



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estructuras conformes en Geometría Riemanniana y de Lorentz

Roberto Losada García

Julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Estructuras conformes en Geometría Riemanniana y de Lorentz

Roberto Losada García

Julio, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

| |
|---|
| Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía, Departamento de Matemáticas |
| Título: Estructuras conformes en geometría de Riemann y de Lorentz |
| Breve descripción do contido |
| El objetivo del trabajo es iniciar el estudio de la estructura conforme de una variedad pseudo-Riemanniana con especial atención a la curvatura a través de los tensores de Weyl y Cotton, cuya anulación caracteriza las métricas localmente conformemente llanas. |
| Recomendacións |
| Cursar la asignatura Variedades diferenciables del grado en Matemáticas. |
| Outras observacións |
| El trabajo propuesto está relacionado con el campo de la Relatividad General desde un punto de vista matemático. |

Índice

| | |
|---|-----------|
| Resumen | IX |
| Introducción | XI |
| 1. Preliminares | 1 |
| 2. Variedades de Riemann | 5 |
| 2.1. Métricas de Riemann | 5 |
| 2.2. Isomorfismos musicales | 7 |
| 2.3. Generalización del producto interior a campos tensoriales | 8 |
| 2.4. Conexiones | 9 |
| 2.4.1. Extensión de la derivada covariante a campos de tensores | 11 |
| 2.4.2. Conexión de Levi-Civita | 13 |
| 2.5. Operadores diferenciales en variedades de Riemann | 16 |
| 2.6. Coordenadas normales | 17 |
| 3. Curvatura | 19 |
| 3.1. El tensor curvatura | 20 |
| 3.2. Propiedades e identidades del tensor curvatura | 21 |
| 3.3. Invarianza local isométrica del tensor de curvatura | 23 |
| 3.4. Tensor de Ricci y curvatura escalar | 24 |
| 3.5. Curvatura seccional | 26 |

| | |
|--|-----------|
| 3.6. Métricas de Einstein | 27 |
| 4. Tensor de Weyl | 29 |
| 4.1. Tensores curvatura algebraicos | 29 |
| 4.2. Producto de Kulkarni-Nomizu | 31 |
| 4.3. Tensores de Schouten y Weyl | 32 |
| 5. Métricas localmente conformes | 35 |
| 5.1. Transformación conforme de la conexión y de objetos tensoriales relacionados con la curvatura | 36 |
| 5.2. Tensor de Cotton | 40 |
| 6. Conformidad local llana de métricas de Riemann en dimensión arbitraria | 45 |
| 6.1. Dimensión 1 y 2 | 45 |
| 6.2. Dimensiones superiores o iguales a 3 | 45 |
| 7. Ejemplos de métricas localmente conformemente llanas | 51 |
| 7.1. Variedades de curvatura seccional constante | 51 |
| 7.1.1. Variedades modelo | 53 |
| 7.2. Productos deformados | 55 |
| Bibliografía | 57 |

Resumen

En este trabajo se obtienen condiciones necesarias y suficientes para garantizar el carácter localmente conformemente llano de una variedad Riemanniana o pseudo-Riemanniana de dimensión arbitraria finita. Tras introducir los tensores de Weyl y Cotton, se analiza cómo se comportan frente a transformaciones conformes de la métrica y se muestra que su anulación caracteriza la existencia de un representante llano en la clase conforme local de la métrica considerada. Finalmente se presentan algunos ejemplos de variedades localmente conformemente llanas.

Abstract

In this work we obtain necessary and sufficient conditions to guarantee the local conformal flatness of a Riemannian or pseudo-Riemannian manifold of finite arbitrary dimension. After introducing the Weyl and Cotton tensors, we analyse how they behave under conformal transformations and show that when they vanish, the existence of a flat representative in the local conformal class of the considered metric is guaranteed. Finally, some examples of locally conformally flat manifolds are presented.

Introducción

El concepto de métrica conforme permite definir una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las métricas que admite una variedad pseudo-Riemanniana. Las clases de equivalencia correspondientes a una métrica pseudo-Riemanniana, denotadas como clases conformes, están constituidas por todas aquellas métricas que se diferencian, en cada punto, por un factor de reescalamiento. Como consecuencia de la variación de dicho coeficiente de unos puntos a otros, dentro de una misma clase conforme pueden presentarse diferentes geometrías. No obstante, existen propiedades que permanecen fijas dentro de una clase conforme, dando así lugar a invariantes conformes.

De un modo más preciso, dos métricas g y \tilde{g} sobre una variedad M se dicen conformemente equivalentes si existe entre ellas un difeomorfismo local conforme $\varphi : M \rightarrow M$, de tal manera que $\varphi^*g = e^{2f}g$ para alguna función f diferenciable definida en un abierto $U \subseteq M$, $f : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$.

El carácter local de la conformidad es importante, ya que se diferencia en gran medida del aspecto global. De hecho, cualquier esfera \mathbb{S}^n admite métricas que son localmente conformemente equivalentes a métricas llanas o de curvatura cero. Sin embargo, no puede existir ninguna métrica globalmente en \mathbb{S}^n con curvatura nula.

Por otra parte, toda superficie admite coordenadas locales (x^1, x^2) en las que la primera forma fundamental admite una expresión local de la forma $g = \phi(x^1, x^2) [dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2]$, conocidas como coordenadas isotermas. En consecuencia, toda superficie contiene a una métrica llana en su clase conforme, por lo que el estudio del carácter localmente conformemente llano de una variedad pseudo-Riemanniana se centra en dimensiones $n \geq 3$, separándose la situación 3-dimensional de las demás dimensiones superiores.

Para dos métricas en la misma clase conforme, es posible relacionar sus conexiones de Levi-Civita y, por tanto, sus tensores curvatura. Es en este contexto en el que se construyen dos nuevos campos tensoriales que serán invariantes conformes: el tensor de Weyl (en dimensiones $n \geq 4$) y de Cotton (en dimensión $n = 3$).

Más precisamente, mostraremos cómo el tensor de Weyl, de tipo $(1, 3)$, es invariante por transformaciones conformes de cualquier dimensión $n \geq 4$, con lo que su correspondiente tensor tipo $(0, 4)$ será también invariante módulo el reescalado por el factor conforme. En cuanto al caso

de dimensión $n = 3$, se verá como el tensor de Weyl es idénticamente nulo siempre, motivando así la definición del tensor de Cotton, obtenido a partir de su divergencia, que también será un invariante conforme.

Una vez construidos ambos invariantes, se comprobará inmediatamente como han de anularse si la clase conforme de la métrica considerada contiene otra de curvatura cero; esto es, si la variedad dada es localmente conformemente llana. Más concretamente, se pondrá de manifiesto cómo la anulación de ambos invariantes es de hecho una condición suficiente en el sentido de que una variedad pseudo-Riemanniana será localmente conformemente llana si y solo si su tensor de Weyl (respectivamente, de Cotton) es idénticamente nulo en dimensión $n \geq 4$ (respectivamente, en dimensión $n = 3$).

También es importante recalcar que el carácter localmente conformemente llano de una métrica dada es de especial relevancia en el estudio de la Relatividad General. La anulación del tensor de Weyl, permite construir una inversa para el operador traza permitiendo que toda la curvatura de la variedad pueda estar determinada por el tensor de Ricci, siendo una consecuencia de ello que las ecuaciones de campo de Einstein puedan proporcionar la máxima información posible sobre la geometría del espacio subyacente.

Este trabajo está estructurado como sigue. En el Capítulo 1, se presentan los preliminares acerca de variedades y campos tensoriales necesarios para abordar el estudio de métricas pseudo-Riemannianas. En el Capítulo 2, se introduce el concepto de métrica y variedad de Riemann así como aspectos troncales para el estudio de las mismas como son los isomorfismos musicales; el concepto de conexión, imprescindible para dar sentido a la diferenciabilidad en una variedad y brevemente la existencia de coordenadas normales.

En el capítulo 3 se motiva la definición del tensor curvatura a partir de una caracterización para variedades llanas, para después continuar definiendo cantidades de interés geométrico y esenciales en el estudio de la curvatura de una variedad.

El cuarto capítulo está dedicado a la construcción del tensor de Weyl, comenzando por la definición algebraica de tensor curvatura y la introducción de conceptos auxiliares como el producto de Kulkarni-Nomizu y el tensor de Schouten.

En el quinto capítulo se analizará el estudio de las transformaciones localmente conformes sobre métricas pseudo-Riemannianas, para motivar así la aparición del invariante conforme local en dimensión $n = 3$, el tensor de Cotton.

El capítulo 6 está exclusivamente dedicado a la caracterización de la conformidad local llana, con especial énfasis en el caso de dimensión $n \geq 3$, a través del Teorema de Weyl-Schouten; mientras que, en el séptimo y último capítulo se construirán ejemplos de variedades que admiten métricas localmente conformemente llanas como es el caso de las variedades de curvatura seccional constante o casos especiales de variedades resultantes de un producto deformado.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos las nociones de geometría diferencial necesarias para la correcta comprensión de los siguientes capítulos además de fijar la notación que se usará a lo largo de todo el trabajo.

Para poder definir una variedad de Riemann debemos establecer que entendemos por variedad diferenciable, conformada por una variedad topológica, que será un espacio topológico localmente Euclídeo, segundo numerable y Hausdorff; y una estructura diferenciable, un atlas diferenciable maximal que recubre la variedad con cartas locales compatibles entre sí.

Definición 1.1 (Variedad diferenciable). Una **variedad diferenciable** es un par (M, \mathcal{A}) , donde M es una variedad topológica y \mathcal{A} una estructura diferenciable sobre M .

Notación 1.2. De ahora en adelante asumiremos que toda variedad es siempre diferenciable en el sentido descrito y no bajo hipótesis más débiles de diferenciabilidad sobre la estructura de la misma. Denotaremos de forma indistinta a una variedad diferenciable por M , omitiendo la estructura diferenciable por simplicidad.

Además, por \mathbb{R}^n denotaremos a la variedad diferenciable n -dimensional cuya estructura diferenciable es la dada por el atlas con única carta local $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$. Del mismo modo dado cualquier espacio vectorial real n -dimensional V , consideraremos su estructura diferenciable usual determinada por el isomorfismo natural entre las coordenadas en una base de V y \mathbb{R}^n .

Notación 1.3. Denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$, habitualmente también descrito como $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, al conjunto de todas las funciones **diferenciables** definidas sobre una variedad M en \mathbb{R} . Además, por estar trabajando con funciones diferenciables (\mathcal{C}^∞), podremos extender toda función diferenciable (no analítica) de cualquier abierto $U \subset M$ a toda la variedad M mediante funciones meseta y el uso de particiones de la unidad [6].

Existen múltiples formas de definir el concepto de vectores tangentes a una variedad M . En nuestro caso definiremos el espacio tangente a una variedad M en un punto $p \in M$; $T_p(M)$, a

partir del concepto algebraico de derivación.

Definición 1.4 (Espacio y fibrado tangente). Se define el **espacio tangente** a una variedad M en el punto p , $T_p(M)$, como al conjunto de todas las derivaciones de funciones diferenciables evaluadas en p : $T_p(M) = \{v : v \text{ derivación en } p \in M\}$

La unión disjunta de todos los espacios tangentes de todos los puntos de M recibe el nombre de **fibrado tangente** $TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p(M)$. De forma análoga se construye el **fibrado cotangente** $T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*(M)$, su espacio dual.

Notación 1.5 (Convenio de Einstein). En lo que respecta a los índices utilizaremos el convenio de suma de índices de Einstein, con el que índices repetidos (situados arriba, contravariantemente, y abajo, covariantemente, de una expresión monómica), se entienden que están bajo suma.

De este modo, una expresión de la forma $\sum_i a^i b_i$ será equivalente a $a^i b_i$

Conviene recordar que dada una carta local (U, φ) de una variedad M , el sistema de coordenadas locales $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ en $p \in M$ define una **base del espacio tangente** $T_p(M)$ que denotaremos

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \equiv \left\{ \partial_{1|p}, \dots, \partial_{n|p} \right\}$$

omitiendo cuando el contexto sea suficientemente claro su evaluación en el punto p .

Definición 1.6 (Aplicación diferencial, tangente o pushforward). Dada una aplicación diferenciable entre variedades $F : M \rightarrow N$ se define la **diferencial** de F en $p \in M$ como la aplicación

$$F_{*,p} \equiv dF_p : v \in T_p(M) \rightarrow F_{*,p}(v) \equiv dF_p(v) \in T_{(F(p))}(N);$$

donde $dF_p(v) : f \in \mathfrak{F}(N) \rightarrow v(f \circ F) \in \mathfrak{F}(M)$

Definición 1.7 (Campo de vectores). Se entiende por un **campo de vectores** X sobre una variedad M a las funciones que asignan a cada punto $p \in M$ de la variedad un vector tangente o derivación $v_p \in T_p(M)$.

El conjunto de todos los posibles campos de vectores diferenciables sobre M , será $\mathfrak{X}(M)$, que actuará como módulo sobre el anillo $\mathfrak{F}(M)$. En otras palabras, los campos de vectores diferenciables serán **derivaciones** sobre el espacio de funciones $\mathfrak{F}(M)$. Así, dada cualquier $f \in \mathfrak{F}(M)$, se sigue que $X(f) \in \mathfrak{F}(M)$, pues $[X(f)]|_p = v(f) \in \mathbb{R}$, donde $v \equiv X|_p$ es una derivación.

Considerando campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, se extiende naturalmente el concepto de *pushforward* al único campo $F_*(X)$ que verifica $[F_*(X)](f) = X(f \circ F)$ para toda $f \in \mathfrak{F}(N)$.

Definición 1.8 (Corchete, bracket o producto de Lie). Se define el **producto de Lie** de dos campos de vectores como la aplicación

$$[\cdot, \cdot] : (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow [X, Y] := XY - YX \in \mathfrak{X}(M),$$

verificando que es \mathbb{R} -bilineal, antisimétrica y cumple la identidad de Jacobi. Dadas f, g funciones de $\mathfrak{F}(M)$, se verifica que $[fX, gY] = fg[X, Y] + (fXg)Y - (gYf)X$ y además, cuando $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$.

Una vez definidos los campos de vectores sobre las variedades diferenciables podremos definir sus objetos “duales”, las formas diferenciables, que serán las secciones diferenciables del fibrado tangente exterior y generalizar ambos al concepto de campos tensoriales diferenciables arbitrarios. Para ello comenzamos definiendo el concepto de tensor y nos referiremos, de ahora en adelante, a V como a un \mathbb{R} -espacio vectorial de n -dimensional, y a V^* su dual.

Definición 1.9 (Tensor). Dados $r, s \geq 0$ enteros y un espacio vectorial real V , un tensor de orden (r, s) o r -**contravariante** y s -**covariante**, sobre V , como una aplicación multilineal

$$T^{(r,s)} : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Denotaremos por $\mathfrak{T}^{(r,s)}(V)$ al conjunto de todos los tensores de orden (r, s) sobre V , cuya dimensión será naturalmente n^{r+s} .

Definición 1.10 (Producto tensorial). El **producto tensorial** es una operación asociativa entre espacios de tensores que permite definir nuevos tensores. Dados $F \in \mathfrak{T}^{(r,s)}(V)$ y $G \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(V)$, se define el producto tensorial $F \otimes G \in \mathfrak{T}^{(r+k,l+s)}(V)$ como

$$F \otimes G \left(\omega^1, \dots, \omega^{r+k}, v_1, \dots, v_{s+l} \right) = F \left(\omega^1, \dots, \omega^k, v_1, \dots, v_l \right) G \left(\omega^{k+1}, \dots, \omega^{r+k}, v_{l+1}, \dots, v_{s+l} \right)$$

Además, considerando las bases canónicas $\{E_i\}_{i=1}^n$ $\{\varepsilon^j\}_{j=1}^n$ de V y V^* , respectivamente, se puede expresar cualquier objeto tensorial en términos de estas

$$F = F \left(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_r}, E_{j_1}, \dots, E_{j_s} \right) E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s} \equiv F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s}$$

Definición 1.11 (Contracción). Una **contracción** es una operación natural que reduce en 2 el rango de un objeto tensorial. Dado un objeto tensorial arbitrario $T \in \mathfrak{T}^{(r+1,s+1)}(V)$, se define la contracción $C_{j_\alpha}^{i_\beta}$ como la aplicación

$$\begin{aligned} C_{j_\alpha}^{i_\beta} : \mathfrak{T}^{(r+1,s+1)}(V) &\longrightarrow \mathfrak{T}^{(r,s)}(V) \\ T &\longmapsto C_{j_\alpha}^{i_\beta}(T) \end{aligned}$$

definida por

$$\begin{aligned} C_{j_\alpha}^{i_\beta}(T) &= C_{j_\alpha}^{i_\beta} \left(\left[T_{j_1 \dots j_\alpha \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_\beta \dots i_{r+1}} \right] \left[E_{i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_\beta} \otimes \dots \otimes E_{i_{r+1}} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_\alpha} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_{s+1}} \right] \right) = \\ &= \left[T_{j_1 \dots j_\alpha \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_\beta \dots i_{r+1}} \right] \underbrace{\varepsilon^{j_\alpha} \left(E_{i_\beta} \right)}_{\delta_{i_\beta}^{j_\alpha}} \left[E_{i_1} \otimes \dots \otimes \widehat{E}_{i_\beta} \otimes \dots \otimes E_{i_{r+1}} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{\varepsilon}^{j_\alpha} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_{s+1}} \right] \\ &= \left[T_{j_1 \dots j_\alpha \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots j_\alpha \dots i_{r+1}} \right] \left[E_{i_1} \otimes \dots \otimes \widehat{E}_{i_\beta} \otimes \dots \otimes E_{i_{r+1}} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{\varepsilon}^{j_\alpha} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_{s+1}} \right], \end{aligned}$$

donde $\widehat{}$ simboliza que esos elementos básicos se omiten.

De forma análoga y similar a la que existe una descomposición del grupo lineal de matrices en una suma directa de partes simétrica y antisimétrica, se pueden definir dos subespacios, complementos ortogonales el uno del otro tales que cualquier tensor admite una descomposición en objetos tensoriales de ambos subespacios. Un tensor covariante $F \in \mathfrak{T}^{(r,0)}(V)$ será (anti)simétrico si

$$F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = \binom{\pm}{-} F(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \text{ para } 1 \leq i, j \leq n$$

Los subespacios de tensores (anti)simétricos de $\mathfrak{T}^{(r,0)}(V)$ se denotarán $\Sigma^{(r,0)}(V)$ y $\Lambda^{(r,0)}(V)$, respectivamente. Es posible definir la (anti)simetrización de un tensor $F \in \mathfrak{T}^{(r,0)}$ como sigue

$$[(\text{Alt}) \text{Sym } F](v_1, \dots, v_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \binom{+1}{(\text{sign}(\sigma))} F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}), \quad (1.1)$$

donde S_r denota al grupo de permutaciones de $\{1, \dots, r\}$. Nótese que estos subespacios de $\Sigma^{(r,0)}(V)$ y $\Lambda^{(r,0)}(V)$ no son más que la imagen por los operadores Sym y Alt de $\mathfrak{T}^{(r,0)}(V)$. Estos conceptos son directamente generalizables a objetos tensoriales arbitrarios.

Las definiciones previas son generalizables sin más que tomar como espacio vectorial real cada espacio tangente $T_p(M)$ para cada punto de nuestra variedad $p \in M$. Así, tendrá sentido hablar de fibrados de r -tensores contravariantes o s -tensores covariantes, $\mathfrak{T}^{(r,0)}(TM)$ o $\mathfrak{T}^{(0,s)}(TM)$, respectivamente, siendo $\mathfrak{T}^{(r,s)}(TM) = \coprod_{p \in M} \mathfrak{T}^{(r,s)}(T_p(M))$. Algunos casos particulares, como $\mathfrak{T}^{(1,0)}(TM) = TM$ o $\mathfrak{T}^{(0,1)}(TM) = \Sigma^{(0,1)}(TM) = T^*M$ y $\mathfrak{T}^{(0,0)}(TM) = \mathfrak{F}(M)$.

De forma totalmente análoga a como se entendían los campos de vectores con respecto al fibrado tangente, los campos de tensores son secciones de un fibrado tangente sobre M . Así, dado un campo de tensores T y un punto $p \in M$, su evaluación será $T|_p$.

Definición 1.12 (Forma diferencial). Una **1-forma diferencial** es la aplicación que asigna a cada punto de la variedad un elemento del antisimetrizado del espacio cotangente T_p^*M , que denotaremos por $\Lambda^{(0,1)}(M) \equiv \Lambda^1(M)$.

Del mismo modo, una **k -forma diferencial** será una aplicación $\omega : p \in M \rightarrow \omega_p \in \Lambda^k(M)$; donde $\Lambda^k(M)$ es el espacio de k -formas en M y ω_p será una aplicación k -lineal y antisimétrica sobre $T_p(M) \times \dots \times T_p(M)$.

Definición 1.13 (Campo tensorial). Un **campo tensorial** T de orden (r, s) sobre una variedad M es propiamente un tensor como aplicación multilineal sobre el $\mathfrak{X}(M)$ -módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$.

$$T : [\mathfrak{X}(M)]^* \times \dots \times [\mathfrak{X}(M)]^* \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$$

Definición 1.14 (Pullback). Dada una aplicación diferenciable entre variedades (diferenciables) $F : M \rightarrow N$. Existe una aplicación lineal asociada al espacio de 1-formas de N , $\Lambda^{(0,1)}(N) \equiv \Lambda^1(N)$ (interpretable como el espacio lineal de secciones del fibrado cotangente) al de M . Se trata de el **pullback** de F , definido como $F^* : \Lambda^1(N) \rightarrow \Lambda^1(M)$. Esta aplicación resulta de gran versatilidad al permitir llevar a M cualquier forma diferencial o campo vectorial/tensorial definido en N .

Capítulo 2

Variedades de Riemann

En este capítulo, introduciremos la notación y los conceptos fundamentales necesarios para abordar y comprender las propiedades locales de una variedad de Riemann desde un punto de vista intrínseco, prescindiendo de la posibilidad de que la variedad esté embebida o inmersa en un espacio Euclídeo o pseudo-Euclídeo de dimensión mayor.

En el estudio de superficies en \mathbb{R}^3 , la restricción de la estructura diferenciable Euclídea permitía definir un producto escalar en las superficies y dotaba a la variedad de la noción de normalidad y ortogonalidad con respecto a la superficie. En contraposición a esta visión extrínseca, es posible definir el concepto de métrica de Riemann que permitirá caracterizar todas las cantidades geométricas de interés de la variedad desde un punto de vista completamente intrínseco.

Dada una variedad diferenciable M , comenzaremos definiendo para cada punto p un producto escalar o interior en cada espacio tangente T_pM sin involucrar la existencia de una variedad de dimensión mayor ambiente, lo que nos llevará directamente a la definición de variedad Riemanniana.

2.1. Métricas de Riemann

Definición 2.1 (Métrica de Riemann o tensor métrico). Dada una variedad diferenciable M , se define una **métrica de Riemann** en M como al campo diferenciable de $(0, 2)$ -tensores $g \in \mathfrak{T}^{(0,2)}(M)$ cuyo valor g_p en todo punto de la variedad $p \in M$ es un producto interior¹ del espacio tangente T_pM . Por lo tanto se deberá verificar que

¹Una métrica Riemanniana g será por tanto, no degenerada en todo punto ($\det[g_{ij}] \neq 0$) y así invertible además de ser simétrica ($g_{ij} = g_{ji}$).

$$\begin{aligned} g_p : \mathbb{T}_p M \times \mathbb{T}_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto g_p(v, w) \end{aligned}$$

es una forma bilineal simétrica $g_p(v, w) = g_p(w, v) \quad \forall v, w \in \mathbb{T}_p M$ y que además es definida positiva $g_p(v, v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{T}_p M, v \neq 0$.

Debilitando la hipótesis de ser definida positiva, pero manteniendo el carácter no degenerado de cada producto escalar, obtenemos el caso conocido como pseudo-Riemanniano. Para motivar esta definición debemos definir el concepto de índice o signatura de un tensor métrico, que se sigue de la definición sobre espacios vectoriales reales.

Definición 2.2 (Signatura de la métrica). La **signatura** de una forma bilineal simétrica no degenerada $g \in \mathfrak{T}^{(0,2)}(V)$, donde V es un espacio vectorial real n -dimensional es el par de enteros (a, b) donde a (b) es el mayor entero que coincide con la dimensión del subespacio $W \subseteq V$ en el que la forma bilineal $g|_W$ es definida positiva (negativa). Conviene destacar que necesariamente $0 \leq a, b \leq n$, además de que $a + b = n$.

Así el caso Riemanniano será en el que únicamente $a = n$ y $b = 0$. Todas las restantes situaciones serán referidas como pseudo-Riemannianas, aunque distinguiremos el caso Lorentziano como aquel en el que se tiene que la signatura de la métrica es $(n - 1, 1)$ o equivalentemente $(1, n - 1)$ según que convenio sea el utilizado.

Asignar a una variedad diferenciable una métrica de Riemann da lugar al concepto de variedad de Riemann

Definición 2.3 (Variedad diferenciable (pseudo-)Riemanniana). Dada una variedad diferenciable M y una métrica (pseudo-)Riemanniana g , se denomina por **(semi-)variedad de Riemann** o **(pseudo-)Riemanniana** al par (M, g) .

De ahora en adelante siempre denotaremos por (M, g) a una variedad Riemanniana o pseudo-Riemanniana, pues denotaremos por g , indistintamente, a una métrica (pseudo-)Riemanniana en todo lo que sigue.

Observación 2.4. Siempre podemos contar con la existencia de una métrica para nuestra variedad M . El Teorema de Embebimiento fuerte de Whitney [10] establece que toda variedad Riemanniana n -dimensional puede ser embebida en \mathbb{R}^{2n} , lo que inmediatamente proporciona como candidato a métrica de Riemann para M la restricción del producto escalar euclídeo $2n$ -dimensional. De hecho, existen resultados de gran importancia en geometría diferencial que demuestran que toda variedad (pseudo-)Riemanniana, no necesariamente compacta, está embebida isométricamente (localmente) en un espacio (pseudo-)Euclídeo de dimensión mayor [3].

No obstante, esto no significa que globalmente podamos dotar de cualquier métrica a una variedad. Esto ocurre precisamente si se intenta dotar a la esfera \mathbb{S}^2 de una métrica de Lorentz

globalmente, pues el Teorema de la Bola Peluda [4] impide que esto sea posible. De hecho, haciendo uso de herramientas más sofisticadas de geometría algebraica, se puede demostrar que toda variedad conexa no compacta admite una métrica Lorentziana y en el caso de ser compacta, si y solo si esta tiene característica de Euler nula [7].

Sin embargo, a nivel local, en el que estamos interesados, por existir cartas locales de \mathbb{S}^2 y en general de cualquier variedad (pseudo-)Riemanniana, no necesariamente compacta, automáticamente podremos dotar de una métrica (pseudo-)Riemanniana a la misma.

Lema 2.5 (Expresión local del tensor métrico g). *Todo tensor métrico puede ser descrito de forma local al leer la variedad de Riemann con una carta local. Por lo tanto, tomando un sistema de coordenadas local (U, φ) con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$; la expresión local de g en U será*

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \frac{1}{2} (g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ji} dx^j \otimes dx^i) = \frac{1}{2} g_{ij} (dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i) = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

donde el simetrizado del producto tensorial es el producto omitido en la última igualdad.

En general, dado cualquier sistema de referencia local en el fibrado TM , (E_1, \dots, E_n) y su dual $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ podemos escribir localmente en $U \subseteq M$ como $g = g_{ij} \varepsilon^i \varepsilon^j$.

Definición 2.6 (Isometría). Una **isometría** entre dos variedades (de Riemann) (M, g) y $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ es un difeomorfismo entre variedades $F : (M, g) \longrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ tal que $F^* \widetilde{g} = g$ o equivalentemente, la aplicación pushforward es una isometría lineal.

Se dice que la isometría es local si cada punto $p \in M$ tiene un entorno U tal que $F|_U$ es una isometría sobre un abierto de \widetilde{M}

Definición 2.7 (Variedad llana o plana). Una variedad de Riemann n -dimensional se dice **llana o plana** si es localmente isométrica al espacio euclídeo n dimensional; esto es, que todo punto tiene un entorno que es isométrico a un abierto de \mathbb{R}^n con la métrica euclidiana.

Veremos posteriormente en el siguiente capítulo como este concepto motiva precisamente la definición del tensor curvatura que permitirá dar una caracterización para variedades (pseudo-)Riemannianas planas a nivel de isometrías locales.

2.2. Isomorfismos musicales

Introduciremos ahora dos isomorfismos entre los fibrados tangente TM y cotangente T^*M que resultan de enorme utilidad cuando se trabaja con campos arbitrarios tensoriales del fibrado tensorial $\mathfrak{T}^{(k,l)}(TM)$.

La utilidad de los mismos reside en que permiten pensar cualquier tensor o campo tensorial como si fuese exclusivamente covariante o contravariante. En particular, podremos expresar

todo campo de vectores como de covectores y viceversa. No obstante, estaremos interesados únicamente en usarlos para expresar todos los objetos tensoriales relacionados con la curvatura de forma totalmente covariante.

Este *movimiento* de índices es posible gracias a la existencia de una métrica de Riemann g y recibe el nombre *musical* debido a la analogía con las alteraciones musicales sostenido \sharp y bemol \flat , que suben y bajan un semitono sobre cualquier nota de la escala musical diatónica.

Definimos el siguiente isomorfismo entre los fibrados tangente y cotangente.

$$\begin{aligned} \hat{g} : TM &\longrightarrow T^*M \\ (p, v) &\longmapsto (p, \hat{g}(v)); \text{ donde } \hat{g}(v) : \omega \in T_p^*M \longmapsto \hat{g}(v)(\omega) := g_p(v, \omega) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

De la anterior definición se sigue que para dos campos vectoriales arbitrarios $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$; $\hat{g}(X)(Y) = g(X, Y)$ con lo que \hat{g} es $\mathfrak{X}(M)$ -lineal en Y , por serlo la métrica. De forma análoga, $\hat{g}(X)$ también define un campo de covectores que es lineal en X , y por tanto, \hat{g} es un homomorfismo diferenciable entre fibrados.

Dado una sistema de referencias diferenciable local $\{E_i\}$ y su dual $\{\varepsilon^i\}$, considerando un campo $X = X^i E_i$ se tiene que

$$\hat{g}(X) = (g_{ij} X^i) \varepsilon^j = X_j \varepsilon^j,$$

luego $\hat{g}(X)$ se obtiene bajando un índice a partir de X . En analogía a lo que ocurre con las notas musicales, un bemol \flat se usa para denotar este campo de covectores generado a partir de X : X^\flat .

De forma recíproca, utilizando el hecho de que \hat{g} es invertible (por ser no singular en todo punto), se sigue que $\hat{g}^{-1}(w) = w^i E_i$ con $w^i = g^{ij} w_j$, donde w es un campo de covectores y $\hat{g}^{-1}(w)$ se denotará por w^\sharp , al obtenerse subiendo índices a partir de w .

Ambos isomorfismos \flat, \sharp son conocidos como musicales y son inversos el uno del otro.

2.3. Generalización del producto interior a campos tensoriales

Gracias a los isomorfismos musicales podemos extender el producto interior de vectores tangentes en cada punto a campos de vectores, covectores y tensoriales arbitrarios.

Podemos comenzar definiendo el producto interior en el espacio cotangente T_p^*M a un punto $p \in M$ transformando las 1-formas a campos de vectores, para los que si sabemos cómo está definido

$$\langle \omega, \eta \rangle_g = \langle \omega^\sharp, \eta^\sharp \rangle_g = g \left(g^{ki} \omega_i, g^{lj} \eta_j \right) = g_{kl} \left(g^{ki} \omega_i, g^{lj} \eta_j \right) = \delta_l^i g^{lj} \omega_i \eta_j = g^{ij} \omega_i \eta_j = \omega^j \eta_j = \omega_i \eta^i$$

La generalización a campos de tensores arbitrarios $A, B \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(M)$ es ahora natural, sin

más que generalizar en cada índice en base a lo anterior

$$\langle A, B \rangle = g_{i_1 r_1} \cdots g_{i_k r_k} g^{j_1 s_1} \cdots g^{j_l s_l} A_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} B_{s_1 \dots s_l}^{r_1 \dots r_k}$$

En el caso especial de ser $A, B \in \mathfrak{T}^{(0,l)}(M)$ contravariantes, se simplifica ligeramente la expresión anterior a

$$\langle A, B \rangle = g^{j_1 s_1} \cdots g^{j_l s_l} F_{j_1 \dots j_l} G_{s_1 \dots s_l} = F_{j_1 \dots j_l} G^{j_1 \dots j_l}$$

2.4. Conexiones

La estructura diferenciable de una variedad (pseudo-)Riemanniana permite definir la diferenciabilidad de curvas y vectores sobre el espacio tangente en cada punto de la misma. No obstante, esto no es suficiente para poder definir las derivadas direccionales o para derivar campos de vectores sobre la variedad, pues estas definiciones requieren conectar diferentes espacios tangentes en su definición.

Es por este motivo por lo que aparece la noción de conexión, que establece un modo de conectar dos espacios tangentes a través del transporte paralelo, que conecta dos puntos de la variedad. De este modo, es posible *transportar* vectores tangentes entre dos espacios tangentes y habilita las definiciones anteriormente mencionadas.

A efectos de este trabajo, únicamente introduciremos el concepto de conexión para poder derivar campos de vectores sobre nuestra variedad, evitando profundizar en las muchas propiedades a las que da lugar.

Definición 2.8 (Conexión (de Koszul)). Dada una variedad diferenciable M , se define una **conexión** en M como una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned} \tag{2.2}$$

que verifica las siguientes propiedades

- \mathbb{R} -linealidad en la 2^a componente

$$\nabla_X(\alpha \cdot Y + \beta \cdot Z) = \alpha \cdot \nabla_X Y + \beta \cdot \nabla_X Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- $\mathfrak{F}(M)$ -linealidad o tensorialidad en la 1^a componente:

$$\nabla_{fX + hY}(Z) = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \forall f, h \in \mathfrak{F}(M)$$

- Regla de Leibnitz:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall f \in \mathfrak{F}(M)$$

La aplicación²u operador $\nabla_X Y$ recibe también el nombre de **derivada covariante** y escogido un sistema de coordenadas locales (U, φ) su actuación sobre cualquier campo de vectores queda totalmente determinada por las cantidades $\{\nabla_{\partial_i|_p} \partial_j|_p\}_{1 \leq i, j \leq m}$, donde $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ es la base del espacio tangente $T_p M$.

Estas cantidades reciben el nombre de **coeficientes de la conexión** o **símbolos de Christoffel**, y son aplicaciones $\Gamma_{ij}^k : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ que dan una representación local de la acción de ∇ , que quedan determinados por $\nabla_{\partial_i|_p} \partial_j|_p = \Gamma_{ij}^k \partial_k$. Así, la actuación de la conexión sobre dos campos de vectores diferenciables generales cualesquiera expresados en dicha base del tangente adoptan la forma

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)|_p &= \nabla_{X|_p} [Y^i \partial_i] = Y^i|_p \cdot \nabla_{X|_p} [\partial_i] + X|_p [Y^i] \cdot \partial_i|_p = \\ &= X^j|_p \cdot Y^i|_p \cdot \nabla_{\partial_j|_p} [\partial_i] + X^j|_p \cdot \partial_j|_p [Y^i] \cdot \partial_i|_p = \\ &= \left\{ X^j|_p \cdot Y^i|_p \cdot \Gamma_{ij}^k + X^j|_p \cdot \partial_j [Y^i|_p] \right\} \partial_k|_p \end{aligned} \quad (2.3)$$

Recíprocamente, escogidas n^3 funciones $\{\Gamma_{ij}^k\}$, automáticamente tenemos determinada una conexión que verificará las condiciones requeridas, ya que por la expresión anterior establecen una única forma de derivar campos de vectores.

A la vista de la expresión anterior, es posible extender la definición de derivada covariante a un operador que actúa sobre la evaluación del campo de vectores X en $p \in M$; i.e., $v \equiv X|_p \in T_p(M)$ de modo que³ $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)|_p$ donde ahora $\nabla : T_p(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow T_p(M)$.

Antes de poner ningún ejemplo de conexión, conviene mencionar que toda variedad admite una conexión. Este resultado se sigue del hecho de que localmente podemos construir una conexión y, haciendo uso de particiones de la unidad sobre un atlas de cartas locales, se pueden combinar las conexiones de tal modo que sean compatibles con todos los abiertos del atlas y satisfaciendo las propiedades de conexión. Más información acerca de este resultado puede encontrarse en [6].

²Notar que una conexión no es un campo de tensores $(1, 2)$, pues no es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en su segundo argumento, donde satisface la regla de Leibnitz.

Adicionalmente, la suma de dos conexiones no es una conexión. En efecto, dadas ∇_1, ∇_2 conexiones sobre una variedad (pseudo-)Riemanniana M , se tiene que

$$\begin{aligned} (\nabla_1 + \nabla_2)_X (fY) &= X(f)Y + f \cdot (\nabla_1 + \nabla_2)_X Y \\ (\nabla_1 + \nabla_2)_X (fY) &= (\nabla_1)_X (fY) + (\nabla_2)_X (fY) = 2X(f)Y + f (\nabla_1 + \nabla_2)_X Y \end{aligned}$$

Luego no se verifica la Regla de Leibnitz y $(\nabla_1 + \nabla_2)$ no es una conexión. Sin embargo, si consideramos $(\nabla_1 - \nabla_2)$, es evidente que si que se verifica la Regla de Leibnitz y trivialmente las otras dos condiciones de la definición de conexión. Esto permite además caracterizar todas las posibles conexiones que admite una variedad.

³Nótese que en la igualdad $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)|_p$ se hace uso implícito de la tensorialidad de la derivada covariante, pues se considera como función la evaluación en el punto p .

Pasamos ahora a introducir un primer ejemplo, la conexión Euclídea $\tilde{\nabla}$, que aparece de forma natural al generalizar las derivadas direccionales en \mathbb{R}^n a campos de vectores.

Definición 2.9 (Conexión Euclídea). Para definir la **conexión Euclídea** en generalizamos la derivada Euclídea direccional de un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ en el punto $p \in \mathbb{R}^n$ y en la dirección $v \in T_p\mathbb{R}^n$, que es en esencia la derivada direccional usual

$$\tilde{\nabla}_v Y = v(Y^j)\partial_j|_p, \text{ siendo } v(Y^j) = \left(v^i\partial_i|_p\right)(Y^j) = v^i\partial_i\left(Y^j|_p\right) \text{ y } \{\partial_j|_p\}_{j=1}^n \text{ una base de } T_p\mathbb{R}^n$$

Identificando ahora $v \equiv X|_p$, se generaliza la actuación de la conexión Euclídea $\tilde{\nabla}$ a campos de vectores como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \\ (X, Y) &\longmapsto \tilde{\nabla}_X Y = X(Y^j)\partial_j \end{aligned} \quad (2.4)$$

de modo que la evaluación de dicho campo $\tilde{\nabla}_X Y$ en un punto $p \in \mathbb{R}^n$ coincide con la derivada direccional en la dirección de $X|_p \in T_p\mathbb{R}^n$; i.e. $\left(\tilde{\nabla}_X Y\right)|_p \equiv \tilde{\nabla}_{X|_p} Y$.

Es importante destacar como en esta conexión ya hemos considerado implícitamente los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k idénticamente nulos, pues $\Gamma_{ij}^k\partial_k = \nabla_{\partial_i}\partial_j = 0$, ya que estamos leyendo la variedad \mathbb{R}^n en coordenadas cartesianas, asociadas a la estructura de espacio vectorial. Si por el contrario utilizásemos coordenadas polares planas; entonces no todos los símbolos de Christoffel serían nulos y las expresiones anteriores se verían modificadas en base a (2.3).

Sin más que modificar la signatura y cambiar acordemente las expresiones anteriores, se extiende el concepto de conexión Euclídea al caso pseudo-Euclídeo.

2.4.1. Extensión de la derivada covariante a campos de tensores

Del mismo modo que una conexión ∇ en TM define un único modo en el que derivar campos de vectores, determina también una única forma de derivar campos de tensores sobre el fibrado tensorial $\mathfrak{T}^{(k,l)}(TM)$, de tal modo que las siguientes condiciones se satisfacen:

- \mathbb{R} -linealidad

$$\nabla_X(\alpha \cdot T_1 + \beta \cdot T_2) = \alpha \cdot \nabla_X T_1 + \beta \cdot \nabla_X T_2, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(TM)$$

- Regla de Leibnitz

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2), \quad \forall T_1, T_2 \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(TM)$$

- Conmutatividad con las contracciones de cualquier par de índices $C_a^b(T)$

$$C_a^b\left(\nabla_X\left[T_{i_1, \dots, a, \dots, i_l}^{j_1, \dots, b, \dots, j_k}\right]\right) = \nabla_X\left[C_a^b\left(T_{i_1, \dots, a, \dots, i_l}^{j_1, \dots, b, \dots, j_k}\right)\right] = \nabla_X\left(T_{i_1, \dots, a, \dots, i_l}^{j_1, \dots, a, \dots, j_k}\right), \quad \forall T \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(TM)$$

Adicionalmente, una conexión ∇ definida sobre el fibrado tensorial tangente $\mathfrak{T}^{(k,l)}(TM)$ verificando las propiedades anteriores verificará como consecuencia

- La siguiente regla producto para un campo de covectores $\omega \in \Lambda^1(M)$ y un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\nabla_X \langle \omega, Y \rangle = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle$$

- Que la aplicación siguiente, definida en términos de un campo tensorial arbitrario $T \in \mathfrak{T}^{(k,l)}(M)$; $\omega^{(\cdot)} \in \Lambda^1(M)$, 1-formas definidas en M y $Y_{(\cdot)} X \in \mathfrak{X}(M)$, campos de vectores

$$\begin{aligned} \nabla T : \quad \Lambda^k(M) \times [\mathfrak{X}(M)]^l \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{T}(M) \\ \left((\omega^1, \dots, \omega^k), (Y_1, \dots, Y_l), X \right) &\mapsto (\nabla T) (\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l, X) = \\ &= (\nabla_X T) (\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{verifica que } (\nabla_X T) (\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) &= X \left(T (\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k T (\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^i, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, Y_l) \\ &\quad - \sum_{j=1}^l T (\omega^1, \dots, \omega^k, Y_1, \dots, \nabla_X Y_j, \dots, Y_l) \end{aligned}$$

Por otra parte, del mismo modo que hemos descrito cómo actúa la derivada covariante sobre un campo de vectores en términos de los coeficientes de la conexión, en una representación local, podemos hacer lo mismo con campos de covectores y campos tensoriales arbitrarios como sigue

- La derivada covariante de un campo de covectores $\eta \in \Lambda^1(M)$ tiene por coordenadas

$$\nabla_X \eta = \left(X(\eta_k) - X^j \eta_i \Gamma_{ij}^k \right) \partial_k, \text{ donde } X = X^j \partial_j \text{ y } \eta = \eta_i dx^i$$

Este hecho se deduce automáticamente de conmutar la expresión de la contracción

- Las coordenadas de la derivada covariante de un elemento tensorial T de coordenadas $T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$, las denotaremos por $T_{j_1 \dots j_l; m}^{i_1 \dots i_k}$ donde el índice m representa el índice contravariante que se añade al realizar la derivada y tendrán la forma

$$T_{j_1 \dots j_l; m}^{i_1 \dots i_k} = \partial_m \left(T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \right) + \sum_{s=1}^k T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots p \dots i_k} \Gamma_{mp}^{i_s} - \sum_{s=1}^l T_{j_1 \dots p \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} \Gamma_{m j_s}^p$$

Nótese que el tensor $\nabla_{\partial_m} T \in \mathfrak{T}^{(k,l+1)}$, y que en este caso hemos tomado $X \equiv \partial_m$ con respecto al anterior.

Detalles acerca de la demostración de estas propiedades acerca de la derivada covariante pueden encontrarse en [6]. Existen también más expresiones que concretan la expresión local

y propiedades de tomar segundas derivadas covariantes, pero las omitiremos pues simplemente generalizan y añaden una cantidad considerable de índices.

Cabe destacar como caso especial que para $(k, l) = (0, 0)$, se recupera la actuación normal de un campo de vectores sobre una función, pues dada $f \in \mathfrak{T}^{(0,0)}(M) \equiv \mathfrak{F}(M)$, $\nabla f : X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto (\nabla f)(X) = \nabla_X(f) = X(f) \in \mathfrak{F}(M)$.

A partir de la definición de derivada covariante se puede definir el operador derivada exterior, que será de utilidad en los posteriores capítulos.

Definición 2.10 (Derivada covariante exterior). Se define el operador **derivada covariante exterior** D , que actúa sobre campos tensoriales, como la extensión de la derivada exterior conocida para 1-formas⁴. Dado un campo 2-tensorial T , su derivada covariante exterior da lugar a otro campo 3-tensorial de la siguiente forma:

$$(DT)(X, Y, Z) = -(\nabla T)(X, Y, Z) + (\nabla T)(X, Z, Y) \iff (DT)_{ijk} = -T_{ij;k} + T_{ik;j} \quad (2.5)$$

2.4.2. Conexión de Levi-Civita

Para definir los operadores diferenciales gradiente y Hessiano, debemos fijar una conexión ∇ con la que trabajar en nuestra variedad (M, g) . El **Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana** nos asegura la **existencia y unicidad** de una conexión, conocida como de **Levi-Civita**, que presenta dos propiedades que recogemos brevemente a continuación.

- **Compatibilidad métrica:** Esta propiedad puede definirse a través de múltiples condiciones equivalentes, una de las más ilustrativas es que la métrica g sea paralela a la conexión ∇ ; i.e. $\nabla g \equiv 0$. De hecho, también es habitualmente definida en términos de la siguiente propiedad entre campos de vectores:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M), \quad (2.6)$$

que también se satisface naturalmente en la conexión Euclídea $\tilde{\nabla}$, como es fácilmente comprobable.

- **Simetría de la conexión o falta de torsión:** Para ilustrar esta propiedad conviene definir el $(1, 2)$ -tensor de torsión \mathcal{T}

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \mathcal{T}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

⁴Recordamos que dada una 1-forma η , su derivada exterior es $(d\eta)(Y, Z) = -(\nabla\eta)(Y, Z) + (\nabla\eta)(Z, Y)$.

Se dirá que una conexión tiene torsión nula cuando el tensor de torsión sea idénticamente nulo para cualesquiera campos vectoriales. Dicha condición puede reescribirse entonces como

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X \equiv [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (2.7)$$

y se puede ver como es equivalente a que los coeficientes de la conexión o símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k sean simétricos ante el intercambio de índices $i \leftrightarrow j$; i.e., $\Gamma_{ij}^k \equiv \Gamma_{ji}^k$, en cualquier sistema de referencia considerado en la variedad, de ahí que se denote a la conexión como simétrica.

Introducimos ahora un resultado troncal de la Geometría Riemanniana, que garantiza la existencia y unicidad de una conexión simétrica con compatibilidad métrica para toda variedad (pseudo-)Riemanniana.

Teorema 2.11 (Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana). *Sea una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) . Existe una única conexión ∇ tal que es **compatible** con g y **simétrica**. Dicha conexión recibe el nombre de conexión de **Levi-Civita** de g y está determinada por la llamada **fórmula de Koszul***

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g = X \langle Y, Z \rangle_g + Y \langle Z, X \rangle_g - Z \langle X, Y \rangle_g - \langle Y, [X, Z] \rangle_g - \langle Z, [Y, X] \rangle_g + \langle X, [Z, Y] \rangle_g, \quad (2.8)$$

que en cualquier sistema de coordenadas sobre (M, g) toma la forma

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (2.9)$$

Demostración. Primeramente demostraremos que cualquier conexión compatible con la métrica sin torsión verifica la fórmula de Koszul (2.8) para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrarios.

Comenzamos escribiendo la condición de compatibilidad métrica (2.6) para las 3 permutaciones cíclicas de los campos X, Y, Z y aplicando respectivamente simetría de la conexión (2.7).

$$\begin{aligned} +\nabla_X \langle Y, Z \rangle_g &= X \langle Y, Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_Z X \rangle_g + \langle Y, [X, Z] \rangle_g \\ +\nabla_Y \langle Z, X \rangle_g &= Y \langle Z, X \rangle_g = \langle \nabla_Y Z, X \rangle_g + \langle Z, \nabla_Y X \rangle_g = \langle \nabla_Y Z, X \rangle_g + \langle Z, \nabla_X Y \rangle_g + \langle Z, [Y, X] \rangle_g \\ -\nabla_Z \langle X, Y \rangle_g &= Z \langle X, Y \rangle_g = \langle \nabla_Z X, Y \rangle_g + \langle X, \nabla_Z Y \rangle_g = \langle \nabla_Z X, Y \rangle_g + \langle X, \nabla_Y Z \rangle_g + \langle X, [Z, Y] \rangle_g \end{aligned}$$

$$X \langle Y, Z \rangle_g + Y \langle Z, X \rangle_g - Z \langle X, Y \rangle_g = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, [X, Z] \rangle_g + \langle Z, [Y, X] \rangle_g - \langle X, [Z, Y] \rangle_g$$

Despejando ahora el único término que depende en la conexión llegamos a la fórmula de Koszul:

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g = X \langle Y, Z \rangle_g + Y \langle Z, X \rangle_g - Z \langle X, Y \rangle_g - \langle Y, [X, Z] \rangle_g - \langle Z, [Y, X] \rangle_g + \langle X, [Z, Y] \rangle_g$$

El operador que define la fórmula de Koszul es una conexión y además verifica las propiedades de simetría y ser adaptado a la métrica. El cálculo detallado sin introducir coordenadas puede

verse en [6, 7], aunque expondremos como se verifican estas propiedades en coordenadas al demostrar la existencia de la conexión de Levi-Civita.

Probemos ahora la unicidad de esta conexión, para ello supongamos dos conexiones ∇_1 y ∇_2 definidas en TM verificando la fórmula de Koszul, cuya parte derecha no depende de la conexión y por lo que se tiene automáticamente restando ambas expresiones para cada conexión que $\langle [(\nabla_1)_X - (\nabla_2)_X] Y, Z \rangle_g = 0$ y consecuentemente, $(\nabla_1)_X Y = (\nabla_2)_X Y$ para campos arbitrarios X, Y, Z con lo que necesariamente ambas conexiones son iguales, $\nabla_1 = \nabla_2$.

Para ver la existencia, basta con demostrar que dicha conexión existe en cada carta local para la variedad M , pues la unicidad nos asegura que en las zonas que se superponen las dos cartas estas son coincidentes y en particular, compatibles.

Para obtener la versión en coordenadas, basta tomar como campos vectoriales los campos coordenados en la fórmula de Koszul, así se tiene que

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle_g = \frac{1}{2} \left(\partial_i \underbrace{\langle \partial_j, \partial_l \rangle_g}_{g_{jl}} + \partial_j \underbrace{\langle \partial_l, \partial_i \rangle_g}_{g_{li}} - \partial_l \underbrace{\langle \partial_i, \partial_j \rangle_g}_{g_{ij}} \right),$$

$$\langle \Gamma_{ij}^m \partial_m, \partial_k \rangle = \Gamma_{ij}^m g_{ml}$$

pues los corchetes de Lie son nulos sobre los campos coordenados; i.e., $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Ahora multiplicando por la izquierda por la inversa del tensor métrico g^{kl} llegamos a la expresión en coordenadas (2.9).

$$g^{kl} \Gamma_{ij}^m g_{ml} = \Gamma_{ij}^m \delta_m^k = \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$$

Esta expresión permite definir los coeficientes de una conexión y por tanto determinarla totalmente en cada carta local.

Para completar la demostración de existencia, vemos que la falta de torsión es inmediata, pues la definición de los símbolos de Christoffel es simétrica bajo el intercambio $i \leftrightarrow j$.

Ahora solo resta comprobar que se verifica la compatibilidad métrica, verifiquemos si ∇g . En efecto, realizando el cálculo en coordenadas

$$\begin{aligned} g_{ij;k} &= \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} \underbrace{g^{lm} g_{lj}}_{\delta_m^j} (\partial_k g_{im} + \partial_i g_{km} - \partial_m g_{ki}) - \frac{1}{2} \underbrace{g^{lm} g_{il}}_{\delta_m^i} (\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{km} - \partial_m g_{kj}) = \\ &= \partial_k g_{ij} - \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) - \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) = 0 \end{aligned}$$

□

A partir de este resultado, se pueden deducir expresiones que son de gran utilidad cuando trabajamos bajo esta conexión. De ahora en adelante trabajaremos única y exclusivamente con la conexión de Levi-Civita ∇ sobre nuestra variedad (M, g) .

Una propiedad relevante que además presenta la conexión de Levi-Civita es la siguiente

Proposición 2.12 (Naturalidad de la conexión de Levi-Civita). *Dadas dos variedades (pseudo-)Riemannianas (M, g) y $(\widetilde{M}, \tilde{g})$, donde ∇ y $\widetilde{\nabla}$ son las respectivas conexiones de Levi-Civita para g y \tilde{g} . Si ambas variedades son isométricas; i.e. $\exists \varphi : M \rightarrow \widetilde{M}$ isometría, entonces $\varphi^* \widetilde{\nabla} = \nabla$. En otras palabras, la conexión de Levi-Civita es **compatible** entre variedades de Riemann isométricas con el **pullback**.*

Demostración. Por unicidad de la conexión de Levi-Civita, solo sería necesario demostrar que $\varphi^* \widetilde{\nabla}$ verifica la compatibilidad métrica y simetría que ∇ tiene con respecto a g . La demostración es inmediata a partir de la definición de isometría y puede encontrarse en [6]. \square

Consecuentemente, se tiene que la conexión de Levi-Civita es invariante bajo isometrías locales, que también podría haber sido deducido de la expresión en coordenadas de los coeficientes de la conexión.

Cabe destacar también que cuando consideramos el espacio (pseudo-)Euclídeo, la conexión de Levi-Civita ∇ es exactamente la conexión Euclídea que habíamos definido anteriormente $\widetilde{\nabla}$.

2.5. Operadores diferenciales en variedades de Riemann

Una vez establecida la conexión sobre la que trabajaremos, tenemos establecidas correctamente las propiedades que siguen los operadores que podemos definir a partir de ella, como es el caso del Hessiano, que será de particular interés. Pese a ser conocidos de la rama de análisis matemático, definiremos también los conceptos de gradiente, divergencia y laplaciano, aunque ahora definidos sobre una variedad de Riemann (M, g) dotada de la conexión de Levi-Civita ∇ .

Definición 2.13 (Gradiente de una función). Dada una función $f \in \mathfrak{F}(M)$ se define el **gradiente** de f como el campo de vectores

$$\text{grad } f = (df)^\sharp = \left(g^{ij} \partial_i f \right) \partial_j,$$

donde df es la diferencial de f y $\{\partial_l\}_l$ denota una base del espacio tangente para cada punto de la variedad M .

Es importante destacar que únicamente si la elección de base es ortonormal y la métrica es definida positiva el gradiente coincidirá con las componentes de df .

Definición 2.14 (Hessiano de una función). Dada una función $f \in \mathfrak{F}(M)$ se define el **Hessiano** de f , $\text{Hess}(f)$, como el campo $(0, 2)$ -tensorial determinado por la aplicación

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto [\text{Hess}(f)](X, Y) := \langle \nabla_X \text{grad } f, Y \rangle_g = X(Yf) - df(\nabla_X Y), \end{aligned} \tag{2.10}$$

cuya expresión en coordenadas puede obtenerse también observando que⁵ $\text{Hess}(f) = \nabla\nabla f = \nabla df$, habiendo usado en la última igualdad que la derivada covariante actúa como la diferenciabilidad ordinaria en funciones de $\mathfrak{F}(M)$.

$$\text{Hess}(f) = f_{;ji} dx^i \otimes dx^j = [\nabla_i \partial_j f] dx^i \otimes dx^j = \left[\partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f \right] dx^i \otimes dx^j \quad (2.11)$$

Este operador es simétrico, como se puede observar de la expresión en coordenadas, por ser la conexión de Levi-Civita simétrica.

Definición 2.15 (Laplaciano de una función). Tomando la traza del Hessiano con la métrica obtenemos un nuevo operador diferencial, el **Laplaciano** $\Delta f = \text{tr}_g(\text{Hess}(f))$

En el caso del operador divergencia, puede ser introducido de múltiples formas, algunas de ellas dependen del concepto de forma de volumen y derivada exterior (ver [6]), alternativamente se puede definir como sigue.

Definición 2.16 (Operador divergencia). En una variedad (M, g) , se define la **divergencia** para un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ como la traza de ∇X ,

$$\text{div}(X) = \text{tr}_g(\nabla_{E_j} X) = \sum_i g(\nabla_{E_i} X, E_i),$$

donde $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una referencia ortonormal.

2.6. Coordenadas normales

En esta última sección introduciremos brevemente la noción de **coordenadas normales** locales sobre un punto en una variedad. La gran utilidad de estas reside en que permiten trabajar localmente alrededor de un punto de la variedad en el que la métrica se vuelve trivial y los símbolos de Christoffel se anulan.

Proposición 2.17 (Coordenadas normales). *Dada una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) , un punto $p \in M$ y un entorno normal de p , U_p . Existe una **carta local normal** de coordenadas que verifica*

- Las componentes del tensor métrico en p son $g_{ij}|_p = \delta_{ij}$ en el caso Riemanniano, y en el pseudo-Riemanniano $g_{ij}|_p = \pm \delta_{ij}$ según la signatura de la misma.

⁵La notación $\nabla\nabla \equiv \nabla^2$, puede resultar ligeramente ambigua según estemos considerando un producto interior, con la métrica, o el producto tensorial.

Hay que destacar que en nuestro caso, cuando hablamos del Hessiano se trata del producto tensorial, luego $\nabla^2 = \nabla \otimes \nabla = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} dx^i \otimes dx^j$. Sin embargo, si considerásemos un producto interior, tendríamos por el contrario el Laplaciano, dado que $\langle \nabla, \nabla \rangle_g = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_i} dx^i$.

- Todos los símbolos de Christoffel se anulan sobre el punto p , $\Gamma_{ij}^k|_p = 0$ y; consecuentemente, se anulan las derivadas del tensor métrico en p , $(\partial_k g_{ij})|_p = 0$.

Para demostrar la existencia de las mismas se hace uso de la **aplicación exponencial** que, con base un punto en la variedad $p \in M$, \exp_p , está definida en un entorno del origen del espacio tangente $T_p M$ con valores en la variedad $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$, donde γ_v denota la única **geodésica** en M con condiciones iniciales $(\gamma_v(0) = p, \gamma'_v(0) = v)$.

Además, como $d(\exp_p)_0 = \text{Id}_{T_p M}$, está garantizada la existencia de entornos abiertos alrededor del origen $0 \in T_p M$ y del punto $p \in M$ entre los que la aplicación exponencial es un difeomorfismo. Denominaremos **entorno normal** alrededor de $p \in M$ a un abierto dado por la construcción anterior.

Puede consultarse más información así como más de las propiedades que presenta este sistema de coordenadas locales en [6, 7].

Capítulo 3

Curvatura

Para poder demostrar que dos estructuras geométricas no son localmente equivalentes, es de gran importancia buscar invariantes locales como es el caso de la curvatura escalar, que definiremos en este capítulo. Pero antes, motivaremos el origen del tensor curvatura, a través del siguiente ejemplo.

Consideremos \mathbb{R}^n dotado de la conexión Euclídea $\tilde{\nabla}$, motivados por la conmutatividad de las derivadas parciales de segundo orden cruzadas conocida para esta variedad, podemos preguntarnos si dados campos de vectores arbitrarios diferenciables $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ ocurre algo similar con la derivada covariante.

Observación 3.1. El espacio (pseudo-)Euclídeo \mathbb{R}^n dotado de la conexión (pseudo-)Euclídea $\tilde{\nabla}$ satisface que

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = \tilde{\nabla}_X (Y(Z^k) \partial_k) - \tilde{\nabla}_Y (X(Z^k) \partial_k) = [XY(Z^k) - YX(Z^k)] \partial_k = \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z, \quad (3.1)$$

para cualesquiera campos de vectores arbitrarios diferenciables X, Y, Z .

Proposición 3.2 (Condición necesaria para una variedad plana). *Dada una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) plana, su conexión de Levi-Civita ∇ satisface el siguiente **criterio de planicidad***

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X, Y]} Z; \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \quad (3.2)$$

Demostración. Por ser (M, g) plana es localmente isométrica a un abierto del espacio (pseudo-)Euclídeo con la métrica (pseudo-)Euclídea. Además, la conexión (pseudo-)Euclídea $\tilde{\nabla}$ es precisamente la conexión de Levi-Civita.

Dado que la conexión de Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ del espacio (pseudo-)Euclídeo satisface el criterio de planicidad (3.1), necesariamente ∇ también deberá satisfacerlo por la naturalidad de la conexión de Levi-Civita (proposición 2.12). \square

En base a la proposición anterior, se define el tensor curvatura como la aplicación que da cuenta de la diferencia entre ambos términos de la expresión (3.2).

3.1. El tensor curvatura

Definición 3.3 (Tensor curvatura). Sea (M, g) una variedad (pseudo-)Riemanniana, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta aplicación verifica que es $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal sobre ambos campos de vectores X e Y de la definición. Veámoslo para uno de los dos primeros campos, pues para el otro es automático dado que $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$ por la definición dada.

$$\begin{aligned} R(X, fY)Z &= \nabla_X \nabla_{fY} Z - \nabla_{fY} \nabla_X Z - \nabla_{[X, fY]} Z = \nabla_X (f \nabla_Y Z) - f \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X, Y] + (Xf)Y} Z = \\ &= (Xf) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z - (Xf) \nabla_Y Z = f R(X, Y)Z \end{aligned}$$

Por otra parte, para el campo Z también es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal, pues

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]} (fZ) = \\ &= \nabla_X (Y(f)Z + f \nabla_Y Z) - \nabla_Y (X(f)Z + f \nabla_X Z) - [X, Y](f) \cdot Z - f \nabla_{[X, Y]} Z = \\ &= X(Y(f))Z + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z \\ &\quad - Y(X(f))Z - X(f) \nabla_Y Z - Y(f) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z \\ &\quad - X(Y(f))Z + Y(X(f))Z - f \nabla_{[X, Y]} Z = \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z = f R(X, Y)(Z) \end{aligned}$$

Por ser R una aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal, se sigue que es un campo de tensores $(1, 3)$; i.e., $R(X, Y)Z \in \mathfrak{T}^{(1,3)}(M)$. Además, si restringimos dicha aplicación al último argumento

$$R(X, Y) : Z \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M),$$

se tiene un endomorfismo diferenciable en $\mathfrak{X}(M)$, que se conoce como el **endomorfismo de curvatura** determinado por X e Y .

El campo tensorial R se habitúa llamar endomorfismo de curvatura de Riemann o tensor curvatura $(1, 3)$, que descrito en términos de un sistema de coordenadas locales puede escribirse como sigue

$$R = R_{ijk}{}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l, \text{ con } R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}{}^l \partial_l \quad (3.4)$$

Haciendo uso de la métrica de la variedad y por tanto de los isomorfismos musicales, es posible reescribir el tensor curvatura como un tensor $(0, 4)$, totalmente covariante. Definimos así

el **tensor curvatura** (de Riemann) como el campo $(0,4)$ -tensorial $Rm = R^b$, que se obtiene bajando el último índice contravariante. Su actuación sobre un campo vectorial $W \in \mathfrak{X}(M)$ vendrá dada por

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle_g, \quad (3.5)$$

y en cualquier sistema de coordenadas local tendrá la forma

$$Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l, \text{ con } R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m \quad (3.6)$$

Es importante destacar que la definición del tensor curvatura no requiere a priori de la especificación de una métrica de Riemann, dado que su definición como campo tensorial $(1,3)$ únicamente se basa en la existencia de una conexión. Asimismo, la asignación de una métrica de Riemann permite la realización de contracciones sobre sus índices y de trazas que nos permitirán definir otros tensores relevantes que veremos en este capítulo.

Podemos dar una descripción para el tensor curvatura en términos de los símbolos de Christoffel

Proposición 3.4 (Expresión del tensor curvatura en coordenadas). *La expresión del $(1,3)$ -tensor curvatura en términos de cualquier sistema de coordenadas diferenciable local, vienen dadas por*

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l$$

Para su forma covariante $(0,4)$, se sigue automáticamente

$$R_{ijkm} = g_{rl} R_{ijk}{}^l = g_{rl} \left(\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \right)$$

3.2. Propiedades e identidades del tensor curvatura

Enunciaremos a continuación algunas de las propiedades más destacables y de interés acerca del tensor curvatura.

Proposición 3.5 (Simetrías del tensor curvatura). *El $(0,4)$ tensor curvatura de g posee las siguientes **simetrías** para cualesquiera campos de vectores $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:*

- *Antisimetría 1-2,*

$$Rm(X, YZ, W) = -Rm(Y, X, Z, W) \iff R_{ijkl} = -R_{jikl} \quad (3.7)$$

- *Antisimetría 3-4,*

$$Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(X, Y, W, Z) \iff R_{ijkl} = -R_{ijlk} \quad (3.8)$$

- Simetría 12-34,

$$Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y) \iff R_{ijkl} = R_{klij} \quad (3.9)$$

- 1^a identidad de Bianchi,

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, Z, W) + Rm(Y, Z, X, W) + Rm(Z, X, Y, W) = 0 &\iff \\ \iff R_{ijkl} + R_{jkli} + R_{klij} = 0 &\quad (3.10) \end{aligned}$$

- 2^a identidad o identidad diferenciable de Bianchi,

$$\begin{aligned} \nabla Rm(X, Y, Z, V, W) + \nabla Rm(X, Y, V, W, Z) + \nabla Rm(X, Y, W, Z, V) = 0 &\iff \\ \iff R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0 &\quad (3.11) \end{aligned}$$

Demostración. Proporcionaremos solamente una idea de cómo se demuestran estas propiedades, pudiéndose encontrarse su demostración en [6]. La primera propiedad es consecuencia de la definición del endomorfismo de curvatura; la segunda, de la compatibilidad métrica de la conexión de Levi-Civita; la tercera, de la libertad de torsión de la conexión de Levi-Civita; la cuarta consecuencia de las tres anteriores, y la quinta es notablemente sencilla de demostrar tomando coordenadas normales. \square

Será de interés también presentar las conocidas como identidades de Ricci, propiedades que presenta la aplicación dual al endomorfismo curvatura, que será un endomorfismo en $\Lambda^1(M)$, que dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} R(X, Y)^* : \Lambda^1(M) &\longrightarrow \Lambda^1(M) \\ \eta &\longmapsto R(X, Y)^*\eta : Z \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto (R(X, Y)^*\eta)(Z) := \eta(R(X, Y)Z) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Proposición 3.6 (Identidad de Ricci para 1-formas). *En una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) , las derivadas segundas covariantes de todo campo de covectores satisfacen la siguiente propiedad:*

$$\nabla_{X,Y}^2 \beta - \nabla_{Y,X}^2 \beta = -R(X, Y)^* \beta, \text{ para } X, Y \in \mathfrak{X}(M) \quad (3.13)$$

Demostración. En primer lugar, debemos notar que para cualquier campo tensorial G

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2 G - \nabla_{Y,X}^2 G &= \nabla_X \nabla_Y G - \nabla_{(\nabla_X Y)} G - \nabla_Y \nabla_X G + \nabla_{(\nabla_Y X)} G \\ &= \nabla_X \nabla_Y G - \nabla_Y \nabla_X G - \nabla_{[X,Y]} G \end{aligned}$$

Pasamos ahora a computar separadamente los diferentes términos involucrados:

$$(\nabla_X \nabla_Y \beta)(Z) = X((\nabla_Y \beta)(Z)) - (\nabla_Y \beta)(\nabla_X Z) = X(Y(\beta(Z)) - \beta(\nabla_Y Z)) - (\nabla_Y \beta)(\nabla_X Z) =$$

$$\begin{aligned}
&= XY(\beta(Z)) - (\nabla_X \beta)(\nabla_Y Z) - \beta(\nabla_X \nabla_Y Z) - (\nabla_Y \beta)(\nabla_X Z) \\
(\nabla_Y \nabla_X \beta)(Z) &= YX(\beta(Z)) - (\nabla_Y \beta)(\nabla_X Z) - \beta(\nabla_Y \nabla_X Z) - (\nabla_X \beta)(\nabla_Y Z) \\
\left(\nabla_{[X,Y]} \beta\right)(Z) &= [X, Y](\beta(Z)) - \beta\left(\nabla_{[X,Y]} Z\right)
\end{aligned}$$

Juntando todo, se sigue que

$$\left(\nabla_X \nabla_Y \beta - \nabla_Y \nabla_X \beta - \nabla_{[X,Y]} \beta\right)(Z) = -\beta\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right) = -\beta(R(X, Y)Z),$$

como se quería ver. \square

3.3. Invarianza local isométrica del tensor de curvatura

Veamos ahora que el tensor curvatura es un **invariante local por isometrías**, hecho que resulta de gran relevancia ya que permite relacionar los diferentes tensores curvaturas de diferentes variedades (pseudo-)Riemannianas fácilmente.

Teorema 3.7 (Invarianza local isométrica del tensor curvatura). *Dadas dos variedades (pseudo-)Riemannianas (M, g) , (\tilde{M}, \tilde{g}) y $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ una isometría local, entonces $\varphi^* \tilde{Rm} = Rm$.*

Demostración. Considerando ambas conexiones de Levi-Civita en las dos variedades, ∇ , $\tilde{\nabla}$ respectivamente y teniendo en cuenta que la definición del tensor de curvatura únicamente involucra las conexiones y corchetes de Lie, y ambos se preservan por isometrías por su naturalidad; i.e., $\varphi^* \tilde{\nabla} = \nabla$ y $\varphi_* [X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$ con lo que tomando campos arbitrarios $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

$$\begin{aligned}
\left(\varphi^* \tilde{Rm}\right)(X, Y, Z, W) &= \tilde{Rm}(\varphi_* X, \varphi_* Y, \varphi_* Z, \varphi_* W) = \langle R(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z, \varphi_* W \rangle_{\tilde{g}} = \\
&= \left\langle \left[\tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \tilde{\nabla}_{\varphi_* Y} (\varphi_* Z) - \tilde{\nabla}_{\varphi_* Y} \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} (\varphi_* Z) - \tilde{\nabla}_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]} (\varphi_* Z) \right], \varphi_* W \right\rangle_{\tilde{g}} = \\
&= \left\langle \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \left[(\varphi^* \tilde{\nabla})_Y (Z) \right] - \tilde{\nabla}_{\varphi_* Y} \left[(\varphi^* \tilde{\nabla})_X (Z) \right] - \tilde{\nabla}_{\varphi_* [X, Y]} (\varphi_* Z), \varphi_* W \right\rangle_{\tilde{g}} = \\
&= \left\langle \left(\tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \right) \varphi_* [\nabla_Y (Z)] - \left(\tilde{\nabla}_{\varphi_* Y} \right) \varphi_* [\nabla_X (Z)] - \left[(\varphi^* \tilde{\nabla})_{[X, Y]} (Z) \right], \varphi_* W \right\rangle_{\tilde{g}} = \\
&= \left\langle \left(\varphi^* \tilde{\nabla} \right)_X [\nabla_Y (Z)] - \left(\varphi^* \tilde{\nabla} \right)_Y [\nabla_X (Z)] - \varphi_* \left(\nabla_{[X, Y]} (Z) \right), \varphi_* W \right\rangle_{\tilde{g}} = \\
&= \left\langle \varphi_* \left[\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \right], \varphi_* W \right\rangle_{\tilde{g}} = \\
&= \left\langle \left[\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \right], W \right\rangle_{\underbrace{\varphi^* \tilde{g}}_g} = Rm(X, Y, Z, W)
\end{aligned}$$

\square

Como consecuencia, todas las contracciones del tensor curvatura serán también invariante locales isométricos [6].

Además, en base al criterio de planicidad que ya habíamos introducido, el carácter plano o llano de una variedad está caracterizado por el tensor curvatura

Teorema 3.8 (Caracterización de variedades planas). *Una variedad (pseudo-)Riemanniana es plana si y solo si su tensor de Riemann es idénticamente nulo.*

Demostración. La necesidad ya ha sido probada pues en la proposición 3.2 se ha visto que toda conexión de Levi-Civita de una variedad plana satisface el criterio de planicidad y consecuentemente el tensor curvatura es idénticamente nulo por definición.

Recíprocamente si el tensor de curvatura de una variedad es idénticamente nulo, entonces el endomorfismo de curvatura también lo es y la conexión de Levi-Civita satisface el criterio de planicidad. \square

3.4. Tensor de Ricci y curvatura escalar

Haciendo uso de la métrica de Riemann g en nuestra variedad podemos construir tensores más simples y de menos rango que compactan la información que nos proporciona el tensor de curvatura.

En este contexto, es de gran relevancia el conocido como tensor de Ricci, un campo de 2-covariante de tensores que se define a partir de la traza del endomorfismo curvatura, contrayendo su primer y último índice.

Definición 3.9 (Tensor de Ricci). Se define el **tensor de Ricci** Rc a partir del tensor curvatura Rm como la aplicación

$$\begin{aligned} Rc : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \text{tr}_g (Z \mapsto R(Z, X)Y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

que en componentes toma la forma

$$Rc = R_{ij} dx^i \otimes dx^j, \text{ donde } R_{ij} = R_{kij}{}^k = g^{km} R_{kijm} \quad (3.15)$$

A partir de la definición se tiene automáticamente que este tensor es simétrico y además admite las siguientes diferentes expresiones debido a las propiedades de simetría que hereda del tensor curvatura:

$$R_{ij} = R_{kij}{}^k = R_{ik}{}^k{}_j = -R_{ki}{}^k{}_j = -R_{ikj}{}^k$$

Con el tensor de Ricci definido, aun es posible definir una contracción más y obtener un escalar representativo, la curvatura escalar.

Definición 3.10 (Curvatura escalar). Se define la **curvatura escalar** S como la traza por la métrica de Riemann del tensor de Ricci Rc

$$S = \text{tr}_g(Rc) = R_i^i = g^{ij}R_{ij} \quad (3.16)$$

Será también de utilidad para los próximos capítulos separar la parte con traza nula del tensor de Ricci a través de la introducción del **tensor de Ricci con traza nula** $\overset{\circ}{R}c$, que se define sustrayéndole una cantidad proporcional a la métrica y a la curvatura escalar

$$\overset{\circ}{R}c = Rc - \frac{1}{n}Sg, \quad (3.17)$$

de donde se deduce que el tensor de Ricci admite una descomposición ortogonal revertiendo la expresión anterior.

Introducimos ahora las identidades contraídas de Bianchi que serán de utilidad para probar resultados cuando abordemos las transformaciones conformes de la métrica.

Proposición 3.11 (Identidades contraídas de Bianchi). *Las derivadas covariantes del tensor curvatura, del tensor de Ricci y del escalar de g de curvatura satisfacen las siguientes propiedades:*

- $\text{tr}_g(\nabla Rm) = -D(Rc) \iff R_{ijkl;^i} = R_{jk;l} - R_{jl;k}$
- $\text{tr}_g(\nabla Rc) = \frac{1}{2}dS \iff R_{il;^i} = \frac{1}{2}S_{;l}$

Demostración. Partimos de la segunda identidad de Bianchi diferencial en coordenadas, subimos el índice m y lo contraemos con i ,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_i^r g^{rm} (R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l}) = \\ &= \delta_r^i (R_{ijkl;^r} + R_{ijl^r;k} + R_{ij^r k;l}) = \\ &= R_{ijkl;^i} + R_{ijl^i;k} + R_{ij^i k;l} \end{aligned}$$

donde hemos usado implícitamente que la derivada covariante conmuta con las contracciones y la compatibilidad métrica de la conexión de Levi-Civita.

Ahora despejando $R_{ijkl;^i}$ y simplificando $R_{ijl^i;k} = -R_{jil^i;k} = -R_{jl;k}$ y $R_{ij^i k;l} = R_{jik^i k;l} = R_{jk;l}$ obtenemos la primera de las identidades contraídas de Bianchi.

$$R_{ijkl;^i} = R_{jl;k} - R_{jk;l}$$

Para obtener la segunda identidad, realizamos un procedimiento similar al anterior sobre subiéndolo el índice j y contrayéndolo con k sobre la primera identidad contraída de Bianchi; i.e. aplicando $\delta_s^k g^{sj}$

$$0 = \delta_s^k g^{sj} (R_{ijkl;^i} - R_{jl;k} + R_{kj;l}) = \delta_s^k (R_{i^s kl;^i} - R_{l;k}^s + R_{k^s ;l}) = R_{i^k kl;^i} - R_{l;k}^k + R_{k^k ;l}$$

Simplificando ahora $R_i^k{}_{kl}{}^i = -R_{lki}{}^k{}^i = -R_{il}{}^i = -R_{il}{}^i$; renombrando $i \leftrightarrow k$ y simplificando, $R^k{}_{l;k} = R^i{}_{l;i} = R_{il}{}^i$ y finalmente por definición, $R_k{}^k{}_{;l} = S_{;l}$ llegamos a la segunda identidad contraída de Bianchi

$$0 = -R_{il}{}^i - R_{il}{}^i + S_{;l}; \implies R_{il}{}^i = \frac{1}{2}S_{;l}$$

□

3.5. Curvatura seccional

Para definir el concepto de curvatura seccional enunciaremos sin demostración el Teorema Egregium de Gauss que explicita como la curvatura Gaussiana, de carácter extrínseco, está directamente relacionada con la curvatura escalar, poniendo de manifiesto la coincidencia de ambas perspectivas extrínseca e intrínseca, para describir propiedades geométricas de la variedad.

Teorema 3.12 (Teorema Egregium de Gauss). *Dada una variedad Riemanniana (M, g) tomada como subvariedad de \mathbb{R}^3 . La **curvatura Gaussiana** κ en cada punto $p \in M$ es exactamente la mitad de la curvatura escalar de g , S , en $p \in M$, por lo que también es un **invariante local isométrico** de (M, g) .*

La expresión de la curvatura Gaussiana intrínseca es⁶

$$\kappa = \frac{Rm(\partial_1, \partial_2, \partial_2, \partial_1)}{\langle \partial_1, \partial_1 \rangle_g \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_g - \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_g^2} = \frac{1}{2}S,$$

Cuando se consideren variedades Riemannianas no necesariamente embebidas dentro de \mathbb{R}^3 , y de modo general, se puede definir directamente la curvatura Gaussiana en términos de la curvatura escalar $K = \frac{1}{2}S$ en cada punto de la variedad, quedando así determinada completamente de forma intrínseca.

La noción de curvatura Gaussiana motiva en cierto modo la definición de curvatura seccional como será evidente a continuación

Definición 3.13 (Curvatura seccional). Se define la **curvatura seccional** en $p \in M$ asociada a un subespacio 2-dimensional $\Pi \subseteq T_p M$ como

$$\begin{aligned} \kappa_p(\Pi) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\longmapsto \kappa_p(\Pi)(X, Y) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{Rm^0(X, Y, Y, X)}, \text{ con } \{X, Y\} \text{ base de } \Pi \end{aligned}$$

⁶Una forma rápida de ver que es justamente la mitad de la curvatura escalar, pero que requiere de conceptos del capítulo 4 como son el producto de Kulkarni-Nomizu \otimes y de la expresión del tensor curvatura en función del mismo $Rm \stackrel{\dim^3}{=} \frac{1}{4}Sg \otimes g$ para así obtener

$$Rm(\partial_1, \partial_2, \partial_2, \partial_1) = \frac{1}{4}S(2\langle \partial_1, \partial_1 \rangle_g \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_g - 2\langle \partial_1, \partial_2 \rangle_g \langle \partial_2, \partial_1 \rangle_g) = \frac{1}{2}S(\langle \partial_1, \partial_1 \rangle_g \langle \partial_2, \partial_2 \rangle_g - \langle \partial_1, \partial_2 \rangle_g^2),$$

luego trivialmente $\kappa = \frac{1}{2}S$ en cada punto de la variedad.

y donde $Rm^0(X, Y, Z, W) = \langle Y, Z \rangle_g \langle X, W \rangle_g - \langle X, Z \rangle_g \langle Y, W \rangle_g \quad \forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Es posible concretar más acerca de la definición de esta cantidad. A través de la aplicación exponencial \exp_p se puede proyectar⁷ el subespacio 2- dimensional $\Pi \subseteq T_p M$ sobre la variedad M . La curvatura seccional $\kappa_p(\Pi)$ coincide con la curvatura de Gauss de esta proyección, únicamente en el punto $p \in M$, y coincide exactamente con la mitad de la curvatura escalar asociada a la métrica, restringida a dicha proyección, tal y como establece el Teorema Egregium de Gauss.

Nótese además que la curvatura seccional está bien definida pues

$$Rm^0(X, Y, Y, X) = \langle Y, Y \rangle_g \langle X, X \rangle_g - \langle X, Y \rangle_g \langle Y, X \rangle_g > 0,$$

en el caso de métricas Riemannianas para cualesquiera campos de vectores linealmente independientes.

Más información acerca de esta cantidad puede encontrarse en [6], donde además se demuestra cómo esta cantidad no depende de la elección de la base y la relación que guarda con el tensor de Ricci y la curvatura escalar, entre otros resultados.

3.6. Métricas de Einstein

Existe un subconjunto de métricas denominadas de Einstein de gran interés para el campo de la Relatividad General

Definición 3.14 (Métrica de Einstein). Se dice que una métrica (pseudo-)Riemanniana es una **métrica de Einstein** si su tensor de Ricci Rc es un múltiplo de la métrica; i.e. verifica la conocida como **ecuación de Einstein**

$$Rc = \lambda g, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

El siguiente resultado, muestra como en variedades conexas (pseudo-)Riemannianas de dimensión superior a 2 se puede relajar la hipótesis y pedir que $\lambda \in \mathfrak{F}(M)$.

Lema 3.15 (Lema de Schur). *Una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) conexa de dimensión ≥ 3 verifica que si su tensor de Ricci $Rc = fg$ con $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces f es necesariamente constante y g es una métrica de Einstein.*

Demostración. Tomando la traza sobre el tensor de Ricci se tiene que

$$S = \text{tr}_g(Rc) = \text{tr}_g(fg) = f \cdot n,$$

⁷Recordar que la exponencial \exp_p está definida en un entorno de $0 \in U \subseteq T_p M$, con lo que será $U \cap \Pi$ lo que realmente se proyecta a M .

luego $Rc = \frac{1}{n}Sg$ y el tensor de Ricci de traza nula es idénticamente nulo $\mathring{R}c \equiv 0$.

En particular, su derivada covariante también será idénticamente nula $\nabla \mathring{R}c \equiv 0$, que en coordenadas implica que

$$0 = R_{ij;k} - \frac{1}{n}S_{;k}g_{ij} - \frac{1}{n}Sg_{ij;k} \stackrel{0}{\implies} R_{ij;k} = \frac{1}{n}S_{;k}g_{ij}$$

Multiplicando ahora por el tensor métrico g^{ik} y utilizando la segunda identidad contraída de Bianchi tenemos que

$$\frac{1}{n}S_{;j} = \frac{1}{n}S_{;k} \underbrace{g^{ik}g_{ij}}_{\delta_j^k} = g^{ik}R_{ij;k} = R_{ij;{}^i} = \frac{1}{2}S_{;j}$$

Ahora bien, como $n \geq 3$, necesariamente $S_{;j} = 0$, equivalentemente $\nabla S = dS \equiv 0$ y por la conexidad de la variedad necesariamente $f = \frac{1}{n}S$ es constante. \square

El lema de Schur nos dice en esencia que $\mathring{R}c \equiv 0$ es una condición suficiente para que una métrica sea de Einstein en dimensión ≥ 3 . Pero además, esta condición es también necesaria y por tanto da una caracterización para métricas de Einstein en dimensión ≥ 3 .

Corolario 3.16 (Condición necesaria y suficiente para ser métrica de Einstein). *La condición $\mathring{R}c \equiv 0$ es necesaria y suficiente para que una métrica sea de Einstein en dimensión $n \geq 3$.*

Demostración. Únicamente tenemos que demostrar la necesidad, ya que el lema de Schur (lema 3.15) nos garantiza la suficiencia.

Supongamos entonces que g es una métrica de Einstein, luego $Rc = \lambda g$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomando la traza con la métrica obtenemos que $\lambda = \frac{1}{n}S$, con lo que $\mathring{R}c = Rc - \frac{1}{n}gS = Rc - \lambda g = 0$ y el tensor de Ricci con traza nula es idénticamente nulo. \square

Observación 3.17. En dimensión 2 el tensor de Ricci con traza nula $\mathring{R}c$ es siempre idénticamente nulo, como veremos más adelante. No obstante, al no estar bajo las hipótesis del Lema de Schur no tenemos asegurado que la curvatura escalar sea constante S .

Observación 3.18. En dimensiones $n \geq 3$, para que una métrica sea de Einstein, debemos tener que $\mathring{R}c \equiv 0$, equivalentemente que $Rc = \frac{1}{n}Sg$. Como aplicación del Lema de Schur se tiene que para variedades conexas de dimensión $n \geq 3$, $\lambda = \frac{S}{n}$ deberá ser constante. Sin embargo, la curvatura seccional no es necesariamente constante, como ocurre en la variedad producto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, que pese a ser Einstein no presenta curvatura seccional constante.

Capítulo 4

Tensor de Weyl

En este capítulo definiremos un elemento tensorial conocido como tensor de Weyl que generaliza al tensor curvatura de Riemann ya introducido. Para motivar su definición empezaremos estableciendo el concepto de tensor curvatura algebraico en un espacio vectorial real, concepto extrapolable a un campo tensorial en una variedad.

4.1. Tensores curvatura algebraicos

Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita n , consideraremos el espacio vectorial $T^4(V^*) \equiv \mathfrak{T}^{(0,4)}(V)$, conformado por todos los $(0,4)$ -tensores (covariantes) en V , dentro del cual nos restringiremos a los elementos que además verifiquen las propiedades de simetría del $(0,4)$ -tensor curvatura de Riemann, cuyo conjunto denotaremos por $\mathcal{R}(V^*)$.

$$\begin{aligned} (a) \quad T(w, x, y, z) &= -T(x, w, y, z) & (c) \quad T(w, x, y, z) &= T(y, z, w, x) \\ (b) \quad T(w, x, y, z) &= -T(w, x, z, y) & (d) \quad T(w, x, y, z) &+ T(x, y, w, z) + T(y, w, x, z) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}(V^*) = \left\{ T \in T^4(V^*) : T \text{ verifica las propiedades } (a), (b), (c), (d) \right\} \subseteq T^4(V^*)$$

Los elementos del espacio vectorial $\mathcal{R}(V^*)$ se denominan **tensores curvatura algebraicos**⁸ en V .

Pasaremos ahora a caracterizar la dimensión de este espacio vectorial.

Proposición 4.1 (Dimensión del conjunto de tensores curvatura algebraicos). *Dado un espacio vectorial real V n -dimensional,*

$$\dim [\mathcal{R}(V^*)] = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

⁸Es posible definir el concepto de tensor curvatura algebraico sin necesidad de incluir la condición (c), ya que es también deducible a partir de las restantes [6].

Demostración. Comenzamos definiendo el subespacio de $T^4(V^*)$ sobre el que nos restringiremos, que será el que verifique las propiedades (a) a (c) antes mencionadas, que denotaremos por $\mathcal{B}(V^*)$. Además se considera $\Sigma^2(\Lambda^2(V)^*)$, el espacio de forma bilineales simétricas del espacio vectorial $\Lambda^2(V)$ de 2-formas, equivalentemente de $(0, 2)$ -tensores contravariantes sobre V . Entre estos dos espacios se define la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma^2(\Lambda^2(V)^*) &\longrightarrow \mathcal{B}(V^*) \\ B(w, x, y, z) &\mapsto \Phi[B(w, x, y, z)] := B(w \wedge x, y \wedge z) \end{aligned}$$

Por la antisimetría natural del producto exterior se tiene automáticamente las propiedades descritas para la imagen de B por Φ , de donde $\Phi(B) \in \mathcal{B}(V^*)$. Para ver que Φ es de hecho un isomorfismo, explicitamos su inversa. Para ello, dada una base $\{v_i\}_{i=1}^n$ de V , construimos una base $\{v_i \wedge v_j : i < j\}$ del espacio de 2-formas $\Lambda^2(V)$, y definimos la inversa como

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{B}(V^*) &\longrightarrow \Sigma^2(\Lambda^2(V)^*) \\ B(v_i \wedge v_j, v_k \wedge v_l) &\mapsto \Psi[B(v_i \wedge v_j, v_k \wedge v_l)] := B(v_i, v_j, v_k, v_l) \quad \text{con } i < j, k < l \end{aligned}$$

Ahora bien, por tener el espacio de formas bilineales simétricas m -dimensional dimensión $\frac{m(m+1)}{2}$ y dado que que $\dim[\Lambda^2(V)] = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, se sigue que

$$\dim[\mathcal{B}(V^*)] = \dim\left[\Sigma^2(\Lambda^2(V)^*)\right] = \frac{\binom{n}{2} \left[\binom{n}{2} + 1\right]}{2} = \frac{n(n-1)(n^2 - n + 2)}{8}$$

Considerando ahora la aplicación lineal

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{B}(V^*) &\longrightarrow T^4(V^*) \\ T(w, x, y, z) &\mapsto \pi[T(w, x, y, z)] := \frac{1}{3} [T(w, x, y, z) + T(x, y, w, z) + T(y, w, x, z)], \end{aligned}$$

se sigue que $\ker[\pi] = \mathcal{R}^*(V)$, pues es en esencia la condición (d) restante que no pedíamos sobre $\mathcal{B}(V^*)$.

Se tiene además, que π es la restricción a $\mathcal{B}(V^*)$ del operador de alterado $\text{Alt} : T^4(V^*) \rightarrow \Lambda^4(V)$ definido en (1.1). De hecho, las simetrías (a)-(c), permiten reducir todos los $4! = 24$ términos de $\text{Alt}(T(w, x, y, z))$ a uno de los términos presentes en la definición de π [6], y por consiguiente, $\text{Im}[\pi] \subseteq \Lambda^4(V)$.

Además, se puede comprobar como cualquier $T \in \Lambda^4(V)$ verifica las propiedades (a)-(c) inmediatamente, con lo que $T \in \mathcal{B}(V^*)$. Esto permite concluir que $\pi(T) = \text{Alt } T = T$, en particular que $\text{Im}[\pi] = \Lambda^4(V)$.

Usando ahora el conocido teorema de álgebra de rango-nulidad [8], se sigue que

$$\dim \mathcal{R}(V^*) = \dim \mathcal{B}(V^*) - \dim \Lambda^4(V^*) = \frac{n(n-1)(n^2 - n + 2)}{8} - \binom{n}{4} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$$

□

4.2. Producto de Kulkarni-Nomizu

Es posible construir un tensor curvatura algebraico a partir de dos 2-tensores simétricos y la métrica de la variedad.

Definición 4.2 (Producto de Kulkarni-Nomizu). Dados dos 2-tensores simétricos $h, k \in \Sigma^2(V^*)$, definimos el **producto de Kulkarni-Nomizu** como la aplicación que lleva formas lineales $w, x, y, z \in V^*$ en

$$(h \oslash k)(w, x, y, z) := h(w, z)k(x, y) + h(x, y)k(w, z) - h(w, y)k(x, z) - h(x, z)k(w, y)$$

Sus coordenadas en cualquier base vendrán dadas por

$$(h \oslash k)_{ijkl} = h_{im}k_{jl} + h_{jl}k_{im} - h_{il}k_{jm} - h_{jm}k_{il}$$

Las principales propiedades del producto de Kulkarni-Nomizu son:

- $h \oslash k$ es un tensor curvatura algebraico. Las propiedades (a) a (c) son evidentes, el cálculo explícito de la expresión (d) utilizando las expresiones anteriores, todos los términos resultan cancelados.
- Simetría respecto a \oslash : $h \oslash k = k \oslash h$. Se sigue de la definición.
- Su traza viene dada por $\text{tr}_g(h \oslash g) = (n - 2)h + (\text{tr}_g h)g$. En particular, $\text{tr}_g(g \oslash g) = 2(n - 1)g$. Por componentes,

$$\text{tr}_g(h \oslash g)_{jl} = g^{im}(g \oslash h)_{ijml} = g^{im}(h_{im}k_{jl} + h_{jl}k_{im} - h_{il}k_{jm} - h_{jm}k_{il}) = \quad (4.1)$$

$$= h_i^i g_{jl} + n \cdot h_{jl} - \delta_j^i h_{il} - \delta_l^m h_{jm} = h_i^i g_{jl} + (n - 2)h_{jl} \quad (4.2)$$

- $\langle T, h \oslash g \rangle_g = 4 \langle \text{tr}_g T, h \rangle_g$.

Escribiendo en coordenadas $\langle T, h \oslash g \rangle_g = g(T, h \oslash g) = g^{ii}g^{jj}g^{mm}g^{ll}T_{ijkl}(h \oslash g)_{ijkl}$. Para el primer sumando, $T_{ijkl}g_{jl}g^{jj}g^{ll}h_{im}g^{ii}g^{mm} = T_{liml}g^{ll}h_{im}g^{ii}g^{mm} = \langle \text{tr}_g(T), h \rangle$. Los otros tres términos son análogos.

- Si g es positiva definida, entonces $|g \oslash h|_g^2 = 4(n - 2)|h|_g^2 + 4(\text{tr}_g h)^2$.

Partimos de la expresión en coordenadas de $|g \oslash h|_g^2 = g(h \oslash g, h \oslash g)$, que toma la forma $(h \oslash g)_{ijkl}(h \oslash g)_{ijkl}g^{ii}g^{jj}g^{ll}g^{mm}$. Considerando el primer factor de $h \oslash g$ multiplicado por toda la expresión de $h \oslash g$ se sigue que los 4 sumandos serán

$$\left. \begin{aligned} h_{im}^2 g^{ii} g^{mm} g_{jl}^2 g^{jj} g^{ll} &= |h|_g^2 \delta_l^j \delta_j^l = n \cdot |h|_g^2 \\ h_{im} g_{im} g^{ii} g^{mm} h_{jl} g_{jl} g^{jj} g^{ll} &= h_{im} \delta_m^i g^{mm} h_{jl} \delta_l^j g^{jj} = h_{mm} g^{mm} h_{jj} g^{jj} = [\text{tr}_g(h)]^2 \\ -h_{im} h_{il} g^{ii} g^{jj} g_{jl} g^{ll} g_{jm} g^{mm} &= -h_{im} h_{il} \delta_j^l \delta_j^m g^{ii} g^{jj} = -h_{ij}^2 g^{ii} g^{jj} = -|h|_g^2 \\ -h_{im} h_{jm} g^{ll} g^{mm} g_{jl} g^{jj} g_{il} g^{ii} &= -h_{im} h_{jm} \delta_l^j \delta_l^i g^{ll} g^{mm} = -h_{lm}^2 g^{ll} g^{mm} = -|h|_g^2 \end{aligned} \right\} (n-2)|h|_g^2 + [\text{tr}_g(h)]^2 \quad (4.3)$$

Para los demás 3 términos se tienen los mismos cuatro sumandos, pues son permutación cíclica de la secuencia $\{i, j, l, m\}$, con lo que se concluye el resultado.

Proposición 4.3. (*Inversa de tr_g por la derecha*) Dado (V, g) un espacio n -dimensional con producto escalar verificando $n \geq 3$. La aplicación lineal

$$G: \Sigma^2(V^*) \rightarrow \mathcal{R}(V^*)$$

$$h \mapsto G(h) = \frac{1}{n-2} \left(h - \frac{\text{tr}_g h}{2(n-1)} g \right) \otimes g$$

es una **inversa por la derecha** de tr_g y además su imagen es complemento ortogonal de $\text{Ker} [\text{tr}_g]$ en $\mathcal{R}(V^*)$.

Demostración. Es fácilmente verificable que $\text{tr}_g(G(h)) = h$, $\forall h \in \Sigma^2(V^*)$. Consecuentemente, se tiene que G es biyectiva y por lo tanto la dimensión de $\text{Im}[G]$ es la codimensión de $\text{Ker} [\text{tr}_g]$, con lo que será la dimensión de su complemento ortogonal, $\text{Ker} [\text{tr}_g]^\perp$. Por otra parte, todo elemento T de $\mathcal{R}(V^*)$ con traza nula, $\text{tr}_g(T) = 0$, verifica que $\langle T, G(h) \rangle = 0 \forall h \in \Sigma^2(V^*)$ en base a (e), con lo que se sigue que $\text{Im}[G] \subset \text{Ker} [\text{tr}_g]^\perp$, ambos de igual dimensión luego $\text{Im}[G] = \text{Ker} [\text{tr}_g]^\perp$. \square

4.3. Tensores de Schouten y Weyl

En base a la definición anterior, podemos construir los tensores de Schouten y Weyl basándonos en la definición de la inversa de G . Para ello, pasamos ahora a pensar en una variedad (pseudo)-Riemanniana (M, g) .

Definición 4.4 (Tensor de Schouten). El **tensor de Schouten**, que denotaremos por P , será el siguiente $(0, 2)$ -tensor simétrico

$$P = \frac{1}{n-2} \left(Rc - \frac{S}{2(n-1)} g \right) \quad (4.4)$$

El tensor de Schouten no es más que la primera componente de la imagen del tensor de Ricci Rc por la inversa de G . Por otra parte, el candidato a inversa para el tensor curvatura será el que se corresponderá con la definición del tensor de Weyl.

Definición 4.5 (Tensor de Weyl). El **tensor de Weyl**, W , será el siguiente $(0, 4)$ -tensor algebraico de curvatura

$$W = Rm - P \otimes g = Rm - \frac{1}{n-2} Rc \otimes g + \frac{S}{2(n-1)} g \otimes g = Rm - G(Rc) = Rm - G(\text{tr}_g(Rm)) \quad (4.5)$$

Ante la definición del tensor de Weyl, resulta evidente que cuando G sea inversa también por la izquierda; es decir, un isomorfismo tendremos que el tensor de Weyl será nulo y podremos reconstruir el tensor de curvatura tan solo con el tensor de Ricci y la métrica.

Una propiedad relevante que verificará el tensor de Weyl será que posee traza nula, lo que permitirá dar una descomposición ortogonal para el tensor curvatura de Riemann.

Proposición 4.6 (Traza nula del W). *Para toda variedad (pseudo)-Riemanniana (M, g) de dimensión $n \geq 3$, la traza del tensor de Weyl, $\text{tr}_g W$ es nula. Además, $Rm = W + P \otimes g$ es la descomposición ortogonal de Rm correspondiente a $\mathcal{R}(V^*) = \text{Ker} [\text{tr}_g] \oplus \text{Ker} [\text{tr}_g]^\perp$.*

$$\text{tr}_g(W) = \text{tr}_g(Rm) - \text{tr}_g(G(Rc)) = 0$$

Demostración. En base a la proposición anterior, como $\text{tr}_g W = 0$ y $G(Rc) = P \otimes g$ verificando que $\text{tr}_g(G(Rc)) = Rc \neq 0$, se tiene la descomposición en partes ortogonales mencionada. \square

En base a los resultados anteriores, podremos caracterizar variedades (pseudo)-Riemannianas de hasta dimensión 3 como sigue.

Corolario 4.7. *Dado un espacio vectorial real V de dimensión n :*

- $n = 0, 1$; entonces, $\mathcal{R}(V^*) = \{0\}$
- $n = 2$; entonces, $\dim \mathcal{R}(V^*) = 1$ y $\mathcal{R}(V^*) = \langle g \otimes g \rangle$.
- $n = 3$; entonces, $\dim \mathcal{R}(V^*) = 6$ y $G : \Sigma^2(V^*) \rightarrow \mathcal{R}(V^*)$ es un isomorfismo.

Demostración. Los resultados dimensionales se siguen de la expresión en la proposición. Por otra parte, $g \otimes g$ es un generador de $\mathcal{R}(V^*)$ dado que $\text{tr}_g g \otimes g = 2g \neq 0$. Para dimensión 3, dado que G ha sido construida tal que es una inversa (por la derecha) de tr_g ; i.e., $\text{tr}_g \circ G = \text{id}_{\Sigma^2(V^*)}$ se sigue la inyectividad de G . Por otra parte, como $\dim \mathcal{R}(V^*) = \dim \Sigma^2(V^*) (= 6)$, se sigue que G es sobreyectiva. \square

En una variedad de dimensión 3 podremos recuperar el tensor de curvatura Rm a partir del tensor de Ricci Rc y de la métrica g mientras que en dimensiones inferiores no tendremos definido el tensor de Weyl o el de Schouten, pero tendremos un resultado similar.

Proposición 4.8 (Tensores de Weyl y curvatura en dimensión 3). *Sea (M, g) una variedad de Riemann 3-dimensional; entonces, el tensor de Weyl W es nulo y además*

$$Rm = P \otimes g = Rc \otimes g - \frac{S}{4} g \otimes g \quad (4.6)$$

Demostración. Por el corolario anterior sabemos que G es isomorfismo y por ser $\text{tr}_g \circ G = \text{id}_{\Sigma^2(V^*)}$, se tiene que tr_g es un isomorfismo. Ahora bien, como la traza de W es nula en base a la proposición 4.6, se sigue que necesariamente W es nulo al ser G isomorfismo, y consecuentemente se tiene la igualdad anterior. \square

Pese a que en dimensiones inferiores (2 o 1), la definición de los tensores de Weyl y Schouten carecen de sentido, podemos caracterizar el tensor de curvatura de forma completa como sigue

Corolario 4.9 (Tensor de curvatura en dimensión 2). *Para toda variedad (pseudo)-Riemanniana (M, g) 2-dimensional se sigue que la curvatura escalar S determina completamente la expresión de los tensores de Riemann y Ricci.*

$$Rm = \frac{S}{4}g \otimes g \quad Rc = \frac{S}{2}g$$

Demostración. Por el corolario 4.7, sabemos que $\{g \otimes g\}$ genera todo $\mathcal{R}(V^*)$, luego existe una función escalar tal que $Rm = fg \otimes g$. Tomando trazas iterativamente a ambos lados de la expresión anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{tr}_g Rm &= \text{tr}_g fg \otimes g \iff Rc = 2fg \\ \text{tr}_g Rc &= \text{tr}_g 2fg \iff S = 2f \text{tr}_g g = 4f \iff S = \frac{1}{4}f, \end{aligned}$$

de donde se siguen las expresiones dadas. \square

Observación 4.10. En dimensión 2 por lo tanto, donde hemos visto que falla el Lema de Schur, las métricas de Einstein son todas en las que la curvatura escalar es constante.

De forma similar a lo realizado en la proposición 4.6, habíamos visto en (3.17) que se podía descomponer el tensor de Ricci en dos partes ortogonales con traza nula y no nula.

$$Rc = \overset{\circ}{Rc} + \frac{1}{n}Sg$$

Utilizando este hecho es posible proporcionar una descomposición en partes de traza no nula y nula, cuando estamos en una variedad de dimensión superior a 3.

Proposición 4.11 (Descomposición ortogonal del tensor de Ricci). *El tensor curvatura $(0, 4)$ admite la siguiente descomposición en dimensión ≥ 3 :*

$$\begin{aligned} Rm &= W + \frac{1}{n-2} \overset{\circ}{Rc} \otimes g + \frac{1}{2n(n-1)} Sg \otimes g \\ |Rm|_g^2 &= |W|_g^2 + \frac{1}{(n-2)^2} \left| \overset{\circ}{Rc} \otimes g \right|_g^2 + \frac{1}{4n^2(n-1)^2} |Sg \otimes g|_g^2 \\ &= |W|_g^2 + \frac{4}{n-2} \left| \overset{\circ}{Rc} \right|_g^2 + \frac{2}{n(n-1)} S^2. \end{aligned}$$

Demostración. Sustituyendo $Rc = \overset{\circ}{Rc} + \frac{1}{n}Sg$ en la expresión (4.6), se tiene trivialmente la expresión mostrada. El hecho de que es una descomposición ortogonal se debe a la cuarta propiedad del producto de Kulkarni-Nomizu mostrada en 4.2, pues al tener tanto W como $\overset{\circ}{Rc}$ traza nula, son automáticamente ortogonales por g . \square

Capítulo 5

Métricas localmente conformes

Introduciremos ahora la noción de métricas conformes, que nos determinará una partición del conjunto de todas las métricas que admite una variedad (pseudo-)Riemanniana. En otras palabras, la conformidad entre métricas permite definir una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las posibles métricas que admite una variedad (pseudo-)Riemanniana, siendo sus clases de equivalencia lo que se entiende por estructura conforme.

Dicha relación de equivalencia viene caracterizada por la siguiente definición

Definición 5.1 (Métricas Conformes). Dadas dos métricas (pseudo-)Riemannianas g y \tilde{g} de M ; se dicen **conformes** $g \sim \tilde{g}$ cuando $\exists f \in \mathfrak{F}(M)$ tal que⁹ $\tilde{g} = e^{2f}g$.

Cuando la anterior relación se tenga de forma local y no necesariamente global se hablará de **conformidad local**.

Definición 5.2 (Variedades conformemente equivalentes). Dos variedades (pseudo-)Riemannianas (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) se dicen **conformemente equivalentes** si existe un difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ conforme; es decir, tal que el *pullback* de la métrica \tilde{g} es conforme a g ; i.e. $\varphi^*\tilde{g} = fg$ con $f \in \mathfrak{F}(M)$ positiva.

Podemos ahora introducir la noción de conformidad llana, de carácter más débil que ser plana y que localmente caracterizaremos en este trabajo.

Definición 5.3 (Variedad (localmente) conformemente llana). Una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) se dice **localmente conformemente llana** cuando para todo punto existen un entorno y un difeomorfismo conforme φ con un abierto del espacio (pseudo-)Euclídeo $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$.

En el caso de que dicho difeomorfismo sea global y definido sobre toda la variedad se dirá que la variedad es (globalmente) conformemente llana.

⁹Notar que la definición dada de métricas conformes es equivalente a pedir que $\tilde{g} = hg$ con $h \in \mathfrak{F}(M)$ positiva.

Es relevante pararse a mencionar que el caso global y local son altamente diferentes. Uno de los ejemplos más ilustrativos y simples es considerar la esfera \mathbb{S}^n , que no es conformemente llana dado que sino sería homeomorfa a \mathbb{R}^n por el Teorema de Hadamard [6], que establece que toda variedad Riemanniana de curvatura seccional no positiva simplemente conexa y completa es difeomorfa a \mathbb{R}^n . Consecuentemente, \mathbb{S}^n no admite globalmente ninguna métrica conformemente llana.

Sin embargo, basta con considerar sacar el polo norte de la esfera $\mathbb{S}^n \setminus \{\text{PN}\}$ para tener que es globalmente conformemente llana pues es bien conocido que es homeomorfa a \mathbb{R}^n en este caso.

Por otra parte, tanto \mathbb{S}^n como $\mathbb{S}^n \setminus \{\text{PN}\}$ además de ser localmente conformemente llanas (pues toda variedad diferenciable es localmente homeomorfa a \mathbb{R}^n), admiten localmente un difeomorfismo conforme con \mathbb{R}^n .

Nos restringiremos únicamente a la cuestión local, donde el tensor de Weyl (y el de Cotton) nos permitirán caracterizar localmente si la variedad es conformemente llana como veremos en este y el siguiente capítulo; aunque, esto nada tenga que ver con si globalmente la variedad admite métricas conformes planas.

Comenzaremos viendo cómo se relacionan los tensores curvatura entre dos métricas conformes. En particular, consideraremos la conexión de Levi-Civita y veremos cómo cambia al considerar dos métricas g y $\tilde{g} = e^{2f}g$ para $f \in \mathfrak{F}(M)$.

5.1. Transformación conforme de la conexión y de objetos tensoriales relacionados con la curvatura

De ahora en lo que sigue, sobre nuestra variedad (M, g) consideraremos **coordenadas normales** centradas en un punto $q \in M$, con lo que aprovecharemos el carácter nulo de los símbolos de Christoffel para simplificar. Sin embargo, en cuanto al tensor métrico, no utilizaremos su expresión simplificada ya que no queremos distinguir entre el caso pseudo-Riemanniano y el Riemanniano a efectos de transformaciones localmente conformes.

Consecuentemente, la expresión del tensor de Riemann en coordenadas se simplifica notablemente.

$$R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m = g_{lm} \left\{ \partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^m - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^m \right\} = g_{lm} \left\{ \partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m \right\}$$

Partiendo de la expresión en coordenadas locales de los Símbolos de Christoffel veamos la relación entre los coeficientes de ambas conexiones de Levi-Civita; $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ y Γ_{ij}^k .

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} (\partial_i \tilde{g}_{jl} + \partial_j \tilde{g}_{il} - \partial_l \tilde{g}_{ij}) = \frac{1}{2} e^{-2f} g^{kl} \left\{ \partial_i [e^{2f} g_{jl}] + \partial_j [e^{2f} g_{il}] - \partial_l [e^{2f} g_{ij}] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}g^{kl} \{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \} + \frac{1}{2}e^{-2f} g^{kl} \{ 2e^{2f} g_{jl} \partial_i f + 2e^{2f} g_{il} \partial_j f - 2e^{2f} g_{ij} \partial_l f \} = \\
 &= \Gamma_{ij}^k + \partial_i f \delta_j^k + \partial_j f \delta_i^k - g^{kl} \partial_l f g_{ij} = \Gamma_{ij}^k + f_{;i} \delta_j^k + f_{;j} \delta_i^k - g^{kl} f_{;l} g_{ij}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en base a la expresión obtenida, se sigue que las conexiones están relacionadas como sigue

$$\begin{aligned}
 \tilde{\nabla}_X Y &= \{ X^j Y^i \tilde{\Gamma}_{ij}^k + X^j \partial_j Y^k \} \partial_k = \\
 &= \{ X^j Y^i \Gamma_{ij}^k + X^j \partial_j Y^k \} \partial_k + \{ X^j Y^i \partial_i f \delta_j^k + X^j Y^i \partial_j f \delta_i^k - X^j Y^i g^{kl} \partial_l f g_{ij} \} \partial_k = \\
 &= \nabla_X Y + \{ Y^i \partial_i f X^k + X^j \partial_j f Y^k - g_{ij} X^j Y^i [\text{grad } f]^k \} \partial_k = \\
 &= \nabla_X Y + (Yf)X + (Xf)Y - \langle X, Y \rangle_g \text{grad } f
 \end{aligned}$$

Ahora que tenemos la expresión de cómo transforma la conexión al realizar un cambio sobre la métrica podemos pasar a ver cómo transforma el tensor de curvatura $Rm = R_{ijkl} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j \otimes \varepsilon^k \otimes \varepsilon^l$ y sus respectivas contracciones.

Teorema 5.4 (Transformación Conforme de la Curvatura). *Dada una métrica (pseudo-)Riemanniana g en una variedad n -dimensional M . Dada $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $\tilde{g} = e^{2f} g$, una métrica conforme; la expresión de los tensores curvatura de \tilde{g} están relacionados con los de g por las siguientes expresiones.*

$$\tilde{Rm} = e^{2f} \left\{ Rm - [\nabla^2 f] \otimes g + [df \otimes df] \otimes g - \frac{1}{2} |df|_g^2 [g \otimes g] \right\}, \quad (5.1)$$

$$\tilde{Rc} = Rc + (n-2) \left\{ [df \otimes df] - [\nabla^2 f] \right\} - \left\{ \Delta f + (n-2) |df|_g^2 \right\} g, \quad (5.2)$$

$$\tilde{S} = e^{-2f} \left\{ S + (n-1)(n-2) |df|_g^2 - 2(n-1) \Delta f \right\}, \quad (5.3)$$

donde $\Delta f = \text{div}(\text{grad } f)$ es el Laplaciano de f . Además, para $n \geq 3$, los tensores de Schouten y Weyl toman la siguiente forma en función de g :

$$\tilde{P} = P + [df \otimes df] - [\nabla^2 f] - \frac{1}{2} |df|_g^2 g, \quad (5.4)$$

$$\tilde{W} = e^{2f} W. \quad (5.5)$$

Cabe destacar que para el caso pseudo-Riemanniano $|df|_g$ debe interpretarse como $\langle df, df \rangle_g$.

Demostración. Comenzamos calculando las derivadas de los coeficientes de la conexión $\tilde{\nabla}$ en función de los de ∇ .

$$\begin{aligned}
 \partial_m \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \partial_m \Gamma_{ij}^k + \partial_m (\partial_i f) \delta_j^k + \partial_m (\partial_j f) \delta_i^k + \partial_m (g^{kl} \partial_l f) g_{ij} = \\
 &= \partial_m \Gamma_{ij}^k + f_{;im} \delta_j^k + f_{;jm} \delta_i^k - g^{kl} f_{;lm} g_{ij} - \underbrace{\partial_m (g^{kl}) f_{;l} g_{ij}}_{\nabla g=0} =
 \end{aligned}$$

$$= \partial_m \Gamma_{ij}^k + f_{;im} \delta_j^k + f_{;jm} \delta_i^k - g^{kl} f_{;lm} g_{ij}$$

Pasamos ahora a expresar el tensor de Riemann para la métrica \tilde{g} en función del de g . De ahora en adelante, tomaremos coordenadas locales centradas en un cierto punto $q \in M$, de modo que la expresión de la métrica y de los símbolos de Christoffel será notablemente más simple sobre dicho punto, $g_{ij}|_q = \delta_{ij}$ y $\Gamma_{ij}^k|_q = 0$. Sin embargo, para mantener la indistinción entre el carácter pseudo-Riemanniano obtaremos por únicamente considerar nulos los coeficientes de la conexión y trabajar en general con el tensor métrico.

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= \tilde{g}_{ml} \tilde{R}_{ijk}{}^m = e^{2f} g_{ml} \left\{ \overbrace{\partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^m - \partial_j \tilde{\Gamma}_{ik}^m}^{\text{A}} + \overbrace{\tilde{\Gamma}_{jk}^p \tilde{\Gamma}_{ip}^m - \tilde{\Gamma}_{ik}^p \tilde{\Gamma}_{jp}^m}^{\text{B}} \right\} = \\ &= e^{2f} \left\{ R_{ijkl} + f_{;ik} g_{jl} - f_{;jk} g_{il} - f_{;il} g_{jk} + f_{;jl} g_{ik} \right. \\ &\quad \left. + f_{;k} (f_{;j} g_{il} - f_{;i} g_{jl}) + f_{;l} (f_{;i} g_{jk} - f_{;j} g_{ik}) - g^{pr} f_{;r} f_{;p} (g_{il} g_{jk} - g_{jl} g_{ik}) \right\} = \\ &= e^{2f} \left\{ R_{ijkl} - \underbrace{[f_{;il} g_{jk} + f_{;jk} g_{il} - f_{;jl} g_{ik} - f_{;ik} g_{jl}]}_{([\nabla^2 f] \otimes g)_{ijkl}} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{[f_{;i} f_{;l} g_{jk} + f_{;j} f_{;k} g_{il} - f_{;j} f_{;l} g_{ik} - f_{;i} f_{;k} g_{jl}]}_{(df \otimes df) \otimes g}_{ijkl} - \frac{1}{2} \langle df, df \rangle_g \underbrace{2 (g_{il} g_{jk} - g_{jl} g_{ik})}_{(g \otimes g)_{ijkl}} \right\} \\ \widetilde{Rm} &= e^{2f} \left\{ Rm - [\nabla^2 f] \otimes g + [df \otimes df] \otimes g - \frac{1}{2} |df|_g^2 [g \otimes g] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A)} : g_{ml} &\left\{ \left[\partial_i \Gamma_{jk}^m + f_{;ji} \delta_k^m + f_{;ki} \delta_j^m - g^{mp} f_{;pi} g_{jk} \right] - \left[\partial_j \Gamma_{ik}^m + f_{;ij} \delta_k^m + f_{;kj} \delta_i^m - g^{mp} f_{;pj} g_{ik} \right] \right\} = \\ &= g_{ml} \left(\partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m \right) + g_{ml} (f_{;ji} - f_{;ij}) \delta_k^m + g_{ml} (f_{;ki} \delta_j^m - f_{;kj} \delta_i^m) - g_{ml} g^{mp} (f_{;pi} g_{jk} - f_{;pj} g_{ik}) = \\ &= R_{ijkl} + \cancel{(f_{;ji} - f_{;ij})} \delta_k^m + f_{;ki} g_{jl} - f_{;kj} g_{il} - f_{;li} g_{jk} + f_{;lj} g_{ik} = \\ &= R_{ijkl} + f_{;ki} g_{jl} - f_{;kj} g_{il} - f_{;li} g_{jk} + f_{;lj} g_{ik} \stackrel{f_{;ab}=f_{;ba}}{=} R_{ijkl} + f_{;ik} g_{jl} - f_{;jk} g_{il} - f_{;il} g_{jk} + f_{;jl} g_{ik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B)} : g_{ml} &\left\{ \left[\Gamma_{jk}^p + f_{;j} \delta_k^p + f_{;k} \delta_j^p - g^{pr} f_{;r} g_{jk} \right] \cdot \left[\Gamma_{ip}^m + f_{;i} \delta_p^m + f_{;p} \delta_i^m - g^{ms} f_{;s} g_{ip} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[\Gamma_{ik}^p + f_{;i} \delta_k^p + f_{;k} \delta_i^p - g^{pr} f_{;r} g_{ik} \right] \cdot \left[\Gamma_{jp}^m + f_{;j} \delta_p^m + f_{;p} \delta_j^m - g^{ms} f_{;s} g_{jp} \right] \right\} = \\ &= g_{ml} \left\{ \delta_k^p \delta_p^m \left(\cancel{f_{;j} f_{;i} - f_{;i} f_{;j}} \right) + \delta_k^p f_{;p} (f_{;j} \delta_i^m - f_{;i} \delta_j^m) + f_{;k} \delta_p^m (f_{;i} \delta_j^p - f_{;j} \delta_i^p) + f_{;k} f_{;p} (\delta_j^p \delta_i^m - \delta_i^p \delta_j^m) \right\} \\ &\quad - g_{ml} g^{pr} f_{;r} \left[\delta_p^m (f_{;i} g_{jk} - f_{;j} g_{ik}) + f_{;p} (\delta_i^m g_{jk} - \delta_j^m g_{ik}) \right] \\ &\quad - g_{ml} g^{ms} f_{;s} \left[\delta_k^p (f_{;j} g_{ip} - f_{;i} g_{jp}) + f_{;k} \underbrace{(\delta_j^p g_{ip} - \delta_i^p g_{jp})}_{g_{ij}=g_{ji}} \right] + g_{ml} g^{pr} g^{ms} f_{;r} f_{;s} (g_{jk} g_{ip} - g_{ik} g_{jp}) = \\ &= \cancel{f_{;k} (f_{;j} g_{il} - f_{;i} g_{jl})} + \cancel{f_{;k} (f_{;i} g_{jl} - f_{;j} g_{il})} + f_{;k} (f_{;j} g_{il} - f_{;i} g_{jl}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - f_{;r} \delta_j^r (f_{;i} g_{jk} - f_{;j} g_{ik}) - g^{pr} f_{;r} f_{;p} (g_{il} g_{jk} - g_{jl} g_{ik}) \\
 & - f_{;s} \delta_i^s (f_{;j} g_{tk} - f_{;i} g_{jk}) - f_{;r} \delta_i^s f_{;s} (g_{jk} \delta_i^r - g_{ik} \delta_j^r) = \\
 & = f_{;k} (f_{;j} g_{il} - f_{;i} g_{jl}) - g^{pr} f_{;r} f_{;p} (g_{il} g_{jk} - g_{jl} g_{ik}) + f_{;i} (f_{;i} g_{jk} - f_{;j} g_{ik})
 \end{aligned}$$

Podemos ver ahora como se transforman las contracciones del tensor de Riemann

$$\begin{aligned}
 \widetilde{Rc} & = \text{tr}_{\tilde{g}} (\widetilde{Rm}) \stackrel{\text{tr}_{\tilde{g}}(\cdot) = e^{-2f} \text{tr}_g(\cdot)}{=} \underbrace{\text{tr}_g (Rm)}_{Rc} - \text{tr}_g \left([\nabla^2 f] \otimes g \right) + \text{tr}_g ([df \otimes df] \otimes g) - \frac{1}{2} |df|_g^2 \underbrace{\text{tr}_g (g \otimes g)}_{2(n-1)g} = \\
 & = Rc - (n-2) [\nabla^2 f] + \underbrace{\text{tr}_g (\nabla^2 f)}_{\Delta f} g + (n-2) [df \otimes df] + \underbrace{\text{tr}_g (df \otimes df)}_{|df|_g^2} - (n-1) |df|_g^2 g = \\
 & = Rc + (n-2) \left\{ [df \otimes df] - [\nabla^2 f] \right\} - \left\{ \Delta f + (n-2) |df|_g^2 \right\} g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widetilde{S} & = \text{tr}_{\tilde{g}} (\widetilde{Rc}) = e^{-2f} \left\{ \underbrace{\text{tr}_g (Rc)}_S + (n-2) \left[\underbrace{\text{tr}_g (df \otimes df)}_{|df|_g^2} - \underbrace{\text{tr}_g (\nabla^2 f)}_{\Delta f} \right] - \left[\Delta f + (n-2) |df|_g^2 \right] \underbrace{\text{tr}_g (g)}_n \right\} = \\
 & = e^{-2f} \left\{ S + (n-1)(n-2) |df|_g^2 - 2(n-1) \Delta f \right\}
 \end{aligned}$$

Ahora podemos obtener la relación de los tensores de Schouten P y Weyl W para $n \geq 3$.

$$\begin{aligned}
 \widetilde{P} & = \frac{1}{n-2} \left(\widetilde{Rc} - \frac{1}{2(n-1)} \widetilde{S} \tilde{g} \right) = \\
 & = \frac{1}{n-2} \left\{ \left[Rc + (n-2) \left\{ [df \otimes df] - [\nabla^2 f] \right\} - \left\{ \Delta f + (n-2) |df|_g^2 \right\} g \right] \right\} \\
 & \quad - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} e^{-2f} \left\{ S + (n-1)(n-2) |df|_g^2 - 2(n-1) \Delta f \right\} e^{2f} g = \\
 & = \frac{1}{n-2} \left(\underbrace{Rc - \frac{1}{2(n-1)} Sg}_P \right) + [df \otimes df] - [\nabla^2 f] - \frac{1}{2} |df|_g^2 g = \\
 & = P + [df \otimes df] - [\nabla^2 f] - \frac{1}{2} |df|_g^2 g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widetilde{W} & = \widetilde{Rm} - \widetilde{P} \otimes g = \\
 & = e^{2f} \left\{ Rm - [\nabla^2 f] \otimes g + [df \otimes df] \otimes g - \frac{1}{2} |df|_g^2 [g \otimes g] \right\} - \left\{ P + [df \otimes df] - [\nabla^2 f] - \frac{1}{2} |df|_g^2 g \right\} \otimes g \\
 & = e^{2f} \{ Rm - P \otimes g \} = e^{2f} W
 \end{aligned}$$

□

Estamos en condiciones ahora de enunciar uno de los resultados centrales a abordar en este trabajo: la interpretación geométrica que tiene el tensor de Weyl, que permite caracterizar las variedades (pseudo-)Riemannianas localmente conformemente llanas; en las que cada punto tiene un entorno conformemente equivalente a un subespacio (pseudo-)Euclídeo.

Corolario 5.5. *Dada una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) de dimensión $n \geq 3$. Si g es localmente conformemente llana; entonces el tensor de Weyl W es idénticamente nulo.*

Demostración. Por ser (M, g) localmente conformemente llana, para cada punto $p \in M$ existe un entorno U tal que la carta local $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ induce por *pullback* una métrica plana (pseudo-)Riemanniana de la forma $\tilde{g} = e^{2f}g$ para cierta $f \in \mathfrak{F}(M)$. Consecuentemente \tilde{g} presenta tensor de Weyl \tilde{W} nulo, con lo que en base al teorema 5.4 se sigue que W será necesariamente nulo. \square

Tenemos así demostrada una condición necesaria para que una variedad de dimensión igual o superior a 3 sea localmente conforme llana. Esta condición será suficiente cuando estemos en dimensión superior o igual a 4 como veremos en el Teorema de Weyl-Schouten. Sin embargo esto no será así para dimensión 3, pues ya hemos demostrado en la proposición 4.8 que W siempre es nulo para este caso, independientemente de si la variedad es localmente conformemente llana.

5.2. Tensor de Cotton

Para abordar el caso particular de dimensión 3 introduciremos el conocido como **tensor de Cotton** C , que no es más que la derivada covariante exterior negativa del tensor de Schouten.

Definición 5.6 (Tensor de Cotton). Se define el tensor de Cotton como el campo tensorial $(0, 3)$ definido por la derivada exterior de tensor de Schouten

$$C = -DP \quad C_{ijk} = P_{ij;k} - P_{ik;j}$$

Veremos ahora como se relaciona el tensor de Cotton con el tensor de Weyl

Proposición 5.7 (Relación entre W y C). *Dada (M, g) de dimensión $n \geq 3$, sean W y C los tensores de Weyl y Cotton, respectivamente. Entonces,*

$$\mathrm{tr}_g(\nabla W) = (n-3)C,$$

donde la traza tr_g se toma sobre el primer y último índice del $(0, 5)$ -tensor $\nabla W \in \mathfrak{T}^{(0,5)}(M)$.

Demostración. Expresando la traza en componentes, se sigue que

$$\begin{aligned} [\mathrm{tr}_g(\nabla W)]_{jkl} &= g^{im} \nabla_m (W_{ijkl}) = g^{im} W_{ijkl;m} = W_{ijkl}{}^i = [Rm - P \otimes g]_{ijkl}{}^i \\ &= \underbrace{R_{ijkl}{}^i}_{R_{jl;k} - R_{jk;l}} - [P_{il}{}^i g_{jk} + \underbrace{P_{jk}{}^i g_{il}}_{P_{jk;l}} - P_{ik}{}^i g_{jl} - \underbrace{P_{jl}{}^i g_{ik}}_{P_{jl;k}}] = \\ &= [R_{jl;k} - P_{il}{}^i g_{jk}] - [R_{jk;l} - P_{ik}{}^i g_{jl}] + [P_{jl;k} - P_{jk;l}] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\left[R_{jl;^j} - \frac{1}{2(n-1)} S_{;l} \right]}_{(n-2)P_{jl;^j}} g_{jk} - \underbrace{\left[R_{jk;^j} - \frac{1}{2(n-1)} S_{;k} \right]}_{(n-2)P_{jk;^j}} g_{jl} + [P_{jl;k} - P_{jk;l}] = \\
&= (n-2) \left[\underbrace{P_{jl;^j} g_{jk}}_{P_{jl;k}} - \underbrace{P_{jk;^j} g_{jl}}_{P_{jk;l}} \right] + [P_{jl;k} - P_{jk;l}] = (n-3) [P_{jl;k} - P_{jk;l}] = \\
&= (n-3) C_{jkl},
\end{aligned}$$

de donde $\text{tr}_g(\nabla W) = (n-3)C$.

Notar que se ha utilizado las siguientes observaciones en los pasos indicados con llaves:

- La 1^a Identidad de Bianchi contraída (proposición 3.11): $R_{ijkl;^i} = R_{jl;k} - R_{jk;l}$.
- Conmutatividad de la métrica g con la derivada covariante (por haber compatibilidad métrica en la Conexión de Levi-Civita $\nabla g = 0$); e.g.:

$$\text{Sobre la 1}^{\text{a}} \text{ componente de } [P \otimes g]_{ijkl;^i} : \quad [P_{jk}g_{il}]_{;^i} = P_{jk;^i} g_{il} + P_{jk}g_{il;^i} = P_{jk;l}$$

- La 2^a Identidad de Bianchi contraída ($R_{il;^i} = \frac{1}{2}S_{;l}$) (proposición 3.11), sobre la definición del tensor de Schouten:

$$P_{il;^i} = \frac{1}{n-2} \left[\underbrace{R_{il;^i}}_{\frac{1}{2}S_{;l}} - \frac{1}{2(n-1)} \underbrace{S_{;l} g_{il}}_{S_{;l}} \right] = \frac{1}{2(n-2)} S_{;l} \left[1 - \frac{1}{n-1} \right] = \frac{1}{2(n-1)} S_{;l}$$

□

Como consecuencia de la identidad anterior, se sigue automáticamente el siguiente resultado:

Corolario 5.8. *Para una variedad (pseudo-)Riemanniana de dimensión $n \geq 4$ que tenga tensor de Weyl W idénticamente nulo, su tensor de Cotton C también será idénticamente nulo.*

Demostración.

$$W \equiv 0 \implies 0 \equiv \text{tr}_g(\nabla W) = \underbrace{(n-3)}_{\neq 0} C \implies C \equiv 0$$

□

Observación 5.9. Notar que el corolario 5.8 no es necesariamente cierto si estamos en dimensión 3. Es sumamente fácil construir un contraejemplo, escogiendo casi una métrica al azar como podría ser

$$g(x, y, z) = dx \otimes dx + dy \otimes dy + xdz \otimes dz,$$

en una variedad de Riemann 3-dimensional M es suficiente. Se puede computar su tensor de Weyl W que resulta idénticamente nulo y su tensor de Cotton

$$C(x, y, z) = \frac{1}{4x^3} (dy \otimes dx \otimes dy - dy \otimes dy \otimes dx) + \frac{1}{4x^2} (dz \otimes dz \otimes dx - dz \otimes dx \otimes dz),$$

que hemos calculado a través del software Maple con el paquete DifferentialGeometry.

Veamos ahora cómo se transforma el tensor de Cotton ante un cambio conforme de métrica

Teorema 5.10 (Transformación Conforme del Tensor de Cotton). *Dada una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) y dos métricas conformes \tilde{g}, g , se tiene que el tensor de Cotton correspondiente a ambas métricas está relacionado como sigue*

$$\tilde{C} = C + W$$

Demostración. Escogeremos para la métrica g un sistema de coordenadas normal centrado en un cierto punto $q \in M$ donde los coeficientes de la conexión se anularán y la métrica será canónica.

Empezamos escribiendo el desarrollo de la derivada covariante del tensor de Schouten $\tilde{P}_{ij;k}$ y buscaremos (conjuntos de) términos que sean simétricos con respecto al intercambio de índices $j \leftrightarrow k$, que resaltaremos con diferentes colores¹⁰.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{ij;k} &= \partial_k \tilde{P}_{ij} - \tilde{\Gamma}_{ki}^m \tilde{P}_{mj} - \tilde{\Gamma}_{kj}^m \tilde{P}_{im} = \\ &= \partial_k \left[P_{ij} - (f_{;ij} - \Gamma_{ij}^l f_{;l}) + f_{;i} f_{;j} - \frac{1}{2} (g^{ml} f_{;m} f_{;l}) g_{ij} \right] \\ &\quad - \left\{ \left[\overset{0}{\Gamma_{ki}^m} + f_{;k} \delta_i^m + f_{;i} \delta_k^m - g^{ml} f_{;l} g_{ki} \right] \cdot \left[P_{mj} - f_{;mj} + f_{;m} f_{;j} - \frac{1}{2} (g^{ml} f_{;m} f_{;l}) g_{mj} \right] \right\} = \\ &= \left[\partial_k P_{ij} - \color{red}{f_{;ijk}} + \partial_k (\Gamma_{ij}^l f_{;l}) + \color{blue}{f_{;ik} f_{;j}} + \color{red}{f_{;i} f_{;jk}} - \underbrace{\frac{1}{2} g^{ml} (f_{;mk} f_{;l} + f_{;m} f_{;lk})}_{g^{ml} f_{;mk} f_{;l}} g_{ij} \right] \\ &\quad - \left\{ \left[\color{blue}{f_{;k} P_{ij}} - \color{blue}{f_{;k} f_{;ij}} + \color{red}{f_{;k} f_{;i} f_{;j}} - \color{purple}{f_{;k} \frac{1}{2} (g^{ml} f_{;m} f_{;l}) g_{ij}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\color{red}{f_{;i} (P_{kj} - f_{;kj} + f_{;k} f_{;j}) - \frac{1}{2} (g^{ml} f_{;m} f_{;l}) g_{kj} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[g^{ml} f_{;l} g_{ki} P_{mj} - \color{green}{g^{ml} f_{;mj} f_{;l} g_{ik}} + (g^{ml} f_{;m} f_{;l}) f_{;j} g_{ik} - \frac{1}{2} \underbrace{(g^{rs} f_{;r} f_{;s})}_{(r,s) \equiv (m,l):} g_{mj} \underbrace{g^{ml} f_{;l} g_{ik}}_{\delta_j^l f_{;l} = f_{;j}} \right] \right\} - \tilde{\Gamma}_{kj}^m \tilde{P}_{im} = \\ &\quad \underbrace{\frac{1}{2} (g^{ml} f_{;m} f_{;l}) f_{;j} g_{ik}} \\ &= \partial_k P_{ij} + \partial_k (\Gamma_{ij}^l f_{;l}) - f_{;k} P_{ij} + g^{ml} f_{;l} g_{ik} P_{mj} \\ &\quad + \left\{ \color{red}{f_{;i} f_{;jk}} - \color{red}{f_{;ijk}} - \color{red}{f_{;i} f_{;j} f_{;k}} - \color{red}{f_{;i} (P_{kj} - f_{;kj} + f_{;k} f_{;j}) - \frac{1}{2} (g^{ml} f_{;m} f_{;l}) g_{kj}} \right\} - \tilde{\Gamma}_{kj}^m \tilde{P}_{im} \end{aligned}$$

¹⁰El color rojo indica los términos que directamente contienen a ambos índices j, k ; mientras que los demás colores: azul, verde y violeta denotan grupos de términos que en conjunto son simétricos en j, k y serán nulos al evaluar la combinación antisimetrizada $2P_{i\{j;k\}} \equiv P_{ij;k} - P_{ik;j}$.

$$+ \left\{ f_{;ik} f_{;j} + f_{;ij} f_{;k} \right\} - \left\{ g^{ml} f_{;mk} f_{;l} g_{ij} + g^{ml} f_{;mj} f_{;l} g_{ik} \right\} + \left\{ \frac{1}{2} \left(g^{ml} f_{;m} f_{;l} \right) [f_{;j} g_{ik} + f_{;k} g_{ij}] \right\}$$

Consecuentemente, todos los términos entre llaves coloreados se anularán al realizar la combinación antisimetrizada $\tilde{P}_{ij;k} - \tilde{P}_{ik;j}$. Adicionalmente, el término que aparece con un símbolo de Christoffel es no nulo porque las derivadas del mismo no lo son aunque este sea nulo en el punto en el que centramos las coordenadas normales.

Calculando ahora la expresión del tensor de Cotton \tilde{C}

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijk} &= \tilde{P}_{ij;k} - \tilde{P}_{ik;j} = \left[\partial_k P_{ij} + \partial_k \left(\Gamma_{ij}^l f_{;l} \right) - \underbrace{f_{;k}}_{g_{mk} f_{;m}^m} P_{ij} + \underbrace{g^{ml} f_{;l}}_{f_{;m}^m} g_{ik} P_{mj} \right] \\ &\quad - \left[\partial_j P_{ik} + \partial_j \left(\Gamma_{ik}^l f_{;l} \right) - \underbrace{f_{;j}}_{g_{mj} f_{;m}^m} P_{ik} + \underbrace{g^{ml} f_{;l}}_{f_{;m}^m} g_{ij} P_{mk} \right] = \\ &= \left[\partial_k P_{ij} - \partial_j P_{ik} \right] + \underbrace{\left[\partial_k \left(\Gamma_{ij}^l g_{ml} f_{;m}^m \right) - \partial_j \left(\Gamma_{ik}^l g_{ml} f_{;m}^m \right) \right]}_{\textcircled{A} : R_{mijk} (\text{grad } f)^m} \\ &\quad - \underbrace{f_{;m}^m}_{(\text{grad } f)^m} \underbrace{\left[P_{ij} g_{mk} + P_{mk} g_{ij} - P_{ik} g_{mj} - P_{mj} g_{ik} \right]}_{[P \otimes g]_{imkj} = [P \otimes g]_{mijk}} = \\ &= \underbrace{P_{ij;k} - P_{ik;j}}_{C_{ijk}} + \underbrace{\left(R_{mijk} - [P \otimes g]_{mijk} \right)}_{W_{mijk}} (\text{grad } f)^m = \\ &= C_{ijk} + W_{mijk} (\text{grad } f)^m = C_{ijk} + W^m_{ijk} f_{;m} \end{aligned}$$

Obsérvese que los términos dependientes en las derivadas de los símbolos de Christoffel dan lugar al tensor curvatura.

$$\begin{aligned} \textcircled{A} : \left[\partial_k \left(\Gamma_{ij}^l f_{;l} \right) - \partial_j \left(\Gamma_{ik}^l f_{;l} \right) \right] &= \left[\partial_k \left(\Gamma_{ij}^l g_{ml} f_{;m}^m \right) - \partial_j \left(\Gamma_{ik}^l g_{ml} f_{;m}^m \right) \right] = \\ &= \left[g_{ml} \left(\partial_k \Gamma_{ij}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l \right) f_{;m}^m + \left(\overset{0}{\cancel{\Gamma_{ij}^l f_{;lk}}} + \overset{0}{\cancel{\Gamma_{ik}^l f_{;lj}}} \right) \right] = \left[g_{ml} \left(\partial_k \Gamma_{ji}^l - \partial_j \Gamma_{ki}^l \right) f_{;m}^m \right] = \\ &= R_{kjim} f_{;m}^m = R_{mijk} (\text{grad } f)^m \end{aligned}$$

Obtenemos por lo tanto que $\tilde{C} = C + W$. □

Automáticamente, tenemos el siguiente corolario para dimensión 3:

Corolario 5.11 (Invarianza Conforme del Tensor de Cotton en dimensión 3). *Para una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) 3-dimensional su tensor de Cotton es un invariante conforme.*

Además, se tiene la siguiente condición necesaria para el caso de dimensión 3.

Corolario 5.12. *Si (M, g) es una variedad (pseudo-)Riemanniana localmente conformemente llana 3 dimensional, entonces el tensor de Cotton C de g es idénticamente nulo.*

Demostración. Por ser (M, g) localmente conformemente llana, para cualquier punto $p \in M$, existe un entorno U de p y una cierta $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $(U, \tilde{g} = e^{2f}g)$ es llana. Por ser dimensión 3 sabemos que el tensor de Weyl será idénticamente nulo en ambos casos $\widetilde{W} = W \equiv 0$. Además, los tensores de Cotton coincidirán en base a 5.11, con lo que $\widetilde{C} = C$. Por otra parte, se tiene por definición que $\widetilde{C}_{ijk} = \widetilde{P}_{ij;k} - \widetilde{P}_{ik;j}$, pero $\widetilde{P} \otimes \tilde{g} = \widetilde{Rm}$ con \tilde{g} no idénticamente nula. En (U, \tilde{g}) se tiene que el tensor de Riemann es idénticamente nulo \widetilde{Rm} , por ser llana, y por consiguiente, lo será también el de Schouten \widetilde{P} . Finalmente podemos concluir que al ser \widetilde{C} idénticamente nulo, C también lo será. \square

En este capítulo hemos demostrado que el carácter idénticamente nulo del tensor de Weyl para dimensiones superiores o iguales a 3 y del tensor de Cotton para dimensión 3, son condiciones necesarias para que una variedad sea localmente conformemente llana.

Capítulo 6

Conformidad local llana de métricas de Riemann en dimensión arbitraria

Abordaremos ahora una caracterización para la conformidad local conforme de toda variedad (pseudo-)Riemanniana de dimensión arbitraria finita.

6.1. Dimensión 1 y 2

Para el caso unidimensional toda variedad de Riemann es **plana**, con lo que en particular es conformemente llana.

En cuanto al caso de dimensión 2, toda variedad es también localmente conformemente llana. El problema se reduce a encontrar para todo punto un entorno $U \subset M$ y una función $f \in \mathfrak{F}(M)$ en el que $(U, e^{2f}g)$ sea una variedad plana. Esto se presenta habitualmente como probar la existencia de **coordenadas isotermas**, en las que la métrica es conforme a la Euclídea. Más información puede consultarse en [2] para ver la demostración en detalle.

6.2. Dimensiones superiores o iguales a 3

Hemos demostrado como el carácter idénticamente nulo de los tensores de Weyl (y Cotton) constituían condiciones necesarias para la conformidad local llana de variedades de dimensión superior (igual) a 3, respectivamente. En esta sección demostraremos que de hecho son también condiciones suficientes.

Previamente veremos el siguiente lema que nos permite garantizar la existencia de solución para un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden sobredeterminado.

Lema 6.1. Dada (M, g) una variedad (pseudo-)Riemanniana, y sea el **sistema sobredeterminado** de ecuaciones definido por $\nabla\xi = A(\xi)$, donde A es una aplicación lineal $\xi \in \mathfrak{T}^{(0,1)}(M) \rightarrow A(\xi) \in \sum^2 \left(\mathfrak{T}^{(0,2)}(M) \right)$ satisfaciendo la siguiente condición de compatibilidad:

- Para cada campo de covectores ξ , el campo $(0,3)$ -tensorial $\nabla(A(\xi))$ satisface la siguiente identidad

$$A(\xi)_{ij;k} - A(\xi)_{ik;j} = \xi_{i;jk} - \xi_{i;kj} = R^l_{jki}\xi_l, \tag{6.1}$$

al intercambiarse $A(\xi) \leftrightarrow \nabla\xi$.

Entonces, para cada $p \in M$ y cada $\eta \in [T_pM]^* \equiv \mathfrak{T}^{(0,1)}(M)|_p$, existe una solución diferenciable al sistema sobredeterminado $\nabla\xi = A(\xi)$ en un entorno de p en el que $\eta = \xi|_p$.

Demostración. Dado un punto $p \in M$ arbitrario consideramos un entorno del mismo U que leemos en coordenadas $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$. El sistema de ecuaciones sobredeterminado $\nabla\xi = A(\xi)$ que se plantea puede escribirse en coordenadas como sigue

$$\frac{\partial \xi_i(x)}{\partial x^j} = a_{ij}(x, \xi(x)); \text{ donde } a_{ij}(x, \xi(x)) = \Gamma^k_{ij}(x)\xi_k + A(\xi)_{ij}$$

Ahora bien, en base a un resultado de la teoría de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales sobredeterminados conocido como Teorema de Frobenius [5], se sigue un resultado que garantiza la existencia de solución en un entorno de p con $\xi|_p$ arbitrario (y en particular para cualquier $\eta \in T_p^*M$ que escojamos), siempre que se cumpla la siguiente condición de compatibilidad:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + a_{lk} \frac{\partial a_{ij}}{\partial \xi_l} = \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^j} + a_{lj} \frac{\partial a_{ik}}{\partial \xi_l}; \text{ para cada} \tag{6.2}$$

$$a_{ij} : \left(x^1, \dots, x^n; \xi_1(x^1, \dots, x^n), \dots, \xi_n(x^1, \dots, x^n) \right) \in U \times \mathbb{R}^n \mapsto a_{ij}(x, \xi(x)) \in \mathfrak{T}^{(0,2)}(M)$$

Usando la regla de la cadena sobre las funciones $a_{ij}(x, \xi(x))$, tras sustituir $a_{lk} = \frac{\partial \xi_l}{\partial x^k}$, esta condición de compatibilidad no pide otra cosa que las derivadas segundas cruzadas de ξ coincidan. En efecto, la expresión (6.2) puede ser simplificada para nuestro caso particular como sigue

$$\partial_k \partial_j \xi_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} \equiv \partial_j \partial_k \xi_i \tag{6.3}$$

Probaremos ahora que a partir de (6.1) se llega a esta otra condición sin más que realizar la sustitución $A(\xi) \leftrightarrow \nabla\xi$, que en coordenadas toma la forma $A(\xi)_{ij} \leftrightarrow \xi_{i;j}$. Comenzamos desarrollando $A(\xi)_{ij;k} = \xi_{i;jk}$:

$$\begin{aligned} A(\xi)_{ij;k} &= \xi_{i;jk} = \nabla_k \nabla_j \xi_i = \partial_k (\nabla_j \xi_i) - \Gamma^l_{kj} (\nabla_l \xi_i) - \Gamma^l_{ki} (\nabla_j \xi_l) = \\ &= \partial_k \partial_j \xi_i - \partial_k \Gamma^l_{ij} \xi_l - \Gamma^l_{ij} \partial_k \xi_l - \Gamma^l_{kj} \partial_l \xi_i + \Gamma^m_{kj} \Gamma^l_{mi} \xi_l - \Gamma^l_{ki} \partial_j \xi_l + \Gamma^m_{ki} \Gamma^l_{jm} \xi_l \end{aligned}$$

Ahora hay que destacar que como haremos $A(\xi)_{ij;k} - A(\xi)_{ik;j}$, tendremos que tener en cuenta que los términos que resulten simétricos ante el intercambio de $j \leftrightarrow k$ serán nulos (los términos en rojo son individualmente invariantes a este intercambio, y en azul lo son conjuntamente).

Comparando ahora ambos lados de la expresión (6.1)

$$\begin{aligned} A(\xi)_{ij;k} - A(\xi)_{ik;j} &= \xi_{i;jk} - \xi_{i;kj} = (\partial_k \partial_j - \partial_j \partial_k) \xi_i + \left(\partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_k \Gamma_{ij}^l \right) \xi_l + \left(\Gamma_{ki}^m \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{km}^l \right) \xi_l \\ R_{jki}{}^l \xi_l &= \left(\partial_j \Gamma_{ki}^l - \partial_k \Gamma_{ji}^l + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{km}^l \right) \xi_l, \end{aligned}$$

obtenemos que la condición de compatibilidad del enunciado es exactamente la condición que simplificamos (6.3) a partir de la original (6.2). Por lo tanto estamos bajo las hipótesis de este resultado, y podemos afirmar que existe para cada $p \in M$ y $\eta \in T_p^*M$ una solución diferenciable al sistema sobredeterminado $\nabla \xi = A(\xi)$ en un entorno de p en el que $\eta = \xi|_p$. \square

Una vez demostrado este resultado previo, podremos enunciar y probar el teorema de Weyl-Schouten, que nos aporta una caracterización para métricas localmente conformemente llanas en variedades Riemannianas y pseudo-Riemannianas de dimensión superior o igual a 3.

Teorema 6.2 (Teorema de Weyl-Schouten). *Dada una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) de dimensión $n \geq 3$:*

- *Si $n \geq 4$, entonces (M, g) es localmente conformemente llana si y solo si su tensor de Weyl W es idénticamente nulo.*
- *Si $n = 3$, entonces (M, g) es localmente conformemente llana si y solo si su tensor de Cotton C es idénticamente nulo.*

Demostración. La condición necesaria (implicación \implies) ya ha sido probada en los corolarios 5.5 y 5.12. Resta ver la condición suficiente.

Partimos de la hipótesis de que ambos tensores de Weyl y Cotton son idénticamente nulos para g y para las variedades de sendas dimensiones explicitadas. Además, para ambos casos los tensores de Cotton y Weyl serán también idénticamente nulos, respectivamente, en base al corolario 5.8 y a la proposición 4.8.

Por otra parte, sabemos que toda métrica conformemente llana $\tilde{g} = e^{2f}g$ con $f \in \mathfrak{F}(M)$ tendrá tensor de Weyl \widetilde{W} también idénticamente nulo en base al Teorema de Invarianza Conforme, y por tanto la expresión del tensor curvatura será $\widetilde{Rm} = \widetilde{P} \otimes \tilde{g}$.

Probaremos a continuación que la función f que define la métrica conforme \tilde{g} siempre puede escogerse tal que $\widetilde{P} \equiv 0$, y por tanto $\widetilde{Rm} \equiv 0$ y \tilde{g} es llana.

De la expresión del tensor de Schouten del Teorema de Invarianza Conforme (teorema 5.4), para que $\tilde{P} \equiv 0$, la función f deberá verificar que

$$P - \nabla^2 f + (df \otimes df) - \frac{1}{2} \langle df, fg \rangle_g^2 g = 0 \quad (6.4)$$

Reescribiremos la ecuación anterior en función de una 1-forma ξ que debemos identificar con la diferencial de f , df . De este modo, tendremos que resolver un sistema de n ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden sobredeterminado de la forma $\nabla(df) = A(df)$, siendo A la aplicación motivada por la expresión (6.4), consecuencia de imponer $\tilde{P} \equiv 0$ y que además está bajo las condiciones del lema anterior 6.1, como veremos a continuación.

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{T}^{(0,1)}(M) &\longrightarrow \sum^2 \left(\mathfrak{T}^{(0,2)}(M) \right) \\ \xi = \xi_i dx^i &\mapsto A(\xi) = (\xi \otimes \xi) - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g^2 g + P = \underbrace{\left(\xi_i \xi_j - \frac{1}{2} g^{kl} \xi_k \xi_l g_{ij} + P_{ij} \right)}_{A(\xi)_{ij}} [dx^i \otimes dx^j], \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde se han tomado coordenadas locales para la expresión en coordenadas de ξ y $A(\xi)$.

Por una parte, si ξ es solución al sistema $\nabla \xi = A(\xi)$ en un abierto de M , entonces $A(\xi)$ deberá satisfacer (6.1). En efecto, la identidad de Ricci, expresión (3.13) de la proposición 3.6, es precisamente esta condición para una 1-forma arbitraria, y en particular para ξ .

Por otra parte, el lema anterior 6.1 asegura que la condición de compatibilidad (6.1) es suficiente para garantizar la existencia de solución en un entorno de cada punto. Verifiquemos entonces que nuestra aplicación A verifica dicha condición (cambiando $\xi_{i;j} \leftrightarrow A(\xi)_{ij}$ siempre que sea necesario).

Comenzamos calculando $A(\xi)_{ij;k}$ a partir de la definición de A en (6.5).

$$A(\xi)_{ij;k} = \xi_{i;k} \xi_j + \xi_i \xi_{j;k} - \xi_{l;k} \xi^l g_{ij} + P_{ij;k},$$

donde hemos usado que $(\xi_l \xi^l)_{;k} = 2g_{lm} \xi_{l;k} \xi_m = 2\xi_{l;k} \xi^l$, en virtud de la simetría del tensor métrico g . Operando y realizando las sustituciones de $\nabla \xi \rightarrow A(\xi)$, tenemos:

$$\begin{aligned} A(\xi)_{ij;k} - A(\xi)_{ik;j} &= \xi_{i;k} \xi_j - \xi_{i;j} \xi_k + \xi_i \xi_{j;k} - \xi_i \xi_{k;j} - \xi_{l;k} \xi^l g_{ij} + \xi_{l;j} \xi^l g_{ik} + P_{ij;k} - P_{ik;j} = \\ &= A_{ik} \xi_j - A_{ij} \xi_k + \xi_i A_{jk} - \xi_i A_{kj} - A_{lk} \xi^l g_{ij} + A_{lj} \xi^l g_{ik} + C_{ij;k} = \\ &= \left(\xi_i \xi_k - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{ik} + P_{ik} \right) \xi_j - \left(\xi_i \xi_j - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{ij} + P_{ij} \right) \xi_k \\ &\quad + \cancel{\xi_i \left(\xi_j \xi_k - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{jk} + P_{jk} \right)} - \cancel{\xi_i \left(\xi_k \xi_j - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{kj} + P_{kj} \right)} \\ &\quad - \left(\xi_l \xi_k - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{lk} + P_{lk} \right) g_{ij} \xi^l + \left(\xi_l \xi_j - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{lj} + P_{lj} \right) g_{ik} \xi^l = \\ &= \xi_i \xi_k \xi_j - \xi_i \xi_j \xi_k - \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{ik} \xi_j + \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g g_{ij} \xi_k + (P_{ik} \xi_j - P_{ij} \xi_k) - \langle \xi, \xi \rangle_g g_{ij} \xi_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle \xi, \xi \rangle_g g_{ik} \xi_j + \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle_g \left(\underbrace{g_{lk} \xi^l}_{\xi_k} g_{ij} - \underbrace{g_{lj} \xi^l}_{\xi_j} g_{ik} \right) + (P_{lj} g_{ik} - P_{lk} g_{ij}) \xi^l + C_{ijk} = \\
& = g_{ik} \xi_j \langle \xi, \xi \rangle_g \left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right) + g_{ij} \xi_k \langle \xi, \xi \rangle_g \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) \\
& \quad + \left(P_{ik} \underbrace{\xi_j}_{\delta_j^m \xi_m = g^{lm} g_{lj} \xi_m} - P_{ij} \underbrace{\xi_k}_{\delta_k^m \xi_m = g^{lm} g_{lk} \xi_m} \right) + (P_{lj} g_{ik} - P_{lk} g_{ij}) \underbrace{\xi^l}_{g^{lm} \xi_m} + C_{ijk} = \\
& = \underbrace{(P_{ik} g_{lj} + P_{lj} g_{ik} - P_{ij} g_{lk} - P_{lk} g_{ij})}_{[P \otimes g]_{ijkl} \equiv [P \otimes g]_{jikl}} g^{lm} \xi_m + C_{ijk} = [P \otimes g]_{jki}{}^l \xi_l + C_{ijk} = Rm_{jki}{}^l \xi_l - W_{jki}{}^l \xi_l + C_{ijk},
\end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la definición $W = Rm - P \otimes g$ en el último paso. Restando el tensor curvatura a la expresión obtenemos equivalentemente la condición buscada

$$A(\xi)_{ij;k} - A(\xi)_{ik;j} - Rm_{jki}{}^l \xi_l = -W_{jki}{}^l \xi_l + C_{ijk} \equiv 0, \quad (6.6)$$

ya que teníamos que el tensor de Weyl y Cotton eran idénticamente nulos, luego se verifica la hipótesis del lema 6.1 y tenemos probada la existencia de tal ξ verificando $\nabla \xi = A(\xi)$ localmente en un entorno para cualquier punto de la variedad.

Únicamente nos queda demostrar que existe una $f \in \mathfrak{F}(M)$ tal que $df = \xi$. Ahora bien, como $A(\xi)$ es una 2-forma simétrica, se sigue que las derivadas de ξ son simétricas pues $\partial_j \xi_i = \xi_{i;j} + \Gamma_{ij}^k \xi_k = A(\xi)_{ij} + \Gamma_{ij}^k \xi_k$. Consecuentemente, ξ es una 1-forma cerrada (tiene derivada exterior nula) y podemos utilizar el Lema de Poincaré [9], que garantiza la existencia local de un entorno para el que existe tal función f verificando que $\xi = df = \nabla f$. \square

Capítulo 7

Ejemplos de métricas localmente conformemente llanas

En esta sección final construiremos y presentamos ejemplos de variedades conformemente llanas.

7.1. Variedades de curvatura seccional constante

Las variedades en las que la curvatura seccional toma el mismo valor en todo punto y para cualquier plano tangente son de especial interés. Veremos ahora como en este caso es posible obtener una expresión concreta para el tensor curvatura.

Proposición 7.1. *Una métrica de Riemann g tiene **curvatura seccional constante** c si y solo si su tensor de curvatura satisface que*

$$Rm = \frac{1}{2}cg \otimes g \quad (\Leftrightarrow R_{ijkl} = c(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl})) \quad (7.1)$$

Consecuentemente, se sigue que el tensor de Ricci y la curvatura escalar quedan determinados por las expresiones siguientes

$$Rc = (n-1)cg \quad (\Leftrightarrow R_{ij} = (n-1)cg_{ij}) \quad S = n(n-1)c \quad (7.2)$$

Demostración. La definición de la curvatura seccional en coordenadas es

$$\kappa_{ij} = \frac{Rm_{ijji}}{Rm_{ijji}^0}; \quad \text{con } Rm_{ijkl}^0 = g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl} \quad (7.3)$$

Podemos relacionar Rm^0 con el producto de Kulkarni-Nomizu gracias a la simetría de g , pues

$$Rm_{ijkl}^0 = g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl} = \frac{1}{2}(g_{jk}g_{il} + g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl} - g_{jl}g_{ik}) = \frac{1}{2}[g \otimes g]_{ijkl} \quad (7.4)$$

Teniendo en cuenta que la curvatura seccional es constante c y la relación anterior podemos reescribir

$$\frac{Rm_{ijkl}}{\frac{1}{2}[g \otimes g]_{ijkl}} = \frac{Rm_{ijkl}}{Rm_{ijkl}^0} = \frac{g^{il}g^{jk}Rm_{ijkl}}{g^{il}g^{jk}Rm_{ijkl}^0} = \frac{Rm_{ijji}}{Rm_{ijji}^0} = K_{ij} = c \quad (7.5)$$

de donde se sigue que $Rm = \frac{1}{2}\kappa[g \otimes g] = \frac{1}{2}c[g \otimes g]$.

Ahora tomando la traza tr_g , $Rc = \text{tr}_g(Rm) = (n-1)cg$ y $S = \text{tr}_g(Rc) = n(n-1)c$. \square

Ahora bien, veamos como la curvatura seccional constante nos lleva a la conformidad local llana.

Proposición 7.2. *Dada una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) n -dimensional cuya métrica tiene curvatura seccional constante c es localmente conformemente llana.*

Demostración. En base al Teorema de Weyl-Schouten basta probar que el tensor de Cotton es idénticamente nulo para $n = 3$ y el de Weyl idénticamente nulo para $n \geq 4$; pues para dimensiones inferiores ya se tiene el resultado en general.

Utilizando la proposición anterior se sigue que el tensor de Schouten será

$$P = \frac{1}{n-2} \left(Rc - \frac{S}{2(n-1)}g \right) = \frac{1}{n-2} \left((n-1)cg - \frac{n(n-1)c}{2(n-1)}g \right) = \frac{1}{n-2} \left(n-1 - \frac{n}{2} \right) cg = \frac{1}{2}cg \quad (7.6)$$

Ahora bien, como el tensor de Cotton depende de derivadas covariantes del tensor de Schouten, que no es más que una constante y la conexión de Levi-Civita presenta compatibilidad métrica, se sigue que es idénticamente nulo.

En base a la definición del tensor de Weyl, para probar que es idénticamente nulo basta ver que

$$W \equiv 0 \iff Rm = P \otimes g \implies \frac{1}{2}cg \otimes g = P \otimes g \iff P = \frac{1}{2}cg \quad (7.7)$$

\square

Ejemplo 7.3. Toda métrica de Einstein en 3 dimensiones es localmente conformemente llana, pues la curvatura seccional es constante.

Demostración. Por ser una métrica de Einstein $Rc = \lambda g$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ y $S = \text{tr}_g(Rc) = \lambda n = 3\lambda$. Por otra parte, por la proposición 4.8 obteníamos una expresión para el tensor curvatura dada por (4.6), donde si sustituímos lo anterior, obtenemos que

$$Rm = P \otimes g = Rc \otimes g - \frac{S}{4}g \otimes g = \frac{1}{4}\lambda g \otimes g \quad (7.8)$$

En base a la expresión (7.5) del resultado anterior tenemos que

$$\kappa = \frac{Rm}{\frac{1}{2}g \otimes g} = \frac{1}{2}\lambda \left(= \frac{1}{6}S \right) \quad (7.9)$$

□

Notar que para dimensiones > 3 , no tenemos garantizado que la curvatura seccional sea constante con lo que no se tiene este resultado en general (observación 3.18).

Una forma alternativa de ver que toda variedad de curvatura seccional constante c es localmente conformemente llana es a través del siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.4. Sea g_0 la métrica usual de \mathbb{R}^n en coordenadas cartesianas. Consideremos la deformación conforme dada por

$$g^{(c)}_{\vec{x}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{c}{4}\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle\right)^2} g_0, \quad (7.10)$$

donde $\vec{x} = (x^1, \dots, x^n)$ es el vector de posición correspondiente al punto $p = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$.

Un cálculo estándar muestra que $(\mathbb{R}^n, g^{(c)})$ tiene curvatura seccional constante c .

Ahora bien, dado que dos variedades de la misma dimensión y con la misma curvatura seccional constante son localmente isométricas [6], se sigue que toda variedad de curvatura seccional constante es localmente isométrica a $(\mathbb{R}^n, g^{(c)})$ y por tanto localmente conformemente llana.

7.1.1. Variedades modelo

Otro ejemplo de variedades con curvatura seccional constante son las conocidas como variedades modelo:

- (\mathbb{R}^n, \bar{g}) , donde \bar{g} es la métrica Euclídea
- $(\mathbb{S}^n(R), \mathring{g}_R)$, donde \mathring{g}_R es la métrica inducida por la restricción de la métrica Euclídea de \mathbb{R}^{n+1} a la hipersuperficie esférica de radio R .
- $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R)$, el espacio n -dimensional hiperbólico de radio R , definido como sigue.

Definición 7.5 (Espacio n -dimensional Hiperbólico). Se define $\mathbb{H}^n(R)$ como la subvariedad del espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{(n,1)}$ (espacio pseudo-Euclídeo de signatura $(n, 1)$) definida por las coordenadas $(\xi^1, \dots, \xi^n, \tau)$ como la hipersuperficie verificando $\{\tau > 0\}$ en el hiperboloide de dos hojas que define $F^{-1}(\{R^2\})$ donde F es la función implícita

$$F(\xi^1, \dots, \xi^n, \tau) = (\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2 - (\tau)^2 \quad (7.11)$$

Esta variedad se dota de la métrica Riemanniana que induce el *pullback* de la inclusión en $\iota : \mathbb{H}^n(R) \hookrightarrow \mathbb{R}^{(n,1)}$, al considerarse naturalmente $\mathbb{R}^{(n,1)}$ dotado de la métrica de Minkowski $\bar{q} = (d\xi^1)^2 + \dots + (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2$; es decir, $\check{g}_R = \iota^* \bar{q}$.

$(\mathbb{H}^n, \check{g}_R)$ es una variedad pseudo-Riemanniana n -dimensional trivialmente y también puede probarse que es una subvariedad Riemanniana de $(\mathbb{R}^{(n,1)}, \bar{q})$, como cabría esperar.

El siguiente resultado cuya demostración remitimos a [6], caracteriza el valor de la curvatura seccional de las variedades modelo

Teorema 7.6 (Curvatura seccional de las variedades modelo).

- El espacio Euclídeo (\mathbb{R}^n, \bar{g}) tiene curvatura seccional constante 0.
- La esfera de radio R , $(\mathbb{S}^n(R), \hat{g}_R)$ tiene curvatura seccional constante $\frac{1}{R^2}$.
- El espacio hiperbólico de radio R , $(\mathbb{H}(R)^n, \check{g}_R)$ tiene curvatura seccional constante $-\frac{1}{R^2}$.

Adicionalmente, el siguiente teorema que solo enunciaremos permite caracterizar las métricas de curvatura seccional constante en términos de una generalización de las coordenadas polares geodésicas siguiendo la idea subyacente al Teorema de Minding para superficies [6].

Teorema 7.7 (Caracterización de métricas de curvatura seccional constante). *Sea una variedad (pseudo-)Riemanniana (M, g) con curvatura seccional constante c . Dado un punto $p \in M$ y consideramos coordenadas normales (x^i) sobre un entorno normal U de p y \hat{g} el tensor métrico definido por el pullback de la proyección radial $\pi : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \pi(x) = \frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^{n-1}$; i.e., $\hat{g} = \pi^* \hat{g}$, con \hat{g} la métrica de radio 1 en \mathbb{S}^{n-1} .*

Entonces, la métrica de g puede ser escrita en $U \setminus \{p\}$ como

$$g = dr^2 + [s_c(r)]^2 \hat{g}, \quad (7.12)$$

donde r es la función distancia radial $r : (x^i) \in U \rightarrow r(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$ y s_c la función definida como

$$s_c : r \in \mathbb{R} \mapsto s_c(r) = \begin{cases} r, & \text{si } c = 0 \\ R \sin \frac{r}{R}, & \text{si } c = \frac{1}{R^2} > 0 \\ R \sinh \frac{r}{R}, & \text{si } c = -\frac{1}{R^2} < 0 \end{cases} \quad (7.13)$$

Como consecuencia de este teorema, se tiene que todas las métricas de curvatura seccional constante son únicas localmente, en el sentido de que son todas isométricas entre si.

Corolario 7.8 (Unicidad local de métricas de curvatura seccional constante). *Dadas (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) variedades (pseudo-)Riemannianas de igual dimensión y con curvatura seccional constante c , entonces ambas variedades son localmente isométricas; i.e., para todo par de puntos $p \in M$ y $\tilde{p} \in \tilde{M}$ existen sendos entornos coordinados (U, φ) , $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ y una isometría $\Phi_{\varphi\tilde{\varphi}} : U \rightarrow \tilde{U}$ determinada por $\Phi_{\varphi\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$.*

Demostración. Tomando en los entornos U y \tilde{U} coordenadas normales permite definir respectivas lecturas normales en coordenadas que permiten expresar localmente la métrica como se explicita en la expresión (7.12) del teorema 7.7 y tal que en los puntos considerados p, \tilde{p} el tensor métrico coincide para ambas (siendo de la forma $\pm\delta_{ij}$ según la signatura). Ahora, a partir de las correspondientes aplicaciones de parametrización se tiene una isometría local entre ambas variedades. \square

Gracias al anterior corolario, es inmediato que toda variedad (pseudo-)Riemanniana de curvatura seccional constante c es localmente isométrica una variedad modelo R^n , $\mathbb{S}^n(R)$ o $\mathbb{H}^n(R)$ según el valor de $R = c$.

Existe aun un resultado más general, el Teorema de Killing-Hopf [6], que establece que toda variedad (pseudo-)Riemanniana completa y simplemente conexa n -dimensional ($n \geq 2$) con curvatura seccional constante es isométrica a una de las variedades modelo globalmente, que únicamente mencionamos debida a su gran relevancia en este contexto particular.

7.2. Productos deformados

Otro caso de particular interés y muy común en el ámbito de la geometría diferencial son los productos deformados o *warped products* que permiten crear variadas métricas a partir de la deformación de otras sobre variedades de Riemann producto.

Definición 7.9 (Productos deformados). Se define el producto deformado de dos variedades de Riemann (M_1, g_1) , (M_2, g_2) por una función $f : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciable como la variedad producto $M_1 \times M_2$ dotada de la métrica de Riemann producto deformada por f , g , definida como sigue

$$g = g_1 \oplus f^2 g_2 : \begin{array}{ccc} [T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2] & \times & [T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{array}{c} (v_1, v_2) \\ (w_1, w_2) \end{array} \right) & , & & \longmapsto & g_{(p_1, p_2)} [(v_1, v_2), (w_1, w_2)], \end{array} \quad (7.14)$$

donde $g_{(p_1, p_2)} [(v_1, v_2), (w_1, w_2)] = g_1|_{p_1} (v_1, w_1) + f(p_1)^2 g_2|_{p_2} (v_2, w_2)$.

Denotaremos por $M_1 \times_f M_2$ a la variedad producto dotada de la métrica $g_1 + f^2 g_2$.

El siguiente resultado cuya demostración puede encontrarse en [1] permite caracterizar un caso sencillo de productos deformados

Teorema 7.10. *Dadas dos variedades (pseudo-)Riemannianas (M, g_M) , (N, g_N) y $f \in \mathfrak{F}(M)$, un producto deformado $M \times_f N$ con $\dim M = 1$ es localmente conformemente llano si y solo si (N, g_N) tiene curvatura seccional constante.*

Un ejemplo de métrica construida en condiciones del teorema anterior son las métricas del espacio-tiempo de Robertson-Walker, de especial interés en el campo de la Cosmología. Están definidas en una variedad producto de la forma $M = \mathbb{R} \times_f N(c)$, donde $N(c)$ es una variedad con curvatura seccional constante c , que dotada con una métrica de la forma $g = \pm dt^2 + f(t)^2 g_N$ es siempre localmente conformemente llana independientemente de la función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ considerada.

Bibliografía

- [1] Brozos-Vázquez, M., García-Río, E. y Vázquez-Lorenzo, R., *Some remarks on locally conformally flat static space-times*, Journal of Mathematical Physics **46** (2005), n.º 2, 022501.
- [2] Chern, Shing-Shen, *An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface*, Proceedings of the American Mathematical Society **6** (1955), n.º 5, 771-782.
- [3] J. S. Clarke, C., *On the Global Isometric Embedding of Pseudo-Riemannian Manifolds*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences **314** (1970), n.º 1518, 417-428.
- [4] M. Lee, John, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer New York, 2011.
- [5] M. Lee, John, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer New York, 2012.
- [6] M. Lee, John, *Introduction to Riemannian Manifolds*, Springer International Publishing, 2018.
- [7] O'Neill, Barrett, *Semi-Riemannian geometry: with applications to relativity*, Academic Press New York, 1983.
- [8] Petersen, Peter, *Linear Algebra*, Springer New York, 2012.
- [9] W. Warner, Frank, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer New York, 1983.
- [10] Whitney, Hassler, *The Self-Intersections of a Smooth n -Manifold in $2n$ -Space*, Annals of Mathematics **45** (1944), n.º 2, 220-246.