



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Complejidad topológica y elección social

Ignacio Simón García

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Complejidad topológica y elección social

Ignacio Simón García

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Complejidad topológica y elección social
Breve descripción do contido
El término “elección social” (<i>social choice</i>) aparece en modelos de economía matemática para la toma de decisiones en contextos económicos, sociales y políticos, cuando no hay unanimidad entre los individuos. En este trabajo estudiaremos su relación con la topología algebraica, introduciendo la idea de complejidad social a partir del concepto de complejidad topológica.
Recomendacións
Conocimientos básicos de Topología general. Recomendable cursar o haber cursado Topología algebraica.
Outras observacións

Índice general

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Elección social	1
1.1. Definición de Elección Social	1
1.1.1. Conjunto de preferencias	2
1.1.2. Continuidad de la función	3
1.1.3. Función de elección social	3
1.2. Desarrollo histórico	4
1.2.1. El enfoque de Arrow	4
1.2.2. El enfoque topológico	5
1.2.3. La n -media de Eckmann	6
1.2.4. La clave de la solución	12
2. Complejidad topológica	13
2.1. Introducción	13
2.2. Definición de complejidad topológica	13
2.3. Ejemplos	17
2.4. Complejidad topológica superior	21
2.5. Definición equivalente de complejidad topológica	24
2.6. Definición equivalente de complejidad topológica superior	28
2.7. Complejidad topológica simétrica	30
2.8. Complejidad topológica simétrica superior	32
2.9. Sobre los conjuntos ENR	32
3. Complejidad social	39
3.1. Introducción	39

3.2. Complejidad social	39
3.3. Complejidad social superior	44
Bibliografía	47

Resumen

El problema de encontrar una función de elección social en un espacio de preferencias determinado, siempre ha estado dominado por los Teoremas de Imposibilidad de Arrow y Chichilnisky. En este trabajo trataremos de dar solución a este problema estudiando el tipo de homotopía del espacio de preferencias. Para llevar a cabo esta labor relacionaremos el concepto de *complejidad social* definido por Oprea, Lupton y Grant en 2018, con la *complejidad topológica* definida por Farber en el año 2003.

Abstract

The problem of finding a social choice function in a given preference space has always been dominated by Arrow's and Chichilnisky's Impossibility Theorems. In this paper we shall try to solve this problem by studying the type of homotopy of the preference space. In order to carry out this work we will relate the concept of *emphsocial complexity* defined by Oprea, Lupton and Grant in 2018, with the *topological complexity* defined by Farber in 2003.

Introducción

En este trabajo vamos a presentar la Teoría de la Elección Social dándole un enfoque topológico. Es decir, aplicaremos técnicas de la topología algebraica para estudiar la posibilidad o no de dar un algoritmo que proporcione una *función de elección social*. Para ello relacionaremos el concepto de *complejidad topológica* formulado por Farber en [9] en el año 2003, con la *complejidad social*, definida por Carrasquel, Lupton y Oprea en [5] en el año 2018.

Se trata de combinar un problema clásico de la Economía con un campo, el de los invariantes homotópicos, muy activo en el ámbito de la Topología. Más concretamente, vamos a combinar el problema de agregación de preferencias individuales en preferencias grupales, con la noción reciente de la *complejidad topológica*, de interés en robótica.

En el Capítulo 1 haremos una pequeña incursión en la Economía introduciendo el problema de la Elección Social, siguiendo el trabajo de Kinsey ([11]), así como la definición de sus principales elementos: *el conjunto de preferencias*, *la continuidad de la función* y *la función de elección social*. En el caso de la *función de elección social* profundizaremos en los conceptos de *Unanimidad* y *Anonimato*. Todos estos conceptos irán acompañados de sencillos ejemplos para facilitar su comprensión. Dichos ejemplos nos mostrarán que no es fácil encontrar una función continua que cumpla Unanimidad y Anonimato aunque sea en una situación muy sencilla y natural.

El término Elección Social es ya clásico en el ámbito de la Economía Matemática, aunque el enfoque desde el punto de vista de la *complejidad social* es muy reciente. Se trata de establecer un modelo para la toma de decisiones en contextos de tipo económicos, sociales o políticos, pudiendo extrapolarse a muchos otros ámbitos.

Incluiremos un desarrollo histórico del problema, con el fin de mostrar la evolución del enfoque del mismo. Este desarrollo comienza con el trabajo aportado por Arrow en 1951

([2]). Arrow afronta el problema desde un punto de vista combinatorio, pues solo contempla la versión discreta del conjunto de preferencias, lo que le hace formular su famoso Teorema de Imposibilidad, en el cual establece que no es posible definir una función que cumpla las condiciones de Anonimato, Unanimidad y continuidad.

La siguiente parada será el aporte topológico llevado a cabo por Chichilnisky en [6]. Considera que el conjunto de elementos que conforman el espacio de preferencias tiene estructura de espacio topológico y aplicando técnicas de la topología algebraica sobre un conjunto de preferencias no necesariamente discreto, acaba formulando su versión del Teorema de Imposibilidad. Como manifiesta el trabajo de esta autora, la existencia de una función continua cumpliendo las condiciones de Unanimidad y Anonimato en función de las propiedades del espacio de preferencias, es un problema topológico.

Seguiremos este recorrido con el estudio de las n -medias de Eckmann ([8]) y su relación con el problema que nos atañe. Eckmann desarrolló su trabajo tratando el problema de existencia de una n -media en un espacio topológico, aunque más tarde, gracias a las aportaciones de Chichilnisky en la Teoría de la Elección Social ([6]), resultó que la n -media generalizada de Eckmann era una función de elección social. Dicho de otra forma, Eckmann enfoca el problema de existencia de funciones de elección social como el problema de existencia de n -medias en espacios topológicos. Por tanto se puede decir que aunque no era el resultado que buscaba, Eckmann fue el primero en tratar el problema de existencia de una función de elección social desde un punto de vista topológico.

Finalmente acabaremos con el trabajo de Weinberger ([18]), donde establece que el problema de la Elección Social es puramente topológico y da la clave sobre cuando es posible dar una función de elección social.

En el Capítulo 2 estudiaremos el concepto de la *complejidad topológica*, así como sus variantes *complejidad topológica superior* y *complejidad topológica simétrica* y las relaciones entre ellas. Seguiremos el trabajo de Farber [9], donde introduce la complejidad topológica junto con resultados relacionados. Para completar tales demostraciones nos apoyamos en los trabajos de Rudyak ([14]), Lechuga y Murillo ([12]), y Farber y Grant ([10]).

Con el objetivo de realizar un trabajo lo más completo posible y poder llevar a cabo demostraciones de una forma más sencilla, daremos dos definiciones diferentes de la *complejidad topológica* y sus variantes. La primera de ellas será la definición dada por Farber ([9]) y la segunda la versión de Rudyak ([14]). Desde un primer momento veremos que ambas son equivalentes, lo que nos permitirá usar una u otra según lo requiera el resultado en el que nos halleemos. Para finalizar el Capítulo incluiremos una sección dedicada a un

breve estudio sobre los conjuntos ENR, de esta manera tendremos las herramientas necesarias para realizar de una forma más rigurosa ciertas demostraciones.

Finalmente en el Capítulo 3 relacionaremos los capítulos anteriores para poder estudiar el concepto de *complejidad social*. También trabajaremos sobre su variante, la *complejidad social superior*, para poder dar solución al mismo problema en el caso de que haya más de dos individuos. Nuestro cometido será tratar de definir una función de elección social que cumpla todas las condiciones comentadas. Para ello nos apoyaremos principalmente en el artículo de Carrasquel, Lupton y Oprea ([5]).

En este último capítulo compararemos los conceptos de *complejidad social* y *complejidad topológica (simétrica)*. Esta comparación nos dará pie a poder cerrar este trabajo formulando un resultado que relaciona la *complejidad topológica superior* con la *complejidad social superior* y la *complejidad simétrica superior*. La noción de *complejidad social superior* es nueva, y la hemos desarrollado a partir de un bosquejo inicial de Oprea, Lupton y Carrasquel ([5]), quienes en su momento no tenían a su disposición la noción de *complejidad topológica simétrica superior*, que años después sería desarrollada por Rudyak ([14]).

Capítulo 1

Elección social

1.1. Definición de Elección Social

Para comenzar este capítulo recogemos la definición que dio Kinsey en [11]. “La *Teoría de la Elección Social* es el estudio matemático de los mecanismos formales de agregación de preferencias individuales en preferencias grupales”.

En este sentido, el objetivo de la teoría de la elección social es el estudio de “las relaciones entre los objetivos de política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de la sociedad” ([15]) o dicho con otras palabras “se trata de buscar criterios de agregación de preferencias individuales en preferencias sociales” ([17]).

Con el fin de llevar a cabo la búsqueda de criterios de agregación vamos a considerar los siguientes elementos:

1. Una sociedad, formada por los diferentes individuos.
2. Un conjunto de alternativas sociales, sobre las que se aplica la elección.
3. Un criterio de elección social como forma de promediar las alternativas sociales.

También establecemos una regla de elección social con los siguientes elementos:

1. El “dominio” de la regla, o bien los argumentos a utilizar.
2. La “coherencia”, es decir imponer un criterio de racionalidad que se debe cumplir. Por ejemplo, que si utilizamos la regla en dos situaciones idénticas obtengamos el mismo resultado.
3. “Operatividad”, concretamente que a la hora de valorar alternativas, nos indique cual es preferible.

De manera que el problema planteado sería el siguiente: Dada una sociedad y un conjunto de alternativas sociales, se trata de estudiar qué procedimientos de valoración social se derivan de agregar las preferencias de los individuos si se tienen en cuenta los requisitos de todos.

1.1.1. Conjunto de preferencias

Tradicionalmente, la teoría de la elección social consideraba el caso de un conjunto de preferencias finito y discreto, lo cual provocaba que su estudio fuera llevado a cabo en el campo de la combinatoria. Sin embargo, hay muchos casos en los que surge de manera natural considerar el conjunto de alternativas como un conjunto continuo. Fue en los años 80 cuando Chichilnisky en [6] desarrolló la estructura para estudiar la teoría de la elección social para un conjunto continuo de alternativas, usando argumentos pertenecientes a la topología algebraica, llegando a resultados análogos al teorema de Imposibilidad de Arrow (Teorema 1.2).

Para ver de una forma más clara el caso de un conjunto de preferencias no necesariamente discreto nos vamos a apoyar en una serie de sencillos ejemplos dados por Baigent en [3], en los cuales el espacio de preferencias será la circunferencia S^1 .

Consideremos el caso de dos amigos que quieren acampar en la orilla de un lago con forma circular, pero que no se ponen de acuerdo para decidir el punto exacto. Considerando S^1 en coordenadas polares tenemos que una “función de bienestar social” podría ser

$$f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$$

$$(\theta_1, \theta_2) \mapsto f(\theta_1, \theta_2) = \theta_0.$$

Siendo $(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$ las preferencias de ambos compañeros y f la aplicación constante que a cada par (θ_1, θ_2) le asigna el punto $\theta_0 \in S^1$. Otra opción sería considerar la aplicación continua $f(\theta_1, \theta_2) = \theta_1$, la cual a cada par (θ_1, θ_2) le asignará la elección del primer individuo. En este caso se dice que la función de bienestar social f es dictatorial con respecto al individuo 1.

Para evitar funciones como las que acabamos de comentar vamos a necesitar que se cumplan dos propiedades exigibles de manera natural: *Unanimidad* y *Anonimato*. Una función de bienestar social es *Unánime* (UN) si en el caso de que todos los individuos tengan la misma preferencia, sea esta la preferencia social. En el caso anterior, si $f(\theta, \theta) = \theta$, para

todo $\theta \in S^1$. Por otro lado se dice que una función de bienestar social es *Anónima* (AN) si es invariante frente a la permutación de las elecciones de los individuos. En el caso anterior, esta propiedad se puede escribir como $f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_2, \theta_1)$, para todo $\theta_1, \theta_2 \in S^1$.

Volviendo al ejemplo anterior podemos ver que las funciones de bienestar social constantes son AN pero no UN, mientras que las dictatoriales son UN pero no AN.

1.1.2. Continuidad de la función

Finalmente veamos un ejemplo de una función que cumple tanto UN como AN pero que no es continua.

En este caso seguimos considerando la circunferencia S^1 , dotada de la topología usual, como el espacio de preferencias. La aplicación $f: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ va a ser aquella que a cada par de puntos $(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$ le asigna el punto medio $\tilde{\theta} \in S^1$ entre ambos siguiendo el arco más corto que los une. Entonces tenemos que la continuidad de la aplicación f se garantiza siempre y cuando θ_1, θ_2 no sean antipodales, pues solo hay un arco que sea el más corto entre ellos. Sin embargo, cuando son antipodales, es cuando nos encontramos con la discontinuidad de f . Veámoslo.

Fijemos $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$ tenemos que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} f(\theta_1, \theta_2 + \epsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Tomando ahora el límite por la derecha tenemos que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\theta_1, \theta_2 + \epsilon) = \frac{3\pi}{2}.$$

De manera que como ambos límites para un mismo punto son diferentes tenemos que f es discontinua en el punto $(0, \pi)$ sin embargo cumple UN y AN.

Los ejemplos anteriores manifiestan que no es fácil encontrar una función continua y que verifique los axiomas de UN, AN aunque sea en una situación muy sencilla y natural. A continuación daremos la definición de una aplicación con estas características.

1.1.3. Función de elección social

Definición 1.1. Sea X un espacio de preferencias dotado de una topología no necesariamente discreta, decimos que $f: X \times X \rightarrow X$ es una *función de elección social* si cumple las siguientes condiciones:

1. *Unanimidad*: $f: X \times X \rightarrow X$ es unánime si $f(x, x) = x$, para todo $x \in X$. En otras palabras si tomamos la aplicación $\Delta: X \rightarrow X \times X$ con $\Delta(x) = (x, x)$ tenemos que $f \circ \Delta = \text{id}$.
2. *Anonimato*: $f: X \times X \rightarrow X$ es anónima si $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$, para todo $x_1, x_2 \in X$. Es decir, $f \circ \sigma = f$ para todo elemento σ del grupo de permutaciones Σ_2 .
3. *Continuidad*: $f: X \times X \rightarrow X$ es continua, es decir, el output es continuo con respecto al input.

Aclaremos con más detalle qué quieren decir estas características.

En primer lugar, que cumpla UN quiere decir que si todos los agentes tienen la misma preferencia, ésta va a ser la preferencia social. En el caso de AN nos referimos a que el orden de agregación de las preferencias de los individuos no cambiará el resultado de la función de elección social, o dicho de otra forma, que el output es invariante ante permutaciones del input. Finalmente cuando nos referimos a la continuidad de la misma, queremos decir que antes pequeños cambios en el input, el output no sufrirá tampoco grandes cambios.

1.2. Desarrollo histórico

En esta sección haremos un breve recorrido por los principales desarrolladores de la Teoría de la Elección Social y su evolución a través de sus trabajos.

1.2.1. El enfoque de Arrow

Uno de los primeros en estudiar este problema fue el matemático y economista estadounidense Kenneth Joseph Arrow (1921–2017). En su trabajo ([2]), trata el problema de encontrar una función de elección social para un conjunto de preferencias discreto, por tanto le da un punto de vista combinatorio a la resolución del problema. Finalmente llega a su famoso *Teorema de Imposibilidad* (1.2), en el cual establece la imposibilidad de dar una función de elección social que cumpla las condiciones de Anonimato, Unanimidad y continuidad.

En su trabajo original, Arrow trabaja con “funciones de bienestar social”, para las cuales define una relación de orden, o relación de preferencia, en el conjunto de preferencias que debe de cumplir ciertas condiciones.

Para definir la regla de elección social consideramos un conjunto $N = 1, \dots, n$ de individuos y R_i la preferencia del i -ésimo individuo sobre un conjunto de preferencias P .

De manera que siendo $a, b \in P$, se tiene que si a es preferido a b por el individuo i -ésimo lo denotamos como $a \succeq_i b$.

De esta manera definimos la función de bienestar social F como sigue:

$$R = F(R_1, \dots, R_n),$$

siendo $a \succeq b$, si a es el resultado de la función de bienestar social. Ahora bien esta función ha de cumplir las siguientes condiciones:

1. “Dominio Universal”(U): La regla de elección social está definida para toda configuración posible de preferencias individuales.
2. “Principio de Pareto” (P): Sean $a, b \in P$, si para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que $a \succ_i b$, entonces $a \succ b$.
3. “No Dictador”(D): No existe $j \in N$ tal que para todo $a, b \in P$ se tenga que:

$$a \succeq_j b \Rightarrow a \succeq b$$

4. “Independencia de alternativas irrelevantes” (I): Sean (R_1, \dots, R_n) y (R'_1, \dots, R'_n) dos posibles configuraciones de preferencias individuales, y sean R, R' las correspondientes relaciones de preferencia, es decir:

$$R = F(R_1, \dots, R_n), R' = F(R'_1, \dots, R'_n),$$

entonces si para todo $i \in N$ se verifica $a \succeq_i b \Leftrightarrow a \succeq'_i b$ entonces:

$$a \succeq b \Leftrightarrow a \succeq' b.$$

Ahora ya estamos en las condiciones de enunciar el Teorema de Imposibilidad de Arrow.

Teorema 1.2. [2] *No existe ninguna función de bienestar social capaz de satisfacer simultáneamente las condiciones U, P, D e I.*

1.2.2. El enfoque topológico

A principios de los años 80, la matemática y economista argentina-estadounidense, nacida en Buenos Aires, Graciela Chichilnisky en [6] dio el salto a considerar el espacio de preferencias P como un espacio topológico no necesariamente discreto, un cambio muy significativo con respecto al enfoque discreto de Arrow. Aunque el uso de técnicas topológicas le llevase a resultados equivalentes al Teorema de Imposibilidad de Arrow, como podemos ver en el siguiente resultado.

Teorema 1.3. *[[6], Teorema 1] Sea P un espacio de preferencias $P^k = P \times \dots \times P$, entonces no existe una función de elección social, es decir una aplicación*

$$f: P^k \rightarrow P$$

que cumpla:

1. *Estabilidad, es decir, f continua;*
2. *anonimato, es decir, $f(p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)}) = f(p_1, \dots, p_k)$, para cualquier permutación σ de $1, \dots, k$; y*
3. *unanimidad, es decir, $f(p, \dots, p) = p$, para todo $p \in P$.*

Baryshnikov en [4] sugiere que ambos enfoques pertenecen a una teoría común, aunque clásicamente se haya tomado más naturalmente el punto de vista discreto propuesto por Arrow, dejando el enfoque topológico como una opción antinatural o forzada.

1.2.3. La n -media de Eckmann

“La existencia de un modelo de elección social en un espacio de preferencias P es un problema topológico, incluso un problema homotópico” (Eckmann).

En los años 50 el matemático suizo Beno Eckmann desarrolló su trabajo tratando el problema de existencia de una n -media en un espacio topológico, aunque más tarde, gracias a las aportaciones de Chichilnisky en la Teoría de la Elección Social, resultó que la n -media generalizada de Eckmann era una función de elección social. Por tanto se puede decir que aunque no era el resultado que buscaba, Eckmann fue el primero en tratar el problema de existencia de una función de elección social desde un punto de vista topológico.

Eckmann ([8]) trata problema de existencia de funciones de elección social como si fuera el problema de existencia de n -medias en espacios topológicos. Por eso puede pasar el problema a grupos usando los grupos de homotopía.

Para verlo con más detalle veamos los siguientes resultados.

Definición 1.4. Sea X un conjunto y $n > 1$ con $m \in \mathbb{Z}$. Una aplicación $f: X^n \rightarrow X$ es una *media de grado n en X* si:

1. Para todo $x_1, \dots, x_n \in X$, se tiene

$$f(s(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $s \in \Sigma_n$. Siendo Σ_n el grupo de permutaciones de n elementos.

2. Para todo $x \in X$, se tiene $f(x, \dots, x) = x$.

En este caso se tiene que si X es un grupo, una media es “algebraica” si la aplicación f es un homomorfismo. Por otro lado, si X es un espacio topológico, una media es “topológica” si f es una aplicación continua.

Como vimos con anterioridad en la Definición 1.1, la Definición 1.4 sólo necesita de la condición de *Continuidad* para que sea una función de elección social. De esta manera Eckmann en [8] define la función de elección social de la siguiente forma.

Definición 1.5. Sea P un espacio de preferencias con estructura de espacio topológico, N una sociedad de n agentes donde $p_j \in P$ es la preferencia del j -ésimo agente con $j \in 1, \dots, n$. Una *función de elección social* es una función

$$F: P^n \rightarrow P$$

$$(p_1, \dots, p_n) \mapsto F(p_1, \dots, p_n).$$

Cumpliendo las condiciones de continuidad, unanimidad y anonimato.

Por tanto gracias a estas definiciones podemos deducir que una n -media en un espacio conexo P es lo mismo que una función de elección social. Tomando los grupos de homotopía $\pi_i(P)$, tenemos que llevan aplicaciones continuas en homomorfismos. Para poder ver los siguientes pasos, tenemos que ver primero unos resultados acerca de los grupos de homotopía, que encontramos en [1].

Definición 1.6 ([1], Definición 7.2.1). Sea (X, x_0) un espacio punteado, para cualquier entero $n \geq 1$, el n -ésimo grupo de homotopía lo denotamos como

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, s_n), (X, x_0)].$$

Para $n = 1$ es el grupo fundamental. Para $n \geq 2$, lo llamamos grupo de homotopía superior.

Ahora veamos los resultados respectivos a este concepto, cuyas pruebas las podemos encontrar en [1].

Teorema 1.7 ([1], Corolario 7.2.4). Sea X un espacio punteado, entonces para $n \geq 2$, los grupos $\pi_n(X)$ y $\pi_1(\Omega^{n-1}X)$ son isomorfos.

Teorema 1.8 ([1], Corolario 7.3.6). Sea $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una función continua, entonces f induce un homomorfismo $f_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ para cualquier $n \geq 1$.

Corolario 1.9 ([1], Corolario 7.3.7). Sean (X, x_0) y (Y, y_0) dos espacios punteados con el mismo tipo de homotopía, entonces para cada $n \geq 1$, existe un isomorfismo de grupos $\psi: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ para cada $n \geq 1$.

Por tanto tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.10 ([8], Proposición 1). *Una n -media topológica en un espacio P induce una n -media algebraica en cada grupo de homotopía $\pi_i(P)$, $i \geq 1$.*

Finalmente veamos el siguiente resultado de Eckmann, relativo a la existencia de n -medias en grupos.

Teorema 1.11. *Sea G un grupo. Sea $n \geq 2$ un entero, se tiene que si G admite alguna n -media algebraica entonces G es abeliano.*

Demostración. Sea G un grupo, supongamos que existe $f: G^n \rightarrow G$, siendo f una n -media algebraica. Entonces, como f cumple anonimato:

$$f(x, 0, \dots, 0) = f(0, x, \dots, 0) = \dots = f(0, \dots, 0, x),$$

para todo $x \in G$. Definimos

$$\begin{aligned} g: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto g(x) = f(x, 0, \dots, 0), \end{aligned} \tag{1.1}$$

Entonces para todo $x, y \in G$ y teniendo en cuenta que f es homomorfismo de grupos tenemos que

$$\begin{aligned} g(x + y) &= f(x + y, 0, \dots, 0) \\ &= f(x, 0, \dots, 0) + f(y, 0, \dots, 0) = g(x) + g(y). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Con lo cual la aplicación g es un homomorfismo de grupos. Además

$$\begin{aligned} g(x) + g(y) &= f(x, 0, \dots, 0) + f(y, 0, \dots, 0) \\ &= f(x, 0, \dots, 0) + f(0, y, \dots, 0) = f(x, y, 0, \dots, 0) \\ &= f(y, x, 0, \dots, 0) = f(y, 0, \dots, 0) + f(x, 0, \dots, 0) \\ &= f(y, 0, \dots) + f(0, x, 0, \dots, 0) = f(y + x, 0, \dots, 0) = g(y + x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por lo tanto

$$g(x) + g(y) = g(y) + g(x). \tag{1.4}$$

Además por la condición de *Unanimidad* de f tenemos que

$$ng(x) = f(x, 0, \dots, 0) + f(0, x, \dots, 0) + \dots + f(0, \dots, 0, x) = f(x, x, \dots, x) = x,$$

de manera que para todo $x, y \in G$ y sabiendo por 1.2.3 que $g(x), g(y)$ conmutan, tenemos que:

$$x + y = ng(x) + ng(y) \stackrel{1,2,3}{=} n(g(x) + g(y)) = n(g(y) + g(x)) \stackrel{1,2,3}{=} ng(y) + ng(x) = y + x.$$

Que es lo que queríamos probar. \square

Definición 1.12. Sea G un grupo, se dice que G es únicamente divisible por n si cada elemento $g \in G$ es de la forma nh para un único h .

La anterior definición es equivalente a decir que la aplicación

$$\begin{aligned} n: G &\rightarrow G \\ h &\mapsto nh, \end{aligned}$$

es biyectiva.

Inmediatamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.13 ([8], Teorema 2). *Si un grupo G admite una n -media algebraica para algún $n \geq 2$ entonces G es abeliano, la multiplicación por n es un automorfismo de G y G es únicamente divisible por n .*

Demostración. Sea un G un grupo que admite una n -media algebraica. Basta aplicar el Teorema 1.11 para ver que es abeliano.

Veamos ahora que la multiplicación por n es un automorfismo en G .

Para todo $x, y \in G$ tenemos que

$$n(x + y) = nx + ny. \quad (1.5)$$

Por tanto la multiplicación por n es un endomorfismo en G . Ahora bien como la aplicación g definida en es un homomorfismo, que junto con

$$ng(x) = x. \quad (1.6)$$

De lo que deducimos que g es la inversa de multiplicar por n . Siendo la aplicación

$$\begin{aligned} n: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto nx = x + \cdots + x \end{aligned}$$

Así que por 1.5 y 1.6 tenemos que n es un automorfismo en G . □

Ahora veamos que

Proposición 1.14. *El orden de cualquier elemento debe de ser primo con n .*

Demostración. Como G es abeliano y finitamente generado, tenemos que por el Teorema de Estructura:

Teorema Todo grupo abeliano finitamente generado G es isomorfo al producto de grupos abelianos cíclicos. En concreto, a $\mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_r}$, donde $q_i = p_i^{k_i}$, para p_1, \dots, p_r números primos (no necesariamente distintos) y $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$. Los enteros q_1, \dots, q_r son únicos salvo por el orden.

Por tanto todo elemento del grupo puede escribirse como

$$x = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t)$$

donde los $x_i \in \mathbb{Z}$ y $y_j \in \mathbb{Z}_{q_j}$.

Si todo x es de la forma ny entonces $x_i = ny_i$. Como esto no es cierto en \mathbb{Z} , pues no todos los enteros son múltiplos de n , no puede haber parte libre, es decir, el rango $m = 0$.

Sólo queda la parte de torsión $\mathbb{Z}_{q_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_t}$, que es un grupo finito, así que todos los elementos de G tienen orden finito.

Supongamos que hubiese un elemento $x \in G$ que tiene un orden k que no es primo con n . Es decir, habría un número primo p que divide al mismo tiempo a k y a n .

Pongamos $q_j = p_j^{k_j}$ con p_j primo.

Por el teorema de Lagrange, en un grupo finito como G el orden de un elemento divide al orden del grupo, que es $q_1 \cdots q_t = p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t}$. Por tanto los únicos primos que pueden aparecer en la descomposición de k son los p_1, \dots, p_t . Así que p es uno de los p_j .

Tomemos un elemento cualquiera y_j del $\mathbb{Z}_{q_j} \subset G$, para ese j . Entonces $y = nz$ para algún $z \in G$, es decir,

$$(0, \dots, 0, y_j, 0, \dots, 0) = (nz_1, \dots, nz_j, \dots, nz_t)$$

luego $y_j = nz_j$, es decir \mathbb{Z}_{q_j} es un grupo divisible por n , con $q_j = p^{k_j}$ y n múltiplo de p . Por tanto todo elemento de \mathbb{Z}_{q_j} es múltiplo de p . Esto debe ser imposible. Vamos a verlo:

$$\mathbb{Z}_{q_j} = \{0, 1, 2, \dots, p, p+1, \dots, p^2, p^2+1, \dots, p^{k_j}\}$$

y claramente $p-1$ no es múltiplo de p . □

En este momento acabamos de probar que el orden de cualquier elemento del grupo G es finito y primo con n . En particular, si X es un CW-complejo finito, sus grupos de homotopía son finitamente generados. En ese caso, los Π_i no tienen parte libre. Por ejemplo las esferas cumplen que $\pi_k(S^k) = \mathbb{Z}$, por tanto ninguna esfera S^k admite una n -media.

([8], 4.2) Ahora consideremos los grupos de homología $H_i = H_i(X; \mathbb{Z})$. Aplicando el Teorema de Hurewicz, podemos encontrar la relación entre los grupos de homotopía y los grupos de homología, llegando a que los grupos de homología también son únicamente divisibles.

El siguiente paso que da Eckmann es ver que si un espacio X admite una n -media topológica, entonces X es un H -espacio. Pero antes de demostrarlo, veamos qué es un H -espacio.

Definición 1.15. Un espacio X es un H -espacio si existe una aplicación continua $\mu: X \times X \rightarrow X$, y un elemento $e \in X$ tal que las aplicaciones

$$x \in X \mapsto \mu(x, e) \in X$$

y

$$x \in X \mapsto \mu(e, x) \in X$$

son homótopas a la identidad id_X .

Lema 1.16. ([8], Teorema 5) Si en un CW-complejo X hay una n -media $m: X^n \rightarrow X$ para algún $n \geq 2$, entonces X es un H -espacio.

Demostración. Si $e \in X$ es un punto fijado, podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: X &\rightarrow X \\ x &\mapsto \phi(x) = m(x, e, e, \dots, e). \end{aligned}$$

Esta aplicación induce en los grupos de homotopía el isomorfismo de grupos g (1.2.3), que es el inverso de multiplicar por n (1.6). Ahora bien por un teorema de Whitehead, si X es un CW-complejo, una aplicación continua que induce isomorfismos en todos los grupos de homotopía es una equivalencia de homotopía.

Entonces, sea ψ la inversa homotópica de ϕ , es decir, $\phi \circ \psi \simeq \text{id}_X$ y $\psi \circ \phi \simeq \text{id}_X$. Definimos la operación

$$\mu(x, y) = (\psi \circ m)(x, y, e, \dots, e),$$

y veamos que X cumple la definición de H -espacio.

$$\mu(x, e) = (\psi \circ m)(x, e, \dots, e) = \psi(m(x, e, \dots, e)) = \psi(\phi(x)) = (\psi \circ \phi)(x) \simeq \text{id}_X(x). \quad (1.7)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mu(e, x) &= (\psi \circ m)(e, x, e, \dots, e) = \psi(m(e, x, e, \dots, e)) \\ &\stackrel{m \text{ anónima}}{=} \psi(m(x, e, \dots, e)) = \psi(\phi(x)) = (\psi \circ \phi)(x) \simeq \text{id}_X. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Por lo tanto X es un H -espacio. \square

Como último paso, por un teorema de Brodwer tenemos que: si X es un CW-complejo de dimensión d , que no es contráctil, entonces satisface que $H^d(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Sin embargo como ese no es nuestro caso, tenemos que X es contráctil. Es decir, hemos probado

Teorema 1.17. ([8], Teorema 3) Si un CW-complejo finito admite una n -media para algún n , entonces es contráctil.

1.2.4. La clave de la solución

Llegamos a que en 2004, el matemático estadounidense Shmuel Weinberger, demuestra en [18] que si un espacio CW complejo finito y conexo admite una función de elección social continua, anónima y unánime para un número entero $n \geq 2$ de agentes, entonces el espacio de preferencias es contráctil.

De esta manera llegamos a la certera conclusión de que el problema de encontrar funciones de elección social que cumplan las condiciones anteriores, es finalmente un problema de carácter topológico. Como podemos ver en la siguiente Proposición.

Proposición 1.18 ([18], Proposición 1.2). *La existencia o no existencia de una función de elección social que satisfaga continuidad, anonimato y unanimidad en un espacio X , solo depende del tipo de homotopía de X .*

Capítulo 2

Complejidad topológica

En este capítulo vamos a estudiar un concepto introducido por Farber en el año 2003 ([9]), llamado la Complejidad Topológica. Este nuevo concepto nos permite estudiar problemas de diferentes ámbitos, como el de la robótica, desde la perspectiva de la topología, así como el estudio del problema de planificación de movimientos. Murillo en [12] lo describe como la creación, diseño e implementación de algoritmos en un robot o conjunto de robots que le permitan moverse adecuadamente por el entorno en el que “viven”.

2.1. Introducción

En este trabajo vamos a estudiar la aplicación de la Complejidad Topológica en el problema de la planificación de movimientos. Este problema se encuentra, por ejemplo, en el caso de un brazo robot a la hora de analizar sus posibles movimientos y la elección de los mismos.

2.2. Definición de complejidad topológica

En primer lugar consideremos un espacio topológico X , como el espacio de todas las posibles configuraciones de un sistema mecánico, por lo que lo llamamos el *espacio de configuraciones*. Definimos el problema de la planificación del movimientos como la elaboración de un programa, en el que el output ha de ser continuo respecto al input, es decir que el camino resultante debe depender continuamente de las entradas a, b y que además, dados un par de puntos $(a, b) \in X \times X$ nos proporciona un camino continuo en X que empiece en a , y acabe en b . Por lo tanto nuestro espacio de configuraciones X ha de ser conexo por caminos.

Podemos describirlo de esta otra forma. Sea X^I el espacio de los caminos continuos

$\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ en X . Tomando $\pi: X^I \rightarrow X \times X$ como la aplicación que a cada camino $\gamma \in X^I$ le asocia el par $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$, formado por los extremos del camino. Al espacio X^I lo dotamos de la topología compacto-abierto. Por lo tanto nuestro problema consiste en encontrar una aplicación continua $s: X \times X \rightarrow X^I$ de forma que $\pi \circ s = \text{id}_X$, siendo id la aplicación identidad.

Recordemos que al espacio X^I lo hemos dotado de la topología compacto-abierto, por lo que la vamos a definir.

Definición 2.1 ([13], pág. 285). Sean X, Y espacios topológicos y sea

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ es continua} \}.$$

Si C es un subespacio compacto de X y U un subconjunto abierto de Y , definimos

$$S(C, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(C) \subset U\}.$$

Los conjuntos $S(C, U)$ forman una subbase para una topología sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ que llamamos topología *compacto-abierto*.

Una vez definida la topología compacto-abierto, podemos demostrar que la aplicación π es continua.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio topológico con una topología τ y X^I el espacio de los caminos continuos $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, dotado con la topología compacto-abierto. La aplicación*

$$\begin{aligned} \pi: X^I &\rightarrow X \times X \\ \gamma &\mapsto (\gamma(0), \gamma(1)) \end{aligned} \tag{2.1}$$

es continua.

Demostración. Queremos probar que la aplicación $\pi: X^I \rightarrow X \times X$ es continua.

Para ello vamos a ver que las componentes $p_i \circ \pi: X^I \rightarrow X$, $i = 1, 2$ son continuas. Lo vamos a ver solo con $i = 1$, pues con $i = 2$ es análogo. Sea U un abierto en X .

Tenemos que

$$(p_1 \circ \pi)^{-1}(U) = \pi^{-1}(p_1^{-1}(U)) = S(U, \{0\}).$$

Tenemos entonces que $S(U, \{0\})$ es un abierto subbásico en la topología compacto-abierto, pues $\{0\}$ es un punto en I por lo que es un compacto.

Ahora bien como $p_i \circ \pi$, $i = 1, 2$ es continua, entonces π es continua. \square

Ahora nos surge la cuestión de si es posible construir una planificación de movimientos global que permita a la aplicación $s: X \times X \rightarrow X^I$ ser continua. Para ello vamos necesitar recordar las definiciones de espacio contráctil y aplicación nulhomótopa.

Definición 2.3. Un espacio topológico es *contráctil* cuando tiene el mismo tipo de homotopía que un punto.

Definición 2.4. Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es *nullhomótopa* si es homótopa a alguna aplicación constante.

Usando estas dos definiciones obtenemos el siguiente resultado que usaremos para demostrar este primer teorema.

Teorema 2.5. *[[9], Teorema 1] Sea X el espacio de configuraciones de un sistema mecánico y X^I el espacio de caminos continuos en X . Existe una planificación continua de movimientos global $s: X \times X \rightarrow X^I$ si y solo si el espacio X es contráctil.*

Demostración.

“ \Rightarrow ” En primer lugar consideramos que existe la aplicación continua $s: X \times X \rightarrow X^I$ y fijamos un punto arbitrario $x_0 \in X$. Nos basta con tomar la siguiente homotopía

$$H: X \times I \rightarrow X, \quad H(a, t) = s(x_0, a)(t)$$

con $a \in X$ y $t \in I$. Veamos ahora que la aplicación $H: X \rightarrow X$ es continua. Como $s: X \times X \rightarrow X^I$ es una aplicación continua se tiene lo siguiente:

1. La aplicación

$$\begin{aligned} i_2: X &\rightarrow X \times X \\ a &\mapsto (x_0, a) \end{aligned} \tag{2.2}$$

es continua por la definición de la topología producto. Sea $U \times V$ un abierto básico en $X \times X$ tenemos que

$$i_2^{-1}(U \times V) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x_0 \notin U \\ V & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$

2. La composición

$$\begin{aligned} s \circ i_2: X &\rightarrow X^I \\ a &\mapsto s(x_0, a) \end{aligned}$$

es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

3. La aplicación

$$\begin{aligned} \sigma: X \times I &\rightarrow X^I \times I \\ (a, t) &\mapsto (s(x_0, a), t) \end{aligned}$$

es continua pues sus dos componentes son continuas.

4. La aplicación “evaluación” es continua. Sea

$$\begin{aligned} \text{ev}: X^I \times I &\rightarrow X \\ (\phi, t) &\mapsto \phi(t) \end{aligned}$$

Sea $U \subset X$ un abierto, tenemos que probar que $\text{ev}^{-1}(U)$ es un abierto de $X^I \times I$, con la topología producto.

Dado $(\phi, t) \in \text{ev}^{-1}(U)$ habrá que encontrar un entorno de (ϕ, t) que esté contenido en $\text{ev}^{-1}(U)$. Nótese que $\phi(t) = \text{ev}(\phi, t) \in U$. Como $\phi: I \rightarrow X$ es continua, $\phi^{-1}(U)$ es abierto en I , y contiene a t . Como $I = [0, 1]$ es localmente compacto, existirá un entorno compacto K de t tal que $t \in K \subset \phi^{-1}(U)$. Es decir, $\phi(K) \subset U$, con lo que $\phi \in S(K, U)$, abierto subbásico de la topología compacto-abierto.

Que K sea un entorno de t quiere decir que existe un abierto $W \subset I$ tal que $t \in W \subset K$.

Entonces $S(K, U) \times W$ es un abierto de la topología producto, que contiene a (ϕ, t) . Veamos que está contenido en $\text{ev}^{-1}(U)$.

Si $(\varphi, s) \in S(K, U) \times W$ entonces

$$\text{ev}(\varphi, s) = \varphi(s) \in U,$$

ya que $s \in W$ y

$$\varphi(s) \in \varphi(W) \subset \varphi(K) \subset U.$$

Como vemos esta homotopía cumple que $H(a, 0) = x_0$, $H(a, 1) = a$, con $a \in X$ y por tanto nos da una contracción de X en x_0 . Así que tenemos que X es contráctil.

“ \Leftarrow ”

Supongamos que el espacio X es contráctil. Dado que es contráctil existe una homotopía entre la identidad y la aplicación constante c_{x_0} con $x_0 \in X$ por lo que podemos dar la siguiente homotopía:

$$H: X \times I \rightarrow X,$$

con

$$H_0(a) = a, \quad H_1(a) = x_0.$$

De manera que dado $(a, b) \in X \times X$ podemos dar la siguiente aplicación definida a trozos.

$$s(a, b) = \begin{cases} H_{2t}(a) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ H_{2(1-t)}(b) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Donde tenemos que la aplicación s era lo que buscábamos. □

Ahora ya tenemos todo lo necesario para definir el invariante introducido por Farber en [9], la *complejidad topológica*.

Definición 2.6. Sea X un espacio topológico conexo por caminos, definimos complejidad topológica de la planificación de movimientos de X como el menor número $\text{TC}(X) = k$ tal que el producto cartesiano $X \times X$ puede ser recubierto por k subconjuntos abiertos

$$X \times X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$$

tales que para cada $j = 1, 2, \dots, k$ existe una planificación continua de movimientos $s_j: U_j \rightarrow X^I$, $\pi \circ s_j = i_j$ sobre U_j . Si no existe tal número decimos que $\text{TC}(X) = \infty$.

Dicho de otra forma, podemos decir que la complejidad topológica es la cantidad mínima de discontinuidades de la aplicación s .

2.3. Ejemplos

Veamos algunos ejemplos en los que calculamos la complejidad topológica de algunos espacios.

Ejemplo 2.7. [9] Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo, por lo que para cada par de puntos $(a, b) \in X \times X$ podemos encontrar un segmento de la forma $ta + (1 - t)b$ con $t \in [0, 1]$ que los una, y por tanto un algoritmo continuo que nos de el camino. Vemos que en este caso sí que se puede encontrar tal algoritmo pues X es contráctil y por tanto $\text{TC}(X) = 1$.

Ejemplo 2.8. [9] Veamos que en el caso de la circunferencia $X = S^1$, se tiene $\text{TC}(X) = 2$. En primer lugar podemos ver que $\text{TC}(X) > 1$ porque X no es contráctil. Tenemos que separar nuestro problema en dos casos diferentes: los puntos antipodales y los puntos que no lo son. Cuando dos puntos no son antipodales es sencillo dar un algoritmo continuo, pues nos basta con el arco más corto que hay entre los dos puntos. El problema viene con lo puntos antipodales, pues ambos arcos son iguales y tenemos que definir un algoritmo continuo para decidir qué camino tomar. Para ello fijaremos una dirección privilegiada. Veamos que $\text{TC}(X) = 2$.

Tenemos que encontrar $U_1, U_2 \subset X \times X$ abiertos, tales que $S^1 \times S^1 = U_1 \cup U_2$ y en cada uno de ellos podamos dar una sección continua. Para que sea más sencillo, podemos ver la circunferencia S^1 como al intervalo $I = [0, 1]$ con los extremos identificados y el toro

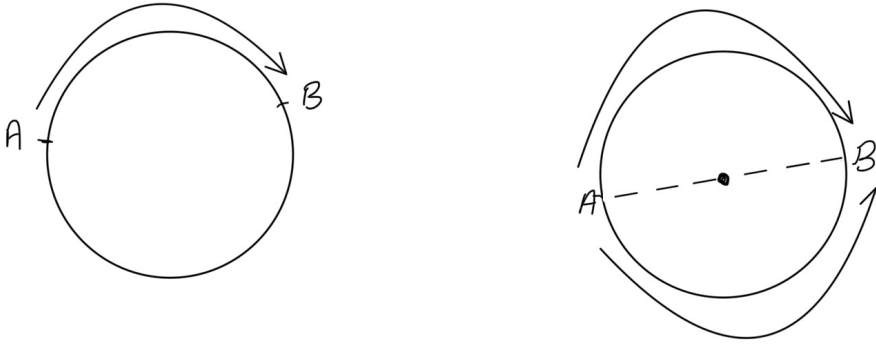


Figura 2.1: Igualdad de los arcos cuando dos puntos son antipodales.

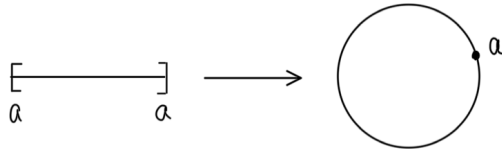


Figura 2.2: La circunferencia como cociente de un intervalo.

$S^1 \times S^1$ como un cociente de $I \times I$ con los lados identificados (figura 2.8).

En el caso de los puntos antipodales, tenemos que el argumento de un punto $p = (\cos \theta, \sin \theta)$ en S^1 viene dado por $\theta = 2\pi t$, $t \in I$ por tanto su punto antipodal $-p = (\cos \hat{\theta}, \sin \hat{\theta})$, siendo

$$\hat{\theta} = 2\pi t + \pi \pmod{2\pi}.$$

Entonces la relación entre estos dos puntos en $I \times I$ será

$$2\pi s = 2\pi t + \pi \Leftrightarrow 2s = 2t + 1 \Leftrightarrow s = t + \frac{1}{2},$$

que es la recta de color azul en la figura 2.8. En el caso de dos puntos iguales tendríamos $s = t$, que es la recta de color rojo en la figura 2.8

Entonces basta tomar los abiertos

$$U_1 = \{(A, B) \in S^1 \times S^1 \mid A \neq -B\}$$

que corresponde a

$$I \times I - \{(t, s) \mid s = t + \frac{1}{2}\}$$

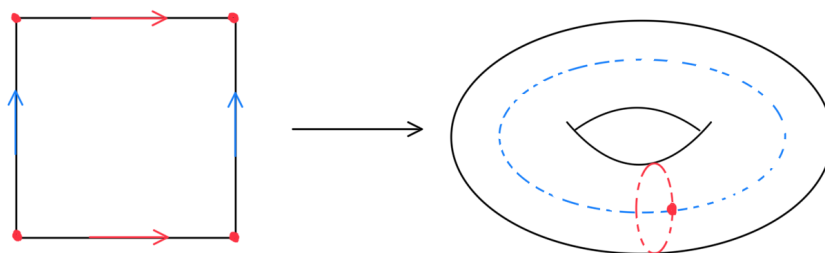
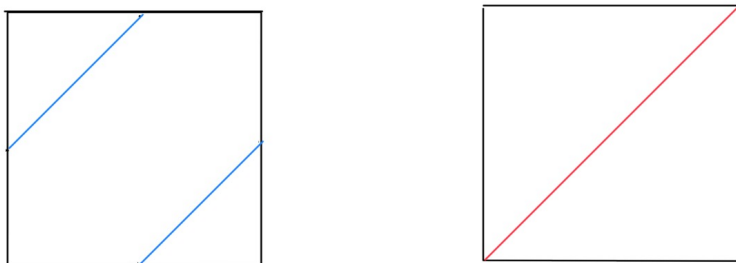


Figura 2.3: El toro como espacio cociente.

Figura 2.4: Representación gráfica de U_1 y U_2 en $I \times I$.

y

$$U_2 = \{(A, B) \in S^1 \times S^1 \mid A = -B\}$$

que corresponde a

$$I \times I - \{(t, s) \mid s = t\}$$

. Veamos que U_1, U_2 son abiertos. Para ellos consideramos que son los complementarios de dos conjuntos cerrados en T^2 . Efectivamente tomando los conjuntos $F_1 = \{(A, B) \mid A = -B\}$ y $F_2 = \{(A, B) \mid A = B\}$ que son cerrados ya que son las imágenes del compacto S^1 por las aplicaciones

$$\begin{aligned} \phi_1: S^1 &\rightarrow T^2 \\ A &\mapsto (A, -A) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\phi_2: S^1 &\rightarrow T^2 \\ A &\mapsto (A, A).\end{aligned}$$

De forma que

$$S^1 \times S^1 = U_1 \cup U_2.$$

Por lo que obtenemos que $\text{TC}(S^1) = 2$ que es lo que queríamos ver.

Ahora tomamos el caso de la esfera S^2 , para ello necesitamos el siguiente resultado que vimos en la asignatura Teoría Global de Superficies.

Teorema 2.9. [Teorema de la esfera peluda] *Si n es par, entonces en S^n todo campo de vectores tangentes continuo $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ se anula en algún punto.*

Si n es impar existe un campo de vectores tangente continuo en S^n $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con un único punto B_0 en el que el campo es nulo.

Ejemplo 2.10. [9] Sea $X = S^2$ vamos a ver que $\text{TC}(X) = 3$. En primer lugar definimos

$$U_1 = \{(a, b) | a \neq -b\} \subset X \times X$$

y tomamos la planificación continua de movimiento $s_1: U_1 \rightarrow X^I$ tomando como $s_1(a, b) \in X^I$ el menor arco del círculo máximo que contiene a a y b .

Ahora bien por el Teorema 2.9 existe $v: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de vectores tangente a X tal que $v(p) = 0 \Leftrightarrow p = b_0$. Tomamos como

$$U_2 = \{(a, b) | a \neq b \text{ y } b \neq b_0\},$$

y definimos el camino $s_2: U_2 \rightarrow X^I$ en dos etapas. Primero vamos de a a $-b$ siguiendo el arco más corto del círculo máximo que los une. En el segundo paso seguimos el arco

$$-\cos(\pi t)B + \sin(\pi t)\frac{v(b)}{|v(b)|}, \quad t \in [0, 1]$$

que va de $-b$ a b en la dirección de $v(b)$.

Tenemos entonces que $U_1 \cup U_2 = X \times X - \{(-b_0, b_0)\}$, así que escogemos un punto $c \in X$ diferente de b_0 y $-b_0$ para definir el conjunto $Y = X - c$. Con lo que aplicando la proyección estereográfica $Y \cong \mathbb{R}^2$ y como \mathbb{R}^2 es contráctil, Y también lo será. Tomamos $U_3 = Y \times Y$. Entonces por el Teorema 2.5 existe una programación continua de movimiento en Y .

Finalmente $X \times X = U_1 \cup U_2 \cup U_3$. Por lo que $\text{TC}(X) \leq 3$.

En realidad se sabe que $\text{TC}(X) = 3$, pero la desigualdad $\text{TC}(X) \geq 3$ requiere usar técnicas homológicas fuera del alcance de este trabajo.

Farber en [9] demuestra un resultado más general, que nos dice que $\text{TC}(S^n) = 2$ si n es impar y $\text{TC}(S^n) = 3$ si n es par. En el caso del toro tenemos que $\text{TC}(T^n) = n + 1$. Con este último resultado veamos el caso de un brazo robot.

Ejemplo 2.11. Un último ejemplo sería el relativo a un brazo robot con dos articulaciones que le permiten hacer rotaciones planas de cada segmento (ver Figura 2.11). En un primer momento tenemos que el espacio de configuraciones sería S^1 para la primera articulación y de nuevo S^1 para el segundo segmento por la segunda articulación. Es decir el espacio de configuración total sería $X = S^1 \times S^1$, que como sabemos, se trata del toro T^2 . De forma que por el resultado que demostró Farber en [9] tenemos que $\text{TC}(T^2) = 3$.

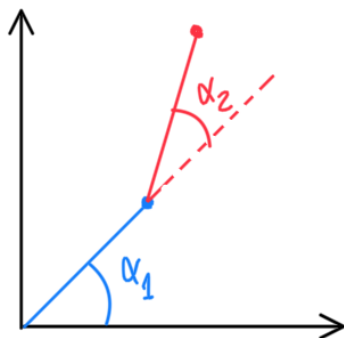


Figura 2.5: Representación gráfica de un brazo robot con dos articulaciones.

2.4. Complejidad topológica superior

A continuación vamos a ver un nuevo invariante topológico, para $n \geq 2$, introducido por Rudyak en [14] llamada la *n-ésima complejidad topológica superior*, denotada como $\text{TC}_n(X)$. Tenemos que si $n = 2$, $\text{TC}_2(X) = \text{TC}(X)$ y que si $n = 1$ sería un resultado trivial, pues estaríamos buscando el menor número de abiertos del espacio X en los que podemos definir una planificación de movimientos continua que nos de el camino de un punto en sí mismo. De ahora en adelante denotamos $X^n = X \times \dots \times X$ con la topología producto.

Para los siguientes resultados y definiciones vamos a necesitar la siguiente la siguiente aplicación:

$$\pi_n: X^I \rightarrow X^n$$

$$\gamma \mapsto \pi_n(\gamma) = (\gamma(0), \gamma\left(\frac{1}{n-1}\right), \gamma\left(\frac{2}{n-1}\right), \dots, \gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right), \gamma(1)),$$

siendo $\gamma \in X^I$ un camino continuo en X .

Definición 2.12 ([5], Definición 3.6). Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Definimos $\text{TC}_n(X)$ como el menor número k de subconjuntos abiertos de X^n , U_1, \dots, U_k tales que la unión de los $\bigcup_{j=1}^k U_j = X^n$ y para cada U_j existe una planificación de movimientos continua $s_j: U_j \rightarrow X^I$ con $\pi_n \circ s_j = i_j: U_j \rightarrow X^n$.

Esta sería la formulación matemática de un problema de programación de movimientos en el que tendríamos que pasar por una serie de puntos determinados del espacio de configuraciones. Es decir, nos dan x_1, \dots, x_n puntos del espacio de configuraciones X , y tratamos de definir una planificación de movimientos que nos de un camino continuo que pase por todos los anteriores puntos. Un resultado relativo a este nuevo concepto es el siguiente.

Proposición 2.13. ([14]) Sea X un espacio topológico conexo por caminos, entonces para $n \geq 2$ se tiene que $\text{TC}_n(X) \leq \text{TC}_{n+1}(X)$.

Demostración. Sea X un espacio topológico tal que $\text{TC}_{n+1}(X) = k$. Por lo tanto tenemos que existen $U_1, \dots, U_k \subset X^{n+1}$ abiertos tales que $\bigcup_{j=1}^k U_j = X^{n+1}$. Tomemos también la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \pi_{n+1}: X^I &\rightarrow X^{n+1} \\ \gamma &\mapsto \pi_{n+1}(\gamma) = (\gamma(0), \gamma\left(\frac{1}{n}\right), \dots, \gamma\left(\frac{n-1}{n}\right), \gamma(1)). \end{aligned}$$

Entonces se tiene que para cada $j \in 1, \dots, k$ existe una sección continua $s_j: U_j \rightarrow X^I$ que cumple que $\pi_{n+1} \circ s_j = i_j$.

Ahora veamos que $\text{TC}_n(X) \leq k$. Consideramos el siguiente conjunto

$$F = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in X^{n+1} \mid x_n = x_{n+1}\}.$$

De esta manera $F \cap U_j$ es abierto en F . Ahora consideremos la aplicación:

$$\begin{aligned} pr: F &\rightarrow X^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.3}$$

que es un homeomorfismo. Con esta aplicación obtenemos lo siguiente

1. Para cualquier $j \in \{1, \dots, k\}$, $V_j = pr(F \cap U_j) \subset X^n$ es un abierto, ya que la aplicación pr es una aplicación abierta.
2. Como $pr: F \rightarrow X^n$ es sobreyectiva tenemos que $\bigcup_{j=1}^k V_j = X^n$.

Ahora queremos construir una aplicación continua en cada V_j tal que el camino resultante pase por cada $(x_1, \dots, x_n) \in V_j$ en ese mismo orden y en tiempos fijos para cada punto x_i . Es decir buscamos que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ exista $\sigma_j: V_j \rightarrow X^I$ continua tal que $\pi_n \circ \sigma_j = i_j: V_j \rightarrow X^n$ donde

$$\begin{aligned} \pi_n: X^I &\rightarrow X^n \\ \gamma &\mapsto \pi_n(\gamma) = (\gamma(0), \gamma\left(\frac{1}{n-1}\right), \dots, \gamma\left(\frac{n-2}{n-1}\right), \gamma(1)). \end{aligned}$$

Es decir

$$\sigma_j(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{i}{n-1} \right) = x_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2.$$

Para ello nos basta definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} h: [0, 1] &\rightarrow \left[0, \frac{n-1}{n}\right] \subset [0, 1] \\ t &\mapsto h(t) = \frac{n-1}{n}t. \end{aligned}$$

De esta forma podemos definir

$$\sigma_j(x_1, \dots, x_n) = s_j(x_1, \dots, x_n, x_n) \circ h.$$

Obteniendo lo que buscábamos

1. $\pi_n \circ \sigma_j = i_j: p(U_j) \rightarrow X^n$. Efectivamente pues sea la n -dupla $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \sigma_j(x_1, \dots, x_n)(0) &= s_j(x_1, \dots, x_n, x_n)(h(0)) = s_j(x_1, \dots, x_n, x_n)(0) = x_1 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \sigma_j(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{i}{n-1} \right) &= s_j(x_1, \dots, x_n, x_n) \left(h \left(\frac{i}{n-1} \right) \right) \\ &= s_j(x_1, \dots, x_n, x_n) \left(\frac{i}{n} \right) = x_{i+1} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \sigma_j(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{n-2}{n-1} \right) & \\ &= s_j(x_1, \dots, x_n, x_n) \left(h \left(\frac{n-2}{n-1} \right) \right) = s_j(x_1, \dots, x_n, x_n) \left(\frac{n-2}{n} \right) = x_{n-1} \\ \sigma_j(x_1, \dots, x_n)(1) &= s_j(x_1, \dots, x_n, x_n)(h(1)) = s_j(x_1, \dots, x_n, x_n)(1) = x_n \end{aligned}$$

2. σ_j es una sección continua. En efecto, pues basta con tener en cuenta que

$$\sigma_j(x_1, \dots, x_n) = s_j(x_1, \dots, x_n, x_n) \circ h.$$

Ahora bien $h: [0, 1] \rightarrow [0, \frac{n-1}{n}]$ es una función continua por ser un polinomio, junto con que definimos la aplicación $s_j: U_j \rightarrow X^I$ como una sección continua, por tanto s_j es continua. Tenemos finalmente que σ_j es una aplicación continua por ser composición de aplicaciones continuas.

Así que finalmente tenemos que $\text{TC}_n(X) \leq \text{TC}_{n+1}(X)$. □

Veamos el ejemplo de las esferas S^n siendo n un número impar, pero antes de eso debemos de conocer un resultado anterior. Esta Proposición fue enunciada y demostrada en el artículo de Rudyak [14].

Proposición 2.14. *Sea X un CW-espacio finito, conexo y no contráctil, se cumple que para $n \geq 2$, $\text{TC}_n(X) \geq n$.*

2.5. Definición equivalente de complejidad topológica

Hasta este punto hemos definido la *complejidad topológica* del espacio X como el género de Švarc de la aplicación

$$\pi: X^I \rightarrow X^2$$

que envía cada camino γ en X en el par $\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1))$ formado por su punto inicial y su punto final.

Formalmente el género de Švarc se define como sigue:

Definición 2.15. [16] Llamamos género de Švarc de una aplicación $p: E \rightarrow B$ donde B es conexo por caminos a la cardinalidad del menor recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i=1}^n$ de B tal que exista una sección continua $s_i: U_i \rightarrow E$ sobre cada uno de los miembros del recubrimiento, siendo PX el espacio de caminos continuos en X .

Dicho de otra forma, $\text{TC}(X)$ es el menor número de abiertos $k \geq 0$ para el que existe un recubrimiento abierto $U_1 \cup \dots \cup U_k = X^2$ por k abiertos, y en cada abierto U_j una aplicación continua $s_j: U_j \rightarrow X^I$ tal $\pi \circ s_j = i_j$, donde $i_j: U_j \subset X^2$ es la inclusión.

Más concretamente lo podemos ver como el mínimo número de soluciones locales al problema de *planificación de movimientos*: dados dos puntos $x, y \in U_j$ podemos encontrar un camino continuo $s_j(x, y)$ en X que los une, es decir el camino no tiene por qué estar contenido a U_j . Recordemos también que el camino no sólo es continuo sino que también

ha de depender continuamente de las condiciones iniciales.

A continuación y con el fin de simplificar algunas demostraciones, vamos a ver una nueva interpretación de la *complejidad topológica*. Esta nueva y diferente definición resultará equivalente a la que hemos estado usando hasta este momento.

De ahora en adelante denotaremos por $J_2 = I_1 \vee_0 I_2$ el producto *wedge*, o unión por un punto, de dos intervalos $I_1, I_2 = [0, 1]$. Es decir al cociente de la unión disjunta

$$I_1 \sqcup I_2 = I \times \{1\} \cup I \times \{2\}$$

por la relación que identifica los puntos base $0_1 = (0, 1)$ y $0_2 = (0, 2)$. Ver figura 2.6: Ahora

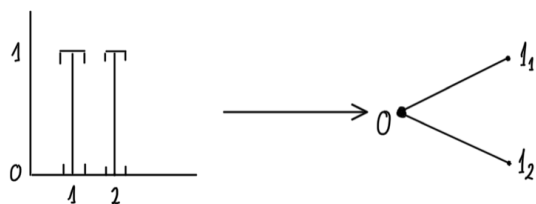


Figura 2.6: Producto *wedge* de los intervalos I_1, I_2 .

bien, usando los *wedges* podemos definir el camino conexo y continuo en X $\alpha: J_2 \rightarrow X$, al que de ahora en adelante le llamaremos *el pulpo de dos patas* (figura 2.7).

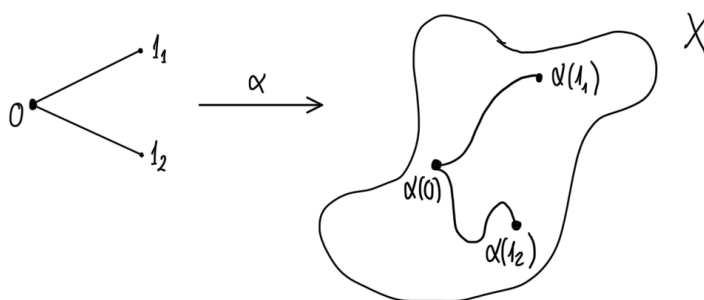


Figura 2.7: *Pulpo de dos patas* en X .

Finalmente para completar este proceso definimos la siguiente aplicación

$$e_2: X^{J_2} \rightarrow X^2$$

$$e_2(\alpha) = (\alpha(1_1), \alpha(1_2))$$

que asigna a un elemento $\alpha \in X^{J_2}$ el par $(\alpha(1_1), \alpha(1_2))$, es decir los extremos de las *patas del pulpo* resultante en X .

Haciendo un pequeño ejercicio de comparación, vemos rápidamente el parecido entre esta nueva aplicación $e_2: X^{J_2} \rightarrow X^2$ y la que llevamos considerando hasta ahora $\pi: X^I \rightarrow X^2$, pues ambas nos dan el punto de comienzo y final de un camino continuo. La diferencia radica en el intervalo de definición de los caminos. En nuestra primera concepción de TC utilizamos la siguiente estructura para construir los caminos $\gamma: I \rightarrow X$, sin embargo ahora vamos a utilizar $\alpha: J_2 \rightarrow X$, es decir cambiamos el intervalo $I = [0, 1]$ por el *wedge* $J_2 = I_1 \vee_0 I_2$.

Como hemos dicho antes, este cambio lo realizamos para poder realizar con una mayor facilidad ciertas demostraciones, pues de esta manera resulta mucho más sencillo establecer los caminos necesarios, y así evitar algunos cálculos tediosos.

A continuación vamos a demostrar la equivalencia entre ambas concepciones, pero antes de ellos vamos a dar una pequeña e intuitiva demostración.

Consideremos un espacio topológico X conexo por caminos. Sean $x, y \in X$ y $\gamma: X^I \rightarrow X$ el camino continuo que los une, de manera que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Ahora bien si tomamos *pulpo de dos patas* $\alpha: J_2 \rightarrow X$ tal que $\alpha(J_2) = \gamma(I)$, cumpliendo $\alpha(1_1) = x$, $\alpha(0) = \gamma(\frac{1}{2})$, $\alpha(1_2) = y$ claramente hemos obtenido un *pulpo* a partir de un camino (ver figura 2.8).

Al hecho de pasar de un camino a el *pulpo* equivalente le vamos a dar la siguiente notación. Si de un camino γ obtenemos el *pulpo* α , lo denotamos como $\gamma^\# = \alpha$, de manera inversa, si del *pulpo* α obtenemos el camino γ , lo denotamos como $\alpha^\flat = \gamma$. Estos cambios vienen reflejados por las siguientes fórmulas. Por un lado tenemos que:

$$\alpha^\flat(t) = \begin{cases} \alpha((1-2t)_1) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \alpha((2t-1)_2) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Y por el otro lado:

$$\gamma^\#(t_i) = \begin{cases} \alpha(t_1) = \gamma(\frac{1}{2}(1-t)) & t \in [0, 1] \\ \alpha(t_2) = \gamma(\frac{1}{2}(1+t)) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Además se cumple la siguiente Proposición.

Proposición 2.16. Sean $\gamma: I \rightarrow X$ y $\alpha: J_2 \rightarrow X$ un camino y un pulpo respectivamente en un espacio conexo por caminos X , se tiene que $(\gamma^\#)^\flat = \gamma$ y $(\alpha^\flat)^\# = \alpha$.

Demostración. Sea $\gamma: I \rightarrow X$ tenemos que:

$$\gamma^\# = \alpha'(t_i) = \begin{cases} \alpha'(t_1) = \gamma\left(\frac{1}{2}(1-t)\right) & t \in [0, 1] \\ \alpha'(t_2) = \gamma\left(\frac{1}{2}(1+t)\right) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

De manera que:

$$(\gamma^\#)^\flat = \alpha^\flat = \begin{cases} \alpha'((1-2t)_1) = \gamma\left(\frac{1}{2}(1-1+2t)\right) = \gamma(t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \alpha'((2t-1)_2) = \gamma\left(\frac{1}{2}(1+2t-1)\right) = \gamma(t) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Por lo tanto $(\gamma^\#)^\flat = \gamma$.

Sea $\alpha: J_2 \rightarrow X$ se tiene que:

$$\alpha^\flat = \gamma'(t) = \begin{cases} \alpha((1-2t)_1) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \alpha((2t-1)_2) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Entonces:

$$(\alpha^\flat)^\# = \begin{cases} \gamma'\left(\frac{1}{2}(1-t)\right) = \alpha\left(\left(1-2\left(\frac{1}{2}(1-t)\right)\right)_1\right) = \alpha(t_1) & t \in [0, 1] \\ \gamma'\left(\frac{1}{2}(1+t)\right) = \alpha\left(\left(2\left(\frac{1}{2}(1+t)\right)-1\right)_2\right) = \alpha(t_2) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

Por lo tanto $(\alpha^\flat)^\# = \alpha$. □

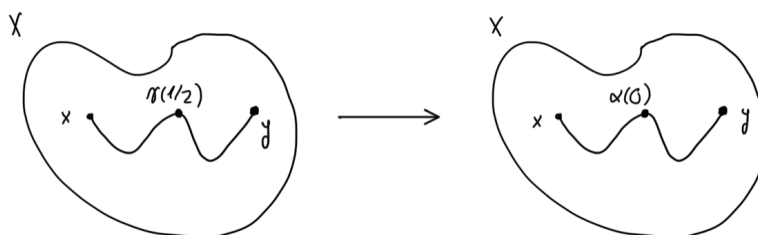


Figura 2.8: Sobre el mismo camino γ podemos dar un pulpo α^\flat que sea equivalente.

Este hecho que acabamos de comentar nos da pie para enunciar la siguiente Proposición.

Proposición 2.17. *Sea X un espacio de configuraciones conexo por caminos. El género de Švarc de la aplicación $e_2: X^{J_2} \rightarrow X^2$ es igual al de la aplicación $\pi: X^I \rightarrow X^2$, es decir $\text{TC}(X) = \text{TC}_2(X)$.*

Demostración. Sea X un espacio topológico tal que el género de Švarc de X sea k , es decir existen k abiertos $U_i, i = 1, \dots, k$ tales que $\bigcup_i^k U_i = X^2$ sobre los que para cada U_i puedo definir una sección continua $s_i: U_i \rightarrow X^2$. De manera que dados $x, y \in X$ podemos encontrar un *pulpo de dos patas* que los una. Sea $\alpha: X^{J_2} \rightarrow X$ tal que $\alpha(1_1) = x$ y $\alpha(1_2) = y$. Ahora basta con que consideremos el camino $\gamma: I \rightarrow X$ tal que $\gamma = \alpha^b$. Definido de la siguiente forma:

$$\alpha^b(t) = \begin{cases} \alpha((1-2t)_1) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \alpha((2t-1)_2) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

De esta manera hemos encontrado k abiertos U_i tales que $\bigcup_i^n U_i = X^2$ sobre los que para cada U_i puedo definir una sección continua $s_i: U_i \rightarrow X^I$. Por lo tanto el género de Švarc de $\pi = k$.

De forma recíproca y análoga al caso anterior. Sea $\gamma: I \rightarrow X$ el camino tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$ con $x, y \in X$, puedo asignarle el *pulpo* $\alpha: X^{J_2} \rightarrow X^2$, tal que $\alpha = \gamma^\#$. Veámoslo:

$$\gamma^\#(t_i) = \begin{cases} \alpha(t_1) = \gamma(\frac{1}{2}(1-t)) & t \in [0, 1] \\ \alpha(t_2) = \gamma(\frac{1}{2}(1+t)) & t \in [0, 1] \end{cases}$$

De esta forma tenemos que el género de Švarc de las aplicaciones coinciden y además es igual a $\text{TC}(X)$. □

2.6. Definición equivalente de complejidad topológica superior

El siguiente paso que tenemos que dar en este trabajo va a ser el definir la *Complejidad topológica superior*, es decir TC_n , con $n \geq 2$.

Nuestra definición de $\text{TC}_n(X)$ es el menor número de abiertos $U_i \subset X^n$ tales que $\bigcup_{i=1}^k U_i = X^n$ para cada uno de los cuales existe una planificación continua de movimientos $s_j: U_j \rightarrow X^I$ que cumpla $\pi_n \circ s_j = i_j: U_j \subset X^n$. Recordemos que ahora nuestro objetivo es dar un camino continuo en el espacio de configuraciones que pase por $x_1, \dots, x_n \in X$ en un tiempo determinado. Para ello en vez de considerar el intervalo $[0, 1]$ dividido en $n - 1$

subintervalos

$$0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-1}{n-1} = 1$$

vamos a tomar el wedge $J_n = I_1 \vee_0 \dots \vee_0 I_n$ (ver figura 2.6).

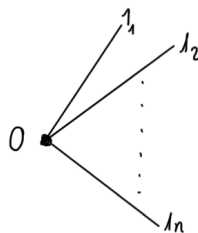


Figura 2.9: El wedge $J_n = I_1 \vee_0 \dots \vee_0 I_n$

De manera, que en un proceso similar al que llevamos a cabo en el apartado anterior, consideramos *pulpos de n patas* $\alpha : J_n \rightarrow X$ y la aplicación

$$e_n : X^{J_n} \rightarrow X^n$$

$$\alpha \mapsto (\alpha(1_1), \dots, \alpha(1_n)).$$

Es decir, obtendríamos un camino que pasa por todos los puntos, que seguiría la siguiente secuencia (figura 2.10):

$$\alpha(1_1) = x_1 \rightarrow \alpha(0) \rightarrow \alpha(1_2) = x_2 \rightarrow \alpha(0) \rightarrow \dots \rightarrow \alpha(0) \rightarrow \alpha(1_n) = x_n$$

La diferencia entre nuestra anterior definición del camino $\gamma : I \rightarrow X$ y el actual $\alpha : J_n \rightarrow X$, es que pasamos de tener un camino continuado, a otro que pasa reiteradamente por el punto $\alpha(0)$ (figura 2.11).

Por esta misma comparación llegamos al siguiente resultado con una demostración análoga a la Proposición 2.17.

Proposición 2.18. *Sea X un espacio de configuraciones conexo por caminos. El género de Švarc de la aplicación $e_n : X^{J_n} \rightarrow X^n$ es igual al género de Švarc de la aplicación $\pi_n : X^I \rightarrow X^n$, es decir, coincide con la complejidad topológica superior $TC_n(X)$.*

Nótese que al introducir diferentes posibles parametrizaciones de un camino obtenemos caminos homótopos (con una homotopía relativa de los puntos extremos).

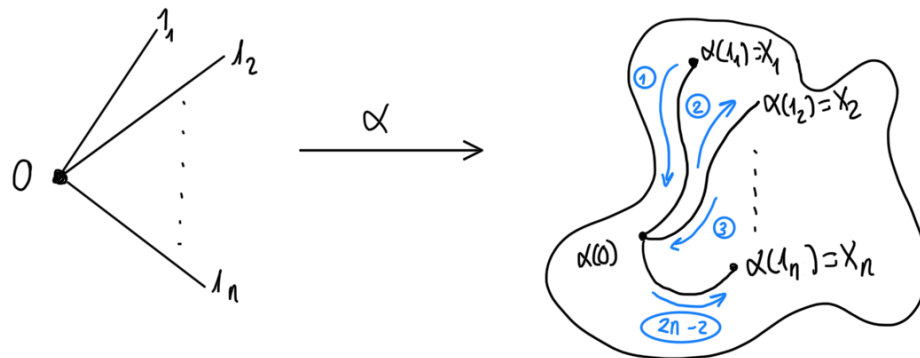


Figura 2.10: El pulpo α se divide en un total de $2n - 2$ caminos.

2.7. Complejidad topológica simétrica

En el año 2006 los matemáticos Farber y Grant definieron en [10] una nueva variante de la complejidad topológica, la *complejidad topológica simétrica*, denotada como $TC^S(X)$.

Este concepto trata de implementar dos sencillas propiedades simétricas al problema de la planificación de movimientos. Más concretamente, sea $\gamma: I \rightarrow X$ un camino en X , vamos a pedirle que cumpla:

1. Sea $a \in X$, si se tiene que $\gamma(0) = a = \gamma(1)$, entonces $\gamma(t) = a$, para todo $t \in I$. Es decir que si tenemos un camino que empieza y acaba en el mismo punto, este camino ha de ser el camino constante.
2. Sea γ el camino que empieza en a y acaba en b con $a, b \in X$, entonces el camino de b a a ha de ser $\bar{\gamma}$, siendo $\bar{\gamma}$ el camino inverso a γ , dado por $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$. Es decir que para ir de b a a usamos el mismo camino que para ir de a a b pero en dirección contraria.

Este concepto lo podemos formalizar en la siguiente definición.

Definición 2.19. ([10], Definición 3). Una *configuración de movimientos simétrica* en un espacio de configuraciones X es una aplicación posiblemente discontinua $s: X \times X \rightarrow X^I$ tal que $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$ y que cumple las siguientes condiciones para todo $t \in I$:

$$s(a, a)(t) = a, \quad s(b, a)(t) = s(a, b)(1 - t).$$

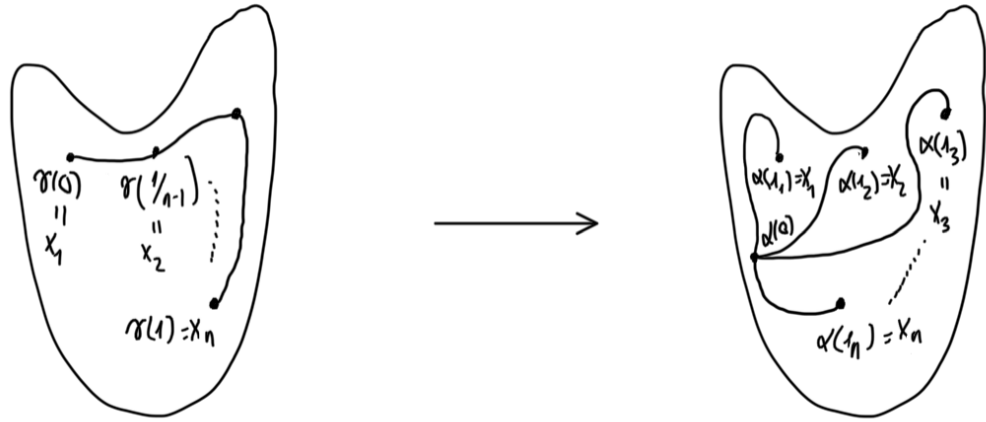


Figura 2.11: De un camino γ de n paradas, podemos obtener el pulpo $\gamma^\#$ de n patas.

Originalmente, la *complejidad simétrica*, denotada como $TC^S(X)$, se definió como el género de Švarc *invariante por permutaciones* de la restricción

$$\pi^*: (X^I)^* \rightarrow (X^2)^*.$$

Siendo $(X^I)^*$ el espacio de caminos que no son lazos, es decir,

$$(X^I)^* = \{\gamma: I \rightarrow X \mid \gamma(0) \neq \gamma(1)\} \subseteq PX.$$

También consideramos $(X^2)^*$ como los pares $(x, y) \in X^2$ tales que $x \neq y$.

En todo caso, lo importante es considerar la *acción* del grupo de permutaciones $\Sigma_2 = \{\text{id}, s\}$, donde

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2), \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$$

y $s(\gamma) = \bar{\gamma}$ es el camino inverso, además de $s((x, y)) = (y, x)$.

Ahora bien, como la aplicación π^* es *equivariante*, es decir $\pi^*(s \circ \gamma) = s \circ \pi(\gamma)$, tenemos una aplicación inducida en los espacios de órbitas de la acción

$$(\pi)^*: (X^I)^*/\Sigma_2 \rightarrow (X^2)^*/\Sigma_2.$$

El género de Švarc de la aplicación $(\pi)^*$ coincide con *complejidad topológica simétrica* $TC^S(X)$ del espacio de configuraciones X .

Ya estamos en las condiciones de poder dar una definición formal para $TC^S(X)$, siendo X un espacio de configuraciones.

Definición 2.20. Sea X un espacio de configuraciones. La complejidad topológica simétrica $\text{TC}^S(X)$ es el menor entero k tal que existe un recubrimiento abierto $U_1 \cup \dots \cup U_k = X^2$ por k abiertos tales que $s(U_j) = U_j$, y en cada uno existe $s_j: U_j \rightarrow X^I$, equivariante (es decir $s \circ s_j = s_j \circ s$ y tal que $s_j(x, x) = c_x$ si $(x, x) \in U_j \cap \Delta_X$, donde c_x es el camino constante).

Ahora vamos a ver una Proposición en la que compararemos $\text{TC}(X)$ con $\text{TC}^S(X)$.

Proposición 2.21. ([10], Corolario 9) Sea X un espacio de configuraciones, entonces se tiene que

$$\text{TC}(X) \leq \text{TC}^S(X).$$

Demostración. Suponiendo que $\text{TC}^S(X) = k$ y aplicando las definiciones de $\text{TC}(X)$ y $\text{TC}^S(X)$ es obvio ver que el recubrimiento de X^2 que tomamos para calcular $\text{TC}^S(X)$ nos vale para calcular $\text{TC}(X)$, así como también nos sirve la sección continua y equivariante $s_j: U_j \rightarrow X^I$ necesaria para definir $\text{TC}^S(X)$. Así que $\text{TC}(X) \leq \text{TC}^S(X)$. \square

2.8. Complejidad topológica simétrica superior

En esta sección, vamos a volver a considerar la aplicación $e_2: X^{J_2} \rightarrow X^2$, de manera que en vez de caminos, vamos a usar *pulpos*.

En este caso la acción Σ_2 en un pulpo $\alpha: J_2 \rightarrow X$ es simplemente:

$$s(\alpha)(t, i) = \alpha((t)_{s(i)}).$$

De esta forma obtenemos que $s(\alpha) = \bar{\alpha}$, es decir el *pulpo simétrico*, con secciones equivariantes. Como podemos ver en la figura 2.8.

Ahora bien, de manera similar, si tenemos un pulpo de n brazos $\alpha: J_n \rightarrow X$, podríamos permutarlos con cualquier permutación $\sigma \in \Sigma_n$.

Definición 2.22. La *complejidad simétrica superior* $\text{TC}_n^S(X)$ es el menor entero k tal que existe un recubrimiento $U_1 \cup \dots \cup U_k = X^k$ por k abiertos tales que $\sigma(U_j) = U_j$ para todo $\sigma \in \Sigma_n$, y en cada uno existe una sección continua equivariante $s_j: U_j \rightarrow X^{J_n}$, es decir $s(s_j) = s_j$ y tal que $s_j(x, \dots, x) = c_x$.

2.9. Sobre los conjuntos ENR

Para el siguiente ejemplo vamos a necesitar un nuevo tipo de conjuntos llamados *ENR* (*Euclidean neighbourhood retracts*). Para poder dar una definición precisa en primer lugar

Ejemplo 2.28. La bola abierta $B^n \subset \mathbb{R}^n$ centrada en el origen y de radio $r = 1$. En efecto, tomando como retracción la aplicación id , y junto con que es un abierto, es un ENR. Por lo que estamos en un caso particular del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.29. La esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Sea $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$, con centro en el origen de coordenadas x_0 . Consideramos el abierto $U = B(x_0, 2) \setminus B(x_0, \frac{1}{2})$. De forma que U es un entorno tubular de $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ que claramente se retrae a S^{n-1} .

A continuación vamos a ver una serie de resultados importantes acerca de este nuevo tipo de conjuntos, que podemos encontrar en [7] junto con sus respectivas demostraciones.

Proposición 2.30. *Todo neighbourhood retract $X \subset \mathbb{R}^n$ es de la forma $X = C \cap O$, la intersección de un conjunto cerrado C y un conjunto abierto O .*

Lema 2.31. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. X es localmente cerrado, i.e. $X = C \cap O$ siendo C un cerrado y O un abierto.
2. Todo punto $p \in X$ tiene un entorno $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \cap U$ es un cerrado en U .
3. Todo punto $p \in X$ tiene un entorno compacto en X , i.e., X es localmente compacto.

Proposición 2.32. *Sea Y un espacio tal que Y es un ENR, entonces Y es localmente contráctil, es decir para todo $y \in Y$ existe un entorno $y \in U$ que es contráctil.*

Proposición 2.33. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ localmente compacto y localmente contráctil, entonces X es un neighbourhood retract.*

El siguiente resultado es un Corolario del Teorema 2.35.

Corolario 2.34. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un neighbourhood retract, y $Y \subset \mathbb{R}^m$ es homeomorfo a X , entonces $Y \subset \mathbb{R}^m$ es un neighbourhood retract.*

Teorema 2.35. *Sean $B \subset X$ dos ENRs. Existe un entorno $V \subset X$ de B que se retrae a B . Además si $r: V \rightarrow B$ es una retracción entonces B tiene un entorno abierto $W \subset V$ tal que $i \circ r \circ j \simeq j$ siendo $i: B \rightarrow V$, $j: W \rightarrow V$ las respectivas inclusiones.*

Corolario 2.36. *Sean $B \subset X$ dos ENRs y sean F, G dos aplicaciones definidas en X tales que $f \simeq g$ siendo $f = F|_B$ y $g = G|_B$, entonces se tiene que $F|_W \simeq G|_W$, siendo W el entorno abierto de B descrito en el Teorema 2.35.*

Demostración. Para simplificar la notación, llamamos también F, G a las restricciones de $F, G: X \rightarrow Y$ a $V \subset X$. Entonces las restricciones a B son $F|_B = F \circ i$ y $G|_B = G \circ i$. Ya que las restricciones a B son homótopas, sea

$$H: B \times I \rightarrow Y$$

la homotopía, es decir, $H_0 = F|_B$, $H_1 = G|_B$. Tomamos la retracción $r|_W: W \rightarrow B$, y la aplicación

$$\tilde{H}: W \times I \rightarrow Y$$

como

$$\tilde{H}(w, t) = H(r(w), t).$$

Es continua ya que $\tilde{H} = H \circ (r \times \text{id})$. Además,

$$\tilde{H}_0(x) = (F \circ r)(x)$$

y

$$\tilde{H}_1(x) = (G \circ r)(x).$$

Es decir, si H es una homotopía se tiene que $F \circ i \simeq G \circ i$, por lo tanto \tilde{H} es una homotopía y $F \circ i \circ (r|_W) \simeq G \circ i \circ (r|_W)$. Como por el Teorema 2.35 sabemos que $i \circ (r|_W) \simeq j$, tenemos que

$$F \circ j \simeq F \circ i \circ (r|_W) \simeq G \circ i \circ (r|_W) \simeq G \circ j.$$

Pero además $F \circ j = F|_W$ y $G \circ j = G|_W$. □

Ejemplo 2.37 ([14]). Vamos a ver que $\text{TC}_k(S^n) \leq k$ siendo n un número impar. Para ello consideramos un campo vectorial tangente unitario no nulo v en S^n . Sean $x, y \in S^n$ tales que x, y sean antipodales, tomamos entonces el camino en S^n que une ambos puntos siguiendo el semicírculo geodésico que los une en la dirección dada por v_x en el punto x . En el caso de que no sean antipodales tomamos como camino el dado por la geodésica más corta que una x, y .

Ahora bien para cada $j = 0, \dots, k-1$ tomamos la siguiente colección de ENR $U_j \subset (S^n)^k$ tales que $\bigcup_{j=1}^k U_j = (S^n)^k$ en la que cada k -dupla $(x_1, \dots, x_k) \in U_j$ tiene exactamente j puntos antipodales de x_1 . Veamos como son estos conjuntos. En el caso $j = 0$ tenemos que en $x_2, \dots, x_k \in U_0$ ningún punto es antipodal de x_1 . Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: (S^n)^k &\rightarrow (\mathbb{R}^{n+1})^{k-1} \\ (x_1, \dots, x_k) &\rightarrow \phi(x_1, \dots, x_k) = (x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_k). \end{aligned}$$

Se tiene que la aplicación ϕ es continua, por serlo cada una de sus componentes. Ahora bien consideramos

$$F_0 = \{(u_1, \dots, u_{k-1}) | u_1 \neq 0, \dots, u_{k-1} \neq 0\}.$$

F_0 es abierto por ser el producto cartesiano de $k-1$ abiertos pues

$$F_0 = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \dots \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}).$$

Por lo que basta tomar $U_0 = \phi^{-1}(F_0)$, de manera que U_0 es un abierto y por el ejemplo 2.27 U_0 es un ENR. Calculemos ahora U_{k-1} , es decir, cada k -dupla $(x_1, \dots, x_k) \in U_{k-1}$ tiene exactamente $k - 1$ puntos antipodales de x_1 . Tomamos el conjunto

$$F_{k-1} = \{(0, \dots, 0)\} \subset (\mathbb{R}^{n+1})^k$$

que es un cerrado por ser un punto, de manera que $U_{k-1} = \phi^{-1}(F_{k-1})$ es un cerrado, y por tanto un ENR.

Comprobemos los casos intermedios con el caso $U_j, j \in \{1, \dots, k - 1\}$. Consideramos

$$F_j = \{(u_1, \dots, u_{k-1}) \mid \#\{u_i = 0\} = j, i \in \{1, \dots, k - 1\}\}.$$

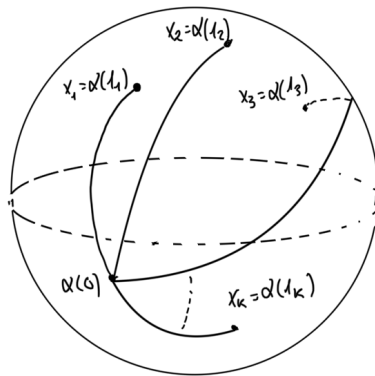
Para verlo con más claridad nos centramos en el caso $j = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(u_1, \dots, u_{k-1}) \mid \#\{u_i = 0\} = 1, i \in \{1, \dots, k - 1\}\} = \\ &\quad \{(0, u_2, \dots, u_{k-1}) \mid u_2 \neq 0, \dots, u_{k-1} \neq 0\} \\ &\quad \cup \{(u_1, 0, \dots, u_{k-1}) \mid u_1 \neq 0, \dots, u_{k-1} \neq 0\} \cup \dots \cup \{(u_1, u_2, \dots, 0) \mid u_1 \neq 0, \dots, u_{k-2} \neq 0\} \\ &= (\{0\} \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \dots \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})) \\ &\quad \cup \dots \cup ((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \dots \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \{0\}) \\ &= F_{11} \cup \dots \cup F_{1k-1}. \end{aligned}$$

Y así $U_1 = \phi^{-1}(F_{11}) \cup \dots \cup \phi^{-1}(F_{1k-1})$, de forma que U_1 es localmente cerrado y por la Proposición 2.30 se tiene que U_1 es un ENR. De forma análoga los $U_j, j \in \{1, \dots, k - 2\}$ son ENR. Por lo que hemos encontrado un recubrimiento por ENRs de $(S^n)^k$. En este momento solo nos queda definir una planificación de movimientos usando los caminos que acabamos de describir. Entonces para cada $j = 1, \dots, k$ tomamos $s_j: U_j \rightarrow (S^n)^I$ con $e_k \circ s_j = i_j: U_j \rightarrow (S^n)^k$, donde $e_k: X^{J_k} \rightarrow (S^n)^k$ se define como

$$e_k(\alpha) = (\alpha(1_1), \alpha(1_2), \dots, \alpha(1_k)).$$

Siendo $\alpha: J_k \rightarrow S^n$ el pulpo de k patas que cumple $\alpha(1_1) = x_1, \dots, \alpha(1_k) = x_k$. Ahora bien cada pata del pulpo α describe el camino descrito por las geodésicas. Ahora bien como cada U_j con $j = 1, \dots, k$ es un ENR entonces $\text{TC}_k(S^n) \leq k$.

Figura 2.13: Pulpo de n patas sobre la esfera.

Capítulo 3

Complejidad social

En este capítulo vamos a tratar de llevar todo lo visto hasta ahora al contexto de la Teoría de la Elección Social, donde relacionaremos la *complejidad topológica* con el concepto de *complejidad social* formulado por Carrasquel, Lupton y Oprea en el año 2018([5])

3.1. Introducción

En esta sección vamos a considerar la situación en la que un grupo de individuos, con preferencias individuales, tienen que escoger una opción que satisfaga a todos. Para ello trataremos de definir una *función de elección social*, como las que vimos en el capítulo 1 (1.1).

3.2. Complejidad social

En primer lugar, y con el fin de poder seguir avanzando debemos definir algunos conceptos relativos a la Teoría de la Elección Social.

Definición 3.1. Supongamos que hay n individuos, cada uno de los cuales tiene un espacio de preferencias X . Una *función de elección social* es una función continua $f: X^n \rightarrow X$, siendo $X^k = X \times \dots \times X$, que satisface dos propiedades:

1. *Unanimidad*: Si todos los individuos tienen la misma preferencia, esta es la preferencia social. Matemáticamente $f(x, \dots, x) = x$ para todo $x \in X$.
2. *Anonimato*: Es el conjunto de preferencias lo que determina la decisión final, no los individuos que tienen ciertas preferencias. Cualquier permutación de los n individuos y sus preferencias produce la misma decisión. Matemáticamente

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde σ es cualquier permutación de los enteros $\{1, 2, \dots, n\}$.

Este tipo de funciones nos llevan a un teorema que nos recuerda a la Proposición 2.5,

Teorema 3.2 ([5]). *Sea X un CW-complejo finito un espacio de preferencias. Entonces existe una función de elección social continua $f: X^n \rightarrow X$ para algún $n \geq 2$ si y solo si X es contráctil.*

La prueba de este teorema la realizó Weinberger y la podemos encontrar en [18]. Este resultado nos dice que no podemos encontrar una función de elección social a no ser que el espacio de preferencias sea contráctil, por lo tanto debemos de buscar la solución al problema cuando el espacio de preferencias no sea contráctil. Para ello vamos a proceder de una forma parecida a como lo hicimos en el caso de la complejidad topológica, es decir, dividimos el espacio X^n en conjuntos en los cuales se puedan dar funciones de elección social. En primer lugar debemos de saber el número de discontinuidades que va a tener nuestra función de elección social, así como lo hicimos con la cantidad de discontinuidades que tenía la función de programación de movimientos, para ello se define la complejidad de elección social de un espacio X .

En primera instancia vamos a generalizar nuestro problema de elección social para el caso $n = 2$, es decir, el caso de una pareja de individuos que han de ponerse de acuerdo.

La siguiente definición la formularon Oprea, Lupton y Carrasquel (2018) en [5].

Definición 3.3 ([5], Definición 3.3). La *complejidad social* de un espacio X , denotada como $sc(X)$, es el menor entero k para el cual $X \times X$ es la unión de k conjuntos U_1, \dots, U_k abiertos tales que:

1. Cada abierto U_j es simétrico; es decir, si $(x, y) \in U_j$ entonces $(y, x) \in U_j$.
2. Para cada U_j existe una aplicación $m_j: U_j \rightarrow X$, es decir una función de elección social *local*.
3. Para cualquier $(x, x) \in U_j$ se tiene que, $m_j(x, x) = x$.
4. La aplicación m_j ha de ser invariante por permutaciones, es decir, $m_j(x_2, x_1) = m_j(x_1, x_2)$ si $(x_1, x_2) \in U_j$.
5. Cada m_j es una *sección homotópica* de la diagonal $\Delta: X \rightarrow X^2$. Es decir,

$$\Delta \circ m_j \simeq i_j.$$

Realicemos algunas observaciones acerca de la definición que acabamos de dar. Si se tiene que $k = 1$ la condición (5) se cumple automáticamente. En este caso hay una única aplicación global $m: X^2 \rightarrow X$ que cumple anonimato y unanimidad. Por tanto el espacio X es contráctil, y dos aplicaciones $f, g: X \rightarrow X$ son homótopas.

En cuanto a la condición (5) tenemos que la diferencia entre una sección homotópica y una verdadera sección (como cuando definíamos la complejidad topológica) es que en esta última se tendría

$$\Delta \circ s_j = i_j,$$

lo que quiere decir que si la “media” de (x, y) es $m = s_j(x, y)$, entonces $(x, y) = (m, m)$, lo que es imposible si $x \neq y$.

En cambio, si es una sección homotópica, y tenemos una homotopía $H: \Delta \circ s_j \simeq i_j$, para cada par (x, y) tenemos un “camino” H_t entre (x, y) y (m, m) . Es decir, la posición media m es “alcanzable” por un camino continuo tanto desde x como desde y .

Si X es conexo por caminos, esto siempre va a ser posible. En caso contrario, sólo podría conseguirse si x, y están en la misma componente conexa por caminos de X .

Este hecho lo Oprea, Lupton y Carrasquel lo denominan ([5]) “compromiso cercano”, que determina que la elección social debe de ser próxima a cada una de las preferencias individuales. Dado que la palabra homotopía la relacionamos con las deformaciones, esta última condición quiere decir que un individuo puede cambiar de forma paulatina sus preferencias hasta el resultado de la elección social. Para esclarecer esta última condición se podría decir que ambos individuos podrían llegar a aceptar la “media” de sus preferencias. Un simple ejemplo sería el de una pareja que tiene que decidir de qué color pintar su casa. Uno de ellos escoge el color amarillo, y el otro el color rojo. Entonces una solución a su problema podría ser el color naranja, que sería la mezcla de los dos colores.

Las condiciones (3), (4) se corresponden con la unanimidad y el anonimato respectivamente.

Como podemos ver la complejidad topológica y la complejidad social son conceptos con una gran similitud, pues en ambos casos tratamos de buscar el mínimo número de discontinuidades que tiene una planificación de movimientos en el caso de $TC(X)$ o una función de elección social en el caso de la $sc(X)$.

Ahora veamos un resultado que nos permitirá relacionar la complejidad topológica y la complejidad topológica simétrica con la complejidad social. Por tanto también veremos como relacionar una programación continua de movimientos con una función de elección social.

Teorema 3.4. *[[5], Teorema 3.5] Sea X un CW-complejo finito un espacio de configuraciones, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$\text{TC}(X) \leq \text{sc}(X) \leq \text{TC}^S(X)$$

Demostración. Empecemos con la primera desigualdad $\text{TC}(X) \leq \text{sc}(X)$. Supongamos que $\text{sc}(X) = k$, entonces existen U_1, \dots, U_k abiertos simétricos, es decir $\sigma(U_j) = U_j$ con $\sigma \in \Sigma_2$, que recubren X^2 , tales que en cada uno de ellos existe una función de elección social:

$$\begin{aligned} m_j: U_j &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto m_j(x, y) = p. \end{aligned}$$

Por la propiedad 5 tenemos que $\Delta \circ m_j \simeq i_j$, es decir existe una homotopía:

$$H_j: U_j \times I \rightarrow X^2,$$

definida como:

$$(H_j)_0(x, y) = \Delta \circ m_j(x, y) = (p, p), \quad (H_j)_1(x, y) = (x, y).$$

Lo que quiere decir que existe un camino $x_t \in X$ que une el punto x con el punto p . De manera análoga tenemos un camino $y_t \in X$ que une el punto y con el punto p . Los definimos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_t &= p_1((H_j)_t(x, y)) \\ y_t &= p_2((H_j)_t(x, y)). \end{aligned}$$

Siendo

$$\begin{aligned} p_i: X^2 &\rightarrow X \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_i, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

Finalmente definimos la sección $s_j(x, y)(t) = (x_t, y_t) = (H_j)_t(x, y)$. Veamos que cumple las condiciones para ser una planificación de movimientos.

1. La sección s_j es continua en cada U_j , ya que $s_j(x, y)(t) = (H_j)_t(x, y)$ que es una aplicación continua.
2. La sección $s_j: U_j \rightarrow X^{J_2}$ define un pulpo α en X cumpliendo

$$\alpha(0_i) = p_i((H_j)_0(x, y)) = p,$$

$$\alpha(1_1) = p_1((H_j)_1(x, y)) = x_1 = x,$$

y

$$\alpha(1_2) = p_2((H_j)_1(x, y)) = y_1 = y.$$

Por lo tanto hemos encontrado una planificación de movimientos s_j definida en cada U_j , por lo tanto $\text{TC}(X) \leq \text{sc}(X) = k$.

Ahora probemos la desigualdad $\text{sc}(X) \leq \text{TC}^S(X)$. Suponemos que $\text{TC}^S(X) = k$, por lo tanto existen $U_1, \dots, U_k \subset X^2$ abiertos simétricos que recubren a X^2 tales que en cada uno de ellos existe una planificación de movimientos simétrica $s_j: X^2 \rightarrow X^{J_2}$, cumpliendo $e_2 \circ s_j = i_j$.

Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} r: X^{J_2} &\rightarrow X \\ \alpha &\mapsto r(\alpha) = \alpha(0). \end{aligned}$$

Ahora definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} m_j = r \circ s_j: U_j &\rightarrow X \\ (x, y) &\mapsto s_j(x, y)(0). \end{aligned}$$

Veamos ahora que la aplicación m_j cumple las condiciones de ser función de elección social:

1. Sea $X \in X$ y sea $c_x: J_2 \rightarrow X$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ y $i = 1, 2$, $c_x(t_i) = x$. Entonces se cumple que

$$m_j(x, x) = r(c_x) = c_x(0) = x.$$

2. Para cualquier par de puntos $x_1, x_2 \in X$, sea $\alpha: J_2 \rightarrow X$, tal que $\alpha(1_1) = x_1$ y $\alpha(1_2) = x_2$. Se cumple que

$$m_j(x_1, x_2) = r(\alpha) = \alpha(0) = \overline{\alpha(0)} = r(\bar{\alpha}) = m_j(y, x).$$

3. Sea la diagonal

$$\begin{aligned} \Delta_X: X &\rightarrow X^2 \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\Delta_X \circ m_j(x_1, x_2) = \Delta_X(r(\alpha)) = \Delta_X(\alpha(0)) = (\alpha(0), \alpha(0)).$$

Por tanto la homotopía hasta (x_1, x_2) estaría dada por

$$\Delta \circ m_j(x_1, x_2)(t) = (\alpha(2t - 1), \alpha(2t - 1)),$$

de manera que

$$\Delta_X \circ m_j \simeq i_j.$$

Hemos probado que las aplicaciones m_j son funciones de elección social definidas en cada abierto simétrico U_j , así que podemos concluir que $\text{sc}(X) \leq \text{TC}^S(X)$. \square

3.3. Complejidad social superior

Como hemos hecho con la complejidad topológica, podemos considerar la complejidad social para $k \geq 2$, es decir cuando el conjunto de individuos es mayor que dos.

En esta sección volvemos a considerar la aplicación $e_n: X^{J_n} \rightarrow X^n$ con la que buscaremos secciones homotópicas locales invariantes por permutaciones. De esta manera podemos dar la siguiente definición.

Definición 3.5. La *complejidad social superior* denotada como $sc_n(X)$ es el menor entero $k \geq 1$ para el cual $X \times \cdots \times X = X^n$ es la unión de k conjuntos U_1, \dots, U_k abiertos tales que:

1. Cada abierto es simétrico, es decir $\sigma(U_j) = U_j$ para toda permutación $\sigma \in \Sigma_n$;
2. En cada U_j está definida una función de elección social $m_j: U_j \rightarrow X$.
3. Para cualquier $(x, \dots, x) \in U_j$ se tiene que $m_j(x, \dots, x) = x$. Es decir, m_j cumple la condición de *Unanimidad*.
4. La aplicación m_j ha de ser invariante por permutaciones, es decir,

$$m_j(\sigma(x_1, \dots, x_n)) = m_j(x_1, \dots, x_n),$$

para $(x_1, \dots, x_n) \in U_j$ y para todo $\sigma \in \Sigma_n$.

5. Cada m_j es una *sección homotópica* de la diagonal $\Delta: U_j \rightarrow X^n$, es decir,

$$\Delta \circ m_j \simeq i_j.$$

Finalmente podemos enunciar un resultado que nos resultará parecido al Teorema 3.4.

Teorema 3.6. *Sea X un CW-complejo finito un espacio de configuraciones, entonces se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$TC_n(X) \leq sc_n(X) \leq TC_n^S(X).$$

Demostración. Empecemos con la primera desigualdad $TC_n(X) \leq sc_n(X)$. Supongamos que $sc_n(X) = k$, entonces existen U_1, \dots, U_k abiertos simétricos que recubren X^n , tales que en cada uno de ellos existe una función de elección social:

$$\begin{aligned} m_j: U_j &\rightarrow X \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto m_j(x_1, \dots, x_n) = p. \end{aligned}$$

Por la propiedad 5 tenemos que $\Delta \circ m_j \simeq i_j$, es decir existe una homotopía definida en cada U_j :

$$H_j: U_j \times I \rightarrow X^n,$$

definida como:

$$(H_j)_0(x, y) = \Delta \circ m_j(x, y) = (p, \dots, p), \quad (H_j)_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Lo que quiere decir que para $i \in \{1, \dots, n\}$ existe un camino $(x_i)_t \in X$ que une el punto x_i con el punto p . Podemos definir los caminos de la siguiente forma:

$$(x_i)_t(x) = p_i((H_j)_t(x_1, \dots, x_n)).$$

Siendo

$$p_i: X^n \rightarrow X \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i,$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Finalmente definimos la sección

$$s_j(x_1, \dots, x_n)(t) = ((x_1)_t, \dots, (x_n)_t) = (H_j)_t(x_1, \dots, x_n).$$

Veamos que cumple las condiciones para ser una planificación de movimientos.

1. La sección s_j es continua en cada U_j , ya que

$$s_j(x_1, \dots, x_n)(t) = (H_j)_t(x_1, \dots, x_n)$$

que es una aplicación continua.

2. La sección $s_j: U_j \rightarrow X^{J_n}$ define un pulpo de n patas α en X cumpliendo

$$\alpha(0_i) = p_i((H_j)_0(x_1, \dots, x_n)) = p$$

y

$$\alpha(1_i) = p_i((H_j)_1(x_1, \dots, x_n)) = x_i,$$

con $i = \{1, \dots, n\}$.

Por lo tanto hemos encontrado una planificación de movimientos s_j definida en cada U_j , lo que quiere decir que $\text{TC}_n(X) \leq \text{sc}_n(X) = k$.

Ahora probemos la desigualdad $\text{sc}_n(X) \leq \text{TC}_n^S(X)$. Supongamos que $\text{TC}_n^S(X) = k$, por lo tanto existen $U_1, \dots, U_k \subset X^n$ abiertos simétricos, es decir $\sigma(U_j) = U_j$ con $\sigma \in \Sigma_n$,

que recubren a X^n tales que en cada uno de ellos existe una planificación de movimientos simétrica $s_j: X^n \rightarrow X^{J_n}$, cumpliendo $e_n \circ s_j = i_j$.

Consideremos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} r: X^{J_n} &\rightarrow X \\ \alpha &\mapsto r(\alpha) = \alpha(0). \end{aligned}$$

Ahora definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} m_j = r \circ s_j: U_j &\rightarrow X \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto s_j(x_1, \dots, x_n)(0). \end{aligned}$$

Veamos ahora que la aplicación m_j cumple las condiciones de ser función de elección social:

1. Sea $x \in X$ y sea $c_x: J_n \rightarrow X$ tal que para todo $t \in [0, 1]$ y $i \in \{1, \dots, n\}$, $c_x(t_i) = x$. Entonces se cumple que

$$m_j(x, \dots, x) = r(c_x) = c_x(0) = x.$$

2. Para cualquier n -dupla $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, sea $\alpha: J_n \rightarrow X$, tal que $\alpha(1_i) = x_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$. Se cumple que

$$m_j(x_1, \dots, x_n) = r(\alpha) = \alpha(0) = \overline{\alpha(0)} = r(\bar{\alpha}) = m_j(\sigma(x_1, \dots, x_n)),$$

para cualquier $\sigma \in \Sigma_n$.

3. Sea la diagonal

$$\begin{aligned} \Delta_X: X &\rightarrow X^n \\ x &\mapsto (x, \dots, x). \end{aligned}$$

Obtenemos que

$$\Delta_X \circ m_j(x_1, \dots, x_n) = \Delta_X(r(\alpha)) = \Delta_X(\alpha(0)) = (\alpha(0), \dots, \alpha(0)).$$

Por tanto la homotopía hasta (x_1, \dots, x_n) estaría dada por

$$\Delta \circ m_j(x_1, \dots, x_n)(t) = (\alpha(2t-1), \dots, \alpha(2t-1)),$$

de manera que

$$\Delta_X \circ m_j \simeq i_j.$$

Hemos probado que las aplicaciones m_j son funciones de elección social definidas en cada abierto simétrico U_j , así que podemos concluir que $\text{sc}_n(X) \leq \text{TC}_n^S(X)$. \square

Bibliografía

- [1] Adhikari, M. R., *Basic Algebraic Topology and its Applications*, Springer, India, 2016, 277–279.
- [2] Arrow, K., *Social choice and Individual Values*, John Wiley & Son, New York, 1963.
- [3] Baigent, N., *Topological Theories Of Social Choice*, Elsevier, 2010.
- [4] Baryshnikov, Y. M., *Topological and discrete social choice: in a search of a theory*, in *Social Choice and Welfare*, Springer–Verlag, 1997.
- [5] Carrasquel, J., Lupton, G., Oprea, J., *Topological Complexity, Robotics and Social Choice*, *Snapshots of modern mathematics form Oberwolfach 5* (2018), 1–15.
- [6] Chichilnisky, G., Social Choice and the Topology of Spaces of Preferences, *Advances in Mathematics* 37 (1980), 165–176.
- [7] Dold, A., *Lectures on Algebraic Topology*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 1972.
- [8] Eckmann, B., Social Choice and Topology. A Case of Pure and Applied Mathematics, *Expositiones Mathematicae* 22 (2004), 385–393.
- [9] Farber, M., *Topological Complexity of Motion Planning*, *Discrete and Computational Geometry* 29, 2003, 211–221.
- [10] Farber, M. y Grant M. , Symmetric motion planning, Topology and robotics, *Contemp. Math.*, vol. 438, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [11] Kinsey, R. H., *Topology and Social Choice Theory*, Master’s Tesis, 2008.
- [12] Lechuga, L. y Murillo, A., Topological Complexity of formal spaces, *Topology and Robotics, Contemporary Math*, 438, 2008, 105–114.
- [13] Munkres, J., *Topology*, Springer, 2014.

- [14] Rudyak, Y. B., *On higher analogs of topological complexity*, *Topology and Its applications* 157, 2010, 916–920
- [15] Sen, A., *Collective Choice and Social Welfare*, Holden Day, San Francisco, 1970.
- [16] Švarc, A. S., The genus of a fiber space, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 55 (1966), no. 2, pages 49–140.
- [17] Villar, A., *Curso de microeconomía avanzada*, Antoni Bosch Editor (1996), 231–259.
- [18] Weinberger, S., On the topological social choice model, Elsevier, *Journal of Economic Theory* 115 (2004), 377–384.