

# FLUXO DE FLUÍDOS INCOMPRESIBLES NEWTONIANOS

## FUNDAMENTOS E CASOS PRÁCTICOS



Febreiro 2023

## **Autor**

*Gumersindo Feijoo*

Grupo de Biotecnoloxía Ambiental. Departamento de Enxeñaría Química

Centro Interdisciplinar de Tecnoloxías Ambientais (CRETUS)

Universidade de Santiago de Compostela

Correo-e: [gumersindo.feijoo@usc.gal](mailto:gumersindo.feijoo@usc.gal)

LinkedIn & Twitter: @feijoo\_costa

Portal de Investigación: [GUMERSINDO FEIJOO COSTA - Universidade de Santiago de Compostela \(usc.gal\)](http://GUMERSINDO_FEIJOO_COSTA - Universidade de Santiago de Compostela (usc.gal))

### **Páxinas web:**

Biogroup: [www.usc.gal/biogroup](http://www.usc.gal/biogroup)

CRETUS: [www.usc.gal/cretus](http://www.usc.gal/cretus)



## Índice

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Definición de fluídos e fluxos	2
1.2. Presión e velocidade	7
2. BALANCE DE ENERXÍA MECÁNICA	11
3. COEFICIENTES DE FRICCIÓN. CORRELACIÓNS	15
3.1. Definición de coeficiente de transporte	16
3.2. Cálculo de coeficientes	18
3.3. Factor de fricción	18
4. FLUXO DE FLUÍDOS INCOMPRESIBLES NEWTONIANOS	23
4.1. Ecuación de Fanning	23
4.2. Cálculo de diámetro, caudal, perdas de rozamento	27
4.3. Conducións en paralelo e ramificado	34
5. IMPULSIÓN DE FLUÍDOS INCOMPRESIBLES	35
5.1. Enerxía e potencia de bombeo. Rendemento	37
5.2. Curvas características dunha bomba centrífuga	43
5.3. Carga neta positiva de aspiración. Cavitación	47
6. CASOS PRÁCTICOS	53
6.1. Caso A. Cálculo do caudal	53
6.2. Caso B. Cálculo en conducións ramificadas	57
6.3. Caso C. Cálculo da carga neta positiva de aspiración	61
6.4. Caso D. Cálculo da potencia de bombeo	63
6.5. Caso E. Cálculo na presión nunha bomba e a potencia	68
7. REFERENCIAS	70

## 1 INTRODUCCIÓN.

O Fluxo de fluidos reais desenvólvese cunha perda de enerxía mecánica que se degrada a enerxía interna, debido ó rozamento motivado pola viscosidade e tradúcese nun transp. de cant. de movemento entre dúas rexións de fluidos con velocidade distinta.

A solución de calquer problema fluidodinámico radica en coñecer a velocidade e a presión en función da posición e do tempo, isto é, o establecemento dos perfís de ambas as dúas variables en cada sección do sistema a estudo:

- No Fluxo Interno (ó través de tuberías), cómpre concretar a relación entre a velocidade ou o caudal do fluido e máis a diferenza de presións entre dous puntos da condución separados por unha certa distancia. Coñecida esta relación poderemos abordar os dous problemas fundamentais neste tipo de fluxos: o cálculo da potencia e a medida do caudal.

No fluxo externo cómpre ademais o coñecemento das forzas de rozamento que determinan a caída de presión

→ SEDIMENTACIÓN, FILTRACIÓN, FLUIDIZACIÓN, etc...



# Definición: Fluidos e Fluxos

Na mecánica de fluidos manexaremos unha nomenclatura ca que rompo familiarizarse. Así, en canto a clasificación dos ~~fluidos~~ podemos atender a diversos criterios:

a) En función do seu comportamento baixo presión:

- INCOMPRESIBLES. - Son aqueles cuxa densidade apenas varía aínda sometidos a presións elevadas.
- COMPRESIBLES. - Aqueles cuxa densidade varía significativamente coa presión.

b) En función do seu comportamento baixo o esforzo cortante:

b.1 - NEWTONIANOS. - Fluidos cuxo comportamento pode explicarse mediante a "Lei de Newton da viscosidade"

$$\tau_{yx} = \frac{F}{A} = \mu \cdot \frac{dv_x}{dy}$$

$v_x$  decrece no eixo  $y$

TENSIÓN TANXENCIAL  
OU ESFORZO CORTANTE

= forza tanxencial  
de contacto por  
unidade de área

CTE. DE PROPORCIONALIDADE = viscosidade

GRADIENTE  
DE VELOCIDADE  
OU VELOCIDADE DE CIZALLADURA.\*

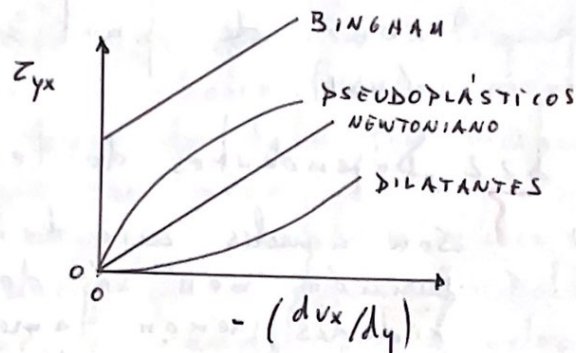
Esta tensión exercese na dirección do eixo da  $x$  sobre unha superficie perpendicular o eixo  $y$

\* si existon dependencias noutras direccións:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

b.2 - NON-NEWTONIANOS. - Todos os gases, líquidos de baixo peso molecular e as misturas simples são fluidos newtonianos; no entanto, existem uma grande quantidade de fluidos de importância industrial e científica, tais como soluções de polímeros, pastas, suspensões ou emulsões que não cumprem a Lei de Newton, são os NON-NEWTONIANOS\*

b.2.1 - Independentes do tempo de deformação.



- Plásticos ideais ou de BINGHAM, o esforço cortante e o gradiente de velocidade ainda que linear não passa pelo orixe (pasta de dentes)

$$\tau_{yx} = \tau_{yx0} + \mu \frac{dv_x}{dy}$$

- PSEUDOPLÁSTICOS. O aumentar o gradiente de velocidade aumenta também a tensão necessária, ainda que em menor proporção

\* NOTA: O conhecimento reológico (prop. mecânicas) dum fluido é importante pois condiciona em grande medida o designo de equipos.

(soluções de polietileno ou polipropileno fundidos, uermelada etc).

O seu comportamento detalhase com diferentes modelos, sendo o de OSTWALD-DE WAÈLE  $\equiv$  LEI DA POTENCIA O MAIS COMUM:

$$\tau_{yx} = b \left( -\frac{dv_x}{dy} \right)^n \quad 0 < n < 1$$

- DILATANTES.- A tensão aumenta em maior proporção que o gradiente de velocidade (suspensões bastante conc. de partículas moi pequenas (usi)).

b2.2 Dependentes do tempo de deformação

Son aqueles cuja tensão constante é função non só do gradiente de velocidades senon tamen do tempo durante o qual se aplique e da historia previa do material.

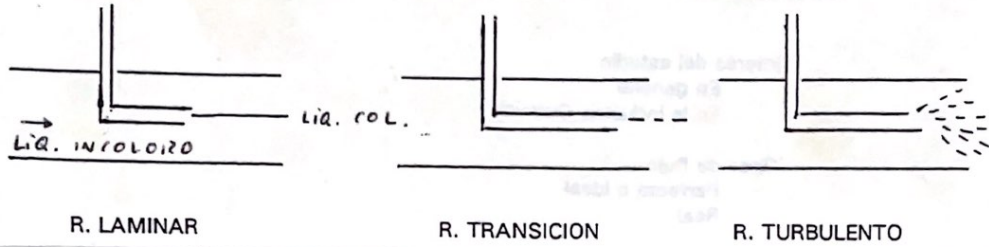
b2.3 Viscoelásticos, apresentam un comporta-mento híbrido entre fluidos (viscosidade) e sólidos (elasticidade).

En tanto o tipo de fluxo OSBORNE-REYNOLDS, fluxo de manifesto os chamados regimes de fluxo laminar e turbulento. Desde un pequeno depósito fixo flui un líquido incolor e transparente a un tubo de vidro, o traverso de una chave que permite regular o seu caudal. Desde outro depósito mediante un tubo estreito fixo

penetrar no tubo un líquido coloreado

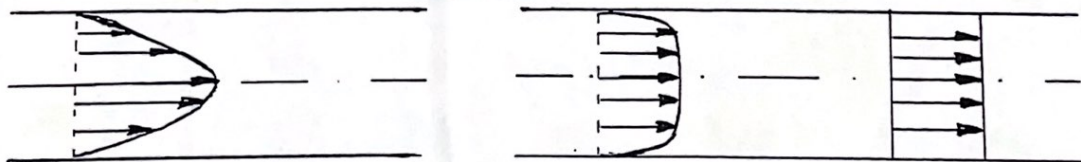
### REGIMENES DE FLUJO

Experimento de REYNOLDS



Cando a velocidade coa que flúe o líquido principal é pequena, o chorro de cor mantense ben definido o longo do tubo sin misturarse, o que demostra que se move por capas concéntricas que non se misturan entre si. Temos o denominado fluxo LAMINAR. Pola contra o aumentar o caudal ou a velocidade tomamos que o líquido escomeza a ondular (TRANSITORIO) até dispersarse e misturarse completamente, isto é, existe mov. dos elementos do fluido en todas as direccións TURBULENTO.

Perfiles de velocidade



R. LAMINAR

R. TURBULENTO

Si recordamos o módulo de  $Re$ , sendo este a relación entre as forzas de inercia e as forzas viscosas:

$$Re = \frac{F_{inercia}}{F_{viscosas}} = \frac{v \cdot D \cdot \rho}{\mu}$$

Un  $Re$  pequeno implica que as forzas viscosas predominan polo que a disipación de enerxía (pérdida por rozamento) débese ós efectos viscosos, transporte molecular, capa a capa tendo o réxime laminar. Pola contra con  $Re$  altos estamos ante un transporte turbulento sendo as forzas de inercia as predominantes. Por conseguinte, podemos caracterizar o fluxo a partir do número de  $Re$

$Re < 2100$	Réx. LAMINAR
$2100 < Re < 4000$	Réx. TRANSITORIO
$Re > 4000$	Réx. TURBULENTO

Asimesmo, se as prop. e caract. do fluxo dun fluido en cada pto. non varían co tempo, o réxime chamábase ESTACIONARIO, UNIFORME ou PERMANENTE. Se pola contra, as prop. e caract. do fluxo dun fluido varían co tempo en cada punto do sistema, o réxime denomínase NON-ESTACIONARIO ou TRANSITORIO.

## 1.2 PRESIÓN E VELOCIDADE: DEF. E MEDIDA.

### PRESIÓN

Cando falamos do termo presión manexamos diferentes definicións:

- ← **PRESIÓN ABSOLUTA.** - Chamase así a medida de presión que toma como referencia o valor total ou cero absoluto (falta total de presión)
- ← **PRESIÓN MANOMÉTRICA OU RELATIVA.** - É a presión medida con referencia á presión atmosférica. Representa a diferenza entre a presión medida e a presión atmosférica real.

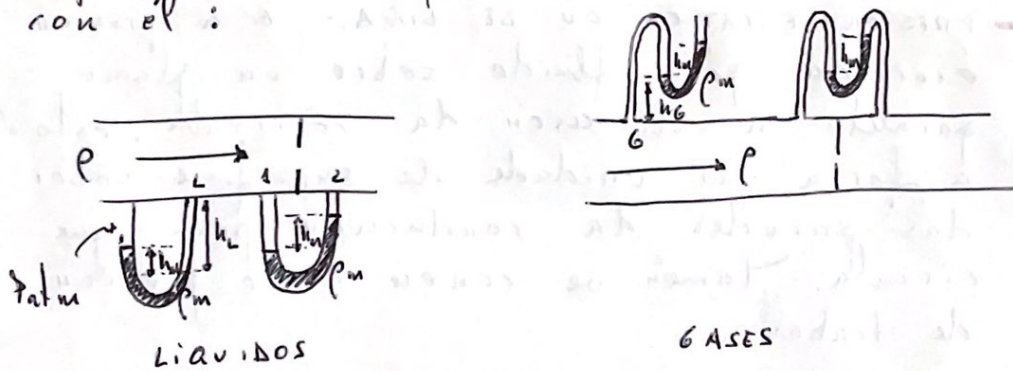
No fluxo de fluídos distínguense a súa vez tres def. de presión:

- ← **PRESIÓN ESTÁTICA OU DE LIÑA.** - É a presión exercida polo fluído sobre un plano paralelo á dirección da corrente, esto é, a forza por unidade de superficie sobre as paredes da condución pola que circula. Tamén se coñece como presión de traballo.
- ← **PRESIÓN DE IMPACTO OU DE CHOQUE.** - É a presión exercida polo fluído sobre un plano perpendicular á dirección da corrente.
- ← **PRESIÓN CINÉTICA OU DE VELOCIDADE.** - É a diferenza entre as presións de impacto e estática

Todos os sistemas para medida da presión teñen basicamente dous elementos: o sensor

o elemento primario, que está em contacto directo co proceso e o transmisor.

Os sensores ou elementos primarios son os dispositivos que están em contacto directo co proceso e teñen a misión de converter a sinal de presión nun sinal preferentemente de desprazamento ou deformación, para que posteriormente convirtase nunha sinal útil. Así temos os elementos primarios mecánicos e os electrop-mecánicos. Os primeiros constitúen os manómetros metálicos empregados para presións elevadas (cápsula, Bourdon e fuelle). Para presións baixas empreganse os tubos manométricos, son tubos de U que se enchén con líquido de densidade coñecida, superior á do fluido circulante inmiscible con el:



$$P_L = P_{atm} + h_m \cdot \rho_m \cdot g - h_L \cdot \rho \cdot g$$

$$P_G = P_{atm} + h_m \cdot \rho_m \cdot g + h_G \cdot \rho \cdot g$$

$$P_1 - P_2 = h_m \cdot g (\rho_m - \rho)$$

Os transmissores (comumente a outros medi-  
dores) transformam ou acondicionam o sinal  
numa sinal elétrica ou pneumática normali-  
zada

### VELOCIDADE

No fluxo de fluidos distinguem-se várias velo-  
cidades:

- VELOCIDADE LOCAL OU PUNTUAL ( $\vec{v}$ ): velocidade  
correspondente a qualquer ponto dum sistema  
de fluxo num momento dado

- VELOCIDADE MÉDIA ( $\langle \vec{v} \rangle$ ): velocidade que resulta  
ó dividir o caudal volumétrico,  $Q$ , correspon-  
dente a uma determinada secção do sist.  
de fluxo, entre a área,  $S$ , da mesma

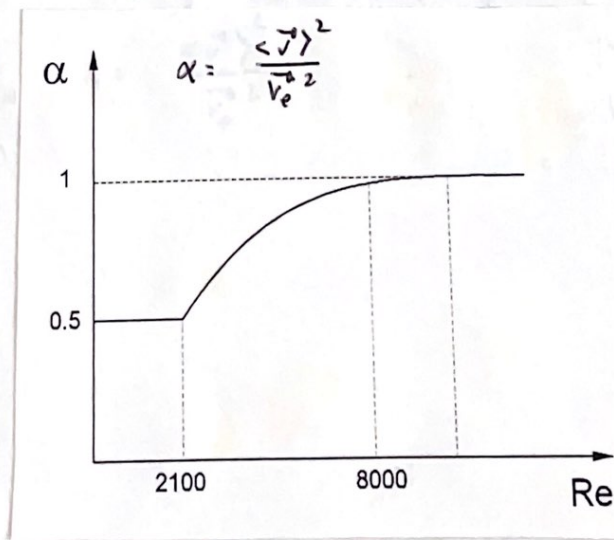
$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{Q}{S}$$

- VELOCIDADE EFICAZ ( $\vec{v}_e$ ): pra expressar a  
carga cinética associada ó caudal mássico:

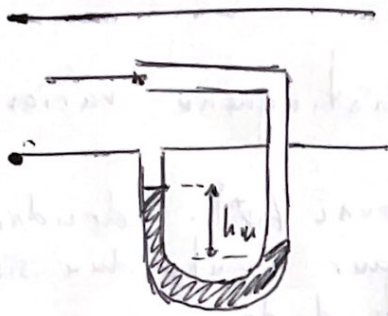
$$\bar{E}_L = \frac{1}{2} \rho \vec{v}_e^2$$

definindo

$$\alpha = \frac{\langle \vec{v} \rangle^2}{v_e^2}$$



Para medida das velocidades locais o dispositivo mais empregado é o tubo Pitot. Este dispositivo está constituído por dois tubos,



ou deles instalado de xeito que seu furo de entrada queda enfrentado o mov. do fluido no pto. de máx. velocidade, captando a pressão de impacto. O outro tubo mediante furos na sua parede unicamente capta a pressão estática. Deste xeito

calcula a velocidade a partir da pressão cinética.

Os diferentes métodos para velocidades medias clasifícanse en:

- Os basados nas diferencas de presión provocadas por estreitamento da condutión en seccións de fluxo, etc.: diafragmas, boquillas e venturímetros.
- Os basados en seccións de fluxo variáveis provocadas polas dif. de presión, etc. que determina un flotador: rotámetro.
- Os indirectos, basados na medida do caudal: medidores térmicos, parshall.

## BALANCE DE ENERGIA MECANICA.

Tal como hemos indicado en el capítulo anterior, los términos del balance de energía total podríamos incluirlos en dos grandes grupos: Los correspondientes a la energía calorífica y los correspondientes a la energía mecánica.

Los términos de energía mecánica, como ya sabemos, son aquellos que se caracterizan porque pueden convertirse completamente, mediante un proceso ideal reversible de una forma a otra. Por ejemplo, que toda energía cinética se pueda transformar en energía potencial o trabajo, o bien viceversa. Para fines prácticos subrayamos que es aquel tipo de energía que puede convertirse completamente en trabajo. Los otros términos del balance total de energía (energía interna y calor) no son convertibles directamente en trabajo, según conocemos en termodinámica, sino que necesitamos alguna máquina térmica para realizar la transformación. También conocemos que estas máquinas, según el segundo principio de termodinámica, tienen un rendimiento teórico (y por supuesto práctico), alejado del 100% dependiendo su valor de las temperaturas de trabajo de la máquina térmica.

De esta forma podremos decir que la energía interna y el calor representan formas de energía de "menor calidad" por lo que nos interesa plantear el balance de energía mecánica para averiguar qué sucede con la energía de "mayor calidad" de nuestro proceso.

### 1.1. PLANTEAMIENTO RIGUROSO.

El balance de energía total quedó planteado en el tema anterior, (ecuación 8) bajo la forma:

$$\int_A (h + e_p + e_k) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \frac{d}{dt} \int (u + e_p + e_k) \rho \, dV = q + w + \int_V G_E \, dV$$

que recordando que  $h = pv + u$ , podemos ponerlo en la forma

$$\begin{aligned} & \int_A u \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \int_A (pv + e_p + e_k) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA + \frac{d}{dt} \int u \rho \, dV + \frac{d}{dt} \int (e_p + e_k) \rho \, dV \\ & = q + w + \int_V G_E \, dV \end{aligned}$$

Si no consideramos los términos de energía calorífica, el balance queda en la forma:

$$\int_A (pv + e_p + e_k) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{d}{dt} \int_V (e_p + e_k) \rho dV = \dot{w} + \int_V G_E dV \quad (1)$$

que es una de las formas de expresar el balance macroscópico de energía mecánica.

Del mismo modo que anteriormente el término generación en los balances lo incluíamos por conveniencia, en este caso resulta necesario introducirlo en el balance para tomar en consideración que parte de la energía mecánica puede desaparecer en forma de energía calorífica debido, fundamentalmente, a los rozamientos que se producen en el sistema. Es decir que la energía mecánica es una magnitud no conservada.

Por ejemplo, cuando aplicamos los frenos a un automóvil para hacer disminuir la velocidad hay una transformación (disminución) de energía mecánica (en este caso energía cinética) en energía calorífica (las zapatas del coche se calientan).

Conviene destacar que no se trata de una pérdida de energía, puesto que la energía total se conserva, sino una pérdida de energía mecánica que se transforma en energía calorífica.

Por lo tanto, el término de "generación" (que será siempre de desaparición) corresponde al término "pérdida de energía mecánica":

$$\int_V G_E dV = - e_F \quad (2)$$

Nuestro balance presentará ahora la forma:

$$\int_A (pv + e_p + e_k) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA + \frac{d}{dt} \int_V (e_p + e_k) \rho dV = \dot{w} - e_F \quad (3)$$

### 1.2. FORMAS SIMPLIFICADAS.

La forma más frecuente de expresión del balance es cuando se aplica a sistemas en régimen estacionario, en los cuales el término acumulación es nulo:

$$\frac{d}{dt} \int_V (e_p + e_k) \rho dV = 0$$

El término (salida - entrada) será:

$$\int_A (pv + e_p + e_k) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \int_{A'} (pv + e_p + e_k) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA' \quad \text{Salida} -$$

$$\int_{A''} (pv + e_p + e_k) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA' \quad \text{Entrada}$$

Si los valores  $pv$ ,  $e_p$  y  $e_k$  permanecen uniformes a través de las áreas de entrada y de salida:

$$\int_{A'} (pv + e_p + e_k) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA' = (pv + e_p + e_k) \int_{A'} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA' =$$

$$= (pv + e_p + e_k) m$$

Entonces el término salida - entrada podremos expresarlo como:

$$\int_A (pv + e_p + e_k) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = [m(pv + e_p + e_k)]_{\text{sal}} - [m(pv + e_p + e_k)]_{\text{entr.}}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\Delta [m(pv + e_p + e_k)]$$

Considerando que es un sistema en estado estacionario  $m$  a la entrada y a la salida deben ser idénticos por lo que podemos sacarlo fuera del signo  $\Delta$ :

$$\Delta [m(pv + e_p + e_k)] = m \Delta (pv + e_p + e_k)$$

Sustituyendo en el balance:

$$m \Delta (pv + e_p + e_k) = \dot{w} - e_F$$

Dividiendo toda la expresión por  $m$ , y llamando:

$$\hat{w} = \frac{\dot{w}}{m} \quad \text{y} \quad (\hat{e}_F) = \frac{e_F}{m}$$

o balanço apresentará a forma:

$$\Delta (p \dot{V} + e_p + e_k) = \dot{W} - \Sigma F$$

ou também:

$$\Delta p \dot{V} + \Delta e_p + \Delta e_k = \dot{W} - \Sigma F$$

agora bem, dado que:

$$\Delta e_p = g \Delta z \quad \text{e} \quad \Delta e_k = \frac{1}{2} \Delta \frac{\langle v \rangle^2}{\alpha}$$

onde  $\alpha = 0,5$  si o regime de circulação é laminar e  $\alpha \approx 1$  si é o turbulento, por conseguinte:

$$\Delta p \dot{V} + g \Delta z + \frac{1}{2} \Delta \frac{\langle v \rangle^2}{\alpha} = \dot{W} - \Sigma F$$

"NOTA: O único campo que atua sobre o sistema é o gravitatorio"

Si no sistema considerada non existe trabalho realizado por ou contra o sistema e, ademais, non existe roçamento, o "balanço de energia mecânica" pode se simplificar

$$\Delta p \dot{V} + g \Delta z + \Delta \left[ \frac{\langle v \rangle^2}{2\alpha} \right] = 0$$

si consideramos que o fluxo é incompressible, ou seja,  $\rho = \frac{1}{v} = \text{cte}$

teremos a denominada Ec. de BERNOULLI

$$\frac{\Delta p}{\rho} + g \Delta z + \Delta \left[ \frac{\langle v \rangle^2}{2\alpha} \right] = 0 \quad \text{ENERGIA/MASA}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z + \Delta \left[ \frac{\langle v \rangle^2}{2\alpha g} \right] = 0 \quad \text{LONGITUD}$$

### 3. COEFICIENTES DE FRICCIÓN. CORRELACIONES.

Na práctica e con moita frecuencia, presentábase problemas de transporte de cant. de mov., de calor e de materia entre fases distintas. Así, por exemplo, na circulación de fluídos, ben polo interior de conducións ou arredor de corpos sumerxidos, debido o rozamento entre a fase líquida e a superficie sólida prodúcese unha disipación de enerxía mecánica. O que nos interesará é atopar unha relación entre a perda de presión que experimenta o fluído e o seu caudal de circulación (no primeiro caso), mentras que no fluxo arredor de corpos sumerxidos sempre coñece unha relación entre a velocidade do fluído e a forza que exerce sobre o sólido no seu seo.

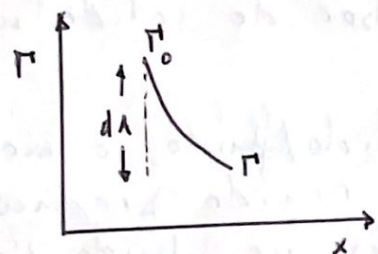
No caso de sistemas sólido/fluído, o mov. do fluído respecto ó sólido rixido produce un gradiente de velocidades no fluído. Nos sistemas fluído/fluído, a falta de rixidez da superficie de transf. fai que está sexa moi sensible ás alteracións das cond. de circulación e as desigualdades de tensión superficial dos fluídos.

A resolución dos problemas indicados que se plantexan nos transportes de propiedade entre fases non ofrecería dificultades si se

podrían establecer os perfís de conc. de propiedade, en cada caso, mediante os balances e as ecuacións de velocidade. Agora ben, este problema non está resolto polo transporte turbulento nin polo molecular con xeometrias complexas, polo que compórtase máis de ecuacións empíricas basadas na experimentación e no análise dimensional. É isto pra este fin pra que se teñan definidos os COEFICIENTES DE TRANSPORTE.

### 3.2 DEFINICIÓN COEF.

Seja un fluido que circula por unha condución sobre dun sólido no seu seno ou en contacto con outro fluido inmiscible con él. Supoñamos que a conc. de prop. (cant. de mov., materia ou enerxía) no seno do fluido sexa distinta á da superficie límite co sólido ou con outro fluido. Por conseguinte, é lóxico plantear que o caudal de prop. ó través do elemento diferencial de superficie,  $dA$ , perpendicular, ó mesmo, terá que ser proporcional a magnitude da área e a dif. de conc. de propiedade entre a superficie interfacial no seno do fluido. Esa dif. de prop. recibe o nome de coef. individual de transporte:



$$dw_0 = \epsilon dA (\pi_0 - \pi)$$

Esta equação não representa nenhuma lei (ainda que eu calor, falemos da lei de enfriamento de Newton) e unicamente compre entendida como unha ecuación de definición do coef. de transporte  $\epsilon$ .

Pra que o coef.  $\epsilon$  quede axeitadamente definido, compre establecer con claridade o valor de  $(T_0 - T)$ , ou o que é o mesmo, a conc. de propiedade no seno do fluido  $T$ . Pra elo, recorrese a denominada conc. global ou máscica, que é a que se obtería se se homoxeneizase toda a porción do fluido comprendida no volumen diferencial:

$$T_b = \frac{\int_A T \cdot v \cdot dA}{\int_A v \cdot dA}$$

o que:

$$dw_0 = \epsilon \cdot dA (T_0 - T_b) \Leftrightarrow dw_0 = \frac{T_0 - T_b}{\frac{1}{\epsilon \cdot dA}}$$

\* velocidade de transporte =  $\frac{\text{forza impulsora}}{\text{resistencia}}$

e que non de manifesto o sentido físico dos coef. de transporte: "A inversa do seu produto pola superficie interfacial representa a resistencia oposta ó transp. de propiedade".

### 3.2

### CALCULO DOS COEFICIENTES

Temos diferentes vias de resolver o problema do seu cálculo:

- Solução do problema mediante as ec. de conservação (geometrias sinuadas)
- Análise dimensional seguida de experimentação.
- Estudo "exacto" (só se dá para laminar) e "aproximado" (mét. de Karman) da capa límite.
- Analogías entre os fenómenos de transporte.
- Modelos teóricos.

O análise dimensional seguida de experimentación sumístranos un método empírico co que se teñen deducido numerosas ecuacións (será o que se desenvolvera en profundidade). Polo que se respecta ó método baseado nos modelos teóricos alomenos permite interpretar e correlacionar os datos dunha forma máis racional.

### 3.3 FACTOR DE FRICCIÓN

Na expresión xeral substituiremos os parámetros e ec. concretas pro transporte de cant. de mov.

$$dw_0/dA = (\tau_{xy})_0$$

$$\tau_0 = \rho_0 \nu_0$$

$$\tau = \tau_2$$

$$\tau_b = \rho_b \nu_b$$

em consequência:

$$(z_{xy})_0 = \epsilon_z (\rho_a v_{y0} - \rho_b v_{yb})$$

Como na interface sólido/fluido, a velocidade de deslocamento do fluido é nula, devido à aderência, teremos:

$$(z_{xy})_0 = -\epsilon_z \rho_b v_{yb}$$

Agora bem, no estudo dos fenômenos de roçamento ou de transporte de cant. de mov. entre fluidos e sólidos, vindexamais se emprega este tipo de equação que relaciona  $z_{xy}$  ao coeficiente individual de transporte, senão que se relaciona ao denominador: "factor de fricção" ou de roçamento.

Sempre que um fluido circula pelo interior duma tuberia exercerá unha força por unidade de superfície da mesma,  $z$ . Este esforço  $z$ , convem desdoblarlo em duas partes: o que exerceria o fluido ainda que estivesse em repouso, que é a pressão, e o esforço tangencial  $(z_{xy})$  associado ó comportamento dinámico do fluido, que tem a mesma direcção que a velocidade global  $v_{yb}$ . Experimentalmente comprobouse que a magnitude do esforço tangencial, é proporcional ó valor duma energia cinética característica por unidade de volumen:

$$* \left| Z_{yx} = -f \left( \frac{1}{2} \rho_b \cdot v_{yb}^2 \right) \right| \text{ caracter direccional}$$

sendo  $f$  o factor de proporcionalidade e que se coñece como FACTOR DE FRICIÓN. Esta ecuación non representa máis que a def. de  $f$  e non representa ningunha lei de mecánica de fluídos.

entón:

$$\left| \epsilon_z = \frac{f \cdot v_{yb}}{2} \right|$$

ec. que nos relaciona o valor do coef. individual de transporte,  $\epsilon_z$ , que non é de uso frecuente, co factor de fricción,  $f$ , que é o normalmente empregado pra establecer as correlacións experimentais entre perda de presión e as velocidades de circulación dos fluídos respecto ás superficies sólidas en contacto con elas, que nunca se expresan como velocidades globales, senon como velocidade de aproximación  $v_a$  (pro caso de sólidos sumerxidos no seno de fluídos) ou  $v$  pro caso de circulación de fluídos pola conducción.

O valor de  $Z_{yx}$  obtido a partir dos balances de cantidade de mov. no transporte molecular:

$$(Z_{yx})_0 = \frac{\gamma_1 - P_2}{2L} \cdot R$$

Logo:  
despés  
de \*

$$\left| f = \frac{1}{2} \frac{(P_1 - P_2)}{\rho \langle v \rangle^2} \cdot \frac{D}{L} \right|$$

Esta equação indica, explicitamente, a maneira de calcular mediante experimentação o valor do COEF. de Fricção, chamado também FACTOR DE FRICÇÃO DE FANNING.

Mediante o emprego do análise dimensional atópuse, ademais, que:

$$f = f \left( Re, \frac{\epsilon/D, L/D}{\mu} \right)$$

rugosidade.

(magnitude depende do material e met. de construção da tuberia)

#### A. Réxime laminar

No transp. molecular a ec. que nos relaciona a caída de pressão entre dois ptos e o caudal que circula por unha tuberia é a de Hagen-Poiseuille:

$$Q_L = \frac{\pi (P_1 - P_2) R^4}{8 \mu L}$$

que, recordando  $Q_L = \pi \frac{D^2}{4} \langle v \rangle$ , podese despear  $\langle v \rangle$ :

$$\langle v \rangle = \frac{P_1 - P_2}{32 \mu L} D^2 \Leftrightarrow (P_1 - P_2) = \frac{32 \mu L \langle v \rangle}{D^2}$$

que substituindo na ec. de def. de  $f$ :

$$f = \frac{1}{2} \frac{32 \mu L \langle v \rangle D}{D^2 \rho \langle v \rangle^2 L} = \frac{16 \mu}{D \rho \langle v \rangle}$$

ou seja:

$$f = \frac{16}{Re}$$

"no fluxo laminar o coef. de fricção é função exclusiva do valor do Re".

### B. Régime turbulento

Aplicando a análise dimensional, a hipótese de validade de fórmula de Prandtl

NOMBRE	ECUACION	CONDICIONES
	$f = 16 / Re$	$Re < 2100$
Blasius	$f = 0.046 \cdot Re^{-0.2}$	$5000 < Re < 2 \cdot 10^5$
Nikuradse	$1/\sqrt{f} = 4 \cdot \log Re \sqrt{f} - 0.4$	$3000 < Re < 3.4 \cdot 10^6; \epsilon/D=0$
Nikuradse	$1/\sqrt{f} = 4 \cdot \log D/\epsilon + 2.28$	$(D/\epsilon)/Re \sqrt{f} < 0.01$
Colebrook	$1/\sqrt{f} = 4 \cdot \log D/\epsilon + 2.28$	$(D/\epsilon)/Re \sqrt{f} > 0.01; 4 \cdot 10^3 < Re < 10^7$
Wood	$4f = a + b \cdot Re^{-c}$ $a = 0.094 \cdot (\epsilon/D)^{0.225} + 0.53 \cdot (\epsilon/D)$ $b = 88.0 \cdot (\epsilon/D)^{0.44}$ $c = 1.62 \cdot (\epsilon/D)^{0.134}$	$Re < 10^4; 10^{-5} < \epsilon/D < 4 \cdot 10^{-6}$
Churchill	$f = 2 \cdot \left\{ (8/Re)^{1/2} + 1/(A+B)^{3/2} \right\}^{1/2}$ $A = \left\{ 2.457 \cdot \ln \left[ 1 / \left\{ (7/Re)^{0.9} + (0.27 \cdot \epsilon/D) \right\} \right] \right\}^{16}$ $B = (37530/Re)^{16}$	
Chen	$1/\sqrt{f} = -4 \cdot \log(A - B + C)$ $A = (\epsilon / 3.705 \cdot D)$ $B = (-5.0452 / Re) \cdot \log \left\{ (\epsilon/D)^{1.1098} / 2.8257 \right\}$ $C = 5.8506 / Re^{0.899}$	

$$f = \frac{0.0044}{4}$$

## 24 FLUXO DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES, NEWTONIANOS.

### 4.1 Ec. DE FANNING.

O balance de energia mecánica pra fluidos incompresibles en réxime estacionario:

$$\frac{\Delta P}{\rho} + g \Delta z + \frac{1}{2} \Delta \frac{\langle v \rangle^2}{\alpha} = \hat{w} - \Sigma F$$

$\Delta$ : operador saída menos entrada

$\hat{w}$ : traballo por unidade de masa (J/kg)

$\Sigma F$ : perda de energia mecánica por unidade de masa (J/kg)

No caso de tubería horizontal de sección uniforme e na que non se efectue ningún tipo de traballo:

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho} = -\Sigma F$$

Tendo en conta a expresión de def. do coef. de fricción:

$$f = \frac{1}{2} \frac{(P_1 - P_2)}{\rho \langle v \rangle^2} \cdot \frac{D}{L} \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{\rho} = -2f \frac{L}{D} \langle v \rangle^2$$

co que combinandoa coa ec. anterior temos a denominada Ec. DE FANNING:

$$\Sigma F = 2f \frac{L}{D} \langle v \rangle^2$$

a qual nos permite calcular a perda de energia mecânica dum fluido incompressível que circula por unha tubería de diámetro  $D$  e lonxitude  $L$  cunha velocidade media

Agora ben, todos os sistemas circulatorios presentan unha serie de accidentes ou arcosorios: chaves, rodos, empalmes, etc. Todos estes accidentes producen variacións de magnitude ou dirección das velocidades dos fluidos que o atravesan. Son moitas as veces que se producen rozamentos de xeito que a causa da sep. da capa límite teñen lugar vórtices e remuíños que incrementan a turbulencia do fluxo e con elo unha maior disipación de enerxía mecánica en calor. Estas perdas menores denomínanse menores, pois cada un dos arcosorios por separada soe ser pequeno en comparación co rozamento nas paredes das conducións; nembargantes, a suma de todas as perdas menores pode ser moi significativo.

Neste caso:

$$\Sigma F_{TOTAL} = \Sigma F_{TRAMOS RECTOS} + \Sigma F_{MENORES}$$

$$\sum F_{\text{menores}} = 2 f \cdot \frac{\sum L_{\text{eq}}}{D} \langle v \rangle^2$$

As perdas menores se estimam como as LONGITUDES EQUIVALENTES de tubo recto, com diâmetro e características superficiais iguais às do que contém o acidente, que produziria a mesma perda o circular o fluido o seu travesso.

Outra forma de estimar estas perdas menores basease na determinar empiricamente o factor k, que expresa as perdas menores em função da massa e a velocidade:

$$\sum F_{\text{menores}} = k \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{MET. HOOPER (1981)}$$

Em condições non cilíndricas e pra fluxo turbulento podemos estimar estas perdas por rozamento representando estas conduções por um tubo circular de DIÂMETRO EQUIVALENTE definido como:

$$D_e = 4 \cdot R_{\text{HIDRAULICO}} = 4 \cdot \left[ \frac{\text{área da sez. transversal}}{\text{perímetro molhado}} \right]$$

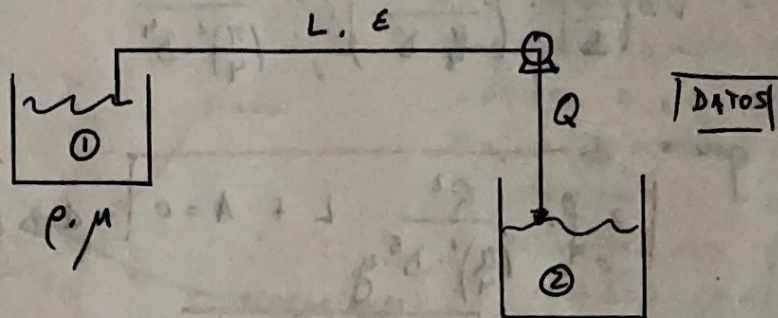
aplicado:

- placas paralelas
- conduções rectangulares, triangulares e trapexoidais
- coroas circulares...



### 4.3 PROBLEMAS DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES EN TUBOS.

#### A) CALCULO DO DIÁMETRO.



Aplicando a ec. de Bernoulli:

$$\left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2 g} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1 g} \right) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{g} \int_{P_1}^{P_2} \rho \cdot dP + \frac{\sum F}{g} = \frac{W}{g}$$

-  $v_1, v_2 \approx 0 \Rightarrow$  termo energia cinética zero

-  $(z_2 - z_1)$  ou  $W$  son conectados e independentes de zero

-  $\frac{1}{g} \int_{P_1}^{P_2} \rho \cdot dP = \frac{1}{\rho g} (P_2 - P_1)$  conectado.  
 incompresible.

-  $\frac{\sum F}{g} = 2 f v^2 \cdot \frac{L}{D}$  incognita.

equação:

$$\sum F + A = 0.$$

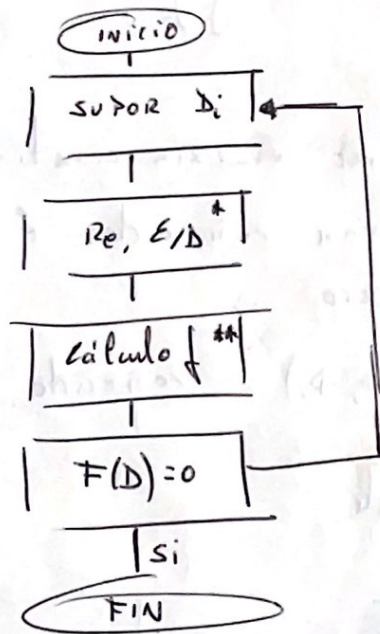
$$2 \int \frac{g}{v^2} \cdot L + A = 0$$

$$- v^2 = \left( \frac{Q}{S} \right)^2 = \left( \frac{Q}{\frac{\pi}{4} D} \right)^2 = \frac{Q^2}{\left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot D^4}$$

co que:

$$2 \int \frac{Q^2}{\left( \frac{\pi}{4} \right)^2 \cdot D^5 \cdot g} \cdot L + A = 0 \iff F(D) = 0$$

mais  $f$  é função do Re e do  $E/D$ ,  
co que temos unha ec. non linear. (mét.  
de Newton, Newton-Raphson etc.)



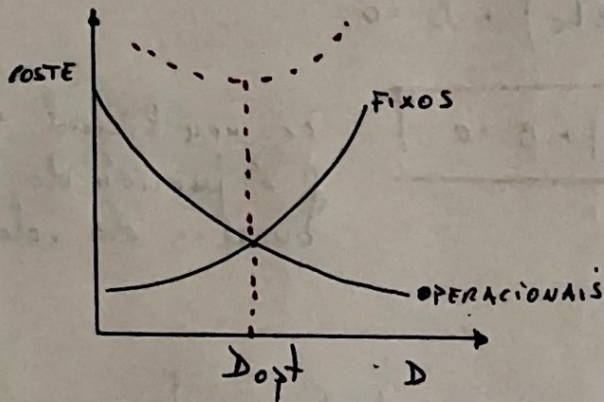
$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} = \frac{4}{\pi} \frac{\rho \cdot Q}{\mu D}$$

NON.

\*\* CORRELAÇÕES  
(O PROGRAMAR)

Si un fluido pode bombearse entre dous ptos  
con certo caudal, deberí seleccionarse un di.  
metro de conchuración tal que o coste de bombeo

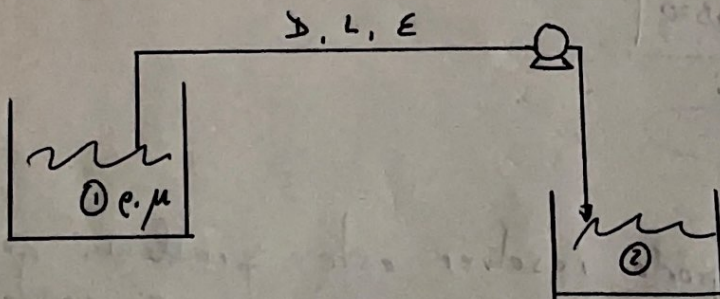
será mínimo. O custo dunha condurción será tanto menor canto máis pequeno sexa o seu diámetro. Por outra parte, os custos de operación (consumo enerxético) varía en razón inversa do diámetro. Así mediante



un balance económico representando ambos custos e a súa suma en ordenadas fronte o diámetro en abscisas, o mínimo da curva suma de ambos custos indicará o diámetro óptimo desde o pto. de vista económico.

NOTA.: Desenvólvese un met. matemático unha vez definido o tema da potencia dunha bomba.

### B) CALCULO DO CAUDAL



Aplicando a Ec. de Bernoulli:

$$\left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2 g} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1 g} \right) + (z_2 - z_1) + \int_1^2 \rho \cdot d\tau + \frac{\Sigma F}{g} = \frac{W}{g}$$

- xeralmente  $v, \Delta P, \rho$
- $(z_2 - z_1), \Delta P$  e  $W$  con coñecidos

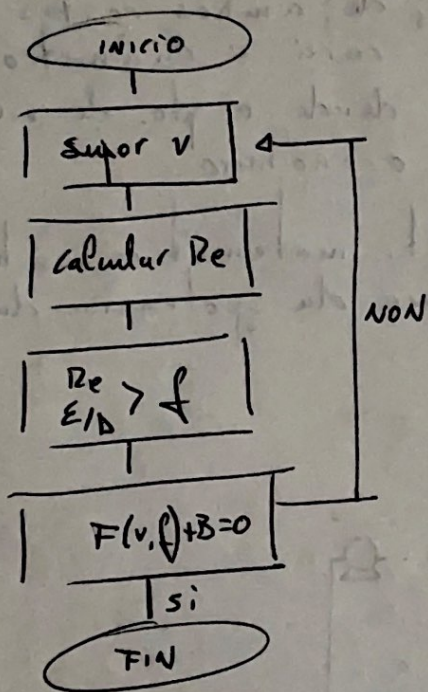
polo que:

$$\sum F + B = 0$$

$$2f \cdot \frac{\rho v^2}{8D} (L + \sum L_e) + B = 0$$

$$\underline{F(v, f) + B = 0}$$

Éc. non lineal pois  $f$  é función do  $Re$  ou sexa da velocidade

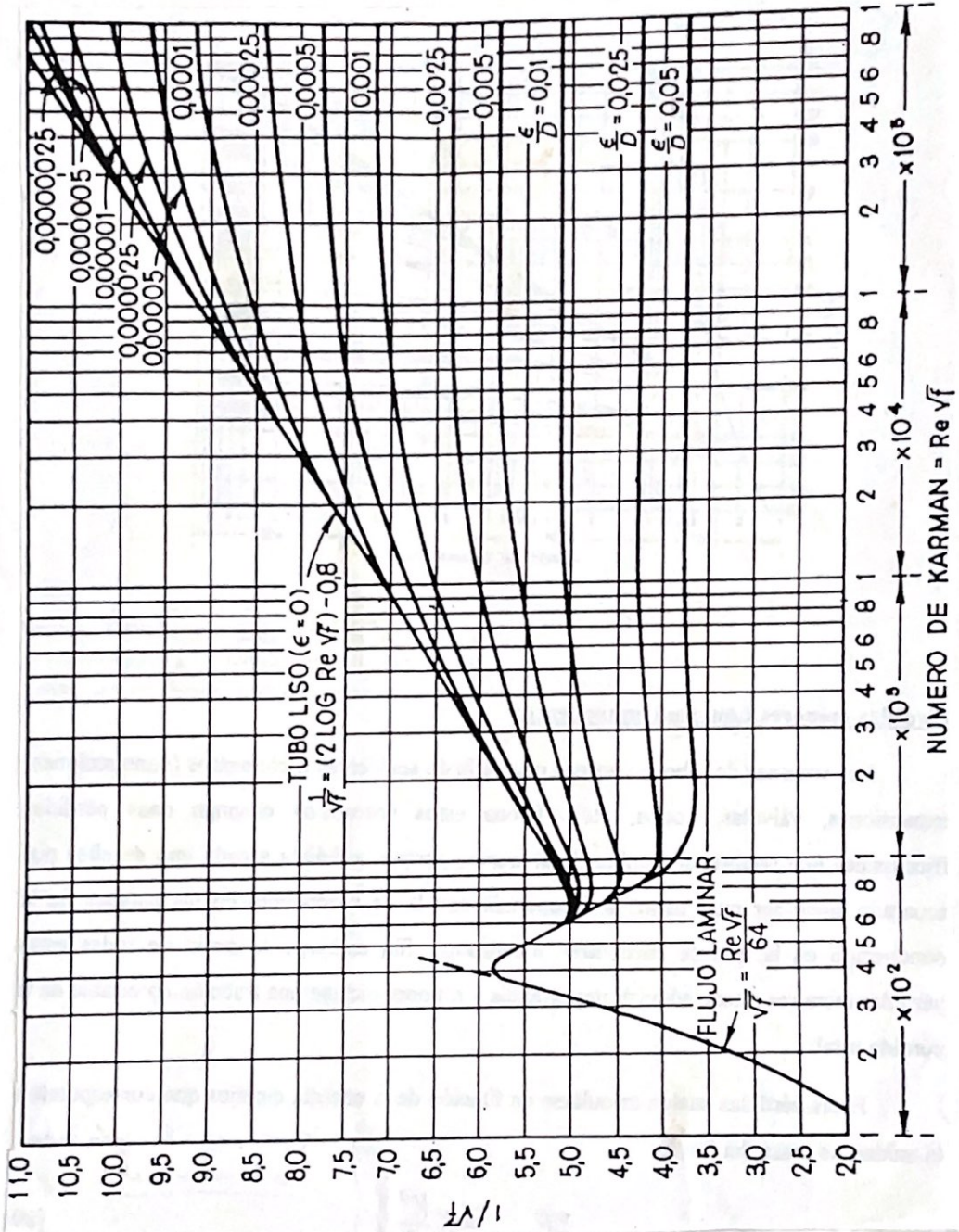


calculado  $v$  teño xa o caudal

$$v = \frac{Q}{S} \Rightarrow Q = v \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Tamén pode resolver este problema graficamente co NUMERO DE KARMAN si coñecemos as perdas por rozamento  $\Delta P$ :

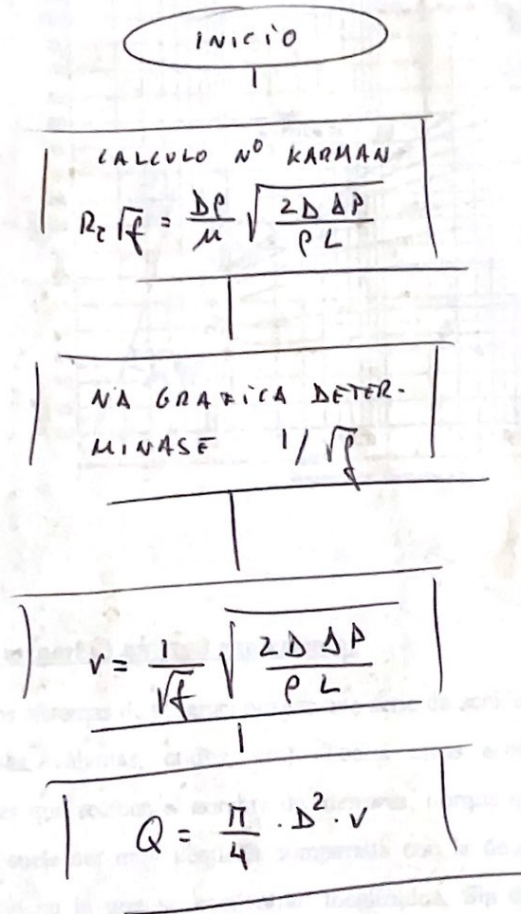
$$- \Delta P = f \frac{L}{D} \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \Rightarrow \sqrt{f} = \frac{1}{v} \sqrt{\frac{2 \Delta P \rho}{L}}$$



- NUMERO DE KARMAN:

$$Re \sqrt{f} = \frac{\Delta p}{\mu} \sqrt{\frac{2 D \Delta P}{\rho L}}$$

por tanto:



c) CALCULO DAS PERDAS POR ROZAMENTO.

DATOS:  $L, D, \rho, \mu, \epsilon$  e  $v(Q)$

INCOGNITAS:  $\Delta P$  ou  $\Sigma F$  ou  $h_f$ .

Calculase primeiramente o  $Re$  pra determinar si o réxime é laminar ou turbulento:

- Réx. Laminar:  $\Delta P = \frac{32 \mu v L}{D^2}$  HAGEN-POISEUILLE
- Réx. Turbulento: Ec. FANNING.

$$\Sigma F = 2 f_f \frac{L}{D} v^2 \quad (\text{J/kg})$$

$$\Delta P = 2 f_f \frac{L}{D} v^2 \rho \quad (\text{N/m}^2)$$

$$h_f = 2 f_f \frac{L}{D} \frac{v^2}{g} \quad (\text{m})$$

NOTA: Recordemos que temos duas gráficas:

$$f_{\text{DARCY}} = 4 f_{\text{FANNING}}$$

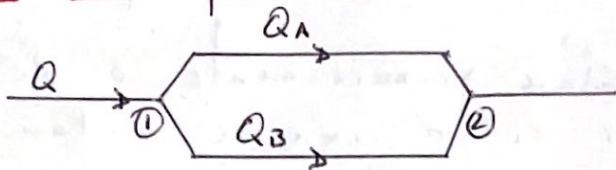
no réx. laminar:  $f = \frac{16}{Re}$

$$f_D = 4 \cdot f = \frac{64}{Re}$$

## 4.3

CONDUCCIONES EN PARALELO E RAMIFICADO.

Cando duas ou máis tuberías, partindo dun mesmo pto. 1 volven a atoparse noutro punto 2, dícese que o sist. constitúe unha conducción en paralelo:



Ec. Bernoulli; entre os pto. 1 e 2:

$$\left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \sum F = W$$

RAMA A

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \sum F_A = 0$$

RAMA B

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + \sum F_B = 0$$

$$\boxed{\sum F_A = \sum F_B}$$

Nas conducións ramificadas o tipo de problemas son moi variados sendo a súa resolución mediante a aplicación consecutiva da Ec. de Bernoulli en cada un dos tramos da ramificación.

## 5 IMPULSIÓN DE FLUIDOS INCOMPRESIBLES.

O desprazamento de fluidos, líquidos ou gases (ou ocasións incluso son sólidos en suspensión) desenvólvese normalmente en sist. de fluxo máis ou menos longos e complexos que implican conducións rectas e numerosos accesorios. O traveso destas sistemas o fluido só flúe espontaneamente si a súa enerxía total dismiñe na dirección do fluxo. De non ser así, terase que comunicarlle enerxía dende o exterior mediante dispositivos tales como bombas (líquidos), compresores, soplantes ou ventiladores (gases). Tal aporte de enerxía pode invertirse en aumentar a velocidade, a altura ou a presión do fluido.

Na impulsión dos líquidos, isto pode ser variada aínda que soe ser de dous tipos: por desprazamento volumétrico do fluido, conseguido mecanicamente, ou pola acción dunha forza centrífuga. No primeiro caso, as bombas denomínanse de DESPLAZAMENTO POSITIVO ou VOLUMÉTRICAS, pois na admisión, o líquido é confinado nun certo espazo da bomba, dnde se lle comurca a enerxía, sendo desprazado a continuación até zona de expulsión. A súa vez, temos de dous tipos: Alternativas ou rotatorias:

a) ALTERNATIVAS: De émbolo o pistón y diafragma (FIG 8)

Ventajas

Elevada p  
Caudal conocido - dosificadoras  
Manejan  $\mu$  altas

Desventajas

Espacio  
No presencia sólidos  
Costo elevado  
Poco flexibles  
Pulsación

b) ROTATORIAS: De engranajes, lobulares, excéntricas, paletas, tornillo o hélice, peristálticas (FIG 9)

Ventajas

Costo bajo  
Pequeño espacio  
Presión elevada  
Amplio margen  
(capacidad, carga,  $\mu$ )  
Manejan bien vapor  
Sin válvulas

Desventajas

No sólidos suspensión  
No trabajan bien con  $\mu$  baja

No segundo caso, as bombas denominanse CENTRIFUGAS, e nelas o líquido si pode circular libremente o seu traveso, pois recibe a enerxía pola acción da forza centrífuga que lle comunica un disco xiratorio a gran velocidade, sin necesidade de ser confinado en espazos interiores.

BOMBAS CENTRIFUGAS

Ventajas

Construcción sencilla  
Coste y mantenimiento bajos  
Acoplamiento motor eléctrico  
Manejo sólidos en suspensión

Desventajas

Necesidad de varias etapas  
Elevado  $\eta$  en intervalo limitado  
Válvula retención en aspiración  
No maneja  $\mu$  altas.

## 5.1 ENERGIA E POTENCIA DE BOMBEO. RENDIMENTO

A quantidade de energia que terá que ser suministrada a um fluido para conseguir o seu deslocamento por um sistema determinado dependerá do seu caudal, da altura a que deba elevar-se, da pressão a que se queira que chegue o final do seu percurso, das longitudes e diâmetros dos tramos rectos de condução, dos acidentes (ensurhamentos, estreitamento, curvaturas, válvulas, codos, etc) intercalados e das suas prop. físicas, sobre todo a sua viscosidade e a sua densidade.

A Ec. de Bernoulli permite calcular a energia (w) que tem que comunicarse por unidade de massa do fluido circulante:

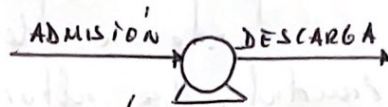
$$w = \left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) + g(z_2 - z_1) + \int_{p_1}^{p_2} g \cdot dP + \Sigma F$$

Com ela e o caudal mássico de fluxo que se desexe (m) chegase a POTENCIA teórica necesaria pro fluxo:

$$N = m \cdot w = Q \cdot \rho \cdot w \quad (\text{Wattios})$$

Agora ven, as características funcionais das máquinas motoras disponíveis (capacidade volu-

métrica, potencia, rendimento mecânico, facilidade de manexo e manutenção) têm que ter em conta a fim de poder aportar a potencia calculada.



aplico Ec. Bernoulli

$$\left( \frac{v_D^2}{2\alpha_D} - \frac{v_A^2}{2\alpha_A} \right) + g(z_D - z_A) + \rho(p_D - p_A) + \sum F_i = W$$

- sendo  $\sum F_i$  a perda de energia por rozamento no interior da bomba

1) Si a conducción na que está situada a bomba sexa horizontal ( $z_A = z_D$ ) e as conduccións de admisión e descarga da mesma sexa de igual diámetro ( $v_A = v_D$ ):

$$p_D - p_A = \rho(W - \sum F_i)$$

2) Si polo contrario a conducción sexa ascendente ( $z_D > z_A$ ) ou as citadas conduccións son de distinto diámetro ( $v_D > v_A$ ), temos:

$$p_D - p_A < \rho(W - \sum F_i)$$

Ambas situacións:

$$| p_D - p_A \leq \rho(W - \sum F_i) |$$

Solo tanto, ben a bomba produce un aumento de presión equivalente a magnitude  $\rho(w - \Sigma F_i)$  (caso 1), ben ista invirtese parcialmente en aumentar a presión e o resto en aumentar a enerxía potencial (altura) ou a enerxía cinética (velocidade) do líquido (caso 2), enerxías ambas as dúas poden posteriormente empregarse en aumentar a presión.

Denomínase RENDIMENTO HIDRAULICO dunha bomba,  $\eta_h$ , á fracción do traballo feito pola mesma sobre o líquido que realmente invirtese en elevar a súa enerxía:

$$\eta_h = \frac{w - \Sigma F_i}{w}$$

folo que:

$$P_D - P_A = \rho(w - \Sigma F_i) = \rho \cdot \eta_h \cdot w = \rho \eta_h \cdot \frac{N}{m}$$

Como a potencia necesaria pra accionar a bomba,  $N_a$ , sempre é superior á que chega realmente o líquido, xa que ademais de suministrar o traballo indispensable pro desprazamento do émbolo ou rodete, terase que proporcionar o necesario pra compensar o rozamento dos coxinetes e calquera mecanismo, defínese como RENDIMENTO MECÁNICO ou ORGÁNICO da bomba,  $\eta_m$ , a fracción do tra-

ballo necesario pra accionar a que realmente chegue o líquido:

$$\eta_m = \frac{W \cdot m}{N_a} = \frac{N}{N_a}$$

Finalmente, entenderase por RENDIMIENTO TOTAL da bomba,  $\eta_t$ , o produto dos dous anteriores:

$$\eta_t = \eta_h \cdot \eta_m = \frac{W - \Sigma F_i}{W} \cdot \frac{W \cdot m}{N_a} = \frac{(W - \Sigma F_i) m}{N_a}$$

$$= \frac{m \left[ \frac{v_D^2 - v_A^2}{2\alpha} + g(z_D - z_A) + \frac{p_D - p_A}{\rho} \right]}{N_a} = \frac{\text{potencia útil}}{\text{potencia de accionamento}}$$

NOTA DIAMETRO ÓPTIMO = PTO VISTA ECONOMICO

O coste total dun sist. de bombeo inclue tanto os costes de inmovilizado de tuberías e bombas, así como tamén os costes de operación, sendo o principal os costes enerxéticos do accionamento das bombas.

- a - costes inmovilizado das tuberías, CIT
- b - costes " das bombas, CIB
- c - costes enerxéticos, CE

Agora ben, os costes enerxéticos son continuos no tempo e os costes de inmovilizado son fixos, sendo común expresalos como a amortización por un período de anos ( $y$ ). De xeito, que def. ( $x = 1/y$ ), como a fracción

dos custos totais do imobilizado a pagar por ano. Assim, tomando como base de cálculo um ano, pode combinar ambos tipos de custos.

a) Os custos das tuberias podem ser expressados pela equação de DARBY AND NELSON (1982):

$$CIT = a \cdot D_{ft}^p \cdot L$$

- $D_{ft}$ , diâmetro da tuberia em pés (interno).
- $a, p$ , fatores dependem do grau de aço da tuberia.

	ANSI 300#	ANSI 400#	ANSI 600#	ANSI 900#	ANSI 1500#
a	23,1	23,9	30,0	38,1	55,3
p	1,16	1,22	1,31	1,35	1,39

\* Em \$ de 1980.

b) Os custos das bombas são geralmente função linear da potência:

$$CIB = A + \frac{B \cdot N}{\eta}$$

onde:  $A = 172800 \text{ \$}$   
 $B = 450,8 / \text{cv} \text{ \$}$   $\eta$  de 1980

c) Os custos energéticos podem ser determinados pela ec. de Bernoulli:

$$W = \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{\Delta(v)^2}{2} + g \Delta z + \Sigma F$$

si  $\Delta z = 0$  e  $\Delta v = 0$

temos:

$$N = W \cdot m = m \left[ \frac{\Delta P}{\rho} + \Sigma F \right] = m \frac{\Delta P}{\rho} + m \Sigma F$$

↑  
cantidad másico.

$$\Sigma F = 2 f \cdot \frac{L}{D} v^2 = 2 f \cdot \frac{L}{D} \left[ \frac{Q}{S} \right]^2$$

$$= 2 f \cdot \frac{L}{D} \cdot \left[ \frac{m/\rho}{\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2} \right]^2 = \frac{32 f \cdot L \cdot m^2}{\pi^2 \cdot \rho^2 D^5}$$

ou seja:

$$N = m \frac{\Delta P}{\rho} + \frac{32 f L m^3}{\pi^2 \rho^2 D^5} \quad f = \frac{1}{4}$$

Nesta equação  
esta fanning

O custo por ano:

$$CE = \frac{C \cdot N}{\eta_t} \quad \text{unidade: custo energia} \\ \text{pts/kWh etc.}$$

Em consequência, o custo total, CT:

$$CT = X (CIT + CIB) + CE$$

$$CT = X \left\{ a \frac{\Delta P}{\rho} \cdot L + \left( A + \frac{B N}{\eta_t} \right) \right\} + \frac{C N}{\eta_t}$$

$$CT = K_a D^5 L + K_A + \frac{B \times N}{\eta_t} + \frac{C N}{\eta_t}$$

$$CT = K \cdot a \cdot D^5 L + K_A + \left[ \frac{B \times C}{\eta_t} \right] \cdot \left[ \frac{32 \sqrt{L m^3}}{\pi^2 \rho^2 D^5} + m \frac{\Delta P}{\rho} \right]$$

- Si queremos atopar o diámetro óptimo, ou que minimize o custo total, derivase frente o diámetro e igualase a cero pra calcular o diámetro ~~ótimo~~ máis económico:

$$D_{op} = \left[ \left( \frac{B+C}{a \rho \eta_t} \right) \cdot \left( \frac{160 \sqrt{L m^3}}{\pi^2 \rho^2} \right) \right]^{\frac{1}{P+5}}$$

onde:  $\gamma = 1/x$

$$f = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{160}{4} f$$

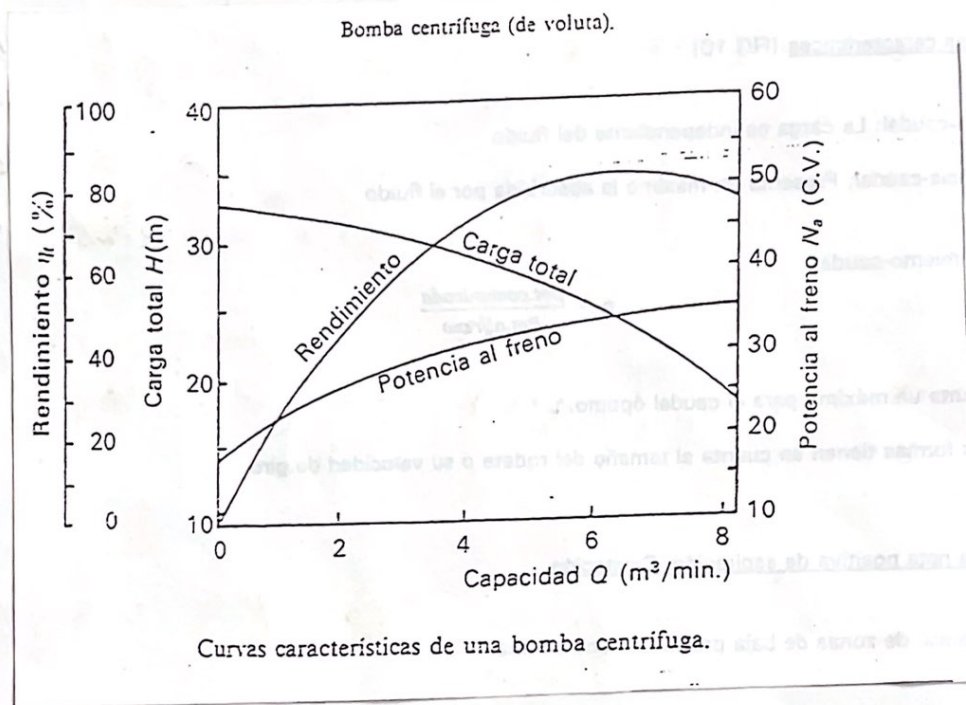
## 5.2

### CURVAS CARACT. DUNHA BOMBA CENTRIFUGA.

As bombas centrífugas operan casi sempre a velocidade cte., polo que o caudal suministrado (denominado habitualmente capacidade da bomba) depende soamente, pra unha mesma bomba, das presións de aspiración e descarga.

Para axeitada utilización dunha bomba centrífuga compre coñecer a variación de

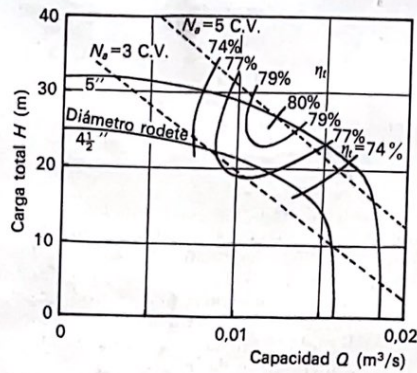
determinadas magnitudes, como a pressão de descarga, a potência consumida e o rendimento obtido para cada valor do caudal. Estas variações sose expressar de forma gráfica para cada tipo de bomba, o que constituem as denominadas curvas características da bomba centrífuga considerada.



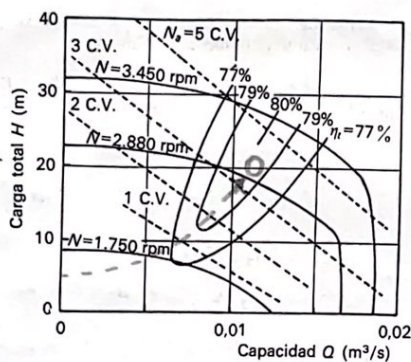
A) Curva da variação da carga total (em metros de líquido) frente o' caudal ( $m^3/min$ ).

H-Q (TOTAL HEAD FEET versus CAPACITY)

É sempre decrescente, pois o' aumentar o caudal aumenta a velocidade de passo pelo interior da bomba, pelo que o fluido está submetido menos tempo à aceleração dos álabes, recebendo unha menor quantidade de energia cinética.



Curvas características de una bomba centrífuga a 3.450 rpm en función del tamaño del rodete.



Curvas características de una bomba centrífuga de 5" de tamaño del rodete en función de la velocidad de giro.

OPTIMO:

- H = 17 m
- Q = 0.011 m³/s
- N = 3 CV
- η = 79.9%

Para conocer o pto. óptimo de funcionamiento de una bomba debe buscarse la función de carga (m) en función de caudal a partir de la Ec. de Bernoulli e representarlo en este tipo de gráficas, obteniendo pto. intersección con curva potencia e tamaño de rodete o velocidad de giro, obteniendo también el rendimiento.

$$H = \frac{w}{g} = \frac{\Delta v^2}{2\alpha g} + (z_2 - z_1) + \frac{1}{\rho g} (P_2 - P_1) + \frac{\Sigma F}{g}$$

$$H = f(Q)$$

O sair o líquido com menor energia cinética, a carga total adquirida é também menor.

B) Variação da potência o freno (a aplicada pelo motor o eixo, cv) frente o caudal

$$N_u - Q \quad (\text{PUMPING POWER VS. CAPACITY})$$

Esta curva é sensivelmente ascendente, pois o impulsar um caudal de líquido maior, a energia que é compre aplicar o eixo da bomba terá que ser também maior.

C) Rendimento (potência comunicado o fluido/potência o freno) frente o caudal.

$$\eta_t - Q \quad (\text{PUMP EFFICIENCY VERSUS CAPACITY})$$

O ser o rendimento o cociente entre a potência comunicada o fluido (curva inferior) e a potência o freno (curva superior), se comprende que a curva característica do rendimento frente o caudal presente também um máximo, que praticamente coincide co caudal o'ptimo.

Existem ademais das curvas características citadas, curvas similares que expresan a variação das magnitudes, carga  $H$ , potência  $N_u$ , rendimento  $\eta_t$  e caudal  $Q$  coa velocidade de xiro ou o tamanho do rodete

5.3

CARGA NETA POSITIVA DE ASPIRACIÓN. CAVITACIÓN

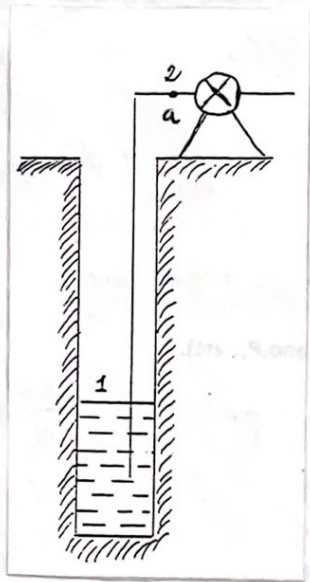
III  
 CNPA  $\Rightarrow$  NPSM (NET POSITIVE SUCTION HEAD)

Nunha bomba centrífuga que opere un caudal de líquido elevado, si se aumenta a velocidade do rodete prodúcese unha diminución da presión no eixo do mesmo (por onde entra o líquido). Si esta diminución fai que a presión nese punto ~~fa~~ sexa menor que a  $P_v$  do líquido prodúcese unha vaporación local do líquido. As burbujas de vapor formadas son lanzadas pola acción da forza centrífuga até periferia, onde temos unha presión maior, produciéndose o efecto contrario ~~zo~~ condensación coa conseqüente redución do volumen. Este fenómeno caracterizado por bruscas expansións e contraccións de volumen que se producen con ruído, vibracións e choques bruscos do líquido contra as partes internas da bomba, denomínase CAVITACIÓN e pode producir danos serios nos álabes do rodete, que acaban picándose e rompendose.

A cavitación dunha bomba centrífuga indíca que está mal deseñado o rodete ~~prás~~ condicións particulares na que está traballando a bomba, ou que a velocidade de bombeo (o caudal do líquido) é demasiado alta. Polo tanto, evítase disminuíndo o caudal



ou, em geral, fazendo que a carga total nesse ponto de aspiração da bomba seja suficiente para que a pressão no seu interior não possa diminuir por debaixo da pressão de vapor do liq. a essa  $t^a$ . Isto é, a soma da carga cinética e de pressão no pto. aspiração seja maior a carga equivalente à pressão de vapor. A dif. entre estas cargas def. como CARGA NETA POSITIVA DE ASPIRAÇÃO:



$$| CNPA = \frac{1}{g} \left[ \frac{v_a^2}{2\alpha_a} + \frac{p_a}{\rho} - \frac{p_v}{\rho} \right] |$$

Esta carga neta depende das caract. do líquido, da velocidade da bomba, da sua capacidade e do designo do rodete e se representa em gráficos suministradas pelo fabricante em função das debanditas varia. des.

Si aplicamos a Ec. de Bernoulli entre os pto 1 e a (aspiração da bomba):

$$\frac{1}{\rho} (p_a - p_1) + g(z_a - z_1) + \left( \frac{v_a^2}{2\alpha_a} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) + \sum F = 0$$

Suponendo que a velocidade con que desce o nivel do depósito é desprezible frente a  $v_a$ , chamando  $h = z_a - z_i$  á altura da sección de admisión da bomba a ese nivel. Si sumamos e restando o termo  $p_v/\rho$ :

$$\frac{1}{\rho} (p_a - p_v) + \frac{1}{\rho} (p_v - p_i) + gh + \frac{v_a^2}{2\alpha_a} + \Sigma F = 0$$

- dividindo por  $g$  e separando termos:

$$\frac{1}{\rho g} (p_a - p_v) + \frac{v_a^2}{2\alpha_a g} = \frac{1}{\rho g} (p_i - p_v) - h - \frac{\Sigma F}{g}$$

$$\boxed{CNPA = \frac{1}{\rho g} (p_i - p_v) - h - \frac{\Sigma F}{g}}$$

ou considerando  $CNPA = 0$ , deduce que a máx. altura a que se pode colocar a sección de admisión da bomba respecto do nivel do depósito de succión será a eq. a presión reinante no depósito, menos a presión de vapor do líquido e menos as perdas por rozamento no tramo de aspiración:

$$\boxed{h = \frac{1}{\rho g} (p_i - p_v) - \frac{\Sigma F}{g}}$$

No caso particular dun líquido non volátil (sin problemas de cavitación,  $p_v = 0$ ), nas

condicións extremas de aspiración ( $\Sigma F = 0$ ) e unha tubería de aspiración na que poidamos despreñar o rozamento ( $\Sigma F = 0$ ), teremos:

$$h = \frac{P_1}{\rho g}$$

"permite calcular a profundidade máx. desde a que pode succiónar unha bomba centrífuga"

- CASO PARTICULAR de auga ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) e dun tanque aberto a atmosfera:

$$h = \frac{101325}{1000 \cdot 9.81} = 10,33 \text{ m}$$

Sinalar tamén que o arrancar unha bomba, a condución de aspiración e o corpo da bomba poden estar inicialmente cheos de aire. Si se trata dunha bomba de desprazamento positivo, o aire da condución avanza do mesmo xeito que o faría o líquido. Nembargantes, nas bombas centrífugas non son capaces por si mesmas de iniciar a succión do líquido. A operación pola que se elimina o aire contido na tubería de aspiración e no interior dunha bomba centrífuga chamase CEBADO. As formas habituais de fauto son: 1) mediante un tanque auxiliar elevado respecto á bomba, do que



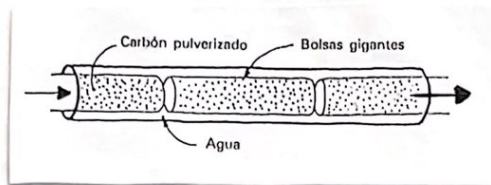
## 6. CASOS PRÁCTICOS

### 6.1 Caso A. Cálculo do caudal

14. En Asturias extráese carbón de baixo contido en xofre, altamente valorado polas compañías eléctricas, debido a que non necesita un pretratamento pra eliminación de xofre. En Endesa necesitan ese carbón en cantidades masivas a partires do ano 2002, dado o esgotamento da mina aberta que posuen, polo que unha conducción de lodos é unha das posibilidades que se barallan pra transportarlo, xa que a priori pensase que pode ser máis barato que o tren. Nembargantes, existe un inconveniente a este método —o uso de auga doce:

- Débese empregar auga doce pra preparar o lodo, xa que senon as sales do auga quedarán co carbón pulverizado provocando problemas de corrosión cando se queime.
- Cando chegue o auga As Pontes, ista xa estará contaminada e non se poderá empregar posteriormente sen un tratamento axeitado.
- As normas medioambientais e directrices comunitarias poñen de manifesto a política das tres “R” no uso industrial: reducir, recuperar e reciclar, co que esta forma de “gastar” auga non parece o máis axeitada.

Uns Enxeñeiros Técnicos americanos, W.R. Grace e Co., propuxeron unha alternativa denominada “O Acuaten”, o cal consiste en colocar o carbón xa desmenuzado en bolsas de plástico xigantes cilíndricas de 5 m de lonxitude e 0,75 m de diámetro (figura anexa), de xeito que as bolsas bombeanse xunto con auga mediante unha tubería de 0,91 m de diámetro interno dende a mina perto dos picos de Europa (elevación 2000 m) até As Pontes (400 m) a 400 km de distancia. Sinálase no proxecto que poden transportarse até 15 millóns de toneladas de carbón por ano deste xeito. Supoñer que a liña opera 360 días ó ano, e que as bolsas de plástico fanse circular sin empuxe de flotación e están en contacto unhas coas outras a longo da lonxitude total da conducción.



Pra unha estimación preliminar aproximadas:

- a) Calcular a velocidade media do carbón na conducción.
- b) Estimar o caudal volumétrico de auga necesaria pra transportar este carbón supondo primeiro fluxo laminar, e a continuación supondo fluxo turbulento.
- c) Determinar si o fluxo do auga é laminar ou turbulento.
- d) Atopar o coste teórico de bombeo por tonelada pra transportar o carbón, considerando unha operación directa até As Pontes cunha tubería de aceiro comercial e un coste de 10 pts/kWh pra enerxía eléctrica.

SOLUCIÓN

a) Velocidade media do carbón:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{4 \cdot Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot \frac{m}{\rho \cdot t}}{\pi D^2}$$

↑ factor conversión  
ano a s.

$$m = 15 \cdot 10^6 \text{ toneladas} = 15 \cdot 10^9 \text{ kg/ano}$$

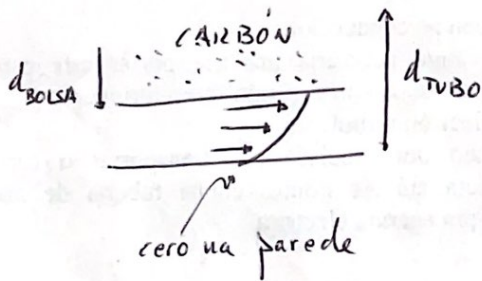
$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \text{ ó da auga.}$$

$$v = \frac{4 \cdot \frac{15 \cdot 10^9}{10^3 \cdot (365 \cdot 24 \cdot 3600)}}{\pi (0,75)^2} = 1,077 \text{ m/s.}$$

b) Fluxo laminar

$$Q = v \cdot S$$

en réx. laminar a cuestión complicate xa que teríamos un sist. no que o auga flue nunha coroa cilíndrica e teríamos que aplicar ec. balanza microscópico de cant. de movemento. pra obter o perfil de velocidades.



Agora ben, podemos considerar a velocidade máx. a velocidade do carbón xusto no raído:  $d_{BOLSA}/2$  " entón:

$$\frac{v_{\text{CARBÓN}}}{2} < v' < v_{\text{CARBÓN}}$$

$$v' \geq 0,75 v_{\text{CARBÓN}} = 0,75 \cdot 1,077 = 0,808 \text{ m/s}$$

si resolvemos las ec.  $\Rightarrow 0,646 v_{\text{CARBÓN}}$

pero que:

$$Q = 0,808 \frac{\pi D_e^2}{4} = 0,054 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$D_e = 4 \cdot R_h = 4 \cdot \frac{\pi \left( \frac{D_{\text{TUBO}}^2 - D_{\text{PLÁSTICO}}^2}{4} \right)}{\pi D_{\text{TUBO}}} = \frac{D_{\text{TUBO}}^2 - D_{\text{PLÁSTICO}}^2}{D_{\text{TUBO}}} = 0,292 \text{ m}$$

FLUXO TURBULENTO



$$Q = v \cdot S = 1,077 \cdot \frac{\pi}{4} D_e^2 = 0,0721 \text{ m}^3/\text{s}$$

(c)

$$n_e = \frac{\rho \cdot D_e \cdot v}{\mu} = \frac{10^3 \cdot 0,292 \cdot 1,077}{10^{-3}} = 3,14 \cdot 10^5$$

(d)

Aplicando Bernoulli:

$$\left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) + \Sigma F = W$$

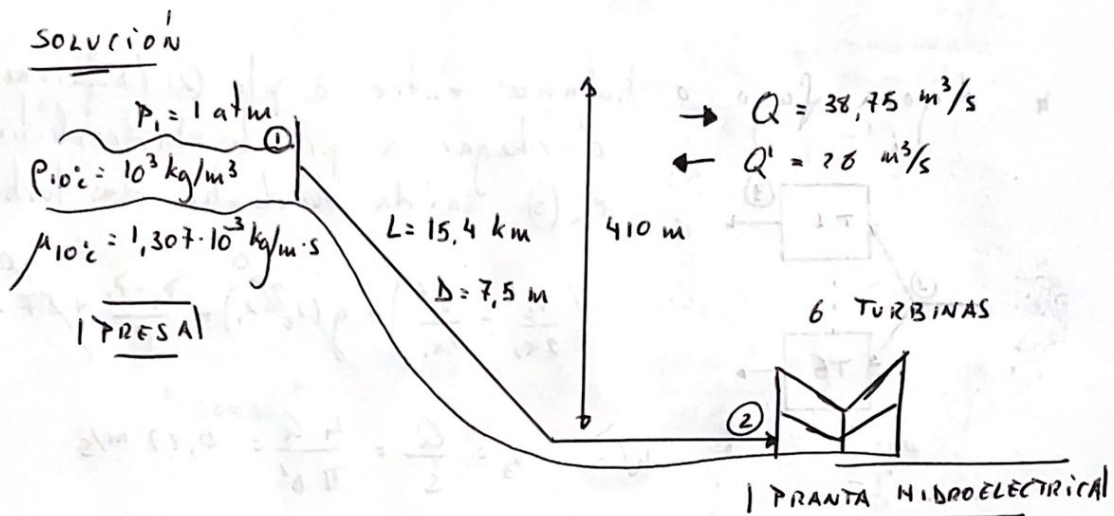
$$\square g(z_2 - z_1) = 9,81 (0 - 2000) = -19620 \text{ J/kg}$$



6.2 Caso B. Cálculo en condiciones ramificadas

15. A presa de Villarino na provincia de Salamanca (nela rodouse a famosa escea da película o Doctor Zhivago) rematouse en 1970. O salto de auga é de 410 m, e o tubo de alimentación á central enerxética da presa é de formigón recuberto de aceiro cun diámetro interno de 7,5 m e unha lonxitude de 15,4 km. Este tubo alimenta 6 turbinas reversibles de igual tamaño. ¿Por qué reversibles?. Porque non hai un exceso de auga. Así, en tempos de forte demanda de electricidade, o auga circula augas abaixo para xenerar electricidade, mentras que en tempos de exceso de xeneración eléctrica o auga pode bombearse de novo augas enriba para ser empregada posteriormente. Cando se está xenerando electricidade, o auga circula ó traveso de cada unha das 6 turbinas cun caudal de 38,75 m<sup>3</sup>/s. Cando se invirte o fluxo e bombease o auga faise coa mesma potencia que se xenerou no fluxo normal, o caudal ó traveso de cada turbina é de 28 m<sup>3</sup>/s. Considerar que o auga está a 10 °C e calcular:

- A eficacia de conversión da enerxía potencial da auga en electricidade.
- A produción de enerxía eléctrica da instalación.



- Primeiramente calculamos a presión coa que chega a auga a pranta hidroeléctrica:

$$\left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) + g(z_2 - z_1) + \frac{\Delta P}{\rho} + \sum F = 0$$

- $v_2 = \frac{Q_{TOTAL}}{S} = \frac{4 \cdot 6 \cdot Q}{\pi D^2} = 5,77 \text{ m/s}$

- $g(z_2 - z_1) = -g z_1 = -4022,1 \text{ J/kg}$

$$\Sigma F = 2 f \frac{L}{D} v^2 = 453.36 \text{ J/kg}$$

$$f = 0,003975$$

FORMIGÓN  
CON ACEIRO = 0,004

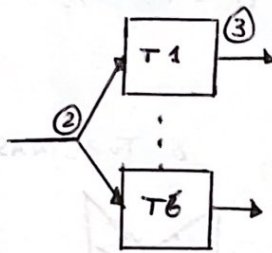
$$E_{1/D} = \frac{0,003}{7,5}$$

$$r_e = \frac{\rho v \cdot d}{\mu} = 3,02 \cdot 10^7$$

entón:

$$P_2 = P_1 + \rho \left[ g z_1 - 2 f \frac{L}{D} v^2 - 0,5 v^2 \right] = 3,67 \text{ MPa}$$

Agora fago o balance entre o pto ② (bifurcación  
o chegar a pranta hidroeléctrica)  
e ③ saída ~~de~~ dunha das turbinas



$$\left( \frac{v_3^2}{2\alpha_3} - \frac{v_2^2}{2\alpha_2} \right) + g(z_3 - z_2) + \frac{P_3 - P_2}{\rho} + \Sigma F = W$$

$$v_3 = \frac{Q}{S} = \frac{4 \cdot Q}{\pi D^2} = 0,47 \text{ m/s}$$

co que:

$$W = \frac{P_3 - P_2}{\rho} + \frac{v_3^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} = -3573,4 \text{ J/kg}$$

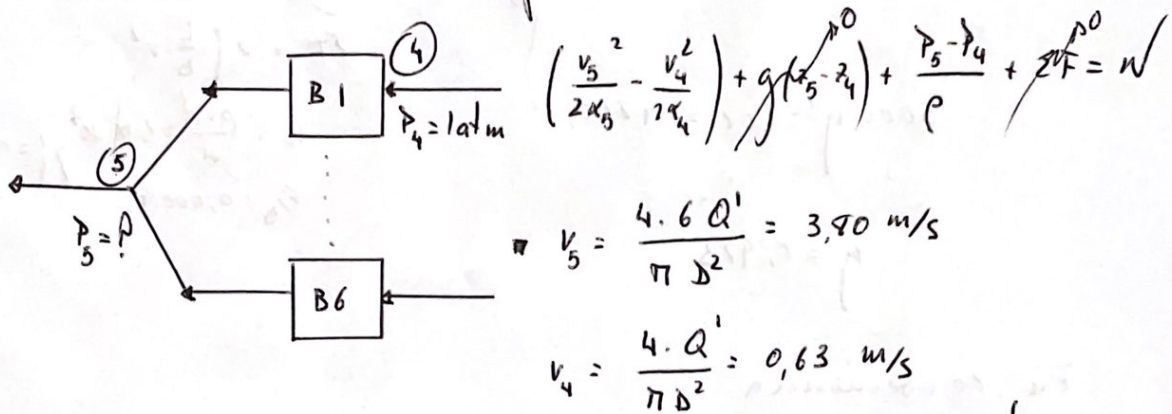
$$N_{\text{TURBINA}} = m \cdot W = \rho Q \cdot W = 140 \text{ MW}$$

$$N_{\text{TURBINA REAL}} = N_{\text{TURBINA}} \cdot \eta_{\text{TURBINA}}$$

$$\% \text{ Eficacia} = \frac{N_{\text{TURBINA}} \cdot \eta_{\text{TURBINA}}}{\rho Q \cdot (4022,1)} = 0,875 \cdot \eta_{\text{TURBINA}}$$

Potencia si toda a enerxía cinética se aproveitase

- Tenemos otro dato, que es el caudal que xerura cada TURBINA o funcionar como BOMBA



$$W_{BOMBA} = \frac{N}{\rho Q'} = \frac{(N_{TURBINA} \eta_{TURBINA}) \cdot \eta_m}{\rho Q'}$$

$\eta_m \rightarrow$  rendimiento mecánico.

suponemos  $\eta_{TURBINA} = \eta_m$

$$W_{BOMBA} = \frac{N_{TURBINA} \cdot \eta^2}{\rho Q'} = \frac{140 \text{ MW} \cdot \eta^2}{\rho Q'} = 5000 \cdot \eta^2$$

lo que:

$$P_5 = P_4 + \rho \left[ W_{BOMBA} - \frac{v_5^2}{2} + \frac{v_4^2}{2} \right]$$

$$= P_4 + \rho [5000 \eta^2 - 7.02]$$

$\nearrow$  atmosférica

- Si aplico el balance de energía mecánica entre la bifurcación (5) e el tope de la presa (6):

$$\left( \frac{v_6^2}{2\alpha_6} - \frac{v_5^2}{2\alpha_5} \right) + g(z_6 - z_5) + \frac{P_6 - P_5}{\rho} + \sum F = W$$

$$-7,22 + 4022,1 - \sqrt{[5000\eta^2 - 7,02]} + 235,78 = 0$$

$$\Sigma F = 2 \left( \frac{L}{D} v^2 \right)$$

$$5000\eta^2 - 7,02 = 4250,7$$

$$D_e = \frac{\rho v d}{\mu} = 2,18 \cdot 10^7 \left. \vphantom{\frac{\rho v d}{\mu}} \right\} = 0,003976$$

$$\frac{L}{D} = 0,0004$$

$$\eta = 0,923$$

En consecuencia:

$$\text{Eficacia} = (0,875 \cdot 0,923) \cdot 100 = \underline{\underline{80,76\%}}$$

e a producción eléctrica:

$$N_{\text{PRANTA}} = 6 \cdot N_{\text{TURBINA REAL}} = 6 \cdot 140 \text{ MW} \cdot 0,923 = 775,3 \text{ MW}$$

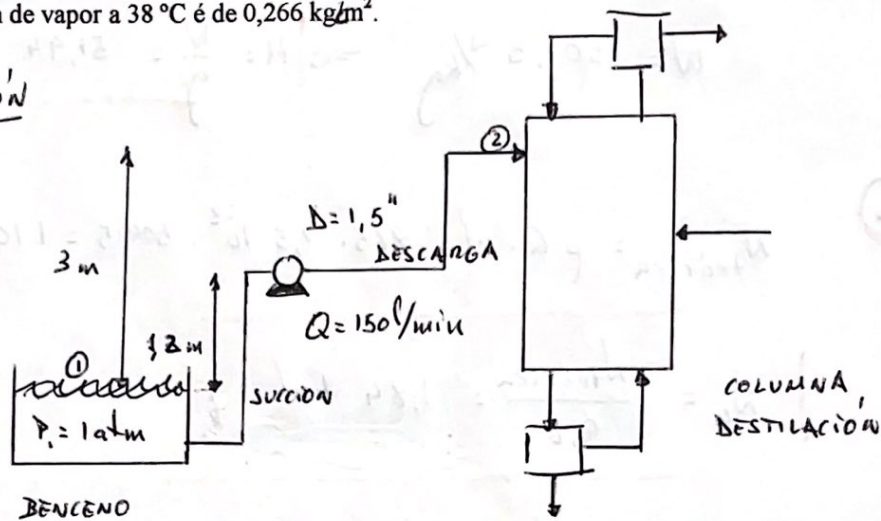
6.3 Caso C. Cálculo da carga neta positiva de aspiración

7. Unha das aplicacións industriais do benceno máis amplamente empregada e a de empregalo nunha destilación azeotrópica pra pode obter etano puro. A tal efecto bombease a 38 °C cun caudal de 150 l/min dende un tanque de almacenamento a presión atmosférica até o tope da columna de destilación a unha presión manométrica de 3,5 kg/cm<sup>2</sup>. O orificio de descarga está a 3 m e a succión da bomba a 1,2 m sobre o nivel do tanque. A tubería de descarga é de 1½ pulgadas. Sábese que a fricción na conducción de succión é de 0,035 kg/cm<sup>2</sup> e na descarga 0,39 kg/cm<sup>2</sup>. O rendimento mecánico da bomba é do 60%. Calcular:

- A carga desenvolta pola bomba.
- A potencia ó freno.
- A carga neta positiva de aspiración desta instalación.

Datos: A densidade do benceno é de 865 kg/m<sup>3</sup>.  
Presión de vapor a 38 °C é de 0,266 kg/m<sup>2</sup>.

SOLUCIÓN



a) - Sexa a Ec. de Bernoulli entre o pto. ① (nivel do tanque) e ② (entrada a columna).

$$\left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1} \right) + g(z_2 - z_1) + \frac{\Delta P}{\rho} + \Sigma F = W$$

$v_1 = 0$ , pois superficie do tanque moito maior que o diametro - sección da tubería

$$v_2 = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 150 \frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{\text{l}}}{\pi (1,5 \cdot 2,54 \cdot 10^{-2})^2} = 8,36 \text{ m/s}$$

$$\# \quad g(z_2 - z_1) = 9,81 \cdot 3 = 29,43 \text{ J/kg}$$

$$\# \quad \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{3,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 9,81 \cdot 10^4 \frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/cm}^2}}{865} = 396,94 \text{ J/kg}$$

$$\# \quad \Sigma F = \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{(0,035 + 0,39) \cdot 9,81 \cdot 10^4}{865} = 48,20 \text{ J/kg}$$

então

$$W = 509,5 \text{ J/kg} \Rightarrow H = \frac{W}{g} = 51,94 \text{ m}$$

(b)

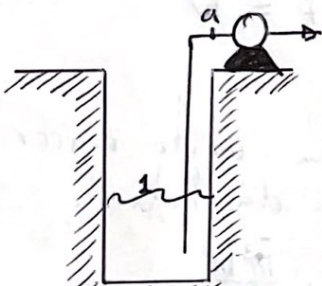
$$N_{\text{teórica}} = \rho Q \cdot W = 865 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 509,5 = 1102 \text{ W}$$

$$N_u = \frac{N_{\text{teórica}}}{0,6} = 1,84 \text{ kW}$$

(c)

$$\underline{CNPA} = \frac{1}{g} \left[ \frac{v_a^2}{2\alpha_a} + \frac{P_a}{\rho} - \frac{P_v}{\rho} \right] = \left[ \frac{1}{\rho g} (P_1 - P_v) - h - \frac{2F}{g} \right] =$$

$$= \frac{1}{865 \cdot 9,81} (1,013 \cdot 10^5 - 0,261 \cdot 10^5) - 1,2 - \frac{3,97}{9,81} = \underline{7,26 \text{ m}}$$



$$h = z_a - z_1 = 1,2 \text{ m}$$

$$P_v = 0,266 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 9,81 \cdot 10^4 = 26094,6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

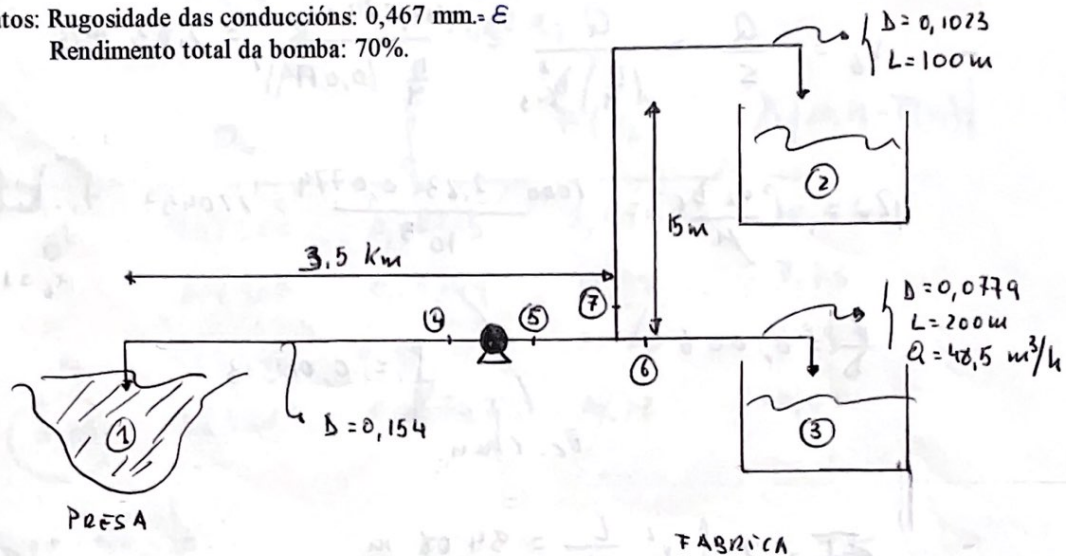
$$\Sigma F = \frac{\Delta P}{\rho} = \frac{0,035 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{865} = 3,97 \text{ J/kg}$$

## 6.4 Cálculo da potencia de bombeo

10. Unha fábrica abastece de auga dunha presa que bombea o traveso dunha conducción horizontal, de 0,154 m de diámetro interno, até a fábrica que está situada a 3,5 km da presa. Na fábrica, a conducción divídese en dúas, unha delas de 0,1023 m de diámetro interno e de 100 m de lonxitude que descarga nun tanque de almacenamento, aberto á atmósfera, cuxo nivel se atopa 15 m por enriba da presa. A outra, de 0,0779 m de diámetro interno e 200 m de lonxitude, é horizontal e descarga a presión atmosférica nunha instalación de lavado, e por ela circula un caudal de auga de  $48,5 \text{ m}^3/\text{h}$ . Desexándose situar a bomba o máis próxima posible á fábrica, determinar:

- A potencia de bombeo necesaria.
- A máxima distancia da presa a que é posible situar a bomba.

Datos: Rugosidade das conduccións:  $0,467 \text{ mm} = \epsilon$   
Rendimento total da bomba: 70%.



### SOLUCIÓN

- A solución deste problema pasa por facer os balances entre o pto. 5 e 4, mais descoñecemos o caudal e presións, polo que compre aplicar Bernoulli primeiramente o pto 6-3, que nos dará a presión en 6 que será igual a de 7 e 5. Logo co balance entre 7 e 2 conseguiremos o caudal por esa liña que xunto co 6-3 xa faise o caudal que circula pola bomba.

→ Ec. Bernoulli tramo 6-3

$$\left( \frac{v_3^2}{2\alpha_3 g} - \frac{v_6^2}{2\alpha_6 g} \right) + (z_3 - z_6) + \frac{1}{g} \int_{P_6}^{P_3} \sigma dP + \frac{\Sigma F}{g} = \frac{h_3 - h_6}{g}$$

$$-\frac{v_6^2}{2\alpha_6 g} + \frac{1}{g\rho} (P_3 - P_6) + \frac{\Sigma F}{g} = 0$$

$$- v_6 = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\left(\frac{\pi}{4}\right) D_{6-3}^2} = \frac{48,5/3600}{\frac{\pi}{4} (0,0779)^2} = 2,83 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho v_6 D_6}{\mu} = \frac{1000 \cdot 2,83 \cdot 0,0779}{10^{-3}} = 220457 \text{ turbulento}$$

$\alpha_6 = 1$

$$\frac{L}{D} = 0,006$$

$$f = 0,00813$$

Ec. Chen.

$$-\frac{\Sigma F}{g} = 2 \cdot f \cdot v^2 \frac{L}{gD} = 34,08 \text{ m}$$

per tanto:

$$P_6 = g \cdot \rho \left[ \frac{\Sigma F}{g} - \frac{v_6^2}{2g} + \frac{P_3}{\rho g} \right] = 446728 \text{ N/m}^2$$

34,8      0,408      10,33

→ Ec. de Bernoulli o' tramo 7-2.

$$\left( \frac{v_2^2}{2\alpha_2 g} - \frac{v_7^2}{2\alpha_7 g} \right) + (z_2 - z_7) + \frac{1}{g} \int_{P_2}^{P_7} \sigma dP + \frac{\Sigma F}{g} = \frac{h_2 - h_7}{g}$$

$$-\frac{v_7^2}{2\alpha_2 g} + 15 + \frac{1}{\rho g} (P_2 - P_7) + \frac{\Sigma F}{g} = 0$$

onde:  $\sum F = \sum 2 f v^2 \frac{L}{D}$

$f \rightarrow \frac{\epsilon}{D} = 0,0046$   
 $R_e = \frac{\rho v D}{\mu}$

por consequente:

$$199,3 f v_7^2 - \frac{v_7^2}{19,6247} = 20,21$$

(m/s) $v_7$	$R_e$	$f$	$F(v_7)$	$\Delta  20,21 - F(v_7) $
1	102300	0,00765	1,473	18,74
3	306900	0,00749	12,98	7,73
4	409200	0,00747	23,00	-7,79
<b>3,75</b>	383625	0,00747	20,22	-0,01

por tanto:

$$v_7 = \frac{Q_7}{S_7} \Rightarrow Q_7 = v_7 \cdot S_7 = v_7 \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot D_7^2$$

$$Q_7 = 3,08 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} = 110,9 \text{ m}^3/\text{h}.$$

logo, o caudal pelo tramo principal:

$$Q = Q_{6-3} + Q_{7-2} = \underline{\underline{159,4 \text{ m}^3/\text{h}}}$$

Aplico a ec. de Bernoulli entre o tramo 1 e 5. Isto é, a tuberia principal co que determinarei o trabalho mesario:

$$\left( \frac{v_5^2}{2\alpha_5 g} - \frac{v_1^2}{2\alpha_1 g} \right) + (z_5 - z_1) + \frac{1}{g} \int_{P_1}^{P_5} \sigma dP + \frac{\sum F}{g} = \frac{W}{g}$$

$$\frac{v_5^2}{2\alpha_5 g} + \frac{1}{g} (P_5 - P_1) + \frac{\sum F}{g} = \frac{W}{g}$$

sendo:

$$v_5 = \frac{Q_r}{S} = \frac{110,9/3600}{\left(\frac{\pi}{4}\right) (0,154)^2} = 1,655 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} = 254870 \rightarrow \alpha_5 = 1$$

$$(P_5 - P_1) = 446728 - 101325 = 345403 \text{ N/m}^2$$

$$\sum F = \sum 2f \cdot v^2 \cdot \frac{L}{D} = 831,67$$

$$\frac{f}{D} = 0,0030 \quad \hookrightarrow f = 0,00668$$

$$Re = 254870$$

Por tanto:

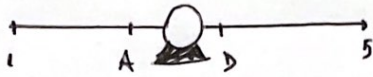
$$W = g [0,140 + 35,21 + 84,8] = 1178,7 \text{ J/kg}$$

Potencial

$$N_a = \frac{W \cdot m}{g \cdot t} = \frac{W \cdot Q \cdot \rho}{g \cdot t} = 70,53 \text{ C.V.}$$

↑  
1/735,5

(b)



A presión no pto. de admisión non pode ser excesivamente reducida, o límite sería a presión de vapor do líquido a esa  $T_0$  xa que implicaría vaporización coa consiguiente cavitación

Balace 1-A.

$$\left( \frac{v_A^2}{2\alpha \cdot g} - \frac{v_1^2}{2\alpha \cdot g} \right) + (z_A - z_1) + \frac{1}{g} \int_{P_1}^{P_A} \sigma dP + \frac{\pi f L}{g} = \frac{h_p}{g}$$

$$\frac{1}{\rho g} (P_A - P_1) + 2 f v^2 \frac{L}{g D} = 0$$

$$P_1 = 101325$$

$$P_A = P_{H_2O}^0 = 2,34 \text{ kPa}$$

a 20°C.

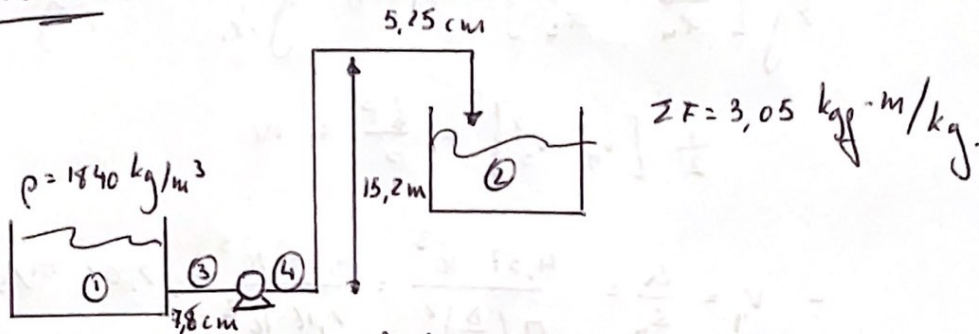
$$\rightarrow \boxed{L = 202 \text{ m}}$$

\*dende a fábrica

6.5 Caso E. Cálculo da presión dunha bomba e a potencia

17. Unha bomba extrae 262 l/min dunha disolución de densidade 1840 kg/m<sup>3</sup> dende un tanque almacén mediante unha tubería de 7,8 cm de diámetro interno. A bomba descarga o líquido nun depósito ó traveso dunha tubería de 5,25 cm de diámetro interno. O extremo da tubería está 15,2 m por enriba do nivel do líquido no tanque de almacenamento. A perdas por fricción son 3,05 kg<sub>f</sub> m/kg. ¿Qué presión debe desenvolver a bomba e cál ten que ser a súa potencia si o rendimento é do 65%?

SOLUCIÓN



$$Q = 262 \frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}^3}{1 \text{ l}} = 4,37 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Aplicase a ecuación de Bernouilli entre o pto ① e ② pra coñecer o traballo que ten que desenvolver a bomba, pra logo ó aplícala entre ③ e ④ poidamos determinar a presión que desenvolvera.

$$\frac{1}{2g} \left( \frac{v_2^2}{\alpha_2} - \frac{v_1^2}{\alpha_1} \right) + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{g} \int_{P_1}^{P_2} \sigma dP + \frac{\Sigma F}{g} = \frac{W}{g}$$

- $v_2 \approx v_1 \approx 0$
- $z_2 - z_1 = 15,2$
- $P_1 = P_2 \approx P_{\text{atmosférica}}$
- $\Sigma F = 3,05 \frac{\text{kg}_f \cdot \text{m}}{\text{kg}} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}_f} = 28,89 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}} \equiv \text{J/kg}$

então:  $w = \Sigma F + (z_2 - z_1) \cdot g = 178,85 \text{ J/kg}$ .

Agora, pro pts 3 e 4:

$$\frac{1}{2}g \left[ \frac{v_4^2}{\alpha_4} - \frac{v_3^2}{\alpha_3} \right] + \cancel{(z_4 - z_3)} + \frac{1}{g} \int_{z_1}^{z_2} \sigma \cdot dP + \frac{\Sigma F}{g} = \frac{w}{g}$$

$$\frac{1}{2} [v_4^2 - v_3^2] + \frac{\Delta P}{\rho} = w$$

$$- v_4 = \frac{Q}{S_4} = \frac{4,37 \cdot 10^{-3}}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{4,37 \cdot 10^{-3}}{2,16 \cdot 10^{-3}} = 2,02 \text{ m/s}$$

$$- v_3 = \frac{Q}{S_3} = \frac{4,37 \cdot 10^{-3}}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} = \frac{4,37 \cdot 10^{-3}}{4,78 \cdot 10^{-3}} = 0,91 \text{ m/s}$$

$$\left[ \Delta P = \left\{ w + \frac{1}{2} [v_4^2 - v_3^2] \right\} \cdot \rho = 3,26 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \underline{\underline{3,23 \text{ atm}}} \right]$$

a potencia:

$$\left[ N_a = \frac{N_{teórica}}{g} = \frac{\rho \cdot Q \cdot w}{g} = 2212,5 \text{ W} \right]$$

## 7. REFERENCIAS

Costa Novella y col. (1985). Ingeniería Química. Vol. 3. Flujo de Fluidos. Alhambra, Madrid.

Coulson, J.M. y Richardson, J.F. (1979). Ingeniería Química. Vol. 1. Flujo de Fluidos, Transmisión de Calor y Transferencia de Materia. Reverté, Barcelona.

Darby, R. (1996). Chemical Engineering Fluid Mechanics. Marcel Dekker, Inc. New York.

Geankoplis, C.J. (1986). Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias". CECSA, México.

Levenspiel, O. (1993). Flujo de Fluidos. Intercambio de Calor. Reverté, Barcelona.

Mott, R.L. (2006). Mecánica de fluidos. Pearson Educación, México.

Welty J.R., Wicks C.E. y Wilson R.E. (1993). Fundamentos de Transferencia de Momento, Calor y Masa. Limusa, México.