \in N} \varphi_j(v) = \varphi_i(v) + \sum_{j \in N} \varphi_j(v) \Longrightarrow \varphi_i(v) = 0.$$

□

Definición 1.19. Sexa $R \subset U$, $R \neq \emptyset$ e $0 < r = |R| < \infty$. Sexa $w_R \in G^N$ o xogo definido por

$$w_R(S) = \begin{cases} 1 & se\ R \subset S, \\ 0 & se\ R \not\subset S. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dicimos que w_R é o *xogo de unanimidade* da coalición R. Observamos, ademais, que R é un soporte de w_R.

Lema 1.20. *Sexa $R \subset U$, $R \neq \emptyset$ e $0 < r = |R| < \infty$ e sexa $w_R \in G^N$ o xogo de unanimidade da coalición R. Entón,*

$$\varphi_i(w_R) = \begin{cases} 1/r & se\ i \in R, \\ 0 & se\ i \notin S. \end{cases}$$

Demostración. Se $i \notin R$, por ser R un soporte de w_R, polo Lema 1.18, $\varphi_i(w_R) = 0$. Por outro lado, sexa $\pi \in \Pi(U)$ unha permutación de R. É claro que $\pi w_R = w_R$. Polo tanto, polo Axioma de Anonimato,

$$\varphi_i(w_R) = \varphi_j(w_R),\ \forall i, j \in R.$$

Como hai r xogadores en R e a suma dos seus valores é 1, temos que $\varphi_i(w_R) = 1/r$ para todo $i \in R$. □

Corolario 1.21. *Se $c \geq 0$ e $0 < r = |R| < \infty$, entón,*

$$\varphi_i(cw_R) = \begin{cases} c/r & \text{se } i \in R, \\ 0 & \text{se } i \notin R. \end{cases}$$

Lema 1.22. *Calquera xogo de utilidade transferible con soporte finito, $v \in G^N$, é a combinación linear de xogos de unanimidade w_R. É dicir,*

$$v = \sum_{\substack{R \subset N \\ R \neq \emptyset}} c_R(v) w_R, \tag{1.2}$$

sendo N calquera soporte finito de v e w_R o xogo definido de unanimidade da coalición R. Os coeficientes $c_R(v)$ son independentes de N e están dados por

$$c_R(v) = \sum_{T \subset R} (-1)^{r-t} v(T), \tag{1.3}$$

con $0 < r = |R| < \infty$ e $t = |T|$.

Demostración. Debemos verificar que

$$v(S) = \sum_{\substack{R \subset N \\ R \neq \emptyset}} c_R(v) w_R(S) \tag{1.4}$$

é certo para todo $S \subset U$, para todo soporte finito, N, de v. Se $S \subset N$, entón a expresión (1.4) pode escribirse, usando a definición de xogo de unanimidade e a expresión (1.3), como

$$\sum_{\substack{R \subset N \\ R \neq \emptyset}} c_R(v) w_R(S) = \sum_{R \subset S} c_R(v) = \sum_{R \subset S} \sum_{T \subset R} (-1)^{r-t} v(T) = \sum_{T \subset S} \left[\sum_{\substack{R \subset S \\ T \subset R}} (-1)^{r-t} \right] v(T). \tag{1.5}$$

Consideramos agora o interior dos corchetes da última expresión. Para todo valor de r entre t e s, hai $\binom{s-t}{r-t}$ conxuntos R con r elementos tales que $T \subset R \subset S$. Entón

$$\sum_{\substack{R \subset S \\ T \subset R}} (-1)^{r-t} = \sum_{r=t}^{s} \binom{s-t}{r-t} (-1)^{r-t}.$$

En Owen (1968) indícase que esta é a expansión binomial de $(1-1)^{s-t}$, é dicir,

$$(1-1)^{s-t} = \sum_{r-t=0}^{s-t} \binom{s-t}{r-t} 1^{(s-t)-(r-t)} \cdot (-1)^{r-t} = \sum_{r=t}^{s} \binom{s-t}{r-t} 1^{s-t} \cdot (-1)^{r-t} = $$
$$= \sum_{r=t}^{s} \binom{s-t}{r-t} (-1)^{r-t},$$

polo que o interior dos corchetes da expresión (1.5) será cero para todo $t < s$ e 1 para $t = s$. Entón, temos que

$$\sum_{\substack{R \subset N \\ R \neq \emptyset}} c_R(v) w_R(S) = v(S) + \sum_{T \subset S} \left[\sum_{r=t}^{s} \binom{s-t}{r-t} (-1)^{r-t} \right] v(T) = v(S) + 0 = v(S),$$

para todo $S \subset U$, como queriamos demostrar. □

Teorema 1.23. *Hai unha única regra de repartición, Φ, definida para todos os xogos de utilidade transferible, que satisfai os Axiomas de Anonimato, Soporte e Aditividade (Axiomas 1.15, 1.16 e 1.17).*

Demostración. Probamos en primeiro lugar que Φ está definida para todos os xogos de utilidade transferible: o Lema 1.22 garante que calquera xogo pode ser escrito como a combinación lineal de xogos w_R. Polo Lema 1.20, a función Φ está univocamente definida para eses xogos. Agora, aínda que algúns coeficientes c_R son negativos, é sinxelo ver que, polo Axioma de Aditividade, se u, v e $u - v$ son xogos, entón $\Phi(u - v) = \Phi(u) - \Phi(v)$. Polo tanto, polo Axioma de Aditividade, a función Φ está univocamente definida para todos os xogos v. En Owen (1968) danse os pasos para a obtención da expresión explícita da función Φ. Temos que, polo Lema 1.22,

$$v = \sum_{R \subset N} c_R(v) w_R$$

e que, polo Lema 1.18 e o Teorema 1.23,

$$\Phi_i(v) = \sum_{R \subset N} c_R(v) \Phi_i(w_R) = \sum_{\substack{R \subset N \\ i \in R}} c_R(v) \cdot \frac{1}{r}. \tag{1.6}$$

Pero, por definición, podemos substituír c_R pola expresión (1.3), logo resulta

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{R \subset N \\ i \in R}} \frac{1}{r} \cdot \left[\sum_{T \subset R} (-1)^{r-t} v(T) \right],$$

e polo tanto,

$$\Phi_i(v) = \sum_{T \subset N} \left[\sum_{\substack{R \subset N \\ T \cup \{i\} \subset R}} (-1)^{r-t} \frac{1}{r} v(T) \right]. \tag{1.7}$$

Denotamos

$$\gamma_i(T) = \sum_{\substack{R\subset N \\ T\cup\{i\}\subset R}} (-1)^{r-t}\frac{1}{r}. \tag{1.8}$$

É sinxelo ver que, se $i \notin T'$ e $T = T' \cup \{i\}$, entón $\gamma_i(T') = -\gamma_i(T)$. Isto débese a que todos os termos da suma da expresión (1.8) son iguais en ambos casos salvo que $t = t' + 1$, polo que temos o cambio de signo. Deste xeito, podemos reescribir a expresión (1.7) do seguinte xeito:

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \gamma_i(T)\left[v(T) - v(T \setminus \{i\})\right].$$

Vemos que a igualdade anterior é certa. En efecto,

$$\Phi_i(v) = \sum_{T\subset N} \gamma_i(T)\cdot v(T) = \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \left[\gamma_i(T)\cdot v(T)\right] + \sum_{\substack{T'\subset N \\ i\notin T'}} \left[\gamma_i(T')\cdot v(T')\right] =$$

$$= \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \left[\gamma_i(T)\cdot v(T)\right] + \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \left[-\gamma_i(T)\cdot v(T\setminus\{i\})\right] =$$

$$= \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \left[\gamma_i(T)\cdot v(T) - \gamma_i(T)\cdot v(T\setminus\{i\})\right] = \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \gamma_i(T)\left[v(T) - v(T\setminus\{i\})\right].$$

Agora, se $i \in T$, hai exactamente $\binom{n-t}{r-t}$ coalicións R con r elementos tales que $T \subset R \subset N$. Polo tanto, temos que

$$\gamma_i(T) = \sum_{r=t}^{n}(-1)^{r-t}\binom{n-t}{r-t}\frac{1}{r} = \sum_{r=t}^{n}(-1)^{r-t}\binom{n-t}{r-t}\int_0^1 x^{r-1}dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{r=t}^{n}(-1)^{r-t}\binom{n-t}{r-t}x^{r-1}dx = \int_0^1 x^{t-1}\sum_{r=t}^{n}(-1)^{r-t}\binom{n-t}{r-t}x^{r-t}dx =$$

$$= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}dx = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{(n-t+1)-1}dx = \beta(t, n-t+1) =$$

$$= \frac{\Gamma(t)\cdot\Gamma(n-t+1)}{\Gamma(t+n-t+1)} = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!},$$

onde $\beta(t,n)$ e $\Gamma(t)$ son as funcións Beta e Gamma respectivamente (ver Quesada e García, 1988). Entón,

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in N}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}\left[v(T) - v(T\setminus\{i\})\right]. \tag{1.9}$$

Por último, é sinxelo ver que a expresión (1.9) cumpre os Axiomas de Anonimato, Soporte e Aditividade. □

Podemos, pois, definir finalmente o valor de Shapley.

Definición 1.24. Para todo $v \in G^N$ e para todo $i \in N$, o *valor de Shapley*, Φ, está definido por

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left[v(S) - v(S \setminus \{i\}) \right]. \tag{1.10}$$

En Myerson (1991) interprétase o valor de Shapley do seguinte xeito: supoñamos que planeamos formar unha gran coalición nunha habitación e que os xogadores só poden entrar nela dun en un, polo que aleatoriamente forman unha fila para facelo. Hai $n!$ diferentes ordes nas que os xogadores poden colocarse nesta fila. Supoñamos agora que S é un conxunto de xogadores que contén a i. Hai $(|S|-1)!(n-|S|)!$ formas distintas nas que a fila pode estar ordenada de forma que $S \setminus \{i\}$ sexa o conxunto de xogadores que están diante do xogador i e $N \setminus S$ o conxunto de xogadores que van despois do xogador i. Logo, como as distintas ordes son igualmente probables, $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$ é a probabilidade de que, cando o xogador i entra na habitación, atope a coalición $S \setminus \{i\}$ formada nela. Se isto ocorre, a contribución deste xogador á coalición que se forma cando el entra na habitación é $v(S) - v(S \setminus \{i\})$. Polo tanto, podemos dicir que o valor de Shapley asigna a cada xogador a contribución que se espera que faga ao entrar nunha coalición.

Outra posible interpretación do valor de Shapley baséase nos chamados *vectores de contribucións marxinais*.

Definición 1.25. Sexa $v \in G^N$ e denotemos por $\Pi(N)$ ao conxunto de permutacións dos elementos de N. Denotemos, para cada $\pi \in \Pi(N)$, por $P^\pi(i)$ ao conxunto de predecesores de i, ordenados segundo π, é dicir, $j \in P^\pi(i)$ se e só se $\pi(j) < \pi(i)$. Dicimos que o *vector de contribucións marxinais* asociado a π, $m^\pi(v) \in \mathbb{R}$, está definido por

$$m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)).$$

Definición 1.26. Sexa un xogo de utilidade transferible $v \in G^N$. Chamamos *conxunto de Weber*, $W(v)$, á envoltura convexa do conxunto de vectores de contribucións marxinais,

$$W(v) = \mathrm{conv}\{m^\pi(v) \colon \pi \in \Pi(N)\}.$$

Pois ben, mediante as seguintes igualdades, en Mirás-Calvo e Sánchez-Rodríguez (2008) móstrase que o valor de Shapley é a media aritmética dos vectores de contribucións marxinais,

$$\begin{aligned}
\Phi_i(v) &= \frac{1}{n!}\sum_{\substack{S\subset N\\ i\in S}} (|S|-1)!(n-|S|)!\,[v(S)-v(S\setminus\{i\})] = \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{S\subset N\setminus\{i\}} |S|!(n-|S|-1)!\,[v(S\cup\{i\})-v(S)] = \\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)} [v(P^\pi(i)\cup\{i\})-v(P^\pi(i))] = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)} m_i^\pi(v).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

A continuación, vemos cal é o valor de Shapley do Xogo da herdanza e o Xogo do guante, que xa presentamos na sección anterior (exemplos 1.9 e 1.10).

Exemplo 1.27. O valor de Shapley do Xogo da herdanza, que ten núcleo vacío, é $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$, o cal é sinxelo de calcular pois non hai xogadores nulos e todos son simétricos. Por outra banda, o valor de Shapley do Xogo do guante é $(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$, que tampouco se atopa no núcleo do xogo, pois este ten un único elemento, $(1,0,0)$.

Interpretación dos axiomas e discusión doutros valores

A idoneidade dos axiomas empregados na definición do valor de Shapley para caracterizar unha regra de repartición "xusta" pode ser posta en dúbida en determinadas situacións. Para levar a cabo unha discusión acerca desta cuestión, estudamos cal é a motivación detrás de cada un dos axiomas que caracterizan o valor de Shapley. Para isto, descompoñemos o Axioma do Soporte, como xa vimos anteriormente, nos Axiomas de Eficiencia e do Xogador nulo.

Comezamos co Axioma de Eficiencia, que resulta o máis natural de todos. Este axioma garante que a totalidade do valor dun xogo se reparta entre os seus xogadores. Por isto, de entre os catro axiomas que caracterizan ao valor de Shapley, este é o único que non parece presentar ningún motivo para ser eliminado ou substituído por outro na caracterización dunha regra de repartición que poidamos considerar xusta. Non obstante, é certo que cando o que se reparte é o "poder" (ver os xogos simples definidos en González-Díaz et al (2010)), a eficiencia xa non ten tanto sentido. Nestes casos, resulta máis relevante observar a asignación "relativa" a cada xogador que preocuparse de se se reparte todo o poder.

Por outra banda, o axioma de Aditividade parece non ter relación coa idea de xustiza. Este axioma garante que se un xogo pode descompoñerse en varios xogos distintos, sexa indiferente aplicar a regra de repartición aos xogos por separado ou á suma destes. En Casas-Méndez et al. (2012) é considerado polo tanto un requirimento técnico, aínda que non contraditorio coa idea de equidade. Pois ben, en Young (1985) lévase a cabo unha caracterización do valor de Shapley sen empregar o Axioma de Aditividade, que é substituído polo Axioma de Monotonía forte, que definimos a continuación.

Axioma 1.28. ***Monotonía forte:*** *Unha regra de repartición φ satisfai o Axioma de Monotonía forte se, para todo par de xogos de utilidade transferible $v, w \in G^N$ e todo xogador $i \in N$ tal que $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S)$ para toda coalición $S \subset N$,*

$$\varphi_i(v) \geq \varphi_i(w).$$

Temos polo tanto o seguinte resultado:

Teorema 1.29. *O valor de Shapley é a única regra de repartición definida en G^N que satisfai os Axiomas de Eficiencia, Simetría e Monotonía forte.*

O valor solidario

A diferenza dos Axiomas de Eficiencia e Aditividade, o Axioma do Xogador nulo si que é considerado inxusto, ou máis ben pouco solidario, por algúns autores. O Axioma do Xogador nulo garante que unha regra de repartición asigne unha cantidade nula a todo xogador nulo. É dicir, que se un xogador non contribúe a ningunha das coalicións das que forma parte, entón o pago que se lle asigne sexa cero. Polo tanto, se ben tomando a produtividade como referencia é certo que o feito de que unha regra de repartición satisfaga o Axioma do Xogador nulo pode resultar natural, de ningún modo poderíamos catalogar dita regra como unha regra solidaria. Dado que o valor de Shapley si satisfai o Axioma do Xogador nulo, o seu uso non parece adecuado en determinados problemas da vida real, nos que non só se ten en conta a produtividade dos xogadores, senón tamén cuestións como a solidariedade entre os mesmos, así como as distintas necesidades que poidan ter cada un deles. Imaxinemos, por exemplo, o caso dun grupo de irmáns no que un deles non é produtivo e non por iso se lle quere deixar de lado. Para estas situacións, outras regras de repartición que non satisfán o Axioma do Xogador nulo son empregadas, como pode ser por exemplo o *valor Solidario.*

Definición 1.30. Sexa un xogo de utilidade transferible, $v \in G^N$, e sexa unha coalición $S \subset N$. Denotamos por Δ^m a contribución marxinal media dun xogador membro de S á propia coalición S, é dicir,

$$\Delta^m(S) = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in N} [(v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

Pois ben, para todo $i \in N$, o *valor Solidario*, ψ, está definido por

$$\psi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \cdot \Delta^m(S).$$

Podemos interpretar o valor Solidario como a substitución, na expresión (1.10) do valor de Shapley, das contribucións marxinais do xogador i na coalición S pola contribución marxinal media dos membros de dita coalición. En Calvo e Gutiérrez (2013) destácase o valor Solidario como un bo equilibrio entre os principios de produtividade e solidariedade. Por unha parte, ten en conta a produtividade do propio xogador ao empregar as súas contribucións marxinais no cálculo da súa asignación; non obstante, tamén presenta un efecto redistributivo ao facer uso non só das contribucións marxinais do xogador en cuestión, senón tamén das do resto de xogadores das coalicións das que forma parte.

O valor Solidario foi caracterizado por Nowak e Radzik (1994), usando varios dos axiomas empregados na caracterización do valor de Shapley, como os Axiomas de Eficiencia, Anonimato e Aditividade, pero substituíndo o Axioma do Xogador nulo por un novo axioma que definimos a continuación.

Axioma 1.31. ***Xogador A-nulo:*** *Unha regra de repartición φ satisfai o Axioma do Xogador A-nulo para todo xogo de utilidade transferible $v \in G^N$ se, sendo $i \in N$ un xogador A-nulo, isto é, un xogador tal que $\Delta^m(S) = 0$ para toda coalición S que contén a i, $\varphi_i(v) = 0$.*

Teorema 1.32. *O valor Solidario, ψ, é a única regra de repartición que satisfai os Axiomas de Eficiencia, Anonimato, Aditividade e Xogador A-nulo.*

A continuación vemos dous exemplos que nos axudan a ilustrar por un lado o concepto de xogador A-nulo e por outro, o valor Solidario.

Exemplo 1.33. Sexa o xogo de utilidade transferible $v \in G^N$ con $N = \{1, 2, 3\}$ tal que $v(1) = v(3) = v(1, 3) = 0$, $v(2) = v(2, 3) = 4$ e $v(1, 2) = v(1, 2, 3) = 2$. Temos que o xogador 3 é un xogador nulo e o xogador 1 é un xogador A-nulo.

Exemplo 1.34. O valor Solidario do Xogo do guante (exemplo 1.10) é $(\frac{4}{9}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18})$. Vemos que, en efecto, o valor Solidario asigna ao xogador 1 unha cantidade menor que o valor de Shapley, o cal recordamos que é $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, en beneficio dos xogadores 2 e 3.

O valor de Shapley ponderado

Dun xeito similar ao estudo que acabamos de realizar acerca do Axioma do Xogador nulo, discutimos agora as implicacións de que o valor de Shapley satisfaga o Axioma de Anonimato. Este axioma garante que só se diferencie aos xogadores polos parámetros do propio xogo, é dicir, que estes só se diferencien segundo o valor que lles asigna a función característica do xogo. En certas ocasións isto pode non representar debidamente á realidade. Supoñamos un xogo con dous xogadores, onde cada un por separado non obtén beneficio, pero si o fan traballando de forma conxunta. O valor de Shapley divide ese beneficio de forma igual entre os dous xogadores. Non obstante, supoñamos que un dos dous xogadores ten que esforzarse máis que o outro para levar a cabo con éxito a súa colaboración. Nesta situación, facer aos dous xogadores indistinguibles para a regra de repartición non parece apropiado. Outro caso no que o Axioma do Anonimato non parece favorecer que unha regra de repartición sexa xusta é aquel no que un dos xogadores representa a un grupo de individuos moi numeroso e o outro só a uns poucos. Para estas situacións, en Kalai e Samet (1987) proponse o *valor de Shapley ponderado*, do que facemos uso na sección 3.1.1, como unha regra de repartición que non satisfai o Axioma de Anonimato e que xeneraliza ao valor de Shapley.

Sexa w_S o xogo de unanimidade definido pola expresión (1.1). Como vimos no Lema 1.20, o valor de Shapley asigna, a cada xogador $i \in N$,

$$\Phi_i(w_S) = \begin{cases} \dfrac{1}{|S|} & \text{se } i \in S, \\ 0 & \text{se } i \notin S. \end{cases}$$

Dun xeito intuitivo, dicimos que, nun xogo de unanimidade, o valor de Shapley reparte de maneira equitativa entre os xogadores da coalición S unha unidade, pero aos xogadores que non pertencen a S, e que polo tanto non contribúen ao beneficio total da coalición, non lles asigna nada. Recordando o feito na demostración do Teorema 1.23, temos polo Lema 1.22 que calquera xogo de utilidade transferible, $v \in G^N$, pode ser expresado como combinación lineal de xogos de unanimidade, e que polo tanto,

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N} c_S(v)\Phi_i(w_S) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} c_S(v) \cdot \frac{1}{|S|}.$$

O valor de Shapley ponderado xeneraliza ao valor de Shapley, permitindo diferentes maneiras de dividir a unidade de beneficio entre os membros de S no xogo de unanimidade, w_S, realizando a repartición de maneira proporcional a un vector de pesos positivos $\lambda = (\lambda_i)_{i \in N}$ establecido. Por outra banda, pode haber situacións nas que sexa interesante realizar unha partición ordenada de N, onde certos subconxuntos de dita partición teñan preferencia na repartición respecto a outros. Un exemplo disto son as leis que rexen a repartición en situacións de quebra. Todo isto lévanos ás seguintes definicións.

Definición 1.35. Un *sistema de pesos* τ é un par (λ, Σ) onde $\lambda \in \mathbb{R}^n$, con $\lambda_i > 0 \ \forall i \in N$, e $\Sigma = (S_1, ..., S_m)$ é unha partición ordenada de N. Dicimos que un sistema de pesos $\tau = (\lambda, \Sigma)$ é *simple* se $\Sigma = (N)$, e escribimos $w = (\lambda)$.

Definición 1.36. O *valor de Shapley ponderado con sistema de pesos* τ é a regra de repartición $\Phi_\tau : G^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ definida para todo xogo de unanimidade w_S, $S \subset N$, do seguinte xeito. Sexa $k = \text{máx}\{j|S_j \cap S \neq \emptyset\}$ e denotemos $\bar{S} = S \cap S_k$. Entón,

$$(\Phi_\tau)_i(w_S) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\sum_{j\in\bar{S}} \lambda_j} & \text{se } i \in \bar{S}, \\ 0 & \text{se } i \notin \bar{S}. \end{cases}$$

En Kalai e Samet (1987) realízase unha caracterización do valor de Shapley ponderado mediante os Axiomas de Eficiencia, Aditividade e Xogador nulo, xa definidos anteriormente, e os Axiomas de Positividade e de Colaboración, que pasamos a definir a continuación.

Axioma 1.37. ***Positividade:*** *Unha regra de repartición φ satisfai o Axioma de Positividade se, para todo xogo de utilidade transferible $v \in G^N$ monótono (é dicir, que para todo par de coalicións T, S tales que $T \subset S$, $v(T) \leq v(S)$), tense que $\varphi(v) \geq 0$.*

Definición 1.38. Sexa φ unha regra de repartición e $v \in G^N$ un xogo de utilidade transferible. Denotamos, para unha coalición $S \subset N$, por $\varphi(v)(S)$ a suma $\sum_{i\in S} \varphi_i(v)$. Dicimos ademais que S é unha *p-coalición* se, para cada $T \subsetneq S$ e cada $R \subset N \setminus S$, $v(R \cup T) = v(R)$.

Axioma 1.39. ***Colaboración:*** *Unha regra de repartición φ satisfai o Axioma de Colaboración se para todo xogo de utilidade transferible, $v \in G^N$, e toda p-coalición, $S \subset N$,*

$$\varphi_i(v) = \varphi_i(\varphi(v)(S)w_S),$$

para todo $i \in S$.

Para interpretar o Axioma de Colaboración, consideramos primeiro que implica que unha coalición sexa unha p-coalición. Unha p-coalición S nun xogo $v \in G^N$ poder verse como un único xogador, xa que todas as súas subcoalicións non teñen ningún poder, é dicir, en certo sentido, son "coalicións nulas". Deste xeito, S compórtase internamente igual en v que en w_S. Podemos, polo tanto, esperar que S participe no xogo v como un único individuo e despois reparta o pago obtido entre os seus membros. Temos que $\varphi(v)(S)w_s$ é un xogo de unanimidade onde os membros de S repártense $\varphi(v)(S)$, que é o pago que obtiveron xuntos en $\varphi(v)$. Por outra banda, $\varphi_i(\varphi(v)(S)w_S)$ é o que o xogador i recibe como resultado deste reparto. O que implica o Axioma de Colaboración é que esa cantidade, $\varphi_i(\varphi(v)(S)w_S)$, debe ser exactamente o que o xogador i recibe en v.

Teorema 1.40. *Unha regra de repartición φ satisfai os Axiomas de Eficiencia, Positividade, Xogador nulo, Aditividade e Colaboración se e só se existe un sistema de pesos τ tal que φ é o valor de Shapley ponderado, é dicir, se $\varphi = \Phi_\tau$.*

Lembramos agora que podemos interpretar o valor de Shapley como unha regra de repartición que asigna a cada xogador a contribución que se espera que faga ao entrar nunha coalición, sendo todas as posibles ordes de chegada dos xogadores igual de probables. Pois ben, o valor de Shapley ponderado tamén pode ser interpretado dunha forma probabilista.

Denotemos por $\mathcal{R}(S)$ ao conxunto de todas as distintas ordes, R, nas que poden atoparse os xogadores da coalición S. Para cada orde $R \in \mathcal{R}(N)$, denotamos por $B^{R,i}$ o conxunto de xogadores que preceden a i na orde R. Para cada partición ordenada $\Sigma = (S_1, ..., S_m)$ de N, $\mathcal{R}_\Sigma$ é o conxunto das distintas ordes de N nas que todos os xogadores de S_i preceden aos de S_{i+1} para $i = 1, ..., m-1$. Cada R en $\mathcal{R}_\Sigma$ pode describirse como $R = (R_1, ..., R_m)$, onde $R_i \in \mathcal{R}(S_i)$, $i = 1, ..., m$.

Sexa $|S_i| = s_i$ e sexa $\lambda_i \in \mathbb{R}^{S_i}$ con $\lambda_{i_l} > 0$ para todo $i_l \in S_i$, para todo $i = 1, ..., m$. Asociamos con λ_i a distribución de probabilidade P_{λ_i} sobre $\mathcal{R}(S_i)$. Para cada $R_i = (i_1, ..., i_{s_i}) \in \mathcal{R}(S_i)$, definimos

$$P_{\lambda_i}(R_i) = \prod_{j=1}^{s_i} \frac{\lambda_{i_j}}{\sum\limits_{k=1}^{j} \lambda_{i_k}}.$$

Unha maneira de obter esta función de probabilidade é organizando aos xogadores de S nunha "fila" (dun xeito similar ao que facemos na interpretación probabilista do valor de Shapley), comezando polo final, de maneira que a probabilidade de engadir a un xogador ao comezo da fila formada ata ese momento é a proporción entre o seu peso e o total dos pesos dos xogadores de S que aínda non se atopan na fila.

A cada sistema de pesos $\tau = (\lambda, \Sigma)$, onde $\Sigma = (S_1, ..., S_m)$, asociámoslle unha distribución de probabilidade P_τ sobre $\mathcal{R}(N)$ do seguinte xeito: a distribución P_τ anúlase fóra de $\mathcal{R}_\Sigma$ e, para cada $R = (R_1, ..., R_m)$ en $\mathcal{R}_\Sigma$,

$$P_\tau(R) = \prod_{i=1}^{m} P_{\lambda_i}(R_i),$$

onde λ_i é a proxección de λ en $\mathbb{R}^{S_i}$.

Para un xogo $v \in G^N$ e unha orde R en $\mathcal{R}(N)$, a contribución do xogador i é

$$C_i(v, R) = v(B^{R,i} \cup \{i\}) - v(B^{R,i}).$$

Deste xeito, en Kalai e Samet (1987) próbase o seguinte resultado.

Teorema 1.41. *Para cada xogador $i \in N$, sistema de pesos τ e xogo $v \in G^N$,*

$$(\Phi_\tau)_i(v) = E_{P_\tau}(C_i(v, \cdot)),$$

onde o lado dereito da igualdade é a contribución esperada do xogador i respecto a distribución de probabilidade P_τ.

A continuación ilustramos o valor de Shapley ponderado cun exemplo.

Exemplo 1.42. Sexa $N = \{1, 2, 3\}$ e w_N o xogo de unanimidade da coalición N. Sexa o sistema de pesos $\tau = (\lambda, \Sigma)$ con $\lambda = (2, 4, 1)$ e $\Sigma = \{S_1 = \{1\}, S_2 = \{2, 3\}\}$. O valor de Shapley ponderado con sistema de pesos τ, Φ_τ, do xogo de unanimidade w_N, é $(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5})$.

1.4. Xogos convexos

Os xogos *convexos* presentan algunhas propiedades que os fan especialmente interesantes. Un exemplo disto é que nos xogos convexos o valor de Shapley sempre se atopa no núcleo. En González-Díaz et al. (2010) defínense do seguinte xeito:

Definición 1.43. Un xogo de utilidade transferible, $v \in G^N$, é convexo se para cada $i \in N$ e para cada par de coalicións $S, T \subset N \setminus \{i\}$, con $S \subset T$,

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Pódese probar que todo xogo convexo é tamén superaditivo.

Vemos agora o resultado que garante que o núcleo dun xogo convexo é sempre non vacío e que contén ao valor de Shapley.

Teorema 1.44. *Sexa $v \in G^N$. As seguintes afirmacións son equivalentes:*

a) O xogo v é convexo.

b) Para cada $\pi \in \Pi(N)$, $m^\pi(v) \in C(v)$.

c) $C(v) = \operatorname{conv}\{m^\pi(v) \colon \pi \in \Pi(N)\}$, é dicir, o núcleo e o conxunto de Weber son iguais.

Demostración.

a) $\Rightarrow$ *b)*

Sexa $\pi \in \Pi(N)$. É inmediato ver que $\sum_{i \in N} m_i^\pi(v) = v(N)$. Sexa $S \subsetneq N$ e sexa $i \in N \setminus S$ tal que, para cada $j \in N \setminus (S \cup \{i\})$, $\pi(i) < \pi(j)$. Entón $P^\pi(i) \subset S$ e, como v é convexo, temos que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = m_i^\pi(v) = \sum_{j \in S \cup \{i\}} m_j^\pi(v) - \sum_{j \in S} m_j^\pi(v).$$

Entón,

$$\sum_{j \in S \cup \{i\}} m_j^\pi(v) - v(S \cup \{i\}) \leq \sum_{j \in S} m_j^\pi(v) - v(S).$$

Repetimos agora con $S\cup\{i\}$ o argumento que acabamos de usar para S. Deste xeito, repetindo este proceso ata chegar á coalición N, obtemos

$$0=\sum_{j\in N} m_j^\pi(v)-v(N)\leq \sum_{j\in S} m_j^\pi(v)-v(S)\Longrightarrow \sum_{j\in S} m_j^\pi(v)\geq v(S).$$

Polo tanto, $m^\pi(v)\in C(v)$, como queriamos demostrar.

b) $\Rightarrow$ *c*)

Por *b*) temos que $\operatorname{conv}\{m^\pi(v)\colon \pi\in\Pi(N)\}\subset C(v)$. Vemos, mediante indución no número de xogadores, que

$$C(v)\subset \operatorname{conv}\{m^\pi(v)\colon \pi\in\Pi(N)\}.$$

Se $n=1$, o resultado é trivial. Supoñemos agora que o resultado é certo para todos os xogos con menos de n xogadores e sexa $v\in G^N$. Posto que $C(v)$ é un conxunto convexo, é suficiente probar que todos os puntos da súa fronteira están contidos en $\operatorname{conv}\{m^\pi(v)\colon \pi\in\Pi(N)\}$. Sexa pois x un punto da fronteira de $C(v)$ e $S\subsetneq N$, $S\neq\emptyset$ tal que $\sum_{i\in S} x_i=v(S)$. Definimos agora o xogo $v_S\in G^S$, para cada $T\subset S$, por $v_S(T):=v(T)$. Definimos tamén o xogo $v_1\in G^{N\setminus S}$, para cada $T\subset N\setminus S$, por $v_1(T):=v(T\cup S)-v(S)$. Sexa x_S a restrición de x aos xogadores de S. É sinxelo ver que $x_S\in C(v_S)$. Posto que $\sum_{i\in S} x_i=v(S)$ e $x\in C(v)$, temos que, para todo $T\subset N\setminus S$,

$$\sum_{i\in T} x_i=\sum_{i\in T\cup S} x_i-\sum_{i\in S} x_i\geq v(T\cup S)-v(S).$$

Polo tanto, $x_{N\setminus S}\in C(v_1)$. Por hipótese de indución temos que

$$x_S=\sum_{\pi\in\Pi(S)}\rho_\pi m^\pi(v_S)\qquad \text{e}\qquad x_{N\setminus S}=\sum_{\pi\in\Pi(N\setminus S)}\gamma_\pi m^\pi(v_1),$$

onde, para cada $\pi\in\Pi(S)$, $\rho_\pi\geq 0$ e $\sum_{\pi\in\Pi(S)}\rho_\pi=1$ e, para cada $\pi\in\Pi(N\setminus S)$, $\gamma_\pi\geq 0$ e $\sum\limits_{\pi\in\Pi(N\setminus S)}\gamma_\pi=1$. Pois ben, para cada $\pi_S\in\Pi(S)$ e para cada $\pi_{N\setminus S}\in\Pi(N\setminus S)$, definimos $\pi^*\in\Pi(N)$ como $\pi^*:=(\pi_S,\pi_{N\setminus S})$. Deste xeito, temos que, para cada $i\in S$, $m_i^{\pi^*}(v)=m_i^{\pi_S}(v_S)$ e, para cada $i\in N\setminus S$, $m_i^{\pi^*}(v)=m_i^{\pi_{N\setminus S}}(v_1)$. Logo,

$$x=\sum_{\pi_S\in\Pi(S)}\ \sum_{\pi_{N\setminus S}\in\Pi(N\setminus S)}\rho_{\pi_s}\gamma_{\pi_{N\setminus S}} m^{\pi^*}(v)$$

o cal implica que $x\in\operatorname{conv}\{m^\pi(v)\colon \pi\in\Pi(N)\}$.

c)$\Longrightarrow$ a)

Sexa $i \in N$ e $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$. Sexa $\pi \in \Pi(N)$ unha permutación tal que $\pi = (\pi_S, \pi_{T\setminus S}, \pi_{N\setminus T})$ e, para todo $j \in N \setminus T$, $j \neq i$, $\pi(i) < \pi(j)$. Temos polo tanto que o conxunto de predecesores de i é $P^\pi(i) = T$ e que a súa contribución marxinal é $m_i^\pi(v) = v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = v(T \cup \{i\}) - v(T)$. Por outro lado, $\sum\limits_{j\in S} m_j^\pi(v) = v(S)$. Polo tanto, como $m^\pi(v) \in C(v)$,

$$v(S \cup \{i\}) \leq \sum_{j\in S\cup\{i\}} m_j^\pi(v) = v(S) + m_i^\pi(v).$$

Entón

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq m_i^\pi(v) = v(T \cup \{i\}) - v(T),$$

e queda probado que v é convexo.

□

Corolario 1.45. *Sexa $v \in G^N$ un xogo convexo. Entón $\Phi(v) \in C(v)$.*

Demostración. Posto que o valor de Shapley é a media dos vectores de contribucións marxinais, como mostra a expresión (1.11), o valor de Shapley atópase no conxunto de Weber; e pola afirmación c) do Teorema 1.44, atópase no núcleo. □

Esta propiedade dos xogos convexos resulta de gran importancia, pois garante que o valor de Shapley é unha asignación estable neles, polo que ningunha coalición terá motivos para bloqueala ou impedila.

1.5. Problemas de bancarrota

Nos problemas de bancarrota un conxunto de demandantes pide que se lle asigne, en total, unha cantidade maior á dispoñible, polo que é preciso atopar regras de repartición que, segundo o que interese en cada caso, aporten diferentes maneiras de distribuír entre os demandantes a cantidade total a repartir. Nesta sección definimos formalmente que é un problema de bancarrota, e vemos varios resultados teóricos sobre eles, dos que facemos uso na sección 2.2, onde traballamos con problemas deste tipo.

Definición 1.46. Un *problema de bancarrota*, cun conxunto de demandantes N, é unha terna (N, E, d), onde $E \in \mathbb{R}$ e $d \in \mathbb{R}^N$ tales que, para todo $i \in N$, $d_i \geq 0$ e $0 \leq E \leq \sum_{i=1}^n d_i$.

Nun problema de bancarrota (N, E, d), E denota o estado, é dicir, a cantidade total a repartir; e d_i é a cantidade solicitada polo demandante i. Asumimos, sen perda de xeneralidade, que o vector de demandas está ordenado, polo que $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$.

Os problemas de bancarrota son modelados mediante diversos xogos cooperativos. O seu estudo comeza con O'Neill (1982), onde a cada problema de bancarrota se lle asocia un xogo de utilidade transferible. Unha vez feita esta aproximación, podemos usar regras de repartición dos xogos TU como, por exemplo, o valor de Shapley.

Definición 1.47. Dado un problema de bancarrota (N, E, d), o seu *xogo de bancarrota* asociado é o xogo de utilidade transferible $v \in G^N$ definido, para cada $S \subset N$, por

$$v(S) := \max\{0, E - \sum_{i \notin S} d_i\}.$$

Polo tanto, o valor dunha coalición é o que queda do estado unha vez que o resto de xogadores fóra da coalición reciben as súas demandas. En caso de que non quede nada, o valor da coalición é cero.

O feito de que os problemas de bancarrota poidan ser asociados a un xogo de utilidade transferible permite que os diferentes resultados teóricos que existen sobre este tipo de xogos, como os vistos nas seccións anteriores acerca do núcleo, as regras de repartición e os xogos convexos, poidan empregarse no estudo desta clase de problemas. Por exemplo, é sinxelo ver que os xogos de bancarrota son convexos, e polo tanto, que o seu núcleo é non vacío, contendo ademais, polo Corolario 1.45, ao valor de Shapley.

Exemplo 1.48. Sexa o problema de bancarrota (N, E, d), con $N = \{1, 2, 3\}$, $E = 200$ e $d = (100, 200, 500)$. O xogo de bancarrota asociado a este problema, $v \in G^N$, é $v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = 0$, $v(23) = 100$ e $v(N) = 200$. Por outro lado, é sinxelo ver que o xogo v é convexo, e temos que $\Phi(v) = (\frac{100}{3}, \frac{250}{3}, \frac{250}{3}) \in C(v)$ pois
$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^3$ tal que $0 \leq x_1$, $0 \leq x_2$, $0 \leq x_3$, $100 \leq x_2 + x_3$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 200\}$.

Non obstante, a pesar de que poidan ser definidos como xogos de utilidade transferible, é habitual na teoría de xogos estudar os problemas de bancarrota directamente, buscando regras de división que se "comporten ben" e sexan "xustas" á hora de dividir entre os demandantes a cantidade total dispoñible.

Definición 1.49. Unha *regra de división*, f, é unha función que asigna, a cada problema de bancarrota (N, E, d), o vector $f(N, E, d) \in \mathbb{R}^N$, tal que

$$\sum_{i \in N} f_i(E, d) = E,$$

e para todo $i \in N$, $0 \leq f_i(E, d) \leq d_i$.

É dicir, unha regra de división ten que dividir, entre o conxunto demandantes N, a totalidade de E. Ademais non pode, nin exixirlle a ningún demandante que pague, nin asignarlle a algún unha cantidade maior que a súa demanda. Unha das regra de división máis comúns é a *regra Proporcional.*

Definición 1.50. Sexa (N, E, d) un problema de bancarrota. A *regra Proporcional*, PROP, asigna, a cada $i \in N$,

$$\mathrm{PROP}_i(N, E, d) = \frac{d_i}{\sum_{j \in N} d_j} E.$$

En Thomson (2003) lévase a cabo un extenso estudo sobre distintas regras de división e diversas propiedades ou axiomas que poden cumprir. Mediante as distintas combinacións destas propiedades, podemos caracterizar diversas regras de división, que segundo que propiedades satisfagan, serán máis ou menos interesantes, ou máis ou menos desexables, á hora de ser consideradas solucións xustas dos distintos problemas de bancarrota. Vemos a continuación algúns destes axiomas.

Axioma 1.51. ***Truncamento de demandas:*** *Unha regra de división f satisfai o Axioma de Truncamento de demandas se, para todo problema de bancarrota (N, E, d),*

$$f(N, E, d) = f(N, E, d^t),$$

onde $d_i^t = min\{d_i, E\}$ para todo $i \in N$.

Axioma 1.52. ***Respecto de demandas positivas:*** *Unha regra de división f satisfai o Axioma de Respecto de demandas positivas se, para todo problema de bancarrota (N, E, d),*

$$f_i(N, E, d) > 0,$$

para todo $i \in N$ tal que $d_i > 0$.

Axioma 1.53. ***Igual trato de iguais:*** *Unha regra de división f satisfai o Axioma de Igual trato de iguais se, para todo problema de bancarrota (N, E, d),*

$$f_i(N, E, d) = f_j(N, E, d),$$

para todo $i, j \in N$ tales que $d_i = d_j$.

Axioma 1.54. ***Preservación da orde:*** *Unha regra de división f satisfai o Axioma de Preservación da orde se, para todo problema de bancarrota (N, E, d),*

$$f_i(N, E, d) \geq f_j(N, E, d) \quad e \quad d_i - f_i(N, E, d) \geq d_j - f_j(N, E, d)$$

para todo $i, j \in N$ tales que $d_i \geq d_j$.

Axioma 1.55. ***Dereitos mínimos primeiro:*** *Unha regra de división f satisfai o Axioma de Dereitos mínimos primeiro se, para todo problema de bancarrota (N, E, d),*

$$f(N,E,d) = r(N,E,d) + f(N, E - \sum_{i \in N} r_i(N,E,d), d - r(N,E,d)),$$

onde o dereito mínimo de todo demandante, $i \in N$, é a compoñente i-ésima do vector $r(N,E,d) \in \mathbb{R}^N$, e ven dado por

$$r_i(N,E,d) = \text{máx}\left\{0, E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} d_j\right\}.$$

Un exemplo de regra de división que cumpre algúns destes axiomas é a *regra Proporcional axustada*, que foi definida e caracterizada usando algúns dos axiomas anteriores por Curiel et al. (1987).

Definición 1.56. Sexa (N, E, d) un problema de bancarrota. A *regra Proporcional axustada*, APROP, asigna, a cada $i \in N$,

$$\text{APROP}_i(N,E,d) = r_i(N,E,d) + \text{PROP}_i(N, E - \sum_{j \in N} r_j(N,E,d), \bar{d}).$$

onde $\bar{d}$ é o vector de demandas axustadas, tal que para cada $i \in N$,

$$\bar{d}_i = \text{mín}\{E - \sum_{j \in N} r_j(N,E,d), d_i - r_i(N,E,d)\}.$$

Teorema 1.57. *A regra Proporcional axustada é a única regra de división que satisfai os Axiomas de Truncamento de demandas, Igual trato de iguais e Dereitos mínimos primeiro.*

Para rematar esta sección, presentamos un resultado presente en González-Díaz et al (2010), que garante, baixo determinadas condicións, a existencia dunha relación entre unha regra de división dun problema de bancarrota e unha regra de repartición dun xogo cooperativo de utilidade transferible.

Teorema 1.58. *Unha regra de división f para problemas de bancarrota pode ser representada a través dunha regra de repartición para xogos de bancarrota se e só se cumpre o Axioma de Truncamento de demandas.*

Consideramos, a modo de exemplo, a regra Proporcional, que non cumpre as hipóteses do teorema anterior, e unha nova regra de división, a *regra de Chegadas aleatorias*, que si o fai.

Exemplo 1.59. Sexan os problemas de bancarrota (N, E, d) e $(N, E, \hat{d})$ con $N = \{1, 2, 3\}$, $E = 200$, $d = (100, 200, 500)$ e $\hat{d} = (100, 200, 200)$. Temos que

$$\mathrm{PROP}(N, E, d) = (25, 50, 125) \neq (40, 80, 80) = \mathrm{PROP}(N, E, \hat{d}).$$

Temos que PROP non satisfai o Axioma de Trucamento de demandas. Definimos agora a regra de Chegadas aleatorias do seguinte xeito:

Definición 1.60. Sexa (N, E, d) un problema de bancarrota. A *regra de Chegadas aleatorias*, CAL, asigna, a cada $i \in N$,

$$\mathrm{CAL}_i(N, E, d) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \mathrm{mín}\{d_i, \mathrm{máx}\{0, E - \sum_{j \in P^\pi(i)} d_j\}\}.$$

$\Pi(N)$ denota o conxunto de permutacións dos elementos de N e, para cada $\pi \in \Pi(N)$, $P^\pi(i)$ denota o conxunto de predecesores de i en π.

Pois ben, temos que esta regra de división para un problema de bancarrota pode ser representada a través do valor de Shapley do seu xogo de bancarrota asociado.

Proposición 1.61. *Sexa (N, E, d) un problema de bancarrota e sexa v o seu xogo de bancarrota asociado. Entón, $CAL(N, E, d) = \Phi(v)$.*

Capítulo 2

O problema do passepartout

Neste capítulo presentamos dous enfoques distintos para o problema do passepartout. En primeiro lugar, estudamos os resultados expostos por Victor Ginsburgh e Israel Zang, pioneiros no estudo deste problema. A continuación, centrámonos en Estévez-Fernández et al. (2012), artigo no que se modela o problema como un problema de bancarrota.

2.1. O modelo de V. Ginsburgh e I. Zang

En 2001, despois de que o Conseil Bruxellois des Musées (Consello de Museos de Bruxelas) presente a cuestión de como repartir os beneficios da venda dun pase que da acceso aos visitantes a varios museos distintos, durante un certo período de tempo, Victor Ginsburgh e Israel Zang publican o primeiro artigo no que se estuda o problema do passepartout. Nel propoñen o valor de Shapley como regra de repartición e solución ao problema. Dous anos máis tarde, en 2003, publican un segundo artigo sobre a mesma cuestión. Ao longo dos dous traballos, sinalan certos aspectos e propiedades do valor de Shapley, así como algunhas vantaxes de tomalo como regra de repartición. Nesta sección expoñemos os resultados obtidos por Ginsburgh e Zang nestes dous documentos.

2.1.1. Presentación do modelo

Denotemos por $N := \{1, ..., n\}$ ao conxunto de provedores que ofrecen distintos servizos nun sistema de passepartout, no noso caso, museos e entradas a eles. Sexa $S \subset N$ un subconxunto de museos de tamaño $|S|$ e sexa $M := \{1, ..., m\}$ o conxunto de clientes que mercan o passepartout. Denotamos por $K_j \subset N$ o conxunto de museos que son visitados polo cliente $j \in M$.

Definición 2.1. Definimos o *xogo do passepartout*, v, para cada subconxunto $S \subset N$ de museos, por

$$v(S) = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \subset S}} 1, \tag{2.1}$$

de tal xeito que $v(S)$ é o número de clientes que só utilizan o seu passepartout nos museos que pertencen a S.

Polo tanto, $v(N) = m$ é o número total de visitantes que mercan o pase e fan uso del. Asumimos que cada visitante $j \in M$ que merca un pase ten certas preferencias á hora de escoller que museos vai visitar. Estas preferencias son independentes das distintas asociacións potencias que se poden producir entre os museos e polo tanto, os clientes deciden antes de mercar o passepartout que grupo de museos $K_j \subset N$ visitarán. Deste xeito, para calquera $S \subset N$, $v(S)$ é o número de visitantes que o conxunto S pode garantirse por si só. Por último, denotamos por δ o prezo do passepartout.

2.1.2. O valor de Shapley como solución

Consideramos que cada visitante que merca un passepartout ten a posibilidade de visitar varios museos, todos, ou incluso o mesmo varias veces. De todos eles, algúns museos serán máis atractivos que outros e terán incentivado en maior medida aos clientes a mercar o passepartout. Polo tanto, todos os museos deben ser gratificados segundo as súas contribución relativas aos beneficios totais xerados pola venda dos pases. O problema reside en como medir estas contribucións para asignar de forma xusta a cada museo a parte que lle corresponde. En Ginsburgh e Zang (2001) exponse que unha asignación se considera xusta se cumpre as seguintes propiedades:

Distribución completa: A totalidade dos beneficios obtidos é distribuída entre os museos participantes.

***Simetría*:** Se cando un museo se une a unha coalición de museos xa formada, a súa contribución aos beneficios xerados pola nova coalición é sempre a mesma, sexa cal sexa a coalición previa, entón esta contribución é o pago que se lle asigna a dito museo.

***Anonimato*:** O pago asignado a cada museo non depende da orde na que os museos son procesados.

***Aditividade*:** Supoñamos que os compradores de pases son divididos en dous grupos. Se se realiza a asignación de beneficios aos museos tendo en conta cada grupo por separado, a suma total das asignacións feitas é igual á asignación calculada a partires do grupo total de compradores de pases.

Esta última propiedade garante que de diferenciar aos compradores de pases segundo, por exemplo, a súa idade: nenos, adultos e xubilados; ou segundo sexan turistas ou residentes, o resultado final da asignación non varíe.

Observamos que as propiedades de *Anonimato* e *Aditividade* coinciden cos axiomas de mesmo nome introducidos na Sección 1.3 e que a de *Distribución completa* é equivalente ao *Axioma de Eficiencia*. Ademais, a propiedade de *Simetría* implica o *Axioma do Xogador nulo*, pois a un xogador nulo, cuxa contribución a todas as coalicións é cero, correspóndelle segundo esta propiedade unha asignación nula. Así mesmo, ao combinar a propiedade de *Simetría* coa de *Distribución completa* obtemos o *Axioma do Soporte*. Deste xeito, con estas catro propiedades como requisitos indispensables para que unha regra de repartición sexa xusta, temos, polo Teorema 1.23, que o valor de Shapley é a única que as cumpre. Podemos, polo tanto, expresar a cantidade de passepartouts que se venderon grazas a cada museo, $i \in N$, mediante

$$\Phi_i(v) := \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left[v(S) - v(S \setminus \{i\}) \right], \tag{2.2}$$

e asignar a cada museo $i \in N$ o beneficio que lle corresponde, é dicir, $\Phi(i) \cdot \delta$. Obtemos polo tanto a seguinte regra de repartición para o xogo do passepartout:

$$\mathrm{Sh}_i(v) := \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!} \left[v(S) - v(S \setminus \{i\}) \right] \cdot \delta. \tag{2.3}$$

Dada a natureza combinatoria do valor de Shapley, en xeral este presenta dificultades para ser computado se o número de xogadores, neste caso museos, é elevado. Non obstante, en Ginsburgh e Zang (2003) preséntase a seguinte proposición, que proporciona, para este caso concreto, unha expresión do valor de Shapley máis sinxela de manexar.

Proposición 2.2. *Para o problema do passepartout, o valor de Shapley implica que o beneficio da venda de cada pase é distribuído en partes iguais entre os provedores cuxos servizos son utilizados polo comprador do pase. Deste xeito,*

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \ni i}} \frac{1}{|K_j|}, \ i \in N. \tag{2.4}$$

Demostración. A proba baséase en observar que o xogo considerado aquí é a suma de xogos de unanimidade, definidos no capítulo anterior. Sexa

$$w_R(S) = \begin{cases} 1 & se \ R \subset S, \\ 0 & se \ R \not\subset S, \end{cases}$$

a función característica do xogo de unanimidade correspondente ao soporte $R \subset N$. Para este xogo, os axiomas de anonimato e eficiencia implican que o valor de Shapley do xogador i do xogo w_R, $\Phi_i(w_R)$, ven dado por

$$\Phi_i(w_R) = \begin{cases} \dfrac{1}{|R|} & se\ i \in R, \\ 0 & se\ i \notin R, \end{cases}$$

e pola expresión (2.1), á función característica do xogo é

$$v(S) = \sum_{j \in M} w_{K_j}(S).$$

Agora, polo o axioma de aditividade, como queriamos probar, obtemos que o valor de Shapley do xogo do passepartout ven dado por

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \ni i}} \frac{1}{|K_j|}, \ i \in N.$$

□

Podemos, polo tanto, reescribir a expresión (2.3) do seguinte xeito:

$$\mathrm{Sh}_i(v) = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \ni i}} \frac{\delta}{|K_j|}, \ i \in N.$$

Tamén en virtude da Proposición 2.2, en Ginsburgh e Zang (2001) apúntase que o valor de Shapley, nun xogo do passepartout, cumpre a seguinte propiedade.

***Marxinalidade*:** Se un novo visitante merca un passepartout e visita un subgrupo de museos, só as asignacións aos museos que visitou se ven modificadas, recibindo cada un deles a fracción correspondente a dividir en partes iguais o beneficio que supón a venda do novo passepartout.

Dicimos, polo visto anteriormente, que o xogo do passepartout é un xogo "sen memoria", pois non ten importancia en que momento se calcule a repartición dos beneficios entre os distintos museos. Indo máis aló, dita repartición pode realizarse de forma sistemática cada vez que expire o período de uso de cada pase.

Por último, en Ginsburgh e Zang (2003) destácase que o valor de Shapley para o xogo do problema do passepartout atópase no núcleo, polo que ningunha coalición de museos terá interese en romper as relacións co resto e ofrecer o seu propio passepartout de maneira independente, mentres a regra de repartición usada sexa o valor de Shapley. Isto débese a que o problema do passepartout é un xogo convexo. Expoñemos a continuación os dous resultados que garanten isto.

Proposición 2.3. *O xogo $v \in G^N$ do problema do passepartout é convexo.*

Demostración. Sexa $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$. Temos, pola expresión (2.1), que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \subset S \cup \{i\}}} 1 \; - \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \subset S}} 1 = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \ni i \\ K_j \cap [N \setminus (S \cup \{i\})] = \emptyset}} 1$$

e

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \subset T \cup \{i\}}} 1 \; - \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \subset T}} 1 = \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \ni i \\ K_j \cap [N \setminus (T \cup \{i\})] = \emptyset}} 1.$$

Ademais,

$$S \cup \{i\} \subset T \cup \{i\} \Longrightarrow N \setminus (T \cup \{i\}) \subset N \setminus (S \cup \{i\})$$

polo que,

$$\sum_{\substack{j \in M \\ K_j \ni i \\ K_j \cap [N \setminus (S \cup \{i\})] = \emptyset}} 1 \quad \leq \quad \sum_{\substack{j \in M \\ K_j \ni i \\ K_j \cap [N \setminus (T \cup \{i\})] = \emptyset}} 1 \quad \Longrightarrow \quad v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Polo tanto, v é un xogo convexo. □

A proba anterior pode interpretarse intuitivamente do seguinte xeito: se para calquera coalición $R \subset N$, $v(R)$ é o número de portadores de passepartout que só visitaron os museos de R, $v(R \cup \{i\}) - v(R)$ serán aqueles portadores de passepartout que visitaron o museo i pero non visitaron ningún museo de $N \setminus (R \cup \{i\})$. Polo tanto, se tomamos $S \subset T$, todos os portadores de passepartout que visitaron o museo i pero non visitaron ningún de $N \setminus (S \cup \{i\})$, tampouco visitaron ningún museo de $N \setminus (T \cup \{i\})$. Non obstante, pode haber portadores de passepartout que visitaron o museo i e que non visitaron ningún de $N \setminus (T \cup \{i\})$, que si visitaron algún museo de $N \setminus (S \cup \{i\})$. Deste xeito, o conxunto de portadores de passepartout que visitaron o museo i e non visitaron ningún museo de $N \setminus (S \cup \{i\})$ é menor que o daqueles que visitaron o museo i e non visitaron ningún museo de $N \setminus (T \cup \{i\})$, é dicir, $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$.

Proposición 2.4. *Sexa $v \in G^N$ o xogo do problema do passepartout. Entón $\Phi(v) \in C(v)$.*

Demostración. O resultado é directo pola Proposición 2.3 e o Corolario 1.45. □

2.2. O modelo de A. Estévez Fernández

Na maioría dos casos, dada a súa propia natureza, o beneficio total xerado nun sistema de passepartout será menor que o que terían conseguido os museos que o conforman de ter cobrado aos seus visitantes a súa entrada regular, salvo que se produza un gran aumento nos seus visitantes debida á existencia do propio passepartout. Con frecuencia, os sistemas de passepartout son creados por motivos de benestar social, como pode ser incentivar o ocio cultural. Ás veces o passepartout pode non cubrir todos os servizos ofertados polos membros do sistema, que esperan obter un aumento nos seus clientes e, en ocasións, un maior consumo do resto da súa oferta. Por exemplo, a "tarxeta 20" do Concello da Coruña da acceso durante todo o ano a varios museos da cidade, pero non inclúe o acceso, aínda que si reduce o seu prezo, a certas actividades especiais que se desenvolven neles. Atendendo a estas cuestións, en Estévez-Fernández et al. (2012) proponse modelar o problema do passepartout como un problema de bancarrota. Nesta sección facemos un estudo deste traballo.

2.2.1. Modelo de bancarrota

Denotamos un *problema do passepartout* pola 5-tupla (N, m, δ, p, u), onde:

- $N := \{1, ..., n\}$ é o conxunto de museos que forman parte do sistema de passepartout.
- m é o número de passepartout vendidos.
- δ é o prezo do passepartout.
- $p \in \mathbb{R}^n$, tal que $p_i > 0 \ \forall i \in N$, é o vector de prezos das entradas regulares dos museos, é dicir, p_i é o prezo da entrada regular do museo $i \in N$.
- $u \in \mathbb{R}^n$ é un vector onde cada unha das súas compoñentes, u_i, indica o número de veces que se visitou o museo $i \in N$ usando un passepartout.

Pois ben, posto que os clientes que mercan un passepartout queren obter un beneficio ao facelo, parece razoable asumir que $m\delta \leq \sum_{i \in N} u_i p_i$. Polo tanto, podemos definir o seguinte *problema de bancarrota*, asociado ao problema do passepartout.

Definición 2.5. Dicimos que un *problema de bancarrota asociado ao problema do passepartout*, (N, E, d), é aquel onde o estado e o vector de demandas veñen dados por $E = m \cdot \delta$ e $d_i = u_i \cdot p_i$ para todo $i \in N$, respectivamente.

É dicir, o estado é o total dos beneficios xerados pola venda dos passepartouts e o vector de demandas representa, en cada unha das súas compoñentes, a cantidade que cada museo tería obtido se as persoas que o visitaron usando un passepartout tiveran mercado unha entrada regular.

2.2.2. Discusión sobre a regra de división

Como vimos na Sección 2.1, en Ginsburgh e Zang (2001) establécense en primeiro lugar unha serie de propiedades que debe cumprir unha regra de repartición para consideral a xusta, para logo ver que estas caracterizan ao valor de Shapley. Dun modo similar, en Estévez-Fernández et al. (2012) faise unha discusión acerca de que propiedades debe cumprir unha regra de división para que sexa adecuada nun problema de bancarrota asociado ao problema do passepartout.

Nun problema de bancarrota asociado ao problema do passepartout, a demanda que realiza un museo representa as ganancias que potencialmente podería ter, segundo o prezo da súa entrada regular e o número de persoas que o visita facendo uso do passepartout. Posto que as demandas dos museos indican como de importantes son para o sistema de passepartout cada un deles, obsérvase en Estévez-Fernández et al. (2012) que ignorar calquera parte desas demandas suporá un prexuízo para os museos que atraen máis visitantes, polo que unha regra de división adecuada para un problema de bancarrota asociado ao problema do passepartout, de agora en adiante *regra de passepartout*, non debe satisfacer *Truncamento das demandas* (ver o axioma 1.51). Debido a que Truncamento de demandas non é unha característica desexable para este problema, por Thomson (2003) e Curiel et al. (1987), temos que ningunha regra de repartición de xogos de bancarrota será unha boa candidata para ser unha regra de passepartout. Con motivo da interpretación das demandas dos museos como o seu grao de importancia no sistema do passepartout, razoamos tamén que unha regra de passepartout debe satisfacer *Preservación da orde* (ver o axioma 1.54), pois ningún museo deben recibir menos que outro cunha demanda menor; e ao mesmo tempo, ningún museo debe perder máis que outro cunha demanda maior.

Por outro lado, argumentamos que unha regra de passepartout debe satisfacer *Respecto polas demandas positivas* (ver o axioma 1.52), pois dado que un sistema de passepartout baséase na cooperación entre diferentes museos, é lóxico asumir que todos os membros do sistema debe recibir algún beneficio pola súa participación. Ao mesmo tempo, é natural que para que unha regra de passepartout sexa xusta, esta non debe discriminar aos diferentes museos, polo que debe asignar a mesma cantidade aos museos coa mesma demanda, é dicir, debe respectar *Igual trato de iguais* (ver o axioma 1.53). Por último, é xustificado que unha regra de passepartout debe satisfacer *Dereitos mínimos primeiro* (ver o axioma 1.55), pois o dereito mínimo de cada museo é a parte do estado que lle corresponde directamente por non ter sido reclamada por ningún dos outros museos.

A regra de passepartout proposta en Estévez-Fernández et al. (2012) é a *regra Proporcional con dereitos mínimos*, denotada pola súas siglas en inglés, MRPROP (Minimal Rights Proportional Rule), e definida do seguinte xeito:

Definición 2.6. Sexa un problema de bancarrota (N, E, d), a *regra Proporcional con dereitos mínimos* é a regra de división tal que

$$\mathrm{MRPROP}(N,E,d) = r\,(N,E,d) + \mathrm{PROP}\left(N, E - \sum_{i\in N} r_i(N,E,d), d - r(N,E,d)\right),$$

onde $r_i(N,E,d) = \text{máx}\left\{0, E - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} d_j\right\}$ é o dereito mínimo do xogador i para todo $i \in N$, e PROP é a regra Proporcional tal que $\mathrm{PROP}(N,E,d) = \dfrac{E}{\sum_{j\in N} d_j} d$.

A regra Proporcional con dereitos mínimos, MRPROP, consiste en asignar en primeiro lugar a cada museo o seu dereito mínimo e, a continuación, distribuír o remanente do estado de forma proporcional ás demandas axustadas.

En Estévez-Fernández (2006) proporciónase a seguinte expresión alternativa para a regra Proporcional con dereitos mínimos.

Lema 2.7. *Sexa (N,E,d) un problema de bancarrota. Entón,*

$$MRPROP_i(N,E,d) = d_i - \alpha\, \text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\},$$

para todo $i \in N$, onde $\alpha = \dfrac{\sum_{k\in N} d_k - E}{\sum_{k\in N} \text{mín}\left\{d_k, \sum_{l\in N} d_l - E\right\}}$.

Demostración. Sexa (N,E,d) un problema de bancarrota e tomemos un $i \in N$ calquera. Entón,

$$\begin{aligned} r_i(N,E,d) &= \text{máx}\left\{0, E - \sum_{k\in N\setminus\{i\}} d_k\right\} = d_i + \text{máx}\left\{-d_i, E - \sum_{k\in N} d_k\right\} = \\ &= d_i - \text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sexa $\widehat{E} := E - \sum_{k\in N} r_k(N,E,d)$ e $\widehat{d} := d - r(N,E,d)$. Polo tanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{PROP}_i(N,\widehat{E},\widehat{d}) &= \frac{E - \sum_{k\in N} r_k(N,E,d)}{\sum_{k\in N}(d_k - r_k(N,E,d))}(d_i - r_i(N,E,d)) = \\ &= \frac{E - \sum_{k\in N} d_k + \sum_{k\in N} \text{mín}\left\{d_k, \sum_{l\in N} d_l - E\right\}}{\sum_{k\in N} \text{mín}\left\{d_k, \sum_{l\in N} d_l - E\right\}}\, \text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} = \\ &= (1-\alpha)\, \text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\}, \end{aligned}$$

con $\alpha = \frac{\sum_{k\in N} d_k - E}{\sum_{k\in N} \text{mín}\left\{d_k, \sum_{l\in N} d_l - E\right\}}$, onde a segunda igualdade é certa pola ecuación (2.5). Polo tanto, a regra Proporcional con dereitos mínimos pode escribirse do seguinte xeito:

$$\begin{aligned}\text{MRPROP}_i(N,E,d) &= r_i(N,E,d) + \text{PROP}_i\left(E - \sum_{k\in N} r_k(N,E,d), d - r(N,E,d)\right) = \\ &= d_i - \text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} + (1-\alpha)\,\text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} = \\ &= d_i - \alpha\,\text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\}.\end{aligned}$$

□

Vemos, a través da seguinte proposición e o seguinte exemplo, que a regra Proporcional con dereitos mínimos satisfai as condicións anteriormente esixidas a unha regra de passepartout.

Proposición 2.8. *A regra Proporcional con dereitos mínimos, MRPROP, satisfai os Axiomas de Respecto de demandas positivas, Igual trato de iguais, Dereitos mínimos primeiro e Preservación da orde.*

Demostración. Sexa (N,E,d) un problema de bancarrota. Que MRPROP satisfai Respecto de demandas positivas é directo pola definición da regra, pois asigna a cada museo o seu dereito mínimo máis a parte proporcional do estado remanente, que é sempre positiva. Igual trato de iguais tamén é inmediato por definición. A continuación, vemos que satisfai Dereitos mínimos primeiro.

$$\begin{aligned}\text{MRPROP}(N,E,d) =& r(N,E,d) + \text{PROP}(N, E - \sum_{i\in N} r_i(N,E,d), d - r(N,E,d)) = \\ =& r(N,E,d) + \text{MRPROP}(N, E - \sum_{i\in N} r_i(N,E,d), d - r(N,E,d)),\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é certa posto que

$$r(N, E - \sum_{i\in N} r_i(N,E,d), d - r(N,E,d)) = 0.$$

Por outro lado, temos que MRPROP satisfai preservación da orde, pois para todo $i,j\in N$ tales que $d_i \geq d_j$, tamén polo Lema 2.7,

$$\text{MRPROP}_i(N,E,d) = d_i - \alpha\,\text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} \geq$$

$$\geq d_j - \alpha\,\text{mín}\left\{d_j, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} = \text{MRPROP}_j(N,E,d)$$

e

$$d_i - \mathrm{MRPROP}_i(N,E,d) = d_i - d_i + \alpha \,\text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} = \alpha \,\text{mín}\left\{d_i, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} \geq$$

$$\geq \alpha \,\text{mín}\left\{d_j, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} = d_j - d_j + \alpha \,\text{mín}\left\{d_j, \sum_{k\in N} d_k - E\right\} = d_j - \mathrm{MRPROP}_j(N,E,d)$$

□

O seguinte exemplo amosa que MRPROP non satisfai Truncamento de demandas.

Exemplo 2.9. Sexa un problema de bancarrota (N, E, d) tal que $N = 2$, $E = 1200$ e $d = (1500, 1000)$. Pois ben, a asignación que realiza MRPROP para o xogo coas demandas truncadas, $d^t = (1200, 1000)$ é

$$\mathrm{MRPROP}(2, 1200, (1200, 1000)) = (700, 500),$$

mentres que a asignación asociada ao xogo orixinal é

$$\mathrm{MRPROP}(2, 1200, (1500, 1000)) = (765{,}22, 434{,}78).$$

É dicir, $\mathrm{MRPROP}(N, E, d) \neq \mathrm{MRPROP}(N, E, d^t)$, como queriamos ver.

Capítulo 3

Outros modelos e un caso real

No capítulo anterior estudamos dúas formas de modelar o problema do passepartout. Por un lado, o modelo proposto por Victor Ginsburgh e Israel Zang, que asocia o problema do passepartout cun xogo cooperativo de utilidade transferible e propón o valor de Shapley como solución. Por outra banda, Arantza Estévez Fernández, Peter Borm e Herbert Hammers modelan o problema do passepartout como un problema de bancarrota e caracterizan, de maneira axiomática e específica para este problema, unha regra de división que denominan regra Proporcional con dereitos mínimos.

Unha das diferenzas fundamentais entre os dous modelos, máis aló das formais, reside nas distintas bases de información que requiren cada un deles. En ámbolos dous é necesario coñecer que museos forman parte do sistema de passepartout, o prezo do propio passepartout e o número deles que se vendeu. Pero mentres que no proposto en Estévez-Fernández et al. (2012) requírese ademais, para cada museo, o prezo da súa entrada regular e cantas persoas o visitaron facendo uso dun passepartout, no modelo formulado en Ginsburgh e Zang (2003) é necesario coñecer que museos visitou cada propietario dun passepartout. Este requirimento ten consecuencias moi relevantes na práctica, como a necesidade de que o passepartout sexa de uso nominal ou de que os distintos museos almacenen, de maneira conxunta, a información relativa aos seus visitantes.

Tendo presentes estas disparidades e a importancia da base de información da que se dispón á hora de afrontar un problema real, en Bergantiños e Moreno-Ternero (2015) preséntanse dous modelos que xeneralizan os vistos no capítulo anterior, cada un deles facendo uso dunha base de información distinta, para logo propoñer diferentes regras de asignación para cada un. En Bergantiños e Moreno-Ternero (2016) retómanse estes dous modelos para formular unha nova regra de asignación para cada un. Neste capítulo facemos un repaso destes dous traballos e, a continuación, estudamos un caso real do problema do passepartout, co obxectivo de poñer en práctica e comparar as distintas regras de asignación que presentamos ao longo deste traballo fin de grao. Por último, sinalar que ao longo deste capítulo omitimos as demostracións dos resultados teóricos que expoñemos, remitindo ao lector aos artigos orixinais de Gustavo Bergantiños e Juan D. Moreno Ternero.

3.1. Os modelos de G. Bergantiños e J. D. Moreno Ternero

Nesta sección repasamos os modelos e as regras de asignación propostas en Bergantiños e Moreno-Ternero (2015, 2016). Cabe destacar que a diferenza dos vistos no capítulo anterior, estes dous novos modelos non se enmarcan dentro de ningunha clase xeral de xogos ou problemas da teoría de xogos, se non que se define, para cada un deles, o problema do passepartout de maneira específica. Por outra banda, e como vimos facendo neste traballo, consideramos que todos os distintos provedores de servizos membros do sistema de passepartout son museos.

3.1.1. O primeiro modelo

Comezamos co primeiro dos dous modelos, que xeneraliza o presentado en Ginsburgh e Zang (2003), compartindo con este a asunción de que coñecemos o subconxunto de museos visitados por cada propietario dun passepartout. Ademais, este novo modelo tamén ten en conta o prezo das entradas regulares de cada museo, así como o seu número de visitantes sen passepartout.

Definición 3.1. Chamamos *primeira modificación do problema passepartout* á 6-tupla (N, M, δ, K, p, w), onde:

- N é o conxunto de museos membros do sistema de passepartout, con $|N| = n$.
- M é o conxunto de visitantes propietarios de passepartouts, con $|M| = m$.
- $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \geq 0$, é o prezo do passepartout.
- $K \in 2^{nm}$ é o conxunto de museos visitados por cada propietario dun passepartout, é dicir, $K = (K_j)_{j \in M}$ e, para cada $j \in M$, $K_j \subset N$ denota o conxunto de museos de N visitados polo propietario do passepartout j, con $k_j = |K_j|$. Asumimos que $K_j \neq \emptyset$ para todo $j \in M$.
- $p \in \mathbb{R}^n$, tal que $p_i > 0$ $\forall i \in N$, é o vector de prezos das entradas regulares dos museos, é dicir, p_i é o prezo da entrada regular do museo $i \in N$.
- $w \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ é o vector de visitas regulares, é dicir, w_i é o número de visitantes do museo $i \in N$ que mercaron unha entrada regular en lugar de usar un passepartout.

Deste xeito, dicimos que o beneficio total xerado a través do sistema de passepartout é $E = m \cdot \delta$.

Para cada $i \in N$, denotamos por $U_i(K)$ o conxunto de propietarios de passepartouts que visitan o museos i, é dicir, $U_i(K) = \{j \in M : i \in K_j\}$, con $|U_i(K)| = u_i$.

Denotamos a familia formada por todos os problemas descritos desta forma por $\mathcal{P}^{pw}$. A continuación definimos dúas subclases distintas dentro de $\mathcal{P}^{pw}$: denotamos por $\mathcal{P}^{p}$ a familia de problemas definidos como a 5-tupla (N, M, δ, K, p), onde cada compoñente está definida como na primeira modificación do problema passepartout. Observamos que estes problemas corresponden a aquelas situacións nas que non se teñen en conta o número de visitas sen passepartout de cada museo. Por outra parte, denotamos como $\mathcal{P}$ a familia de problemas definidos como a 4-tupla (N, M, δ, K), onde cada compoñente está tamén definida como na primeira modificación do problema passepartout. Esta clase de problemas é a estudada en Ginsburgh e Zang (2001,2003) e na sección 2.1 deste traballo, é dicir, correspóndese coas situacións onde non se teñen en conta nin o número de visitas regulares que tivo cada museo, nin o prezo das súas entradas regulares.

Regras de asignación

Definimos agora formalmente que é unha regra de asignación e presentamos catro exemplos destas. Facémolo para a clase de problemas $\mathcal{P}^{pw}$, sendo a obtención das súas definicións para $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}^{p}$, directa a partir desta.

Definición 3.2. Unha *regra de asignación* en $\mathcal{P}^{pw}$ é unha aplicación que asocia, a cada primeira modificación do problema do passepartout, unha asignación que indica que parte lle corresponde a cada museo do beneficio total xerado polo sistema de passepartout. Formalmente, $R : \mathcal{P}^{pw} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$, onde $\mathbb{R}_+$ é o conxunto de números números reais non-negativos, é tal que, para cada $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$,

$$\sum_{i \in N} R_i(N, M, \delta, K, p, w) = E.$$

É dicir, R é *eficiente*, pois se reparte a totalidade do beneficio entre os museos de N.

Vemos agora unha regra de asignación que reparte o beneficio obtido pola venda de cada passepartout de maneira equitativa entre os museos nos que se fai uso dese passepartout.

Definición 3.3. Sexa $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$. A *regra de Shapley*, que denotamos por S, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$S_i(N, M, \delta, K, p, w) = \sum_{j \in M,\ K_j \ni i} \frac{\delta}{k_j}.$$

Posto que a regra de Shapley non ten en conta nin p nin w, a súa definición é valida tamén para $\mathcal{P}$ e para $\mathcal{P}^p$.

Vemos agora a primeira xeneralización desta regra, de modo que p si é relevante á hora de facer a asignación.

Definición 3.4. Sexa $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$. A *regra de p-Shapley*, que denotamos por S^p, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$S_i^p(N, M, \delta, K, p, w) = \sum_{j \in M,\ i \in K_j} \frac{p_i}{\sum_{l \in K_j} p_l} \delta.$$

Observamos que esta regra tamén está definida en $\mathcal{P}^p$, pero non en $\mathcal{P}$.

A seguinte regra, que xeneraliza as dúas anteriores, si ten en conta todos os elementos da primeira modificación do problema passepartout e, polo tanto, só está definida en $\mathcal{P}^{pw}$.

Definición 3.5. Sexa $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$. A *regra de pw-Shapley*, que denotamos por S^{pw}, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$S_i^{pw}(N, M, \delta, K, p, w) = \sum_{j \in M,\ i \in K_j} \frac{p_i w_i}{\sum_{l \in K_j} p_l w_l} \delta.$$

Por último, definimos unha regra de asignación, tamén definida só en $\mathcal{P}^{pw}$, pero que a diferenza da anterior tamén ten en conta o número de visitas con passepartout de cada museo.

Definición 3.6. Sexa $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$. A *regra de Shapley-ponderada*, que denotamos por W, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$W_i(N, M, \delta, K, p, w) = \sum_{j \in M,\ i \in K_j} \frac{p_i(w_i + u_i)}{\sum_{l \in K_j} p_l(w_l + u_l)} \delta.$$

Axiomas

Vexamos agora unha serie de axiomas para unha regra de asignación R. De novo facémolo para a clase de problemas $\mathcal{P}^{pw}$, sendo directa a obtención das definicións para $\mathcal{P}^p$ e $\mathcal{P}$.

Axioma 3.7. ***Igual trato de iguais:*** *Para cada $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$ e cada par $i, j \in N$ tal que $(U_i(K), p_i, w_i) = (U_j(K), p_j, w_j)$,*

$$R_i(N, M, \delta, K, p, w) = R_j(N, M, \delta, K, p, w).$$

É dicir, se dous museos teñen o mesmo número de visitantes con passepartout, o mesmo prezo para a súa entrada regular e o mesmo número de visitantes sen passepartout, ambos museos reciben a mesma asignación.

Axioma 3.8. ***Xogador nulo:*** *Para cada* $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$ *e cada* $i \in N$ *tal que* $U_i(K) = \emptyset$*,*

$$R_i(N, M, \delta, K, p, w) = 0.$$

É dicir, se un museo non ten visitantes con passepartout, a súa asignación é nula.

Axioma 3.9. ***Aditividade dos visitantes:*** *Para cada par* $(N, M^1, \delta, K^1, p, w)$, $(M, N^2, \delta, K^2, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$,

$$R(N, M^1 \cup M^2, \delta, (K^1, K^2), p, w) = R(N, M^1, \delta, K^1, p, w) + R(N, M^2, \delta, K^2, p, w).$$

É dicir, dados dous grupos de propietarios de passepartouts, non hai diferenza en consideralos de forma conxunta ou por separado.

Axioma 3.10. ***Proporcionalidade das visitas regulares:*** *Para cada* $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$ *e cada par* $i, j \in N$ *tal que* $U_i(K) = U_j(K)$*,* $p_i = p_j$ *e* $w_i \leq w_j$*,*

$$R_j(N, M, \delta, K, p, w) = \frac{w_j}{w_i} R_i(N, M, \delta, K, p, w).$$

Este axioma é unha xeneralización do Axioma de Igual trato de iguais, e regula como debe afectar á asignación dun museo o número de persoas sen passepartout que o visitan.

Axioma 3.11. ***Proporcionalidade das visitas:*** *Para cada* $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$ *e cada par* $i, j \in N$*, tal que* $U_i(K) = U_j(K)$*,* $p_i = p_j$ *e* $w_i \leq w_j$*,*

$$R_j(N, M, \delta, K, p, w) = \frac{w_j + u_j}{w_i + u_i} R_i(N, M, \delta, K, p, w).$$

Dun xeito similar ao Axioma de Proporcionalidade das visitas regulares, este axioma regula como debe afectar á asignación dun museo o número de persoas que o visitan, con ou sen passepartout.

Axioma 3.12. ***Protección ante fraccionamento:*** *Sexa* $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$*,* $i \in N$ *e* $(N', M, \delta, K', p', w') \in \mathcal{P}^{pw}$ *tal que*

- $N' = (N \setminus \{i\}) \cup \{i^1, ..., i^r\}$.
- *Para todo* $j \in M$*,* $\begin{cases} K'_j = K_j \text{ se } i \notin K_j, \\ K'_j = (K_j \setminus \{i\}) \cup \{i^1, ..., i^r\} \text{ noutro caso.} \end{cases}$
- *Para todo* $l \in N \setminus \{i\}$*,* $p'_l = p_l$*, e* $p'_{i^1} + p'_{i^2} + \cdots + p'_{i^r} = p_i$*.*

- *Para todo* $l \in N \setminus \{i\}$, $w'_l = w_l$, *e* $w'_{i^1} = w'_{i^2} = \cdots = w'_{i^r} = w_i$.

Entón,

$$R_l(N, M, \delta, K, p, w) = R_l(N', M, \delta, K', p', w'), \ \ \forall l \in N \setminus \{i\},$$

e polo tanto,

$$R_i(N, M, \delta, K, p, w) = \sum_{s=1}^{r} R_{i^s}(N', M, \delta, K', p', w').$$

É dicir, se un museo decide fraccionarse en varios museos distintos, asumindo que calquera visitante, con passepartout ou non, que fora a visitar o museo orixinal tamén visitará todos os novos museos, e que o prezo da entrada regular do museo orixinal sexa igual á suma das entradas regulares dos novos museos, a asignación a cada un dos outros museos do sistema de passepartout non varía. Do mesmo xeito, a asignación que recibe o museo orixinal sen fraccionarse é igual á suma das asignacións dos museos nos que se divide.

Axioma 3.13. ***Marxinalidade:*** *Para cada* $(N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$ *e cada par* $i, j \in N$ *tal que* $U_i(K) = U_j(K)$, $p_i = p_j$ *e* $w_i \leq w_j$,

$$\frac{R_j(N, M, \delta, K, p, w) - R_i(N, M, \delta, K, p, w)}{R_i(N, M, \delta, K, p, w)} = \frac{w_j - w_i}{w_i + u_i}.$$

É dicir, se dous museos son idénticos salvo no seu número de visitantes sen passepartout, o incremento relativo da asignación dun museo respecto á do outro debe ser o incremento relativo do número de visitantes sen passepartout do primeiro respecto ao número total de visitantes do segundo.

Resultados teóricos sobre as regras de asignación

Presentamos a continuación unha serie de resultados axiomáticos para as regras de asignación anteriormente vistas. En primeiro lugar, vemos os teoremas relacionados coas regras de asignación S, S^p e S^{pw}, terminando o estudo do modelo cunha comparación entre as dúas regras máis complexas, S^{pw} e W.

Comezamos caracterizando a regra de Shapley para o dominio $\mathcal{P}$.

Teorema 3.14. *Unha regra de asignación definida en* $\mathcal{P}$ *satisfai os Axiomas de Igual trato de iguais, Xogador nulo e Aditividade dos visitantes se e só se é a regra de Shapley.*

Vemos agora, de xeito similar, unha caracterización da regra de p-Shapley para o dominio $\mathcal{P}^p$.

Teorema 3.15. *Unha regra de asignación definida en* $\mathcal{P}^p$ *satisfai os Axiomas do Xogador nulo, Aditividade dos visitantes e Protección ante fraccionamento se e só se é a regra de* p*-Shapley.*

Engadindo aos axiomas empregados no teorema anterior o Axioma de Proporcionalidade das visitas regulares, obtemos unha caracterización da regra de *pw*-Shapley para a clase de problemas $\mathcal{P}^{pw}$.

Teorema 3.16. *Unha regra de asignación definida en $\mathcal{P}^{pw}$ satisfai os Axiomas de Proporcionalidade das visitas regulares, Xogador nulo, Aditividade dos visitantes e Protección ante fraccionamento se e só se é a regra de pw-Shapley.*

Recordamos agora que, como vimos na sección 2.1, en Ginsburgh e Zang (2003) asóciase a cada problema do passepartout, $(N, M, \delta, K) \in \mathcal{P}$, un xogo cooperativo de utilidade transferible, $\bar{v} \in G^N$, onde para cada $S \subset N$, $\bar{v}(S) = \sum_{j \in M, K_j \subset S} 1$ é o número de persoas que só visitaron museos de S. Definimos agora un novo xogo $v(S) = \bar{v}(S) \cdot \delta$, que denota os beneficios xerados polos propietarios de passepartouts que só visitaron museos de S. A continuación vemos un resultado que relaciona este novo xogo, o valor de Shapley e tres das regras de asignación anteriores.

Teorema 3.17. *Sexa $v \in G^N$ un xogo de utilidade transferible tal que para cada $S \subset N$,*

$$v(S) = \sum_{j \in M, K_j \subset S} \delta.$$

As seguintes afirmacións son certas:

1. *Para cada problema $P = (N, M, \delta, K) \in \mathcal{P}$, $S(P)$ coincide co valor de Shapley de v, $\Phi(v)$.*

2. *Para cada problema $P = (N, M, \delta, K, p) \in \mathcal{P}^p$, $S^p(P)$ coincide co valor de Shapley ponderado de v, con sistema de pesos $\tau = (p_i)_{i \in N}$, $\Phi_\tau(v)$.*

3. *Para cada problema $P = (N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$, $S^{pw}(P)$ coincide co valor de Shapley ponderado de v, con sistema de pesos $\tau' = (p_i w_i)_{i \in N}$, $\Phi_{\tau'}(v)$.*

En efecto, observamos que a regra de Shapley non é outra que á regra de repartición Sh, proposta en Ginsburgh e Zang (2003) para a clase de problemas $\mathcal{P}$, que estudamos na sección 2.1. Por outra banda, o seguinte teorema garante que estas tres regras de asignación son estables.

Teorema 3.18. *Sexa $v \in G^N$ un xogo de utilidade transferible tal que para cada $S \subset N$,*

$$v(S) = \sum_{j \in M, K_j \subset S} \delta.$$

As seguintes afirmacións son certas:

1. *Para cada* $P = (N, M, \delta, K) \in \mathcal{P}$, $S(P) \subset C(v)$
2. *Para cada* $P = (N, M, \delta, K, p) \in \mathcal{P}^p$, $S^p(P) \subset C(v)$
3. *Para cada* $P = (N, M, \delta, K, p, w) \in \mathcal{P}^{pw}$, $S^{pw}(P) \subset C(v)$

A primeira afirmación é equivalente, polo teorema anterior, á Proposición 2.4 vista na sección 2.1. Por outra banda, en Kalai e Samet (1987) próbase que calquera valor de Shapley ponderado é unha combinación convexa de vectores de contribución marxinais, polo que a proba das outras dúas afirmacións pódese obter, tamén por medio do teorema anterior, dunha xeito análogo ao feito no Corolario 1.45.

Para finalizar o estudo deste modelo, vemos un resultado de especial interese, pois compara as dúas regras de asignación propostas para o dominio $\mathcal{P}^{pw}$, a regra de pw-Shapley e a regra de Shapley-ponderada.

Teorema 3.19. *As seguintes afirmacións son certas:*

1. *A regra* S^{pw} *satisfai os Axiomas de Igual trato de iguais, Xogador nulo, Proporcionalidade das visitas regulares, pero non Proporcionalidade das visitas e Marxinalidade.*
2. *A regra* W *satisfai os Axiomas de Igual trato de iguais, Xogador nulo, Proporcionalidade das visitas e Marxinalidade, pero non Proporcionalidade das visitas regulares.*

A partires deste último resultado, en Bergantiños e Moreno-Ternero (2016) critícase a idoneidade da regra de pw-Shapley, S^{pw}, como regra de asignación para a primeira modificación do problema passepartout, en favor da regra de Shapley-ponderada, W. Obsérvase que, nalgúns casos, a regra de pw-Shapley pode resultar inxusta por dar demasiada relevancia ás visitas realizadas con entradas regulares e ningunha ás visitas realizadas usando un passepartout. Supoñamos unha situación na que dous museos $i, j \in N$, con entradas regulares de igual prezo, $p_i = p_j$, reciben o mesmo número de visitantes con passepartout, por exemplo, $u_i = u_j = 1000$. Supoñamos, ademais, que o museo i só ten unha visita con entrada regular, mentres que o museo j ten dúas, é dicir $w_i = 1 \leq 2 = w_j$. Pois ben, nesta situación, precisamente por satisfacer o Axioma de Proporcionalidade das visitantes regulares e non os de Marxinalidade e Proporcionalidade de visitas, S^{pw} asigna ao museo j o dobre que ao museo i, o cal pode considerarse excesivo. Non obstante, a regra de Shapley-ponderada non presenta este problema, pois si satisfai Marxinalidade, ademais de Proporcionalidade das visitas en lugar de Proporcionalidade das visitas regulares.

3.1.2. O segundo modelo

Se o modelo anterior xeneraliza o proposto en Ginsburgh e Zang (2003), compartindo a asunción de que se coñece que grupo de museos visita cada propietario dun passepartout, podemos considerar que este segundo modelo é unha xeneralización do proposto en Estévez-Fernández et al. (2012), no cal non é necesario ter esta información, pero si coñecer o número total de propietarios de passepartouts que visitan cada museo. No estudo deste modelo seguimos unha estrutura moi similar á empregada no anterior, definindo en primeiro lugar o modelo e que consideramos unha regra de asignación para este. Despois, presentamos unha serie de regras de asignación, axiomas e resultados axiomáticos sobre estas.

Definición 3.20. Chamamos *segunda modificación do problema passepartout* á 6-tupla (N, m, δ, u, p, w), onde:

a) N é o conxunto de museos membros do sistema de passepartout, con $|N| = n$.

- m é o número de passepartout vendidos.
- $\delta \in \mathbb{R},\ \delta \geq 0$, é o prezo do passepartout.
- $u \in \mathbb{Z},\ w > 0$, é o vector de visitas con passepartout, é dicir, u_i é o número de visitantes con passepartout que tivo o museo $i \in N$.
- $p \in \mathbb{R}^n,\ p > 0$, é o vector de prezos das entradas regulares dos museos, é dicir, p_i é o prezo da entrada regular do museo $i \in N$.
- $w \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ é o vector de visitas regulares, é dicir, w_i é o número de visitantes do museo $i \in N$ que mercaron unha entrada regular en lugar de usar un passepartout.

Dicimos que o beneficio total xerado a través do sistema de passepartout é $E = m \cdot \delta$. Denotamos a familia formada por todos os problemas descritos desta forma por $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$. A continuación definimos dúas subclases distintas dentro de $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$: denotamos por $\widehat{\mathcal{P}}^{p}$ a familia de problemas definidos como a 5-tupla (N, n, δ, K, p), onde cada compoñente está definida como na segunda modificación do problema passepartout. Observamos que estes problemas corresponden a aquelas situacións nas que non se teñen en conta o número de visitas regulares de cada museo. Por outro lado, denotamos por $\widehat{\mathcal{P}}$ a familia de problemas definidos como a 4-tupla (N, m, δ, K), onde cada compoñente tamén está definida como na segunda modificación do problema passepartout.

Regras de asignación

Definimos agora formalmente que é unha regra de asignación e presentamos catro exemplos. Facémolo para a clase de problemas $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$, sendo a obtención das súas definicións para $\widehat{\mathcal{P}}$ e $\widehat{\mathcal{P}}^{p}$ directa a partir desta.

Definición 3.21. Unha *regra de asignación* en $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ é unha aplicación que asocia a cada segunda modificación do problema do passepartout unha asignación que indica que parte lle corresponde a cada museo do beneficio total xerado polo sistema de passepartout. Formalmente, $R : \widehat{\mathcal{P}}^{pw} \longrightarrow \mathbb{R}^n_+$, onde $\mathbb{R}_+$ é o conxunto de números reais non-negativos, é tal que, para cada $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$,

$$\sum_{i \in N} R_i(N, m, \delta, u, p, w) = E.$$

É dicir, R é *eficiente*, pois se reparte a totalidade do beneficio entre os museos de N.

A primeira das regras de asignación que presentamos reparte o beneficio do sistema de passepartout proporcionalmente ao número de visitas con passepartout.

Definición 3.22. Sexa $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$. A *regra Proporcional*, que denotamos por PROP, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$\mathrm{PROP}_i(N, m, \delta, u, p, w) = \frac{u_i}{\sum_{l \in N} u_l} E.$$

Posto que a regra Proporcional non contempla nin o prezo das entradas regulares de cada museos nin o seu número de visitas regulares, a súa definición tamén é válida para $\widehat{\mathcal{P}}$ e $\widehat{\mathcal{P}}^p$. Vexamos agora unha regra de asignación que si ten en conta os prezos das entradas regulares de cada museo. Esta regra é similar á regra Proporcional con dereitos mínimos considerada en Estévez-Fernández et al. (2012), e estudada na sección 2.2 deste traballo no dominio $\widehat{\mathcal{P}}^p$, que reparte o beneficio xerado pola venda dos passepartout de maneira proporcional á cantidade que cada museo tería gañado se cada propietario dun passepartout que o visitou tivérao feito pagando a entrada regular. A diferenza entre as dúas é que a regra Proporcional con dereitos mínimos asigna primeiro o seu dereito mínimo a cada museo, e é despois cando divide o remanente do estado de maneira proporcional as demandas axustadas.

Definición 3.23. Sexa $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$. A *regra p-Proporcional*, que denotamos por PROP^p, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$\mathrm{PROP}^p_i(N, m, \delta, u, p, w) = \frac{p_i u_i}{\sum_{l \in N} p_l u_l} E.$$

A seguinte regra ten en conta todos os parámetros que definen a segunda modificación do problema do passepartout, repartindo o beneficio do sistema de passepartout entre os museos que o compoñen, de maneira proporcional á cantidade que cada museo tería obtido se cada propietario dun passepartout que o visitou tivérao feito pagando a entrada regular, ponderada polo número de visitas regulares que efectivamente tivo.

Definición 3.24. Sexa $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$. A *regra pw-Proporcional*, que denotamos por PROP^{pw}, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$\text{PROP}_i^{pw}(N, m, \delta, u, p, w) = \frac{p_i u_i w_i}{\sum_{l \in N} p_l u_l w_l} E.$$

Por último, presentamos unha regra que reparte o beneficio xerado polo sistema de passepartout entre cada museo membro do sistema, de maneira proporcional á cantidade que cada museo tería gañado se todos os visitantes, con ou sen passepartout, tiveran pagado as entradas regulares dos museos que visitaron.

Definición 3.25. Sexa $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$. A *regra Proporcional-ponderada*, que denotamos por W^p, asigna, a cada museo $i \in N$,

$$W_i^p(N, m, \delta, u, p, w) = \frac{p_i(u_i + w_i)}{\sum_{l \in N} p_l(u_l + w_l)} E.$$

Observamos que se pode establecer unha relación conceptual entre estas catro regras de asignación e as presentadas para a primeira modificación do problema do passepartout. Por unha parte, en cada un dos modelos temos tres regras de asignación similares entre elas, onde cada unha é unha xeneralización da anterior a unha clase de problemas definida por máis parámetros: S, S^p e S^{pw} para o primeiro e PROP, PROP^p e PROP^{pw} para o segundo. Por outra banda, nos dous modelos presentamos regras de asignación, W e W^p respectivamente, que consideran todas as visitas de forma conxunta, sexan con ou sen passepartout.

Axiomas

Definimos agora unha serie de axiomas que unha regra de asignación R en $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ pode satisfacer. A obtención da definición de todos eles para as clases de problemas $\widehat{\mathcal{P}}$ e $\widehat{\mathcal{P}}^p$ é directa. Comezamos con aqueles que son equivalentes a axiomas presentados no modelo anterior, cos cales comparten nome.

Axioma 3.26. ***Igual trato de iguais:*** *Para cada $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ e cada par $i, j \in N$ tal que $(u_i, p_i, w_i) = (u_j, p_j, w_j)$,*

$$R_i(N, m, \delta, u, p, w) = R_j(N, m, \delta, u, p, w).$$

Axioma 3.27. ***Xogador nulo:*** *Para cada $(N, M, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ e cada $i \in N$ tal que $u_i = 0$,*

$$R_i(N, M, \delta, u, p, w) = 0.$$

Axioma 3.28. ***Aditividade dos visitantes:*** *Para cada par* $(N, m^1, \delta, u^1, p, w)$, $(N, m^2, \delta, u^2, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$,

$$R(N, m^1 + m^2, \delta, u^1 + u^2, p, w) = R(N, m^1, \delta, u^1, p, w) + R(N, m^2, \delta, u^2, p, w).$$

Axioma 3.29. ***Proporcionalidade das visitas regulares:*** *Para cada* $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ *e para cada par* $i, j \in N$ *tal que* $u_i = u_j$, $p_i = p_j$ *e* $w_i \leq w_j$,

$$R_j(N, m, \delta, u, p, w) = \frac{w_j}{w_i} R_i(N, m, \delta, u, p, w).$$

Axioma 3.30. ***Proporcionalidade das visitas:*** *Para cada* $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ *e para cada par* $i, j \in N$ *tal que* $u_i = u_j$, $p_i = p_j$ *e* $w_i \leq w_j$,

$$R_j(N, m, \delta, u, p, w) = \frac{w_j + u_j}{w_i + u_i} R_i(N, m, \delta, u, p, w).$$

Axioma 3.31. ***Marxinalidade:*** *Para cada* $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ *e para cada par* $i, j \in N$ *tal que* $u_i = u_j$, $p_i = p_j$ *e* $w_i \leq w_j$,

$$\frac{R_j(N, m, \delta, u, p, w) - R_i(N, m, \delta, u, p, w)}{R_i(N, m, \delta, u, p, w)} = \frac{w_j - w_i}{w_i + u_i}.$$

Vemos agora tres axiomas que non gardan relación con ningún definido para o modelo anterior.

Axioma 3.32. ***Aditividade do prezo do passepartout:*** *Para cada par* $(N, m, \delta^1, u, p, w), (N, m, \delta^2, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$,

$$R(N, m, \delta^1 + \delta^2, u, p, w) = R(N, m, \delta^1, u, p, w) + R(N, m, \delta^2, u, p, w).$$

Supoñamos un sistema de passepartout onde se venden dous tipos de passepartouts distintos. Supoñamos ademais que todos os visitantes dos museos do sistema mercan os dous passepartouts. Nesta situación, a suma das asignacións que se fai a cada museo considerando dous sistemas de passepartout distintos, un con cada pase, é igual á asignación que se obtén ao considerar un único sistema, onde hai un único passepartout e cuxo prezo é a suma dos prezos dos distintos passepartouts.

Axioma 3.33. ***Compatibilidade***$^{\times}$***:*** *Para cada* $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ *tal que* $\sum_{i \in N} p_i u_i w_i = m \cdot \delta$,

$$R_i(N, m, \delta, u, p, w) = p_i u_i w_i \; \forall i \in N.$$

É dicir, se o beneficio total do sistema de passepartout é igual á suma dos beneficios que poderían ter obtido cada museo, $i \in N$, no caso de que todas as persoas que o visitaron facendo uso dun passepartout tiveran mercado unha entrada regular, $p_i u_i$, ponderados polo número de visitas sen passepartout que realmente tiveron, w_i, é natural que a cada museo se lle asigne dita cantidade, $p_i u_i w_i$.

Axioma 3.34. ***Compatibilidade$^+$:*** *Para cada $(N, m, \delta, u, p, w) \in \widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ tal que $\sum_{i \in N} p_i(u_i + w_i) = m \cdot \delta$,*

$$R_i(N, m, \delta, u, p, w) = p_i(u_i + w_i),\ \forall i \in N.$$

Este axioma, dun xeito análogo ao anterior, regula como debe comportarse unha regra de asignación naqueles escenarios onde é factible que os museos cheguen a un acordo sobre a repartición do beneficio obtido polo sistema de passepartout. Se este beneficio total é igual á suma dos beneficios que poderían ter obtido cada museo, $i \in N$, no caso de que todas as persoas que o visitaron, facendo uso dun passepartout ou non, $(u_i + w_i)$, tiveran mercado unha entrada regular, p_i, é natural que se lle asigne a cada museo dita cantidade, $p_i(u_i + w_i)$.

Resultados teóricos sobre as regras de asignación

Comezamos vendo que os Axiomas de Igual trato de iguais, Xogador nulo e Aditividade dos visitantes son incompatibles entre si no dominio $\widehat{\mathcal{P}}$, e polo tanto nos dominios $\widehat{\mathcal{P}}^p$ e $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$; ao contrario do que acontece no modelo anterior, a primeira modificación do problema do passepartout, onde estes tres axiomas caracterizan a regra de Shapley no dominio $\mathcal{P}$.

Teorema 3.35. *Non hai ningunha regra de asignación definida en $\widehat{\mathcal{P}}$ que satisfaga Igual trato de Iguais, Xogador Nulo e Aditividade de visitantes.*

Presentamos agora un resultado que caracteriza, en diferentes dominios, as catro regras de asignación vistas para o modelo da segunda modificación do problema do passepartout. Cabe destacar que os axiomas empregados en cada caso son aqueles correspondentes ao dominio onde é caracterizada cada regra de asignación e que polo tanto, a pesar de compartir nome, son axiomas distintos.

Teorema 3.36. *As seguintes afirmación son certas:*

1. *Unha regra de asignación en $\widehat{\mathcal{P}}$ satisfai os Axiomas de Aditividade do prezo do passepartout e Compatibilidade$^\times$ se e só se é a regra Proporcional,* PROP.
2. *Unha regra de asignación en $\widehat{\mathcal{P}}^p$ satisfai os Axiomas de Aditividade do prezo do passepartout e Compatibilidade$^\times$ se e só se é a regra p-Proporcional,* PROP^p.
3. *Unha regra de asignación en $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ satisfai os Axiomas de Aditividade do prezo do passepartout e Compatibilidade$^\times$ se e só se é a regra pw-Proporcional,* PROP^{pw}.
4. *Unha regra de asignación en $\widehat{\mathcal{P}}^{pw}$ satisfai os Axiomas de Aditividade do prezo do passepartout e Compatibilidade$^+$ se e só se é a regra Proporcional-ponderada, W^p.*

Para rematar o estudo deste modelo, presentamos un resultado que, dunha forma análoga ao Teorema 3.19 na primeira modificación do problema do passepartout, compara as dúas regras máis complexas deste segundo modelo, PROP^{pw} e W^p.

Teorema 3.37. *As seguintes afirmacións son certas:*

1. *A regra $PROP^{pw}$ satisfai os Axiomas de Igual trato de iguais, Xogador nulo, Proporcionalidade das visitas regulares, Aditividade no prezo do passepartout e Compatibilidade$^{\times}$, pero non os de Proporcionalidade das visitas, Marxinalidade e Compatibilidade^{+}.*

2. *A regra W^p satisfai os Axiomas de Igual trato de iguais, Proporcionalidade das visitas, Marxinalidade, Aditividade no prezo do passepartout e Compatibilidade^{+}, pero non os de Xogador nulo, Proporcionalidade das visitas regulares e Compatibilidade$^{\times}$.*

3.2. Estudo dun caso real

A continuación, nesta sección, levamos a cabo a aplicación a un problema real das distintas regras que estudamos ao longo deste traballo. En concreto, estudamos o caso dos museos de Xénova no ano 2007, no cal 16 museos da cidade ofrecían de maneira conxunta, e cun prezo de 16€, o “Card Musei”, un passepartout do cal se venderon 2040 unidades, e que permitía a quen o mercara visitar todos estes museos nun prazo de 48h.

Co estudo destes datos, que atopamos en Casas-Méndez et al. (2014) e na páxina web da oficina de estatística do municipio de Xénova[1], non buscamos tanto resolver un problema real, como exemplificar a aplicación das regras de repartición expostas, os seus requirimentos e o seu comportamento. De feito, para poder computalas todas cos datos dos que dispoñemos, tivemos que realizar varias operacións previas. En primeiro lugar, asumimos que os museos só reciben dous tipos de visitas: por un lado visitas regulares, aquelas que realizan visitantes que mercan unha entrada regular para o museo en cuestión; e visitas con passepartout, aquelas que realizan visitantes propietarios da “Card Musei”. Isto facémolo porque na base de datos á que puidemos ter acceso non se diferencian os distintos tipos de entradas individuais coas que se visitan os museos, como poden ser entradas con descontos para nenos, estudantes ou xubilados. Polo tanto, obtemos o número de visitas regulares de cada museo como a diferenza entre o seu número de visitas totais, sexa cal sexa a entrada ou pase empregado, e o seu número de visitas con passepartout. Por outra banda, tampouco dispoñemos de información acerca de que museos visitou cada propietario dun

[1] Na dirección: *http://statistica.comune.genova.it/pubblicazioni/download/storico/turismo/musei.xls*, consultada o 5 de xullo de 2019.

passepartout, polo que para poder empregar as regras relacionadas co valor de Shapley (S, S^p, S^{pw} e W) xeramos de maneira aleatoria estes datos, atendendo a dúas restricións: que todo propietario dun passepartout visita polo menos un museo, e que o número total de visitas con passepartout que recibe cada museo segundo estes datos xerados se corresponda co indicado na nosa base de datos.

Deste xeito, podemos aplicar tódalas regras que estudamos, dando lugar aos resultados que se mostran nas Táboas 1 e 2.

Táboa 1

Museos	Prezo (€)	Visitas passepartout	Visitas regulares	S	S^p	S^{pw}	W
Musei dei Palazzi Rosso, Bianco, Tursi	8	1701	131910	12589.07	14201.29	18883.35	18879.56
Museo d'ArteOrientale "E.Chiossone"	4	161	8014	852.27	606.26	142.57	142.35
Museo di S. Agostino	4	279	17633	1558.93	1122.26	499.47	497.85
Museo del Risorgimento	4	902	12387	5469.33	3809.16	1286.15	1321.08
Museo di ArcheologiaLigure	4	32	17880	173.60	124.54	64.95	64.18
Museo Navale di Pegli	4	33	4680	177.07	132.00	32.06	31.77
Museo di Storia e Cultura Contadina	2.8	30	2000	149.07	77.14	2.77	2.77
Raccolte Frugone	4	179	10064	955.47	674.82	199.39	198.06
Museo "G. Luxoro"	4	42	1663	234.13	169.97	51.56	51.57
Galleria d'ArteModerna	6	115	9574	618.67	580.93	200.19	199.10
Museo di StoriaNaturale "G. Doria"	4	80	31591	418.67	285.21	148.46	146.75
Museo di ArteContemporanea	4	92	44402	490.13	355.51	267.77	265.92
Museo del CastelloD'Albertis	6	388	18143	2176.80	1987.65	751.14	752.78
Collezione Wolfson	5	20	3258	97.07	79.84	5.81	5.71
Museo del Tesoro di S.Lorenzo	5.5	58	4470	302.13	272.71	37.80	37.28
Galata Museo del Mare	10	1028	129163	6377.60	8160.70	10066.55	10043.27

Recordamos que á regra de repartición proposta en Ginsburgh e Zang (2003), Sh, é equivalente á regra de Shapley, S, que estudamos na sección 3.1.

Na Táboa 1 podemos observar que apenas hai diferenzas entre a asignación froito da regra de pw-Shapley e a regra de Shapley-ponderada. Isto débese a que os sistemas de pesos que teñen asociado ambas regras son practicamente iguais, posto que o número de visitas con passepartout que recibe cada museo é relativamente pequeno comparado co seu número de visitas totais, é dicir,

$$p_i w_i \approx p_i(w_i + u_i) \text{ para todo } i \in N.$$

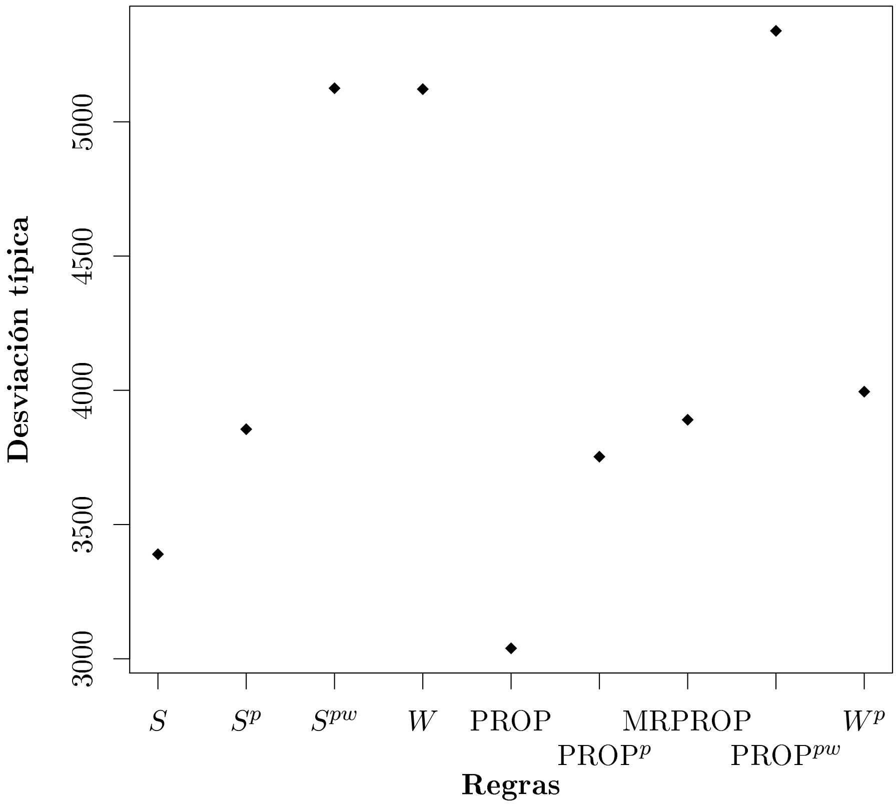
Táboa 2

Museos	Prezo (\euro)	Visitas passepartout	Visitas regulares	PROP	PROP^p	MRPROP	PROP^{pw}	W^p
Musei dei PalazziRosso, Bianco, Tursi	8	1701	131910	10801.68	12833.80	13301.79	17862.96	10945.23
Museo d'ArteOrientale "E.Chiossone"	4	161	8014	1022.38	607.36	543.85	51.36	334.84
Museo di S. Agostino	4	279	17633	1771.70	1052.51	942.44	195.83	733.66
Museo del Risorgimento	4	902	12387	5727.88	267.77	3301.79	444.75	544.31
Museo di ArcheologiaLigure	4	32	17880	203.21	120.72	108.09	22.78	733.66
Museo Navale di Pegli	4	33	4680	209.56	124.49	111.47	6.15	193.04
Museo di Storia eCultura Contadina	2.8	30	2000	190.51	79.22	70.94	1.67	58.20
Raccolte Frugone	4	179	10064	1136.68	675.26	604.65	71.71	419.55
Museo "G. Luxoro"	4	42	1663	266.71	158.44	141.87	2.78	69.84
Galleria d'ArteModerna	6	115	9574	730.27	650.74	582.69	65.74	595.28
Museo di StoriaNaturale "G. Doria"	4	80	31591	508.02	301.79	270.23	100.60	1297.22
Museo di ArteContemporanea	4	92	44402	584.22	347.06	310.77	162.60	1822.44
Museo del CastelloD'Albertis	6	388	18143	2463.88	2195.55	2021.79	420.31	1138.53
Collezione Wolfson	5	20	3258	127.00	94.31	84.45	3.24	167.83
Museo del Tesoro di S.Lorenzo	5.5	58	4470	368.31	300.85	269.39	14.19	255.01
Galata Museo del Mare	10	1028	129163	6528.00	9695.14	9973.79	13213.34	13331.34

Non obstante, en xeral, podemos observar que segundo a regra de repartición que empreguemos, a asignación de cada museo pode variar notablemente, diferenciándose en miles de euros nalgúns casos. Isto evidencia a importancia de escoller adecuadamente a base de información coa que se traballará. Por este motivo, non podemos deixar de destacar a importante vantaxe que presentan as regras que requiren menos parámetros para a súa computación sobre as máis complexas. Deste modo, aínda que as regras asociadas ao valor de Shapley, é dicir, as propostas por Victor Ginsburgh e Israel Zang (2001) e no primeiro modelo de Gustavo Bergantiños e Juan D. Moreno Ternero (2015, 2016), presentan moi boas propiedades na teoría, a necesidade de que os museos garden de forma coordinada un rexistro que reflicta que museos visitou cada propietario dun passepartout dificulta enormemente o seu uso na práctica. A pesar de que en Ginsburgh e Zang (2001) afírmase que estas regras de repartición son moi sinxelas de implementar coa tecnoloxía moderna, no desenvolvemento deste traballo atopámonos con que ningunha das entidades coas que nos puxemos en contacto dispoñía desta información. Por outra banda, as regras propostas por Arantza Estévez Fernández, Peter Borm e Herbert Hammers (2012) e no segundo modelo de Gustavo Bergantiños e Juan D. Moreno Ternero (2015, 2016) presentan máis facilidades á hora de ser aplicadas nun problema real.

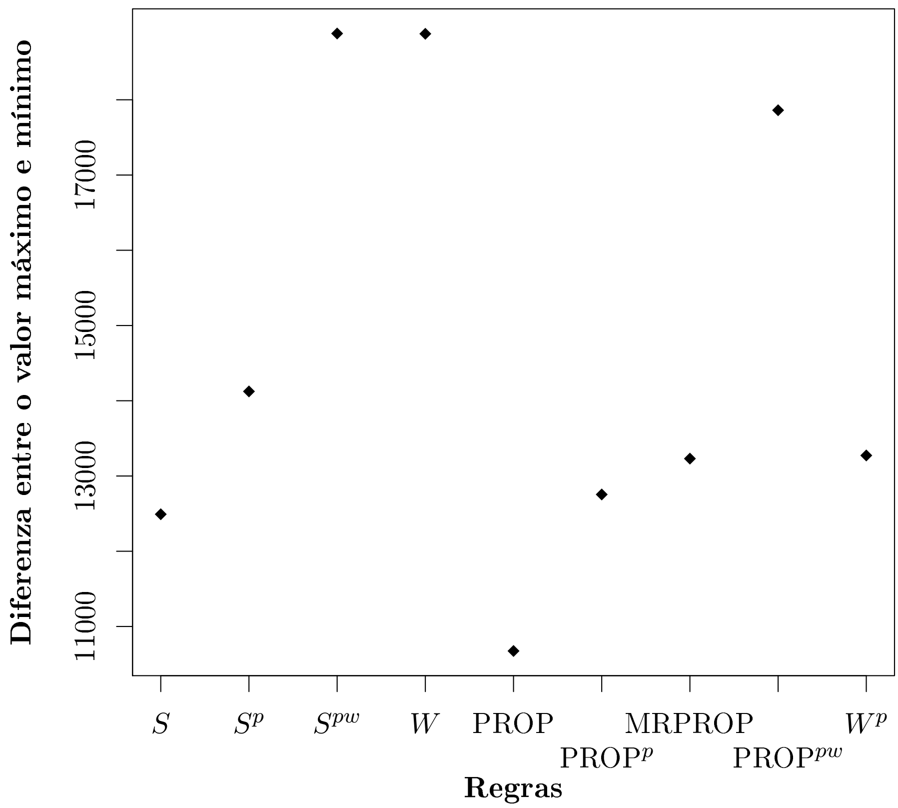
Pódenos resultar de interese, tamén, ver que regras presentan unha maior dispersión

Gráfico 3



na asignación que realizan. Con esta fin, presentamos os gráficos 3 e 4, que amosan a desviación típica e a diferenza entre o valor máximo e mínimo da asignación de cada regra (ámbolos dous valores en euros). Observamos que, neste exemplo, son as regras que teñen en conta máis parámetros (S^{pw}, W, e PROP^{pw}) as que amosan unha maior dispersión e unha maior diferenza entre as cantidades máximas e mínimas que asignan aos museos; chegando, calquera das tres regras, a asignar ao "Museo di Storia e Cultura Contadina" menos de 3€, e máis de 17500€ ao "Musei dei Palazzi Rosso, Bianco, Tursi ". Isto débese a que, no problema que estamos a estudar, os museos cun prezo máis alto na súa entrada regular son tamén os que teñen máis visitas, xa sexan regulares ou con passepartout. Non obstante, observamos que, a pesar de ter en conta os mesmos parámetros, a regra Proporcional-ponderada, W^p, non provoca diferenzas tan grandes entre as asignacións aos distintos museos. É natural pensar que na práctica será máis interesante empregar regras nas que as asignacións que reciben os museos non sexan extremadamente dispares, pois aínda que poidan existir xustificacións teóricas para que se produzan tales diferenzas, estas poderían provocar desacordos entre as distintas entidades á hora de organizar o sistema de passepartout.

Gráfico 4



Conclusións

Ao longo deste traballo fin de grao levamos a cabo o estudo dun problema extraído do mundo real, como é o problema do passepartout, a través das ferramentas que nos brinda a teoría de xogos cooperativa. Na súa elaboración, procuramos non só dar solución a dito problema, senón, na medida do posible, elaborar un documento autocontido e accesible para o lector sen coñecementos previos na teoría de xogos. Deste modo, no primeiro capítulo repasamos algúns conceptos fundamentais dos xogos cooperativos, como o núcleo e o valor de Shapley, ademais doutros como a convexidade ou os problemas de bancarrota; para a continuación afondar no propio problema.

No proceso de resolución do problema do passepartout, a metodoloxía que seguimos foi sempre a mesma, a cal non é outra que a empregada na literatura xa existente que trata esta cuestión. En primeiro lugar, definimos que propiedades debe cumprir unha regra de repartición para ser unha solución "xusta" ao problema e, a continuación, tratamos de caracterizar axiomaticamente ditas solucións. Isto implica que segundo que autores estudemos, atopémos distintos criterios e, polo tanto, distintas solucións para o mesmo problema. Esta falta de unicidade da solución resulta fundamental á hora de afrontar un problema real. As distintas regras de repartición que consideramos neste traballo non só se diferencian nas súas propiedades, senón que requiren de distintas bases de información para poder ser empregadas. Isto é crucial, pois como vimos ao traballar co caso dos museos de Xénova, ás veces os museos non dispoñen de todos os datos que algunhas delas requiren. Deste modo, dispoñer de solucións alternativas, lonxe de ser un defecto, facilita a resolución do problema na práctica, pois aínda que algunhas das solucións poidan resultar adecuadas na teoría, o seu uso en casos reais pode resultar moi complexo ao requirir de moita información.

Por último, destacar que aínda que a priori o problema do passepartout poida parecer un caso moi particular e concreto dentro da teoría de xogos, o dito e aprendido durante o seu estudo pode ser aplicado a outros problemas similares, xa sexa de maneira directa ou con certas adaptacións. Entre outros, algúns exemplos disto son: a repartición de custos dun proxecto, o deseño de tarifas de amortización de instalacións, como aeroportos ou autoestradas; ou a repartición dun certo capital en situacións de quebra.

Bibliografía

[1] Bergantiños, G. and Moreno-Ternero, J. D.: 2015 *The axiomatic approach to the problem of sharing the revenue from museum passes*, Games and Economic Behavior 89, 78-92.

[2] Bergantiños, G. and Moreno-Ternero, J. D.: 2016 *A new rule for the problem of sharing the revenue from museum passes*, Operations Research Letters 44, 2, 208-211.

[3] Calvo, E. e Gutiérrez, E.: 2013 *The Shapley-Solidarity value for games with a coalitional structure*, International Game Theory Review 15, 1-24.

[4] Casas-Méndez, B. V., Fragnelli, V. and García-Jurado, I.: 2014 *A survey of allocation rules for the museum pass problem*, Journal of Cultural Economics 38, 191-205.

[5] Casas-Méndez, B. V., Fiestras-Janeiro, G., García-Jurado, I., e González-Díaz, J.: 2012 *Introducción a la teoría de juegos*, Universidade de Santiago de Compostela.

[6] Curiel, I., Maschler, M., Tijs, S.H.: 1987 *Bankruptcy games*, Zeitschrift fur Operations Research 31, 143-159.

[7] Estévez-Fernández, M. A.: 2006 *Cooperative behavior, competition and operations research*, Tilburg: CentER, Center for Economic Research.

[8] Estévez-Fernández, M. A., Borm, P. and Hamers, H.: 2012 *A note on passepartout problems*, International Game Theory Review 14, 1-9.

[9] Ginsburgh, V. and Zang, I.: 2001 *Sharing the income of a museum pass program*, Museum Management and Curatorship 19, 371–383.

[10] Ginsburgh, V. and Zang, I.: 2003 *The museum pass game and its value*, Games and Economic Behavior 43, 322–325.

[11] González-Díaz, J., Fiestras-Janeiro G. e García-Jurado, I.: 2010 *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 115, American Mathematical Society and RSME.

[12] Kalai, E., Samet, D.: 1987 *On weighted Shapley values*, International Journal of Game Theory 16, 205-222.

[13] Mirás-Calvo, M. A., Sánchez-Rodríguez, E.: 2008 *Juegos cooperativos con utilidad transferible usando MATLAB: TUGlab*, Universidade de Vigo.

[14] Myerson, R.B.: 1991 *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press.

[15] Nowak, A. S. e Radzik, T.: 1994 *A solidarity value for n-person transferable utility games*, International Journal of Game Theory 23, 43–48.

[16] O'Neill, B.: 1982 *A problem of rights arbitration from the Talmud*, Mathematical Social Science, 2, 345-371.

[17] Osborne, M. and Rubinstein, A.: 1994 *A Course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge, MA and London.

[18] Owen, G.: 1968 *Game Theory*, Academic Press.

[19] Roth, A. E.: 1988 *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press.

[20] Shapley, L.S.: 1953, A value for n-person games, in Roth, A. E. (ed), *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, 1988.

[21] Thomson, W.: 2003 *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*, Mathematical Social Sciences 45, 249-297.

[22] van Damme, E. and Furth, D.: 2002, Game theory and the market, *in* P. Borm and H. Peters(eds), *Chapters in Game Theory*, Kluwer Academic Publishers.

[23] Quesada, V. e García, A.: 1988 *Lecciones de cálculo de probabilidades*, Díaz e Santos, 309-315.

[24] Young J. M.: 1985 *Monotonic solutions of cooperative games*, International Journal of Game Theory, 14, 65-72.

Apéndice A

Código de R

Código da linguaxe de programación **R** empregado para computar as regras de repartición.

```
# Valor de Shapley, S
# S(museos, passe vendidos, prezo passe, mus cada visitante)

S=function(n,m,delta,K){
  x=rep(0,n)
  for (i in 1:n){
    for (j in 1:m){
      if (K[[j]][i]==1){
        x[i]=x[i]+1/sum(K[[j]])
      }
    }
  }
  y=x*delta
  return(y)
}

# Valor de p-Shapley, Sp
# Sp(museos, passe vendidos, prezo passe, mus cada visitante,
# vec prezos reg)

Sp=function(n,m,delta,K,p){
  x=rep(0,n)
```

```
  for (i in 1:n){
    for (j in 1:m){
      if (K[[j]][i]==1){
        x[i]=x[i]+p[i]/sum(K[[j]]*p)
      }
    }
  }
  y=x*delta
  return(y)
}


# Valor de pw-Shapley, Spw
# Spw(muses, passes vendidos, prezo passe, mus cada visitante,
# vec prezos reg, vec vis reg)

Spw=function(n,m,delta,K,p,w){
  x=rep(0,n)
  for (i in 1:n){
    for (j in 1:m){
      if (K[[j]][i]==1){
        x[i]=x[i]+(p[i]*w[i])/sum(K[[j]]*p*w)
      }
    }
  }
  y=x*delta
  return(y)
}

# Valor de Shaley-ponderada, W
# W(museos, passe vendidos, prezo passe, mus cada visitante,
# vec prezos regulares, vec vis reg, vec vis pase)

W=function(n,m,delta,K,p,w,u){
  x=rep(0,n)
  for (i in 1:n){
```

```
        for (j in 1:m){
            if (K[[j]][i]==1){
                x[i]=x[i]+p[i]*(w[i]+u[i])/sum(K[[j]]*p*(w+u))
            }
        }
    }
    y=x*delta
    return(y)
}

####################################################################


# Regra Proporcional
# P(museos, passe vendidos, prezo passe,
# vec visitantes con passe)

P=function(n,m,delta,u){
    x=rep(0,n)
    x=(u/sum(u))*(m*delta)
    return(x)
}

# Regra p-Proporcional, P_p
# P_p(museos, passe vendidos, prezo passe,
# vec visitantes con passe, vec prezos reg)

P_p=function(n,m,delta,u,p){
    x=rep(0,n)
    x=(p*u/sum(p*u))*(m*delta)
    return(x)
}


# Regra Proporcional con dereitos minimos, MRPROP
# MNPROP(museos, passe vendidos, prezo passepartout,
```

```
# vec visitantes con passes, vec prezo reg)

install.packages("GameTheory")
library(GameTheory)
MRPROP=function(n,m,delta,u,p){
  E=delta*m
  d=p*u
  x=rep(0,n)
  r=rep(0,n)
  d_mod=rep(0,n)
  for (i in 1:n)
    r[i]=max(0,E-(sum(d)-d[i]))
  E_mod=E-sum(r)
  d_mod=d-r
  x=round(r+Proportional(E_mod,d_mod)$`Results`,2)
  return(x)
}


# Regra pw-Proporcional, P_pw
# P_pw(museos, passe vendidos, prezo passe,
# vec visitantes con passe, vec prezos regulares,
# vec visitantes reg)

P_pw=function(n,m,delta,u,p,w){
  x=rep(0,n)
  x=(p*u*w/sum(p*u*w))*(m*delta)
  return(x)
}


# Regra Proporcional-ponderada
# W_p(museos, passe vendidos, prezo passe,
# vec visitantes con passe, vec prezos regulares,
# vec visitantes reg)
```

```
W_p=function(n,m,delta,u,p,w){
  x=rep(0,n)
  x=(p*(u+w)/sum(p*(u+w)))*(m*delta)
  return(x)
}
```