



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Subespacios invariantes

Raúl Pino Velasco

2018–2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

Subespacios invariantes

Raúl Pino Velasco

Julio 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Subespazos invariantes
Breve descrición do contido
<p>O obxectivo principal deste traballo é que o estudante coñeza e se familiarice con certas ferramentas e resultados elementais da teoría de operadores en espazos de Hilbert. Para elo, empregaremos como fio condutor o coñecido como problema do subespazo invariante, sen solución coñecida na actualidade (abril 2018), a pesar dos numerosos e continuos esforzos durante máis de medio século.</p> <p>Esencialmente, o traballo consistirá en entender, coñecer e presentar:</p> <ol style="list-style-type: none">1.- o problema do subespazo invariante, motivación, interese e dificultade;2.- algúns resultados parciais que si son ben coñecidos (a/o estudante gozará de certa liberdade de escolla);3.- a visión e comentarios de matemáticos contemporáneos de prestixio sobre o problema do subespazo invariante. <p>Este traballo podería ser de proveito para estudantes con especial interese ou gusto polas materias da área de análise matemática.</p> <p>Información máis detallada en: http://webspersoais.usc.es/persoais/jorge.losada/tfg.html</p>
Recomendacións
<p>Empregaranse contidos propios da materia Análise funcional en espazos de Hilbert. Ter superadas as materias Cálculo vectorial e integración de Lebesgue e Series de Fourier e Introducción ás ecuacións en derivadas parciais.</p>

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Motivación e introducción histórica	1
1.1. Subespacios invariantes en dimensión finita	1
1.2. Subespacios invariantes en dimensión no finita	3
1.2.1. Espacios de dimensión no finita	3
1.2.2. Subespacios invariantes en espacios de Hilbert	5
1.2.3. Subespacios invariantes en espacios de Banach	9
1.3. Dos ejemplos clásicos	11
2. Resultados básicos	13
2.1. Algunos conceptos elementales	13
2.2. Algunos resultados elementales	14
3. Operadores en espacios de Hilbert. Geometría	19
3.1. Isometrías y transformaciones unitarias	19
3.2. Proyecciones ortogonales	21
4. Operadores reducibles	23
4.1. Representación matricial de un operador	24
4.2. Subespacios reductores	26
5. Operadores en espacios de Hilbert. Topología	29
5.1. Operadores no negativos	29
5.2. El Teorema de Banach-Steinhaus	31
5.3. Topologías en el espacio de operadores	33
5.4. La raíz cuadrada de un operador no negativo	37
6. Descomposición de operadores	43
6.1. El operador shift	43
6.2. La descomposición de Nagy-Foias-Langer	45
6.3. La descomposición de von Neumann-Wold	50
6.4. Más propiedades de los operadores A y A^2	53
6.4.1. Descomposición de algunas contracciones	55

7. El Problema del Subespacio Invariante en la actualidad	59
7.1. Terence Tao	59
7.1.1. Algunos casos particulares	68
7.2. Timothy Gowers	69
7.3. Peter Lax	71
7.4. Jesús M. F. Castillo	71
7.5. Eva Gallardo	72
Bibliografía	73

Resumen

Este trabajo involucra un importante concepto matemático: el de invarianza. Esencialmente, se trata de abstraer las propiedades fundamentales de cierto objeto dado para estudiar luego cómo cambia éste al aplicarle transformaciones que conservan dichas propiedades. Los invariantes son justo aquello que queda quieto, que no cambia y “caracterizan” así la estructura del objeto.

Centraremos nuestro interés en el estudio de ciertos invariantes conjuntistas asociados a aplicaciones lineales entre espacios vectoriales (¡y algo más!): los subespacios invariantes; bien conocidos en el caso finito dimensional pero de dudosa existencia en el caso infinito dimensional más sencillo: los espacios de Hilbert.

Abstract

This project is based on an important mathematical concept —Invariance— whose main idea is to abstract fundamental properties of a given object and study the changes it experiences when undergoing transformations. Invariant is what is stationary, which does not change and thus “characterize” the structure of the object.

We will focus on the study of certain invariant sets associated with linear applications between vector spaces (plus something else!): Invariant Subspaces. These concepts are well known in the finite dimensional cases, but have uncertain existence in the simplest infinite dimensional case: Hilbert space.

Introducción

El siguiente Trabajo Fin de Grado está centrado en el estudio de los subespacios invariantes en el contexto de los espacios vectoriales y las correspondientes aplicaciones lineales entre ellos.

En particular, prestaremos especial atención a un problema abierto de análisis funcional: el Problema del Subespacio Invariante. Sin perder nunca de vista este interrogante, a lo largo de la memoria buscaremos que se entienda su formulación, que se conozcan algunos resultados parciales y que queden reflejadas alguna de las visiones u opiniones que hoy por hoy tiene parte de la comunidad matemática.

Concretamente, en el primer capítulo se presenta una motivación e introducción histórica del Problema del Subespacio Invariante. Partiendo de resultados conocidos relacionados con subespacios invariantes en dimensión finita, intentamos generalizarlos a espacios de Hilbert. Mostramos también el interés y dificultad que plantea dicho problema. Además, se comenta brevemente desde una perspectiva histórica la situación del mismo en espacios de Banach. Se comentan al final del capítulo dos ejemplos típicos de operadores para los cuales se conocen todos sus subespacios invariantes.

En el segundo capítulo se definen los conceptos básicos de la teoría de operadores en espacios de Banach y se demuestran resultados que dan condiciones necesarias o suficientes para que existan subespacios invariantes para un operador lineal y acotado dado.

A continuación, en el Capítulo 3, pasamos ya a centrarnos en el estudio de operadores en espacios de Hilbert. La estructura adicional que aporta el producto interior nos permitirá profundizar más en el estudio del Problema del Subespacio Invariante, definiendo para ello varias clases importantes de operadores.

En el Capítulo 4 trabajaremos con dos conceptos importantes: las representaciones matriciales y los subespacios reductores. Nos permitirán definir el concepto de descomposición de un operador dado y simplificar éstos operadores como sumas directas de otros operadores más simples.

En el Capítulo 5 introducimos distintas topologías en el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con el objetivo de deducir nuevas propiedades relacionadas con la convergencia de sucesiones de operadores. Además, se prueban dos resultados clásicos que serán necesarios en el Capítulo 6; se trata del Teorema de Banach-Steinhaus y del Teorema del operador raíz cuadrada.

El sexto y penúltimo capítulo consta de dos partes. En la primera parte se definen con cierto rigor los operadores shift. En la segunda parte se estudian las contracciones en un espacio de Hilbert y se demuestran dos importantes resultados: la descomposición de Nagy-Foias-Langer y la descomposición de von Neumann-Wold (sólo válida para isometrías).

En el último capítulo comentamos las visiones que cinco matemáticos contemporáneos tienen sobre el Problema del Subespacio Invariante: Terence Tao, Timothy Gowers, Peter Lax, Jesús M. F. Castillo y Eva Gallardo. En el caso de T. Tao, recopilamos con detalle una serie de resultados originalmente publicados en su blog personal.

Me gustaría agradecer sinceramente a la profesora Eva Gallardo Gutiérrez y al profesor Jesús M. F. Castillo sus comentarios personales sobre el Problema del Subespacio Invariante, pues me ayudaron mucho en la elaboración del último capítulo de esta memoria.

Por último quiero dar las gracias a mi tutor, el profesor Jorge Losada Rodríguez, por su ayuda y dedicación constante, pues fueron fundamentales para realizar este trabajo.

Raúl Pino Velasco
Santiago de Compostela, 5 de julio de 2019.

Capítulo 1

Motivación e introducción histórica

Es característico dentro de la filosofía occidental y, por extensión, a todo el conocimiento actual la necesidad de que ciertos conceptos, que representan fenómenos u objetos, sean inmutables por razones epistemológicas. Para más detalles, véase [10].

El *paso del mito al logos* griego —esto es, esencialmente la actitud de que todo lo existente puede explicarse de forma racional— genera dos corrientes gnoseológicas distinguidas. La primera, encabezada por el jonio Heráclito, defiende que “todo fluye, nada permanece” y muestra lo mutable del mundo sensible, negando con ello la posibilidad del conocimiento. La segunda corriente, contrapuesta a la primera, sostiene que el cambio y la pluralidad son imposibles o irracionales —para una defensa de estas posturas, véanse las aporías Zenón de Elea—.

¿Qué importancia tiene esta última afirmación? Pues que si todo es cambio y mutación entonces nada puede conocerse; sin embargo, sí conocemos algunas cosas: luego algo permanece.

Tal concepción de que algo debe permanecer “estático” ante el manifiesto cambio sería finalmente asimilada por Platón en su teoría ontológica de las Ideas, donde éstas —que son la fuente del conocimiento— no cambian, son invariantes ante el cambio.

Por tanto, así como la filosofía griega estaba preocupada por los elementos que permanecen inmutables y que permitirían el conocimiento, nosotros, *mutatis mutandis*, exponemos en este trabajo que si queremos conocer mejor los espacios de Hilbert (o Banach) entonces hemos de centrarnos en el estudio de los “elementos” que quedan fijos tras los cambios producidos por los operadores; esto es, en los *subespacios invariantes*.

Más concretamente, si $T: X \rightarrow X$ es una aplicación lineal de un espacio vectorial X en sí mismo, un subespacio invariante de T será un subespacio vectorial $M \subseteq X$ tal que $T(M) \subseteq M$; luego los subespacios $M = \{0\}$ y $M = X$ son trivialmente invariantes.

1.1. Subespacios invariantes en dimensión finita

Tal y como acabamos de señalar, nuestro trabajo estará enfocado en la búsqueda de los subespacios invariantes de una aplicación lineal dada. Así, podemos empezar por abordar el siguiente problema.

Problema 1.1. Sea X un espacio vectorial de dimensión finita.

¿Es cierto que toda aplicación lineal $T: X \rightarrow X$ admite un subespacio invariante no trivial?

El siguiente resultado afirmativo es bien conocido. Aunque conocemos numerosas demostraciones, indicaremos una prueba que introduce ideas que utilizaremos más adelante.

Teorema 1.2. En un espacio vectorial de dimensión finita X sobre el cuerpo \mathbb{C} , toda aplicación lineal $T: X \rightarrow X$ admite un subespacio invariante no trivial.

Demostración. Sea $\dim(X) = n \in \mathbb{N}$. En tal caso, dada una aplicación lineal $T: X \rightarrow X$ y un vector $x \in X$ no nulo, el conjunto $\{x, Tx, \dots, T^n x\} \subseteq X$ es linealmente dependiente, pues está formado por $n + 1$ vectores de X .

Por tanto, existen necesariamente números complejos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ no todos nulos y tales que

$$\alpha_0 x + \alpha_1 Tx + \dots + \alpha_n T^n x = 0 \in X.$$

Así pues, en virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, el polinomio $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n$ admite una factorización de la forma

$$p(z) = \alpha(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m), \quad \text{con } \alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C},$$

y tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 x + \alpha_1 Tx + \dots + \alpha_n T^n x = (\alpha_0 + \alpha_1 T + \dots + \alpha_n T^n)x \\ &= \alpha(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I)x, \end{aligned}$$

donde I es la aplicación identidad en X .

Por tanto, existe $1 \leq j \leq m$ tal que $x \in \ker(T - \lambda_j I)$ y entonces, $\ker(T - \lambda_j I) \subseteq X$ es un subespacio no idénticamente nulo e invariante por T . En efecto, pues

$$y \in \ker(T - \lambda_j I) \implies Ty \in \ker(T - \lambda_j I),$$

ya que $(T - \lambda_j I)(Ty) = T(Ty - \lambda_j y) = T0 = 0$.

Si $T \neq \lambda_j I$ entonces $\ker(T - \lambda_j I) \neq X$ y el resultado enunciado ya está probado. En otro caso —es decir, si $T = \lambda_j I$ —, todo subespacio propio de X es invariante por T . \square

Nota 1.3. Si existe $x \in X - \{0\}$ tal que $T^m x = 0$ para cierto $m < n$, entonces el espacio vectorial no trivial dado por $\text{span}\{x, Tx, \dots, T^{m-1}x\}$ es invariante por T .

No obstante, si trabajamos con un espacio vectorial real, la respuesta es falsa.

Proposición 1.4 (La hipótesis $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es necesaria). Si X es un espacio vectorial real, el Teorema 1.2 anterior es falso.

Demostración. Basta considerar en el espacio vectorial real y dos-dimensional \mathbb{R}^2 la aplicación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada, respecto de la base canónica, es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En efecto, pues tal aplicación T se corresponde con un giro de ángulo $\pi/2$ y entonces no deja invariante ninguna recta que pase por el origen $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Es decir, T no admite subespacios invariantes no triviales. \square

1.2. Subespacios invariantes en dimensión no finita

La cuestión natural que surge ahora consiste en preguntarnos si podremos extender alguno de los resultados anteriores a espacios más generales que los de dimensión finita; esto es, a espacios vectoriales interesantes pero de dimensión no finita. Para ello, debemos empezar aclarando que significa “interesantes” en la oración anterior.

1.2.1. Espacios de dimensión no finita

Independientemente de si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en la sección anterior hemos considerado

$$X \equiv \mathbb{K}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \text{ para } 1 \leq i \leq n\}, \quad \text{para cierto } n \in \mathbb{N};$$

luego podría ser razonable considerar ahora como espacio análogo en dimensión no finita

$$X \equiv \mathbb{K}^\infty = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{K} \text{ para } i \in \mathbb{N}\};$$

es decir, X sería el espacio vectorial formado por todas las sucesiones de escalares del cuerpo \mathbb{K} .

No obstante, en el caso finito-dimensional, siempre hemos podido hablar de la distancia euclidiana de $x \in \mathbb{K}^n$ al origen $0 \in \mathbb{K}^n$, que viene dada por

$$d_2(x, 0) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - 0|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Por tanto, será más razonable y adecuado definir el espacio de dimensión no finita como

$$X \equiv \mathbb{K}^\infty = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\};$$

es decir, X sería ahora el espacio (en principio no sabemos si es espacio vectorial) formado por todas las sucesiones cuya “distancia euclidiana infinita” al origen es finita. Obtenemos así el espacio de sucesiones ℓ^2 , que tiene en común con el espacio euclidiano n -dimensional muchas más propiedades de las que podríamos intuir en un principio. Por ejemplo:

(Álgebra) 1.- $X \equiv \ell^2$ es un espacio vectorial —desigualdad de Minkowski—.

(Topología) 2.- si consideramos en ℓ^2 la topología métrica asociada a la distancia

$$\begin{aligned} d(x, y) &:= d_2(x - y, y - y) = d_2(x - y, 0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{para cada } x, y \in \ell^2, \end{aligned}$$

tenemos entonces que el espacio métrico (ℓ^2, d) es completo.

(Geometría) 3.- es posible hablar de ortogonalidad (y entonces de ángulos) en ℓ^2 ,

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i = 0.$$

En realidad, ℓ^2 es un (¡o quizás el!) ejemplo de espacio de Hilbert, estructura matemática cuya definición recordamos a continuación.

Definición 1.5 (Espacio de Hilbert). Si \mathcal{H} es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} en el que tenemos definido un producto interior, es decir, una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ tal que:

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0 \in \mathcal{H}$;
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$;
- (iii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $x, y, z \in \mathcal{H}$;

se dice entonces que \mathcal{H} es un espacio pre-Hilbert.

Además, si la distancia

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H},$$

dota a (\mathcal{H}, d) de una estructura de espacio métrico completo, se dice luego que \mathcal{H} es un espacio de Hilbert.

Debemos tener presente que, en general, los espacios de Hilbert se diferencian de los espacios euclidianos finito-dimensionales \mathbb{K}^n en ciertos aspectos importantes. Por ejemplo:

(Álgebra) 1.– Recordemos —de la materia *Espacios vectoriales y cálculo matricial*— que dado un espacio vectorial X , éste admite siempre un conjunto de vectores linealmente independiente maximal (respecto de la relación de inclusión); tal conjunto es lo que se conoce como una base de Hamel de X . Además, todas las bases de Hamel de X tienen el mismo cardinal, hecho que nos permite definir el concepto de dimensión de Hamel del espacio vectorial X . Sin embargo, tal y como vimos en *Análisis funcional en espacios de Hilbert*, todo espacio de Hilbert de dimensión de Hamel no finita tiene dimensión (de Hamel) mayor o igual que \aleph_1 . Es decir, no existe ningún espacio de Hilbert con dimensión (de Hamel) infinito-numerable.

(Topología) 2.– Para $n \in \mathbb{N}$, los espacios euclidianos \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n son separables; basta considerar \mathbb{Q}^n o $\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n$.

Sin embargo, en general, un espacio de Hilbert \mathcal{H} no es necesariamente separable.

(Alg & Top) 3.– Para $n \in \mathbb{N}$, todo subespacio vectorial de \mathbb{R}^n o \mathbb{C}^n es cerrado.

Sin embargo, en un espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión no finita existen subespacios vectoriales no cerrados.

Nota 1.6 (Espacios de Hilbert “interesantes”). Conviene dejar claro de inicio, que la no finitud de la dimensión (de Hamel) de nuestro espacio de Hilbert \mathcal{H} será la fuente principal de nuevas dificultades, especialmente si decidiéramos adoptar un punto de vista puramente algebraico, pues —como ya dijimos— pasamos directamente de bases finitas en \mathbb{K}^n a bases no numerables en \mathcal{H} si éste de dimensión no finita.

Ante esta situación, es necesario refinar el concepto de “dimensión”. Para ello, dado un espacio de Hilbert \mathcal{H} , se dice que un conjunto de vectores ortonormal maximal (respecto

de la relación de inclusión) es una base de Hilbert de \mathcal{H} . Además, se puede probar —utilizando el Principio de Maximalidad de Hausdorff— que todo espacio de Hilbert \mathcal{H} admite al menos una base de Hilbert y que todas ellas tienen el mismo cardinal, dando lugar así al concepto de dimensión de Hilbert de \mathcal{H} .

En el caso finito, partiendo de una base de Hamel, obtenemos una base de Hilbert del mismo cardinal aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt; con lo cual, $\dim_{\text{Hilbert}}(\mathcal{H}) = \dim_{\text{Hamel}}(\mathcal{H})$.

Si la dimensión de Hamel de \mathcal{H} es no finita, puesto que todo conjunto de vectores ortogonales es linealmente independiente, se sigue que $\dim_{\text{Hilbert}}(\mathcal{H}) \leq \dim_{\text{Hamel}}(\mathcal{H})$. Además, la dimensión de Hilbert sí distingue el infinito numerable, ya que —como probamos en la materia *Análisis funcional en espacios de Hilbert*—

$$\dim_{\text{Hamel}}(\ell^2) \geq \aleph_1 > \aleph_0 = \dim_{\text{Hilbert}}(\ell^2).$$

Una propiedad característica de los espacios vectoriales de dimensión finita es que cualesquiera de ellos son isoformas si y solo si tienen la misma dimensión. Esta situación se replica en espacios de Hilbert arbitrarios si trabajamos con las herramientas adecuadas, pues dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son isomorfos si y solo si $\dim_{\text{Hilbert}}(\mathcal{H}_1) = \dim_{\text{Hilbert}}(\mathcal{H}_2)$.

Otra propiedad importante del espacio de sucesiones ℓ^2 es su separabilidad; basta considerar

$$\left\{ x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} : x_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty \right\}.$$

Por tanto, todo espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión no finita y separable es isomorfo a ℓ^2 y esto es lo que motiva que a menudo se diga que “ ℓ^2 es el espacio de Hilbert”. No obstante, no conviene olvidar que existen otros ejemplos importantes de espacios de Hilbert separables, como por ejemplo: el espacio de Lebesgue $L^2(0, 1)$ —isomorfo a ℓ^2 vía coeficientes de Fourier— o el espacio de funciones holomorfas de Hardy H^2 —vía coeficientes de Taylor—.

1.2.2. Subespacios invariantes en espacios de Hilbert

Ya estamos en condiciones de proponer la siguiente cuestión análoga al Problema 1.1 anterior pero ahora en dimensión no finita.

Problema 1.7. *Sea \mathcal{H} un espacio pre-Hilbert complejo y de dimensión no finita.*

¿Es cierto que toda aplicación lineal $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ admite un subespacio invariante no trivial?

Como veremos a continuación, así formulado, el Problema 1.7 anterior tiene solución conocida. Sin embargo, la siguiente cuestión es mucho más interesante, hasta el punto de que a día de hoy su solución es desconocida.

Problema del Subespacio Invariante

Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión no finita.

¿Es cierto que toda aplicación lineal y acotada $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tiene un subespacio cerrado e invariante no trivial?

Nota 1.8. Existen claras diferencias entre el problema que acabamos de plantear y el Problema 1.1 anterior. No obstante, las dos condiciones añadidas (acotación de la aplicación lineal y subespacio cerrado) son inmediatas en el caso de dimensión finita (toda aplicación lineal en \mathbb{K}^n es acotada —esto es, continua— y todo subespacio vectorial de \mathbb{K}^n es cerrado). Conviene indicar también, que se trata de dos condiciones puramente topológicas y que, tal y como veremos en breve, dotan de dificultad y gran interés a la cuestión anteriormente propuesta.

En todo lo que sigue, emplearemos la expresión “subespacio” para referirnos a un subespacio vectorial cerrado.

Mostramos a continuación una serie de proposiciones que justifican el interés del enunciado del Problema del Subespacio Invariante.

Proposición 1.9 (La condición de separabilidad es necesaria).

Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert no separable, entonces toda aplicación lineal y acotada $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ admite un subespacio invariante no trivial.

Demostración. Sea T una aplicación lineal y acotada no trivial en \mathcal{H} —es decir, $0 \neq T \neq I$ — y $x \in \mathcal{H} - \{0\}$. En tal caso, el conjunto $\text{span}\{T^n x: n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio (no necesariamente cerrado) invariante por T . Luego $Y = \overline{\text{span}}\{T^n x: n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado e invariante por T .

Además, como $x \neq 0$, tal subespacio cerrado Y es no nulo. Por otra parte, dado que \mathcal{H} no es separable, $Y \neq \mathcal{H}$. Por tanto, $Y = \overline{\text{span}}\{T^n x: n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio no trivial cerrado e invariante para el operador T . \square

Proposición 1.10 (La condición de completitud es necesaria).

Existe un espacio pre-Hilbert \mathcal{P} y una aplicación lineal y acotada $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ sin subespacios invariantes no triviales.

Demostración. Sea \mathcal{P} el espacio vectorial formado por todos los polinomios complejos en la variable independiente x definidos en el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{P} \times \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (p, q) &\longmapsto \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \overline{q(x)} dx, \end{aligned}$$

que —como es bien sabido— define un producto interior en \mathcal{P} .

Sea ahora, $M_x: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ la aplicación dada por

$$M_x(p) = xp(x), \quad \text{para cada } p \in \mathcal{P}.$$

Es entonces claro que M_x es una aplicación lineal y además, dado que

$$\|M_x(p)\|^2 = \int_0^1 x^2 p^2(x) dx \leq \int_0^1 p^2(x) dx = \|p\|^2, \quad \text{para todo } p \in \mathcal{P},$$

deducimos luego que M_x es un operador lineal y acotado en el espacio pre-Hilbert $(\mathcal{P}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Supongamos que $M \subseteq \mathcal{P}$ es un subespacio vectorial cerrado e invariante por M_x ; veremos que $M = \mathcal{P}$.

Dado $\hat{p} \in M - \{0\}$, el conjunto $\{x \in [0, 1]: \hat{p}(x) = 0\}$ es finito, luego tiene medida de Lebesgue nula. Por tanto, teniendo en cuenta que \mathcal{P} es denso en el espacio de Lebesgue

$L^2(0, 1)$, todo polinomio $p \in \mathcal{P}$ es límite en $L^2(0, 1)$ de una sucesión de la forma $(q_n \hat{p})_{n \in \mathbb{N}}$, donde $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de polinomios.

Como estamos asumiendo que M es invariante para el operador M_x , el polinomio $x \hat{p}(x) \in M$ y entonces, por recurrencia, $x^n \hat{p}(x) \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, teniendo en cuenta que M es un espacio vectorial, concluimos que $(q_n p)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$.

Es decir, todo polinomio $p \in \mathcal{P}$ es límite en $(\mathcal{P}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de una sucesión elementos de M ; luego —al asumir que M es cerrado— necesariamente debe ser $M = \mathcal{P}$. \square

Nota 1.11. Conviene observar que \mathcal{P} es un subespacio denso en el espacio $L^2(0, 1)$; luego $\mathcal{P}([0, 1])$ no es completo. En efecto, pues considerando en $(\mathcal{P}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ los polinomios

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^j} x^j,$$

se sigue que $P_n \rightarrow g$ en $L^2(0, 1)$ cuando $n \rightarrow \infty$, siendo

$$g(x) = \frac{1}{1 - x/2}, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Luego $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy que no converge en \mathcal{P} , pues $g \notin \mathcal{P} \subset L^2(0, 1)$.

Proposición 1.12 (La condición de acotación es necesaria).

En todo espacio de Hilbert separable de dimensión no finita \mathcal{H} existe una aplicación lineal $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ sin subespacios invariantes no triviales.

Esquema de la prueba. Para la demostración del resultado enunciado es necesario emplear inducción transfinita y números ordinales y cardinales. Nos conformaremos como un esquema detallado de la prueba. Los pormenores pueden consultarse en [9, p. 96].

Denotemos por ω_c el primer número ordinal que tiene cardinalidad c , siendo c la cardinalidad del continuo. Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Hilbert de \mathcal{H} , todo subespacio de dimensión no finita de \mathcal{H} tiene por base de Hilbert una sucesión de la forma $(e_i)_{i \in F}$, siendo $F \subseteq \mathbb{N}$ un conjunto no finito; luego \mathcal{H} tiene c subespacios (cerrados) de dimensión no finita propios. Consideramos la correspondencia biunívoca $\alpha \leftrightarrow M_\alpha$ entre los predecesores de ω_c y la colección $\{M_\alpha: \alpha < \omega_c\}$ de los subespacios no finito dimensionales de \mathcal{H} .

Empleando inducción transfinita, es posible construir un conjunto linealmente independiente $\mathcal{S}_1 = \{f_\alpha, g_\alpha: \alpha < \omega_c\}$ de modo que $f_\alpha \in M_\alpha$ y $g_\alpha \notin M_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_c$. Para ello, en cierto momento de la construcción es necesario invocar el Teorema de las Categorías de Baire —estudiado en la materia *Topología General*—.

A continuación, se extiende el conjunto \mathcal{S}_1 a una base de Hamel $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ de \mathcal{H} . Si definimos T en \mathcal{S}_1 como

$$Tf_\alpha = g_\alpha \quad \text{y} \quad Tg_\alpha = Tf_{\alpha+1}, \quad \text{para cada } \alpha < \omega_c,$$

entonces, independientemente de como definamos T en el conjunto \mathcal{S}_2 , T no tendrá subespacios invariantes no triviales de dimensión no finita.

Luego resta únicamente lograr que T tampoco tenga subespacios invariantes de dimensión finita. Distinguiamos para ello dos casos:

- (i) si $\mathcal{S}_2 = \{h_i\}_{i \in I}$ no es finito, empleando un conjunto de índices (bien ordenado) I , definimos T como $Th_i = h_j$ para cada $i \in I$, siendo j el sucesor de i ;

(ii) si $\mathcal{S}_2 = \{h_1, \dots, h_n\}$ es finito, definimos: $Th_i = h_{i+1}$ para cada $1 \leq i \leq n-1$ y $Th_n = h_1$.

Extendiendo de forma lineal la aplicación T a todo \mathcal{H} , obtenemos que en ambos casos T no admite subespacios invariantes finito-dimensionales. En efecto, ya que toda combinación lineal de vectores de la base de Hamel $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ es asignada a otra combinación lineal en la que aparece un nuevo vector de la base. \square

Algunos resultados conocidos

Como ya señalamos en la sección anterior, no podemos modificar gran cosa el espacio de Hilbert separable \mathcal{H} en el que estamos trabajando —pues son todos isomorfos a ℓ^2 — y tampoco podemos estudiar de forma eficiente el espacio formado por todos los operadores lineales y acotados $\mathcal{B}(\ell^2)$ —pues es no separable, ya que toda sucesión de ℓ^∞ define un operador en $\mathcal{B}(\ell^2)$ —. Por tanto, la única alternativa viable consiste en añadir hipótesis extra a las de linealidad y acotación del operador T .

Una forma alternativa —y quizá la más común— de demostrar el Teorema 1.2 anterior consiste en hallar los autovalores y autovectores de la aplicación lineal T ; pues tal resultado es entonces una consecuencia directa de que el espectro (puntual) de T ,

$$\sigma(T) \equiv \sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inversible}\} \subset \mathbb{C},$$

siempre es, en virtud del Teorema Fundamental del Álgebra, un conjunto no vacío.

Si intentamos razonar de forma paralela a lo indicado anteriormente, pero siendo ahora $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert \mathcal{H} separable y de dimensión no finita, debemos tener en cuenta que el espectro de T ,

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ no es inversible}\} \\ &= \sigma_P(T) \sqcup \sigma_R(T) \sqcup \sigma_C(T) \subset \mathbb{C}, \end{aligned}$$

donde

- (i) $\sigma_P(T)$ es el espectro puntual, esto es, el conjunto de autovalores —escalares λ tales que $T - \lambda I$ no es inyectiva— de T ;
- (ii) $\sigma_R(T)$ es el espectro residual, esto es, el conjunto de escalares λ tales que $(T - \lambda I)^{-1}$ está bien definida pero su dominio no es un conjunto denso de X ;
- (iii) $\sigma_C(T)$ es el espectro continuo, esto es, el conjunto de escalares λ tales que $(T - \lambda I)^{-1}$ está definida sobre todo X pero no es una aplicación continua;

tiene las siguientes propiedades:

- 1.— en virtud del Teorema de Liouville —un resultado más fuerte que el Teorema Fundamental del Álgebra estudiado en *Variable Compleja*—, $\sigma(T)$ es un conjunto no vacío (y compacto) en \mathbb{C} ;
- 2.— pero no es necesariamente cierto que $\sigma(T) = \sigma_P(T)$ y tranquilamente puede ocurrir que $\sigma_P(T) = \emptyset$ [basta pensar en el operador shift, que lleva una sucesión $(x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$ en $(0, x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$].

Por tanto, el argumento espectral que resuelve el problema en el caso finito dimensional no funciona, en general, en el caso no finito dimensional.

No obstante, si añadimos ciertas hipótesis a mayores a nuestro operador lineal y acotado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, podemos conocer entonces propiedades del espectro de T que permiten deducir la existencia de subespacios invariantes.

Por ejemplo, destaca el *Teorema Espectral para operadores compactos y autoadjuntos* —estudiado en la materia *Análisis funcional en espacios de Hilbert*—, que afirma la existencia de una sucesión de autovalores reales de T cuyo único posible punto de acumulación es el $0 \in \mathbb{R}$. Se puede probar un resultado similar para operadores compactos y normales, obteniendo ahora una sucesión de autovalores complejos.

A partir de este tipo de resultados, se iniciaron líneas de investigación que tratan de relajar la hipótesis geométrica de operador normal para indagar hasta qué punto podremos obtener un resultado análogo al teorema espectral. Cabe mencionar, por ejemplo, los operadores cuasi-normales, hponormales, normaloides, paranormales o sub-normales. Pueden consultarse algunos resultados relativos a esta teoría en [6, Cap. 7–9].

1.2.3. Subespacios invariantes en espacios de Banach

Hasta ahora, solamente hemos mencionado los espacios de Hilbert como espacio paradigmático en el que plantear el Problema del Subespacio Invariante. Sin embargo, también podemos partir de un espacio vectorial normado de dimensión finita —todos son isomorfos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ — y generalizar luego el problema a dimensión no finita.

En este sentido, la generalización natural de un espacio vectorial normado de dimensión finita es un espacio de Banach. En particular, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach, pero el recíproco no es cierto. Cabe luego preguntarse por las diferencias más importantes entre ambos conceptos. Destacamos las siguientes:

(Geometría) 1.– Dado un subespacio vectorial cerrado M de un espacio de Hilbert \mathcal{H} , siempre podemos descomponer tal espacio como suma directa ortogonal $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ de M y su subespacio ortogonal M^\perp . Tal hecho está garantizado por el Teorema de la Proyección Ortogonal, resultado que no tiene un análogo claro en espacios de Banach, ya que ni tan siquiera tenemos garantizada la existencia de un complemento topológico cerrado para un subespacio cerrado dado.

(Álgebra) 2.– Puesto que los espacios de Banach no están dotados de una estructura de producto interior, no podemos hablar de bases de Hilbert. Se introduce por ello, en el caso separable, una generalización natural del concepto de base Hilbert: las bases de Schauder. Sin embargo, no está garantizada la existencia de este tipo de bases para un espacio de Banach arbitrario; es más, tal y como demostró el matemático (y pianista) sueco P. Enflo [20], existen espacios de Banach separables sin base de Schauder.

(¡ ℓ^2 !) 3.– En virtud del Teorema de Representación de Riesz, el dual (topológico) de ℓ^2 coincide con el propio ℓ^2 .

Además, el espacio de Hilbert ℓ^2 es el único espacio de Banach que es homogéneo: todo subespacio de dimensión no finita contenido en él es isomorfo al espacio total.

Tiene entonces pleno sentido plantearse el siguiente problema, que como mencionaremos en breve, tiene solución conocida.

Problema 1.13 (del Subespacio Invariante). *Sea X un espacio de Banach complejo, separable y de dimensión no finita.*

¿Es cierto que toda aplicación lineal y acotada $T: X \rightarrow X$ tiene un subespacio cerrado e invariante no trivial?

La gran dificultad y extensa cantidad de resultados probados motiva que solamente vayamos a dar una breve visión histórica de los mismos, pues en el resto del trabajo centraremos nuestro interés en el caso $X = \mathcal{H}$, siendo \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión no finita; es decir $\mathcal{H} \cong \ell^2$.

En la actualidad, todavía no existe un consenso general sobre quién enunció por primera vez el Problema del Subespacio Invariante; lo habitual es citar a Aronszajn y Smith, quienes generalizaron a espacios de Banach el siguiente resultado probado por el matemático de origen húngaro J. von Neumann sobre el año 1930:

Teorema (von Neumann & Aronszajn y Smith en [16], 1954).

Todo operador compacto en un espacio de Hilbert de dimensión mayor que 2 admite un subespacio invariante no trivial.

Posteriormente, se demostraron las siguientes “generalizaciones” del resultado de Smith y Aronszajn:

- 1.– Robinson y su alumno Bernstein [29] probaron en 1966 que todo operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ polinomialmente compacto (es decir, existe un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(T)$ es compacto) admite un subespacio invariante no trivial.
- 2.– Arveson y Feldman [17] demostraron en 1967 que todo operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para el que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \text{ y exista } O \neq K \in \overline{\{p(T) : p \in \mathbb{C}[X]\}}^{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \cap \mathcal{K}(\mathcal{H}),$$

siendo $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ el conjunto de los operadores compactos en \mathcal{H} , admite un subespacio invariante no trivial.

A pesar de que estos dos últimos resultados —que intentan debilitar la hipótesis de compacidad— solo fueron probados para espacios de Hilbert, sentaron las bases de nuevas investigaciones que tendrían por objetivo final encontrar resultados análogos pero para espacios de Banach.

No obstante, sería en 1973 cuando el —por aquel entonces— joven matemático ruso V. Lomonosov demostró, sin apoyarse en los resultados anteriores, el siguiente sorprendente resultado en espacios de Banach:

Teorema (de V. Lomonosov en [26], 1973).

Todo operador no escalar que conmuta con un operador compacto no nulo admite un subespacio invariante no trivial.

Más aún, todo operador que conmute con un operador no escalar que conmute con un operador compacto no nulo tiene un subespacio invariante no trivial.

Parece ser que la demostración de este último resultado es relativamente elemental; pues esencialmente hace uso de resultados sencillos de teoría espectral para operadores compactos y de un teorema de punto fijo (de Schauder).

La importancia y repercusión del Teorema de Lomonosov fue de tal calibre que, durante un tiempo, no se supo si existía algún operador lineal y acotado ajeno a la hipótesis de Lomonosov. Habría que esperar hasta 1978, cuando Hadwin *et al.* [24] encontraron un operador T tal que si T conmuta con S siendo S no escalar, entonces S no conmuta con ningún operador compacto no nulo.

Casi coincidiendo con los “decepcionantes” resultados de Hadwin, nuevamente P. Enflo —quien ya anteriormente había resuelto importantes problemas del análisis funcional como el problema de aproximación (Banach-Grothendieck) o el problema de la base (Banach)— anuncia una solución negativa para el Problema del Subespacio Invariante. Más exactamente, prueba que

Teorema (de P. Enflo en [21], 1976).

Existe un espacio de Banach complejo, separable y de dimensión no finita X y un operador lineal y acotado $T: X \rightarrow X$ tal que T no admite ningún subespacio cerrado e invariante no trivial.

Inicialmente, tal resultado fue mostrado en una serie de seminarios en París. La versión final de la prueba, que ocupaba cerca de cien páginas, fue calificada por los investigadores del momento como muy compleja y de difícil lectura, pues la solución de P. Enflo pasa por construir un espacio de Banach específico (y “difícil”) en el que cierto operador lineal y continuo (“fácil”) no admite subespacios invariantes cerrados no triviales.

El trabajo original de P. Enflo no sería publicado en Acta Mathematica hasta el año 1981. Poco después, aparecerían simplificaciones de los argumentos de P. Enflo y nuevas pruebas de su importante resultado. Destacan:

- 1.– Beauzamy [19], quien basándose en las ideas de Enflo produjo en 1984 un contraejemplo bastante más simple que el original.
- 2.– C. Read [28], quien mostraría un ejemplo de operador lineal y acotado “difícil” sin subespacios cerrados no triviales en un espacio de Banach “fácil”; más concretamente, en ℓ^1 . Posteriormente, construiría un operador lineal y acotado en ℓ^1 sin conjuntos cerrados invariantes no triviales.

1.3. Dos ejemplos clásicos

Se indican a continuación dos ejemplos que revelan la dificultad e interés asociados a conocer los subespacios invariantes de un operador dado.

Ejemplo 1.14 (Shift unilateral). Sea $S_+ : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ la aplicación dada por

$$S_+((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad \text{para cada } x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Es inmediato comprobar que S_+ está bien definida y que es una aplicación lineal y acotada; es decir, $S_+ \in \mathcal{B}(\ell^2)$. Es habitual referirse al operador S_+ como el shift (unilateral hacia la derecha); en el Capítulo 6 introduciremos los operadores shift con más de rigor y generalidad.

Para estudiar los subespacios invariantes de S_+ , lo natural sería empezar por estudiar la existencia de autovalores; veamos luego si existe algún $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $S_+(x) = \lambda x$ para cierta sucesión $x \in \ell^2$, $x \neq 0$. Planteamos entonces la ecuación

$$S_+(x) \equiv (0, x_1, x_1, \dots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots) \equiv \lambda S_+(x),$$

de la que se deduce fácilmente que debe ser $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego el operador shift S_+ no tiene autovectores.

Sin embargo, es evidente que S_+ sí tiene subespacios invariantes no triviales. Basta considerar

$$\mathbf{M}_n = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : x_i = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq n\} \subset \ell^2, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, pues es claro que \mathbf{M}_n es un subespacio vectorial (cerrado) de ℓ^2 y $S_+(\mathbf{M}_n) = \mathbf{M}_{n+1} \subset \mathbf{M}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

No obstante, cabe preguntarse si todo subespacio invariante de S_+ es un \mathbf{M}_n para algún $n \in \mathbb{N}$. La respuesta, que es negativa, fue proporcionada por el matemático sueco A. Beurling, quien en realidad caracterizó todo subespacio invariante de S_+ desarrollando para ello una teoría de descomposición de funciones holomorfas para el espacio de Hardy (¡y también de Hilbert!) H^2 .

La idea clave que subyace en los trabajos de Beurling es que el isomorfismo entre ℓ^2 y H^2 como espacios de Hilbert traduce la actuación del shift S_+ en ℓ^2 como multiplicar por la variable independiente z en H^2 . Para ver en detalle la demostración de los resultados de Beurling puede consultarse [30, Cap. 17].

Ejemplo 1.15 (Operador de Volterra). Consideremos ahora, en el espacio de Lebesgue (¡y también de Hilbert!) $L^2(0, 1)$, la aplicación $V: L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ dada para cada $f \in L^2(0, 1)$ por

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in (0, 1).$$

Se puede probar que V define una aplicación lineal y acotada en $L^2(0, 1)$; es decir, que $V \in \mathcal{B}(L^2(0, 1))$. Es usual referirse a este operador como el operador de Volterra.

Ahora bien, para cada $\alpha \in (0, 1)$, el conjunto

$$\mathbf{M}_\alpha = \{f \in L^2(0, 1) : f = 0 \text{ en casi todo punto de } (0, \alpha)\} \subset L^2(0, 1)$$

es un subespacio vectorial invariante para el operador de Volterra. En efecto, pues si $f \in \mathbf{M}_\alpha$ entonces

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt = 0 \quad \text{para todo } x \in (0, \alpha);$$

luego \mathbf{M}_α es invariante por V . Además, es claramente un subespacio cerrado de $L^2(0, 1)$, ya que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{M}_\alpha$ es una sucesión convergente a cierta función f en $L^2(0, 1)$ entonces —en virtud del teorema de convergencia dominada— se tiene que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(0, \alpha)}^2 &= \int_0^\alpha |f(t)|^2 dt = \int_0^\alpha \lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(t)|^2 dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha |f_n(t)|^2 dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{L^2(0, \alpha)}^2 = 0, \end{aligned}$$

luego $f \in \mathbf{M}_\alpha$.

A diferencia de lo que ocurría en el ejemplo anterior, lo importante de los subespacios invariantes \mathbf{M}_α es que, tal y como se indica en [8], son los únicos que admite el operador de Volterra, quedando así totalmente caracterizados.

Capítulo 2

Resultados básicos

En este capítulo introducimos de forma rigurosa los conceptos básicos de la teoría de subespacios invariantes. Por comodidad y generalidad, trabajaremos en el ámbito de los espacios vectoriales normados, pues de inicio la estructura asociada al producto interior (espacios pre-Hilbert) no juega un papel imprescindible.

Los conceptos y resultados presentados en este capítulo son clásicos; pueden consultarse, por ejemplo, en [4, 6].

2.1. Algunos conceptos elementales

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados sobre un cuerpo de escalares \mathbb{K} común para ambos. Denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$ al espacio vectorial formado por todos los operadores de X en Y ; es decir,

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{T: X \rightarrow Y : T \text{ es una aplicación lineal y continua}\}.$$

Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X, X) \equiv \mathcal{B}(X)$, introducimos la notación, lenguaje y conceptos que se indican en las siguientes definiciones.

Definición 2.1 (Invarianza & hiperinvarianza).

- (i) $M \subseteq X$ es un conjunto T -invariante si $T(M) \subseteq M$;
- (ii) $Y \subseteq X$ es un subespacio T -invariante si Y es un subespacio vectorial cerrado T -invariante;
- (iii) $Y \subseteq X$ es un subespacio T -hiperinvariante si Y es un subespacio L -invariante para todo operador $L \in \mathcal{B}(X)$ que conmuta con T .

Conviene observar que todo subespacio T -hiperinvariante es T -invariante. Por otra parte, los subespacios $\{0\}$ y X son ejemplos triviales de subespacios hiperinvariantes para todo operador $T \in \mathcal{B}(X)$.

Definición 2.2 (Algunos tipos de operadores).

- (i) T es escalar si $T = \alpha I$ para algún $\alpha \in \mathbb{K}$, donde $I \in \mathcal{B}(X)$ es el operador identidad;

- (ii) T es algebraico si $p(T) = O \in \mathcal{B}(X)$ para algún polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$;
- (iii) $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ es la órbita del vector $x \in X$ por T ;
- (iv) T es cíclico si existe $x \in X$ tal que $X = \overline{\text{span}\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}}$; en tal caso, nos referiremos al vector x como un vector cíclico de T ;
- (v) $[T] = \{L \in \mathcal{B}(X) : LT = TL\}$ es el conmutador del operador T ;
- (vi) $\mathcal{T}_x = \{Lx : L \in [T]\} = \bigcup_{L \in [T]} Lx$.

Todo operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ induce dos importantes subespacios: el núcleo y la imagen, que vienen dados respectivamente por

$$\ker(T) = T^{-1}\{0\} = \{x \in X : Tx = 0\} \quad \text{e} \quad \text{Im}(T) = \{y \in Y : \exists x \in X \text{ con } y = Tx\}.$$

El núcleo de un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ siempre es un subespacio vectorial cerrado de X , mientras su imagen es un subespacio vectorial (no necesariamente cerrado) de Y .

En la siguiente definición, dados dos operadores $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$, presentamos distintos modos de interpretar cuando T y S son operadores parecidos o relacionados entre sí. Para ello, debemos empezar por decir que un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ se dice cuasi-invertible si $\ker(T) = \{0\}$ e $\overline{\text{Im}(T)} = Y$.

Definición 2.3 (Operadores “parecidos”).

- (i) T se entrelaza a S si existe $W \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $WT = SW$;
- (ii) T se entrelaza densamente a S si existe $W \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $WT = SW$ e $\overline{\text{Im}(W)} = Y$;
- (iii) T y S son operadores similares si existe $W \in \text{Isom}(X, Y)$ tal que $WT = SW$;
- (iv) T y S son operadores cuasi-similares si existen $W \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $V \in \mathcal{B}(Y, X)$ operadores cuasi-invertibles tales que $WT = SW$ y $TV = VS$.

2.2. Algunos resultados elementales

A continuación, probaremos tres resultados elementales pero ciertamente útiles, pues serán empleados más adelante para obtener condiciones relativamente sencillas relacionadas con la existencia de subespacios invariantes no triviales.

Sea luego X un espacio vectorial normado, $M \subseteq X$ y $T \in \mathcal{B}(X)$.

Proposición 2.4 (Invarianza & topología).

- (i) si M es un conjunto T -invariante entonces \overline{M} también es un conjunto T -invariante;
- (ii) si M es un subespacio vectorial T -invariante entonces \overline{M} también es un subespacio T -invariante.

Demostración.

(i) Si $x \in \overline{M}$, existe luego una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x$. La T -invarianza de M implica que $Tx_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, la continuidad de T implica que $Tx_n \rightarrow Tx$ y así pues, concluimos que $Tx \in \overline{M}$ por ser \overline{M} un conjunto cerrado.

(ii) Basta ahora probar que la clausura de un subespacio vectorial también es un subespacio vectorial. Si $x, y \in \overline{M}$, existen luego dos sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ de modo que $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$. Puesto que la suma es una aplicación continua, la sucesión $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ converge a $x + y$, que es un elemento de \overline{M} por ser límite de elementos de M .

Análogamente, probamos que $\alpha x \in \overline{M}$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo vector $x \in \overline{M}$. \square

Proposición 2.5. *Los conjuntos $\ker(T)$ e $\overline{\text{Im}(T)}$ son subespacios T -hiperinvariantes.*

Demostración. Sea $L \in [T]$ —es decir, $L \in \mathcal{B}(X)$ y $LT = TL$ — escogido de forma arbitraria. Así, para $x \in \ker(T)$ se tiene que $TLx = LTx = L0 = 0$; luego $Lx \in \ker(T)$. Por tanto, $\ker(T)$ es un subespacio L -invariante.

Por otra parte, dado que $LTx = TLx$ para todo $x \in X$, concluimos entonces que $L(\overline{\text{Im}(T)}) \subseteq \overline{\text{Im}(T)}$ y así, la continuidad del operador L implica ahora que $L(\overline{\text{Im}(T)}) \subseteq \overline{L(\text{Im}(T))} \subseteq \overline{\text{Im}(T)}$; luego $\overline{\text{Im}(T)}$ es un subespacio L -invariante. \square

Proposición 2.6. *Sean $S, T \in \mathcal{B}(X)$ dos operadores no nulos y tales que $ST = O$, luego $\ker(S)$ e $\overline{\text{Im}(T)}$ son subespacios invariantes no triviales para ambos operadores.*

Demostración. En virtud de la Proposición 2.5 anterior, sabemos que $\overline{\text{Im}(T)}$ y $\ker(S)$ son subespacios invariantes para los operadores T y S respectivamente.

Por otra parte, la condición $ST = O$ equivale a que $\text{Im}(T) \subseteq \ker(S)$, de donde se sigue que

$$T(\ker(S)) \subseteq \text{Im}(T) \subseteq \ker(S); \quad (2.1)$$

luego $\ker(S)$ es T -invariante. Además, dado que S es continua y $S(\text{Im}(T)) = \{0\}$,

$$S(\overline{\text{Im}(T)}) \subseteq \overline{S(\text{Im}(T))} = \{0\} \subseteq \overline{\text{Im}(T)};$$

luego $\overline{\text{Im}(T)}$ es S -invariante.

Teniendo en cuenta (2.1) y que T es no nulo —es decir, $\text{Im}(T) \neq \{0\}$ —, deducimos que $\ker(S) \neq \{0\}$. Por otra parte, teniendo de nuevo en cuenta (2.1) y que S es no nulo —es decir, $\ker(S) \neq X$ —, concluimos que $\overline{\text{Im}(T)} \neq X$, pues el núcleo de todo operador es un conjunto cerrado.

Por tanto, $\ker(S)$ e $\overline{\text{Im}(T)}$ son subespacios invariantes no triviales para T y S . \square

En lo que resta de capítulo, $(X, \|\cdot\|)$ será un espacio vectorial normado de dimensión mayor que uno.

Los dos teoremas que siguen proporcionan las condiciones relacionadas con la existencia de subespacios invariantes no triviales anteriormente prometidas.

Teorema 2.7 (Condición necesaria para la \sharp).

Si un operador no nulo $T \in \mathcal{B}(X)$ no admite ningún subespacio invariante no trivial, entonces T es cuasi-invertible.

Demostración. Dado que X es un espacio vectorial de dimensión mayor que 1, existe un conjunto linealmente independiente formado por dos vectores distintos de X . Además, puesto que el operador T no admite ningún subespacio invariante no trivial, T no puede ser idénticamente nulo.

Por tanto, por la Proposición 2.5 anterior, $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$ han de ser subespacios triviales y como $T \neq O$, se sigue que $\ker(T) \neq X$ e $\text{Im}(T) \neq \{0\}$. Entonces tiene que ser $\ker(T) = \{0\}$ e $\overline{\text{Im}(T)} = \text{Im}(T) = X$; es decir, T es un operador cuasi-invertible. \square

Teorema 2.8 (Condición suficiente para la \exists).

Si un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ conmuta con algún operador algebraico y no escalar, entonces T admite subespacios invariantes no triviales.

Demostración. Es una consecuencia directa del siguiente resultado.

Lema 2.9 (Operadores algebraicos & hiperinvarianza).

Todo operador algebraico y no escalar S admite subespacios hiperinvariantes no triviales.

Demostración. Dado que S es un operador algebraico, existe entonces un polinomio p de grado mínimo $n \in \mathbb{N}$ para el que $p(S) = O$; puesto que por hipótesis S no es escalar, debe ser $n > 1$. Luego el polinomio p se puede factorizar como el producto de un monomio de grado 1 y un polinomio q de grado $n - 1$; es decir,

$$p(S) = (\lambda I - S)q(S) = O, \quad \text{para cierto } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Observemos además que $\lambda I - S \neq O$ —pues S no es escalar— y $q(S) \neq O$ —pues el polinomio q es de grado mínimo—. Esto es, $\ker(\lambda I - S) \neq X$ y $\ker(\lambda I - S) \neq \{0\}$, luego en virtud de la Proposición 2.5 anterior, $\ker(\lambda I - S)$ es un subespacio hiperinvariante no trivial para el operador $\lambda I - S$.

El resultado enunciado se deduce ahora teniendo en cuenta que $[\lambda I - S] = [S]$. \square

Los siguientes teoremas relacionan la existencia de subespacios (hiper)-invariantes no triviales para un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ con la existencia de los mismos para un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ “parecido” a T .

Teorema 2.10 (Similitud & invarianza).

Para dos operadores similares $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$, la existencia de un subespacio invariante no trivial para T equivale a la existencia de un subespacio invariante no trivial para S .

Demostración. Probaremos primero el siguiente lema.

Lema 2.11. *Si $T \in \mathcal{B}(X)$ se entrelaza densamente a $S \in \mathcal{B}(Y)$ mediante $W \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $M \subset Y$ es un subespacio S -invariante no trivial tal que $\text{Im}(W) \cap M \neq \{0\}$, entonces $W^{-1}(M)$ es un subespacio T -invariante no trivial.*

Demostración. Por ser W una aplicación lineal y continua, la imagen inversa por W del subespacio (cerrado) $M \subset Y$ es un subespacio de X . Por otra parte, teniendo en cuenta que T se entrelaza densamente a S vía W —es decir, $WT = SW$ — y que M es S -invariante,

$$WT(W^{-1}(M)) \subseteq SW(W^{-1}(M)) \subseteq S(M) \subseteq M$$

y entonces

$$T(W^{-1}(M)) \subseteq W^{-1}(WT(W^{-1}(M))) \subseteq W^{-1}(M).$$

Por tanto, $W^{-1}(M)$ es un subespacio T -invariante.

Además, si M es un subespacio no trivial, entonces $W^{-1}(M)$ es también no trivial. En efecto, pues si fuese $W^{-1}(M) = X$, entonces

$$\text{Im}(W) = W(X) = W(W^{-1}(M)) \subseteq M,$$

lo cual implica que $\overline{\text{Im}(W)} \subseteq \overline{M} = M \neq Y$, contradiciendo así que T se entrelaza densamente a S . Por otra parte, la condición $\text{Im}(W) \cap M \neq \{0\}$ asegura que $W^{-1}(M) \neq \{0\}$. \square

En particular, si $W \in \text{Isom}(X, Y)$ entonces T se entrelaza densamente a S vía W y S se entrelaza densamente a T mediante $W^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$, el operador inverso de W . \square

Teorema 2.12 (Cuasi-similitud & hiperinvarianza).

Para dos operadores cuasi-similares $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$, la existencia de un subespacio hiperinvariante no trivial para T equivale a la existencia de un subespacio hiperinvariante no trivial para S .

Demostración. Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$ dos operadores cuasi-similares; existen entonces $W \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $V \in \mathcal{B}(Y, X)$ operadores cuasi-invertibles —es decir, $\ker(W) = \{0\}$, $\overline{\text{Im}(W)} = Y$ e $\overline{\text{Im}(V)} = X$, $\ker(V) = \{0\}$ — de forma que

$$WT = SW \quad \text{y} \quad TV = VS. \quad (2.2)$$

Por ser $V \in \mathcal{B}(Y, X)$ un operador cuasi-invertible, V es inyectivo; luego $V(M) \neq \{0\}$ para todo subespacio $M \subseteq Y$ hiperinvariante no trivial de S .

En tal caso, para todo $x \in V(M) - \{0\}$, $\overline{\mathcal{T}_x}$ es un subespacio T -hiperinvariante no nulo en virtud del siguiente lema.

Lema 2.13 (Hiperinvarianza de \mathcal{T}_x).

$\overline{\mathcal{T}_x}$ es un subespacio hiperinvariante para T . Además, $\overline{\mathcal{T}_x} \neq \{0\}$ si y sólo si $x \neq 0$.

Demostración. Si $y_1, y_2 \in \mathcal{T}_x$, existen entonces $L_1, L_2 \in [T]$ tales que $y_1 = L_1x$ e $y_2 = L_2x$; luego $y_1 + y_2 = (L_1 + L_2)x \in \mathcal{T}_x$, pues $L_1 + L_2 \in [T]$. Si $y \in \mathcal{T}_x$ entonces existe $L \in [T]$ tal que $y = Lx$; luego, $\alpha y = \alpha Lx \in \mathcal{T}_x$, pues $\alpha L \in [T]$. Por tanto, \mathcal{T}_x es un subespacio vectorial.

Veamos ahora que \mathcal{T}_x es invariante para todo operador $L \in [T]$. Dado $y \in \mathcal{T}_x$ arbitrario, tenemos que $y = L_0x$ para cierto $L_0 \in [T]$; luego $Ly = LL_0x \in \mathcal{T}_x$, pues $LL_0 \in [T]$ si $L, L_0 \in [T]$. Por tanto, $L(\mathcal{T}_x) \subseteq \mathcal{T}_x$.

Es decir, \mathcal{T}_x es L -invariante y entonces —en virtud de la Proposición 2.4 anterior— $\overline{\mathcal{T}_x}$ es un subespacio L -invariante. Luego, $\overline{\mathcal{T}_x}$ es un subespacio hiperinvariante para T .

Finalmente, si $x \neq 0$ —en caso contrario es obvio que $\mathcal{T}_x = \{0\}$ —, como $I \in [T]$, $Ix = x \in \mathcal{T}_x$ y se tiene entonces que $\mathcal{T}_x \neq \{0\}$ siempre que x sea no nulo. \square

Resta únicamente probar que $\overline{\mathcal{T}_x} \neq X$. Teniendo en cuenta (2.2), observamos que

$$\begin{aligned} (WLV)S &= WLVS = WLTV \\ &= WTLV = SWLV = S(WLV), \quad \text{para todo } L \in [T]. \end{aligned}$$

Es decir, $WLV \in [S]$ para todo $L \in [T]$. Así pues, si M es un subespacio hiperinvariante de S , entonces M es WLV -invariante para todo operador $L \in [T]$.

Sean $x \in V(M)$ e $y \in \mathcal{T}_x$ arbitrarios, luego $x = Vu$ para algún $u \in M \subset Y$ e $y = Lx = LVu$ para algún $L \in [T]$. Dado que $u \in M$ y M es invariante por WLV , se tiene entonces que $Wy = WLVu \in M$; luego, $W(\mathcal{T}_x) \subseteq M$ y entonces $W(\overline{\mathcal{T}_x}) \subseteq \overline{M} = M \neq Y$ para todo $x \in V(M)$.

Así, se sigue finalmente que $\overline{\mathcal{T}_x} \neq X$ para todo $x \in V(M)$. En efecto, pues si fuera $\overline{\mathcal{T}_x} = X$, como W es un operador cuasi-invertible, tendríamos entonces que $Y = \overline{\text{Im}(W)} = \overline{W(X)} = \overline{W(\mathcal{T}_x)} \subseteq M \neq Y$, lo cual es una contradicción. \square

Nota 2.14. El Teorema 2.10 anterior afirma que los subespacios invariantes se conservan por similitud de operadores; para conservar subespacios hiperinvariantes —en virtud del Teorema 2.12— basta la cuasi-similitud de operadores.

Surge entonces una pregunta natural: *¿preserva la cuasi-similitud subespacios invariantes?* Por lo que se dice en [6], tal pregunta no tiene respuesta conocida a día de hoy.

Capítulo 3

Operadores en espacios de Hilbert. Geometría

En este capítulo nos introducimos ya en el estudio de operadores definidos en espacios de Hilbert. Para lograr cierta completitud del trabajo, presentaremos aquí resultados sobre isometrías, transformaciones unitarias y proyecciones que serán empleados más adelante.

Dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ entre dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , se define el operador adjunto de T como el único operador $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$. Además, se dice que:

- (i) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto si $T = T^*$, es decir, si T coincide con su adjunto; en particular, cuando el espacio de Hilbert \mathcal{H} es complejo, T es autoadjunto si y sólo si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathcal{H}$;
- (ii) T es normal si $TT^* = T^*T$, es decir, si T conmuta con su adjunto.

3.1. Isometrías y transformaciones unitarias

Geoméricamente, lo que distingue a un espacio de Hilbert de un espacio de Banach arbitrario es la regularidad inducida por el producto interior en el primero y de la que carece, en general, el segundo.

Por tanto, será especialmente interesante conocer con cierto detalle los operadores que conservan el producto interior —isometrías—, así como aquellos que a mayores también respetan la estructura global del espacio —transformaciones unitarias—.

Definición 3.1 (Isometrías & transformaciones unitarias). Dados dos espacios de Hilbert \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 y dos operadores $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, se dice que:

- (i) T es una isometría si $\langle Tx, Ty \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todo $x, y \in \mathcal{H}_1$;
- (ii) T es una transformación unitaria si $T \in \text{Isom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $\langle Tx, Ty \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}$ para todo $x, y \in \mathcal{H}_1$;
- (iii) \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 son espacios de Hilbert unitariamente equivalentes si existe una transformación unitaria $T \in \text{Isom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$;

(iv) T y S son unitariamente equivalentes si están entrelazados por una transformación unitaria, esto es, si existe una transformación unitaria $U \in \text{Isom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ tal que $UT = SU$;

(v) T es una coisometría si T^* es una isometría.

Sean $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ dos operadores entre espacios de Hilbert

Proposición 3.2 (Caracterización de las isometrías).

(i) T es una isometría;

(ii) $T^*T = I$;

(iii) $T^{*n}T^n = I$ para todo $n \geq 1$.

Demostración. Consideramos la identidad siguiente,

$$\langle (T^*T - I)x, y \rangle = \langle T^*T, xy \rangle - \langle x, y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle - \langle x, y \rangle \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}. \quad (3.1)$$

(i) \implies (ii)

Si T es isometría entonces $\langle (T^*T - I)x, y \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$ por (3.1); luego, $(T^*T - I)x = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ y así, forzosamente $T^*T = I$.

(ii) \implies (i)

Si $T^*T = I$ se tiene otra vez por (3.1) que $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

(ii) \implies (iii)

Se sigue aplicando inducción en n ; si $T^{*n-1}T^{n-1} = I$ es la hipótesis de inducción, entonces $T^{*n}T^n = T^*(T^{*n-1}T^{n-1})T = T^*IT = T^*T = I$. (iii) \implies (ii) Trivial. \square

Proposición 3.3 (Caracterización de las transformaciones unitarias).

(i) U es una transformación unitaria;

(ii) U es invertible y $U^{-1} = U^*$;

(iii) si además $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, entonces U es una isometría normal.

Demostración.

(i) \iff (ii)

Por ser $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ una transformación unitaria, U es un isomorfismo que preserva el producto interior; luego existe una aplicación lineal $U^{-1} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ tal que $UU^{-1} = I$ y $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle Ux_1, Ux_2 \rangle$, para todo $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_1$. Así pues,

$$\langle x, U^{-1}y \rangle = \langle Ux, UU^{-1}y \rangle = \langle Ux, y \rangle = \langle x, U^*y \rangle, \text{ para todo } x \in \mathcal{H}_1 \text{ e } y \in \mathcal{H}_2.$$

Como el operador adjunto es único, se sigue finalmente que $U^* = U^{-1}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que U es invertible y que $U^{-1} = U^*$. Puesto que

$$1 = \|U^{-1}U\| = \|U^*U\| = \|U\|^2 = \|U^*\|^2 = \|U^{-1}\|^2,$$

concluimos luego que $\|U\| = \|U^{-1}\| = 1$ y entonces, para $x \in \mathcal{H}_1$,

$$\|x\| = \|U^{-1}Ux\| \leq \|U^{-1}\| \|Ux\| = \|Ux\| \leq \|U\| \|x\| = \|x\|;$$

de donde se sigue que $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}_1$.

Supongamos ahora que $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$.

(i) \implies (ii)

Por ser U una transformación unitaria, U es una isometría y además —en virtud de (ii)— $UU^* = UU^{-1} = I = U^{-1}U = U^*U$; luego U es normal.

(iii) \implies (ii)

Por ser $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría, se tiene que

$$\langle (U^*U - I)x, y \rangle = \langle U^*Ux, y \rangle - \langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle - \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

Entonces, en particular, $(U^*U - I)x = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Luego, $U^*U - I = O$, y por tanto, $U^*U = I = UU^*$ al ser U normal.

Así pues, U es invertible y su inverso coincide con su adjunto. \square

3.2. Proyecciones ortogonales

Un resultado clásico y fundamental de la teoría de espacios de Hilbert es el Teorema de la Proyección Ortogonal; pues justifica y motiva el interés de las proyecciones (y en especial de las proyecciones ortogonales) en los espacios de Hilbert.

A continuación, presentamos los resultados sobre proyecciones que necesitaremos más adelante en los Capítulos 4 y 6.

Definición 3.4 (Proyecciones & proyecciones ortogonales).

(i) $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una proyección si $P^2 = P$; si $O \neq P \neq I$, la proyección P se dice no trivial.

(ii) $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una proyección ortogonal si P es una proyección tal que $\ker(P) \perp \text{Im}(P)$.

(iii) Dos proyecciones $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ son mutuamente ortogonales si $\text{Im}(P_1) \perp \text{Im}(P_2)$.

Conviene observar que para toda proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ su imagen coincide con el conjunto de sus puntos fijos, es decir, $\text{Im}(P) = \{x \in \mathcal{H}: x = Px\}$. En efecto, pues si $x \in \text{Im}(P)$ entonces $Px = P^2x$, es decir, $P(x - Px) = 0$, de donde se sigue finalmente que $x - Px \in \ker(P) \cap \text{Im}(P) = \{0\}$.

Además, si P es una proyección, entonces $I - P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ también es una proyección, a la que es habitual referirse como la proyección complementaria de P .

Por otra parte, para toda proyección $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tenemos que $\text{Im}(I - P) = \ker(P)$ y $\ker(I - P) = \text{Im}(P)$, de donde se deduce que $\text{Im}(P)$ e $\text{Im}(I - P)$ son subespacios vectoriales cerrados de \mathcal{H} y que la proyección complementaria de una proyección ortogonal también es una proyección ortogonal.

Proposición 3.5 (Caracterización de las proyecciones ortogonales).

Para una proyección no nula $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, son equivalentes:

(i) P es una proyección ortogonal;

(ii) $\langle Px, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ [P es no negativo];

(iii) P es autoadjunto;

(iv) P es normal.

Demostración. Es sobradamente conocido que para todo operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\ker(T) = \text{Im}(T^*)^\perp \quad \text{e} \quad \overline{\text{Im}(T)} = \ker(T^*)^\perp.$$

(i) \implies (ii)

Por ser $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una proyección ortogonal no nula, se tiene que $\ker(P) \perp \text{Im}(P)$; luego $\text{Im}(P) = \ker(P)^\perp = \overline{\text{Im}(P^*)}$. Por tanto, dado $x \in \mathcal{H}$ arbitrario, existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tal que $Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P^*x_n$. En tal caso, puesto que P es continua,

$$P^*Px = \lim_{n \rightarrow \infty} P^*P^*x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P^2)^*x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P^*x_n = Px$$

y tenemos entonces que

$$\langle Px, x \rangle = \langle P^*Px, x \rangle = \langle Px, Px \rangle = \|Px\|^2 \geq 0.$$

(ii) \implies (iii)

En realidad, todo operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ es autoadjunto (Ver Proposición 5.3).

(iii) \implies (iv) Trivial.

(iv) \implies (i)

Por ser P un operador normal, tenemos que $\|P^*x\| = \|Px\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$; en efecto, pues

$$\|P^*x\|^2 - \|Px\|^2 = \langle P^*x, P^*x \rangle - \langle Px, Px \rangle = \langle (PP^* - P^*P)x, x \rangle = 0.$$

Por tanto, concluimos que $\ker(P) = \ker(P^*)$.

Teniendo ahora en cuenta que —por ser P una proyección— $\text{Im}(P)$ es un subespacio vectorial cerrado, deducimos finalmente que

$$\text{Im}(P) = \overline{\text{Im}(P)} = \ker(P^*)^\perp = \ker(P)^\perp;$$

luego P es una proyección ortogonal. □

Proposición 3.6 (Más sobre proyecciones ortogonales).

Sean $P_1, P_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos proyecciones ortogonales. Son equivalentes:

(i) $\text{Im}(P_1) \perp \text{Im}(P_2)$;

(ii) $\text{Im}(P_2) \subseteq \ker(P_1)$;

(iii) $P_1P_2 = O$;

(iv) $\text{Im}(P_1) \subseteq \ker(P_2)$;

(v) $P_2P_1 = O$.

Demostración. (i) \iff (ii) \iff (iii)

El resultado se deduce observando que $\text{Im}(P_1) \perp \text{Im}(P_2)$ si y sólo si $\text{Im}(P_2) \subseteq \text{Im}(P_1)^\perp = \ker(P_1)$ al ser una proyección ortogonal. Y esto último se cumple si y sólo si $P_1P_2 = O$.

(i) \iff (iv) \iff (v)

Basta cambiar P_1 por P_2 en el razonamiento anterior. □

Capítulo 4

Operadores reducibles

Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y $M \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado de \mathcal{H} , por el Teorema de la Proyección Ortogonal, podemos identificar \mathcal{H} con el espacio $M \oplus M^\perp$ formado por todos los pares ordenados (u, v) con $u \in M$ y $v \in M^\perp$. Nos referiremos a este espacio como la suma directa de M y M^\perp .

Emplearemos la notación $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ y $u + v = u \oplus v = (u, 0) \oplus (0, v) \in M \oplus M^\perp$ y consideraremos $M \cong M \oplus \{0\}$ y $M^\perp \cong \{0\} \oplus M^\perp$. Además, denominaremos proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre M a la única proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $\text{Im}(P) = M$.

En este capítulo veremos cómo hacer algo análogo a lo expuesto anteriormente, pero considerando ahora operadores. Basándonos en [6, Cap. 4], introduciremos los conceptos de representación matricial de un operador y el de subespacio reductor.

Comenzamos demostrando un resultado que caracteriza los subespacios invariantes de un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mediante proyecciones ortogonales.

Teorema 4.1 (Subespacios invariantes & proyecciones ortogonales).

Los siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) T admite un subespacio invariante no trivial;
- (ii) existe una proyección ortogonal no trivial $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $PTP = TP$;
- (iii) la ecuación $STS = TS$ tiene solución no trivial.

Demostración.

(i) \implies (ii)

Sea $M \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio invariante no trivial para el operador T . En virtud del Teorema de la Proyección Ortogonal, sabemos que $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$; luego dado $x \in \mathcal{H}$, existen vectores únicos $u \in M$ y $v \in M^\perp$ tales que $x = u + v$. Por tanto, si $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre M , teniendo en cuenta que M es T -invariante, tenemos que

$$\begin{aligned} PTPx &= PTP(u + v) = PTPu + PTPv \\ &= PTu + PT0 = PTu = Tu = TPu \\ &= TP(x - v) = TPx - TPv = TPx - T0 \end{aligned}$$

$$= TPx.$$

Es decir, hemos probado que $PTPx = TPx$ para todo $x \in \mathcal{H}$; luego $PTP = TP$.

(ii) \implies (iii) Trivial.

(iii) \implies (i)

Si $TS = O$, en virtud de la Proposición 2.6 anterior, el operador T admite subespacios invariantes no triviales.

Si $TS \neq O$, procederemos del siguiente modo: observemos inicialmente que la condición $TS = STS$ equivale a que $(I - S)TS = O$, con $O \neq S \neq I$ por hipótesis. Es decir,

$$\{0\} \neq \overline{\text{Im}(TS)} \subseteq \ker(I - S) \neq \mathcal{H}.$$

Luego $\ker(I - S)$ es un subespacio invariante no trivial para T ; en efecto, pues

$$\begin{aligned} x \in \ker(I - S) &\iff (I - S)x = 0 \iff x = Sx \\ &\implies Tx = TSx = STSx = STx \\ &\iff Tx - STx = 0 \implies Tx \in \ker(I - S). \end{aligned} \quad \square$$

4.1. Representación matricial de un operador

Dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y un subespacio cerrado $M \subseteq \mathcal{H}$, emplearemos la conocida como representación matricial de T , que viene dada por

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

donde $A \in \mathcal{B}(M)$, $B \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $C \in \mathcal{B}(M, M^\perp)$ y $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$. En particular, para la proyección ortogonal P de \mathcal{H} sobre $M \subseteq \mathcal{H}$, tenemos que

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp.$$

Proposición 4.2 (Representación matricial & subespacios invariantes).

Si $M \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio T -invariante, entonces

$$T = \begin{pmatrix} T|_M & B \\ O & D \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

siendo $B \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$ y $T|_M \in \mathcal{B}(M)$ la restricción de T al subespacio M .

Recíprocamente, si $A \in \mathcal{B}(M)$, $B \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$ y

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

entonces $M \subseteq \mathcal{H}$ es T -invariante y $A = T|_M$.

Demostración. Sea

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

donde $A \in \mathcal{B}(M)$, $B \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $C \in \mathcal{B}(M, M^\perp)$, $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$.

Si $M \subseteq \mathcal{H}$ es invariante por T , entonces $C : M \rightarrow M^\perp$ es el operador idénticamente nulo. En efecto, dado $x \in M$ arbitrario —identificado con $(x, 0) \in \mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ — se tiene que

$$Tx = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = (Ax, Cx) \in M \iff Cx = 0.$$

Para demostrar el recíproco, supongamos que $C = O$ y tomemos $x \in M$ —es decir, $(x, 0) \in M \oplus M^\perp$ — arbitrario. En tal caso,

$$Tx = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = (Ax, 0) = Ax \in M.$$

Luego, $M \subseteq \mathcal{H}$ es invariante por T y $A = T|_M$. □

Teorema 4.3 (Op. adjunto & subespacios (hiper)invariantes).

- (i) $M \subseteq \mathcal{H}$ es T -invariante si y sólo si M^\perp es T^* -invariante;
- (ii) $M \subseteq \mathcal{H}$ es T -hiperinvariante si y sólo si M^\perp es T^* -hiperinvariante.

Demostración.

(i) Sea M un subespacio T -invariante e $y \in M^\perp$ arbitrario. Dado que $Tx \in M$ para todo $x \in M$, concluimos luego que $\langle x, T^*y \rangle = \langle Tx, y \rangle = 0$ para todo $x \in M$; luego $T^*y \perp M$. Por tanto, hemos probado que

$$T(M) \subseteq M \implies T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp.$$

Aplicando ahora el razonamiento anterior a M^\perp y T^* , obtenemos que

$$T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp \implies T^{**}(M^{\perp\perp}) \subseteq M^{\perp\perp}.$$

Además, como $M^{\perp\perp} = \overline{M} = M$ y $T^{**} = T$, concluimos finalmente que

$$T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp \implies T(M) \subseteq M.$$

(ii) Observemos inicialmente que $L \in [T]$ si y sólo si $L^* \in [T^*]$. En efecto, pues

$$L \in [T] \iff LT = TL \iff T^*L^* = L^*T^* \iff L^* \in [T^*].$$

Por otra parte, si M es L -invariante para todo $L^* \in [T^*]$, entonces —por (i)— M^\perp es L^* -invariante para todo $L \in [T]$. Por tanto, hemos probado que

$$M \text{ hiperinvariante para } T \implies M^\perp \text{ hiperinvariante para } T^*.$$

Razonando de la misma manera, se prueba que si M^\perp es L^* -invariante para todo $L^* \in [T^*]$, entonces $M^{\perp\perp} = \overline{M} = M$ es L^{**} -invariante para todo operador $L = L^{**} \in [T^{**}] = [T]$. □

Corolario 4.4. *En las condiciones del teorema anterior, T admite un subespacio (hiper-)invariante no trivial si y sólo si T^* admite un subespacio (hiper-)invariante no trivial.*

Demostración. Se sigue del Teorema de la Proyección Ortogonal, ya que $\{0\} \neq M \neq \mathcal{H}$ es un subespacio no trivial si y sólo si $\{0\} \neq M^\perp \neq \mathcal{H}$ es no trivial. □

4.2. Subespacios reductores

Sea $M \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador dado, la siguiente definición introduce conceptos muy importantes.

Definición 4.5 (Operadores reducibles).

- (i) M es un subespacio reductor de T si M y M^\perp son subespacios T -invariantes; hablaremos de subespacio reductor no trivial si $\{0\} \neq M \neq \mathcal{H}$;
- (ii) T es reducible si admite algún subespacio reductor no trivial; en caso contrario, T se dice irreducible;
- (iii) M es un subespacio hiperreductor de T si M y M^\perp son T -hiperinvariantes; hablaremos de subespacio hiperreductor no trivial si $\{0\} \neq M \neq \mathcal{H}$;
- (iv) T es hiperreducible si admite algún subespacio hiperreductor no trivial; en caso contrario, T se dice hiperirreducible.

Diremos que un subespacio (hiper-)reductor de T (hiper-)reduce a T .

Proposición 4.6 (Caracterización de subespacios (hiper-)reductores).

- (i) $M \subseteq \mathcal{H}$ reduce a $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si y sólo si M es invariante por T y T^* .
- (ii) $M \subseteq \mathcal{H}$ hiperreduce a T si y sólo si M es hiperinvariante por T y T^* .

Demostración.

(i) Dado que $M^{\perp\perp} = \overline{M} = M$, en virtud del Teorema 4.3 anterior, $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$ si y sólo si $T^*(M) \subseteq M$. Así pues, $T(M) \subseteq M$ y $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$ si y sólo si $T(M) \subseteq M$ y $T^*(M) \subseteq M$.

Por tanto, M reduce a T si y sólo si M es invariante para T y T^* .

(ii) Análogamente, de nuevo en virtud del Teorema 4.3, M^\perp es T -hiperinvariante si y sólo si M es T^* -invariante. Así pues, M es T -hiperinvariante y M^\perp es T -hiperinvariante si y sólo si M es T -hiperinvariante y M^\perp es T^* -hiperinvariante.

Por tanto, M se hiperreduce a T si y sólo si M es hiperinvariante para T y T^* . \square

Los subespacios hiperreductores no jugarán un papel importante en este trabajo. Centremos luego nuestro interés en los subespacios reductores; es decir, en los operadores reducibles.

Teorema 4.7 (Caracterización de operadores reducibles I).

- (i) Si un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ conmuta con una proyección ortogonal $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces $\text{Im}(P)$ es un subespacio reductor de T .
- (ii) Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es reducible si y sólo si T conmuta con una proyección ortogonal no trivial.

Demostración. Si $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una proyección ortogonal, entonces $\text{Im}(P) \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} , pues P es una aplicación lineal e $\text{Im}(P) = \ker(P)^\perp = (\text{Im}(P)^\perp)^\perp = \overline{\text{Im}(P)}$.

(i) Si $PT = TP$, entonces $\text{Im}(P)$ es invariante por T . En efecto, pues para $x \in \text{Im}(P)$ se tiene que $PTx = TPx = Tx$; luego $Tx \in \text{Im}(P)$. Además, como P es autoadjunto,

la condición $PT = TP$ equivale a que $T^*P = PT^*$. Por tanto, $\text{Im}(P)$ también es T^* -invariante; pues si $x \in \text{Im}(P)$, entonces $PT^*x = T^*Px = T^*x$; luego $T^*x \in \text{Im}(P)$.

Así pues, $\text{Im}(P)$ es un subespacio reductor de T en virtud de la Proposición 4.6 anterior.

(ii) Supongamos inicialmente que existe una proyección ortogonal no trivial $P \in [T]$. En tal caso, $\{0\} \neq \text{Im}(P) \neq \mathcal{H}$. Si T conmuta con P , entonces $\text{Im}(P)$ es un subespacio reductor no trivial de T por (i). Luego T es un operador reducible.

Recíprocamente, supongamos ahora que T es reducible. Existe entonces un subespacio cerrado no trivial $M \subseteq \mathcal{H}$ tal que M y M^\perp son subespacios invariantes por T . Como M es invariante por T , por el Teorema 4.1 anterior, la proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre M verifica la ecuación

$$PTP = TP. \quad (4.1)$$

Por otra parte, como M^\perp es invariante por T , considerando la proyección complementaria $I - P$ de \mathcal{H} sobre M^\perp , por la misma razón que anteriormente, se tiene que

$$\begin{aligned} (I - P)T(I - P) = T(I - P) &\iff (T - PT)(I - P) = T - TP \\ &\iff T - PT - TP + PTP = T - TP \\ &\iff PTP = PT. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por tanto, de (4.1)–(4.2) deducimos que T conmuta con una proyección ortogonal no trivial. \square

Definición 4.8 (Suma directa de operadores). Si $M \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio cerrado tal que

$$T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp;$$

decimos entonces que $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la suma directa ortogonal de los operadores $A \in \mathcal{B}(M)$ y $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$ y lo denotaremos por $T = A \oplus D$, respecto de $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$.

Teorema 4.9 (Caracterización de operadores reducibles II).

Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es reducible si y sólo si $T = A \oplus D$ respecto de $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ con $M \neq \{0\} \neq M^\perp$.

Demostración. Sea

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

con $A \in \mathcal{B}(M)$, $B \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $C \in \mathcal{B}(M, M^\perp)$ y $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$, la representación matricial del operador T .

Si M es un subespacio reductor no trivial de T , entonces M y M^\perp son subespacios no triviales e invariantes por T . Luego $B : M^\perp \rightarrow M$ y $C : M \rightarrow M^\perp$ son idénticamente nulos, ya que $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Recíprocamente, si $T = A \oplus D$ respecto de $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ con $M \neq \{0\} \neq M^\perp$, tomando $u \in M$ y $v \in M^\perp$ arbitrarios —vectores que identificamos con $(u, 0)$ y $(0, v)$ de $M \oplus M^\perp$ respectivamente—, se tiene que

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = Au \in M \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = Dv \in M^\perp.$$

Así, M es un subespacio reductor no trivial de T ; en particular, $A = T|_M$ y $D = T|_{M^\perp}$. \square

Corolario 4.10. *Un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es reducible si y sólo si T^* es reducible.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de que si

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp,$$

entonces

$$T^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = M \oplus M^\perp. \quad \square$$

Teorema 4.11. *Todo operador unitariamente equivalente a uno reducible es reducible.*

Demostración. Sea $U : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ una transformación unitaria y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ dos operadores entrelazados por U . En particular, tenemos que $S = U^*TU \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$.

Dada una proyección ortogonal $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, consideramos $E = U^*PU \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$. Veamos que E también es una proyección ortogonal.

En virtud de la Proposición 3.5, es suficiente ver que E es un operador idempotente y autoadjunto. No obstante, dado que P es idempotente y autoadjunto —por ser una proyección ortogonal—,

$$E^2 = (U^*PU)(U^*PU) = U^*P^2U = U^*PU = E$$

y

$$E^* = U^*(U^*P)^* = U^*P^*U = U^*PU = E.$$

Además, $E = U^*PU$ es no trivial si y sólo si P es no trivial y E conmuta con S si y sólo si P conmuta con T , pues

$$\begin{aligned} ES - SE &= (U^*PU)(U^*TU) - (U^*TU)(U^*PU) \\ &= U^*PTU - U^*TPU = U^*(PT - TP)U \end{aligned}$$

Por tanto, por el Teorema 4.7 anterior, S es reducible si precisamente si T es reducible. \square

El siguiente resultado auxiliar será necesario en el Capítulo 6.

Proposición 4.12 (auxiliar). *Sea $M \subseteq \mathcal{H}$ un subespacio cerrado, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y P la proyección ortogonal de \mathcal{H} sobre M .*

(i) *Si M es invariante por T , entonces $(T|_M)^* = PT^*|_M$.*

(ii) *Si M reduce a T entonces $(T|_M)^* = T^*|_M$.*

Demostración.

(i) Dado que P es un operador autoadjunto por la Proposición 3.5 y $Pv = v$ para todo $v \in M$, deducimos entonces que

$$\begin{aligned} \langle (T|_M)^*u, v \rangle &= \langle u, T|_M v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \langle u, TPv \rangle \\ &= \langle P^*T^*u, v \rangle = \langle PT^*u, v \rangle = \langle PT^*|_M u, v \rangle, \quad \text{para todo } u, v \in M. \end{aligned}$$

Por tanto, $\langle (T|_M)^*u - PT^*|_M u, v \rangle = 0$ para todo $u, v \in M$; luego $(T|_M)^* = PT^*|_M$.

(ii) Si M reduce a T , entonces M es invariante para T y T^* por la Proposición 4.6. Por tanto, como $\text{Im}(T^*|_M) \subseteq M$, tenemos que $T^*|_M = PT^*|_M$. Por otra parte, en virtud de (i), $(T|_M)^* = PT^*|_M$. Luego $(T|_M)^* = T^*|_M$. \square

Capítulo 5

Operadores en espacios de Hilbert. Topología

El objetivo principal de este capítulo es presentar algunos resultados topológicos que serán utilizados más adelante en los Capítulos 6 y 7.

A la hora de estudiar los distintos tipos de convergencia que podemos considerar en el espacio de operadores $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, el Teorema de Banach-Steinhaus —que será probado en la segunda sección— se revelará como una importante herramienta. Además, para un operador no negativo dado, obtendremos su “operador raíz cuadrada” como límite (en cierto sentido) de una sucesión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

5.1. Operadores no negativos

Debemos empezar pues por aclarar que entendemos por operador no negativo, para pasar después a ver las propiedades elementales de estos operadores que serán empleadas posteriormente a la hora de considerar sucesiones de operadores no negativos.

Sean luego T_1 y $T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos operadores dados.

Definición 5.1 (Operadores no negativos y relación de orden). Se dice que:

- (i) T_1 es no negativo, $T_1 \geq O$, si $\langle T_1 x, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{H}$;
- (ii) T_1 es mayor (menor) o igual que T_2 , $T_1 \geq T_2$ ($T_2 \leq T_1$), si $T_1 - T_2 \geq 0$ ($T_2 - T_1 \geq 0$).

Lema 5.2 (auxiliar). Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operador no negativo, entonces

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

y

$$\|Tx\|^2 \leq \|T\| |\langle Tx, x \rangle|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Demostración. Asociada al operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, consideremos la función $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ dada por

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_T : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle_T := \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

que define un producto semi-interior en \mathcal{H} (esto es, para $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no es necesariamente cierto que $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$). Denotaremos por $\|\cdot\|_T$ a la norma inducida por este producto; es decir, para cada $x \in \mathcal{H}$, consideraremos $\|x\|_T = \sqrt{\langle Tx, x \rangle}$.

Puesto que la desigualdad de Cauchy-Schwarz también se cumple en espacios con producto semi-interior, se tiene entonces que

$$|\langle Tx, y \rangle|^2 = |\langle x, y \rangle_T|^2 \leq \|x\|_T^2 \|y\|_T^2 = \langle Tx, x \rangle \langle Ty, y \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}. \quad (5.1)$$

Tomando $y = Tx$ en (5.1) y aplicando nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|Tx\|^4 &= \langle Tx, Tx \rangle^2 \leq \langle Tx, x \rangle \langle T^2x, Tx \rangle \\ &\leq \langle Tx, x \rangle \|T^2x\| \|Tx\| \\ &\leq \langle Tx, x \rangle \|T\| \|Tx\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Por tanto, ya hemos probado que $\|Tx\|^2 \leq \|T\| \langle Tx, x \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. \square

Proposición 5.3. *Todo operador no negativo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es autoadjunto.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. En tal caso,

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \quad (5.2)$$

Por tanto, dados $x, y \in \mathcal{H}$ arbitrarios, en virtud de (5.2), concluimos que

$$\begin{aligned} \langle Tx, y \rangle &= \frac{1}{4} (\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle) + \\ &\quad \frac{i}{4} (\langle T(x+iy), x+iy \rangle - \langle T(x-iy), x-iy \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle x+y, T(x+y) \rangle - \langle x-y, T(x-y) \rangle) \\ &\quad \frac{i}{4} (\langle x+iy, T(x+iy) \rangle - \langle x-iy, T(x-iy) \rangle) = \langle x, Ty \rangle, \end{aligned}$$

donde hemos empleado la identidad de polarización para $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$. \square

Algunos autores denotan por $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ el álgebra formada por todos los operadores no negativos en \mathcal{H} acotados superiormente por la identidad I , que recibe el nombre de álgebra efecto.

Parece ser que las álgebras efecto son importantes en mecánica cuántica, pues en la física-matemática es por ejemplo interesante estudiar aplicaciones biyectivas que preservan ciertas relaciones y operaciones relacionadas con la simetría.

No obstante, nosotros nos conformaremos con unas propiedades básicas de este conjunto de operadores.

Proposición 5.4 (Álgebra efecto). *Dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se tiene que:*

$$(i) \quad -I \leq T^* = T \leq I \iff T^* = T \text{ y } \|T\| \leq 1;$$

$$(ii) \quad 0 \leq T \leq I \iff 0 \leq T \text{ y } \|T\| \leq 1 \iff T^* = T \text{ y } T^2 \leq T.$$

Demostración.

(i) En virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \langle (\pm T - I)x, x \rangle &= \pm \langle Tx, x \rangle - \|x\|^2 \leq |\langle Tx, x \rangle| - \|x\|^2 \\ &\leq (\|Tx\| - \|x\|)\|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

La condición $\|T\| \leq 1$ implica que $\|Tx\| \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Así pues, por la desigualdad anterior, deducimos que en tal caso, $\pm T - I \leq O$, lo cual equivale a decir que $-I \leq T \leq I$.

Recíprocamente, la condición $\pm T - I \leq O$ equivale a decir que $\pm \langle Tx, x \rangle \leq \|x\|^2$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Por tanto, $\sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| \leq 1$ y entonces, como T es autoadjunto, $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle| \leq 1$.

(ii) Razonando como en la prueba del apartado (i) anterior, obtenemos que $O \leq T \leq I \iff O \leq T$ y $\|T\| \leq 1$.

Supongamos ahora que $O \leq T$ y que $\|T\| \leq 1$ (es decir, que T es una contracción no negativa). En particular, T es autoadjunto —por ser no negativo— y cumple que

$$\langle T^2x, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \leq \langle Tx, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

donde la última desigualdad se tiene por el Lema 5.2. Así, ya hemos probado que $T^2 \leq T$ y que T es autoadjunto.

Recíprocamente, si $T = T^*$ y $T^2 \leq T$, entonces

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^2x, x \rangle \leq \langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\|\|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

de donde deducimos que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ y $\|Tx\| \leq \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Es decir, T es un operador no negativo y $\|T\| \leq 1$. \square

5.2. El Teorema de Banach-Steinhaus

Uno de los resultados fundamentales del análisis funcional es el Teorema de Banach-Steinhaus —o principio de acotación uniforme—. Tal resultado será empleado en la siguiente sección; veamos luego una demostración elemental del mismo.

Volvemos entonces momentáneamente al ámbito de los operadores lineales y acotados entre espacios vectoriales normados. Sean pues inicialmente $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ dos espacios vectoriales normados.

Lema 5.5 (auxiliar para Banach-Steinhaus).

Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, se tiene que

$$\sup_{y \in B(x; r)} \|T(y)\| \geq \|T\| r,$$

donde $B(x; r) = \{x' \in X : \|x - x'\| < r\} \subseteq X$ con $x \in X$ y $r > 0$.

Demostración. Observemos inicialmente que, para $y \in B(0; r) \subseteq X$,

$$\text{máx} \{\|T(x+y)\|, \|T(x-y)\|\} \geq \frac{\|T(x+y)\| + \|T(x-y)\|}{2}$$

$$\geq \frac{\|T(x+y) - T(x-y)\|}{2} = \|T(y)\|$$

y entonces,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B(x;r)} \|T(y)\| &= \sup_{y \in B(0;r)} \|T(x+y)\| \geq \sup_{y \in B(0;r)} \|T(y)\| \\ &= \sup_{y \in B(0;1)} \|T(ry)\| = r \sup_{y \in B(0;1)} \|T(y)\| = \|T\| r. \end{aligned} \quad \square$$

No obstante, para el Teorema de Banach-Steinhaus, necesitamos la completitud del espacio del dominio; sea luego $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.

Teorema 5.6 (Teorema de Banach-Steinhaus).

Sea $F \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ una familia de operadores lineales y acotados tal que, para cada $x \in X$, existe $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\| \leq \alpha(x). \quad (5.3)$$

Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\| \leq \alpha \|x\|, \quad \text{para todo } x \in X \iff \sup_{T \in F} \|T\| < \alpha. \quad (5.4)$$

Demostración. Supongamos que (5.4) es falso, es decir, que $\sup_{T \in F} \|T\| = \infty$. En tal caso, existe una sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ tal que

$$\|T_n\| \geq 4^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

Sea $x_0 = 0 \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos $x_n \in X$ de modo que

$$\|x_n - x_{n-1}\| < 3^{-n} \quad \text{y} \quad \|T_n(x_n)\| \geq \frac{2}{3} \|T_n\| 3^{-n}. \quad (5.6)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la existencia de $x_n \in X$ satisfaciendo (5.6) está asegurada en virtud del Lema 5.5 anterior.

Por otra parte, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X , luego existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, empleando (5.6), deducimos que

$$\begin{aligned} \|x - x_n\| &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_m - x_n\| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - \cdots + x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \|x_m - x_{m-1}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} (3^{-m} + \cdots + 3^{-(n+1)}) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} 3^{-n} (3^{-1} + \cdots + 3^{-m+n}) = 3^{-n} \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3^{-n}}{2} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} -\|T_n(x)\| + \|T_n(x_n)\| &\leq \left| \|T_n(x)\| - \|T_n(x_n)\| \right| \leq \|T_n(x - x_n)\| \\ &\leq \|T_n\| \|x - x_n\| \leq \|T_n\| \frac{3^{-n}}{2}, \end{aligned}$$

de donde se sigue finalmente —usando otra vez (5.6) y (5.5)— que

$$\|T_n(x)\| \geq \|T_n(x_n)\| - \|T_n\| \frac{3^{-n}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{2}{3} \|T_n\| 3^{-n} - \|T_n\| \frac{3^{-n}}{2} \\
&= \frac{3^{-n}}{6} 4^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{1}{6} \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

lo cual contradice la hipótesis enunciada en (5.3). \square

Nota 5.7 (El argumento de la joroba deslizante).

La demostración anterior del Teorema de Banach-Steinhaus es una versión detallada de la prueba que puede consultarse en [11], donde se emplea el conocido como “método de joroba deslizante” para evitar invocar el Teorema de Categorías de Baire, resultado imprescindible en las demostraciones más comúnmente conocidas [30, Cap. 5].

De acuerdo con [1], el “método de la joroba deslizante” fue introducido originalmente por H. L. Lebesgue, quien lo empleó para construir una función continua con serie de Fourier divergente en un punto prefijado (en [27, p. 72, identidad (2.7)] puede consultarse tal ejemplo). Poco después, los matemáticos de origen alemán E. Hellinger y O. Toeplitz usarían ideas similares a la hora de estudiar matrices infinitas y acotadas, esto es, formas bilineales sobre el espacio de Hilbert separable ℓ^2 .

Entre otros resultados, probarían que si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de formas bilineales acotadas sobre ℓ^2 tal que para cada par $(x, y) \in \ell^2 \times \ell^2$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ la sucesión $(K_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada por una constante $M_{x,y}$ —que depende de x e y —, entonces la sucesión $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada; es decir, existe $M > 0$ tal que $|K_n(x, y)| \leq M$ para todo $(x, y) \in \ell^2 \times \ell^2$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Originalmente, S. Banach y H. Hahn emplearon (de forma independiente) el “método de la joroba deslizante” para obtener la primera demostración de lo que hoy llamamos Teorema de Banach-Steinhaus en el año 1922. Por sugerencia de S. Saks, en [18] se redactó la versión que involucra los importantes resultados topológicos de Baire.

Nota 5.8. Es importante señalar que en el caso finito-dimensional la prueba es, obviamente, mucho más sencilla y casi inmediata.

En efecto, supongamos que \mathcal{H} es un espacio de Hilbert tal que $\dim(\mathcal{H}) = n \in \mathbb{N}$ y que $F \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}, Y)$ es una familia de operadores de modo que, para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$\sup_{T \in F} \|T(x)\| \leq \alpha(x).$$

Así, dado un operador $T \in F$ arbitrario, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \left\| T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(e_i)\| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|T(e_i)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq n \|x\| \max_{1 \leq i \leq n} \|T(e_i)\| \\
&\leq n \|x\| \max_{1 \leq i \leq n} \alpha(e_i) = \|x\| \alpha, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},
\end{aligned}$$

donde $\{e_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \mathcal{H}$ es una base de \mathcal{H} .

5.3. Topologías en el espacio de operadores

En el espacio de operadores $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tiene estructura de espacio vectorial normado si consideramos la norma $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \|Tx\|/\|x\|$. No obstante, la convergencia asociada

a dicha norma es demasiado restrictiva; por lo que, en muchas ocasiones, es necesario considerar nuevas nociones de convergencia.

Introducimos a continuación distintas nociones de convergencia en el espacio de operadores $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea entonces $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una sucesión de operadores dada.

Definición 5.9 (Convergencias & Monotonía). Se dice que:

(i) $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T_n \xrightarrow{u} T$, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0;$$

(ii) $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T_n \xrightarrow{f} T$, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(T_n - T)x\| = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H};$$

(iii) $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T_n \xrightarrow{d} T$, si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(T_n x) = f(Tx), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \text{ y todo } f \in \mathcal{H}^* \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{K}),$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f((T_n - T)x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \text{ y todo } f \in \mathcal{H}^* \equiv \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{K});$$

(iv) $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente (decreciente) si $T_{n+1} \geq T_n$ ($T_n \geq T_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota 5.10. En virtud del Teorema de Representación de Riesz, $T_n \xrightarrow{d} T$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}$$

o equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle (T_n - T)x, y \rangle = 0, \quad \text{para todo } x, y \in \mathcal{H}.$$

Sin duda alguna, en este trabajo la protagonista será la “convergencia fuerte”, a la que nos aproximaremos en primera instancia a través de la convergencia débil.

Sean ahora $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dos sucesiones de operadores dadas.

Mientras que las dos primeras proposiciones que siguen relacionan las nociones de convergencia introducidas anteriormente, las dos siguientes constituyen resultados ya de cierta importancia que serán empleados más adelante en varias ocasiones.

Proposición 5.11. $T_n \xrightarrow{u} T \implies T_n \xrightarrow{f} T \implies T_n \xrightarrow{d} T$.

Demostración. Dada una sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sabemos que

$$0 \leq \|(T_n - T)x\| \leq \|T_n - T\| \|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}; \quad (5.7)$$

y

$$0 \leq |g((T_n - T)x)| \leq \|g\| \|(T_n - T)x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \text{ y todo } g \in \mathcal{H}^*. \quad (5.8)$$

Así pues, si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente —es decir, si existe $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0$ — entonces, por (5.7),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(T_n - T)x\| = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H};$$

luego $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente hacia T .

Supongamos ahora la convergencia fuerte hacia T de la sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$; usando (5.8), deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g((T_n - T)x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \text{ y todo } g \in \mathcal{H}^*;$$

esto es, la convergencia débil de la sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a T . □

Proposición 5.12. $T_n \xrightarrow{d} T \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Demostración. Aplicar dos veces el Teorema de Banach-Steinhaus.

Si $T_n \xrightarrow{d} T$, entonces —por la definición de convergencia débil— $\langle (T_n - T)x, y \rangle \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Luego $(\langle T_n x, y \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada —por ser convergente $\langle T x, y \rangle$ — de números complejos y existe por tanto una aplicación $\alpha: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}^+$, de modo que

$$|\langle T_n x, y \rangle| \leq \alpha(x, y), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (5.9)$$

Sea ahora $y_0 \in \mathcal{H}$ fijado y consideremos el funcional $\mathbb{T}_{n, y_0}^1: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ consistente en “multiplicar escalarmente por la izquierda por $T_n^* y_0$ ”; es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{n, y_0}^1: \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow \mathbb{T}_{n, y_0}^1(x) = \langle T_n^* y_0, x \rangle. \end{aligned}$$

En tal caso, teniendo en cuenta (5.9), obtenemos que

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}_{n, y_0}^1(x)| &= |\langle T_n^* y_0, x \rangle| = |\langle y_0, T_n x \rangle| \\ &= |\langle T_n x, y_0 \rangle| \leq \alpha(x, y_0), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así pues, en virtud del Teorema de Banach-Steinhaus, deducimos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathbb{T}_{n, y_0}^1\| \leq \alpha(y_0). \quad (5.10)$$

Dado ahora $x \in B(0; 1) \subset \mathcal{H}$ arbitrario, consideramos el funcional $\mathbb{T}_{n, x}^2: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ consistente en “multiplicar escalarmente por la derecha por $T_n x$ ”; es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{n, x}^2: \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longrightarrow \mathbb{T}_{n, x}^2(y) = \langle y, T_n x \rangle. \end{aligned}$$

En tal caso, teniendo en cuenta (5.10), obtenemos que

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}_{n, y}^2(y)| &= |\langle y, T_n x \rangle| = |\langle T_n^* y, x \rangle| \\ &= |\mathbb{T}_{n, y}^1(x)| \leq \|\mathbb{T}_{n, y}^1\| \|x\| \\ &\leq \alpha(y) \|x\| \leq \alpha(y), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Así pues, en virtud del Teorema de Banach-Steinhaus,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_{n,x}^2\| \leq \alpha, \quad \text{para todo } x \in B(0; 1). \quad (5.11)$$

Finalmente, puesto que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$, concluimos en virtud de (5.11) que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. \square

Proposición 5.13 (Producto de sucesiones fuertemente convergentes).

Si $S_n \xrightarrow{f} S$ y $T_n \xrightarrow{f} T$, entonces $S_n T_n \xrightarrow{f} ST$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $S_n T_n - ST = S_n(T_n - T) + (S_n - S)T$. Así pues, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\|(S_n T_n - ST)x\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n\| \| (T_n - T)x \| + \|(S_n - S)Tx\| \rightarrow 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},$$

ya que ambas sucesiones convergen fuertemente y el supremo está acotado se obtiene el resultado enunciado en virtud de la Proposición 5.12 anterior. \square

Lema 5.14 (auxiliar para la Proposición 5.15).

Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una sucesión de operadores no negativos, entonces

$$T_n \xrightarrow{f} O \iff T_n \xrightarrow{d} O.$$

Demostración.

“ \implies ”

Es consecuencia inmediata de la Proposición 5.11.

“ \impliedby ”

Dado que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una sucesión de operadores no negativos que converge débilmente, en virtud de la Proposición 5.12 anterior, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

Luego, por el Lema 5.2, la sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente. En efecto, pues

$$\|T_n x\|^2 \leq \sup_k \|T_k\| \langle T_n x, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \text{ y todo } n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Proposición 5.15 (Condición suficiente para la convergencia fuerte).

Toda sucesión monótona y acotada de operadores autoadjuntos converge fuertemente.

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una sucesión creciente y acotada de operadores autoadjuntos dada. En tal caso, para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle T_n x, x \rangle| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \|x\|^2,$$

de donde se sigue que la sucesión de números reales $(\langle T_n x, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente —pues $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ creciente— y acotada en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$; luego existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n x, x \rangle$.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la forma cuadrática

$$\begin{aligned} Q_n: \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto Q_n(x) = \langle T_n x, x \rangle \end{aligned}$$

y definimos luego

$$Q: \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto Q(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n x, x \rangle,$$

entonces Q es una forma cuadrática (por ser límite de las formas cuadráticas $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

Por tanto, existe $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$Q(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n x, x \rangle = \langle T x, x \rangle. \quad (5.12)$$

Finalmente, empleando la misma identidad de polarización que ya usamos en la Proposición 5.3 anterior y teniendo en cuenta (5.12), obtenemos que para cada $x, y \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n x, y \rangle &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 i^n Q_n(x + i^n y) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 i^n \langle T(x + i^n y), x + i^n y \rangle = \langle T x, y \rangle; \end{aligned}$$

es decir, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente hacia T cuando $n \rightarrow \infty$.

Además, puesto que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente, $\langle (T_{n+k} - T_n)x, x \rangle \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ deducimos entonces —tomando límites cuando $k \rightarrow \infty$ — que $(T - T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores no negativos en \mathcal{H} , luego en virtud del Lema 5.14 anterior, $T_n \xrightarrow{f} T$. \square

El concepto de “contracción fuertemente estable” jugará un importante papel en el Capítulo 6; ello motiva la siguiente definición y posterior proposición.

Definición 5.16 (Estabilidades). Dado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se dice que:

- (i) T es uniformemente estable si $T^n \xrightarrow{u} O$;
- (ii) T es fuertemente estable si $T^n \xrightarrow{f} O$;
- (iii) T es débilmente estable si $T^n \xrightarrow{d} O$;
- (iv) T es potencialmente acotado si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$.

Proposición 5.17. $T^n \xrightarrow{u} O \implies T^n \xrightarrow{f} O \implies T^n \xrightarrow{d} O \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$.

Demostración. Basta considerar $T_n = T^n$ en las Proposiciones 5.11 y 5.12 anteriores. \square

5.4. La raíz cuadrada de un operador no negativo

En el Capítulo 6, dado un operador no negativo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ necesitaremos trabajar con otro operador $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $SS \equiv S^2 = T$; es decir, trabajaremos con una raíz cuadrada de T .

Presentamos en esta sección las propiedades más importantes de la raíz de un operador no negativo. Comenzamos con un resultado topológico auxiliar.

Lema 5.18 (auxiliar para el Teorema 5.19).

El conjunto formado por todos los operadores no negativos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\mathcal{B}^+(\mathcal{H}) = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : T \geq O\} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

es débilmente cerrado en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ —es decir, contiene el límite de toda sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ débilmente convergente—.

Demostración. Sea $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una sucesión de operadores no negativos débilmente convergente a $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ arbitraria. En tal caso,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n x, x \rangle = \langle T x, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Ahora bien, como para cada $x \in \mathcal{H}$, $\langle T x, x \rangle \in \mathbb{R}$ es el límite de la sucesión de números reales no negativos $(\langle T_n x, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$, tenemos entonces que

$$\langle T x, x \rangle \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Es decir, $T \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ y así, hemos probado que $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ es débilmente cerrado en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. \square

Teorema 5.19 (De la raíz cuadrada).

Para todo operador $T \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ existe un operador $S \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ tal que $S^2 = T$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $O \leq T \leq I$. En efecto, pues para $T \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ arbitrario, en virtud de la Proposición 5.4-(ii), $O \leq T/\|T\| \leq I$ ya que

$$\left\langle \frac{T}{\|T\|} x, x \right\rangle = \frac{1}{\|T\|} \langle T x, x \rangle \geq 0 \quad \text{y} \quad \left\| \frac{T}{\|T\|} \right\| = \frac{1}{\|T\|} \|T\| = 1.$$

Así, si existe $S \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ tal que $S^2 = T/\|T\|$, entonces $T = \|T\|S^2$; luego $(\sqrt{\|T\|}S)^2 = T$.

Por tanto, para concluir el resultado enunciado, basta probar el siguiente teorema.

Teorema 5.20 (¿Cómo obtener la raíz?).

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un operador tal que $O \leq T \leq I$. Consideremos

$$A_0 = I \quad \text{y} \quad A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0. \quad (5.13)$$

En tal caso, la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ converge fuertemente a un operador $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ tal que $A^2 = T$.

Demostración en cinco etapas.

Etapa 1: A_n es un operador autoadjunto para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Procederemos por inducción en n . Si $n = 0$, $A_0 = I$ es trivialmente autoadjunto; supongamos ahora que A_n es autoadjunto y probemos que A_{n+1} también es autoadjunto. Puesto que $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2)$, deducimos luego que

$$A_{n+1}^* = \left(A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2) \right)^* = A_n^* + \frac{1}{2}(T^* - A_n^{*2}) = A_{n+1},$$

pues A_n es autoadjunto por hipótesis y T es un operador no negativo, luego autoadjunto en virtud de la Proposición 5.3 anterior.

Etapla 2: $O \leq A_n \leq I$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Trivialmente, $A_0 = I \leq I$. Por otra parte, puesto que $I - A_{n-1}$ es un operador autoadjunto por ser suma de operadores autoadjuntos, dado $x \in \mathcal{H}$, tenemos que

$$\langle (I - A_{n-1})^2 x, x \rangle = \langle (I - A_{n-1})x, (I - A_{n-1})x \rangle = \|x - A_{n-1}(x)\|^2 \geq 0;$$

es decir, $(I - A_{n-1})^2 \geq O$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} O &\leq \frac{1}{2}(I - A_{n-1})^2 + \frac{1}{2}(I - T) = \frac{1}{2}(I - 2A_{n-1} + A_{n-1}^2) + \frac{1}{2}(I - T) \\ &= I - A_{n-1} + \frac{1}{2}(A_{n-1}^2 - T) = I - [A_{n-1} - \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2)] \\ &= I - A_n. \end{aligned}$$

Luego hemos probado que $A_n \leq I$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Veamos ahora por inducción que $A_n \geq O$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Trivialmente $A_0 = I \geq O$; supongamos que $A_n \geq O$. Entonces $A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2) \geq O$. En efecto, si $T = O$, entonces en virtud de la Proposición 5.4, $A_n^2 \leq A_n$, por tanto,

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(-A_n^2) \geq A_n - A_n^2 \geq O.$$

Si $T = I$ entonces $(I - A_n^2) \geq (I - A_n)$ —de nuevo en virtud de la Proposición 5.4— y puesto que $A_n \leq I$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}(I - A_n^2) \geq O$. Por tanto,

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(I - A_n^2) \geq O.$$

Luego hemos probado que $O \leq A_n \leq I$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Etapla 3: $A_{n+1} \leq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Procederemos por inducción en n . Si $n = 0$, entonces $A_0 = I \geq A_1 = I + \frac{1}{2}(T - I^2) = \frac{1}{2}(T + I)$ ya que $I - \frac{1}{2}(T + I) = \frac{1}{2}(I - T) \geq O$ al ser $O \leq T \leq I$. Supongamos ahora que $A_n \leq A_{n-1}$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y veamos que $A_{n+1} \leq A_n$. Dado que

$$\begin{aligned} A_n - A_{n+1} &= A_n - (A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2)) \\ &= A_{n-1} + \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) - A_n - \frac{1}{2}(T - A_n^2) \\ &= A_{n-1} - A_n - \frac{1}{2}(A_{n-1} - A_n)(A_{n-1} + A_n) \\ &= (A_{n-1} - A_n)[I - \frac{1}{2}(A_{n-1} + A_n)] \end{aligned}$$

basta entonces probar que $I - \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1}) \geq O$, pues $A_{n-1} - A_n \geq O$ por hipótesis. No obstante, en virtud de la Etapla 2, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle (I - \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1}))x, x \rangle &= \langle Ix, x \rangle - \frac{1}{2}\langle (A_n + A_{n-1})x, x \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle Ix, x \rangle - \frac{1}{2}\langle A_n x, x \rangle + \frac{1}{2}\langle Ix, x \rangle - \frac{1}{2}\langle A_{n-1}x, x \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle (I - A_n)x, x \rangle + \frac{1}{2}\langle (I - A_{n-1})x, x \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

En conclusión, hemos probado que $A_{n+1} \leq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Etapla 4: La sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es fuertemente convergente a A de tal forma que $A^2 = T$.

Por lo probado en las etapas anteriores, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ es una sucesión monótona y acotada de operadores autoadjuntos; luego, en virtud de la Proposición 5.15 anterior, existe $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $A_n \xrightarrow{f} A$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_{n+1}x - A_nx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ([A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2)]x - A_nx) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(x) - A_n(x) + \frac{1}{2}T(x) - \frac{1}{2}A_n^2(x) \\ &= \frac{1}{2}T(x) - \frac{1}{2}A^2(x), \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Es decir, $A^2 = T$ y así $A = T^{\frac{1}{2}}$.

Etapla 5: A es un operador no negativo.

Puesto que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ es una sucesión de operadores no negativos que converge fuertemente y $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ es débilmente cerrado en virtud del Lema 5.18 anterior, entonces $T^{\frac{1}{2}} \equiv A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$. □

Nota 5.21. La sucesión de operadores considerada en (5.13) nace de aplicar el método de Newton a la ecuación de operadores $A^2 = T$ con $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dado.

En efecto, pues para obtener aproximaciones numéricas de la raíz cuadrada no negativa de un número $0 \leq y \leq 1$, según lo estudiado en la materia *Cálculo numérico en una variable*, basta considerar la sucesión

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0, \quad (5.14)$$

donde $f(x) = y - x^2$, que daría lugar a la sucesión de operadores

$$A_0 = I \quad A_{n+1} = A_n + \frac{T - A_n^2}{2} A_n^{-1}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

Para evitar problemas o inconvenientes con el inverso de A_n , preferimos la modificación de Von Mises del método de Newton,

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0,$$

que consiste en substituir el denominador $f'(x_n)$ de (5.14) por $f'(x_0)$ cuando $f'(x_0) \approx f'(x_1) \approx \dots \approx f'(x_n)$.

En [5, Problema 95], se prueba que para un operador $O \leq T \leq I$ existe un operador $O \leq A \leq I$ tal que $(I - A)^2 = T$, donde A es límite fuerte de la sucesión de operadores

$$A_0 = O, \quad A_{n+1} = \frac{I - T + A_n^2}{2}, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}_0,$$

que viene motivada por aplicar el método de iteración funcional por punto fijo para resolver la ecuación $(1 - x)^2 - y = 0$, con $0 \leq y \leq 1$ dado.

Nota 5.22. La raíz cuadrada S del operador $T \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ obtenida en el Teorema 5.19 anterior conmuta con todo operador que conmute con T .

En efecto, pues dado que los términos de la sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ son polinomios en T con coeficientes reales, todo operador que conmute con T conmuta con A_n . Es decir, $RT = TR$ implica que $RA_n = A_nR$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y entonces, tomando límite en n , tenemos que $RA = AR$.

Corolario 5.23 (Unicidad de la raíz no negativa).

Para todo operador $T \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$, existe un único operador $S \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ tal que $S^2 = T$. Es decir, todo operador no negativo T tiene una única raíz cuadrada no negativa.

Demostración. Supongamos que existen $A, B \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ tales que $A^2 = T = B^2$.

Puesto que $BT = BB^2 = B^2B = TB$, se sigue en virtud de la Nota 5.22 anterior que $AB = BA$. Dado ahora $x \in \mathcal{H}$ arbitrario, definimos $y = (A - B)x$ y teniendo en cuenta que $A \geq O$ y $B \geq O$, deducimos que $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ y $\langle By, y \rangle \geq 0$; luego

$$\langle Ay, y \rangle + \langle By, y \rangle = \langle (A + B)y, y \rangle = \langle (A + B)(A - B)x, y \rangle = \langle (A^2 - B^2)x, y \rangle = 0.$$

Por tanto, debe ser forzosamente $\langle Ay, y \rangle = \langle By, y \rangle = 0$.

Como $A \geq O$, existe $C \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ tal que $C^2 = A$ y entonces

$$0 = \langle Ay, y \rangle = \langle C^2y, y \rangle = \langle Cy, Cy \rangle = \|Cy\|^2;$$

luego $Cy = 0$, de donde deducimos que $Ay = C^2y = C(Cy) = 0$. Análogamente, probamos que $By = 0$.

Por tanto, $(A - B)y = 0$ y entonces —teniendo en cuenta que $y = (A - B)x$ — concluimos que

$$\|(A - B)x\| = \langle (A - B)^2x, x \rangle = \langle (A - B)(A - B)x, x \rangle = \langle (A - B)y, x \rangle = 0.$$

Dado que $x \in \mathcal{H}$ fue escogido de forma arbitraria, hemos probado que $Ax = Bx$ para todo $x \in \mathcal{H}$. \square

Así pues, ahora ya podemos hablar de “la” raíz cuadrada no negativa de un operador no negativo y del operador valor absoluto de un operador arbitrario.

Definición 5.24.

- (i) Dado un operador $T \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$, diremos que $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la raíz cuadrada positiva de T si $S^2 = T$. En tal caso escribiremos $S = T^{\frac{1}{2}}$.
- (ii) Dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, definimos el operador valor absoluto de T , $|T|$, como la raíz cuadrada del operador no negativo T^*T .

Corolario 5.25 (Propiedades de la raíz cuadrada). *Para $T \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ se tiene que:*

$$(i) \|T^{\frac{1}{2}}\| = \|T\|^{\frac{1}{2}};$$

$$(ii) \ker(T) = \ker(T^{\frac{1}{2}});$$

Demostración.

(i)

Puesto que $(T^{\frac{1}{2}})^2 = T$ y $T^{\frac{1}{2}}$ es autoadjunto —al ser no negativo—, se tiene que $\|T\| = \|(T^{\frac{1}{2}})^2\| = \|T^{\frac{1}{2}}(T^{\frac{1}{2}})^*\| = \|T^{\frac{1}{2}}\|^2$, de donde se deduce que $\|T^{\frac{1}{2}}\| = \|T\|^{\frac{1}{2}}$.

(ii)

El contenido “ \supset ” es inmediato teniendo en cuenta que $T(x) = T^{\frac{1}{2}}(T^{\frac{1}{2}}(x))$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Por otra parte, para la inclusión “ \subset ”, basta tener en cuenta que si $x \in \ker(T)$, entonces $Tx = (T^{\frac{1}{2}})^2x = 0$ y se tiene luego que $0 = \langle (T^{\frac{1}{2}})^2x, x \rangle = \langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{\frac{1}{2}}x \rangle = \|T^{\frac{1}{2}}x\|^2$, de donde se deduce finalmente que $T^{\frac{1}{2}}x = 0$. □

Capítulo 6

Descomposición de operadores

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado; se dice que un operador $T \in \mathcal{B}(X)$ es una contracción si $\|T\| \leq 1$; esto es, si $\|Tx\| \leq \|x\|$ para todo $x \in X$.

Dado un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, a la hora de estudiar la existencia de sus subespacios invariantes no triviales siempre podemos considerar la contracción que se obtiene al dividir T por $\|T\|$, pues el hecho de que $T/\|T\|$ admita cierto subespacio invariante no trivial es equivalente a que T también lo admita. Por tanto, de cara a estudiar el Problema del Subespacio Invariante, basta considerar las contracciones.

En este capítulo trabajaremos con contracciones e isometrías, clases de operadores para los que obtendremos la descomposición de Nagy-Foias-Langer y la descomposición de von Neumann-Wold respectivamente.

Además del interés intrínseco de las descomposiciones antes mencionadas, éstas nos permitirán deducir la existencia de subespacios invariantes no triviales para una amplia gama de contracciones, aunque —obviamente— no para toda contracción.

6.1. El operador shift

Debido a que precisaremos los operadores shift en las dos secciones siguientes de este capítulo, presentamos aquí una breve descripción de los resultados que luego serán invocados.

Sea $\{\mathcal{H}_k : k \in I\}$ una familia numerable de espacios de Hilbert; consideremos la suma directa de tal familia, conjunto que se denota habitualmente por $\bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k$ y que está formado por todas las tuplas $(x_k)_{k \in I}$ con $x_k \in \mathcal{H}_k$ para cada $k \in I$ y tales que

$$\sum_{k \in I} \|x_k\|^2 < \infty.$$

Dotado del producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle : \bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k \times \bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k \in I} \langle x_k, y_k \rangle_{\mathcal{H}_k}, \quad \text{para cada } x = (x_k)_{k \in I}, y = (y_k)_{k \in I} \in \bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k,$$

el espacio suma directa $\bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k$ es un espacio de Hilbert.

Sea ahora $\{T_k: k \in I\}$ una familia de operadores tal que $T_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ para cada $k \in I$. Introducimos a continuación tres importantes conceptos.

Definición 6.1 (Operador suma directa).

Si $\{T_k: k \in I\}$ es una familia acotada —es decir, si $\sup_{k \in I} \|T_k\| < \infty$ — definimos entonces el operador suma directa como

$$\bigoplus_{k \in I} T_k: \bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k \longrightarrow \bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k$$

$$(x_k)_{k \in I} \longmapsto T((x_k)_{k \in I}) := (T_k(x_k))_{k \in I}.$$

En tal caso, cada operador $T_k \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$ se dice un sumando directo del operador suma directa $\bigoplus_{k \in I} T_k \in \mathcal{B}(\bigoplus_{k \in I} \mathcal{H}_k)$.

Definición 6.2 (Resolución de la identidad).

Una resolución de la identidad es una sucesión $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de proyecciones mutuamente ortogonales tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k \xrightarrow{f} I.$$

En particular, si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una resolución de la identidad, entonces $(\text{Im}(P_k))_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de subespacios ortogonales dos a dos tal que $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \text{Im}(P_k)$.

Definición 6.3 (Shift unilateral).

Un operador $S_+ \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice que es un shift unilateral si existe una colección $\{\mathcal{H}_k: k \in \mathbb{N}_0\}$ de subespacios de \mathcal{H} ortogonales dos a dos y tales que:

(i) para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $S_+|_{\mathcal{H}_k}: \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}$ es una isometría sobreyectiva.

(ii) $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$;

Nota 6.4. Si $S_+ \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un shift unilateral en $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_k$ entonces $S_+|_{\mathcal{H}_k}$ es una transformación unitaria para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y entonces

$$\dim(\mathcal{H}_k) = \dim(\mathcal{H}_{k+1}), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0,$$

identidad que nos permite definir la multiplicidad de S_+ como tal valor.

El operador adjunto de un shift unilateral S_+ recibe el nombre de shift unilateral retrógrado y suele denotarse por $(S_+)^* = S_-$. En general, dado un elemento $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_k$, los operadores S_+ y S_- vienen dados respectivamente por

$$S_+x = 0 \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} U_k x_{k-1} \quad \text{y} \quad S_-x = \bigoplus_{k=0}^{\infty} U_{k+1}^* x_{k+1},$$

donde 0 es el origen de \mathcal{H}_0 y $U_{k+1}: \mathcal{H}_k \longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}$ es una transformación unitaria tal que $S_+|_{\mathcal{H}_k} = U_{k+1}$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$.

Además, los operadores S_+ y S_- se corresponden, respectivamente, con las siguientes representaciones matriciales:

$$S_+ = \begin{pmatrix} O & & & & & \\ U_1 & O & & & & \\ & U_2 & O & & & \\ & & U_3 & O & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad S_- = \begin{pmatrix} O & U_1^* & & & & \\ & O & U_2^* & & & \\ & & O & U_3^* & & \\ & & & O & U_3^* & \\ & & & & O & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

En particular, si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert separable y $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ es una base de Hilbert, tomando $\mathcal{H}_k = \text{span}\{e_k\}$, definimos el shift unilateral (de multiplicidad 1) que aparecía en el Ejemplo 1.14 anterior y tal que $S_+e_k = e_{k+1}$.

Más adelante, a la hora de clasificar ciertas isometrías, el siguiente resultado será de vital importancia.

Proposición 6.5. *El operador $S_- = S_+^*$ es una coisometría fuertemente estable.*

Demostración. Veamos en primer lugar que S_+ es una isometría. En efecto, dado un vector arbitrario $x = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} x_k \in \mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}_k$ se tiene —usando que una transformación unitaria es una isometría— que

$$\|S_+x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|U_k x_{k-1}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{k-1}\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\|^2 = \|x\|^2.$$

Veamos ahora que S_+^* es fuertemente estable. Por inducción en n , se tiene que la composición de S_+^* consigo mismo n veces coincide con $(S_+^*)^n = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} U_{k+1}^* \cdots U_{k+n}^* x_{k+n}$ y como la composición de transformaciones unitarias sigue siendo unitaria, se tiene que cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \|(S_+^*)^n x\|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \|U_{k+1}^* \cdots U_{k+n}^* x_{k+n}\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \|x_{k+n}\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \|x_k\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}. \quad \square \end{aligned}$$

6.2. La descomposición de Nagy-Foias-Langer

Empecemos observando que si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una contracción, entonces su operador adjunto T^* también es una contracción, pues $\|T\| = \|T^*\|$. Además, dado que $\|T^{*n}T^n\| \leq \|T^*\|^n \|T\|^n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de operadores $(T^{*n}T^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una sucesión de contracciones. El límite fuerte en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de tal sucesión de contracciones jugará un importante papel en este capítulo; veamos inicialmente que existe tal límite.

Sea luego $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción arbitraria.

Lema 6.6. *Existe $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T^{*n}T^n \xrightarrow{f} A$.*

Demostración. Probaremos que $(T^{*n}T^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una sucesión decreciente y acotada de operadores autoadjuntos; en tal caso, el resultado enunciado es una consecuencia de la Proposición 5.15 anterior.

Puesto que $T^{*n} = T^{n*}$, deducimos luego que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T^{*n}T^n\| \leq \|T^{*n}\| \|T^n\| \leq \|T\|^{2n} \leq 1$$

y

$$\langle T^{*n}T^n x, x \rangle = \langle T^{n*}T^n x, x \rangle = \langle T^n x, T^n x \rangle = \|T^n x\|^2 \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H};$$

Por tanto, la sucesión $(T^{*n}T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada en $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ y además, está formada por operadores autoadjuntos ya que $T^{*n}T^n$ es un operador no negativo para cada $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, dado que

$$\begin{aligned}\langle T^{*n+1}T^{n+1}x, x \rangle &= \langle T^{n+1}x, T^{n+1}x \rangle = \|T^{n+1}x\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 \|T^n x\|^2 \leq \|T^n x\|^2 \\ &= \langle T^n x, T^n x \rangle = \langle T^{*n}T^n x, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H},\end{aligned}$$

concluimos entonces que la sucesión $(T^{*n}T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente. \square

En las dos proposiciones que siguen enunciamos y probamos resultados sobre la contracción límite A —cuya existencia acabamos de justificar— que serán empleados luego para obtener la descomposición de Nagy-Foias-Langer.

Proposición 6.7 (Propiedades I de A).

- (i) $O \leq A \leq I$; esto es, $A \in \mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ y $\|A\| \leq 1$;
- (ii) $\|T^n x\| \rightarrow \|A^{\frac{1}{2}}x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$.
- (iii) $T^{*n}AT^n = A$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- (iv) $\|A^{\frac{1}{2}}T^n x\| = \|A^{\frac{1}{2}}x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$ y $n \in \mathbb{N}$;
- (v) $\|AT^n x\| \rightarrow \|A^{\frac{1}{2}}x\|$, para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración.

(i) En virtud del Lema 5.18 anterior, $\mathcal{B}^+(\mathcal{H})$ es un conjunto débilmente cerrado en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Así pues, A es un operador no negativo por ser límite fuerte de una sucesión de operadores no negativos.

Por otra parte, A es una contracción por ser límite fuerte de una sucesión de contracciones; en efecto, pues

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T^{*n}T^n x \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n}T^n x\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n}T^n\| \|x\| \leq \|x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Por tanto, en virtud de la Proposición 5.4 anterior, concluimos finalmente que $O \leq A \leq I$.

(ii) Como A es no negativo, existe la raíz cuadrada de A ; operador al que denotaremos por $A^{\frac{1}{2}}$. En tal caso, en virtud de la continuidad del producto interior y dado que la convergencia fuerte implica la débil, se tiene que

$$\|T^n x\|^2 = \langle T^{*n}T^n x, x \rangle \rightarrow \langle Ax, x \rangle = \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

(iii) Puesto que $T^{*k+n}T^{k+n} = T^{*n}T^{*k}T^kT^n$, para todo $k, n \geq 1$, basta ahora observar que cuando $k \rightarrow \infty$,

$$T^{*k+n}T^{k+n} \xrightarrow{f} A \quad \text{y} \quad T^{*n}T^{*k}T^kT^n \xrightarrow{f} T^{*n}AT^n.$$

Luego, por la unicidad del límite débil, se tiene que $T^{*n}AT^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Se sigue de (iii); en efecto, pues para cada $x \in \mathcal{H}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|A^{\frac{1}{2}}T^n x\|^2 = \langle A^{\frac{1}{2}}T^n x, A^{\frac{1}{2}}T^n x \rangle = \langle T^{*n}AT^n x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2.$$

(v) Veamos primero que $(I - A)T^n \xrightarrow{f} O$. En virtud de (iii), sabemos que

$$T^{*n}(I - A)T^n = T^{*n}T^n - A \xrightarrow{f} O. \quad (6.1)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (i), deducimos que $O \leq I - A \leq I$; luego $I - A$ es una contracción no negativa. Así pues, existe $(I - A)^{\frac{1}{2}}$ y en virtud de (6.1), concluimos que

$$\|(I - A)T^n x\|^2 \leq \|(I - A)^{\frac{1}{2}}T^n x\|^2 = \langle T^{*n}(I - A)T^n x, x \rangle \longrightarrow 0, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Dado que A es una contracción, $\|AT^n x\| \leq \|T^n x\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$; luego

$$0 \leq \|T^n x\| - \|AT^n x\| \leq \|(I - A)T^n x\|, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\|T^n x\| - \|AT^n x\| \rightarrow 0$ y el resultado enunciado es consecuencia de (ii). \square

Proposición 6.8 (Propiedades II de A).

$$(i) \ker(A) = \{x \in \mathcal{H} : T^n x \longrightarrow 0\};$$

$$(ii) \ker(I - A) = \{x \in \mathcal{H} : \|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|x\|\} = \{x \in \mathcal{H} : \|T^n x\| = \|x\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\};$$

$$\begin{aligned} (iii) \ker(A - A^2) &= \{x \in \mathcal{H} : \|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|Ax\|\} \\ &= \{x \in \mathcal{H} : \|AT^n x\| = \|Ax\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \{x \in \mathcal{H} : AT^n x = T^n Ax, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Demostración.

(i) Puesto que $\ker(A^{\frac{1}{2}}) = \ker(A)$, se sigue de la Proposición 6.7-(ii) que $x \in \ker(A)$ si y sólo si $T^n x \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

(ii) Por la Proposición 6.7-(i), sabemos que $O \leq I - A \leq I$ y puesto que

$$\|(I - A)^{\frac{1}{2}}x\|^2 = \langle (I - A)x, x \rangle = \|x\|^2 - \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2,$$

concluimos que $x \in \ker((I - A)^{\frac{1}{2}}) = \ker(I - A)$ si y sólo si $\|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|x\|$.

Además, por la Proposición 6.7-(iv), sabemos que

$$\|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|A^{\frac{1}{2}}T^n x\| \leq \|T^n x\| \leq \|x\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

ya que $A^{\frac{1}{2}}$ y T son contracciones, pues $\|A\| \leq 1$ implica que $\|A^{\frac{1}{2}}\| = \|A\|^{\frac{1}{2}} \leq 1$. Así, en virtud de la Proposición 6.7-(ii) anterior, $\|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|x\|$ si y sólo si $\|T^n x\| = \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Por la Proposición 5.4 y la Proposición 6.7-(i), se tiene que $(A - A^2)$ es un operador no negativo, $O \leq A \leq I \iff A = A^*$ y $A^2 \leq A$.

Luego,

$$\|(A - A^2)^{\frac{1}{2}}x\|^2 = \langle (A - A^2)x, x \rangle = \|A^{\frac{1}{2}}x\|^2 - \|Ax\|^2$$

y entonces $x \in \ker((A - A^2)^{\frac{1}{2}})$ si y sólo si $\|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|Ax\|$.

Además, por (iii), (i) y (iv) de la Proposición 6.7 anterior, tenemos que

$$\|Ax\| = \|T^{*n}AT^n x\| \leq \|AT^n x\| \leq \|A^{\frac{1}{2}}T^n x\| = \|A^{\frac{1}{2}}x\|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N};$$

luego —en virtud de la Proposición 6.7-(v)— la condición $\|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|Ax\|$ equivale a que $\|AT^n x\| = \|A^{\frac{1}{2}}x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por último, teniendo en cuenta la Proposición 6.7-(iii) anterior y que T es una contracción, tenemos que

$$\begin{aligned} \|AT^n x - T^n Ax\|^2 &= \|AT^n x\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle T^{*n} AT^n x, Ax \rangle + \|T^n Ax\|^2 \\ &= \|AT^n x\|^2 - 2\langle Ax, Ax \rangle + \|T^n Ax\|^2 \\ &= \|AT^n x\|^2 - 2\|Ax\|^2 + \|T^n Ax\|^2 \\ &\leq \|AT^n x\|^2 - 2\|Ax\|^2 + \|Ax\|^2 = \|AT^n x\|^2 - \|Ax\|^2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego

$$(\|AT^n x\| - \|Ax\|)^2 \leq \|AT^n x - T^n Ax\|^2 \leq \|AT^n x\|^2 - \|Ax\|^2, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y entonces la condición $\|AT^n x\| = \|Ax\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ equivale a que $AT^n x = T^n Ax$ para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Corolario 6.9 (Propiedades III de A).

- (i) $A = O$ si y sólo si T es fuertemente estable;
- (ii) $A = I$ si y sólo si T es una isometría;
- (iii) $A = A^2$ si y sólo si A conmuta con T ;

Demostración. Por la Proposición 6.8-(i) anterior, $\{x \in \mathcal{H} : T^n x \rightarrow 0\} = \mathcal{H}$ si y sólo si $\ker(A) = \mathcal{H}$; luego $A = O$ equivale a que T sea fuertemente estable.

Análogamente, (ii) y (iii) se prueban aplicando las igualdades restantes de la Proposición 6.8 anterior a $\ker(I - A)$ y $\ker(A - A^2)$ respectivamente. \square

Como ya dijimos anteriormente, si T es una contracción entonces también lo es T^* . Así pues, podemos obtener resultados completamente análogos a los tres anteriores para la sucesión $(T^n T^{*n})_{n \in \mathbb{N}}$; denotaremos así por A_* al límite fuerte de la sucesión de contracciones $(T^n T^{*n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar y probar la descomposición de Nagy-Foias-Langer; necesitamos inicialmente la siguiente definición.

Definición 6.10 (Contracción completamente no unitaria). Una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice completamente no unitaria si no admite como sumando directo una transformación unitaria no nula.

Teorema 6.11 (Descomposición de Nagy-Foias-Langer).

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción. Luego

$$\mathcal{U} = \ker(I - A) \cap \ker(I - A_*) \subseteq \mathcal{H}$$

es un subespacio reductor para T y además

$$T = C \oplus U, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \mathcal{U}^\perp \oplus \mathcal{U},$$

siendo $C \equiv T|_{\mathcal{U}^\perp}$ una contracción completamente no unitaria y $U \equiv T|_{\mathcal{U}}$ una transformación unitaria.

Demostración. Probemos inicialmente que $\ker(I - A)$ es un subespacio T -invariante. Por la Proposición 6.8 anterior, sabemos que

$$\ker(I - A) = \{x \in \mathcal{H}: \|T^n x\| = \|x\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

Así, $x \in \ker(I - A)$ implica que $Tx \in \ker(I - A)$; en efecto, pues $\|T^n(Tx)\| = \|T^{n+1}(x)\| = \|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ si $x \in \ker(I - A)$.

Análogamente, se prueba que $\ker(I - A_*)$ es un subespacio T^* -invariante y entonces, dado que la intersección de dos subespacios es un subespacio,

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \ker(I - A) \cap \ker(I - A_*) \\ &= \{x \in \mathcal{H}: \|T^n x\| = \|T^{*n} x\| = \|x\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

es un subespacio invariante para T y T^* . Por tanto, en virtud de la Proposición 4.6, \mathcal{U} es un subespacio reductor de T .

Probemos ahora que $T|_{\mathcal{U}}$ es una transformación unitaria. En virtud de la Proposición 3.3 anterior, es suficiente ver que $T|_{\mathcal{U}}$ es un isometría normal. Por la Proposición 4.12, sabemos que $(T|_{\mathcal{U}})^* = T^*|_{\mathcal{U}}$ y entonces, $\|(T|_{\mathcal{U}})x\| = \|(T|_{\mathcal{U}})^*x\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{U}$; luego $T|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ es una isometría. Por otra parte,

$$\begin{aligned} 0 &= \|T|_{\mathcal{U}}x\|^2 - \|(T|_{\mathcal{U}})^*x\|^2 = \langle T|_{\mathcal{U}}x, T|_{\mathcal{U}}x \rangle - \langle (T|_{\mathcal{U}})^*x, (T|_{\mathcal{U}})^*x \rangle \\ &= \langle ((T|_{\mathcal{U}})^*T|_{\mathcal{U}} - T|_{\mathcal{U}}(T|_{\mathcal{U}})^*)x, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

luego $(T|_{\mathcal{U}})^*T|_{\mathcal{U}} - T|_{\mathcal{U}}(T|_{\mathcal{U}})^* = O$ y entonces $T|_{\mathcal{U}}$ es un operador normal.

Únicamente queda probar que $T|_{\mathcal{U}^\perp}$ es una contracción completamente no unitaria. Supongamos para ello que existe un subespacio $M \subseteq \mathcal{H}$ que reduce a T siendo además $T|_M \in \mathcal{B}(M)$ una transformación unitaria. Entonces, por ser M un subespacio T -invariante y T^* -invariante,

$$(T|_M)^n x = T^n x \quad \text{y} \quad ((T|_M)^*)^n x = T^{*n} x, \quad \text{para todo } x \in M \text{ y } n \in \mathbb{N},$$

mientras que por ser $T|_M \in \mathcal{B}(M)$ una transformación unitaria,

$$\|(T|_M)^n x\| = \|((T|_M^*)^n)x\| = \|x\|, \quad \text{para todo } x \in M \text{ y } n \in \mathbb{N};$$

luego $\|T^n x\| = \|T^{*n} x\| = \|x\|$ para todo $x \in M$ y $n \in \mathbb{N}$, es decir —teniendo en cuenta (6.2)—, $M \subseteq \mathcal{U}$.

Así pues, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ es el subespacio reductor de T más grande para el que $T|_{\mathcal{U}}$ es una transformación unitaria. Entonces, $T|_{\mathcal{U}^\perp}$ debe ser completamente no unitario. \square

Corolario 6.12. *Toda contracción en un espacio de Hilbert admite una descomposición única como suma directa ortogonal de un operador completamente no unitario y una transformación unitaria.*

Conviene notar que la descomposición de Nagy-Foias-Langer afirma la existencia de un subespacio reductor (no necesariamente no trivial) para cualquier contracción. Estudiando las propiedades de los operadores A y A_* se pueden clasificar las contracciones, obteniendo así para algunos tipos un subespacio reductor no trivial.

6.3. La descomposición de von Neumann-Wold

En esta sección obtendremos la descomposición de von Neumann-Wold para isometrías en espacios de Hilbert.

Definición 6.13 (Operador puro). Se dice que un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es puro si no admite como sumando directo un operador normal.

Nota 6.14 (Isometría pura \Leftrightarrow Isometría completamente no unitaria).

Conviene observar que si T es una isometría entonces T es puro si no tiene ninguna isometría normal como sumando directo (ya que la restricción de una isometría a todo subespacio es una isometría). Por otra parte, en virtud de la Proposición 3.3 anterior, una isometría normal es un operador unitario.

Por tanto, una isometría pura es exactamente lo mismo que una isometría completamente no unitaria.

Teorema 6.15 (Isometría completamente no unitaria \Leftrightarrow Shift unilateral).

Un operador en un espacio de Hilbert es una isometría completamente no unitaria si y sólo si es un shift unilateral.

Demostración.

“ \Leftarrow ”

Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un shift unilateral, por la Proposición 6.5 anterior, T^* es una coisometría fuertemente estable; luego $A_* = O$ y entonces $\ker(I - A_*) = \{0\}$. Por tanto, en la descomposición de Nagy-Foias-Langer, tenemos que

$$\mathcal{U} = \ker(I - A) \cap \ker(I - A_*) = \{0\};$$

es decir, $T|_{\mathcal{U}^\perp} = T$ es un operador completamente no unitario.

“ \Rightarrow ”

Necesitaremos el siguiente lema previo.

Lema 6.16 (auxiliar).

Si $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una isometría completamente no unitaria, entonces T^ es fuertemente estable.*

Demostración. En virtud del Corolario 6.9-(ii), sabemos que $A = I$ y entonces, en la descomposición de Nagy-Foias-Langer, tenemos que

$$\mathcal{U} = \ker(I - A) \cap \ker(I - A_*) = \mathcal{H} \cap \ker(I - A_*) = \ker(I - A_*) = \{0\},$$

al ser T completamente no unitario por hipótesis.

Por otra parte, en virtud de la Proposición 6.7 anterior, sabemos que $A_* = TA_*T^*$ y entonces $T^*A_* = A_*T^*$, donde hemos utilizado que $T^*T = I$ por ser T una isometría. Luego, en virtud del Corolario 6.9-(iii), A_* es una proyección (no necesariamente ortogonal) y entonces $\ker(I - A_*) = \text{Im}(A_*)$.

Por tanto, $A_* = O$ y así —por el Corolario 6.9-(i)— T^* es fuertemente estable. \square

Dividiremos lo que resta de demostración en cuatro etapas.

Etapas 1: construcción de una sucesión $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ de proyecciones ortogonales.

Consideremos, para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$P_k = T^k T^{*k} - T^{k+1} T^{*(k+1)}. \quad (6.3)$$

En tal caso,

$$\begin{aligned} P_{k+m} &= T^{k+m} T^{*(k+m)} - T^{k+m+1} T^{*(k+m+1)} \\ &= T^k [T^m T^{*m} - T^{m+1} T^{*(m+1)}] T^{*k} \\ &= T^k P_m T^{*k}, \quad \text{para todo } k, m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Por tanto, teniendo en cuenta que T es una isometría —es decir, $T^{*k} T^k = I$ — y los cálculos justamente anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned} P_k^2 &= (T^k P_0 T^{*k})(T^k P_0 T^{*k}) = T^k P_0 I P_0 T^{*k} = T^k P_0^2 T^{*k} \\ &= T^k (I - T T^*)^2 T^{*k} = T^k (I - T T^*) T^{*k} = T^k P_0 T^{*k} = P_k, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}_0; \end{aligned}$$

luego $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de proyecciones.

En virtud de la Proposición 3.5, basta ahora probar que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, P_k es un operador no negativo. No obstante, dado que por hipótesis T es una isometría, $\|T^*\| = \|T\| = 1$; luego T^* es una contracción y entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T^{*k} x\|^2 - \|T^{*(k+1)} x\|^2 = \langle T^{*k} x, T^{*k} x \rangle - \langle T^{*(k+1)} x, T^{*(k+1)} x \rangle \\ &= \langle T^k T^{*k} x, x \rangle - \langle T^{k+1} T^{*(k+1)} x, x \rangle = \langle (T^k T^{*k} - T^{k+1} T^{*(k+1)}) x, x \rangle \\ &= \langle P_k x, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H} \text{ y } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Etapa 2: $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de proyecciones mutuamente ortogonales.

Teniendo en cuenta que —por hipótesis— T es una isometría, deducimos que

$$T T^* T^k P_0 T^{*k} = T^k P_0 T^{*k} = T^k P_0 T^{*k} T T^*, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

o equivalentemente, en virtud de (6.4),

$$T T^* P_k = P_k = P_k T T^*, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta esta última identidad, deducimos que, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$P_0 P_m = (I - T T^*) P_m = P_m - T T^* P_m = O$$

y

$$P_m P_0 = P_m (I - T T^*) = P_m T T^* - P_m = O.$$

Luego, teniendo de nuevo en cuenta que T es una isometría —es decir, $T^{*k} T^k = I$ — y las dos igualdades anteriores, concluimos que para todo $k, m \in \mathbb{N}$,

$$P_k P_{k+m} = (T^k P_0 T^{*k})(T^k P_m T^{*k}) = T^k P_0 P_m T^{*k} = O \quad (6.5)$$

y

$$P_{k+m} P_k = (T^k P_m T^{*k})(T^k P_0 T^{*k}) = T^k P_m P_0 T^{*k} = O \quad (6.6)$$

Por tanto, en virtud de (6.5) y (6.6), llegamos finalmente a que

$$P_k P_j = O, \quad \text{para todo } k, j \in \mathbb{N}_0 \text{ con } j \neq k$$

y entonces, en virtud de la Proposición 3.6 anterior, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de proyecciones mutuamente ortogonales.

Etapá 3: $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \text{Im}(P_k)$

Teniendo en cuenta que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ es una sucesión de proyecciones mutuamente ortogonales, la expresión (6.3) anterior y el Lema 6.16 anterior, llegamos a que

$$\begin{aligned}
\left\| \left(I - \sum_{k=0}^n P_k \right) x \right\|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=0}^n P_k x, x - \sum_{k=0}^n P_k x \right\rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \left\langle x, \sum_{k=0}^n P_k x \right\rangle - \left\langle \sum_{k=0}^n P_k x, x \right\rangle + \left\langle \sum_{k=0}^n P_k x, \sum_{k=0}^n P_k x \right\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n \langle P_k x, x \rangle + \sum_{k=0}^n \langle P_k x, P_k x \rangle \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n \langle P_k x, x \rangle + \sum_{k=0}^n \langle P_k^2 x, x \rangle \\
&= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n \langle P_k x, x \rangle + \sum_{k=0}^n \langle P_k x, x \rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n \langle (T^k T^{*k} - T^{k+1} T^{*(k+1)}) x, x \rangle \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n (\|T^{*k} x\|^2 - \|T^{*(k+1)} x\|^2) \\
&= \|T^{*(n+1)} x\|^2 \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty;
\end{aligned}$$

es decir, $\{P_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ es una resolución de la identidad en \mathcal{H} .

Etapá 4: Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, $T(\text{Im } P_k) = \text{Im}(P_{k+1})$.

Dado que, para cada $k \in \mathbb{N}_0$,

$$T P_k = T(T^k P_0 T^{*k}) T^* T = (T^{k+1} P_0 T^{*(k+1)}) T = P_{k+1} T,$$

deducimos luego que $T(\text{Im}(P_k)) \subseteq \text{Im}(P_{k+1})$. Por otra parte, dado que $P_{k+1} = T P_k T^*$, también se tiene que $\text{Im}(P_{k+1}) \subseteq T(\text{Im}(P_k))$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$.

Por tanto, $T(\text{Im}(P_k)) = \text{Im}(P_{k+1})$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. □

Nota 6.17. Es decir, en un espacio de Hilbert \mathcal{H} tenemos que

$$\text{Isometría pura} \iff \text{Isometría completamente no unitaria} \iff \text{Shift unilateral}$$

Así, como toda isometría es una contracción, podemos aplicar la descomposición de Nagy-Foias-Langer a isometrías para obtener ahora la siguiente descomposición de una isometría dada.

Teorema 6.18 (Descomposición de von Neumann-Wold).

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una isometría. Luego $\ker(I - A_*)$ es un subespacio reductor para T y además

$$T = S_+ \oplus U, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \ker(I - A_*)^\perp \oplus \ker(I - A_*),$$

siendo $S_+ = T|_{\ker(I - A_*)^\perp}$ un shift unilateral y $U = T|_{\ker(I - A_*)}$ una transformación unitaria.

Demostración. Si T es una isometría, entonces $A = I$ por el Corolario 6.9. Luego, T es una contracción con $\ker(I - A) = \mathcal{H}$, y por tanto, $\mathcal{U} = \ker(I - A) \cap \ker(I - A_*) = \ker(I - A_*)$.

Por la descomposición de Nagy-Foias-Langer, $T|_{\mathcal{U}} = T|_{\ker(I - A_*)}$ es una transformación unitaria y $T|_{\mathcal{U}^\perp} = T|_{\ker(I - A_*)^\perp}$ es una isometría completamente no unitaria, y así, un shift unilateral. \square

Corolario 6.19 (Isometrías en espacios de Hilbert).

Toda isometría en un espacio de Hilbert es un shift unilateral, una transformación unitaria o una suma directa ortogonal de ellos.

Nota 6.20 (Sobre la descomposición de von Neumann-Wold).

Pese a que históricamente la descomposición de von Neumann-Wold es previa a la de Nagy-Foias-Langer, en nuestro caso hemos obtenido la primera como consecuencia de la segunda. Obsérvese que Nagy-Foias-Langer aplica a contracciones, mientras que von Neumann-Wold únicamente para isometrías.

Esquemizamos a continuación una forma alternativa de obtener la descomposición de von-Neumann-Wold. Para ello, dada una isometría $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, podemos considerar la sucesión de subespacios cerrados

$$\mathcal{H} \supset T(\mathcal{H}) \supset T^2(\mathcal{H}) \supset \cdots \supset T^n(\mathcal{H}) \cdots,$$

lo cual permite definir los subespacios

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T^n(\mathcal{H}) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_1 = \overline{\text{span}} \{T^i(\mathcal{H} \ominus T(\mathcal{H})) : i \in \mathbb{N}_0\},$$

donde $\mathcal{H} \ominus T(\mathcal{H})$ denota el complementario topológico de $T(\mathcal{H})$ en \mathcal{H} .

Así, $T|_{\mathcal{H}_0}$ es una isometría biyectiva —esto es, transformación unitaria— y $T|_{\mathcal{H}_1}$ es un operador unitariamente equivalente a un shift. Es decir, $\mathcal{H}_0 = \ker(I - A_*)$ y $\mathcal{H}_1 = \ker(I - A_*)^\perp$.

6.4. Más propiedades de los operadores A y A^2

Por lo visto antes, una contracción T es una isometría si y sólo si $A = I$. Relajando ligeramente esta condición (pidiendo ahora, por ejemplo, que $A = A^2$) conseguiremos estudiar ciertas contracciones semejantes en cierto sentido a una isometría. Expondremos parte de los resultados probados en [7].

Iniciamos esta sección con tres lemas técnicos sobre propiedades del operador límite fuerte A que serán utilizadas más adelante para obtener ciertas descomposiciones.

Lema 6.21. *$\ker(A - A^2)$ es el mayor subespacio de \mathcal{H} contenido en $\ker(AT - TA)$ que es T -invariante.*

Demostración. En virtud de la Proposición 6.8-(iii), sabemos que

$$\ker(A - A^2) = \{x \in \mathcal{H} : \|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|Ax\|\} \tag{6.7}$$

$$= \{x \in \mathcal{H} : \|AT^n x\| = \|Ax\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \tag{6.8}$$

$$= \{x \in \mathcal{H} : AT^n x = T^n Ax, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}; \tag{6.9}$$

luego —en virtud de (6.9)— es claro que $\ker(A - A^2) \subseteq \ker(AT - TA)$. Probemos ahora que $\ker(A - A^2)$ es T -invariante. Si $x \in \ker(A - A^2)$, entonces en virtud de (6.8), (6.7) y de la Proposición 6.7-(iv), se sigue que

$$\|A(Tx)\| = \|Ax\| = \|A^{\frac{1}{2}}x\| = \|A^{\frac{1}{2}}(Tx)\|,$$

y por tanto $Tx \in \ker(A - A^2)$ teniendo en cuenta (6.7).

Sea ahora $M \subseteq \ker(AT - TA)$ un subespacio T -invariante arbitrario. Probaremos que en tal caso

$$AT^n x = T^n Ax, \quad \text{para todo } x \in M \text{ y todo } n \geq 1; \quad (6.10)$$

luego concluiremos que $M \subseteq \ker(A - A^2)$ por (6.9).

Observemos inicialmente que $M \subseteq \ker(AT - TA)$ equivale a que

$$ATx = TAx, \quad \text{para todo } x \in M \quad (6.11)$$

y supongamos —por inducción— que se cumple (6.10) para cierto $n \in \mathbb{N}$; entonces, aplicando la hipótesis de inducción, teniendo en cuenta que $T^n x \in M$ —pues M es T -invariante— y (6.11), obtenemos que

$$T^{n+1}Ax = TT^n Ax = TAT^n x = ATT^n x = AT^{n+1}x.$$

Por tanto, queda probado (6.10) y entonces $\ker(A - A^2)$ es el mayor subespacio de \mathcal{H} contenido en $\ker(AT - TA)$ que es T -invariante. \square

Lema 6.22. $\ker(A - A^2) = \ker(A) \oplus \ker(I - A)$.

Demostración. Inicialmente, probaremos que $\ker(A - A^2)$ es un subespacio invariante para el operador A . Dado que $\ker(I - A) \subseteq \ker(A - A^2)$ y

$$x \in \ker(A - A^2) \iff (A - A^2)x = 0 \iff (I - A)Ax = 0 \iff Ax \in \ker(I - A),$$

deducimos entonces que $Ax \in \ker(A - A^2)$; es decir, $\ker(A - A^2)$ es un subespacio A -invariante.

Consideremos ahora la restricción de A a tal subespacio invariante; es decir, sea

$$P \equiv A|_{\ker(A - A^2)}: \ker(A - A^2) \longrightarrow \ker(A - A^2)$$

En tal caso, P es una proyección, pues $P^2x = A^2x = Ax = Px$ para todo $x \in \ker(A - A^2)$. Además, dado que para todo $x \in \ker(A - A^2)$ tenemos que $\langle Px, x \rangle = \langle Ax, x \rangle \geq 0$, la Proposición 3.5 anterior asegura que P es una proyección ortogonal.

Por otra parte,

$$\ker(P) = \ker(A|_{\ker(A - A^2)}) = \ker(A) \cap \ker(A - A^2) = \ker(A)$$

ya que $\ker(A) \subseteq \ker(A - A^2)$ y puesto que P es una proyección ortogonal,

$$\begin{aligned} \ker(P)^\perp &= \text{Im}(P) = \{x \in \ker(A - A^2): Px = x\} \\ &= \{x \in \ker(A - A^2): Ax = x\} \\ &= \ker(A - A^2) \cap \ker(I - A) = \ker(I - A). \end{aligned}$$

ya que $\ker(I - A) \subseteq \ker(A - A^2)$.

Por tanto, en virtud del Teorema de la Proyección Ortogonal, el espacio de Hilbert $\ker(A - A^2)$ admite la descomposición ortogonal

$$\ker(A - A^2) = \ker(P) + \ker(P)^\perp = \ker(A) + \ker(I - A).$$

Finalmente, puesto que $\ker(A) \perp \ker(I - A)$, podemos identificar la suma ortogonal con la suma directa ortogonal y entonces $\ker(A - A^2) = \ker(A) \oplus \ker(I - A)$. \square

Lema 6.23. *Si $A = A_*$, entonces $A = A^2$.*

Demostración. Por la proposición 6.7-(iii), se tiene que

$$A = T^{*n}AT^n = T^{*n}A_*T^n = T^{*n}T^nA_*T^{*n}T^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y así, dado que $T^{*n}T^n \xrightarrow{f} A$, concluimos que $A = A^3$. Por tanto, $I \geq A^2 = A^4 \geq O$ y entonces deducimos finalmente que $A = A^2$ por unicidad de la raíz cuadrada de un operador. \square

6.4.1. Descomposición de algunas contracciones

Teorema 6.24. *Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción, entonces:*

(i) $A = A^2$ si y sólo si

$$T = G \oplus S_+ \oplus U, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3, \quad (6.12)$$

donde: G es una contracción fuertemente estable en $\mathcal{H}_1 = \ker(A)$,
 S_+ es un shift unilateral en $\mathcal{H}_2 = \ker(I - A) \cap \ker(A_*)$ y
 U es una transformación unitaria en $\mathcal{H}_3 = \ker(I - A) \cap \ker(I - A_*)$.

(ii) $A = A^2$ y $A_* = A_*^2$ si y sólo si

$$T = B \oplus S_- \oplus S_+ \oplus U, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \quad (6.13)$$

donde B es una contracción en $\mathcal{H}_{11} = \mathcal{H}_1 \cap \ker(A_*)$ tal que B y B^* son fuertemente estables y S_- es el adjunto de un shift unilateral en $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \cap \ker(I - A_*)$.

(iii) $A = A_*$ si y sólo si

$$T = B \oplus U, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_3. \quad (6.14)$$

Demostración.

(i)

Si $A = A^2$, por la Proposición 6.8 y el Lema 6.22, tenemos que

$$\mathcal{H} = \ker(A - A^2) = \ker(A) \oplus \ker(I - A),$$

donde ambos subespacios son mutuamente ortogonales y T -invariantes; es decir, subespacios reductores para T . Luego, por el Lema 6.22 y el Corolario 6.9, T admite una descomposición del tipo

$$T = G \oplus J, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \ker(A) \oplus \ker(I - A),$$

con $G = T|_{\ker(A)}$ una contracción fuertemente estable y $J = T|_{\ker(I-A)}$ una isometría.

Si ahora aplicamos la descomposición de von Neumann-Wold al operador J , obtenemos que

$$J = S_+ \oplus U, \quad \text{respecto de } \ker(I - A) = M \oplus [\ker(I - A) \cap \ker(I - A_*)] = M \oplus \mathcal{U},$$

con $S_+ = J|_M$ un shift unilateral y $U = J|_{\mathcal{U}}$ una transformación unitaria; luego

$$T = G \oplus S_+ \oplus U, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \ker(A) \oplus M \oplus \mathcal{U}.$$

Por tanto, tan solo resta probar la siguiente igualdad:

Lema 6.25. $M = \ker(I - A) \cap \ker(A_*)$.

Demostración. Teniendo en cuenta que —por la Proposición 6.5 anterior— $(S_+^*)^n \xrightarrow{f} O$ y que

$$T^* = G^* \oplus S_+^* \oplus U^*, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \ker(A) \oplus M \oplus \mathcal{U},$$

concluimos que $M \subseteq \ker(A_*)$ en virtud de la Proposición 6.8. No obstante, como $\ker(I - A) = M \oplus \mathcal{U}$, también se tiene que $M \subseteq \ker(I - A)$, y obtenemos luego que

$$M \subseteq \ker(I - A) \cap \ker(A_*).$$

Como U^* es una transformación unitaria, en virtud de la Proposición 6.8 anterior, tenemos que $\ker(A_*) \subseteq \ker(A) \oplus M$; luego

$$\ker(I - A) \cap \ker(A_*) \subseteq \ker(I - A) \cap (\ker(A) \oplus M) \subseteq M.$$

En efecto, pues si $x \in \ker(I - A) \cap (\ker(A) \oplus M)$, entonces $x \in \ker(I - A)$ y $x = (u, v)$ para ciertos $u \in \ker(A)$ y $v \in M$ y entonces —dado que $M \subseteq \ker(I - A)$, y $\ker(A) \perp \ker(I - A)$ — deducimos que $\ker(A) \perp M$.

Por tanto, identificando u y v con $(u, 0)$ y $(0, v) \in \ker(A) \oplus M$, concluimos que

$$0 = \langle u, x \rangle = \langle (u, 0), (u, v) \rangle = \langle u, u \rangle + \langle 0, v \rangle = \|u\|^2,$$

de donde se deduce finalmente que $x = (0, v) \in M$. □

Para ver el recíproco en (i), basta tener en cuenta que si T es de la forma $T = G \oplus S_+ \oplus U$, entonces —por el Corolario 6.9— el límite fuerte de $(T^{*n}T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ es $A = O \oplus I \oplus I$ y se tiene entonces que $A = A^2$.

(ii)

Si $A = A^2$, por (i), la contracción T admite una descomposición como la enunciada en (6.12). En tal caso,

$$T^n T^{*n} = G^n (G^*)^n \oplus S_+^n (S_+^*)^n \oplus U^n (U^*)^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

Por ser G una contracción en \mathcal{H}_1 , existe el límite fuerte de la sucesión $(G^n G^{*n})_{n \in \mathbb{N}}$, operador al que denotaremos por A'_* . Por otra parte, por ser S_+^* una contracción fuertemente estable en \mathcal{H}_2 y U^* una isometría en \mathcal{H}_3 , $S_+^* \xrightarrow{f} O$ y $U^n U^{*n} = I$ en virtud de la Proposición 6.5 y la Proposición 3.3 respectivamente. Así pues,

$$A_* = A'_* \oplus O \oplus I, \quad \text{e} \quad (I - A_*) = (I - A'_*) \oplus I \oplus O, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3.$$

Luego deducimos que

$$\ker(A_*) = \ker(A'_*) \oplus \mathcal{H}_2 \quad \text{y} \quad \ker(I - A_*) = \ker(I - A'_*) \oplus \mathcal{H}_3.$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$ y que $\ker(A'_*) \subseteq \mathcal{H}_1$ —pues $A'_* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ —,

$$\mathcal{H}_{11} := \mathcal{H}_1 \cap \ker(A_*) = \mathcal{H}_1 \cap (\ker(A'_*) \oplus \mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_1 \cap \ker(A'_*) = \ker(A'_*). \quad (6.15)$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_3$ y que $\ker(I - A'_*) \subseteq \mathcal{H}_1$ —pues $I - A'_* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ —,

$$\mathcal{H}_{12} := \mathcal{H}_1 \cap \ker(I - A_*) = \mathcal{H}_1 \cap (\ker(I - A'_*) \oplus \mathcal{H}_3) = \ker(I - A'_*). \quad (6.16)$$

Por otra parte, si $A_* = A_*^2$, por construcción, $A'_* = A_*'^2$ y entonces, en virtud del Lema 6.22,

$$\mathcal{H}_1 = \ker(A'_* - A_*'^2) = \ker(A'_*) \oplus \ker(I - A'_*) = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12},$$

donde \mathcal{H}_{11} y \mathcal{H}_{12} son subespacios mutuamente ortogonales y G^* -invariantes —por la Proposición 6.8—. Luego, \mathcal{H}_{11} y \mathcal{H}_{12} reducen a G y por tanto

$$G = B \oplus S_-, \quad \text{respecto de } \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12},$$

donde: $B = G|_{\mathcal{H}_{11}} = G|_{\ker(A'_*)} = T|_{\ker(A) \cap \ker(A_*)}$ —por (6.15)—, luego es una contracción fuertemente estable cuyo adjunto B^* también es fuertemente estable —por la Proposición 6.8— y $S_- = G|_{\mathcal{H}_{12}} = G|_{\ker(I - A'_*)} = T|_{\ker(A) \cap \ker(I - A_*)}$ —por (6.16)—, luego S_- es una coisometría fuertemente estable —de nuevo por la Proposición 6.8—. Por el Teorema 6.15 anterior, S_- es el adjunto de un shift unilateral, es decir, el shift retrógrado.

De esta forma, se obtiene la factorización enunciada en (6.13).

Recíprocamente, si T admite una descomposición como la enunciada en (6.13), entonces por el Corolario 6.9 anterior, $A = O \oplus O \oplus I \oplus I$ y $A_* = O \oplus I \oplus O \oplus I$, lo cual implica que $A = A^2$ y $A_* = A_*^2$.

(iii)

Si $A = A_*$, entonces $A = A^2$ por el Lema 6.23 anterior y entonces $A_* = A_*^2$; luego T admite la descomposición descrita en (6.13). Además, dado que A es autoadjunto, A es una proyección ortogonal, luego

$$\ker(A) \perp \ker(I - A)$$

y entonces

$$\mathcal{H}_2 = \ker(I - A) \cap \ker(A_*) = \{0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_{12} = \ker(A) \cap \ker(I - A_*) = \{0\};$$

luego el operador T se descompone como

$$T = B \oplus U, \quad \text{respecto de } \mathcal{H} = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_3 = \ker(A) \oplus \ker(I - A),$$

siendo $B = T|_{\ker(A)}$ una contracción fuertemente estable con operador adjunto fuertemente estable y $U = T|_{\ker(I - A)}$ una transformación unitaria.

Recíprocamente, si T satisface (6.14), entonces —por la Proposición 6.7 anterior— $A = A_* = O \oplus I$. \square

Capítulo 7

El Problema del Subespacio Invariante en la actualidad

Algunos problemas abiertos en la actualidad (como, por ejemplo, la Hipótesis de Riemann o $P=NP$) fomentan por sus comprobaciones computacionales o por las consecuencias teóricas que implicarían, visiones sesgadas en la comunidad matemática. Por ejemplo, es mucho más común pensar que la Hipótesis de Riemann es verdadera que lo contrario; o igualmente, tendemos a pensar que $P = NP$ debería ser falso.

Sin embargo, en el caso del Problema del Subespacio Invariante la comunidad matemática parece estar dividida y no hay una línea de investigación única y clara. Si a lo anterior le sumamos que alcanzados ciertos grados de abstracción matemática es común que empiecen a surgir dudas sobre los resultados alcanzados, no debería resultar sorprendente encontrar incluso opiniones que duden sobre el interés del problema en cuestión.

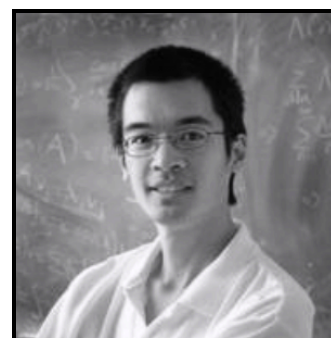
En este capítulo trataremos de exponer diversos comentarios y opiniones formuladas recientemente sobre la posible solución del Problema del Subespacio Invariante.

Para la elaboración del mismo hemos recurrido tanto al contacto directo a través de correo electrónico —en el caso del Profesor Castillo y la Profesora Gallardo— como al indirecto mediante la consulta de diverso material bibliográfico disponible en internet —para el resto de autores—.

7.1. Terence Tao

Terence Tao (1975-) es un matemático australiano de origen chino. En la actualidad, trabaja como profesor e investigador en la Universidad Los Ángeles, California (EE.UU.). Considerado como uno de los mejores matemáticos contemporáneos, ha realizado grandes contribuciones en áreas tan diversas de las matemáticas como el análisis funcional, la computación o la teoría de números. Investigador prolífico, ha publicado más de 300 artículos y alrededor de 20 libros.

Entre la gran cantidad de premios con los que ha sido galardonado, destaca la Medalla Fields que recibió en 2006 por sus trabajos sobre ecuaciones en derivadas parciales,



T. Tao

combinatoria, análisis armónico y teoría aditiva de números.

A continuación, mostraremos una conjetura equivalente al Problema del Subespacio Invariante propuesta en el año 2010 por T. Tao. Originalmente, estos resultados aparecieron en su activo blog “What’s New”, pero también pueden encontrarse en [12]. Cabe destacar que según afirma el propio T. Tao, obtuvo tal conjetura solo para divertirse (“just for fun, I set my set myself the task of trying to find an equivalent reformulation of this conjecture...”)

La idea que subyace al trabajo de T. Tao consiste en “compactificar” el Problema del Subespacio Invariante, cuya naturaleza es claramente infinita. Así, lo novedoso de su propuesta consiste en obtener una formulación del problema que involucra únicamente operadores y propiedades sobre espacios de dimensión finita.

Debido a la dificultad de los razonamientos necesarios, incluimos a continuación un breve esquema para facilitar la comprensión.

- 1.– Partimos de una formulación del Problema del Subespacio Invariante en términos de dos vectores unitarios tales que uno es ortogonal a la órbita del otro (ver Conjetura 7.2).
- 2.– Introducimos el concepto de “ajustable” (tanto para operadores —Definición 7.4— como para vectores —Definición 7.6—), que nos permitirá extraer subsucesiones convergentes tanto de una sucesión de operadores como de una sucesión de vectores.
- 3.– El paso crucial consiste en utilizar el complicado concepto de barrera —Definición 7.13— para obtener una versión “finitizada” de la Conjetura 7.11 (ver Conjetura 7.15).

Comencemos por recordar la formulación clásica del problema. Sea entonces \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión no finita.

Conjetura 7.1. *Todo operador lineal y acotado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ admite un subespacio invariante no trivial*

El primer paso consiste en deshacerse del concepto de subespacio invariante para pasar a hablar de cierta relación de ortogonalidad.

Conjetura 7.2. *Para todo operador lineal y acotado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existen dos vectores unitarios $v, w \in \mathcal{H}$ tales que*

$$\langle T^n v, w \rangle = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (7.1)$$

Proposición 7.3. *Conjetura 7.1 equivale a Conjetura 7.2.*

Demostración.

“Conjetura 7.1 \implies Conjetura 7.2”

Si $V \subset \mathcal{H}$ es un subespacio invariante no trivial para el operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, basta considerar dos vectores unitarios $v \in V$ y $w \in V^\perp$ —cuya existencia está garantizada por ser $\{0\} \neq V \neq \mathcal{H}$ — para obtener (7.1).

“Conjetura 7.2 \implies Conjetura 7.1”

Claramente, si $0 \neq v \in \mathcal{H}$ entonces $V = \overline{\text{span}}\{T^n v : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathcal{H}$ es un subespacio invariante no nulo para el operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además, dado que $0 \neq w \in V^\perp$, concluimos que $V \neq \mathcal{H}$. \square

Supongamos ahora sin pérdida de generalidad que, como ya hicimos en el Capítulo 6, nuestro operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una contracción —luego $\|T\| \leq 1$ —. De ahora en adelante, asumiremos que $\mathcal{H} = \ell^2$.

El siguiente paso consiste en introducir el concepto de “ajustado”, hipótesis que utilizaremos más adelante para extraer subsucesiones convergentes. Nos referiremos a cualquier función monótona creciente $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ como una función de crecimiento.

Definición 7.4 (Contracciones ajustadas). Dada una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, se dice que T es f -ajustada a la función de crecimiento $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ si

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=f(n)}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=f(n)}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \quad (7.2)$$

donde $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ es la matriz de coeficientes asociada a T .

Nota 7.5. La condición “ T es una contracción f -ajustada” viene a decir que si la matriz de coeficientes de T es

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{matrix}} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} a_{1,N} & \cdots \\ \vdots \\ a_{n,N} & \cdots \end{matrix}} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{\begin{matrix} a_{N,1} & \cdots & a_{N,n} \\ \vdots & & \vdots \end{matrix}} & \cdots & \begin{matrix} a_{N,N} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{matrix} \end{pmatrix},$$

entonces —para cada $n \in \mathbb{N}$ — la submatriz superior izquierda de dimensión $N \times N$ con $N = f(n) - 1$ —llamémosle A_N —, “concentra el peso” de los coeficientes de A en el sentido de que tanto las n primeras filas de la submatriz infinita situada a la derecha de A_N como las n primeras columnas de la submatriz infinita situada bajo A_N tienen todas norma menor que $1/n$.

Así pues, ser f -ajustada es una propiedad mucho más débil que la de ser una matriz banda; ya que si $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ es una matriz banda con un ancho de banda $n_0 \in \mathbb{N}$ (esto es, $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > n_0$) entonces A es f -ajustada para, por ejemplo, la función de crecimiento $f(n) = n + n_0$.

Definición 7.6 (Vectores ajustados). Sea $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función de crecimiento dada y $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. Se dice entonces que un vector unitario $v \in \mathcal{H}$ es

(i) $(f, (n_k)_{k=1}^m)$ -ajustado si

$$\sum_{i=n_k}^{\infty} |v_i|^2 \leq \frac{1}{f(n_{k-1})}, \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq m; \quad (7.3)$$

(ii) $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustado si

$$\sum_{i=n_k}^{\infty} |v_i|^2 \leq \frac{1}{f(n_{k-1})}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}; \quad (7.4)$$

donde entendemos que $n_0 = 0$.

Nota 7.7. Las Definiciones 7.4 y 7.6 anteriores son, en cierto sentido, “duales”. Pues si f y f' son dos funciones de crecimiento tales que $f(n) \leq f'(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces toda contracción f -ajustada es f' -ajustada; mientras que para vectores, todo vector (f', \cdot) -ajustado es (f, \cdot) -ajustado.

La importancia de la idea de “ajustabilidad” reside en los enunciados de los siguientes lemas.

Lema 7.8 (Compacidad secuencial de contracciones ajustadas).

- (i) Toda contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es f -ajustada para cierta función de crecimiento f .
- (ii) Toda sucesión de contracciones f -ajustadas admite una subsucesión fuertemente convergente a una contracción f -ajustada.

Demostración.

(i)

Sea $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una contracción arbitraria. Entonces, dado que $\|T\| \leq 1$,

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq 1 \quad \text{y} \quad \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, existen $f_1(n), f_2(n) \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=f_1(n)}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \sup_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=f_2(n)}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \frac{1}{n}.$$

Escogiendo $f(n) \geq \max\{f_1(n), f_2(n)\}$, se cumple la condición exigida en (7.2). Basta luego garantizar la monotonía de la función $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ en las sucesivas elecciones para obtener el resultado enunciado.

(ii)

Sea $(T_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una sucesión de contracciones f -ajustadas arbitraria. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $A^m = (a^m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ la matriz de coeficientes de la contracción T_m .

Aplicando el argumento de diagonal de Cantor, tenemos garantizada la existencia de una subsucesión $(T_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a^{m_k}_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad \text{para todo } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Consideramos entonces la matriz $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$, que —como veremos seguidamente— estará asociada a una contracción f -ajustada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En efecto, pues en virtud del Lema de Fatou [30, Cap. 1] —estudiado en la materia *Cálculo vectorial e Integración de Lebesgue*—,

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} |a^{m_k}_{ij}|^2 \leq 1,$$

mientras que

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=f(n)}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=f(n)}^{\infty} |a^{m_k}_{ij}|^2 \leq \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y

$$\sup_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=f(n)}^{\infty} |a_{ij}|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=f(n)}^{\infty} |a^{m_k}_{ij}|^2 \leq \frac{1}{n}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

por ser T_{m_k} una contracción f -ajustada para cada $k \in \mathbb{N}$.

Para probar la convergencia fuerte de la sucesión $(T_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ a la contracción T , dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta escoger $m_k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, para obtener que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |a^{m_k}_{ij} - a_{ij}|^2 &= \sum_{j=1}^{f(m_k)-1} |a^{m_k}_{ij} - a_{ij}|^2 + \sum_{j=f(m_k)}^{\infty} |a^{m_k}_{ij} - a_{ij}|^2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $a^{m_k}_{ij} \rightarrow a_{ij}$ cuando $k \rightarrow \infty$ —para acotar el primer sumando— y la desigualdad de Minkowski junto con que T y T_{m_k} son contracciones f -ajustadas —para acotar el segundo sumando—. \square

Lema 7.9. (*Compacidad secuencial de vectores ajustados*)

- (i) *Todo vector unitario $v \in \mathcal{H}$ es $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustado para cierta sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$.*
- (ii) *Si $(v^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ es una sucesión de vectores unitarios tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$, v^m es $(f, (n_k)_{k=1}^m)$ -ajustado, existe entonces una subsucesión $(v^{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente (en norma) a un vector unitario $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustado.*

Demostración.

(i)

Sea $v \in \mathcal{H}$ un vector unitario arbitrario dado. Entonces, dado que $\|v\| = 1$,

$$\sum_{i=n}^{\infty} |v_i|^2 \leq 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, para $k = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=n_1}^{\infty} |v_i|^2 \leq \frac{1}{f(n_1-1)} = \frac{1}{f(n_0)}.$$

En general, dado $k \in \mathbb{N}$, existirá $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=n_k}^{\infty} |v_i|^2 \leq \frac{1}{f(n_{k-1})}.$$

Basta luego garantizar la monotonía de la sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para obtener el resultado enunciado.

(ii)

Sea $(v^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una sucesión de vectores unitarios en las condiciones del enunciado.

Aplicando el argumento de diagonal de Cantor, tenemos garantizada la existencia de una subsucesión $(v^{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v^{m_i}_j = v_j \in \mathbb{C}, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Consideramos entonces la sucesión $v = (v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ que —como veremos seguidamente— es un vector $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustado de \mathcal{H} . En efecto, pues en virtud del Lema de Fatou,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2 \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |v^{m_i}_j|^2 \leq 1$$

y

$$\sum_{j=n_k}^{\infty} |v_j|^2 \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=n_k}^{\infty} |v^{m_i}_j|^2 \leq \frac{1}{f(n_{k-1})}, \quad \text{para todo } 1 \leq k \leq m_i,$$

por ser $v^{m_i} \in \mathcal{H}$ un vector $(f, (n_k)_{k=1}^{m_i})$ -ajustado. Ahora bien, dado que $m_i \rightarrow +\infty$ cuando $i \rightarrow \infty$, concluimos finalmente que

$$\sum_{j=n_k}^{\infty} |v_j|^2 \leq \frac{1}{f(n_{k-1})}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Para probar la convergencia fuerte de la sucesión de vectores $(v^{m_i})_{i \in \mathbb{N}}$ al vector v , dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, basta escoger $n_k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, para obtener que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |v^{m_i}_j - v_j|^2 &= \sum_{j=1}^{n_k-1} |v^{m_i}_j - v_j|^2 + \sum_{j=n_k}^{\infty} |v^{m_i}_j - v_j|^2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $v^{m_i}_j \rightarrow v_j$ cuando $i \rightarrow \infty$ —para acotar el primer sumando— y la desigualdad de Minkowski junto con que v y v^{m_i} son vectores $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustados —para acotar el segundo sumando—.

Ahora es claro que, por ser v límite de vectores unitarios, $\|v\| = 1$. \square

Nota 7.10. En general, si v_1 y v_2 son dos vectores $(f, (n^1_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustado y $(f, (n^2_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustado respectivamente, entonces los vectores v_1 y v_2 son $(f, (n_k)_{n \in \mathbb{N}})$ -ajustados para $n_k = \max\{n^1_k, n^2_k\}$.

Nótese también que en el Lema 7.9-(ii) anterior, partimos de una sucesión de vectores (f, u) -ajustados, siendo u una tupla finita para cada vector. No obstante, el vector límite cuya existencia es un ajustado por una sucesión (infinita!).

Conjetura 7.11. *Para toda contracción f -ajustada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existen una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y dos vectores $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustados $v, w \in \mathcal{H}$ tales que*

$$\langle T^n v, w \rangle = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 7.12. *Conjetura 7.2 equivale a Conjetura 7.11.*

Demostración.

“Conjetura 7.2 \implies Conjetura 7.11”

Es consecuencia directa de los Lemas 7.8 y 7.9 anteriores, ya que dos vectores unitarios cualesquiera son $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustados para cierta sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

“Conjetura 7.11 \implies Conjetura 7.2”

Inmediato, pues toda contracción es f -ajustada para cierta función de crecimiento $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ y $\langle T^n v, w \rangle = 0$ equivale a que $\langle T^n v, w \rangle / \|T\|^n = 0$. \square

Abordemos ahora la tarea de “aportar finitud” a la dimensión del espacio \mathcal{H} . Para ello, denotando por $\mathbb{N}^\omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{N}^m$ al conjunto formado por todas las tuplas (finitas) de números naturales, se introduce el siguiente concepto de barrera.

Definición 7.13. Un conjunto formado por tuplas estrictamente crecientes $\mathbb{T} \subset \mathbb{N}^\omega$ se dice una barrera si:

- (i) toda sucesión estrictamente creciente de números naturales tiene un segmento inicial en \mathbb{T} ;
- (ii) ninguna tupla de \mathbb{T} tiene un segmento inicial propio en \mathbb{T} .

El concepto de barrera permite reformular un enunciado que involucra conceptos de dimensión infinita, como otro en el que solo aparecen conceptos finito-dimensionales (más información en [13]).

Ejemplo 7.14. Ejemplos de barreras son:

- (i) la colección formada por todas las 10-tuplas estrictamente crecientes (N_1, \dots, N_{10}) con $N_i \in \mathbb{N}$ para $1 \leq i \leq 10$;
- (ii) la colección formada por todas las tuplas estrictamente crecientes (N_1, \dots, N_m) con $N_i \in \mathbb{N}$ para $1 \leq i \leq m = N_1 + 1$;
- (iii) la colección formada por todas las 1-tuplas (N_1) de números naturales —esto es \mathbb{N} —.

Denotando al espacio finito-dimensional $\ell^2(\{1, \dots, N\}) \equiv (\mathbb{C}^N, d_2)$ como $\ell^2[N]$ y empleando los conceptos introducidos anteriormente, obtenemos la siguiente conjetura que involucra únicamente operadores definidos en un espacio de dimensión finita.

Conjetura 7.15. *Sea \mathbb{T} una barrera.*

Existe $n_ \in \mathbb{N}$ tal que para cada contracción f -ajustada $T: \ell^2[f(n_*)] \rightarrow \ell^2[f(n_*)]$ existe una tupla $(n_k)_{k=1}^m \in \mathbb{T}$ con $n_m < n_*$ y dos vectores $(f, (n_k)_{k=1}^m)$ -ajustados $v, w \in \ell^2[f(n_*)]$ tales que*

$$|\langle T^n v, w \rangle| \leq \frac{1}{f(n_m)}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq f(n_m).$$

Como veremos a continuación, la Conjetura 7.15 es equivalente a la Conjetura 7.11 anterior.

Teorema 7.16. *Conjetura 7.15 implica Conjetura 7.11.*

Demostración. Sea $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función de crecimiento dada y T una contracción f -ajustada.

Denotemos por \mathbb{T}' el conjunto formado por todas las tuplas crecientes $(n_k)_{k=1}^m \in \mathbb{N}^\omega$ para las que: no existen vectores $(f, (n_k)_{k=1}^m)$ -ajustados $v, w \in \ell^2$ satisfaciendo que

$$|\langle T^n v, w \rangle| \leq \frac{2}{m}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq m.$$

Sea $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}'$ el conjunto formado por todas las tuplas de \mathbb{T}' que no contienen un segmento inicial propio en \mathbb{T}' .

Etapa 1. Supongamos primero que \mathbb{T} no es una barrera.

Existe entonces una sucesión creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(n_k)_{k=1}^m \notin \mathbb{T}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por tanto, $(n_k)_{k=1}^m \notin \mathbb{T}'$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En efecto, pues si $(n_k)_{k=1}^1 = (n_1) \in \mathbb{T}'$, entonces, como la 1-tupla (n_1) no contiene un segmento inicial propio, $(n_1) \in \mathbb{T}$, contradiciendo que $(n_k)_{k=1}^m \notin \mathbb{T}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Análogamente, si $(n_1, n_2) \in \mathbb{T}'$, como $(n_1) \notin \mathbb{T}'$, (n_1, n_2) no contiene un segmento inicial propio, luego $(n_1, n_2) \in \mathbb{T}$, llegando a la misma contradicción. Por inducción se obtiene que $(n_k)_{k=1}^m \notin \mathbb{T}'$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Luego —por la definición de \mathbb{T}' —, para cada $m \in \mathbb{N}$, existen vectores $(f, (n_k)_{k=1}^m)$ -ajustados $v_m, w_m \in \ell^2$ tales que

$$|\langle T^n v_m, w_m \rangle| \leq \frac{2}{m}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq m. \quad (7.5)$$

En virtud ahora del Lema 7.9 anterior, existen subsucesiones $(v_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$ y $(w_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$ convergentes respectivamente a los vectores $(f, (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustados v y w .

En tal caso,

$$|\langle T^n v, w \rangle| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\langle T^n v_{m_j}, w_{m_j} \rangle| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{2}{m_j} = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

obteniéndose así la Conjetura 7.11.

Etapa 2. Supongamos ahora que \mathbb{T} sí es una barrera.

Sea $f': \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ una función de crecimiento más grande que f —es decir, $f(n) \leq f'(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ —; será escogida posteriormente. En tal caso, la contracción T , que es originalmente f -ajustada, también es f' -ajustada. Del mismo modo, la restricción $T|_N$ de la contracción T a cualquier subespacio finito dimensional $\ell^2[N]$, $N \in \mathbb{N}$, de ℓ^2 también es una contracción f' -ajustada.

Por hipótesis, existen: $n_* \in \mathbb{N}$, una tupla $(n_k)_{k=1}^{n_*} \in \mathbb{T}$ con $0 < n_1 < \dots < n_m < n_*$ y dos vectores $(f', (n_k)_{k=1}^{n_*})$ -ajustados $v, w \in \ell^2[f'(n_*)]$ tales que

$$|\langle T|_{f'(n_m)}^n v, w \rangle| \leq \frac{1}{f'(n_m)}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq f'(n_m).$$

Dado que $m \leq n_m \leq f(n_m) \leq f'(n_m)$, obtenemos en particular que

$$|\langle T|_{f'(n_m)}^n v, w \rangle| \leq \frac{1}{f'(n_m)} \leq \frac{1}{m}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq m. \quad (7.6)$$

Por otra parte, puesto que v y w son dos vectores $(f', (n_k)_{k=1}^{n_*})$ -ajustados, están casi en $\ell^2[n_m]$ salvo un error de $1/f'(n_{m-1})$ y, siempre que f' sea suficientemente grande,

$$\|T|_{f'(n_m)}^n v - T^n v\| < \frac{1}{m}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq m. \quad (7.7)$$

(Ver Lema 7.17 al final de la prueba y emplear la Proposición 5.13)

Luego, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo en cuenta (7.6)-(7.7),

$$\begin{aligned} |\langle T^n v, w \rangle| &= |\langle T^n v - T|_{f'(n_m)}^n v + T|_{f'(n_m)}^n v, w \rangle| \\ &\leq |\langle T^n v - T|_{f'(n_m)}^n v, w \rangle| + |\langle T|_{f'(n_m)}^n v, w \rangle| \\ &\leq \|T^n v - T|_{f'(n_m)}^n v\| + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq m. \end{aligned}$$

Por tanto, hemos llegado a que $(n_k)_{k=1}^{n_*} \notin \mathbb{T}$; luego \mathbb{T} no es una barrera y el resultado enunciado ya ha sido probado en la Etapa 1 anterior.

Lema 7.17. Para $n = 1$, la desigualdad enunciada en (7.7) es cierta.

Demostración. Si lo enunciado en (7.7) fuese falso, existiría entonces $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una contracción f -ajustada T_k y un vector unitario v^k de modo que

$$\sum_{i \geq n_m} |v_i^k|^2 \leq \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \|T_{k|k} v^k - T_k v^k\| \geq \varepsilon_0. \quad (7.8)$$

No obstante, las condiciones de ajustabilidad y la primera desigualdad de (7.8), nos permiten afirmar que —tomando una subsucesión—: $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente hacia una contracción T —luego la sucesión de restricciones $T_{k|k}$ también converge fuertemente hacia T — y que v^k converge hacia un vector unitario $v \in \ell^2[n_m]$. En tal caso, tendríamos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k v^k = \lim_{k \rightarrow \infty} T_{k|k} v^k = Tv,$$

hecho que contradice la segunda desigualdad de (7.8). □

□

Teorema 7.18. Conjetura 7.11 implica Conjetura 7.15.

Demostración. Supongamos que la Conjetura 7.15 es falsa.

Existe entonces una función de crecimiento $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ y una barrera \mathbb{T} tal que para todo $n_* \in \mathbb{N}$ existe una contracción f -ajustada $T_{n_*}: \ell^2[f(n_*)] \rightarrow \ell^2[f(n_*)]$ de modo que no existen ninguna tupla $(n_k)_{k=1}^{n_m} \in \mathbb{T}$ con $n_m < n_*$ y vectores $(f, (n_k)_{k=1}^{n_m})$ -ajustados $v', w' \in \ell^2[f(n_*)]$ satisfaciendo que

$$|\langle T_{n_*}^n v', w' \rangle| \leq \frac{1}{f(n_m)}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq f(n_m).$$

Para cada $n_* \in \mathbb{N}$, consideramos la extensión de la contracción f -ajustada T_{n_*} mediante ceros a un operador definido en todo $\mathcal{H} \equiv \ell^2$, operador que es una contracción f -ajustada. Tenemos luego que $(T_{n_*})_{n_* \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de contracciones f -ajustadas en \mathcal{H} . Así pues, en virtud del Lema 7.8 anterior, existe una sucesión de índices $(n_{*k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $n_{*k} \rightarrow \infty$ y $\|(T_{n_{*k}} - T)x\| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ para todo $x \in \mathcal{H}$, siendo $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ una contracción f -ajustada.

Por otra parte, en virtud de la Conjetura 7.11, existe una sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y dos vectores $(f', (n_k)_{k \in \mathbb{N}})$ -ajustados $v, w \in \ell^2$ tales que

$$\langle T^n v, w \rangle = 0, \quad \text{para todo } n \geq 0, \quad (7.9)$$

donde $f': \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ es una función de crecimiento más grande que f ; será fijada más adelante.

Dado que \mathbb{T} es una barrera, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que el segmento inicial $(n_k)_{k=1}^m$ de la sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es un elemento de \mathbb{T} . Además, basta escoger $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, para que se cumpla la condición $n_m \leq n_{*k}$.

Por otra parte, dado que $T_{n_{*k}} \rightarrow T$ fuertemente, la Proposición 5.13 nos permite afirmar que $T_{n_{*k}}^n \rightarrow T^n$ fuertemente para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, al ser todos los operadores involucrados contracciones, están uniformemente acotados y entonces —teniendo en cuenta (7.9)— para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$|\langle T_{n_{*k}}^n v, w \rangle| \leq \frac{1}{f'(n_m)}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq f(n_m). \quad (7.10)$$

Ahora restringimos los vectores v y $w \in \mathcal{H} \equiv \ell^2$ al espacio vectorial de dimensión finita $\ell^2[f(n_{*,k})]$ y los normalizamos para obtener así dos vectores unitarios v' y $w' \in \ell^2[f(n_{*,k})]$. Para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tenemos que

$$\|v - v'\| \leq \frac{1}{f'(n_m)} \quad \text{y} \quad \|w - w'\| \leq \frac{1}{f'(n_m)}; \quad (7.11)$$

además, si f' es suficientemente grande se tiene que los vectores v' y w' son $(f, (n_k)_{k=1}^m)$ -ajustados por (7.11).

Así pues, empleando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y teniendo en cuenta (7.10)–(7.11), llegamos finalmente a que, si $f': \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ es suficientemente grande, entonces

$$\begin{aligned} |\langle T_{n_{*k}}^n v', w' \rangle| &= |\langle T_{n_{*k}}^n (v' - v + v), (w' - w + w) \rangle| \\ &\leq |\langle T_{n_{*k}}^n (v' - v), (w' - w) \rangle| + |\langle T_{n_{*k}}^n v, w \rangle| \\ &\quad + |\langle T_{n_{*k}}^n (v' - v), w \rangle| + |\langle T_{n_{*k}}^n v, (w' - w) \rangle| \\ &\leq \|v' - v\| \|w' - w\| + |\langle T_{n_{*k}}^n v, w \rangle| \\ &\quad + \|v' - v\| + \|w' - w\| \\ &\leq \frac{1}{f'(n_m)^2} + \frac{3}{f'(n_m)} \leq \frac{1}{f(n_m)}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq f(n_m), \end{aligned}$$

contradiciendo así la falsedad de lo asumido inicialmente. \square

Corolario 7.19. *Conjetura 7.11 equivale a Conjetura 7.15.*

7.1.1. Algunos casos particulares

A continuación, obtendremos enunciados particulares de la Conjetura 7.15, es decir, problemas más débiles que el Problema del Subespacio Invariante.

Escojamos $f(n) = n + 2$ como función de crecimiento y $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ como barrera. Conviene luego observar, que si la matriz de coeficientes de una contracción $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es tridiagonal entonces T es f -ajustada. Sin embargo, el recíproco de tal enunciado no es cierto; pues que T sea f -ajustada tan sólo exige que el “peso de los valores” de la matriz de coeficientes $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ se concentre en su triadiagonal, pero no es necesario que $a_{ij} = 0$ para $|i - j| > 1$.

Conjetura 7.20 (Caso particular I).

Existe $n_ \in \mathbb{N}$ tal que para cada contracción tridiagonal $T: \ell^2[n_* + 2] \rightarrow \ell^2[n_* + 2]$ existe $m \in \mathbb{N}$, $0 < m < n_*$, y dos vectores unitarios $v, w \in \ell^2[n_* + 2]$ tales que*

$$\sum_{i \geq m} |v_i|^2 \leq \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i \geq m} |w_i|^2 \leq \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{2}$$

y

$$|\langle T^n v, w \rangle| \leq \frac{1}{f(m)} = \frac{1}{m + 2}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq f(m) = m + 2.$$

Como toda contracción f -ajustada es f' -ajustada para cualquier función de crecimiento $f' \geq f$, podemos reformular la Conjetura 7.20 del siguiente modo:

Conjetura 7.21 (Caso particular II). *Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.*

Existe $n_ \in \mathbb{N}$ tal que para cada contracción tridiagonal $T: \ell^2[f'(n_*)] \rightarrow \ell^2[f'(n_*)]$ existe $m \in \mathbb{N}$, $0 < m < n_*$, y dos vectores unitarios $v, w \in \ell^2[f'(n_*)]$ tales que*

$$\sum_{i \geq m} |v_i|^2 < \varepsilon \text{ “} = 1/f'(0)\text{”} \quad y \quad \sum_{i \geq m} |w_i|^2 < \varepsilon \text{ “} = 1/f'(0)\text{”}$$

y

$$|\langle T^n v, w \rangle| \ll \varepsilon \text{ “} = 1/f'(m)\text{”}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq f'(m).$$

Nota 7.22. La Conjetura 7.21 expresa que, fijado $\varepsilon > 0$, existe $N_*(= f'(n_*)) \in \mathbb{N}$ tal que para toda contracción tridiagonal en $\ell^2(N_*) \equiv \mathbb{C}^{N_*}$ existen dos vectores unitarios “localizados” en \mathbb{C}^m —salvo un error de ε — tal que la órbita de uno de ellos es “esencialmente ortogonal” al otro durante un largo período de tiempo ($f'(m)$) mucho mayor que el grado de localización de dichos vectores.

Por ser $T: \ell^2[N_*] \rightarrow \ell^2[N_*]$ un operador en el espacio de dimensión finita $\ell^2[N_*]$, tenemos garantizada la existencia de autovectores, pero no así que estén “localizados” en \mathbb{C}^m .

Partiendo ahora de una contracción (definida en todo ℓ^2), nos preguntamos si existe algún número natural de forma que se verifique la condición de la Conjetura 7.21 anterior.

Conjetura 7.23 (Caso particular III). *Sea $\varepsilon > 0$ y $N_* \in \mathbb{N}$ dados.*

Dada una contracción tridiagonal $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$, existe $n_ \in \mathbb{N}$, $n_* < N_*$, y dos vectores unitarios $v, w \in \ell^2$ tales que*

$$\sum_{i \geq n_*} |v_i|^2 < \varepsilon \quad y \quad \sum_{i \geq n_*} |w_i|^2 < \varepsilon$$

y

$$|\langle T^n v, w \rangle| \leq \frac{1}{N_*}, \quad \text{para todo } 0 \leq n \leq N_*.$$

Nota 7.24. La Conjetura 7.23 es una consecuencia inmediata de la Conjetura 7.2 y viene a decir que, dada una contracción tridiagonal $T: \ell^2 \rightarrow \ell^2$ y $\varepsilon > 0$, existen $n_* \in \mathbb{N}$ y dos vectores unitarios “localizados” en \mathbb{C}^{n_*} tales que la órbita de uno de ellos es “esencialmente ortogonal” al otro durante un largo período de tiempo $N_* > n_*$.

Según T. Tao, las dos últimas conjeturas tampoco parecen fáciles; no obstante, podrían ser útiles a la hora de buscar un operador sin subespacios invariantes no triviales.

7.2. Timothy Gowers

William Timothy Gowers (1963-) es un matemático británico especializado en análisis funcional y combinatoria. Actualmente, desempeña su labor investigadora en la Universidad de Cambridge (Reino Unido), donde realizó su tesis doctoral —titulada *Estructuras simétricas en espacios de Banach*— bajo la dirección del matemático de origen húngaro Béla Bollobás. Posteriormente, ha sido galardonado con numerosos premios,



T. Gowers

como —por ejemplo— el Premio de la Sociedad Europea de Matemáticas o la Medalla Fields (en 1998) por combinar de forma fructífera el desarrollo del análisis funcional a través de métodos combinatorios para probar el problema del subespacio homogéneo (abierto hasta 1996, ver [22]).

A continuación, explicaremos un resultado relacionado con el Problema del Subespacio Invariante que —según dice T. Gowers— constituye uno de los avances más significativos en la teoría de espacios de Banach de los últimos años. Los comentarios que siguen están basados en una entrada publicada en “Gower’s Weblog” y en los comentarios en Mathscinet sobre [22].

Como ya se ha mencionado en la introducción, uno de los problemas que surge al estudiar el Problema del Subespacio Invariante es que el espacio de operadores $\mathcal{B}(\ell^2)$ es no separable. Evidentemente, dado un espacio funcional X , cuanto más grande y diverso sea el espacio de operadores $\mathcal{B}(X)$, más difícil resulta estudiarlo. Es por ello que, con el afán de obtener espacios de Banach “sencillos”, algunos matemáticos contemporáneos se han esforzado por construir espacios de Banach “con pocos operadores”; es decir, espacios de Banach X en los que el espacio $\mathcal{B}(X)$ sea —en cierto sentido— “pequeño.”

Gowers y Maurey [23] construyeron un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ en el que todo operador lineal y acotado $T \in \mathcal{B}(X)$ es de la forma $T = \lambda I + S$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y S un operador estrictamente singular. Es decir, todo operador $T \in \mathcal{B}(X)$ es la suma de un operador escalar y un operador estrictamente singular.

Un operador S se dice singular si para todo subespacio $Y \subset X$ de dimensión no finita y todo $\varepsilon > 0$ existe un vector unitario $y \in Y$ tal que $\|Sy\|_X < \varepsilon$. En espacios de Hilbert, estrictamente singular equivale a compacto. No obstante, en espacios de Banach, todo operador compacto es estrictamente singular, pero el recíproco no es cierto.

Así pues, la pregunta formulada por Gowers y Maurey surge de modo natural: ¿será cierto que todo operador $T \in \mathcal{B}(X)$ es suma de un operador escalar más un operador compacto? Años más tarde, Androulakis y Schlumprecht [14] probarían que el espacio de Banach X contiene operadores estrictamente singulares que no son compactos.

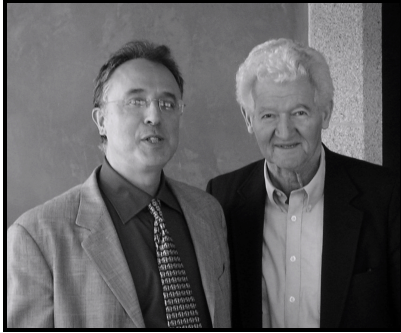
Recientemente, Argyros y Haydon [15] construyeron un espacio de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ en el que todo operador $T \in \mathcal{B}(Z)$ es de la forma $T = \lambda I + K$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y K un operador compacto. Es decir, todo operador $T \in \mathcal{B}(Z)$ es la suma de un operador escalar y un operador compacto.

Por tanto, todo operador $T \in \mathcal{B}(Z)$ admite un subespacio invariante no trivial. En efecto, pues si $T = \lambda I + O$, entonces todo subespacio cerrado $Y \subseteq Z$ es invariante y si $T = \lambda I + K$, con $K \neq 0$, entonces T conmuta con K , luego —en virtud del Teorema de Lomonosov— T admite un subespacio invariante no trivial. Es decir, todo operador lineal y acotado en el espacio de Banach Z —espacio funcional al que T. Gowers denomina como “*el más asqueroso*”— admite un subespacio invariante no trivial, lo cual muestra:

- i*) un primer (y hasta la fecha único) ejemplo de espacio de Banach de dimensión no finita en el que todo operador lineal y acotado tiene subespacios invariantes no triviales;
- ii*) que el resultado probado por P. Enflo mencionado en el Capítulo 1 no es válido para todo espacio de Banach.

7.3. Peter Lax

Peter David Lax (1926-) es un matemático húngaro nacionalizado estadounidense. A de hoy, es profesor honorífico en la Universidad de Nueva York, a donde llegó con 14 años para acabar siendo uno de los *marcianos* —apelativo cómico con el que algunos se referían al grupo de prominentes científicos húngaros que habían llegado EE.UU. tras los conflictos bélicos propiciados por la Segunda Guerra Mundial en Centroeuropa—.



El Prof. Juan J. Nieto junto con el Prof. P. Lax en Santiago de Compostela en 2007.

Sus investigaciones en análisis funcional han tenido gran impacto en diversas áreas de la matemática: ecuaciones diferenciales, ciencias de la computación, sistemas dinámicos o física matemática entre otras. Mención especial merece el Lema de Lax-Milgram —estudiado en la materia *Análisis funcional en espacios de Hilbert*—, que aplica propiedades de operadores bilineales en espacios de Hilbert al estudio de ecuaciones en derivadas parciales.

Ampliamente laureado, entre los premios que ha recibido cabe mencionar el Premio Wolf de Matemáticas (en 1987) y el Premio Abel (en 2005) por sus contribuciones a la matemática aplicada.

En su obra *Functional Analysis*, dedica un capítulo entero a discutir el Problema del Subespacio Invariante; se prueban allí ciertos resultados parciales conocidos. Sin embargo, resulta especialmente curiosa la siguiente frase:

“It is in particular an open question if there are irreducible (i.e. sin subespacios invariante no triviales) operators in Hilbert space, and it is an open question whether this question is interesting”,

que aparece justo al final del capítulo —ver [25, p. 282]—.

7.4. Jesús M. F. Castillo

Históricamente, el Problema del Subespacio Invariante ha sido concebido como un resultado teórico sobre espacios de Hilbert cuya resolución permitiría conocer mejor esta estructura matemática; sin embargo, según algunos autores, ello no se plantea como algo capital dentro del análisis funcional en espacios de Hilbert; pues existen otros problemas abiertos en esta área que —en principio— no estarían relacionados con el Problema del Subespacio Invariante.

Cabría por otra parte pensar, que la estructura del universo —identificado en un espacio de Hilbert— se encuentra en los elementos fijos, estáticos o invariantes del mismo; esto es —en cierto modo—, en los subespacios invariantes.

El profesor de la Universidad de Extremadura Jesús M.F. Castillo publicó recientemente un interesante artículo en la Gaceta Matemática de la Real Sociedad Matemática Española titulado “Análisis funcional en la antigua Grecia” [2]; su lectura atenta motivó nuestro interés por la opinión personal del autor, quien a mi cuestión



El Prof. Castillo en el “Café Escocés” de la ciudad de ucraniana de Lviv.

[*dado que su resolución permitiría aprehender la estructura de un espacio de Hilbert (universo),] considera usted el Problema del Subespacio Invariante como una cuestión capital en el análisis funcional?*

respondió:

Aprehender la estructura del espacio de Hilbert es importante. Es una construcción magnífica que nos permite entender grandes porciones del universo (y de las matemáticas). El Problema del Subespacio Invariante es importante y nos ayuda a entender esa estructura. Estate preparado para que una solución diga: bajo la Hipótesis del continuo, sí; bajo el axioma de Martin, no; y, hala, ya tienes otra puerta abierta a un nuevo pozo sin fondo. Y aun si me pones debajo de las narices una solución completa, seguiría habiendo problemas esenciales vivos sobre la estructura “espacio de Hilbert” (no digamos de la teoría de espacios de Banach, del análisis funcional, del análisis, de las matemáticas, de la ciencia, . . . , hasta llegar a . . . de la comprensión del universo).

Con lo cual, pese a la importancia histórica y matemática que tendría resolver un problema de estas características, conviene no ser demasiado optimista respecto de las consecuencias que implicaría una hipotética solución (afirmativa o negativa).

7.5. Eva Gallardo

La profesora Eva Gallardo —actualmente en la Universidad Complutense de Madrid— ha estado trabajando durante los últimos años en el Problema del Subespacio Invariante. Recientemente, en junio de 2017, impartió una interesante conferencia en el Centre International de Rencontres Mathématiques (Luminy–Marsella, Francia) —ver [3]—. Al final de la misma, le preguntan su opinión personal sobre el problema, a lo que ella respondió:

“I’am a positive person, so I believe it is true that every linear bounded operator has a non-trivial closed invariant subspace in the Hilbert space setting. But if you let me say something else, I was very fortunate because I worked with Charles Read, who passed away two years ago unexpectedly, and long time ago I asked him, what do you think about the invariant subspace problem? He was a really great guy constructing counterexamples, and probably he knew his counterexample was better than any other in the world. And he said: It is true, because I was not able to construct a counterexample. That probably sounds very arrogant in some sense, but what it is true is that he was trying to find counterexamples so hard. He knew all the tools in the separable Banach space setting, and I believe that was the right answer in some sense. So, basically, I believe that it is true and the basic problem we face —and this is probably a big community in that sense— is that we don’t really understand operators in Hilbert spaces. We only understand very very few of them —even linear bounded operators, because here I know people who like unbounded ones— in terms of invariant subspaces and that’s the basic [problem] we have here.



El Prof. C. Cowen y la Profa. E. Gallardo en Santiago de Compostela en 2013.

Bibliografía

Bibliografía básica

- [1] Bombal, F., *Análisis Funcional: una perspectiva histórica*, Proceedings of the Seminar of Mathematical Analysis (2003), Universidad de Sevilla, 81–117.
- [2] Castillo, J. M. F., *Análisis funcional en la antigua Grecia*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **22** (2019), 39–59.
- [3] Gallardo, E. The invariant subspace problem: a concrete operator theory approach. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=pwy1PiC8RFo> (Consultado por última vez en julio de 2019)
- [4] Gohber, I., Goldbberg, S. y Kaashoek, M., *Basic classes of linear operators*, Birkhäuser, 2003.
- [5] Halmos, P., *A Hilbert Space Problem Book*, 2ª Ed. Springer-Verlag, 1982.
- [6] Kubrusly, C. S., *Hilbert Space Operators: A Problem Solving Approach*, Birkhäuser, 2003.
- [7] Kubrusly, C. S., *An Introduction to Models and Decompositions in Operator Theory*. Springer, 1997.
- [8] López, M., *El problema del subespacio invariante*, Miscelánea Matemática **58** (2014), 111–121.
- [9] Radjavi, H. y Rosenthal, P., *Invariant subspaces*, 2ª Ed., Dover Publications, 2003.
- [10] Reale, G. y Antiseri, D., *Historia del pensamiento filosófico y científico, I. Antigüedad y Edad Media*, Herder, 1991.
- [11] Sokal, A.D., *A Really Simple Elementarys Proof of the Uniform Boundedness Theorem*, The American Mathematical Monthly **118**:5 (2011), 450–452.
- [12] Tao, T., *Compactness and Contradiction*. American Mathematical Society, 2013.
- [13] Tao, T., Is there a name for a family of finite sequences that block all infinite sequences? In MathOverflow. Disponible en: <https://mathoverflow.net/questions/29676/> (Consultado por última vez en julio de 2019)

Bibliografía complementaria

- [14] Androulakis, G. y Schlumprecht, T., *Strictly singular non-compact operators exist on the space of Gowers-Maurey*, Journal of the London Mathematical Society **64** (2001), 655–674.
- [15] Argyros, S. A. y Haydon, R. G. *A hereditarily indecomposable L_∞ -space that solves the scalar-plus-compact problem*, Acta Mathematica **206**:1 (2011), 1–54.
- [16] Aronszajn, N. y Smith, K., *Invariant subspaces of completely continuous operators*, Annals of Mathematics **60**:2 (1954), 345–350.
- [17] Arveson, W. B. y Feldman, J., *A note on invariant subspaces*, Michigan Mathematical Journal **15** (1968), 61–64.
- [18] Banach, S. y Steinhaus, H., *Sur le principe de la condensation de singularités*, Fundamenta Mathematicae **9.1** (1927), 50-61.
- [19] Beauzamy, B., *Un opérateur sans sous-espace invariant: simplification de l'exemple de P. Enflo*, Integral Equations and Operator Theory **8**:3 (1985), 314-384.
- [20] Enflo, P., *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Mathematica **130** (1973), 309-317.
- [21] Enflo, P., *On the invariant subspace problem in Banach spaces*, Séminaire Maurey Schwartz (1975-1976) espaces ℓ^p , applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, École Polytechnique, Palaiseau, 1976.
- [22] Gowers, W. T., *A new dichotomy for Banach spaces*, Geometric & Functional Analysis **6** (1996), 1083–1093.
- [23] Gowers, W. T. y Maurey, B., *The unconditional basic sequence problem*, Journal of the American Mathematical Society **6** (1993), 851–874.
- [24] Hadwin, D. W., Nordgren, E. A., Radjavi, H. y Rosenthal, P., *An operator not satisfying Lomonosov's hypothesis*, Journal of Functional Analysis **38**:3 (1980), 410–415.
- [25] Lax, P., *Functional Analysis*, Wiley-Interscience, 2002.
- [26] Lomonosov, V. I., *Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator*, Funkcional. Anal. i Priloen. **7**:3 (1973), 55–56.
- [27] López-Pouso, R., *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales. Una introducción con Maple y ejercicios resueltos*, Universidad de Santiago de Compostela, 2019.
- [28] Read, C. J., *A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1* , Bulletin of the London Mathematical Society **17** (1985), 305–317.
- [29] Bernstein, A. R. y Robinson, A., *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*, Pacific Journal of Mathematics **16** (1966), 421–431.
- [30] Rudin, W., *Real and complex analysis*, 3^a Ed., McGraw-Hill, 1987.