



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O CÁLCULO DE VARIACIÓNS E AS SÚAS APLICACIÓNS

Helena Puente Rodríguez

Curso 2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O CÁLCULO DE VARIACIÓNS E AS SÚAS APLICACIÓNS

Helena Puente Rodríguez

Xullo, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: O cálculo de variacións e as súas aplicacións.
Breve descrición do contido
Neste traballo estudarase a teoría do cálculo de variacións. Despois de introducir exemplos clásicos que nos levan á necesidade de minimizar funcionais definidos en espazos de dimensión infinita, deduciranse as ecuacións de Euler-Lagrange. Unha vez obtidas, aplicaranse a problemas físicos e xeométricos.

Índice

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Problemas de variacións suxeitos a condicións de contorno	1
1.1. O problema da braquistócrona	1
1.2. Cálculo de xeodésicas	3
1.2.1. Superficie de revolución: a esfera	4
1.2.2. Superficie de revolución: o helicoide	5
1.3. Superficies minimais	6
1.4. O problema isoperimétrico	7
2. A ecuación de Euler-Lagrange	9
2.1. Aproximación de Euler	10
2.2. Aproximación de Lagrange	11
2.3. Simplificación de Lagrange	12
2.4. Simplificación de Du Bois-Reymond	13
2.5. Casos especiais	15
2.5.1. Funcionais dexenerados	15
2.5.2. Funcionais que non dependen explícitamente de y	16
2.5.3. Funcionais que non dependen explícitamente de x	16

3. Aplicación da ecuación de Euler-Lagrange a casos particulares	19
3.1. Aplicación a problemas particulares	19
3.2. Superficie minimal de revolución	20
3.3. A braquistócrona	21
3.4. Xeodésicas	23
4. Xeralizacións a orde ou dimensións superiores	27
4.1. Funcionais con derivadas segundas	27
4.2. Extensión a funcionais con derivadas n -ésimas	28
4.3. Funcionais de n variables	30
4.4. Caso práctico: a viga	31
4.5. Aplicación á mecánica lagrangiana: o péndulo simple	34
5. Restriccións e método dos multiplicadores de Lagrange	37
5.1. Multiplicadores de Lagrange	37
5.2. Problemas isoperimétricos	39
5.3. Caso práctico: o problema da raíña Dido	40
5.4. Optimización de constantes nas desigualdades de Sobolev	42
5.5. O problema de Sturm-Liouville	45
Bibliografía	51

Resumo

Ao longo deste traballo faremos unha introducción aos conceptos fundamentais do cálculo de variacións. Comezaremos por expoñer os exemplos clásicos que fomentaron o desenvolvemento posterior, que nos levará ao resultado clave da materia, a ecuación de Euler-Lagrange. Veremos algúns exemplos concretos e a súa resolución, así como posibles xeralizacións a funcionais con derivadas superiores e funcións de n variables. Posteriormente tamén se tratarán aplicacións a problemas reais que xorden na física ou na enxeñaría.

Abstract

Along this work we will do an introduction to the most relevant concepts regarding the calculus of variations. We will begin with the classical examples that encouraged further development, which will lead us to the key result: the Euler-Lagrange equation. We will study a few specific cases and their resolution, as well as possible generalizations to higher-order derivatives and n -dimensional functions. Subsequently, we will also address real-life applications to problems that appear in physics or engineering.

Introdución

O desenvolvemento dos problemas de optimización, isto é, atopar máximos e mínimos, é un dos máis importantes e fructíferos ao longo da historia das matemáticas. Neste traballo realizaremos un percorrido polos principios básicos da optimización non linear en espazos de funcións de dimensión infinita, unha rama coñecida como "cálculo de variacións". As técnicas empregadas son fundamentais en moitas áreas, e teñen aplicacións tanto teóricas como prácticas. Os métodos de resolución dos problemas variacionais son esencialmente moi similares aos métodos de atopar máximos e mínimos en funcións reais de variable real. O cálculo da variacións constitúe unha parte extensa e importante da análise matemática e está estreitamente relacionada con problemas de física, xeometría ou enxeñaría.

O inicio do cálculo de variacións remóntase aos primeiros problemas de optimización estudados na Antigüidade clásica, sendo un exemplo destacable o problema da raíña Dido. Porén, a formalización de dito campo tal e como o coñecemos hoxe en día iniciouse no século XVII, con Johann Bernoulli e o seu problema da braquistócrona. A materia suscitou o interese das grandes mentes matemáticas do seu tempo, tales como Newton ou Leibniz. Os desenvolvementos máis destacables e que abordaremos neste traballo viñeron da man de Euler e Lagrange, que remataron de asentar todo o coñecido en relación ao cálculo de variacións.

Na actualidade, o cálculo de variacións segue a ser unha área de interese e estudo, con aplicacións orientadas en multitude de disciplinas, dende a economía ou a teoría de control ata a enxeñaría eléctrica.

Este traballo estará dividido en 5 capítulos, ao longo dos cales iremos desenvolvendo diversos aspectos do cálculo de variacións. Primeiramente exporemos algúns dos exemplos clásicos máis destacables (o xa mencionado problema da braquistócrona, ou o da raíña Dido) que motivaron os traballos de Euler e Lagrange. Estes serán mencionados no segundo capítulo, onde afondaremos en detalle na obtención da ecuación de Euler-Lagrange. Tamén veremos aplicacións a casos concretos de funcionais onde dita ecuación se simplifica, e resolveremos os problemas expostos ao inicio. Dedicaremos un capítulo a tratar posibles xeralizacións a derivadas de orde superior e funcións de n variables, acompañadas de exemplos prácticos onde se aplican ditas xeralizacións.

Para finalizar, dedicaremos o último capítulo a falar de certos tipos de restriccións que poden ser impostas nos problemas variacionais, tales como as restriccións isoperimétricas. Desenvolveremos a teoría dos multiplicadores de Lagrange, que nos servirán para atopar extremos condicionados, e nos serán de utilidade neste tipo de problemas. Veremos aplicacións dos problemas isoperimétricos, dende o da raíña Dido ata algúns que a simple vista non se corresponden co cálculo de variacións, pero poden ser tratados como tales facendo as consideracións pertinentes. Un exemplo disto será a búsqueda de constantes nas desigualdades de Sobolev ou o cálculo de autovalores do problema de Sturm-Liouville.

Capítulo 1

Problemas de variacións suxeitos a condicións de contorno

Comezaremos expoñendo as cuestións que deron inicio ao cálculo de variacións. En cada sección abordaremos un exemplo concreto: a braquistócrona, o cálculo de xeodésicas, as superficies minimais e o problema isoperimétrico. O máis significativo, e o que cómpre mencionar primeiro pola súa relevancia nos desenvolvementos posteriores, é o descrito a continuación. Apoiarémonos nas referencias bibliográficas de Kot [7], Rindler [9], Simmons [10] e Van Brunt [11].

1.1. O problema da braquistócrona

O punto de partida do cálculo de variacións atópase no chamado problema da braquistócrona, proposto en xuño de 1696 por Johann Bernoulli na revista *Acta Eruditorum*, e no que traballaron algúns dos grandes matemáticos europeos do seu tempo. O problema é o seguinte:

Dados os puntos A e B nun plano vertical, encontrar o camiño, denotado por AMB, que percorrerá un punto en movemento M dende A ata B pola acción do seu propio peso no menor tempo posible. (ver Figura 1.1)

Imaxinemos que un fío de arame une os puntos A e B, e que o punto M (podemos supoñer que é una canica) pode deslizarse en sentido descendente polo fío. Johann Bernoulli supuxo que o arame podería tomar a forma de calquera curva arbitraria, e pedía atopar a que conlevaría o menor tempo de descenso. De aí o nome de braquistócrona (do grego *brachistos*, máis curto, e *chronos*, tempo). Como aclaración, Bernoulli advirte que a solución non se resume nunha simple liña recta, como se podería pensar apresuradamente. Outras solucións intuitivas poderían ser un

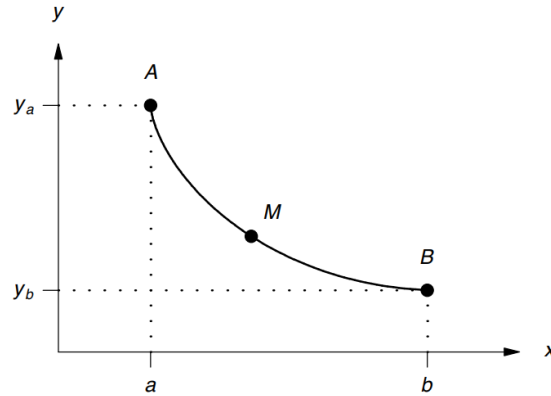


Figura 1.1: Curva de descenso

arco de circunferencia, unha parábola ou incluso unha catenaria, pero non constitúen solucións óptimas.

Matemáticos como Leibniz, Newton, L'Hôpital, o propio Johann Bernoulli ou seu irmán Jacob Bernoulli proporcionaron cadansúas solucións, que servirían de inspiración para futuros desenvolvementos do problema.

Analiticamente, podemos expresar este problema do xeito seguinte: Sexa unha partícula M con masa m , suxeita á acción dun campo gravitatorio g , movéndose a través da curva $y = y(x)$ dende $A = (a, y_a)$ ata $B = (b, y_b)$. O tempo de descenso vén dado por:

$$T = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

sendo $ds = \sqrt{1 + y'^2}$ o parámetro lonxitude de arco, L a lonxitude da curva e v a velocidade da partícula.

Supoñendo que podemos despreziar o rozamento, aplicaremos a lei de conservación da enerxía mecánica. Se a partícula se atopa inicialmente en reposo, temos que:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_a.$$

Podemos expresar a velocidade como:

$$v = \sqrt{2g(y_a - y)}.$$

O noso obxectivo é, entón, achar a curva $y = y(x)$ tal que o valor da seguinte integral

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_a - y}} dx,$$

suxeita ás condicións de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ se minimiza.

Veremos máis adiante que a solución ao problema da braquistócrona é a cicloide invertida, parametrizada por:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= a + R(\theta - \text{sen } \theta) \\ y(\theta) &= y_a - R(1 - \cos \theta), \quad \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

sendo R unha constante que depende dos puntos inicial e final. A cicloide é a curva resultante de seguir a traxectoria dun punto da circunferencia de radio R rodando ao longo da recta horizontal $y = y_a$ (véxase Figura 1.2).

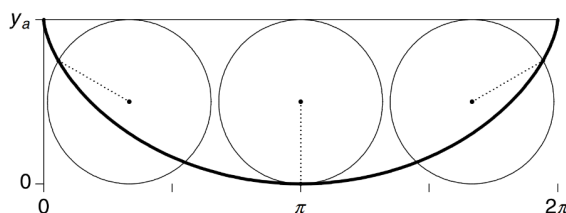


Figura 1.2: Cicloide con $R = \frac{1}{a}y_a$ e $a = 0$

1.2. Cálculo de xeodésicas

Outro problema clásico que cómpre mencionar é descrito a continuación. Como é sabido intuitivamente, unha recta é a distancia máis curta entre dous puntos nun plano. Seguindo esta idea, queremos achar os camiños máis curtos entre pares de puntos en superficies máis xerais. Esta curva chamarase xeodésica e xorde como resultado de minimizar a lonxitude de arco.

Consideremos dous puntos A e B nunha superficie parametrizada. Desexamos unilos pola curva continuamente diferenciable de mínima lonxitude. O vector de posición dun punto en coordenadas cartesianas será:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

sendo u, v , os parámetros da superficie, e sendo \mathbf{i}, \mathbf{j} e \mathbf{k} , a base ortonormal cartesiana. Sexa agora a curva dada pola parametrización

$$u = u(t), \quad v = v(t). \tag{1.1}$$

O vector $\dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\dot{u} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\dot{v}$ é tanxente á curva e á superficie. O cadrado da distancia entre

dous puntos da superficie obterémolo integrando a seguinte expresión:

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv \right) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad (1.2)$$

onde

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

O termo da dereita en (1.2) denomínase *primeira forma fundamental* da superficie. Polo tanto, dados os puntos $A = (u_a, v_a)$ e $B = (u_b, v_b)$ na curva descrita en (1.1), a distancia entre eles será:

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt,$$

con $u(t_a) = u_a$, $v(t_a) = v_a$, $u(t_b) = u_b$, $v(t_b) = v_b$. Nótese que temos dúas variables dependentes, $u(t)$ e $v(t)$, e unha variable independente, t . Podemos reescribir $v = v(u)$, v como función de u , e tendo en conta que $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dt}$, a integral anterior a minimizar quedaría:

$$s = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{E + 2F \left(\frac{dv}{du} \right) + G \left(\frac{dv}{du} \right)^2} du,$$

con $v(u_a) = v_a$, $v(u_b) = v_b$.

1.2.1. Superficie de revolución: a esfera

Ilustraremos o problema do cálculo de xeodésicas cun exemplo práctico sinxelo. Sexan dous puntos A e B nunha esfera de radio R con centro na orixe. O noso obxectivo é unir os dous puntos por unha curva continuamente diferenciable e coa menor lonxitude posible. O vector de posición é $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, sendo \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} a base ortonormal cartesiana.

Realizamos un cambio de variable a coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta,$$

Entón o vector de posición \mathbf{r} tomará a forma seguinte:

$$\mathbf{r}(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}. \quad (1.3)$$

Dado que o vector de posición depende de r , θ e ϕ ,

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} d\phi = h_r dr \hat{e}_r + h_\theta d\theta \hat{e}_\theta + h_\phi d\phi \hat{e}_\phi, \quad (1.4)$$

onde \hat{e}_r , \hat{e}_θ e \hat{e}_ϕ son os vectores unitarios nas direccións de r , θ e ϕ , respectivamente; e

$$h_r = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\| = 1, \quad h_\theta = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = r, \quad h_\phi = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right\| = r \sin \theta,$$

son os factores de escala nas coordenadas esféricas.

O elemento de lonxitude de arco en coordenadas esféricas vén dado pola expresión:

$$ds = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{h_r^2 dr^2 + h_\theta^2 d\theta^2 + h_\phi^2 d\phi^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2}. \quad (1.5)$$

Nunha esfera de radio $r = R$, a expresión 1.5 redúcese a

$$ds = R \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2}. \quad (1.6)$$

Se asumimos que $\phi = \phi(\theta)$, a curva que minimiza a distancia entre os puntos $A = (\theta_a, \phi_a)$ e $B = (\theta_b, \phi_b)$ obtense minimizando a seguinte integral:

$$s = \int_A^B ds = R \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{1 + \sin^2 \theta (d\phi/d\theta)^2} d\theta, \quad (1.7)$$

suxeita ás condicións de contorno

$$\phi(\theta_a) = \phi_a, \quad \phi(\theta_b) = \phi_b.$$

Veremos máis adiante que os camiños máis curtos sobre unha esfera son os arcos dos círculos máximos.

1.2.2. Superficie de revolución: o helicoido

O helicoido é unha superficie de revolución xerada a partir do movemento helicoidal dunha recta ao redor dun eixo. Consideramos a parametrización seguinte:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, a v), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Logo temos:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, a) \quad (1.8)$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental son os seguintes:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 1, \\ F &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0, \\ G &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 1 + u^2. \end{aligned}$$

En virtude do descrito anteriormente, teremos que atopar a curva $(u(t), v(t))$, pasando polos puntos $A = (u_a, v_a)$ e $B = (u_b, v_b)$ do helicoido, que minimiza o funcional lonxitude de arco:

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + [1 + (u(t))^2] \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt,$$

suxeita ás condicións de contorno $u(t_a) = u_a$, $v(t_a) = v_a$, $u(t_b) = u_b$, $v(t_b) = v_b$. Isto é equivalente a buscar a curva $v = v(u)$ que minimiza o funcional:

$$s = \int_{u_a}^{u_b} \sqrt{1 + [1 + u^2] \left(\frac{dv}{du}\right)^2} du,$$

con $v(u_a) = v_a$, $v(u_b) = v_b$.

1.3. Superficies minimais

O problema das superficies minimais é unha xeralización natural do problema das xeodésicas. Temos unha curva no espazo $C \subset \mathbb{R}^3$ e buscamos atopar a superficie S coa menor área posible entre todas aquelas cuxa fronteira é C . É dicir, desexamos minimizar a integral de área da superficie que ten a C como fronteira, e a superficie obtida denominarémola *superficie minimal*. Isto é o que tamén se coñece como o *soap-film problem*, ou *problema de Plateau*, en referencia ao físico Joseph Plateau, que estudou amplamente esta cuestión no século XIX.

Fisicamente, se dobramos un arame coa forma da curva C e o introducimos en auga con xabón, a tensión superficial causará que se minimize a área ocupada, e polo tanto adquirirá a forma da superficie minimal. A mediados do século XX atopouse unha solución satisfactoria para este problema, que segue a ser unha cuestión moi activa e fonte de investigacións en enxeñaría, arquitectura ou bioloxía.

Procedamos coa formulación matemática do problema. Sexa a curva de partida C e a súa proxección Γ no plano (x, y) que encerra un dominio aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, como se ve na Figura 1.3. A curva C virá parametrizada por $z = g(x, y)$ para $(x, y) \in \Gamma = \partial\Omega$. Por simplicidade, asumiremos que a superficie minimal S estará definida como o grafo dunha función $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in \Omega$.

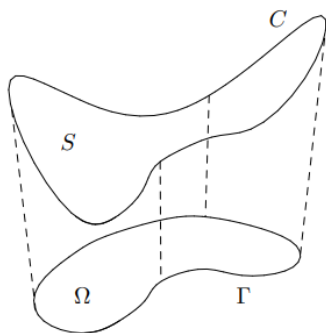


Figura 1.3: Superficie minimal

A área de dita superficie estará dada pola integral dobre:

$$S = \int \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx \, dy. \quad (1.9)$$

Para atopar a superficie minimal, deberemos achar f tal que minimiza a integral (1.9), suxeita ás condicións de contorno que definen a curva C : $f(x, y) = g(x, y)$, $(x, y) \in \partial\Omega$.

Lagrange probou que unha superficie que minimiza (1.9) debe satisfacer a *ecuación de superficie minimal* [8]:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Un caso sinxelo deste problema consiste en considerar dous puntos $A = (a, y_a)$ e $B = (b, y_b)$ no plano, unidos por unha curva continuamente diferenciable $y = y(x)$ de tal xeito que a superficie de revolución, xerada rotando a curva en torno ao eixo OX teña a menor área posible. Noutras palabras, temos que minimizar a integral:

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx,$$

suxeita ás condicións de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

1.4. O problema isoperimétrico

O problema isoperimétrico é unha das cuestións máis antigas referentes ao cálculo de variacións. A cuestión que nos atinxe é a seguinte: construír a curva plana pechada (sen autointerseccións) cunha lonxitude dada $L > 0$ tal que o seu interior ten a maior área posible.

Unha versión clásica é o chamado *Problema da raíña Dido*, que se remonta ao século IX a.C. Dido era unha raíña cartaxinesa, a quen, nunha negociación para fundar unha cidade no norte de África, ofrecéuselle tanta cantidade de terreo como lle fose posible delimitar cunha tira de coiro.

O plantexamento matemático é o seguinte: dados $\alpha, \beta > 0$, atopar a curva $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se maximiza o funcional

$$J[y] = \int_0^1 y(x) \, dx$$

suxeito ás condicións de contorno $y(0) = \alpha$, $y(1) = \beta$, e ademais

$$\int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} \, dx = A$$

onde A é a lonxitude da curva (o perímetro).

Neste caso, non só temos como restriccións as condicións de contorno usuais, senón que se impón unha condición global para todo o dominio de definición. Máis adiante trataremos esta cuestión en detalle.

Os exemplos anteriores sírvennos como pedra angular para introducir o tema fundamental deste traballo, o cálculo de variacións. Todo isto resúmese en: encontrar unha función $y(x)$, que minimiza ou maximiza o funcional dado pola integral

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

sendo $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ unha función dada.

Os problemas mencionados neste capítulo, así como outros exemplos clásicos, poden ser tratados mediante o cálculo de variacións. Debémolles a Euler e a Lagrange o desenvolvemento dun método sistemático para resolver estes problemas.

Capítulo 2

A ecuación de Euler-Lagrange

Tras introducir estes exemplos, enfrontámonos ao problema subxacente, que, como xa se mencionou, é maximizar (ou minimizar) unha integral da forma:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx,$$

suxeita ás condicións de contorno:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b.$$

Os métodos a seguir serán, esencialmente, moi similares ao caso de funcións reais de variable real. Os extremos locais dunha función real de variable real atópanse nos puntos críticos, onde a derivada se anula. Un proceso análogo se aplica neste caso; evidentemente, isto constituirá unha condición necesaria para a existencia de mínimos ou máximos.

Notemos que estamos traballando, non con funcións, senón con funcionais, é dicir, con operadores que levan funcións a números reais. Estaremos traballando nos seguintes espazos:

1. $\mathcal{C}^n[a, b]$, o espazo das funcións de clase n no intervalo $[a, b]$. A derivabilidade nos extremos entendémola no sentido das derivadas laterais.
2. $\mathcal{D}[a, b]$, o espazo das funcións continuas a anacos no intervalo $[a, b]$.
3. $\mathcal{D}^1[a, b]$, o espazo das funcións $\mathcal{C}[a, b]$ con derivada continua a anacos en $[a, b]$.

Polo tanto, o noso obxectivo será calcular extremos de funcionais. Un dos resultados máis importantes neste campo será a ecuación de Euler-Lagrange.

Introduciremos primeiro o caso máis sinxelo de cálculo de variacións, no cal a nosa incógnita é unha función escalar continuamente diferenciable, e o funcional a minimizar dependerá como

máximo, da derivada de orde un. A continuación imos ver as dúas formas de enfocar e resolver o problema, a de Euler e a de Lagrange. Seguiremos a metodoloxía empregada en [7].

2.1. Aproximación de Euler

En 1744, Leonhard Euler publicou o traballo *Methodus Inveniendi* [5], (cuxo título completo tradúcese por *Método para atopar curvas que gozan de propiedades de máximo ou mínimo, ou solución de problemas isoperimétricos no sentido máis amplo*). A forma na que Euler aborda o problema é a seguinte:

Buscamos unha función $y = y(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, suxeita ás condicións de contorno:

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

que minimiza o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) dx. \quad (2.1)$$

Dividimos o intervalo pechado $[a, b]$ mediante a partición $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$, resultando $n + 1$ subintervalos iguais, de lonxitude $\Delta x = \frac{b-a}{n+1}$.

O enfoque de Euler baséase en aproximar a función $y(x)$ por unha poligonal cuxos vértices son $(x_0, y_0), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$. Por brevidade, denotaremos $y_i = y(x_i)$. Podemos agora aproximar o funcional definido en (2.1) pola seguinte expresión:

$$J(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^n f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}\right).$$

Facemos a derivada parcial respecto a un y_k fixado.

$$\frac{\partial J}{\partial y_k} = f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) \Delta x + f_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) - f_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right).$$

Para atopar un extremo, seguimos un proceso similar ao que seguiríamos con unha función real de variable real, igualando a derivada parcial a 0. Ademais se tomamos o límite cando $n \rightarrow \infty$ entón $\Delta x \rightarrow 0$. Para realizar o cálculo dividimos previamente por Δx :

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial J}{\partial y_k} = f_y\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - \frac{1}{\Delta x} \left(f_{y'}\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right) - f_{y'}\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) \right).$$

Tomando os mencionados límites chegamos á seguinte expresión:

$$\frac{\partial J}{\partial y} = f_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y').$$

Nun extremo local (máximo ou mínimo), a derivada anúlase, resultando a denominada ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Nótese que esta ecuación deberá ser modificada se a curva buscada non se atopa no interior da rexión. Ademais, de xeito análogo aos puntos críticos no caso real, a ecuación de Euler-Lagrange é condición necesaria, mais non suficiente para a existencia de extremo.

2.2. Aproximación de Lagrange

Euler obtivo a ecuación anterior variando unha soa das ordenadas y_k . Lagrange chegou a conclusión de que podía obter o mesmo resultado variando todas as ordenadas do funcional (2.1)

Supoñamos que a función $y = \hat{y}(x)$ é solución do problema, e consideramos unha **variación** da solución, isto é, unha función $h(x)$, tal que $y(x) = \hat{y}(x) + h(x)$, con $h(a) = h(b) = 0$. Traballaremos con variacións da forma $h(x) = \varepsilon \eta(x)$, con $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Ademais consideraremos $\eta(x)$ independente de ε . É obvio que cando $\varepsilon \rightarrow 0$, entón a variación $h(x)$ tamén tende a 0.

Estamos en condicións de reescribir o funcional (2.1) do seguinte xeito:

$$J(\varepsilon) = J[\hat{y} + \varepsilon \eta] = \int_a^b f(x, \hat{y}(x) + \varepsilon \eta(x), \hat{y}'(x) + \varepsilon \eta'(x)) dx.$$

Sexa a variación total:

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J(0) = \int_a^b f(x, \hat{y}(x) + \varepsilon \eta(x), \hat{y}'(x) + \varepsilon \eta'(x)) dx - \int_a^b f(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)) dx$$

Supoñemos f suficientemente regular como para considerar a súa expansión de Taylor:

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J(0) = J'(0)\varepsilon + \frac{1}{2}J''(0)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

onde

$$\begin{aligned} \delta J &= J'(0)\varepsilon = \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon, \\ \delta^2 J &= J''(0)\varepsilon^2 = \left. \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

A primeira variación vén dada pola seguinte expresión:

$$\delta J = \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'] dx. \quad (2.2)$$

E análogamente, a segunda variación é:

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 = \varepsilon^2 \int_a^b [f_{yy}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta^2 + 2f_{yy'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta\eta' + f_{y'y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'^2] dx.$$

Se $J[\hat{y}]$ é un mínimo local ou relativo, debe cumprirse

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J \geq 0.$$

Por outra banda, para ter un máximo relativo, debe cumprirse:

$$\delta J = 0, \quad \delta^2 J \leq 0.$$

Estamos en condicións de enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Unha condición necesaria para que o funcional $J[y]$ teña un extremo relativo en $y = \hat{y}(x)$, é que a primeira variación de $J[y]$ sexa nula:*

$$\delta J = 0$$

para $y = \hat{y}(x)$ e para todas as variacións admisibles $\eta(x)$.

2.3. Simplificación de Lagrange

Integrando por partes no segundo sumando de (2.2), temos:

$$\int_a^b f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}') \eta' dx = \eta(x) \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx.$$

Como, por hipótese, a función $\eta(x)$ é nula nos extremos do intervalo, a expresión da condición necesaria en (2.2) redúcese a

$$\varepsilon \int_a^b \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right]_{\hat{y}, \hat{y}'} dx = 0.$$

Lagrange asumiu que $\eta(x)$ debía ser nula, mais non o probou. Para verificar que isto é certo, deberemos empregar un lema, coñecido como lema fundamental do cálculo de variacións, probado por du Bois-Reymond (1879).

Lema 2.2 (Lema fundamental do cálculo de variacións). *Sexa $M(x) \in C[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b M(x) \eta(x) dx = 0,$$

para todo $\eta(x) \in C^1[a, b]$ cumprindo que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, entón $M(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Farémola por redución ao absurdo.

Sen perda de xeralidade, supoñamos que $\exists c \in (a, b)$ tal que $M(c) > 0$. Por continuidade, existirá un intervalo compacto $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ con $c \in [x_1, x_2]$ onde $M(x)$ é positiva.

Sexa agora, $\eta(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ definida como segue:

$$\eta(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2(x - x_2)^2, & \text{se } x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{noutro caso.} \end{cases}$$

Así,

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} M(x)(x - x_1)^2(x - x_2)^2dx.$$

Da non negatividade do integrando séguese que: $\int_a^b M(x)\eta(x)dx > 0$, o cal é unha contradición. Polo tanto, necesariamente $M(x) = 0$ en (a, b) . Dado que $M(x)$ é continua, deducimos que tamén se anula nos extremos do intervalo. \square

Agora xa podemos enunciar a condición necesaria para a existencia de extremos relativos:

Teorema 2.3 (Condición de Euler-Lagrange). *Calquera $\hat{y}(x) \in \mathcal{C}^2[a, b]$ que sexa un extremo relativo da integral (2.1) satisfai a ecuación diferencial de Euler-Lagrange:*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

2.4. Simplificación de Du Bois-Reymond

A simplificación de Lagrange obríganos a supoñer que a solución $y \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Preguntámonos agora se poderíamos rebaixar esta condición. Supoñamos que as funcións $\hat{y}(x)$ e $\eta(x)$ anteriormente definidas son só de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$, e integremos por partes o primeiro termo do integrando en (2.2):

$$\int_a^b f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta dx = [\eta(x)\phi(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \phi(x)\eta'(x) dx,$$

sendo

$$\phi(x) = \int_a^x f_y(u, \hat{y}(u), \hat{y}'(u)) du.$$

A continuidade de $f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')$ e de $\eta'(x)$ garante que a integral anterior estea ben definida. Dado que $\eta(a) = \eta(b) = 0$, a condición necesaria

$$\delta J[\eta] = \varepsilon \int_a^b [f_y(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta + f_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\eta'] dx = 0,$$

redúcese a

$$\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du \right)_{y=\hat{y}, y'=\hat{y}'} \eta'(x) dx = 0. \tag{2.3}$$

Precisamos do seguinte lema para continuar.

Lema 2.4 (Lema de du Bois-Reymond). *Sexa $M(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b M(x) \eta'(x) dx = 0,$$

para toda $\eta(x) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ cumprindo $\eta(a) = \eta(b) = 0$, entón $M(x) = c$, con c constante para todo $x \in [a, b]$.

Demostración. Sexa μ o valor medio de $M(x)$ no intervalo pechado $[a, b]$,

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b M(x) dx.$$

Logo verifícase,

$$\int_a^b [M(x) - \mu] dx = 0.$$

Consideremos a variación $\eta(x)$ definida por

$$\eta(x) = \int_a^x [M(x) - \mu] dx.$$

A función $\eta(x)$ é de clase $\mathcal{C}^1[a, b]$ e cumpre $\eta(a) = \eta(b) = 0$, e $\eta'(x) = M(x) - \mu$. Por hipótese,

$$\int_a^b M(x) \eta'(x) dx = \int_a^b M(x)[M(x) - \mu] dx = 0.$$

Ademais,

$$\int_a^b M(x)[M(x) - \mu] dx - \mu \int_a^b M(x)[M(x) - \mu] dx = 0.$$

Podemos reescribir,

$$\int_a^b [M(x) - \mu]^2 dx = 0. \quad (2.4)$$

Sexa $x_0 \in [a, b]$ un punto onde $M(x)$ é continua. Se $M(x_0) \neq \mu$, existiría un subintervalo onde $M(x) \neq \mu$, pero isto contradiría (2.4). De aquí séguese que $M(x) = \mu$ en todos os puntos de continuidade, e polo tanto $M(x)$ é constante en $[a, b]$. \square

Aplicamos agora este lema á condición (2.3), facendo

$$M(x) = \frac{\partial f}{\partial y'} - \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du,$$

que é continua en $[a, b]$ e satisfai as condicións do lema de du Bois-Reymond. Dedúcese que:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y} du + c, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (2.5)$$

Isto coñécese como a forma integral da ecuación de Euler-Lagrange.

Concluimos que o termo dereito da ecuación (2.5) é diferenciable, e polo tanto, tamén o é o segundo termo, o que implica que \hat{y} satifai a ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

É dicir, todas as solucións con derivadas continuas deben verificar Euler-Lagrange, e non se limita só ás de clase $\mathcal{C}^2[a, b]$.

2.5. Casos especiais

Veremos algunhas casuísticas particulares onde os funcionais poden non depender de x , de y ou de y' , e polo tanto, a ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.6)$$

se simplifica. Desenvolvendo o segundo sumando de (2.6), obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\partial f_{y'}}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'} \frac{dy'}{dx},$$

xa que $f_{y'}$ é función de x, y, y' , e ademais, y e y' dependen de x . Chegamos así á forma ultra-diferenciada da ecuación (2.6):

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0.$$

2.5.1. Funcionais dexenerados

Plantexámonos que ocorrería coa ecuación (2.6) se o integrando do funcional (2.1) non dependera explícitamente de y' , ou dependera linealmente de y' , é dicir, estamos ante unha f da forma:

$$f(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y',$$

onde $N(x, y)$ pode ser nula. Estes funcionais chamarémolos *funcionais dexenerados*, e para eles, a ecuación de Euler-Lagrange ten a forma:

$$\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y}y' - \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}y' = 0,$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

o cal non contén derivadas da función y , e polo tanto non é unha ecuación diferencial.

A continuación, poremos un exemplo para ilustrar este caso. Consideremos o funcional:

$$J[y] = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}(x-y)^2 + (\text{sen } y)y' \right] dx,$$

que depende linearmente de y , é dicir:

$$M(x, y) = \frac{1}{2}(x-y)^2 \quad N(x, y) = \text{sen } y,$$

polo tanto, a súa ecuación de Euler-Lagrange será:

$$y - x = 0,$$

isto é,

$$y = x,$$

que non satisfai a maioría das condicións de fronteira.

2.5.2. Funcionais que non dependen explícitamente de y

Sexa agora un integrando da seguinte forma:

$$J[y] = \int_a^b f(x, y') dx.$$

A ecuación de Euler-Lagrange adopta a seguinte expresión:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0,$$

o cal é equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c,$$

sendo c unha constante. En mecánica, isto coñécese como *coordenada cíclica* e a súa integral primeira correspóndese coa conservación do momento.

2.5.3. Funcionais que non dependen explícitamente de x

Supoñamos agora que estamos ante un integrando da forma:

$$J[y] = \int_a^b f(y, y') dx.$$

Neste caso, a ecuación de Euler-Lagrange redúcese a

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y'} y'' = 0.$$

Agora ben, observemos que

$$\frac{d}{dx}(f - y'f_{y'}) = f_y y' + f_{y'} y'' - y' f_{y'y} y' - y' f_{y'y} y'' - y'' f_{y'} = f_y y' - y' f_{y'y} y' - y' f_{y'y} y'' = (f_y - f_{y'y} y' - f_{y'y} y'') y' = 0.$$

Polo tanto, temos que

$$\frac{d}{dx}(f - y'f_{y'}) = 0,$$

é equivalente á condición de Euler-Lagrange (sempre que $y' \neq 0$). Polo tanto, a ecuación ten como integral primeira

$$f - y'f_{y'} = c \tag{2.7}$$

Nos casos máis sinxelos, isto correspóndese en física coa conservación da enerxía, ou, en xeral, coa conservación do hamiltoniano. Veremos a continuación un caso particular onde non temos dependencia explícita de x .

Capítulo 3

Aplicación da ecuación de Euler-Lagrange a casos particulares

Neste capítulo veremos algunhas aplicacións a casos concretos da ecuación de Euler-Lagrange e as condicións obtidas no Capítulo anterior. Resolveremos algúns exercicios propostos extraídos da bibliografía, e ademais, tamén abordaremos a resolución dos problemas plantexados na Introducción.

3.1. Aplicación a problemas particulares

A continuación procederemos á resolución dalgúns casos particulares deixados como exercicio ao lector en [7]. En todos eles, o obxectivo é atopar extremos para os funcionais seguintes.

Exercicio 3.1.

$$J[y] = \int_a^b (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx.$$

A ecuación de Euler-Lagrange neste caso é:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 2y' - 32y - \frac{d}{dx}(2y' + 2y) = 2y' - 32y - 2y'' - 2y' = 0.$$

A expresión anterior redúcese á ecuación diferencial de orde 2 seguinte:

$$y'' + 16y = 0,$$

que ten como solución xeral

$$y(x) = C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x),$$

onde C_1 e C_2 dependerán das condicións de contorno escollidas en cada caso. Como se verá no capítulo seguinte, este é un exemplo de funcional sen dependencia explícita de x .

Exercicio 3.2.

$$J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx.$$

A ecuación de Euler-Lagrange neste caso é:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = x + 2y - 4yy' \frac{d}{dx} (-2y^2) = x + 2y - 4yy' + 4yy'.$$

É claro que a ecuación resultante,

$$y(x) = -\frac{x}{2},$$

non satisfai a maioría das condicións de contorno.

Exercicio 3.3. Este exemplo foi extraído de [4]. Consideremos o funcional seguinte:

$$J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy] dx,$$

suxeito ás condicións de fronteira

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

A ecuación de Euler-Lagrange resulta ser

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 12x - \frac{d}{dx} (2y') = 12x - 2y'' = 0,$$

o que nos conduce á ecuación diferencial

$$y'' - 6x = 0.$$

Integrando, obtemos a solución xeral

$$y(x) = x^3 + C_1 x + C_2,$$

e aplicando as condicións de contorno, temos que $C_1 = C_2 = 0$, é dicir, a función que proporciona un extremo para o funcional é

$$y(x) = x^3.$$

3.2. Superficie minimal de revolución

Revisitaremos agora o problema de minimizar a área

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

dunha superficie de revolución suxeita ás condicións de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ no plano.

Observamos que o noso funcional non depende explícitamente de x , é dicir, estamos ante un integrando da forma dada na subsección anterior. No noso caso particular, a expresión (2.7) lévanos a:

$$y\sqrt{1+y'^2} - y' \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha,$$

onde α é unha constante real, e que se simplifica a

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha.$$

Supoñendo $\alpha > 0$, $y > 0$, temos

$$y = \alpha\sqrt{1+y'^2}.$$

Elevamos ambos membros ao cadrado, e así

$$y'^2 = \frac{1}{\alpha^2}(y^2 - \alpha^2) \iff y' = \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{y^2 - \alpha^2}.$$

Temos unha ecuación en variables separadas, e se tomamos a solución positiva, chegamos a:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}} dy = \frac{1}{\alpha} \int dx.$$

Faremos o cambio de variable $y = \alpha \cosh u$, e empregaremos as relacións coñecidas

$$\cosh^2 u - 1 = \sinh^2 u, \quad \frac{d}{du} \cosh u = \sinh u.$$

A integral redúcese a

$$\int du = \frac{1}{\alpha} \int dx,$$

que ten por solución

$$u = \frac{1}{\alpha}(x - \beta).$$

A nosa curva solución resulta ser a catenaria:

$$y(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right).$$

As curvas desta familia dan lugar ás superficies de revolución coñecidas como catenoides, como se pode apreciar na Figura seguinte.

3.3. A braquistócrona

Imos agora a examinar de novo o problema da braquistócrona. Lembremos que o obxectivo era minimizar o tempo do movemento dunha partícula entre dous puntos, que viña dado pola integral:

$$T = \int_a^b \frac{1}{v} ds = \int_a^b \frac{1}{v} \sqrt{1+y'^2} dx,$$

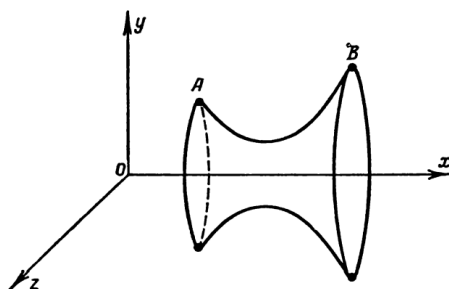


Figura 3.1: Catenoide

suxeita ás condicións de contorno $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, e onde $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ é o elemento lonxitude de arco usual, e v é a velocidade instantánea. Empregaremos a conservación da enerxía mecánica, e asumindo que non hai rozamento, escribimos:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_a,$$

e entón $v = \sqrt{2g(y_a - y)}$. Temos logo o funcional a minimizar:

$$J[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_a - y}} dx.$$

Consideremos o cambio de variable $u = y_a - y$, e así:

$$J[u] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1 + u'^2}{u}} dx.$$

De xeito análogo ao caso anterior, non temos dependencia explícita de x , polo que a ecuación de Euler-Lagrange terá como integral primeira

$$f - u' \frac{\partial f}{\partial u'} = \alpha \iff \frac{\sqrt{1 + u'^2}}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{u'^2}{\sqrt{1 + u'^2}} = \alpha.$$

A última ecuación simplifícase como

$$\frac{1}{\sqrt{u(1 + u'^2)}} = \alpha.$$

Resolvendo en u' , quedamos coa expresión

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 u}{\alpha^2 u}}.$$

Esta ecuación é separable,

$$dx = \sqrt{\frac{\alpha^2 u}{1 - \alpha^2 u}} du, \tag{3.1}$$

e aplicando o cambio de variable $u = \frac{1}{\alpha^2} \sin^2 \theta$, temos $du = \frac{2}{\alpha^2} \sin \theta \cos \theta d\theta$.

Agora, a ecuación (3.1) redúcese a

$$du = \frac{2}{\alpha^2} \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta}{\text{cos}^2 \theta}} \text{sen } \theta \text{ cos } \theta d\theta \implies \alpha^2 dx = 2 \text{sen}^2 \theta d\theta = (1 - \text{cos } 2\theta) d\theta.$$

Disto séguese que

$$\alpha^2 x = \theta - \frac{1}{\alpha^2} \text{sen } 2\theta + \beta,$$

e lembrando que $y = y_a - u$,

$$y = y_a - \frac{1}{\alpha^2} \text{sen}^2 \theta = y_a - \frac{1}{2\alpha^2} (1 - \text{cos } 2\theta).$$

Sexa

$$R = \frac{1}{2\alpha^2}, \quad \phi = 2\theta, \quad a = \frac{\beta}{\alpha^2},$$

entón podemos reescribir a nosa solución na forma paramétrica:

$$x(\phi) = a + R(\phi - \text{sen } \phi),$$

$$y(\phi) = y_a - R(1 - \text{cos } \phi).$$

Esta curva, denominada habitualmente cicloide, describe a traxectoria dun círculo de radio R rodando ao longo da recta $y = y_a$ (ver Figura 3.2).

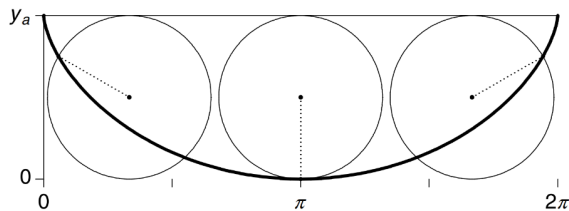


Figura 3.2: Cicloide con $R = \frac{1}{\alpha} y_a$ e $a = 0$

3.4. Xeodésicas

Vimos previamente na Introducción que podemos representar unha superficie en forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

A xeodésica é, como xa se mencionou, a curva de menor lonxitude unindo dous puntos $A = (u_a, v_a)$, $B = (u_b, v_b)$ en dita superficie. Lembramos que para isto, será preciso minimizar o funcional:

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{E + 2F\left(\frac{dv}{du}\right) + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2} du,$$

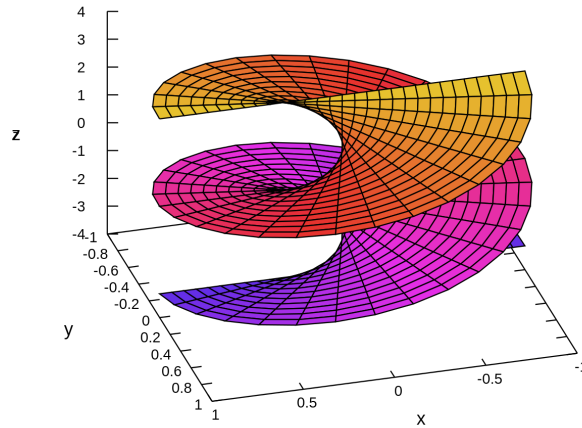


Figura 3.3: Helicoide de revolución

suxeito ás condicións de contorno

$$v(u_a) = v_a, \quad v(u_b) = v_b.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental viñan dados por:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \\ F(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \\ G(u, v) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}. \end{aligned}$$

Aplicando a ecuación da Euler-Lagrange nesta superficie xeral, resulta:

$$\frac{E_v + 2Fv' + Gv'^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} - \frac{d}{du} \left[\frac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} \right] = 0. \quad (3.2)$$

Esta expresión simplifícase bastante no caso de certas superficies, sendo de gran relevancia as superficies de revolución, obtidas mediante a rotación dunha curva plana en torno a un eixo. Completando o exemplo da Sección 1.2.2, consideramos un helicoide parametrizado como:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av), \quad a \in \mathbb{R},$$

e que os seus coeficientes da 1ª forma fundamental, aplicando o resultado obtido en (1.8), son:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 1 \\ F &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 0 \\ G &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 1 + u^2. \end{aligned}$$

Nótese que estes coeficientes non dependen da variable v , e ademais, $F = 0$. Como resultado, (3.2) queda:

$$\frac{d}{du} \left[\frac{Gv'}{\sqrt{E + Gv'^2}} \right] = 0, \quad \implies \quad \frac{d}{du} \left[\frac{(1 + u^2)v'}{\sqrt{1 + (1 + u^2)v'^2}} \right] = 0.$$

Polo tanto, séguese:

$$\frac{(1 + u^2)v'}{\sqrt{1 + (1 + u^2)v'^2}} = c_1,$$

sendo c_1 unha constante.

Aquí distinguimos dous casos:

- Se $c_1 = 0$: Entón temos que $(1 + u^2)v' = 0$, e como, $1 + u^2 \neq 0$, necesariamente implica que $v' = 0$, é dicir, $v(u) = k$, con k constante. Estas curvas son os meridianos de revolución (liñas rectas arredor da xeratriz do helicoido).
- Se $c_1 \neq 0$: Neste caso, elevando ao cadrado, chegamos a:

$$\frac{(1 + u^2)^2 v'^2}{1 + (1 + u^2) v'^2} = c_1^2,$$

polo tanto,

$$(1 + u^2)^2 v'^2 = c_1^2 [1 + (1 + u^2) v'^2],$$

e,

$$[(1 + u^2)^2 - c_1^2 (1 + u^2)] v'^2 = c_1^2.$$

Resolvendo para $v'(u)$ e integrando, chegamos a que a xeodésica ten a seguinte forma:

$$v(u) = c_1 \int \frac{1}{\sqrt{(1 + u^2)^2 - c_1^2(1 + u^2)}} du + c_2$$

A continuación, seguindo o exemplo descrito na Sección 1.2.1, consideramos a esfera S parametrizada por:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = R \operatorname{sen} \theta \cos \phi \mathbf{i} + R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \mathbf{j} + R \cos \theta \mathbf{k},$$

de radio R , con $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

Os coeficientes da primeira forma fundamental son:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = R^2 \\ F &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = 0 \\ G &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = R^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

Polo tanto, a lonxitude de arco é:

$$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{R^2 \theta'^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \phi'^2} dt,$$

e a ecuación de Euler-Lagrange, simplificada igual que no exemplo anterior:

$$\frac{d}{d\theta} \left[\frac{G\phi'}{\sqrt{E + G\phi'^2}} \right] = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \phi'}{\sqrt{R^2(1 + \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \phi'^2)}} \right] = 0.$$

Integrando obtemos

$$\frac{R \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \phi'}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \phi'^2}} = c_2,$$

sendo c_2 unha constante. Análogamente, distinguimos varios casos:

- Se $c_2 = 0$: Temos que $\operatorname{sen}^2 \theta \cdot \phi' = 0$, de onde saen dous subcasos.
 - $\phi' = 0$: Isto quere dicir que ϕ é constante, i.e., trátase dun meridiano de revolución.
 - $\operatorname{sen}^2 \theta = 0$: Ocorre cando $\theta = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso non son curvas, polo que non son de interese no cálculo de xeodésicas.
- Se $c_2 \neq 0$: Integrando de xeito análogo ao caso do helicoido, chegamos a que as xeodésicas son da forma:

$$\theta(\phi) = c_2 \int \frac{\sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \phi'}}{\sqrt{R^2 - c_2^2 R^2}} d\phi + c_3.$$

Capítulo 4

Xeralizacións a orde ou dimensións superiores

A teoría exposta nos capítulos anteriores fai xurdir de xeito natural algunhas preguntas: como podemos estender estes resultados ás derivadas de orde superior? Podemos aplicar a ecuación de Euler-Lagrange a funcións de varias variables?

4.1. Funcionais con derivadas segundas

Comezaremos considerando funcionais que conteñan derivadas segundas. Mantendo a notación anterior, sexa o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx,$$

suxeito ás condicións de contorno

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b, \quad y'(a) = y'_a, \quad y'(b) = y'_b.$$

Procederemos de xeito similar ao caso anterior. Supoñamos que temos unha solución $y = \hat{y}(x)$, e consideramos a variación $h(x) = \varepsilon\eta(x)$, e así

$$y(x) = \hat{y}(x) + \varepsilon\eta(x).$$

Esta función ten que verificar as condicións de contorno, polo que η debe cumprir que $\eta(a) = \eta(b) = \eta'(a) = \eta'(b) = 0$.

A variación total é

$$\Delta J = J[\varepsilon] - J[0] = \int_a^b f(x, \hat{y} + \varepsilon\eta, \hat{y}' + \varepsilon\eta', \hat{y}'' + \varepsilon\eta'') - f(x, \hat{y}, \hat{y}', \hat{y}'') dx,$$

Derivando, obtemos

$$\delta J = \left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' + \frac{\partial f}{\partial y''} \eta'' \right) dx,$$

e aplicando integración por partes a cada sumando dentro da integral

$$\begin{aligned} \int_a^b \eta' \frac{\partial f}{\partial y'} &= \eta \frac{\partial f}{\partial y'} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx \\ \int_a^b \eta'' \frac{\partial f}{\partial y''} &= \eta' \frac{\partial f}{\partial y''} \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \eta' \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) dx = \left[\eta' \frac{\partial f}{\partial y''} - \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \eta \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right), \end{aligned}$$

a primeira variación redúcese a

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) \right] dx + \varepsilon \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} \right) \eta \right]_{x=a}^{x=b} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y''} \eta' \Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Lembramos que para ter un extremo relativo debía verificarse que $\delta J = 0$. De aquí séguese que $\hat{y}(x)$ debe satisfacer a seguinte ecuación diferencial de cuarta orde:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} = 0.$$

Cabe destacar que nalgúns problemas concretos, tanto y como y' non están fixados nos extremos do intervalo de definición. Polo tanto, as funcións η e η' non necesariamente se anulan neses puntos. Para que a primeira variación sexa cero, neses casos, debemos implantar unhas condicións de fronteira *naturais*. Se y non ten valor fixado, requerimos

$$\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y''} \right) = 0.$$

Se y' non está fixado nun extremo, pedimos

$$\frac{\partial f}{\partial y''} = 0.$$

Non afondaremos neste tipo de condicións de fronteira neste traballo.

4.2. Extensión a funcionais con derivadas n -ésimas

A xeralización que faremos a continuación atinxe aos funcionais que dependen das derivadas de orde n . Sexa entón o seguinte funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \quad (4.1)$$

sendo f unha función $n + 2$ veces diferenciable, e suxeita ás condicións de contorno

$$\begin{aligned} y(a) = y_a, y'(a) = y'_a, \dots, y^{(n-1)}(a) = y_a^{(n-1)}, \\ y(b) = y_b, y'(b) = y'_b, \dots, y^{(n-1)}(b) = y_b^{(n-1)}, \end{aligned}$$

Agora supoñamos que $y = y(x)$ e $y = \hat{y}(x)$ son dúas solucións de clase $2n$ nas que se acada un extremo. Consideramos a familia uniparamétrica de funcións

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha[\hat{y}(x) - y(x)]. \quad (4.2)$$

Para $\alpha = 0$, $y(x, \alpha) = y(x)$, e para $\alpha = 1$, $y(x, \alpha) = \hat{y}(x)$. Se restrinximos o funcional (4.1) restrinxido só a curvas da familia (4.2), entón temos que o funcional acada un extremo en $\alpha = 0$, é dicir, $\left. \frac{d}{d\alpha} J[y(x, \alpha)] \right|_{\alpha=0} = 0$.

A isto coñéceselle como a variación do funcional J :

$$\delta J = \left[\frac{d}{d\alpha} \int_a^b f(x, y(a, \alpha), y'(x, \alpha), \dots, y^{(n)}(x, \alpha)) dx \right]_{\alpha=0} = \int_a^b (f_y \delta y + f_{y'} \delta y' + \dots + f_{y^{(n)}} \delta y^{(n)}) dx. \quad (4.3)$$

Integrando o segundo sumando da dereita en (4.3) por partes:

$$\int_a^b f_{y'} \delta y' dx = f_{y'} \delta y \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx} f_{y'} \delta y dx,$$

o terceiro sumando integrámolo por partes dúas veces,

$$\int_a^b f_{y''} \delta y'' dx = f_{y''} \delta y' \Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{d}{dx} f_{y''} \delta y \Big|_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} \delta y dx,$$

e así sucesivamente; integramos o último sumando n veces:

$$\int_a^b f_{y^{(n)}} \delta y^{(n)} dx = f_{y^{(n)}} \delta y^{(n-1)} \Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{d}{dx} f_{y^{(n)}} \delta y^{(n-2)} \Big|_{x=a}^{x=b} + \dots + (-1)^n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} \delta y dx.$$

Aplicando as condicións de contorno, temos que en $x = a$ e $x = b$, as variacións $\delta y = \delta y' = \dots = \delta y^{(n-1)} = 0$, e entón

$$\delta J = \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} \right) \delta y dx.$$

Ademais, nun extremo do funcional temos $\delta J = 0$, o que é equivalente a satisfacer a ecuación diferencial de orde $2n$:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f_{y^{(n)}} = 0,$$

que se coñece como *ecuación de Euler-Poisson*.

4.3. Funcionais de n variables

O seguinte paso consiste en intentar estender os conceptos anteriores ás funcións con varias variables dependentes. Sexa o funcional:

$$J[y_1, \dots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx,$$

que contén n funcións de clase \mathcal{C}^2 , $y_1(x), \dots, y_n(x)$, satisfacendo as condicións de contorno

$$y_i(a) = y_{ia}, \quad y_i(b) = y_{ib}, \quad i = 1, \dots, n.$$

De xeito análogo ao que viñemos facendo ao longo deste traballo, consideraremos as variacións seguintes:

$$h_i(x) = \varepsilon \eta_i(x),$$

tales que $\eta_i(a) = \eta_i(b) = 0$, para cada $i = 1, \dots, n$. Por comodidade, empregaremos notación vectorial para as funcións $y_i(x)$:

$$\mathbf{y}(x) = [y_1(x), \dots, y_n(x)], \quad \mathbf{y}'(x) = [y_1'(x), \dots, y_n'(x)].$$

Supoñamos que temos unha solución óptima e o seu vector de derivadas:

$$\hat{\mathbf{y}}(x) = [\hat{y}_1(x), \dots, \hat{y}_n(x)], \quad \hat{\mathbf{y}}'(x) = [\hat{y}_1'(x), \dots, \hat{y}_n'(x)].$$

Para atopar os extremos do funcional, consideraremos de novo a variación total relativa á solución $\hat{\mathbf{y}}$:

$$\Delta J = J[\hat{\mathbf{y}} + \mathbf{h}] - J[\hat{\mathbf{y}}].$$

En consecuencia, temos que:

$$\Delta J = \int_a^b f(x, \hat{\mathbf{y}} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}, \hat{\mathbf{y}}' + \varepsilon \boldsymbol{\eta}') - f(x, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{y}}') dx,$$

Repetindo o desenvolvemento en serie de Taylor:

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2} \delta^2 J + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

sendo neste caso

$$\delta J = \varepsilon \int_a^b \sum_{i=1}^n (f_{y_i} \eta_i + f_{y_i'} \eta_i') dx.$$

Entón, para todo $i = 1, \dots, n$, a condición necesaria pasa a ser

$$\varepsilon \int_a^b (f_{y_i} \eta_i + f_{y_i'} \eta_i') dx = 0.$$

Empregando o lema fundamental do cálculo de variacións, ou o lema de du Bois-Reymond, para cada i fixado, $\eta_j = 0, \forall j \neq i$, obtemos o seguinte sistema de ecuacións de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Exercicio 4.1. Para ilustrar esta sección, procederemos ao estudo dun exemplo concreto extraído de [4]. Consideremos o funcional seguinte

$$J[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz) dx,$$

suxeito ás condicións de contorno para as funcións $y(x)$ e $z(x)$:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1, \\ z(0) &= 0, & z\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -1. \end{aligned}$$

O sistema de ecuacións diferenciais obtido é

$$\begin{aligned} y'' - z &= 0, \\ z'' - y &= 0. \end{aligned}$$

Podemos suprimir a variable z , e obter a ecuación $y^{(4)} - y = 0$. Integrando, obtemos

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Aplicando a relación $z = y''$, temos que

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Empregando as condicións de contorno, atopamos que $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ e $C_4 = 1$, polo tanto:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin x \\ z(x) &= -\sin x. \end{aligned}$$

4.4. Caso práctico: a viga

O principio da mínima enerxía potencial é fundamental na mecánica de sólidos. Este principio establece que a enerxía potencial total dun sistema elástico baixo forzas conservativas é mínimo respecto a pequenos desprazamentos que satisfan as condicións de contorno.

Lembramos que un corpo elástico é un sólido deformable cuxas deformacións desaparecen tras eliminar as forzas que as causaban. A continuación, consideraremos unha viga fixada nos seus extremos ($y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0$) e calcularemos a ecuación que determina a súa forma baixo unha carga uniforme. Neste caso, suporemos que a única forza externa é a gravidade, e que as forzas internas xorden polas tensións dentro da propia viga. Así, a enerxía potencial total está formada pola enerxía de deformación elástica e o potencial gravitatorio.

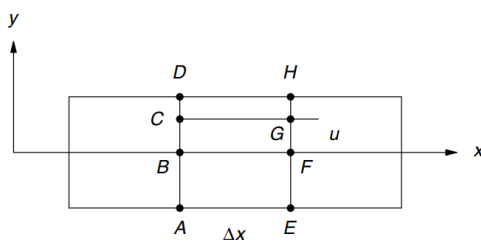


Figura 4.1: Viga recta de sección transversal uniforme (Imaxe extraída de [7])

Sexa entón unha viga recta de sección transversal uniforme. Consideramos a fibra CG , paralela ao eixo de deformación horizontal, e a fibra BF situada no devandito eixo.

A continuación, realizamos unha flexión sobre o plano (x, y) , supoñendo que non hai tensións laterais. Vemos que as fibras por riba do eixo OX acúrtanse, mentres que as que están por debaixo alórganse. Asumiremos que a lonxitude da fibra central BF , no eixo OX non cambia. No estado inicial antes da deformación, temos:

$$CG = BF = R\Delta\theta,$$

sendo R o raio de curvatura do mencionado eixo OX , e $\Delta\theta$ a lonxitude de arco.

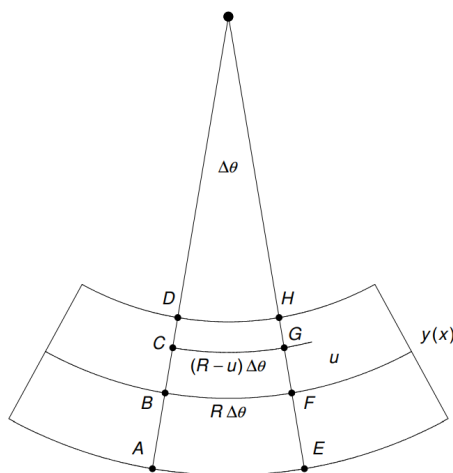


Figura 4.2: Viga sometida á deformación (Imaxe extraída de [7])

Tras dobrar a viga, a fibra CG será máis curta (ver Figura 4.2),

$$CG = (R - u)\Delta\theta,$$

onde $(R - u)$ é o novo raio, considerando u como a distancia GF .

A deformación ε é o cambio proporcional na lonxitude:

$$\varepsilon = -\frac{u\Delta\theta}{R\Delta\theta} = -\frac{u}{R}. \quad (4.4)$$

A curvatura podémola escribir como:

$$k(x) = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

onde $y(x)$ é o desplazamento vertical do eixo.

Polo tanto podemos reescribir (4.4) como:

$$\varepsilon = -\frac{uy''}{(1+y'^2)^{3/2}}.$$

Aplicando a lei de Hooke e a linearidade da elasticidade da viga, a tensión na fibra CG vén dada pola expresión:

$$\sigma = E\varepsilon,$$

sendo E o módulo de Young (ou módulo de elasticidade).

Por outra banda, temos que a densidade de tensión orixinada pola deformación nas fibras vén dada pola seguinte integral:

$$U_0 = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_0^\varepsilon E\varepsilon d\varepsilon = \frac{E}{2}\varepsilon^2 = \frac{E}{2} \frac{(uy'')^2}{(1+y'^2)^3}. \quad (4.5)$$

Integrando esta densidade ao longo do volume da viga obtemos a enerxía de tensión total:

$$U = \int_V U_0 dV = \int_0^l \int_A U_0 dA ds,$$

sendo l a lonxitude total da viga.

Sustituíndo a expresión de U_0 dada en (4.5), e tendo en conta que $ds = \sqrt{1+y'^2}dx$, temos que:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^b \frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} dx,$$

onde

$$I = \int_A u^2 dA$$

é o momento de inercia da sección transversal da viga.

Consideremos entón unha viga elástica uniforme, fixada nos extremos, sometida a unha carga uniformemente repartida, q . Por conveniencia, o eixo OY terá a dirección positiva cara abaixo.

En concordancia co visto anteriormente, a enerxía de tensión resultante da deformación da viga é:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^b \frac{y''^2}{(1+y'^2)^{5/2}} dx,$$

sendo $y(x)$ a deformación da viga, E o módulo de Young e I o momento de inercia.

A perda de enerxía potencial debida á carga q expresarémola como:

$$- \int_0^l q y ds.$$

Polo tanto, a enerxía potencial total é:

$$V = \int_0^b \left[\frac{EI}{2} \frac{y'^2}{(1+y'^2)^{5/2}} - q y (1+y'^2)^{1/2} \right] dx.$$

Esta integral é demasiado complexa como para que a resolución da ecuación de Euler-Lagrange asociada sexa abarcable. Porén, se asumimos que a deformación da viga é suficientemente pequena, podemos desprezciar os termos de potencia 2 en y' ($y' \approx 0$), co cal temos que:

$$(1+y'^2)^{5/2} \approx 1, \quad (1+y'^2)^{1/2} \approx 1,$$

e podemos reescribir:

$$V \approx \int_0^b \left(\frac{EI}{2} y'^2 - q y \right) dx.$$

Deste xeito, a ecuación de Euler-Poisson redúcese a

$$EI y^{(4)} - q = 0.$$

As condicións de fronteira nos extremos fixados son:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y'(0) &= 0. \\ y(b) &= 0, & y'(b) &= 0, \end{aligned}$$

Este desenvolvemento teórico tamén é aplicable a unha viga en voladizo (aquela que ten un extremo fixado e outro libre). No extremo libre non temos condicións de fronteira predefinidas, polo que nos atoparíamos nun caso de condicións de contorno naturais:

$$EI y'''(b) = 0, \quad EI y''(b) = 0,$$

Para máis detalles sobre este tipo de condicións de fronteira pode consultarse [7], Capítulo 9.

4.5. Aplicación á mecánica lagrangiana: o péndulo simple

Os problemas con varias variables dependentes son especialmente frecuentes en mecánica, a rama da física que estuda o movemento dos corpos materiais. A continuación exporemos un

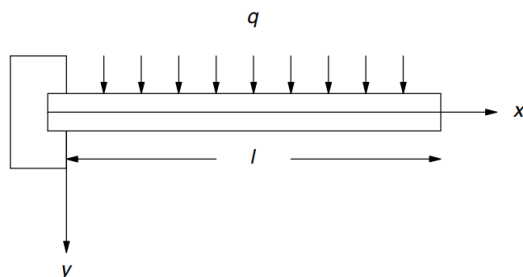


Figura 4.3: Viga voladiza (Imaxe extraída de [7])

exemplo sinxelo, abordándoo dende o punto de vista do cálculo de variacións: o movemento dun péndulo simple.

Primeiro deberemos considerar unha nova notación e algúns conceptos previos. Nos problemas de mecánica, habitualmente nos interesará estudar a evolución de sistemas dinámicos ao longo do tempo; polo tanto, a nosa variable independente pasará a ser t . Asimesmo, se temos unha función $q(t)$, denotaremos a súa derivada con respecto ao tempo como $\dot{q}(t)$.

Poderemos obter as ecuacións do movemento dun corpo empregando magnitudes escalares como a enerxía cinética, $T(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, e a enerxía potencial $V(t, \mathbf{x})$.

Definición 4.2. Defínese o *Lagrangiano* dun sistema de partículas como a diferenza entre a súa enerxía cinética T e a súa enerxía potencial V :

$$L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = T(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - V(t, \mathbf{x}).$$

Con estes conceptos podemos enunciar un dos principios máis importantes da mecánica lagrangiana:

Proposición 4.3 (Principio de Hamilton). *O movemento dun sistema mecánico dende $\mathbf{x}(t_a) = \mathbf{x}_a$ ata $\mathbf{x}(t_b) = \mathbf{x}_b$ é tal que a primeira variación da integral*

$$J[\mathbf{x}] = \int_{t_a}^{t_b} L(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt$$

é cero.

Agora estamos en condicións de traballar co exemplo proposto. Consideremos un péndulo formado por unha masa m suxeita no extremo dunha corda (de masa despreziable) de lonxitude l que se despraza no plano vertical (ver Figura 4.4):

As coordenadas coas que traballaremos serán t , o tempo, e θ , o ángulo respecto da vertical. A enerxía cinética da masa é

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2.$$

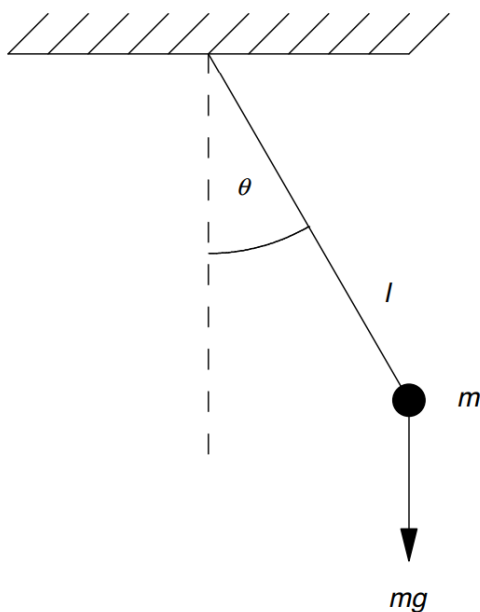


Figura 4.4: Péndulo simple

A enerxía potencial vén dada por

$$V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta).$$

O lagrangiano para este sistema é

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos \theta),$$

polo que a ecuación de Euler-Lagrange resulta

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad m(l\ddot{\theta})^2 = -mgl(1 - \cos \theta).$$

Como non hai dependencia explícita do tempo neste caso, temos como integral primeira

$$L - \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -E,$$

onde $E = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos \theta)$ é a enerxía total do sistema.

Capítulo 5

Restriccións e método dos multiplicadores de Lagrange

Os problemas variacionais a miúdo aparecen acompañados de restriccións. Ao longo deste traballo, estivemos supoñendo que só temos condicións de contorno nos extremos do intervalo de definición, mais os problemas de cálculo de variacións poden estar suxeitos a todo tipo de restriccións máis ou menos estritas. Un exemplo disto foi introducido na Sección 1.4, onde se menciona o caso do problema da raíña Dido, que en última instancia se trata dun problema isoperimétrico. Neste capítulo afondaremos nas cuestións relativas ao cálculo de variacións suxeito a restriccións de diversos tipos.

5.1. Multiplicadores de Lagrange

Un dos métodos máis destacables é o coñecido como método dos multiplicadores de Lagrange, e foi desenvolvido por Joseph-Louis Lagrange para tratar restriccións que aparecían frecuentemente en problemas de mecánica. Explicarémolo cun sinxelo exemplo en dúas variables.

Supoñamos que queremos achar un extremo local dunha función de dúas variables $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ao longo dunha curva parametrizada por $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, é dicir, queremos a menor curva de nivel de f que se atopa en γ . A curva γ pode estar definida implícitamente por unha ecuación $g(x, y) = 0$. Isto ocorrerá nun punto onde a curva de nivel e a curva restricción sexan tanxentes. Nese punto, os vectores normais a ambas serán paralelos (véxase a Figura 5.1):

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

isto é,

$$\nabla(f - \lambda g) = 0.$$

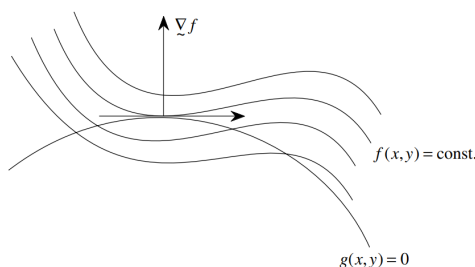


Figura 5.1: Xeometría dos multiplicadores de Lagrange

Por simplicidade, asumiremos regularidade suficiente para f e γ . Nótese que estamos asumindo que $\nabla g \neq 0$ en todo punto.

Vexamos este resultado que acabamos de obter dunha forma máis rigorosa.

Parametricemos a curva $g(x, y) = 0$ en función dunha variable independente, t . O vector de posición será $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$. Supoñemos que a curva é regular así que $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$. Unha condición necesaria para que $f(x, y)$ teña un extremo local ao longo da curva é

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) = 0. \quad (5.1)$$

Dado que $g(x(t), y(t)) = 0$, para calquera $(x(t), y(t)) \in \gamma$ é inmediato ver que:

$$\frac{d}{dt}g(x(t), y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}y'(t) = 0.$$

Se $\nabla g \neq 0$, supoñemos sen perda de xeralidade que $g_y \neq 0$. Entón

$$y'(t) = -\frac{(\partial g/\partial x)}{(\partial g/\partial y)}x'(t),$$

e a condición necesaria (5.1) redúcese a

$$\frac{x'(t)}{\partial g/\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0.$$

De aquí séguese que

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0.$$

Podemos reescribir esta última expresión do seguinte xeito:

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_x & f_y & 0 \\ g_x & g_y & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

do que se segue que ∇f e ∇g son paralelas, entón:

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad \implies \quad \nabla(f - \lambda g) = 0,$$

en concordancia co que obtivemos anteriormente de forma intuitiva.

Actuando entón baixo as hipóteses consideradas, estamos en condicións de enunciar a **regra dos multiplicadores de Lagrange**:

Teorema 5.1. *Supoñamos que a función $z = f(x, y)$ ten un extremo relativo ao longo da curva $g(x, y) = 0$ no punto (x_0, y_0) , entón existen unha constante λ e unha función*

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

e $g(x_0, y_0) = 0$.

5.2. Problemas isoperimétricos

Diremos que estamos ante un problema isoperimétrico, cando, ademais do funcional usual, temos unha restricción integral do seguinte tipo:

$$K[y] = \int_a^b g(x, y, y') dx = l,$$

sendo $l \in \mathbb{R}$. Estas condicións chámanse *restriccions isoperimétricas*. O exemplo máis coñecido deste tipo de problemas é o da raíña Dido, que foi previamente introducido. Para abordar a súa resolución, comezaremos co caso máis simple. Sexa entón o funcional

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

suxeito ás condicións de contorno habituais

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b,$$

xunto coa restricción adicional de

$$K[y] = \int_a^b g(x, y, y') = l. \tag{5.2}$$

Supoñemos unha solución $\hat{y}(x)$, e consideramos a familia biparamétrica:

$$y(x) = \hat{y}(x) + \varepsilon_1 \eta_1(x) + \varepsilon_2 \eta_2(x),$$

sendo $\eta_1(x)$ e $\eta_2(x)$ variacións independentes e arbitrarias que se anulan nos extremos a, b do intervalo de definición. A condición 5.2 verifícase para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, por hipótese. Estes dous

parámetros permítennos traballar con funcións en vez de con funcionais:

$$J(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b f(x, y, y') dx,$$

$$K(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_a^b g(x, y, y') dx = l.$$

Aplicando multiplicadores de Lagrange ás funcións de dúas variables $J(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ e $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Sexa:

$$I \equiv J - \lambda K, \quad F \equiv f - \lambda g.$$

Dado que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ corresponde ao noso extremo, existe unha constante λ tal que, en $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$ temos:

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_1} = \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_2} = 0. \quad (5.3)$$

Para o funcional I ,

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon_i} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'_i \right) dx.$$

Se integramos por partes, obtemos:

$$\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_i} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta_i(x) dx.$$

Aplicando a condición 5.3 en $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (0, 0)$, séguese que:

$$\left\{ \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y'} \right) \right\}_{y=\hat{y}, y'=\hat{y}'} = 0.$$

En resumo, o que temos aquí é a ecuación de Euler-Lagrange aplicada a $f - \lambda g$. Teremos que atopar os extremos do funcional

$$\int_a^b [f(x, y, y') - \lambda g(x, y, y')] dx,$$

da forma $y = y(x, \lambda, c_1, c_2)$, tal que λ, c_1 , e c_2 son constantes verificando:

1. Satisfan as condicións de contorno: $y(a) = y_a, y(b) = y_b$.
2. O extremo proporciona o valor l buscado para K .

5.3. Caso práctico: o problema da raíña Dido

Revisitaremos a continuación o problema exposto na Sección 1.4, que esencialmente consistirá en maximizar a función área:

$$J[y] = \int_a^b y(x) dx,$$

suxeita ás condicións de contorno:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

e á restricción integral

$$K[y] = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = A. \quad (5.4)$$

Por simplicidade, suporemos que $\alpha = \beta = 0$, e que $[a, b] = [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$. Só temos unha condición isoperimétrica, polo tanto, consideraremos un único multiplicador de Lagrange. Sexa entón:

$$J - \lambda K = \int_{-a}^a \left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

A ecuación de Euler-Lagrange resulta:

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0. \quad (5.5)$$

Isto é equivalente a:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} + \frac{1}{\lambda} = 0.$$

Lembramos que a curvatura κ dunha curva plana descrita polas coordenadas $\mathbf{r}(x) = (x, y(x))$ vén dada por:

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

do que se deduce que a curva descrita por y debe ter curvatura constante $\kappa = \frac{1}{|\lambda|}$, é dicir, debe ser un arco de circunferencia de radio $|\lambda|$.

Doutro xeito, volvendo á expresión (5.5), na que resulta inmediato obter por integración:

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -(x - c_1).$$

Despexando y' e resolvendo a EDO en variables separadas, chegamos a que:

$$dy = \pm \frac{(x - c_1)}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}} dx,$$

o cal implica que:

$$y = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2,$$

é dicir, obtemos a ecuación dunha circunferencia de centro (c_1, c_2) e radio λ :

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2.$$

As condicións de contorno $y(-a) = y(a) = 0$ implican que

$$\begin{aligned} (-a - c_1)^2 + c_2^2 &= \lambda^2 \\ (a - c_1)^2 + c_2^2 &= \lambda^2, \end{aligned}$$

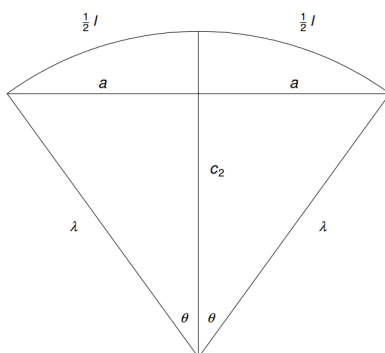


Figura 5.2: Representación gráfica do problema da raíña Dido

de onde é sinxelo ver que $c_1 = 0$.

Podemos resolver o que resta do problema mediante a intuición gráfica que nos proporciona a Figura 5.2:

A condición isoperimétrica (5.4) redúcese a:

$$K[y] = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{\lambda^2 - x^2}} dx = |\lambda| \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} dx,$$

e considerando o cambio de variable $x = \lambda \operatorname{sen} \theta$, obtemos:

$$K[y] = |\lambda| \int_{-a}^a \frac{1}{\lambda \cos \theta} \lambda \cos \theta d\theta = |\lambda| \theta \Big|_{-a}^a = 2|\lambda|a.$$

Aquí, θ denota o ángulo entre o eixo OY e a liña contendo os puntos $(0, c_2)$, $(a, 0)$.

5.4. Optimización de constantes nas desigualdades de Sobolev

Un caso interesante no que intervén a resolución dun problema isoperimétrico atópase en [1] e en [3], no que se obtén a cota óptima para a desigualdade entre a norma dunha función, definida nun espazo adecuado, e a súa primeira derivada.

Para $I = [0, T]$ intervalo real compacto, con $T > 0$, definimos os espazos de funcións: $L^p(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible e } \int_I |f|^p < \infty\}$, e $W_0^{1,p}(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} / f \in AC(I), f \in L^p(I), f(0) = f(T) = 0\}$, sendo $AC(I)$ o espazo das funcións absolutamente continuas en I .

Introducimos algúns conceptos previos para maior rigor, que foron extraídos de [6].

Definición 5.2. Sexan X e Y espazos de Banach. Dicimos que o embebemento de X en Y é compacto, $X \subset\subset Y$, se se verifican:

1. $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$ para algunha constante $C > 0$ e todo $x \in X, y \in Y$.
2. Todo conxunto acotado en X é precompacto en Y .

Teorema 5.3 (Rellich-Kondrachov). *Sexa U un aberto de \mathbb{R}^n , con ∂U de clase C^1 . Sexa $1 \leq p < n$. Entón,*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U),$$

para todo $1 \leq q < p^*$.

Denotamos p^* ao conxugado de p , é dicir, o número satisfacendo a condición:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1.$$

En virtude to teorema, o embebecemento de $W_0^{1,p}(I)$ en $L^q(I)$ é compacto, para $p, q > 1$.

En particular, para calquera $u \in W_0^{1,p}(I)$, tense a seguinte desigualdade:

$$\|u\|_{L^q(I)} \leq c_{pq} \|u'\|_{L^p(I)},$$

onde

$$c_{pq} = \frac{T^{\frac{1}{q} + \frac{1}{p^*}}}{2\beta(\frac{1}{q}, \frac{1}{p^*})} (p^*)^{\frac{1}{q}} (q)^{\frac{1}{p^*}} (p^* + q)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}. \quad (5.6)$$

Aquí β denota a función beta usual,

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \forall p, q \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p), \operatorname{Re}(q) > 0.$$

Ademais, o valor de c_{pq} obtido en (5.6) é a cota óptima para dita desigualdade.

Veremos brevemente a demostración, que pode ser vista en detalle en [1]. Consideraremos agora o problema variacional, que consistirá en minimizar o funcional:

$$J[u] = \int_0^T |u'(t)|^p dt, \quad (5.7)$$

suxeito ás condicións de contorno

$$u(0) = u(T) = 0, \quad (5.8)$$

e a restricción isoperimétrica

$$K[u] = \int_0^T |u(t)|^q dt = c^q. \quad (5.9)$$

Se, para cada constante positiva c , o problema previo ten un mínimo $m(c)$, entón é claro que

$$\frac{1}{c^{pq}} = \inf_{c>0} \frac{(m(c))^{\frac{1}{p}}}{c}. \quad (5.10)$$

Para resolver este problema empregaremos os multiplicadores de Lagrange. En consecuencia, sabemos que a función u que minimiza (5.7) é tal que a función

$$f(t, u, u') = |u'|^p - \mu|u|^q,$$

debe satisfacer a ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f(t, u, u')}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f(t, u, u')}{\partial u'} \right] = -\mu q |u|^{q-2} u - p (|u'|^{p-2} u')' = 0.$$

Isto equivale a que u sexa solución da ecuación

$$(\phi_p(u'(t)))' + \frac{\mu q}{p} \phi_q(u(t)) = 0,$$

onde, para $m > 1$,

$$\phi_m(s) = \begin{cases} |s|^{m-2} s, & s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & s = 0. \end{cases}$$

Ademais, u debe satisfacer as condicións (5.8) e (5.9).

Polo tanto, denotando $\lambda = \frac{\nu q}{p}$, teremos que resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (\phi_p(u'(t)))' + \lambda \phi_q(u(t)) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha, & \alpha > 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

e achar os valores de α para os que $u(T) = 0$.

O cálculo da solución pode consultarse en detalle en [1]. Chegamos a que a solución xeral do problema (5.11) vén dada pola seguinte expresión:

$$u(t) = \frac{2\alpha^{\frac{p}{q}}}{(\lambda p^*)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q^*}}} \operatorname{sen}_{pq} \left(\frac{(\lambda p^*)^{\frac{1}{q}} q^{\frac{1}{q^*}}}{2} \alpha^{\frac{q-p}{q}} t \right), t \in \mathbb{R},$$

onde a función sen_{pq} é a inversa da función $\operatorname{arcsen}_{pq}$, definida do seguinte xeito para $\sigma \in [0, \frac{q}{2}]$:

$$\operatorname{arcsen}_{pq}(\sigma) := \frac{q}{2} \int_0^{\frac{2\sigma}{q}} \frac{1}{(1-sq)^{\frac{1}{p}}} ds$$

En particular, denotamos:

$$\pi_{pq} = 2 \operatorname{arcsen}_{pq} \left(\frac{q}{2} \right) = \beta \left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p^*} \right)$$

Proposición 5.4. *Para calquera $\alpha \neq 0$, o conxunto de autovalores do problema*

$$\begin{cases} (\phi_p(u'(t)))' + \frac{\mu q}{p} \phi_q(u(t)) = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(0) = 0, \quad u(T) = 0 \end{cases}$$

vén dado por

$$\mu_n(\alpha) = (p-1) \left(\frac{2n\pi_{pq}}{T} \right)^q \frac{|\alpha|^{p-q}}{q^q},$$

e as funcións propias correspondentes son

$$u_{n,\alpha}(t) = \frac{\alpha T}{n\pi_{pq}} \operatorname{sen}_{pq} \left(\frac{n\pi_{pq}}{T} t \right).$$

No noso caso particular, imponendo a condición (5.9), temos:

$$c^q = K[u_{n,\alpha}(t)] = \int_0^T |u_{n,\alpha}(t)|^q dt = \left(\frac{\alpha T}{n\pi pq}\right)^q \int_0^T \left|\operatorname{sen}_{pq}\left(\frac{n\pi pq}{T}t\right)\right|^q dt = \left(\frac{\alpha T}{n\pi pq}\right)^q \frac{Tp^*q^q}{2^q(p^*+q)},$$

e polo tanto,

$$u_{n,\alpha}(t) = c \frac{2}{q} \left(\frac{p^*+q}{Tp^*}\right)^{\frac{1}{q}} \operatorname{sen}_{pq}\left(\frac{n\pi pq}{T}t\right).$$

Como consecuencia, tendo en conta (5.10), temos:

$$(m(c))^{\frac{1}{p}} = c \frac{2}{q} \left(\frac{p^*+q}{Tp^*}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \left|\frac{d}{dt} \operatorname{sen}_{pq}\left(\frac{n\pi pq}{T}t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = c \frac{2}{q} \left(\frac{p^*+q}{Tp^*}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{n^p \pi^p pq}{T^{p-1}(p^*+q)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En particular, temos que $\frac{(m(c))^{\frac{1}{p}}}{c}$ non depende de c , e deducimos:

$$\frac{1}{c_{pq}} = \min_{n=1,2,\dots,q} \frac{2}{q} \left(\frac{p^*+q}{Tp^*}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{n^p \pi^p pq}{T^{p-1}(p^*+q)}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{2\pi pq}{qT^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p^*}}} \left(\frac{p^*+q}{p^*}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{q}{p^*+q}\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou o que é mesmo,

$$c_{pq} = \frac{T^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p^*}}}{2\pi pq} (p^*)^{\frac{1}{q}} (q)^{\frac{1}{p^*}} (p^*+q)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

como queríamos demostrar.

5.5. O problema de Sturm-Liouville

O problema de cálculo de autovalores é un dos máis relevantes na matemática aplicada. Trátase de atopar solucións non triviais a ecuacións diferenciais lineares suxeitas a condicións de contorno, contendo un certo parámetro, que chamaremos autovalor. A ecuación diferencial só admitirá solucións distintas da trivial para valores concretos do autovalor. De forma xeral, calcular autovalores é unha tarefa de magnitude bastante considerable.

Certos problemas de cálculo de autovalores poden ser abordados como problemas isoperimétricos [11]. Nesta sección trataremos un caso simple, aplicando a ecuación de Euler-Lagrange á formulación variacional do problema de Sturm-Liouville. Dito problema consiste en atopar solucións non triviais a ecuacións diferenciais da forma:

$$(-p(x)y'(x))' + q(x)y(x) - \lambda r(x)y(x) = 0, \tag{5.12}$$

sendo λ un parámetro, e y a función incógnita definida nun intervalo $[x_0, x_1]$ e con valores en \mathbb{R} , suxeita a condicións de contorno da forma

$$\alpha_0 y(x_0) + \beta_0 y'(x_0) = 0,$$

$$\alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = 0.$$

Aquí, consideramos q e r como funcións continuas en $[x_0, x_1]$, e $p \in \mathcal{C}^1[x_0, x_1]$. Ademais esiximos que $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$, para todo $x \in [x_0, x_1]$. Nas condicións de contorno impoñemos que $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$, para $k = 0, 1$ (i.e., que α_k e β_k non se anulen simultaneamente).

En xeral, a ecuación (5.12) só posúe a solución trivial. Non obstante, para certos valores do parámetro λ existen solucións non triviais. Estes valores, como xa comentamos, serán os *autovalores* e as súas solucións correspondentes serán as *autofuncións* ou *funcións propias*. O conxunto de autovalores do problema denomínase *espectro puntual*. O desenvolvemento teórico completo acerca do problema de Sturm-Liouville é moi extenso e excede o marco deste traballo. Máis detalles poden consultarse en [11].

Pódese probar que existe un conxunto infinito de autovalores, todos eles reais e simples. O espectro pode ser representado por unha sucesión $\{\lambda_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. O mínimo destes elementos chámase *primeiro autovalor*.

Aquí presentaremos un breve compendio dos resultados máis relevantes e relacionados co cálculo de variacións. De aquí en diante estaremos traballando no espazo de funcións $\mathcal{L}^2[x_0, x_1]$, que lembramos que está formado polas funcións Lebesgue-medibles $f : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\int_{x_0}^{x_1} f^2(x) dx < \infty.$$

O problema de Sturm-Liouville pode ser replantexado como un problema variacional. Sexa $J : \mathcal{C}^2[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional da forma

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx, \quad (5.13)$$

sendo f unha función continuamente diferenciable en x, y, y' , suxeito ás condicións de contorno:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad (5.14)$$

e unha restricción isoperimétrica da forma

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y') dx = L, \quad (5.15)$$

con L unha constante.

Neste caso consideraremos $\beta_0 = \beta_1 = 0$. Sexa entón o funcional

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2) dx, \quad (5.16)$$

suxeito ás condicións de contorno

$$y(x_0) = y(x_1) = 0,$$

e á restricción isoperimétrica

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} r(x)y^2(x) dx = 1. \quad (5.17)$$

Esta condición asegura que y non é a solución trivial. O feito de que a integral sexa 1 significa que tomamos a única solución con norma en \mathcal{L}^2 igual a 1.

A ecuación de Euler-Lagrange para o funcional I é

$$-2r(x)y(x) = 0,$$

que só se satisfai para a solución trivial $y = 0$, xa que r é estritamente positiva. Ningún extremo para I pode satisfacer a condición isoperimétrica. Existe unha constante λ tal que y satisface a ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

sendo $F = py'^2 + qy^2 - \lambda ry^2$. É dicir:

$$2qy - 2\lambda r - 2p'y' - 2py'' = 0,$$

o cal é equivalente á ecuación diferencial (5.12). Aquí, o multiplicador de Lagrange xoga o papel do autovalor.

Exercicio 5.5. *Consideramos a seguinte ecuación*

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad y(0) = y(\pi) = 0 \quad (5.18)$$

con $[x_0, x_1] = [0, \pi]$. Neste caso, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$. Como vimos anteriormente, a ecuación (5.18) coincide coa ecuación de Euler-Lagrange da formulación variacional asociada ao funcional (5.16):

$$J[y] = \int_0^\pi (y'(x))^2 dx$$

xunto coa restricción (5.17):

$$I[y] = \int_0^\pi y^2(x) dx = 1,$$

e as correspondentes condicións de fronteira

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Se $\lambda < 0$, a solución xeral desta ecuación diferencial é

$$y(x) = A \exp \sqrt{\lambda}x + B \exp -\sqrt{\lambda}x,$$

con A e B constantes. As condicións de contorno implican que $A = B = 0$, e polo tanto só temos a solución trivial neste caso.

No caso de que $\lambda = 0$, entón a ecuación ten como solución xeral

$$y(x) = Ax + B,$$

onde, de novo, as condicións de contorno implican $A = B = 0$.

Por último, se tomamos $\lambda > 0$, a solución xeral de (5.18) é

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x).$$

Da condición $y(0) = 0$ séguese que $A = 0$, e $y(\pi) = 0$ implica que $B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Se $B \neq 0$, e supoñemos $\sqrt{\lambda}$ un enteiro positivo, temos a solución non trivial

$$y(x) = B \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x).$$

Os autovalores para este problema son, polo tanto, $\lambda_n = n^2$; en particular, o primeiro autovalor é $\lambda_1 = 1$.

As autofuncións correspondentes a cada λ_n son

$$\phi_n(x) = B \operatorname{sen}(nx),$$

con B a constante arbitraria.

Fixando

$$1 = B \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 nx \, dx = B \frac{\pi}{2},$$

de onde se segue $B = \frac{2}{\pi}$.

O primeiro autovalor neste exemplo ten a particularidade de que a función propia asociada proporciona o valor mínimo para J (pode consultarse en [11]). De feito, isto cúmprese en xeral.

Teorema 5.6. *Sexa λ_1 o primeiro autovalor para o problema de Sturm-Liouville (5.12) suxeito a condicións de contorno (5.14), e sexa y_1 a correspondente autofunción satisfacendo a restricción isoperimétrica (5.15). Entón, o funcional definido pola expresión*

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (py'^2 + qy^2) \, dx,$$

alcanza o mínimo en $y = y_1$. Ademais,

$$J[y_1] = \lambda_1.$$

A demostración está recollida en [11]. Este teorema suxire unha caracterización do primeiro autovalor que depende dos funcionais J e I .

Definimos entón o funcional

$$R[y] = \frac{J[y]}{I[y]},$$

coñecido como o *cociente de Rayleigh* do problema de Sturm-Liouville. No caso de que teñamos $I[y] = 1$, para calquera solución non trivial y , obtemos

$$\lambda = R[y].$$

Vexamos agora outro exemplo con coeficientes non constantes.

Exercicio 5.7. *A ecuación de Cauchy-Euler é da forma seguinte:*

$$(xy'(x))' + \frac{\lambda}{x}y(x) = 0, \quad x \in [1, e^\pi], \quad y(1) = y(e^\pi) = 0.$$

Neste caso, temos $p(x) = x$, $q(x) = 0$ e $r(x) = \frac{1}{x}$. Isto correspóndese coa minimización do funcional:

$$J[y] = \int_0^{e^\pi} (xy'^2) dx,$$

suxeito á condición

$$I[y] = \int_0^{e^\pi} \frac{1}{x}y^2(x) dx = 1,$$

e ás condicións de fronteira

$$y(1) = y(e^\pi) = 0.$$

Imos estudar o problema en función do signo do parámetro λ .

- Se $\lambda = 0$, temos:

$$y(x) = C_1 + C_2 \ln |x|, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

de onde é inmediato ver que $y(1) = 0$ implica que $C_1 = 0$, e $y(e^\pi) = C_2 \ln e^\pi = 0$ implica que $C_2 = 0$. Polo tanto, chegamos á solución trivial.

- Se $\lambda < 0$, temos que a solución xeral é:

$$y(x) = C_1 \cosh(\sqrt{-\lambda} \ln |x|) + C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda} \ln |x|).$$

Empregando as condicións de fronteira:

$$y(1) = 0 \iff C_1 = 0,$$

e

$$y(e^\pi) = 0 \iff C_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0,$$

o que implica que $\lambda = 0$ ou $C_2 = 0$. Polo tanto, a ecuación de Cauchy-Euler non ten autovalores negativos.

- Se $\lambda > 0$, a solución xeral é a seguinte:

$$y(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} \ln |x|) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} \ln |x|).$$

Aplicando as condicións de contorno:

$$y(1) = 0 \iff C_1 = 0,$$

e

$$y(e^\pi) = 0 \iff C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}\pi) = 0,$$

co cal temos que $C_2 = 0$ ou

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

é dicir, $\lambda_n = n^2$, con $n = 1, 2, \dots$ é o espectro puntual da ecuación de Cauchy-Euler en $[1, e^\pi]$.

Bibliografía

- [1] Cabada, A., Cid, J. A., López-Somoza, L. (2017). *Maximum Principles for the Hill's Equation*. Academic Press.
- [2] Chang, K. (2017). *Lecture Notes on Calculus of Variations*. World Scientific Publishing.
- [3] Drábek, P., Manásevich, R. (1999). *On the closed solution to some nonhomogeneous eigenvalue problems with p -Laplacian*.
- [4] Elsgolts, L. (1977). *Differential Equations and the Calculus of Variations*. Mir Publishers.
- [5] Euler, L. (1744). *Methodus Inveniendi*. Typis Academiae Scientiarum.
- [6] Evans, L. (1998). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.
- [7] Kot, M. (2014). *A First Course in the Calculus of Variations*. American Mathematical Society.
- [8] Lagrange, J.-L. (1762). *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies*. Mémoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris.
- [9] Rindler, F. (2018). *Calculus of Variations*. American Mathematical Society.
- [10] Simmons, G. (1991). *Differential equations with applications and historical notes*. McGraw-Hill.
- [11] Van Brunt, B. (2014). *The Calculus of Variations*. Springer.