



ESCUELA DE DOCTORADO INTERNACIONAL
DE LA USC

Alejandro Omar
Majadas Moure

Tesis doctoral

Étude et applications du nombre de
Lefschetz

Santiago de Compostela, 2026



ESCOLA DE DOUTORAMENTO
INTERNACIONAL DA USC

TESIS DOCTORAL

Étude et applications du nombre de Lefschetz

Autor

Alejandro Omar Majadas Moure

Directores: Jesús Antonio Álvarez López et David Mosquera Lois

Tutor: Jesús Antonio Álvarez López

PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE COMPOSTELA - 2026



Les résultats dans cette thèse ont été obtenus grâce à la bourse prédoctorale de la Xunta de Galicia – Consellería de Cultura, Educación e Universidade, bourse ED481A-2024-230. L’auteur a aussi profité des subventions du Ministerio de Ciencia e Innovación et de l’Axencia Estatal de Investigación sous le projet *Teoría de Morse, Topología, análisis y dinámica*, grant no. PID2020-114474GB-I00, et la Xunta de Galicia, sous le programme *Grupos de Referencia Competitiva*, bourse no. ED431C 2023/31.

L’auteur déclare qu’il n’y a pas de conflits d’intérêts en lien avec cette thèse de doctorat.



Aux grands hommes, la mémoire reconnaissante.

Remerciements

En premier lieu, bien entendu, je voudrais commencer par remercier mes directeurs, David et Suso, de toute leur aide à l'heure de réaliser cette thèse. Merci pour votre soutien, non seulement en mathématiques, mais aussi en ce qui concerne le monde de l'université.

J'aimerais aussi remercier Chris Staecker de m'avoir accueilli à Fairfield pendant mon séjour scientifique et de m'avoir aidé avec tout dont j'avais besoin. Merci aussi à Michael Kelly de m'avoir aidé à comprendre mieux les bornes de l'indice.

Merci à Lucile pour ses commentaires concernant ce mémoire et aux membres du jury d'avoir accepté être partie du même.

Merci aussi à mes collègues de bureau pour tout le bon temps partagé. Isaac, Raúl, Samuel, merci.

Mes parents et ma partenaire Mencía, la femme de ma vie, méritent aussi une place dans ces remerciements. Ils m'ont soutenu pendant ce temps. Définitivement, merci.

Finalement, je dois remercier tous les mathématiciens et les grands penseurs qui ont établi les mathématiques que j'ai retrouvé au début de la thèse et qui ont fait grandir l'humanité.

Table des matières

Publications incluses dans cette thèse	vii
Résumé	viii
Résumé : Resumo da Tese de Doutoramento (en galicien)	ix
Introduction	1
Hypothèses et Objectifs	4
Méthodologie Générale	6
Résultats et discussion	7
0 Préliminaires	7
0.1 Concepts Généraux	7
0.2 Éléments de la Théorie des Points Fixes	10
0.3 Structures o-Minimales et Ensembles Définissables	16
0.4 Théorie de Faisceaux	19
1 Le Nombre de Lefschetz Combinatoire	23
1.1 Définition du nombre de Lefschetz combinatoire	24
1.2 Le nombre de Lefschetz combinatoire est bien défini	27
1.3 L'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire et un théorème de points fixes	30
2 Invariance Topologique du Nombre de Lefschetz Combinatoire	34
2.1 Le Nombre de Lefschetz dans le langage de Faisceaux	35
2.1.1 Un premier résultat d'invariance topologique	40
2.2 L'indice combinatoire et un nouveau résultat d'invariance	43

Table des matières

2.3	L'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire . . .	49
2.4	Le nombre de Lefschetz combinatoire pour des applications ouvertes	53
3	Intégration par rapport au nombre de Lefschetz	60
3.1	Intégration par rapport au Nombre de Lefschetz Combinatoire . . .	61
3.2	Applications de l'Intégrale dans la Théorie de Faisceaux	70
3.2.1	Fonctions \mathbb{N} -constructibles et faisceaux constructibles . . .	71
3.2.2	Fonctions \mathbb{Z} -constructibles, complexes de faisceaux et règle de Barrow.	76
3.3	Une Intégrale par rapport à l'Indice de Point Fixe	77
3.4	Une Intégrale de Fonctions Réelles par rapport à l'Ensemble des Points Fixes	82
4	Autres Applications	87
4.1	Axiomes	88
4.1.1	Axiomes pour le nombre de Lefschetz combinatoire	89
4.1.2	Axiomes pour le nombre de Lefschetz faisceau-théorique . .	91
4.1.3	Nouveaux Axiomes pour le Nombre de Lefschetz	95
4.2	Quelques exemples	98
4.3	Un Théorème d'Invariance Topologique de l'Indice de Point Fixe . .	107
4.4	Applications pratiques	108
4.5	Un Théorème de Point Fixe pour des Espaces non Bornés	109
4.5.1	L'importance de nouvelles bornes	121
	Conclusions	127
	Références	128
	Politique de réutilisation de l'éditeur	133

Publications incluses dans cette thèse

Cette thèse contient une reproduction totale ou partielle de la publication suivante :

[55] 1. A. O. Majadas-Moure, 2. D. Mosquera-Lois. Integration with respect to the Lefschetz number, *J. Fixed Point Theory Appl.* **27** (2) (2025) 51-23 pp.

Titre : Integration with respect to the Lefschetz number.

Year : 2025

Auteur 1 : Alejandro Omar Majadas Moure. CITMAga – Departamento de Matemáticas, Universidade de Santiago de Compostela.

Auteur 2 : David Mosquera Lois. Departamento de Matemáticas, Universidade de Vigo.

Journal : Journal of Fixed Point Theory and Applications

DOI : <https://doi.org/10.1007/s11784-025-01204-4>

Éditorial : Springer

ISSN : 0022-4049 (Print), 1873-1376 (Online)

Indexes de qualité : JCR Mathematics, Facteur d'impact : 1.1, 218/490 (Q1), 2024.

Chapitres correspondants : 1, 2

Contribution de l'étudiant de doctorat : Essentiel. Le candidat a pris partie dans le dessin de la recherche, le développement des démonstrations et l'analyse subséquent des résultats, aussi bien que la rédaction du travail.

Résumé

Dans cette thèse, on définit le nombre de Lefschetz combinatoire, un outil qui permettra de trouver des points fixes d'applications entre complexes simpliciaux dans des situations où le théorème classique du point fixe Lefschetz n'en peut pas.

Un point de spécial intérêt sera l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire, laquelle on démontre dans cette thèse. Celle-ci aura des implications très pertinentes, comme, par exemple, une nouvelle ensemble d'axiomes pour le nombre de Lefschetz classique, un nouveau théorème d'invariance topologique pour l'indice de point fixe ou, le plus important, plusieurs théorèmes de point fixe dans des espaces non bornés et une stratégie pour simplifier notamment les calculs du nombre de Lefschetz.

On définit aussi plusieurs intégrations par rapport au nombre de points fixes d'une application entre complexes simpliciaux, dont on obtient une application pratique dans le contexte du comptage d'objets en utilisant des capteurs, et on simplifie les calculs du nombre de Lefschetz avec des faisceaux.

Résumé : Resumo da Tese de Doutoramento (en galicien)

Dende o xordemento da topoloxía alxébrica, a teoría topolóxica de punto fixo xogou un papel moi destacable dentro dunha rama das matemáticas de maior importancia. Comezando polos traballos de Hopf, Lefschetz e Nielsen, durante xa cen anos, a teoría topolóxica de punto fixo conseguiu proporcionar certos resultados de gran interese e utilidade nas demáis ramas das matemáticas.

Unha ferramenta imprescindible dentro da teoría topolóxica de punto fixo é o número de Lefschetz. Iste é un invariante topolóxico que permite detectar puntos fixos en aplicacións dun complexo simplicial compacto. No caso de espazos non compactos, a existencia dun teorema de punto fixo de Lefschetz segue sendo unha incógnita. Polo momento, sábese que, en xeral, tal teorema non pode existir. Porén, cando certas hipótesis de compacidade son requeridas para as aplicacións (por exemplo, ser compactas, CAC ou condensantes), pódense obter algúns teoremas de punto fixo.

Nesta tese, preséntase unha ferramenta innovadora dentro da teoría de punto fixo: o número de Lefschetz combinatorio. Este pode ser considerado á vez como unha xeralización do número de Lefschetz clásico e o número de Lefschetz relativo dun par de espazos topolóxicos. Os dous pilares clave dentro da relevancia deste número combinatorio son un teorema de punto fixo para espazos non necesariamente compactos pero acotados e a súa invariancia topolóxica (en absoluto trivial). Deste xeito, ademáis de obter un novo teorema de punto fixo para espazos non compactos, podemos simplificar sobremaneira os cálculos usuais do número de Lefschetz. Son tamén consecuencias desta invariancia unha nova fórmula de invariancia topolóxica para o número de Lefschetz relativo dun par de espazos e unha xeralización do resultado clásico de invariancia topolóxica do índice de punto fixo. Finalmente, unha nova axiomática para o número de Lefschetz clásico pode ser obtida como consecuencia desta invariancia topolóxica. Concretamente, a invariancia topolóxica do número de Lefsch-

chetz combinatorio implica o axioma de cofibración de [4] no caso das aplicacións abertas. Ademáis, se as aplicacións son homeomorfismos, a invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio implica tamén o axioma de valor inicial. Deste xeito, no caso de homeomorfismos, poderíamos restrinxir os catro axiomas clásicos de [4] a soamente tres:

- Axioma de invariancia homotópica.
- Axioma de conmutatividade.
- Invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio.

Fora desta línea máis focalizada na teoría clásica de punto fixo, na presente tese de doutoramento prestamos tamén atención á obtención de diversas integrais con respecto aos puntos fixos. Así, empregamos o número de Lefschetz combinatorio para definir unha integral con respecto ao número de Lefschetz. Esta integral satisfará algunhas boas propiedades, como, por exemplo, un teorema de Fubini. Asemesmo, é posible a implementación desta integral nun método computacional no ámbito de detección de obxectos e/ou persoas por medio de redes de sensores. Neste sentido, se un edificio está dotado dun número suficiente de sensores de detección de obxectos, será posible, mediante o número de Lefschetz combinatorio e a súa integral contar o número de tales obxectos que hai no espazo, tendo en conta que máis dun sensor pode detectar eventualmente o mesmo obxecto. A segunda integral que obtemos neste traballo é unha integral con respecto ao índice de punto fixo. A ventaxe desta nova integral sobre a anterior é que a cantidade de aplicacións ás que se pode aplicar é significativamente maior, xa que ditas aplicacións non teñen por que preservar os espazos con respecto aos cales integramos, senón que é suficiente con que non teñan puntos fixos na fronteira dos mesmos. Novamente, un teorema de Fubini respalda o bo comportamento desta nova integral. Finalmente, integrando tamén respecto ao índice de punto fixo, é posible obter sumas superiores e inferiores de funcións con imaxe real con respecto a aplicacións dun complexo simplicial compacto. A integral non ten por que estar ben definida.

Un último punto que se desenvolve neste traballo é o estudo do número de Lefschetz na linguaxe de feixes. Neste sentido, a integral que definimos con respecto ao número de Lefschetz combinatorio permitirá calcular dun xeito algorítmico os números de Lefschetz de certas aplicacións e feixes. Compre destacar que neste aspecto é tamén importante a obtención dunha boa definición de número de Lefschetz na linguaxe de feixes, xa que a existente carece de boas propiedades para os obxetivos deste traballo. De feito, a elección da nosa nova definición de número de Lefschetz en feixes virá respaldada por unha construción axiomática que recorda á de [4] no contexto da teoría clásica de punto fixo máis que se presenta dunha maneira máis breve

que facilita a súa comprensión.

Capítulo 0

Este capítulo da tese consiste nun breve repaso e introdución das ferramentas fundamentais que terán un uso reiterado ao longo da tese. Deste xeito, dedicamos unha primeira sección a recordar algún conceptos xerais e básicos da topoloxía alxébrica. Símplices, complexos simpliciais e aplicacións simpliciais son definidas nesta sección. Asemesmo, recordamos con certo detalle como unha aplicación entre complexos simpliciais pode ser aproximada salvo homotopia por unha aplicación simplicial (teorema de aproximación simplicial) e a importancia que esto conleva. O teorema de punto fixo de Lefschetz, pilar básico dentro da topoloxía alxébrica, tamén é presentado nesta sección.

Logo dunha primeira sección de carácter básico e que busca máis ben recordar que ilustrar, seguen outras tres seccións nas que, polo contrario, definimos algunhas das ferramentas máis importantes que se empregarán na tese. Deste xeito, comezaremos por introducir os puntos fundamentais da teoría de punto fixo. Os ANR, a razón pola cal son tan útiles na teoría topolóxica de punto fixo (teorema de dominancia), o índice de punto fixo, o cal presentamos na súa versión axiomática (axiomas de localización, invariancia homotópica, aditividade, normalización e conmutatividade), o teorema de punto fixo do índice de punto fixo ou a regra do produto do índice son algúns dos conceptos e resultados que presentamos. Tamén introducimos brevemente as aplicacións compactas, as CAC e as aplicacións condensantes, así como algunhas boas propiedades do número de Lefschetz.

A esta parte, seguiralle outra sección dedicada as estruturas o-minimais, ou espazos definibles, que é a linguaxe na que enunciaremos todos os nosos resultados ao longo da tese. Na práctica, un espazo definible será un espazo homeomorfo a unha unión de caras abertas dun complexo simplicial. Xogaremos con que cada unión finita de espazos definibles pode ser triangulada por un complexo simplicial xeralizado (teorema de triangulación definible).

Na última sección nos centraremos en presentar os conceptos e resultados básicos da teoría de feixes, a cal estará presente ao longo da tese de maneira reiterada. As nocións de feixe asociado, imaxe directa ou inversa dun feixe e cohomoloxía de feixes son introducidas nesta parte. Tamén prestamos especial atención aos feixes constantes, localmente constantes e construíbles, os cales constituirán o obxecto do

noso traballo.

Capítulo 1

Este capítulo da tese ten por obxectivo introducir o número de Lefschetz combinatorio. O primeiro desafío à hora de traballar con este invariante é a súa propia definición. Alén de atopar unha boa maneira de definir dito número, un paso relativamente complicado consiste en demostrar que está ben definido, é dicir, que a definición non depende nin da triangulación nin da aproximación simplicial empregadas na definición de número de Lefschetz combinatorio. Isto constitúe a maior parte da extensión do segundo capítulo. As técnicas empregadas en ambas demostracións son nos dous casos as mesmas. Combínase un método de descenso dimensional (posible en topoloxía combinatoria) ao mesmo tempo que, o teorema de aproximación de Hopf permite igualar algúns termos que van aparecendo nas igualdades das que se deducirá que o número de Lefschetz combinatorio está ben definido.

Ademáis, é precisamente neste capítulo onde se obtén un primeiro resultado de punto fixo en espazos non compactos, o Teorema 1.3.2. O enunciado é o seguinte:

Teorema. *Sexa X un complexo simplicial compacto e $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo. Sexa $U \subset X$ un subespazo definible e f -invariante ($f(U) \subset U$). Se o número combinatorio de f en U relativo a X é distinto de cero, entón f ten un punto fixo na clausura de U .*

A importancia deste primer resultado é crucial. Significa que os espazos nos que aplicamos o teorema de punto fixo de Lefschetz xa non precisan ser compactos, senón que agora é suficiente con que estean contidos dentro dun compacto e sexan f -invariantes para o homeomorfismo f co que esteamos a traballar. Isto aumenta enormemente o número de posibilidades coas que podemos atopar probas da existencia de puntos fixos. De feito, neste mesmo capítulo, compre tamén destacar a construción dun exemplo no que é enfatizada a conveniencia do emprego do número de Lefschetz combinatorio en lugar do número de Lefschetz clásico á hora de atopar e contar o número de puntos fixos dunha aplicación. Deste xeito, nunha aplicación tan sinxela como unha reflexión da esfera (con número de Lefschetz clásico cero -e, en consecuencia, onde o teorema clásico de punto fixo non aplica), podemos atopar subespazos definibles que vaian tendo un número de Lefschetz combinatorio cada vez maior que aproxime así mellor o número de puntos fixos (todo o ecuador, e, por tanto, infinito). Isto demostra que, mesmo se hai moitos casos no que non é posible atopar puntos fixos co número de Lefschetz clásico, con frecuencia pódese

atopar algún subconxunto onde o número de Lefschetz combinatorio poida garantir a existencia dalgún punto fixo, pero tamén que, mesmo cando ambos teoremas poden ser aplicados, o do número de Lefschetz combinatorio pode conducir a unha mellor idea do número de puntos fixos da aplicación.

Capítulo 2

No Capítulo 2, lévanse a cabo dúas aportacións esenciais nesta tese. Por un lado, preséntase o estudo realizado ao longo dos últimos tres anos ata chegar a demostrar a invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio e, por outro, xeralízase a definición de número de Lefschetz combinatorio a aplicacións abertas (e non soamente homeomorfismos, coma no caso do capítulo anterior).

Desde xeito, a primeira parte do capítulo divídese en tres seccións.

Na Sección 2.1, comezamos por definir un número de Lefschetz adecuado no contexto de feixes. Sendo X e Y espazos topolóxicos, $f : X \rightarrow Y$ unha aplicación continua e \mathcal{F} un feixe en Y , f induce unha aplicación entre a cohomoloxía do feixe \mathcal{F} e a da súa imaxe inversa por f . Porén, estes dous feixes non teñen por que ser isomorfos. Afortunadamente, é posible demostrar que o son no caso de que \mathcal{F} sexa un feixe constante. Agora, como os feixes construíbles son en certo modo localmente constantes, para algúns deles poderemos definir un feixe asociado como a suma das súas componentes constantes extendidas por cero e este feixe asociado si será isomorfo á súa imaxe inversa por f . Demostrar dunha maneira rigurosa este feito constitúe a primeira parte da subsección. A continuación, próbase un resultado que resulta, en certo modo, asombroso, pois mesmo se as súas hipóteses son algo restrictivas, pon de manifesto a relación que hai entre un invariante combinatorio como o número de Lefschetz combinatorio e outros números de Lefschetz definidos en linguaxe homolóxica. Así, baixo certas hipóteses, o que nos dirá este teorema é que o número de Lefschetz combinatorio coincide nalgúns casos co número de Lefschetz obtido considerando cohomoloxía con soporte compacto. Agora, como a cohomoloxía con soporte compacto é claramente un invariante topolóxico, pódese aplicar a súa invariancia para obter un primeiro resultado de invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio. Este resultado, aínda que importante por ser o primeiro, non é de demasiada utilidade, xa que as hipóteses requeridas no teorema que compara o número de Lefschetz combinatorio co número de Lefschetz da cohomoloxía con soporte compacto limitan a súa aplicación.

Por este motivo, foi preciso introducir unha nova ferramenta: o índice combina-

torio. Este é o contido da Sección 2.2. O índice de punto fixo é un dos recursos de maior utilidade dentro da teoría de punto fixo. Trátase dun operador que, dada unha aplicación $f : X \rightarrow X$, asigna un enteiro a cada aberto de X sen puntos fixos na súa fronteira. Ademais, o índice do espazo total é exactamente o número de Lefschetz, polo que o índice de punto fixo adóitase entender como unha localización do número de Lefschetz arredor dos puntos fixos. No noso caso, o que facemos é estender a definición de índice a subespazos que non son necesariamente abertos (aínda que seguimos pedindo que non teñan puntos fixos na fronteira). É o que chamamos índice combinatorio. O que acontece é que o índice de punto fixo satisface certo resultado parcial de invariancia topolóxica. Por outro lado, nesta sección demostramos tamén que o índice de punto fixo combinatorio coincide nalgúns casos con número de Lefschetz combinatorio e así, é posible inferir un novo resultado de invariancia topolóxica para este último. Porén, a invariancia total segue sen ser probada. É na Sección 2.3 onde a invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio é finalmente probada. A demostración é técnica e recorre a certas ferramentas de teoría de punto fixo. Con todo, unha primeira consecuencia obtense desta invariancia. Trátase dun resultado de invariancia topolóxica do número de Lefschetz relativo dun par de espazos. O que é sorprendente é que o resultado depende de que os complementarios dos pares considerados sexan homeomorfos e non de que o sexan os pares.

A segunda parte do capítulo céntrase en xeralizar a definición de número de Lefschetz combinatorio a aplicacións abertas que non son necesariamente homeomorfismos. Así, conséguese probar que o número de Lefschetz combinatorio está ben definido para calquera aplicación aberta $f : X \rightarrow X$ (onde X é un complexo simplicial) e calquer subespazo definible $U \subset X$ tal que $f(U) \subset U$ e $f(X \setminus U) \subset X \setminus U$. De novo, a demostración é técnica e precisa de certos resultados de teoría topolóxica de punto fixo. Ademais, nesta parte do capítulo móstrase tamén que as aplicacións abertas son a última gran familia de aplicacións nas que o número combinatorio pode ser definido. Así pois, ao chegar á fin do capítulo temos que o número combinatorio pode definirse nunha familia inmensamente maior que a dos homeomorfismos, tendo igualmente un teorema de punto fixo que xeraliza o anterior.

Capítulo 3

O seguinte capítulo da tese ten por obxectivo presentar as diferentes teorías de integración con respecto aos puntos fixos dunha aplicación que desenvolvimos ao longo desta tese. Así, na Sección 3.1, centramos os esforzos en definir unha integral

con respecto ao número de Lefschetz combinatorio de aplicacións abertas. Como o número de Lefschetz combinatorio satisface unha regra do produto, é de esperar que tamén poidamos obter certo teorema de Fubini na súa integración. Dito resultado constitúe a última parte da sección.

A segunda vantaxe da integración con respecto ao número de Lefschetz combinatorio é que pode ser empregada no contexto de feixes. De feito, o número de Lefschetz dunha terna (X, f, \mathcal{F}) , onde X é un complexo simplicial compacto, $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo celular e \mathcal{F} certo feixe construíble sobre X , non é máis que a integral con respecto ao número de Lefschetz combinatorio de f dunha función natural asociada ao feixe. Este resultado conforma o pilar principal da Sección 3.2, pois o seu interese é moi significativo no traballo: o resultado implica que un número de Lefschetz en feixes pode calcularse dun modo totalmente computable e apartado da teoría de feixes. Nótese que, en xeral, é moi difícil facer cálculos con feixes. A cohomoloxía de feixes adoita ser difícil de computar e as trazas inducidas por unha aplicación nesta cohomoloxía máis aínda. É por esta razón que o resultado é tan relevante. Finalmente, engadimos a relación que existe entre complexos de feixes e funcións construíbles enteiras (en lugar de naturais). Esta relación non será outra cunha regra de Barrow para a integración con respecto ao número de Lefschetz combinatorio.

A Sección 3.3, definimos unha integral de funcións enteiras con respecto ao índice de punto fixo combinatorio. Isto supón unha clara vantaxe fronte á integración previa. Para comezar, as aplicacións con respecto as cales integramos xa non teñen por que ser abertas. Ademáis, ditas aplicacións ya non terán que enviar cada conxunto de nivel da función enteira en si mesmo, como acontecía ca integral con respecto ao número de Lefschetz combinatorio. Agora, a grandes rasgos, bastará con que non haxa puntos fixos na fronteira destes conxuntos de nivel. Con todo, aparece unha nova limitación: o índice en xeral é moito máis difícil de calcular que o número de Lefschetz, polo que cando a aplicación non sexa aberta ou non envíe os conxuntos de nivel a eles mesmos, esta nova integral pode seer máis difícil de calcular.

Porén, como o índice de punto fixo satisface tamén unha regra do produto, de novo é de esperar que esta integral cumpra cunha regra de Fubini, o cal é o último resultado que se proba na sección.

Finalmente chegamos á Sección 3.4, onde sacamos proveito da idea de integrar con respecto ao índice de punto fixo para obter unha suma superior e inferior de funcións con valores nos números reais. O que acontece é que, se intentamos integrar as funcións reais con respecto ao número de Lefschetz combinatorio dunha aplicación aberta $f : X \rightarrow X$, onde o complexo simplicial X é o dominio da función real, temos

que restrinxir a aplicación f a unha aplicación que sea moi similar á identidade (por moi similar enténdese algo máis forte que ser homótopa á identidade, o cal, en teoría topolóxica de punto fixo, xa é equivalente a ser a identidade). Así, esta integración carece por completo de valor, polo que convén integrar con respecto ao índice. Desde xeito, obtense dúas sumas de Riemann, unha superior e outra inferior, que non sempre coinciden pero que constitúen a mellor aproximación que existe polo momento a unha integral de función reais con respecto aos puntos fixos dunha aplicación de complexos simpliciais.

Capítulo 4

O último capítulo da tese está constituído polas aplicacións da invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio. Divídese en distintas seccións.

A Sección 4.1, contén os distintos axiomas que obtivemos ao longo da tese en teoría topolóxica de punto fixo. A axiomática é unha parte fundamental da teoría de punto fixo. Comezando polas construcións axiomáticas da característica de Euler [75], [76] e o índice de punto fixo [25], [65], os topólogos sempre estiveron moi interesados en manexar os invariantes topolóxicos da teoría de punto fixo mediante un sistema de axiomas debido as vantaxes que isto presenta. Ademais do resultado clásico [4], a día de hoxe destacan outros resultados nos que se estudan definicións axiomáticas do número de Lefschetz equivariante, do índice en aplicacións n -valuadas, etc [31], [32], [69], [70].

Dada a importancia destas formulacións axiomáticas, non podemos comezar a sección sen presentar, na Subsección 4.1.1, unha definición axiomática do número de Lefschetz combinatorio. Esta é moi sinxela: nos compactos coincide co número de Lefschetz usual e ademais, é aditivo, é dicir: o número de Lefschetz combinatorio nunha unión disxunta de dous subespazos é igual á suma do número de Lefschetz combinatorio en cada un deses espazos.

A continuación centramos a atención, na Subsección 4.1.2, nos axiomas do número de Lefschetz na linguaxe de feixes. Ditos axiomas pódense entender como unha simplificación dos axiomas de [4] cando o feixe considerado é o feixe constante con valor o corpo dos números reais.

Finalmente, grazas á invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio, na Subsección 4.1.3, conseguimos reducir os catro axiomas de [4] a soamente tres cando a aplicación considerada é un homeomorfismo. De feito, demostramos algo máis forte. Cando a aplicación é aberta, a invariancia topolóxica do número de

Lefschetz combinatorio implica o axioma de cofibración. Se ademáis nos restrinximos a homeomorfismos, dita invariancia topolóxica implica tamén o axioma de valor inicial (ou de produto wedge nas circunferencias).

A continuación atópase a Sección 4.2, onde a invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio permite simplificar o cálculo dos números de Lefschetz de moitas aplicacións. Isto débese a que o número de Lefschetz combinatorio dun espazo non compacto pódese considerar con respecto a varias compactificacións diferentes e precisamente este xogo permite simplificar sumamente os cálculos.

Fianalmente chegamos á Sección 4.5, onde presentamos catro teoremas de Lefschetz para detectar puntos fixos en espazos pechados non acotados. A búsqueda de teoremas de punto fixo en espazos non acotados é un dos problemas abertos máis importantes dentro da teoría de Lefschetz. Diversos artigos obtiveron ao longo dos últimos sesenta anos resultados parciais neste sentido. Destacan [13], [15], [27], [34], [51], [58], [62], [63], [64], [73] e, máis recentemente, [18] e [19]. Porén, en todos estes artigos a compacidade segue estando presente nas hipóteses das aplicacións (as cales deben ser compactas, CAC, condensantes, etc). No noso caso, a única hipótese de compacidade que pediremos é que as aplicacións sexan propias, o cal é un requisito moi débil. Polo tanto, os nosos resultados poden verse como o primeiro ataque a un problema tan importante como a búsqueda de teoremas de punto fixo para funcións analíticas boas (tal e como o chamou Brown no seu momento) sen empregar hipóteses de compacidade.

A idea é que a compactificación por un punto dun pechado definible é tamén definible e así homeomorfa a un complexo simplicial compacto. Logo, empregando as acotacións do índice de punto fixo que existen en determinados espazos, a invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio e os axiomas de normalización e aditividade do índice, podemos obter certos resultados de punto fixo en espazos non acotados. Finalmente, nesta sección empregamos o razonamento inverso para demostrar que o índice de punto fixo non pode estar acotado en certos espazos (outro problema de certo interés en topoloxía alxébrica).

Neste capítulo tamén dedicamos dúas pequenas seccións a expoñer as aplicacións prácticas da integral do número de Lefschetz combinatorio e a xeralizar un resultado clásico de invariancia do índice de punto fixo.

As aplicacións prácticas da integral do número de Lefschetz son no ámbito da detección e o conteo de obxectos, animais ou persoas en espazos como poden ser unha nave, unha granxa, unha piscina de peixes ou a planta dun aeroporto. A integral con respecto ao número de Lefschetz permitirá contar o número de obxectos cando se dispón dunha rede de sensores extensa, tendo en conta que o mesmo obxecto pode

ser detectado por máis dun sensor.

Pola súa banda, a idea da invariancia do índice é aplicar a invariancia topolóxica do número de Lefschetz combinatorio á relación obtida no Capítulo 2 entre o número de Lefschetz combinatorio e o índice de punto fixo.

Introduction

La théorie des points fixes a été l'une des thématiques principales dans la topologie algébrique dès la naissance de celle-ci. En plus des applications dans le domaine des équations différentielles, les théorèmes du point fixe de Lefschetz ont une importance cruciale dedans les mathématiques. Ainsi, le nombre de Lefschetz, par exemple a été employé par Deligne dans [23] pour résoudre une des conjectures de Weil. Aussi, d'après les travaux de Connes [20], le nombre de Lefschetz semble avoir un rôle fondamental dans la résolution de l'Hypothèse de Riemann, car on peut réduire le problème à calculer une formule de la trace. À tout cela, on doit ajouter aussi les applications fournies par Atiyah et Bott [5], [6], par exemple, dans le domaine de la géométrie différentielle.

Plusieurs mathématiciens très importants ont conduit sa carrière vers la théorie des points fixes. En plus d'Atiyah et de Bott, notamment on doit mentionner les travaux de Dold, Hopf, Nielsen, Lefschetz ou Yoccoz dans ce domain des mathématiques.

Dans cette thèse, on présente un étude combinatoire du nombre de Lefschetz pour des homéomorphismes et des applications ouvertes. La conséquence principale de cet étude est la construction d'un nouveau invariant topologique (le nombre de Lefschetz combinatoire) qui permet d'étendre les théorèmes du point fixe de Lefschetz à certains espaces non compacts. Après les travaux de Leray par rapport à l'indice de point fixe, plusieurs tentatives ont été réalisées pour trouver un théorème du point fixe de Lefschetz dans des espaces non nécessairement compacts. Cependant, la compacité y était toujours présente (même si les espaces n'étaient pas compacts, les énonces étaient en termes d'applications compactes, condensantes, CAC, etc). Dans cette thèse, on obtient des théorèmes pour des applications ouvertes en général. Ces résultats peuvent être divisés en deux lignes : celle où les espaces ne sont pas compacts mais sont inclus dedans un complexe simplicial compact et celle où les espaces sont fermés mais peuvent être non bornés. Pendant que la première est une généralisation du théorème du point fixe du nombre de Lefschetz relatif, la deuxième entraîne

un grand (et surtout différent) progrès dans un domaine où pendant plus de vingt ans, il n'y en a eu que deux travaux qui ont amélioré la situation.

D'ailleurs, le nombre de Lefschetz combinatoire fournira des techniques plus efficaces à l'heure de calculer des nombres de Lefschetz classiques, aussi qu'un nouveau ensemble d'axiomes pour cet invariant lorsque l'application est un homéomorphisme. Finalement, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire (dont la démonstration constitue l'une des parties principales de ce mémoire) permet aussi une généralisation d'un théorème classique d'invariance topologique de l'indice de point fixe et établit une technique pour trouver des contre-exemples à certains problèmes de bornes de l'indice de point fixe.

Ainsi, on divisera cette thèse en quatre chapitres en plus d'un chapitre d'introduction aux outils qui vont être employés pendant notre travail.

Au Chapitre 1 on présente la définition principale de cette thèse : le nombre de Lefschetz combinatoire. La difficulté à ce chapitre a été celle de trouver une définition de "nombre de Lefschetz" additive et puis prouver que cette définition était cohérente. Aussi, à ce chapitre on obtient une généralisation du théorème du point fixe du nombre de Lefschetz relatif (et par conséquent aussi du théorème classique du point fixe de Lefschetz). Ainsi, ce nouveau résultat (Théorème 1.3.2) permettra de trouver des points fixes d'homéomorphismes dans des espaces bornés qui ne sont pas fermés.

Le Chapitre 2 constitue la partie la plus dense de ce mémoire. Après beaucoup de tentatives partielles (où l'on a même défini un nombre de Lefschetz pour des faisceaux) on y démontre finalement l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire, laquelle a été la grande question de cette thèse. Ensuite, avec les idées de cette dernière démonstration, on étend la définition du nombre de Lefschetz combinatoire aux applications ouvertes. L'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire sera fondamentale dans ce travail. En plus de toutes les applications que seront y présentées au Chapitre 4 comme conséquence de cette additivité, il faut remarquer que si elle n'existait pas, on avait des raisons pour croire que des nouveaux contre-exemples du Hauptvermutung (et, peut être, même dans des dimensions inférieures à six) auraient pu être fournis par cette non invariance. C'est pour cela, que déterminer l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire était si importante.

L'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire permet de travailler avec celui-ci comme une mesure. Concrètement, au Chapitre 3 nous construisons des différentes théories d'intégration par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire. Les applications de ces intégrations sont claires : en plus de fournir un outil dynamique pour

compter la densité de points fixes, elles permettent de calculer sans beaucoup de difficultés le nombre de Lefschetz dans le contexte des faisceaux. En plus, elles entraînent aussi quelques applications pratiques qui seront mentionnées au Chapitre 4.

Finalement, au Chapitre 4, on obtient les conséquences principales de cette thèse. Après l'introduction de nouveaux ensembles d'axiomes pour le nombre de Lefschetz, on établit une technique très effective pour calculer le nombre de Lefschetz de certains homéomorphismes (et parfois aussi de quelques applications ouvertes). Ces techniques, lorsque elles sont possibles, sont plus rapides que le calcul homologique du nombre de Lefschetz ou la stratégie présentée dans [4]. En plus, elles établiront la base de la Section 4.5, où l'on obtiendra des nouveaux théorèmes du point fixe de Lefschetz pour certains espaces fermés non bornés et où l'idée de compacité n'entraîne pas une restriction au-delà de demander aux applications d'être propres. Aussi à cette section, on montrera comment le nombre de Lefschetz combinatoire permet de trouver des contre-exemples pour des problèmes concernant les bornes de l'indice de point fixe. Finalement, on doit mentionner qu'à ce chapitre, deux petites sections seront dédiées à montrer les applications pratiques de l'intégration par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire et à généraliser le théorème classique d'invariance topologique de l'indice de point fixe.

Hypothèses et Objectifs

- H1.** Plusieurs versions du même théorème de point fixe (aujourd'hui connu comme le théorème du point fixe de Lefschetz) ont été énoncées au début du XXe siècle par Hopf, Lefschetz et Reidemeister. Tous ces théorèmes donnaient des résultats de point fixe pour des applications entre des espaces qui étaient des complexes simpliciaux finis ou des variétés triangulables compactes. Notamment, le résultat le plus connu assure l'existence de points fixes pour une application dans un complexe simplicial compact et dont le nombre de Lefschetz est différent de zéro.
- O1.1.** Trouver une généralisation de ces résultats pour des homéomorphismes et des espaces non nécessairement compacts qui sont contenus dans des complexes simpliciaux finis.
- O1.2.** Étudier si la généralisation précédente peut être considérée pour des applications ouvertes et non seulement pour des homéomorphismes. Dans ce cas, étudier les possibles limitations de cette extension.
- H2.** Dans [7], [8] et [21], une intégration par rapport à la caractéristique d'Euler combinatoire est présentée. En plus, cette intégration est étendue au langage des faisceaux et quelques applications pratiques sont obtenues. La principale d'entre elles, consiste à une stratégie pour compter avec des capteurs le nombre d'objets qui sont dans un endroit.
- O2.1.** Définir une intégration de fonctions entre un complexe simplicial fini et \mathbb{Z} par rapport aux points fixes d'une application entre le complexe simplicial et lui-même.
- O2.2.** Définir une intégration de fonctions réelles par rapport aux points fixes d'une application entre un complexe simplicial et lui-même.
- O2.3.** Définir un nouveau nombre de Lefschetz pour certains faisceaux et homéomorphismes et obtenir une bonne technique pour le calculer.

- O2.4.** Étendre les applications de la caractéristique d'Euler pour compter des objets avec des capteurs à nouvelles techniques de comptage avec le nombre de Lefschetz d'une application ouverte.
- H3.** Dans [75] et [76], des axiomes pour la caractéristique d'Euler sont obtenus. Quarante ans plus tard, dans [4], un ensemble de quatre axiomes pour le nombre de Lefschetz est présenté. Ceux-ci sont l'invariance homotopique, l'axiome de cofibration, un axiome de commutativité et un axiome de valeur initial.
- O3.** Trouver des nouveaux ensembles d'axiomes pour le nombre de Lefschetz des homéomorphismes et pour le nombre de Lefschetz faisceau-théorique.
- H4.** Dans [4], une technique pour calculer le nombre de Lefschetz des applications est présentée. Cette idée consiste à étendre l'axiome de valeur initial aux bouquets de n -sphères et ensuite faire de la récurrence grâce à l'axiome de cofibration en prenant une approximation cellulaire (axiome d'homotopie).
- O4.** Obtenir une nouvelle technique combinatoire pour calculer le nombre de Lefschetz des applications ouvertes qui permette de simplifier les calculs usuels et d'écarter certaines valeurs possibles.
- H5.** Dans [65], O'Neill présente un théorème d'invariance topologique de l'indice de point fixe lorsque les points fixes d'une application ne sont pas nécessairement isolés. Aucune généralisation de ce résultat n'a été trouvé pendant 70 ans.
- O5.** Obtenir une invariance topologique d'un nombre de Lefschetz additif et l'utiliser afin de généraliser le résultat de O'Neill.
- H6.** Dans les années 50, Leray construit des outils qui seront employés pour généraliser le théorème du point fixe de Lefschetz à certains espaces qui ne sont pas bornés. Tous ces tentatives utilisent une hypothèse de compacité sur les applications pour lesquelles les résultats sont obtenus.
- O6.** Obtenir un théorème du point fixe de Lefschetz dans quelques espaces non bornés sans imposer sur les applications des hypothèses de compacité.

Méthodologie Générale

Cette thèse a suivi la procédure habituelle dedans la recherche en mathématiques. Cette méthodologie implique un étude compréhensif des références dans le domaine (dans ce cas, la topologie algébrique et plus particulièrement la théorie topologique des points fixes) avec l'objectif de obtenir des nouvelles idées qui permettront avoir des définitions, des théorèmes ou des résultats qui rendent plus générales ceux qui sont déjà connus afin d'obtenir des résultats intéressants. Parfois, l'obtention de ces résultats est conséquence de certains raisonnements qui, en principe, semblaient loin du problème original. Un rôle important dans l'acquisition de cette manière de travailler ont été les conférences scientifiques internationales, où il est possible d'échanger des avis différents sur les sujets et aussi les séjours scientifiques dans des universités étrangères (dans mon cas, un séjour de trois mois à l'université de Fairfield avec Christopher Staecker).

En ce qui concerne la méthodologie spécifique employé, la méthode la plus employé sont les raisonnements par récurrence sur les dimensions des espaces, en considérant des applications qui préservent la frontière des espaces. Aussi, les axiomes présentes en théorie topologique des points fixes a joué un rôle important dans les idées de ma thèse.

Chapitre 0

Préliminaires

On divise ce chapitre en quatre sections. La première, plus courte, a comme objectif fixer de la notation et rappeler certains concepts très employés en topologie algébrique. Après, on se plongera dans des thématiques plus spécifiques comme le sont la théorie des points fixes, les structures o -minimales et la théorie de faisceaux.

0.1 Concepts Généraux

Dans cette section on présente les éléments basiques de la topologie algébrique qui vont être complètement indispensables pour travailler en théorie topologique des points fixes. Une très bonne référence pour ces concepts basiques est [61]. En ce qui concerne les idées principales de la théorie des points fixes, on recommande [16].

Définition 0.1.1. On définit un n -simplexe $\{a_0, \dots, a_n\}$ comme l'enveloppe convexe en \mathbb{R}^k ($k \geq n$) de $n + 1$ points géométriquement indépendants a_0, \dots, a_n . Dans ce cas, on dit que le simplexe $\{a_0, \dots, a_n\}$ est généré par a_0, \dots, a_n .

Définition 0.1.2. Soit $\{a_0, \dots, a_n\}$ un simplexe. Une *face* du simplexe est un simplexe généré par un sous-ensemble de $\{a_0, \dots, a_n\}$.

Définition 0.1.3. L'*Intérieur* d'un simplexe $\{a_0, \dots, a_n\}$ est la réunion des points dans $\{a_0, \dots, a_n\}$ qui n'appartiennent à aucune face de $\{a_0, \dots, a_n\}$ au-delà d'elle même.

Définition 0.1.4. Un *complexe simplicial* X est une collection de simplexes satisfaisant que l'intersection de deux simplexes appartient aussi à X et que toutes les faces d'un simplexe de X sont aussi des simplexes de X .

Notation 1. Étant donné un complexe simplicial X , on notera $C_p(X)$, les chaînes simpliciales de X de dimension p [61, Section 5]. L'anneau ne sera pas important dans la plupart de la thèse, mais pour éviter des problèmes avec la théorie de faisceaux, on peut supposer qu'on travaille sur \mathbb{Q} .

Sauf à la Section 4.5, au long de cette thèse on n'emploiera que des complexes finis (c'est-à-dire, avec un nombre fini de simplexes). Ceci est équivalent à dire que la réalisation géométrique du complexe est compacte [61, Lemma 2.4]. Sauf mention du contraire, tous les complexes seront finis. Aussi, X fera référence au même temps au complexe simplicial et à sa réalisation géométrique [61, Section 2].

Définition 0.1.5. Dans la réalisation géométrique d'un simplexe $\{a_0, \dots, a_n\}$, on appelle *l'intérieur* à l'ensemble des points qui ne sont dans aucune m -face du simplexe avec $m < n$.

Définition 0.1.6. Soit X un complexe simplicial et v un sommet de X . On définit *l'étoile* de v dans X , $St(v, X)$, comme la réunion des intérieurs des simplexes de X pour lesquels v est une face.

Définition 0.1.7. Soient X et Y des complexes simpliciaux. Une *application simpliciale* $f : X \rightarrow Y$ est une application entre l'ensemble de sommets de X et celui de Y en satisfaisant que l'image des sommets qui génèrent un simplexe en X génère aussi un simplexe en Y .

Le rôle des applications simpliciales dans la théorie des points fixes est très importante en tant qu'elle permet de calculer le nombre de Lefschetz sur le complexe de chaînes simpliciales au lieu de sur les modules d'homologie. Ceci est conséquence du Théorème de la trace de Hopf (Théorème 0.1.12) et du fait que toute application entre complexes simpliciaux peut être approximée par une application simpliciale.

Définition 0.1.8. Soient X et Y des complexes simpliciaux et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Une application simpliciale $h : X \rightarrow Y$ est une *approximation simpliciale* de f si, pour tout sommet v de X , l'image par h de l'étoile de v dans X est contenue dans l'étoile de $f(v)$ dans Y , c'est-à-dire, $f(St(v, X)) \subset St(h(v), Y)$.

Le théorème suivant montre que toute application entre complexes compacts peut être approximée par une application simpliciale.

Théorème 0.1.9 (Théorème d'approximation simpliciale [61, Theorem 16.1]). *Soient X et Y des complexes simpliciaux et $f : X \rightarrow Y$ un application continue. Alors il existe une subdivision barycentrique $sd^k X$ de X et une approximation simpliciale $f^{\text{simp}} : sd^k X \rightarrow Y$ de f .*

L'importance des approximations simpliciales est qu'elles sont homotopes aux applications qu'elles approximent et que, par conséquent, les applications qu'elles

induisent en homologie sont les mêmes (et par conséquent le nombre de Lefschetz aussi).

Arrivés à ce point, on peut introduire la définition de *nombre de Lefschetz*.

Définition 0.1.10. Soit X un complexe (fini) et $f : X \rightarrow X$ une application continue. On définit le *nombre de Lefschetz* de f comme

$$\Lambda(f, X) = \sum_p (-1)^p \text{tr}(f_*, H_p(X)),$$

où $H_p(X)$ est le p -ième module d'homologie simpliciale (à coefficients dans \mathbb{Q}) et f_* est l'application induite par f sur l'homologie.

Le nombre de Lefschetz devient très important dans la théorie des points fixes grâce au théorème suivant, énoncé d'abord par Solomon Lefschetz pour des coïncidences entre deux applications et qu'après a connu cette nouvelle forme.

Théorème 0.1.11 (Théorème du point fixe de Lefschetz [61, Theorem 22.3]). *Soit X un complexe simplicial (fini) et soit $f : X \rightarrow X$ une application continue. Si $\Lambda(f, X) \neq 0$, alors f a au moins un point fixe.*

La réciproque du théorème précédent est fautive. Par exemple le nombre de Lefschetz de l'application identité dans S^1 est nul même si tous les points sont fixes. Néanmoins, la théorie de Nielsen (la deuxième branche de la théorie des points fixes après la théorie de Lefschetz) peut fournir des réponses partielles à cette réciproque. Pour des détails, on recommande [16] ou [41].

L'importance des applications simpliciales en théorie des points fixes est due au Théorème de la trace de Hopf [61, Theorem 22.1], lequel permet de calculer le nombre de Lefschetz d'une manière combinatoire et qu'on présente maintenant.

Théorème 0.1.12 (Théorème de la trace de Hopf). *Soit X un complexe simplicial (fini) et $\phi : C_p(X) \rightarrow C_p(X)$ un morphisme de chaînes simpliciales. Alors*

$$\sum_p (-1)^p \text{tr}(\phi, C_p(X)) = \sum_p (-1)^p \text{tr}(\phi_*, H_p(X)).$$

On en déduit que, étant donnée une application $f : X \rightarrow X$, on peut composer une approximation simpliciale f^{simp} avec l'opérateur subdivision λ [61, Theorem 17.2] et dans ce cas on a :

$$\sum_p (-1)^p \text{tr}(\lambda \circ f^{\text{simp}}, C_p(\text{sd}^k(X))) = \Lambda(f, X).$$

0.2 Éléments de la Théorie des Points Fixes

La théorie des points fixes a été l'un des principaux liens entre la topologie et l'analyse dès le début du XXe siècle. Dans cette théorie, de nombreux outils sont employés afin de garantir l'existence ou l'inexistence de points fixes, notamment les nombres de Lefschetz et Nielsen, la trace de Reidemeister, le sous-groupe de Jiang ou l'indice de point fixe. Pour une bonne introduction dans cette matière, on recommande [16] et [41].

Les complexes simpliciaux ont une limitation assez claire : ils sont très rigides. Si l'on veut vaincre ce problème, une possibilité est travailler avec des ANR. Même si dans cette thèse on choisira les structures o -minimales pour résoudre le problème de la rigidité, on introduit quand même ici les ANR vue l'importance qu'ils ont dans la théorie topologique des points fixes (en particulier, le problème classique auquel cette thèse donne une réponse partielle, [17, Problem 3], est énoncé en termes d'ANR.)

Définition 0.2.1. Un sous-ensemble A de X est dit un *rétract de voisinage* de X s'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $A \subset U$ et une rétraction de U sur A . Ici, une rétraction est une application $r : U \rightarrow A$ telle que $r|_A = \text{id}_A$.

Définition 0.2.2. Un espace métrique compact X est dit un *rétract compact absolu de voisinage* (ou ANR compact) si pour tout sous-espace $A \subset Y$ d'un espace métrique séparable Y avec A homéomorphe à X , A est un rétract de voisinage de Y .

Dans la littérature, le concept d'ANR n'assume pas de compacité. Cependant, comme on travaillera presque seulement dans des entourages compacts, dans cette section les ANR's seront compacts.

Une caractérisation des ANR est la suivante. Soit I^∞ le cube de Hilbert [16, III.A]. Alors on a :

Lemme 0.2.3. *Un espace compact X est un ANR si et seulement s'il existe un plongement $i : X \rightarrow I^\infty$ tel que $i(X)$ est un rétract de voisinage de I^∞ .*

Le lemme suivant apparaît dans [16, III.A, Theorem 2].

Lemme 0.2.4. *Tout complexe simplicial fini est un ANR.*

Les ANR ont un fort lien avec les complexes simpliciaux. Il existe un théorème de domination qui établit non seulement une équivalence homotopique entre un ANR et un complexe simplicial, mais aussi cette équivalence sera aussi proche, comme on verra dans le sens du Théorème 0.2.7.

Définition 0.2.5. Soit X un ANR. Deux applications $f, g : X \rightarrow X$ sont appelées ϵ -homotopes pour un $\epsilon > 0$ s'il existe une homotopie $H : X \times I \rightarrow X$ entre f et g telle que

$$\text{diam}(H(x \times I)) < \epsilon \text{ pour tout } x \in X.$$

Définition 0.2.6. Un espace Y ϵ -domine à X pour certain $\epsilon > 0$ s'il existent des applications $\varphi : X \rightarrow Y$ et $\psi : Y \rightarrow X$ telles que $\psi \circ \varphi$ est ϵ -homotope à l'identité.

Théorème 0.2.7 (Théorème de domination, [16, III.B Theorem 1]). *Soit X un ANR et $\epsilon > 0$. Alors il existe un complexe simplicial Y qui ϵ -domine à X .*

Grâce à cette domination, il est possible d'étendre le théorème du point fixe de Lefschetz aux ANR's de la façon suivante. Les détails peuvent être trouvés dans [16, III.C, Theorem 2].

Théorème 0.2.8. *Si X est un ANR et $f : X \rightarrow X$ une application telle que $\Lambda(f, X) \neq 0$ alors f a au moins un point fixe.*

Maintenant on introduit l'indice de point fixe. Par simplicité, on va le présenter seulement dans le contexte des complexes simpliciaux, mais, en employant le théorème de domination, il est possible d'étendre la définition aux ANR's [16, V].

L'emploi de l'indice de point fixe apparaît d'abord dans [39]. Néanmoins on doit attendre les travaux de Leray [50], O'Neill [65] et Browder [13] pour avoir une vision plus claire du concept. Il y a différentes définitions de l'indice de point fixe. En analyse, elles sont très habituelles les définitions avec le concept de degré d'une application. Malheureusement, cette définition n'est pas la meilleure dans le cas général où l'on ne demande pas aux points fixes d'être isolés.

S'il peut y avoir des points fixes non isolés, une définition spécifique employant la cohomologie est présentée dans [16, IV.B]. Cependant, ici on ne présentera qu'une définition axiomatique de l'indice, laquelle est équivalente à la définition cohomologique [16, Appendix II]. Cette définition et l'usage de la même qu'on répétera au long de cette thèse fournissent un exemple excellent de l'importance des constructions axiomatiques dans la théorie des points fixes, où précisément ce travail a présenté certains progrès. Afin de simplifier la compréhension, la notation des collections \mathcal{C} et \mathcal{C}' nommées ci-dessous est différente de celle de [16].

Définition 0.2.9. Soit \mathcal{C} la famille de triplets (X, f, U) où X est un complexe simplicial fini, $U \subset X$ est un ouvert de X et $f : X \rightarrow X$ est une application sans points fixes dans la frontière de U .

Définition 0.2.10. L'indice de point fixe est une application i entre \mathcal{C} et \mathbb{Q} qui satisfait les axiomes suivants :

1. **Localisation.** Si $(X, f, U) \in \mathcal{C}$ et $g : X \rightarrow X$ est une application telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \bar{U}$, alors $i(X, f, U) = i(X, g, U)$.
2. **Homotopie.** Soit X un complexe simplicial et $H : X \times I \rightarrow X$ une homotopie telle que (X, H_t, U) (où $H_t(x) = H(x, t)$) appartient à \mathcal{C} pour tout $t \in I$. Alors $i(X, H_0, U) = i(X, H_1, U)$.
3. **Additivité.** Soit $(X, f, U) \in \mathcal{C}$ et soient U_1, \dots, U_k des ouverts disjoints de X inclus dans U et tels que f n'a pas de points fixes dans $U \setminus (\bigcup_{j=1}^k U_j)$. Dans ce cas, $i(X, f, U) = \sum_{j=1}^k i(X, f, U_j)$.
4. **Normalisation.** On a toujours $i(X, f, X) = \Lambda(f, X)$.
5. **Commutativité.** Soient X et Y des complexes simpliciaux et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ des applications telles que $(X, g \circ f, U) \in \mathcal{C}$. Alors :

$$i(X, g \circ f, U) = i(Y, f \circ g, g^{-1}(U)).$$

Observation 0.2.11. On peut vérifier dans le cinquième axiome de la Définition 0.2.10 que $(Y, f \circ g, g^{-1}(U)) \in \mathcal{C}$ si $(X, g \circ f, U) \in \mathcal{C}$.

Observation 0.2.12. La Définition 0.2.10 est vraiment une définition, car il n'y a qu'une seule application satisfaisant ces axiomes [16, Appendix II].

Observation 0.2.13. Même si l'indice est défini comme une application entre \mathcal{C} et \mathbb{Q} , il est possible de prouver que les images de i appartiennent toujours à \mathbb{Z} [16, VIII.B, Theorem 1]. Le fait de définir l'indice avec \mathbb{Q} comme codomaine vient du fait de pouvoir définir une telle application non seulement à partir des éléments de \mathcal{C} mais aussi à partir de ceux de \mathcal{C}' , où \mathcal{C}' désigne aux triplets (X, f, U) avec U un ouvert de X , $f : X \rightarrow X$ une application sans points fixes dans la frontière de U mais où X n'est pas forcément un complexe simplicial mais un espace dont l'homologie est nulle dans presque toute dimension et est toujours de type fini.

L'importance historique de l'indice de point fixe est le théorème de point fixe de l'indice, lequel fournit un théorème de point fixe dans des espaces qui ne sont pas toujours des complexes simpliciaux ou des ANR's.

Théorème 0.2.14. Soit $(X, f, U) \in \mathcal{C}$. Si $i(X, f, U) \neq 0$, alors f a un point fixe dans U .

Démonstration. Supposons que f n'a pas de points fixes dans \overline{U} . Par additivité,

$$i(X, f, X) = i(X, f, U) + i(X, f, X \setminus \overline{U}).$$

Mais aussi par additivité (car tous les points fixes sont dans $X \setminus \overline{U}$) on a

$$i(X, f, X) = i(X, f, X \setminus \overline{U}),$$

et ainsi $i(X, f, U) = 0$. □

L'indice satisfait une règle du produit. Les détails sont dans [16, IV.B, Theorem 6].

Théorème 0.2.15. *Soient $(X, f, U), (Y, g, V) \in \mathcal{C}$. Alors*

$$i(X \times Y, f \times g, U \times V) = i(X, f, U) \cdot i(Y, g, V).$$

Observation 0.2.16. Même si le produit de deux complexes simpliciaux n'est pas toujours un complexe, il est en fait triangulable et donc le théorème précédent a du sens.

Observation 0.2.17. En particulier,

$$\begin{aligned} \Lambda(f \times g, X \times Y) &= i(X \times Y, f \times g, X \times Y) = \\ &= i(X, f, X) \cdot i(Y, g, Y) = \Lambda(f, X) \cdot \Lambda(g, Y). \end{aligned}$$

Celle-ci est la règle du produit pour le nombre de Lefschetz. Maintenant, comme la caractéristique d'Euler est le nombre de Lefschetz pour l'application identité, on obtient aussi

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \times \chi(Y).$$

Comme on a mentionné avant, la théorie des points fixes a deux branches principales : la théorie d'existence de points fixes et la théorie de Nielsen, qui cherche à minimiser les points fixes. Un résultat fondamental dans la théorie de Nielsen est le Théorème d'approximation de Hopf, paru par première fois dans [39] et pour lequel [16, VIII.A, Theorem 2] est une bonne référence.

Théorème 0.2.18. *Soit X un complexe simplicial connexe de dimension non nulle et $f : X \rightarrow X$ une application continue. Alors il existe une application $f' : X \rightarrow X$ homotope à f pour laquelle chaque point fixe est le seul dans une face de dimension maximale. En particulier, le nombre de points fixes de f' est fini.*

Malheureusement, la construction de Hopf n'a pas un bon comportement avec l'indice de point fixe puisque l'homotopie entre f et f' peut avoir des points fixes dans la frontière des ouverts qui définissent les classes de point fixe [16, VI.B] et qui, par conséquent permettent l'étude du nombre de Nielsen (pour une introduction à la théorie de Nielsen, même si elle ne sera pas nécessaire dans cette thèse, on recommande [16, Chapters VI, VII, VIII] et [41]). On veut remarquer que l'existence d'une construction de Hopf dans les ANR est aujourd'hui l'un des problèmes ouverts les plus importants dans la théorie des points fixes [26].

Mais, comme on a mentionné avant, ce travail n'est pas focalisé en théorie de Nielsen, alors on n'en commentera que quelques curiosités et faits de celle-ci afin d'aider à la compréhension des idées générales de la théorie de Lefschetz. Ainsi, nous présentons maintenant quelques bonnes propriétés satisfaites par le nombre de Lefschetz [33].

Théorème 0.2.19. *Soient X et Y des complexes simpliciaux et $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, $l : X \rightarrow Y$ et $m : Y \rightarrow X$ des applications continues. Supposons aussi que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{l} & Y \\ f \downarrow & \swarrow m & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{l} & Y \end{array}$$

Alors $\Lambda(f, X) = \Lambda(g, Y)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les axiomes de commutativité et de normalisation de l'indice. \square

Théorème 0.2.20 [33, Property 2.4.2]. *Soient X , Y et Z des complexes simpliciaux et $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ et $h : Z \rightarrow Z$ des applications simpliciales. Supposons qu'il y a des applications linéaires l_p et m_p dans toute dimension p de sorte que le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_p(X) & \xrightarrow{l_p} & C_p(Y) & \xrightarrow{m_p} & C_p(Z) & \longrightarrow & 0 \\ & & f_* \downarrow & & g_* \downarrow & & h_* \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_p(X) & \xrightarrow{l_p} & C_p(Y) & \xrightarrow{m_p} & C_p(Z) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est commutatif (et les lignes sont des suites exactes). Dans ce cas, on a

$$\Lambda(g, Y) = \Lambda(f, X) + \Lambda(h, Z).$$

On peut appliquer le théorème précédent au nombre de Lefschetz relatif d'un couple (X, A) .

Définition 0.2.21. Étant donnée une application $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$, on définit le nombre de Lefschetz relatif de f comme

$$\Lambda(f, (X, A)) = \sum_p (-1)^p \text{tr}(f_*, H_p(X, A)).$$

Corollaire 0.2.22. Soient X un complexe simplicial, A un sous-complexe et $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$ une application continue. On a

$$\Lambda(f, (X, A)) = \Lambda(f, X) - \Lambda(f|_A, A).$$

Démonstration. La démonstration est une conséquence directe de l'application du Théorème 0.2.20 à la suite

$$0 \rightarrow C_p(A) \xrightarrow{i} C_p(X) \rightarrow C_p(X, A) \rightarrow 0. \quad \square$$

Le prochain résultat sera très présent au long de cette thèse.

Théorème 0.2.23. Soit X un complexe simplicial et soit $f : X \rightarrow X$ une application telle que $f(X) \subset A \subset X$. Alors

$$\Lambda(f, X) = \Lambda(f|_A, A).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 0.2.19 à

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ f|_A \downarrow & f \swarrow & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{i} & X. \end{array} \quad \square$$

Finalement, on introduit quelques définitions qui vont être nécessaires au Chapitre 4. Les quatre premières seront nécessaires pour comprendre l'état actuel du problème que l'on affrontera. De son côté, la dernière définition, celle de classe de point fixe, est un outil très important dans la théorie de Nielsen et qui va être employé au Chapitre 4.

Définition 0.2.24. Soient X et Y des espaces Hausdorff et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. On dit que f est *compacte* si $\overline{f(X)} \subset Y$ est compact.

Définition 0.2.25. Soit X un espace Hausdorff et $f : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que f est une *contraction absorbante compacte* (ou une CAC) s'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que

- $f(U) \subset U$ et l'application $\tilde{f} : U \rightarrow U$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est compacte.
- Pour chaque $x \in X$ il existe un nombre naturel n_x tel que $f^{n_x}(x) \in U$.

Définition 0.2.26. Pour chaque sous-espace borné A d'un espace métrique complet X on définit la *mesure de Kuratowski de non compacité* comme l'infime des $\epsilon > 0$ tels que A est recouvert par un nombre fini de sous-espaces de diamètre inférieur ou égal à ϵ . Notons $\alpha(A)$ cette mesure.

Définition 0.2.27. Soit X un espace de Banach et $f : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que f est une application *condensante* si pour tout sous-espace borné $A \subset X$ avec $\alpha(A) > 0$ on a $\alpha(f(A)) \leq \alpha(A)$.

Définition 0.2.28. Soient X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application continue et $p, q \in X$ deux points fixes de f . On dira que p et q sont dans la même *classe de point fixe de f* s'il existe un chemin α entre p et q et une homotopie de chemins entre les chemins α et $f(\alpha)$.

Les classes de point fixe établissent une relation d'équivalence sur l'ensemble de points fixes de f . Il est facile de prouver qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes F_1, \dots, F_n et que l'on peut trouver des sous-espaces ouverts et disjoints $U_i \subset X$ tels que $F_i \subset U_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ [16, VI.B].

0.3 Structures o-Minimales et Ensembles Définissables

Dans cette thèse, on travaillera avec la catégorie d'espaces définissables. Cela permettra de ne pas restreindre les calculs du nombre de Lefschetz seulement aux sous-complexes simpliciaux mais aussi à certains sous-espaces qui seront homéomorphes à des réunions de faces ouvertes d'un complexe simplicial. La référence classique pour les ensembles définissables et les structures *o*-minimales est [74], mais on recommande [1] pour une bonne introduction à la matière.

On doit remarquer aussi que l'avantage principal de notre nombre de Lefschetz combinatoire sera de fournir des résultats de point fixe dans des espaces qui ne seront pas nécessairement compacts. Ainsi, comme premier pas, on devra être capable de travailler dans des sous-espaces non nécessairement fermés d'un complexe simplicial.

Définition 0.3.1. Un *sous-complexe simplicial généralisé* d'un complexe simplicial X est une réunion de faces ouvertes de X (par face ouverte on fait référence aux points de l'intérieur d'une face).

La Figure 0.3.1 montre un exemple d'un sous-complexe simplicial généralisé.

Observation 0.3.2. Il est possible de définir un complexe généralisé sans avoir l'entourage d'un complexe simplicial [74, Chapter 8, Definition 1.5]. Néanmoins, dans ce travail on travaillera presque toujours dans un complexe simplicial. Dans ce dernier cas, il faut remarquer que l'adhérence d'un complexe généralisé sera un sous-complexe simplicial.

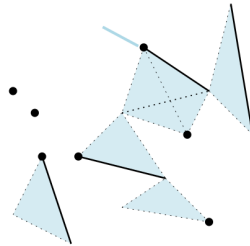


FIGURE 0.3.1 – Complexe simplicial généralisé.

Définition 0.3.3. Une *algèbre de Boole* de sous-ensembles d'un ensemble X est une collection \mathcal{C} de sous-ensembles de X tels que si $A, B \in \mathcal{C}$ alors $A \cup B \in \mathcal{C}$ et $X \setminus A \in \mathcal{C}$. En particulier, $A \cap B$ appartiendra aussi à X [74, Chapitre 1, Definition 1.4].

Définissons maintenant les structures *o-minimales*.

Définition 0.3.4. Une *structure o-minimale* sur \mathbb{R} est une collection $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. \mathcal{A}_n est une algèbre de Boole de sous-ensembles de \mathbb{R}^n pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
2. La famille \mathcal{A} est fermée pour le produit cartésien et pour les projections canoniques.
3. Le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ appartient à \mathcal{A}_2 .
4. La famille \mathcal{A}_1 est composé exactement par les réunions finies de points et intervalles ouverts de \mathbb{R} .
5. Chaque \mathcal{A}_n contient tous les sous-ensembles algébriques de \mathbb{R}^n .

Étant donnée une structure o -minimale, on dira que $A \subset \mathbb{R}^n$ est *définissable* si $A \in \mathcal{A}_n$.

Définition 0.3.5. On dira qu'une fonction $f : A \rightarrow B$ entre des sous-ensembles de \mathbb{R}^n est *définissable* si le graphe de la fonction est définissable.

Les ensembles définissables satisfont quelques bonnes propriétés [74, Chapter 1].

Propriété 0.3.6. *L'intérieur et l'adhérence d'un espace définissable sont aussi définissables.*

Propriété 0.3.7. *Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application définissable. Alors :*

1. *L'ensemble S est définissable.*
2. *La restriction de f à un sous-ensemble définissable de S est aussi définissable.*
3. *Si $B \subset \mathbb{R}^n$ est définissable alors $f^{-1}(B)$ est définissable.*
4. *L'ensemble $f(S)$ est définissable.*
5. *Si f est injective, son application réciproque est définissable.*
6. *La composition de fonctions définissables est définissable.*

Dans cette thèse on travaillera avec une structure o -minimale fixée contenant tous les ensembles semi-linéaires et, ainsi, tous les complexes simpliciaux généralisés. Il peut y avoir plusieurs structures avec ces conditions.

Sans aucune doute, la propriété principale des ensembles définissables dans cette thèse est la suivante.

Théorème 0.3.8 (Théorème de triangulation définissable [74, Chapter 8, Theorem 2.9]). *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un espace définissable et soit $\{X_i\}_{i=1}^m$ une famille de sous-espaces définissables de X . Alors il existe une triangulation définissable de X compatible avec $\{X_i\}_{i=1}^m$.*

Comme on a dit avant, l'importance des espaces définissables va être de fournir quelque flexibilité à la catégorie où l'on travaille. Toutefois, concernant ces espaces, pour ce travail on n'aura besoin que des propriétés énoncées ci-dessus, le fait d'avoir une algèbre de Boole (où l'intersection de définissables est aussi définissable) et que les complexes simpliciaux, généralisés ou non, seront toujours définissables. Au-delà de cela, on emploiera très souvent le théorème de triangulation définissable pour réduire l'étude des espaces définissables à celui des complexes simpliciaux, plus connu pour les topologistes.

0.4 Théorie de Faisceaux

La théorie de faisceaux est née dans la topologie algébrique de la main de Jean Leray pendant la deuxième guerre mondiale. Quelques années plus tard, avec Jean-Pierre Serre, Alexander Grothendieck, Roger Godement et Henri Cartan, les faisceaux ont commencé leur propre voyage dans différents domaines des mathématiques, notamment dans la géométrie algébrique. Cependant, les faisceaux ont aussi continué à avoir une importance assez remarquable dans la topologie algébrique comme un outil qui permet passer d'une solution locale à une solution globale d'un problème.

La connaissance de la théorie de faisceaux requise pour une bonne compréhension de ce mémoire n'est pas très haute. D'ailleurs, on essaiera de présenter ici une petite introduction à cette théorie pour suivre les idées du travail. On emploiera principalement la référence [21], mais on recommande [29] ou [71] pour une bonne et très claire introduction aux faisceaux.

Un faisceau est un foncteur de la catégorie opposée de sous-espaces ouverts d'un espace topologique dans une autre catégorie (principalement la catégorie de groupes commutatifs ou celle d'ensembles) qui satisfait quelques bonnes propriétés. En topologie algébrique, par contre, la catégorie d'espaces vectoriels de dimension finie est aussi employée comme catégorie d'arrivée.

Définition 0.4.1. Un *préfaisceau* d'un espace topologique X dans une catégorie \mathcal{C} est un foncteur entre la catégorie opposée de sous-espaces ouverts de X ($\mathcal{O}^{\text{op}}(X)$), où les morphismes sont les inclusions et \mathcal{C} , c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C},$$

ou bien, de manière équivalente, un foncteur contravariant entre $\mathcal{O}(X)$ et \mathcal{C} . Pour chaque ouvert $U \subset X$, on dira que $\mathcal{F}(U)$ sont les *sections* de \mathcal{F} sur U . De même, on dira que $\mathcal{F}(X)$ sont les *sections globales* du faisceau \mathcal{F} .

Définition 0.4.2. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ un préfaisceau et $U \subset V \subset X$ des sous-espaces ouverts. Soit $s_V \in \mathcal{F}(V)$ une section. Alors on écrira $(s_V)|_U$ pour l'image de s_V par $\mathcal{F}(i)$, où $i : U \rightarrow V$ est l'inclusion. De même, on définit la *fibres* de \mathcal{F} à $x \in X$, (\mathcal{F}_x) comme la limite directe de $\{\mathcal{F}(U) \mid x \in U\}$, où U parcourt les ouverts dont x est un élément.

On peut aussi définir des morphismes de préfaisceaux.

Définition 0.4.3. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{O}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ deux préfaisceaux. Un *morphisme de préfaisceaux* $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est une transformation naturelle entre les deux préfaisceaux.

Définition 0.4.4. Un *faisceau* de X dans une catégorie \mathcal{C} est un préfaisceau $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ qui satisfait :

- Pour tout ouvert $U \subset X$, réunion d’une famille d’ouverts $\{U_k\}_{k \in K}$ et pour toute famille $\{s_k\}$ de sections de \mathcal{F} sur les ouverts U_k vérifiant $(s_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j)|_{U_i \cap U_j}$ il existe une seule section s de \mathcal{F} sur U telle que $s|_{U_k} = s_k$ pour tout $k \in K$.

Définition 0.4.5. Un *morphisme de faisceaux* est un morphisme de préfaisceaux entre deux faisceaux.

Définition 0.4.6. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques et soit \mathcal{F} un faisceau sur X . On définit le faisceau *image directe de \mathcal{F} par f* comme

$$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

Il est facile de voir que cela constitue un faisceau.

Définition 0.4.7. Soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X . Il existe un faisceau \mathcal{F}^+ et un morphisme de préfaisceaux entre \mathcal{F} et \mathcal{F}^+ tel que, pour tout faisceau \mathcal{G} et tout morphisme de préfaisceaux entre \mathcal{F} et \mathcal{G} il existe un seul morphisme de faisceaux entre \mathcal{F}^+ et \mathcal{G} rendant commutatif le diagramme correspondant [40, Page 85]. Ce faisceau \mathcal{F}^+ est le seul (à isomorphisme près) qui satisfait cette propriété et reçoit le nom de *faisceau associé à \mathcal{F}* .

Définition 0.4.8. Soient X et Y des espaces topologiques $f : X \rightarrow Y$ une application continue et $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(Y) \rightarrow \mathcal{C}$ un faisceau. On définit le préfaisceau *image inverse de \mathcal{F} par f* comme

$$(f^{-1}\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(V).$$

Le faisceau image inverse est le faisceau associé au préfaisceau image inverse. On notera $f^*\mathcal{F}$ ce faisceau. On ne doit pas confondre le concept de faisceau associé à un préfaisceau avec celui de faisceau associé à un faisceau qui va être employé pendant toute la thèse. On utilisera aussi le nom “faisceau associé” pour faire référence au faisceau associé à un faisceau, mais jamais au faisceau associé à un préfaisceau.

Dans cette thèse, en général on travaillera surtout avec quelques faisceaux qui seront en lien avec les faisceaux constructibles.

Définition 0.4.9. Un préfaisceau $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ est dit *constant à valeur A* s'il est un foncteur constant à valeur A .

Définition 0.4.10. Un faisceau est dit *constant* s'il est le *faisceau associé* (voir [40, Page 85]) à un préfaisceau constant.

Définition 0.4.11. Un faisceau $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ est dit *localement constant* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\mathcal{F}|_U$ est constant.

Définition 0.4.12. Un faisceau $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ est dit *constructible* s'il existe une partition finie $\{X_k\}_{k \in K}$ de sous-espaces définissables telle que $\mathcal{F}|_{X_k}$ est localement constant.

L'importance des faisceaux dans ce travail se doit principalement à la possibilité de pouvoir définir une cohomologie de faisceaux. Lorsqu'on travaille avec des complexes cellulaires ou simpliciaux il y a deux façons de définir cette cohomologie. On peut la définir comme une cohomologie de Čech [21] ou avec des résolutions injectives [35]. On va présenter cette deuxième méthode.

Définition 0.4.13. Soit \mathcal{C} la catégorie de groupes commutatifs. Étant donné un faisceau $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$, on peut prendre une résolution injective de faisceaux [38, Chapter III, Corollary 2.3]

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}^0 \rightarrow \mathcal{J}^1 \rightarrow \mathcal{J}^2 \rightarrow \dots$$

c'est-à-dire, une suite exacte où les \mathcal{J}^k sont injectives dans la catégorie de faisceaux de groupes commutatifs, et après appliquer le foncteur des sections globales pour obtenir une suite

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{J}^0(X) \rightarrow \mathcal{J}^1(X) \rightarrow \dots$$

qui n'est exacte que jusqu'au terme $\mathcal{F}(X)$, puisque le foncteur des sections globales est exacte à gauche [38, Chapter II, Exercice 1.8]. Finalement on peut définir le complexe de cochaînes $\mathcal{J}^\bullet(X)$ comme

$$0 \rightarrow \mathcal{J}^0(X) \rightarrow \mathcal{J}^1(X) \rightarrow \mathcal{J}^2(X) \rightarrow \dots$$

et prendre sa cohomologie $H^*(\mathcal{J}^\bullet(X))$. Alors on définit la cohomologie du faisceau \mathcal{F} comme

$$H^*(X, \mathcal{F}) = H^*(\mathcal{J}^\bullet(X)).$$

Cette définition est indépendante du choix de la résolution injective. Comme dans cette thèse on travaillera avec la catégorie d'espaces vectoriels de dimension finie, on prendra les résolutions injectives dans la catégorie de groupes commutatifs sous-jacent.

Définition 0.4.14. Soit $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ un faisceau $U \subset X$ un ouvert et $s \in \mathcal{F}(U)$ une section. On définit le *support* de s comme

$$\text{supp}(s) = \{x \in U \mid s_x \neq 0\},$$

où s_x est l'image de $s \in \mathcal{F}(U)$ dans \mathcal{F}_x par l'homomorphisme canonique naturel entre les deux objets.

Lorsque X est un espace localement compact, on définit la cohomologie à support compact d'un faisceau \mathcal{F} d'une façon très similaire à celle de la Définition 0.4.13. D'abord on prend aussi une résolution injective du faisceau :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{J}^0 \rightarrow \mathcal{J}^1 \rightarrow \mathcal{J}^2 \rightarrow \dots,$$

mais après, au lieu d'appliquer le foncteur de sections on applique le foncteur de sections à support compact, c'est-à-dire, le foncteur qui envoie chaque faisceau \mathcal{J} sur ses sections sur X à support compact. Le reste du le procédé est équivalent. On notera la cohomologie à support compact comme $H_c^*(X, \mathcal{F})$.

Définition 0.4.15. Soit X un espace topologique, $W \subset X$ un sous-espace localement fermé et \mathcal{F} un faisceau sur W . On définit le faisceau *prolongement par zéro* de \mathcal{F} comme le faisceau $\mathcal{F}_!$ sur X dont, pour chaque ouvert U de X , les sections sont :

$$\mathcal{F}_!(U) = \{s \in \mathcal{F}(W \cap U) \mid \text{supp}(s) \text{ est fermé dans } U\}.$$

Il y a quelques propriétés des faisceaux qu'on doit rappeler pour ce travail. Les détails peuvent être consultés dans [21], [24], [37], [40] et [71].

Lemme 0.4.16. (A) Si $\mathcal{F} : \mathcal{O}^{\text{op}}(X) \rightarrow \mathcal{C}$ est constant et $f : X \rightarrow X$ est une application continue, alors $f^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

(B) Si X est simplement connexe et \mathcal{F} est localement constant, alors \mathcal{F} est constant.

(C) Soit $f : X \rightarrow Y$ une application propre (dans notre cas on ne demande que l'image réciproque par f de tout sous-espace compact de Y soit compacte) et soit \mathcal{F} un faisceau sur Y . Alors il existe un homomorphisme $f^* : H_c^*(Y, \mathcal{F}) \rightarrow H_c^*(X, f^*\mathcal{F})$ induit par f .

(D) Soit A un sous-espace définissable de X et soit $\tilde{\mathbb{R}}_A$ le faisceau constant à valeur \mathbb{R} sur A . Alors $H_c^*(A, \tilde{\mathbb{R}}_A) \cong H_c^*(A; \mathbb{R})$ (la cohomologie singulière à support compact et coefficients dans \mathbb{R}).

Chapitre 1

Le Nombre de Lefschetz

Combinatoire

Un premier pas pour obtenir un théorème de Lefschetz du point fixe dans des espaces qui ne sont pas forcément des complexes compacts est d'étendre le théorème classique pour des sous-espaces d'un complexe simplicial qui ne sont pas toujours fermés. Dans [11, Theorem] le théorème suivant est prouvé :

Théorème 1.0.1. *Soit X un complexe simplicial et A un sous-complexe. Soit $f : X \rightarrow X$ une application telle que $f(A) \subset A$. Alors $\Lambda(f, (X, A)) \neq 0$ implique l'existence d'un point fixe de f dans $\overline{X \setminus A}$.*

En quelque sorte, cela représente un théorème du point fixe pour l'ouvert $X \setminus A$, mais où tous les points de X qui ne sont pas dans $X \setminus A$ semblent jouer un rôle important. De plus, le théorème précédent ne fournit pas une condition d'existence de points fixes si A est contenu dans X mais il n'est pas un sous-complexe (ou $X \setminus A$ n'est pas ouvert).

À ce chapitre on généralisera ce théorème dans le cas d'un homéomorphisme et en plus on réduira la dépendance par rapport aux points qui ne sont pas dans l'espace. Aussi, dans l'Exemple 1.3.4 on verra que le nombre de Lefschetz combinatoire parfois permet de compter mieux le nombre de points fixes d'un espace que le nombre de Lefschetz classique. En plus, ce nombre constituera une généralisation de la caractéristique d'Euler combinatoire employée dans [7], [8] et [21] et aussi du nombre de Lefschetz lorsque l'espace est compact.

Le théorème qu'on obtiendra est le suivant :

Theorem 1.3.2. *Soit X un complexe simplicial et soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme. Soit $U \subset X$ un sous-espace f -invariant définissable. Si $\Lambda(f, U)_X \neq 0$, alors f a un point fixe dans \overline{U} .*

Remarquons qu'au Chapitre 2 on étendra ce résultat pour les applications ouvertes.

Finalelement, l'invariant qu'on va construire permettra la définition d'une intégration "par rapport aux points fixes", laquelle est exposée au Chapitre 3.

À ce chapitre on travaillera toujours avec des homéomorphismes (même si au Chapitre 2 on étendra les résultats pour des applications ouvertes). En plus, les espaces seront des sous-espaces définissables de complexes simpliciaux qui seront f -invariants pour l'homéomorphisme f considéré. Aussi, les résultats à ce chapitre constituent la première partie de [55]. Comme il y est déjà remarqué, la difficulté principale pour arriver au Théorème 1.3.2 est celle de trouver une possible définition et vérifier qu'elle est cohérente.

La définition suivante sera employée au long de tout de chapitre.

Définition 1.0.2. Soit $f : X \rightarrow X$ une application et A un sous ensemble de X . A est dit f -invariant si $f(A) = A$.

1.1 Définition du nombre de Lefschetz combinatoire

On définira le nombre de Lefschetz combinatoire d'un espace définissable U par rapport à un complexe simplicial X tel que $U \subset X$. La définition sera divisée en quelques étapes (les Définitions 1.1.2, 1.1.3 et 1.1.4).

Soit X un complexe simplicial. Pour chaque dimension $p \geq 0$, les p -simplexes de X déterminent les p -chaînes simpliciales de X , notés avec $C_p(X)$.

Définition 1.1.1. Soit X un complexe simplicial et soit $W \subset X$ un sous-complexe simplicial généralisé. Pour chaque dimension $p \geq 0$, une *base* de W est constituée par les p -simplexes de X dont l'intérieur est dans W .

Soit X un complexe simplicial et soit $\phi : C(X) \rightarrow C(X)$ un morphisme de chaînes simpliciales. Le morphisme ϕ peut être représenté comme une collection de matrices $M_p(\phi, X)$ (X est un complexe fini) dans chaque dimension $p \geq 0$. Considérons maintenant le sous-complexe généralisé $W \subset X$. On peut restreindre chaque matrice $M_p(\phi, X)$ à la sous-matrice carrée $M_p(\phi, X)|_W$ où chaque position (i, j) correspond aux simplexes σ_p^i, σ_p^j de la base de W .

Définition 1.1.2. Soit X un complexe simplicial et soit $\phi : C(X) \rightarrow C(X)$ un morphisme de chaînes simpliciales. Soit $W \subset X$ un sous-complexe simplicial généralisé. Avec la notation précédente, on définit

$$L^c(\phi, W) = \sum_p (-1)^p \text{tr}(M_p(\phi, X)|_W).$$

Définition 1.1.3. Soit L un complexe simplicial, $\tilde{f} : L \rightarrow L$ un homéomorphisme et $K \subset L$ un sous-complexe généralisé \tilde{f} -invariant. Soit \tilde{f}^{simp} une approximation simpliciale de \tilde{f} (rappelons-nous qu'il est possible que la source ne soit pas L mais une subdivision barycentrique). Afin de simplifier la notation, on notera aussi \tilde{f}^{simp} , le morphisme de chaînes simpliciales déterminé par la composition de l'opérateur subdivision (voir [61, Theorem 17.2]) et l'application induite par \tilde{f}^{simp} sur les chaînes simpliciales. Avec cette notation, on définit $\Lambda_c(\tilde{f}, K)$ comme $\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K)$.

Définition 1.1.4. Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme et $U \subset X$ un sous-espace f -invariant définissable. Soit \bar{U} l'adhérence de U dans X . On définit $\Lambda(f, U)_X$ comme $\Lambda_c(\tilde{f}, K)$, où \tilde{f} est l'application induite par f dans une triangulation (L, \bar{K}, K) de X compatible avec (X, \bar{U}, U) (l'existence de cette triangulation est garantie par le Théorème 0.3.8). On dira que $\Lambda(f, U)_X$ est le *nombre de Lefschetz combinatoire de f dans U relatif à X* . S'il n'y a pas de doute sur l'entourage X considéré, on dira simplement *nombre de Lefschetz combinatoire de f dans U* mais on écrira toujours $\Lambda(f, U)_X$.

On peut résumer la définition du nombre de Lefschetz combinatoire de f dans U relatif à X dans les étapes suivantes :

1. D'abord une triangulation (L, \bar{K}, K) de X compatible avec (X, \bar{U}, U) et une application $\tilde{f} : L \rightarrow L$ induite par f sont choisies.
2. En suite, on prend une approximation simpliciale $\tilde{f}^{\text{simp}} : L \rightarrow L$ de \tilde{f} .
3. Finalement, si $\tilde{f}^{\text{simp}} : C_*(L) \rightarrow C_*(L)$ est le morphisme de chaînes simpliciales induit (rappelons-nous qu'ici on considère la composition de l'opérateur sous-division avec l'application induite par \tilde{f}^{simp} sur les chaînes simpliciales), nous définissons $\Lambda(f, U)_X = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K)$.

Observation 1.1.5. Dans les conditions précédentes, comme $f|_U$ peut être prolongé en un homéomorphisme entre \bar{U} et lui-même, on peut considérer aussi $\Lambda(f, U)_{\bar{U}}$. On verra que, dans ce cas, $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(f, U)_{\bar{U}}$. En particulier, $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(f', U)_{X'}$ pour chaque prolongement f' de $f|_{\bar{U}}$ sur $X' \supset \bar{U}$. En fait,

$$\Lambda(f, U)_X = \Lambda(f, U)_{\bar{U}} = \Lambda(f', U)_{X'}$$

Remarquons que l'emploi de $\Lambda(f, U)_{\bar{U}}$ constitue un abus de notation car \bar{U} n'est pas forcément un complexe simplicial. On aurait dû écrire $\Lambda(\tilde{f}, K)_{\bar{K}}$ au lieu de $\Lambda(f, U)_{\bar{U}}$.

Observation 1.1.6. Soit $g : X \rightarrow L$ la triangulation compatible avec X, \bar{U} et U choisie dans la Définition 1.1.4. Comme U est f -invariant, on a $f(U) = U$ et donc $f(\bar{U}) = \bar{U}$. De plus, puisque U est définissable, $X \setminus U$ sera aussi définissable et, comme f est un homéomorphisme, $X \setminus U$ sera aussi f -invariant. Alors, comme $f(\bar{U}) = \bar{U}$, on retrouve que $\bar{U} \setminus U$ est f -invariant et définissable (\bar{U} est définissable car l'adhérence d'un définissable est aussi définissable [74, Lemma 3.4, Chapter 1]).

Par conséquent, comme g est un homéomorphisme, $g(U)$ et $g(\bar{U}) \setminus g(U)$ sont \tilde{f} -invariants (ils sont définissables puisqu'ils sont des réunions de simplexes ouverts). Aussi, comme g est un homéomorphisme, $g(\bar{U}) = \overline{g(U)} = \bar{K}$, qui est un sous-complexe simplicial de L (Observation 0.3.2).

Observation 1.1.7. Sous les conditions de la Définition 1.1.4, remarquons que comme \bar{K} est \tilde{f} -invariant, \tilde{f}^{simp} envoie les chaînes simpliciales d'une sous-division barycentrique de \bar{K} sur des chaînes simpliciales de \bar{K} . De plus, si \tilde{f}^{simp} est une approximation simpliciale de $\tilde{f} : L \rightarrow L$, $\tilde{f}^{\text{simp}}|_{\bar{K}}$ sera une approximation simpliciale de $\tilde{f}|_{\bar{K}}$. Cela suggère que $\Lambda(f, U)_X$ peut être égal à $\Lambda(f, U)_{\bar{U}}$.

Exemple 1.1.8. Considérons l'homéomorphisme $\alpha : I \times I \rightarrow I \times I$ défini par $\alpha(x, y) = (x + x(1-x)(x-y), y)$, qui dilate l'intérieur du carré en même temps qu'il maintient la diagonale fixe. De plus, la restriction de α au sous-complexe généralisé U de la Figure 1.1.1 est aussi un homéomorphisme. Une approximation simpliciale de α est l'identité. Dans ce cas on a

$$\Lambda(f, U)_{I \times I} = (-1)^1 \cdot 3 + (-1)^2 \cdot 2 = -1.$$

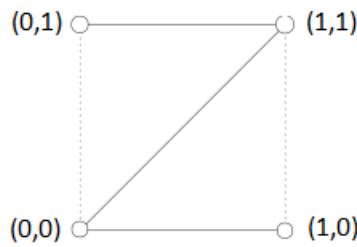


FIGURE 1.1.1 – Complexe U consistant de trois arêtes ouvertes et deux 2-simplexes ouverts.

1.2 Le nombre de Lefschetz combinatoire est bien défini

Arrivés à ce point, on voit qu'afin de pouvoir définir le nombre de Lefschetz combinatoire d'un homéomorphisme f d'un espace définissable U on a dû faire quelques choix. D'abord, on a choisi un entourage simplicial X où l'application peut se prolonger comme homéomorphisme. Ensuite, on a pris une triangulation de l'espace compatible avec (X, \bar{U}, U) et finalement on a choisi une approximation simpliciale. Avant de continuer on devrait vérifier alors que le nombre de Lefschetz combinatoire est bien défini (l'équivalent pour la caractéristique d'Euler combinatoire a été fait dans [9] et dans [59]). Bref, on doit faire le suivant.

1. Prouver que $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(f, U)_{\bar{U}}$.
2. Étant données deux triangulations de X (L, \bar{K}, K) et (L', \bar{K}', K') compatibles avec X, \bar{U} et U , et \tilde{f} et \tilde{f}' les applications y induites par f , prouver que $\Lambda_c(\tilde{f}, K) = \Lambda_c(\tilde{f}', K')$.
3. Démontrer que $\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K) = \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, K)$ lorsque \tilde{f}^{simp} et \tilde{f}'^{simp} sont deux approximations simpliciales de \tilde{f} (définies dans des structures simpliciales de $|K|$ qui peuvent être différentes).

Remarquons que (1) ne montre pas l'indépendance de $\Lambda(f, U)_X$ par rapport aux entourages simpliciaux de U mais seulement par rapport à ceux de $\bar{U} \subset X$ (c'est pour cela que le terme X apparaît dans la notation du nombre combinatoire). Or, une fois déterminée l'adhérence de l'espace U , le nombre combinatoire sera bien défini. D'ailleurs, l'indépendance totale du nombre de Lefschetz combinatoire par rapport aux entourages simpliciaux de U sera démontré au Chapitre 2.

Commençons par prouver (3).

Lemme 1.2.1 [55, Lemma 3.10]. *Soient X un complexe simplicial et $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme. Soit $U \subset X$ un sous-espace f -invariant définissable et soit (L, \bar{K}, K) une triangulation de X compatible avec X, \bar{U} et U , et notons \tilde{f} , l'application induite par f sur L . Finalement, soient \tilde{f}^{simp} et \tilde{f}'^{simp} deux approximations simpliciales de \tilde{f} . Alors $\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K) = \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, K)$.*

Démonstration. D'abord, grâce à l'Observation 1.1.6, on sait que K, \bar{K} et $\bar{K} \setminus K$ sont \tilde{f} -invariants. De plus, \tilde{f}^{simp} et \tilde{f}'^{simp} envoient les chaînes de \bar{K} sur des chaînes de \bar{K} (Observation 1.1.7). Remarquons de nouveau que \bar{K} est un sous-complexe de L puisque K est un sous-complexe généralisé d'un complexe simplicial fini L .

La démonstration est faite par récurrence.

Comme $\overline{K} \setminus K$ satisfait les conditions de la Définition 1.1.2, on peut considérer $\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{K} \setminus K)$. Alors, par la définition de Λ^c , on a :

$$\begin{aligned}\Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{K}) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{K} \setminus K) + \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K) , \\ \Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}'}, \overline{K}) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}'}, \overline{K} \setminus K) + \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}'}, K) .\end{aligned}$$

Maintenant, par le Théorème de la trace de Hopf (Théorème 0.1.12), étant \tilde{f}^{simp} et $\tilde{f}^{\text{simp}'}$ des approximations simpliciales de $\tilde{f}|_{\overline{K}}$, on a

$$\Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{K}) = \Lambda(\tilde{f}, \overline{K}) = \Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}'}, \overline{K}) .$$

D'autre part, on peut répéter le procédé en considérant $\overline{K} \setminus K$ au lieu de K car $\overline{\overline{K} \setminus K}$ est un complexe simplicial \tilde{f} -invariant, \tilde{f}^{simp} et $\tilde{f}^{\text{simp}'}$ envoient les chaînes de $\overline{\overline{K} \setminus K}$ sur des chaînes de $\overline{\overline{K} \setminus K}$ et peuvent être considérées comme des approximations simpliciales de $\tilde{f}|_{\overline{\overline{K} \setminus K}}$ et $(\overline{\overline{K} \setminus K}) \setminus (\overline{K} \setminus K)$ satisfait les conditions de la Définition 1.1.2. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned}\Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K} \setminus K}) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, (\overline{\overline{K} \setminus K}) \setminus (\overline{K} \setminus K)) + \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{K} \setminus K) , \\ \Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}'}, \overline{\overline{K} \setminus K}) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}'}, (\overline{\overline{K} \setminus K}) \setminus (\overline{K} \setminus K)) + \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}'}, \overline{K} \setminus K) .\end{aligned}$$

Remarquons encore que

$$\Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K} \setminus K}) = \Lambda(\tilde{f}^{\text{simp}'}, \overline{\overline{K} \setminus K}) .$$

Maintenant, si l'on emploie la récurrence, la dimension des complexes diminue car $\dim(\overline{K} \setminus K) > \dim((\overline{\overline{K} \setminus K}) \setminus (\overline{K} \setminus K)) > \dots$ Après quelque temps, la dimension du premier terme du côté droit des égalités deviendra zéro. À ce moment, ce complexe, noté K_0 , sera une réunion finie de sommets, et alors $\tilde{f}|_{K_0} = \tilde{f}^{\text{simp}}|_{K_0} = \tilde{f}^{\text{simp}'}|_{K_0}$. Dans ce cas,

$$\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K_0) = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}'}, K_0)$$

et, en revenant sur les dimensions supérieures, on obtient

$$\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K) = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}'}, K) . \quad \square$$

Démontrons maintenant 2.

Lemme 1.2.2 [55, Lemma 3.11]. *Soit X un complexe simplicial et soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme. Soit $U \subset X$ un sous-espace f -invariant définissable. Soient (L, \overline{K}, K) et (L', \overline{K}', K') deux triangulations de X compatibles avec X, \overline{U} et U , et soient \tilde{f} et \tilde{f}' les applications induites par f sur L et L' , respectivement. Dans ce cas, $\Lambda_c(\tilde{f}, K) = \Lambda_c(\tilde{f}', K')$.*

Démonstration. De nouveau, la triangulation est compatible avec $\overline{\overline{U} \setminus U}, (\overline{\overline{U} \setminus U}) \setminus (\overline{U} \setminus U), \dots$, et aussi on a

$$\overline{\overline{K} \setminus K} \approx \overline{\overline{K}' \setminus K'}, \quad (\overline{\overline{K} \setminus K}) \setminus (\overline{K} \setminus K) \approx (\overline{\overline{K}' \setminus K'}) \setminus (\overline{K}' \setminus K'), \quad \dots$$

De plus, $\overline{\overline{K}}$ (respectivement $\overline{\overline{K}'}$), $\overline{\overline{K} \setminus K}, \dots$ seront des complexes simpliciaux \tilde{f} -invariants (respectivement, \tilde{f}' -invariants). Alors \tilde{f}^{simp} (respectivement, \tilde{f}'^{simp}) enveloppera les chaînes de $\overline{\overline{K}}, \overline{\overline{K} \setminus K}, \dots$ sur des chaînes de $\overline{\overline{K}'}, \overline{\overline{K}' \setminus K'}, \dots$

On emploiera un argument de récurrence. D'un côté on a :

$$\begin{aligned} \Lambda_c(\tilde{f}, \overline{\overline{K}}) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}}), & \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{\overline{K}'}) &= \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}'}) , \\ \Lambda_c(\tilde{f}, K) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K), & \Lambda_c(\tilde{f}', K') &= \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, K') , \\ \Lambda_c(\tilde{f}, \overline{\overline{K} \setminus K}) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K} \setminus K}), & \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{\overline{K}' \setminus K'}) &= \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}' \setminus K'}) . \end{aligned}$$

Rappelons-nous qu'on vient de montrer que les termes du côté gauche des égalités ne dépendent pas de l'approximation simpliciale choisie.

Maintenant, comme

$$\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}}) = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K} \setminus K}) + \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K) ,$$

et le même est vérifié pour K' , on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda_c(\tilde{f}, \overline{\overline{K}}) &= \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}}) = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K} \setminus K}) + \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K) \\ &= \Lambda_c(\tilde{f}, \overline{\overline{K} \setminus K}) + \Lambda_c(\tilde{f}, K) , \\ \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{\overline{K}'}) &= \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}'}) = \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}' \setminus K'}) + \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, K') \\ &= \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{\overline{K}' \setminus K'}) + \Lambda_c(\tilde{f}', K') . \end{aligned}$$

D'un autre côté, comme $\overline{\overline{K}}$ et $\overline{\overline{K}'}$ sont homéomorphes, on a

$$\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}}) = \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, \overline{\overline{K}'})$$

car, par conséquence du Théorème de la trace de Hopf,

$$\Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, \overline{K}) = \Lambda(\tilde{f}, \overline{K}), \quad \Lambda^c(\tilde{f}'^{\text{simp}}, \overline{K}') = \Lambda(\tilde{f}', \overline{K}'),$$

et [61, Section 22] implique $\Lambda(\tilde{f}, \overline{K}) = \Lambda(\tilde{f}', \overline{K}')$, d'où $\Lambda_c(\tilde{f}, \overline{K}) = \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{K}')$.

De nouveau, $\overline{K} \setminus K$ et $\overline{K}' \setminus K'$ sont dans les mêmes conditions que K et K' (f -invariance, définissabilité, ...). Alors, si on répète le dernier argument, on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda_c(\tilde{f}, \overline{\overline{K \setminus K}}) &= \Lambda_c(\tilde{f}, (\overline{\overline{K \setminus K}}) \setminus (\overline{K \setminus K})) + \Lambda_c(\tilde{f}, \overline{K \setminus K}), \\ \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{\overline{K' \setminus K'}}) &= \Lambda_c(\tilde{f}', (\overline{\overline{K' \setminus K'}}) \setminus (\overline{K' \setminus K'})) + \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{K' \setminus K'}). \end{aligned}$$

Encore une fois, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz classique et le Théorème de la trace de Hopf (Théorème 0.1.12) impliquent que $\Lambda_c(\tilde{f}, \overline{\overline{K \setminus K}}) = \Lambda_c(\tilde{f}', \overline{\overline{K' \setminus K'}})$. On peut répéter cette procédure jusqu'à ce que la dimension du premier terme dans les égalités à droite devienne nulle et qu'alors les nombres de Lefschetz soient égaux pour \tilde{f} et \tilde{f}' . Ainsi on a $\Lambda_c(\tilde{f}, K) = \Lambda_c(\tilde{f}', K')$. \square

La propriété 1 s'obtient d'une manière similaire aux Lemmes 1.2.1 et 1.2.2.

1.3 L'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire et un théorème de points fixes

Le nombre de Lefschetz combinatoire est additif. Cela signifie que, si U et V sont deux sous-espaces disjoints, f -invariants et définissables d'un complexe simplicial X , alors $\Lambda(f, U \cup V)_X = \Lambda(f, U)_X + \Lambda(f, V)_X$. En règle générale, si U et V ne sont pas disjoints, on a une propriété d'inclusion-exclusion :

Proposition 1.3.1. *Soient X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme et U et V des sous-espaces f -invariants définissables de X . Alors,*

$$\Lambda(f, U \cup V)_X = \Lambda(f, U)_X + \Lambda(f, V)_X - \Lambda(f, U \cap V)_X.$$

Démonstration. Par définition, on a $\Lambda(f, U \cup V)_X = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, A \cup B)$, où (L, A, B) est une triangulation qui est compatible avec (X, U, V) . On a aussi $\Lambda(f, U)_X = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, A)$, $\Lambda(f, V)_X = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, B)$ et $\Lambda(f, U \cap V)_X = \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, A \cap B)$.

1.3 L'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire et un théorème de points fixes

Finalement, avec la notation de la Définition 1.1.2, on a :

$$\begin{aligned} \sum_p (-1)^p \operatorname{tr}(M_p(\tilde{f}^{\text{simp}}, L)|_{A \cup B}) &= \sum_p (-1)^p \operatorname{tr}(M_p(\tilde{f}^{\text{simp}}, L)|_A) \\ &+ \sum_p (-1)^p \operatorname{tr}(M_p(\tilde{f}^{\text{simp}}, L)|_B) - \sum_p (-1)^p \operatorname{tr}(M_p(\tilde{f}^{\text{simp}}, L)|_{A \cap B}) \end{aligned}$$

car l'égalité est vérifiée dans chaque dimension. \square

Finalement, on obtient le théorème de point fixe associé au nombre de Lefschetz combinatoire. Remarquons que, lorsque l'application est un homéomorphisme, ce théorème généralise le théorème classique du point fixe de Lefschetz et aussi [11, Theorem 3.1].

Théorème 1.3.2 (Théorème de Lefschetz du point fixe généralisé [55, Theorem 4.1]). *Soit X un complexe simplicial et soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme. Soit $U \subset X$ un sous-espace f -invariant définissable. Si $\Lambda(f, U)_X \neq 0$, alors f a un point fixe dans \bar{U} .*

Démonstration. Soit (Y, \bar{K}, K) une triangulation compatible avec (X, \bar{U}, U) et soit \tilde{f} l'application induite sur Y par cette triangulation. Alors f a un point fixe dans \bar{U} si et seulement si \tilde{f} a un point fixe dans \bar{K} . Supposons que \tilde{f} n'a pas de points fixes dans \bar{K} . Comme dans la démonstration du théorème classique du point fixe de Lefschetz [61, Theorem 22.3], on peut assumer que, pour tous les sommets v de \bar{K} , on a la condition suivante

$$\tilde{f}(\bar{\text{St}}(v, \bar{K})) \cap \bar{\text{St}}(v, \bar{K}) = \emptyset. \quad (1.1)$$

Maintenant, on peut choisir une sous-division Y' de Y telle que \tilde{f} a une approximation simpliciale $\tilde{f}^{\text{simp}} : Y' \rightarrow Y$. On montrera que si s et σ sont, respectivement, des simplexes de \bar{K}' et \bar{K} (où \bar{K}' est la sous-division induite sur \bar{K}), tels que $s \subset \sigma$, alors $\tilde{f}^{\text{simp}}(s) \neq \sigma$.

Supposons que $\tilde{f}^{\text{simp}}(s) = \sigma$. Soit w un sommet de s et soit $\tilde{f}^{\text{simp}}(w) = v$ un sommet de σ . Comme $s \subset \sigma$, alors $w \in \bar{\text{St}}(v, \bar{K})$, et, par conséquent, $\tilde{f}(w) \in \tilde{f}(\bar{\text{St}}(v, \bar{K}))$.

D'ailleurs, d'après la définition d'approximation simpliciale on a

$$\tilde{f}(\text{St}(w, \bar{K}')) \subset \text{St}(\tilde{f}^{\text{simp}}(w), \bar{K}),$$

et cela implique $\tilde{f}(w) \in \bar{\text{St}}(v, \bar{K})$. Alors on obtient $\tilde{f}(w) \in \tilde{f}(\bar{\text{St}}(v, \bar{K})) \cap \bar{\text{St}}(v, \bar{K})$, mais cela entraîne une contradiction avec ((1.1)).

Calculons maintenant $\Lambda(f, U)_X$. Si on note ϕ , la composition de l'opérateur sous-division avec \tilde{f}^{simp} , par définition on a

$$\Lambda(f, U)_X = \sum_p (-1)^p \text{tr}(M_p(\phi, X)_U).$$

Or, comme $\tilde{f}^{\text{simp}}(s) \neq \sigma$ pour tous les simplexes $s \in \overline{K}'$ et $\sigma \in \overline{K}$ tels que $s \subset \sigma$, toutes ces traces seront nulles. \square

Arrivés à ce point, on pourrait se demander si l'énoncé suivant est vrai : dans le cas où $\Lambda(f, U)_X$ n'est pas nul, alors f a un point fixe dans U . Ce résultat est faux. En fait, l'exemple suivant montre que les points fixes peuvent être seulement dans $\overline{A} \setminus A$.

Exemple 1.3.3. Soit $I = [0, 1]$ et considérons $f(t) = t^2$. Soit $U = \overset{\circ}{I}$. Alors, comme l'identité est une approximation simpliciale de f , on a $\Lambda(f, U)_I = \text{tr}(M_0(\text{id}, I)_{\overset{\circ}{I}}) - \text{tr}(M_1(\text{id}, I)_{\overset{\circ}{I}}) = 0 - 1 \neq 0$. Mais les seuls points fixes de f sont dans la frontière de l'intervalle.

Maintenant on présente un exemple très important dans cette thèse. Il reflète un grand avantage du nombre combinatoire sur le nombre de Lefschetz classique : parfois, même dans les espaces où le nombre de Lefschetz classique est défini, le nombre de Lefschetz combinatoire a le bénéfice de pouvoir compter mieux le nombre de points fixes. En plus, cet exemple prouve l'existence de situations où le théorème classique n'assure pas l'existence de points fixes qui, pourtant, sont détectés par le Théorème 1.3.2.

Exemple 1.3.4 [55, Example 4.3]. Soit $X = S^2$ la sphère et soit $f : X \rightarrow X$ la réflexion par rapport à l'équateur. Une possible triangulation de la sphère est la suspension d'un polygone vide (voir la Figure 1.3.1). On trouve alors que, même si l'ensemble de points fixes est infini (les points fixes de f sont les points sur l'équateur), le nombre de Lefschetz de f est zéro. La justification est la simple : pour chaque sommet fixe de la suspension (qui somme +1 au nombre de Lefschetz) il y a une arête fixe (qui somme -1).

Malgré cela, si on note X_m , le polygone régulier vide à m arêtes, et ΣX_m , ça suspension, on définit U_m comme le sous-complexe généralisé consistant des points de ΣX_m qui ne sont pas dans les arêtes ouvertes de l'équateur. Ce complexe est f -invariant et alors on peut y considérer le nombre de Lefschetz combinatoire. Comme f est une application simpliciale qui dans U_m n'a pas de points fixes dans des faces

1.3 L'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire et un théorème de points fixes

de dimension supérieur à zéro, on a que $\Lambda(f, U_m)_{X_m}$ est égal au nombre de sommets fixes par f , c'est-à-dire :

$$\Lambda(f, U_m)_{X_m} = m.$$

On voit dans ce cas qu'on peut approximer mieux la mesure du nombre de points fixes de l'application f en prenant les nombres combinatoires $\Lambda(f, U_m)_{X_m} = m$ (avec m aussi grand qu'on veut) qu'avec le nombre de Lefschetz classique.

Finalement, il convient de remarquer que si les sommets de l'équateur avaient été enlevés plutôt que les arêtes ouvertes pour construire U_m , les nombres de Lefschetz combinatoires de ces nouveaux complexes auraient été négatifs.

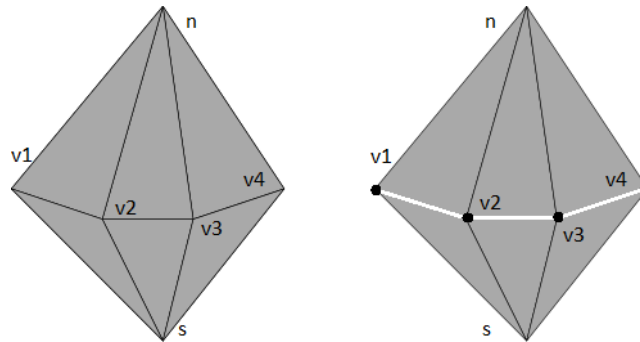


FIGURE 1.3.1 – À gauche, le complexe simplicial X_n ; à droite, le sous-complexe généralisé U_n .

Invariance Topologique du Nombre de Lefschetz Combinatoire

Après avoir défini le nombre de Lefschetz combinatoire et avoir obtenu le Théorème 1.3.2, la principale question de cette thèse a été si le nombre de Lefschetz combinatoire était un invariant topologique. Notamment la question est la suivante :

Question 1. Étant donnés X et Y des complexes simpliciaux, $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ des homéomorphismes et $U \subset X$ et $V \subset Y$ des sous-espaces définissables f et g -invariants (respectivement), s'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que $h \circ f|_U = g|_V \circ h$, est-il certain que $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(g, V)_Y$?

La réponse est oui mais ce n'est pas du tout une question triviale. En fait, la démonstration de cette invariance, constituée, avec le Théorème 1.3.2 l'un des principaux résultats de cette thèse et les étapes progressives réalisées sont divisées entre trois publications [2], [3] et [54].

L'importance de cette invariance n'est pas seulement de pouvoir dire que notre nombre combinatoire est un invariant. D'abord, au début de la thèse, il y avait des indices qui faisaient croire que si Hauptvermutung était vraie (Milnor a présenté dans [60] des contre-exemples pour dimension 6 ou supérieure), l'invariance serait garantie. Dans ce cas, trouver deux espaces homéomorphes avec des nombres de Lefschetz combinatoires différents aurait pu simplifier le contre-exemple de Milnor ou même réduire la dimension de celui-ci et ceci aurait été très important. Des contre-exemples différents de celui de Milnor ont été présentés par Simon Donaldson et par Michael Freedman (voir, par exemple [28]).

D'un autre côté, on avait aussi remarqué qu'une réponse affirmative à la Question 1 aurait aussi des implications très fortes (des nouveaux théorèmes de Lefschetz pour les espaces non bornés, une généralisation d'un théorème classique d'invariance topologique de l'indice de point fixe, des nouveaux axiomes pour le nombre de Lefschetz et une optimisation à l'heure de calculer le nombre de Lefschetz de certaines applications). Ces applications seront introduites soigneusement au Chapitre 4.

Jusqu'à présent, on sait que la caractéristique d'Euler combinatoire est invariante (ceci est démontré dans [9] et dans [59]) et aussi, d'après l'Observation 1.1.5, on peut déduire le résultat suivant pour le nombre de Lefschetz combinatoire.

Théorème 2.0.1. *Soient X et Y des complexes simpliciaux, $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ des homéomorphismes et $U \subset X$ et $V \subset Y$ des sous-espaces définissables f et g -invariants (respectivement). Soit $h : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme tel que $h(U) = V$ et $h \circ f = g \circ h$. Alors $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(g, V)_Y$.*

C'est-à-dire, le nombre de Lefschetz combinatoire est un invariant topologique par rapport à l'entourage simplicial choisi.

Dans ce chapitre, nous montrerons les résultats d'invariance de la même façon qu'ils ont été obtenus. En plus, cela ne entraînera pas de redondance car, même si le Théorème 2.3.2 généralisera le Corollaire 2.1.13 et le Théorème 2.2.10, tout le langage de faisceaux où le Corollaire 2.1.13 est né sera employé au Chapitre 3 pour obtenir une bonne façon de calculer le nombre de Lefschetz de certains faisceaux. Aussi, les résultats qui précèdent le Théorème 2.2.10 seront nécessaires au Chapitre 3 pour dessiner une intégrale par rapport à l'indice de point fixe et aussi au Chapitre 4 pour obtenir le Théorème 4.3.1.

Ainsi, on commencera ce chapitre avec l'introduction du nombre de Lefschetz pour des faisceaux. Cela se correspond à certains résultats de [54]. Grâce à ce langage de faisceaux, on montrera aussi le lien entre le nombre de Lefschetz combinatoire et le nombre de Lefschetz défini avec cohomologie à support compact (Théorème 2.1.11). Ensuite, à la Sous-section 2.2, on construira l'indice de point fixe combinatoire et quelques résultats dérivés de celui-ci parus dans [3]. On arrivera finalement à la Section 2.3, où l'on donnera la réponse à la Question 1. Comme complément à cette section, le nombre de Lefschetz pour des applications ouvertes sera défini et un nouveau théorème du point fixe sera obtenu (Théorème 2.4.7).

2.1 Le Nombre de Lefschetz dans le langage de Faisceaux

Suivant les idées présentées dans [21] pour la caractéristique d'Euler, dans [54] on a développé un nombre de Lefschetz dans le contexte des faisceaux.

Le grand problème à l'heure de définir le nombre de Lefschetz d'une application $f : X \rightarrow X$ pour un faisceau \mathcal{F} sur X est l'absence d'un isomorphisme entre \mathcal{F} et $f^*\mathcal{F}$ (rappelons-nous de l'existence d'un homomorphisme entre $H_c^*(X, \mathcal{F})$ et $H_c^*(X, f^*\mathcal{F})$ mentionnée dans le Point 0.4.16 du Lemme 0.4.16). Ce problème est

résolu dans la plupart des références, notamment dans [36, Exposé III, Appendice] en demandant l'existence d'un morphisme entre $f^*\mathcal{F}$ et \mathcal{F} . Néanmoins, maintenant on construira un faisceau \mathcal{F}' associé à \mathcal{F} qui permettra de définir un nombre de Lefschetz et d'obtenir de bons résultats de calcul (lesquels seront les protagonistes de la Section 3.2) et aussi d'avoir une construction axiomatique de ce nouvel invariant (laquelle on montrera à la Section 4.1.2). Aussi, dans certains cas, on verra dans cette section que le nombre de Lefschetz combinatoire est en fait le nombre de Lefschetz en cohomologie à support compact.

Dans cette section, on travaillera avec des complexes cellulaires plutôt qu'avec des complexes simpliciaux. Tous les complexes cellulaires seront finis (et alors, compacts) et les faisceaux seront des faisceaux d'espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 2.1.1. Soit X un complexe cellulaire. Comme il peut être plongé dans un certain \mathbb{R}^n on peut définir un *complexe cellulaire définissable* comme un complexe cellulaire X tel que toutes les cellules ouvertes sont définissables. Par conséquence, tous les squelettes (que l'on écrira comme $X^{(m)}$) d'un complexe cellulaire définissable seront aussi définissables.

Définition 2.1.2. Soit X un complexe cellulaire définissable. On définit un *sous-complexe cellulaire incomplet* de X comme une réunion de cellules ouvertes de X .

Les sous-complexes simpliciaux généralisés constituent un exemple familier de sous-complexes incomplets. D'ailleurs, par le Théorème 0.3.8, on peut penser aux sous-complexes cellulaires incomplets comme des sous-complexes simpliciaux généralisés. De même, on peut étendre la définition de nombre de Lefschetz combinatoire aux complexes cellulaires définissables de la façon suivante : si X est un complexe cellulaire définissable, $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme et $U \subset X$ un sous-complexe incomplet f -invariant, le Théorème 0.3.8 fournit une triangulation (X', U', f') de (X, U, f) ou X est un complexe simplicial et U un sous-complexe généralisé. Alors on définit $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(f', U')_{X'}$.

Afin d'avoir un isomorphisme entre le faisceau \mathcal{F} et le faisceau $f^*\mathcal{F}$, on travaillera avec les faisceaux suivants.

Définition 2.1.3. Soit X un complexe cellulaire définissable. On dit que le faisceau \mathcal{F} sur X d'espaces vectoriels réels de dimension finie est un *faisceau c -constructible* s'il existe une partition finie $\{X_i\}$ de sous-complexes incomplets définissables et localement compacts de X telle que, pour tout i , $\mathcal{F}|_{X_i}$ est constant dans chaque composante connexe (ceci est le cas, par exemple, d'un faisceau constructible dont les

composantes connexes de chaque X_i où le faisceau est localement constant sont simplement connexes).

Si $f : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme, on dira que le faisceau \mathcal{F} f - c -constructible est f - c -constructible si les X_i sont f -invariants.

On voudrait appliquer le Point 0.4.16 du Lemme 0.4.16 dans des situations avec un homéomorphisme $f : X \rightarrow X$ et un faisceau \mathcal{F} f - c -constructible. Malheureusement, même si l'on travaille avec des faisceaux localement constants et avec des applications qui respectent les composantes localement constantes, si les faisceaux ne sont pas constants, en général on n'a pas un isomorphisme canonique entre $f^*\mathcal{F}$ et \mathcal{F} . On peut pourtant sauver ce problème avec la construction d'un faisceau \mathcal{F}' associé au faisceau \mathcal{F} . On définit

$$\mathcal{F}' = (i_1)_!i_1^*\mathcal{F} \oplus (i_2)_!i_2^*\mathcal{F} \oplus \dots \oplus (i_k)_!i_k^*\mathcal{F},$$

où $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ sont les sous-complexes incomplets localement compacts de la partition de X de la Définition 2.1.3, les $i_j : X_j \rightarrow X$ sont des inclusions et $!$ est le prolongement par zéro (Définition 0.4.15) et on dira que \mathcal{F}' est un *faisceau f - c -constructible associé à \mathcal{F}* . Le Théorème 3.2.5 montrera que la définition du nombre de Lefschetz ne dépend pas de la partition $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Remarquons que \mathcal{F}' est automatiquement un faisceau f - c -constructible avec la même partition définissable que le faisceau f - c -constructible original.

On montrera dans cette section que sous certaines hypothèses, il existe un isomorphisme naturel entre $f^*(\mathcal{F}')$ et \mathcal{F}' . L'idée principale est que, d'après le premier point du Lemme 0.4.16, cet isomorphisme existe si le faisceau est constant.

Lemme 2.1.4 [54, Lemma 2.4]. *Soit A un espace topologique égal à la réunion disjointe de deux ouverts W_1 et W_2 . Soit \mathcal{F} un faisceau sur A . Alors il existe un isomorphisme canonique entre \mathcal{F} et $(i_1)_!i_1^*\mathcal{F} \oplus (i_2)_!i_2^*\mathcal{F}$, où i_1 et i_2 sont les inclusions.*

Démonstration. Comme W_1 et W_2 sont aussi fermés, on a $(i_1)_! = (i_1)_*$ et $(i_2)_! = (i_2)_*$. D'autre part, comme ils sont ouverts, on a $i_1^*\mathcal{F} = \mathcal{F}|_{W_1}$ et $i_2^*\mathcal{F} = \mathcal{F}|_{W_2}$. Par conséquent, si on choisit un ouvert V de A on a

$$((i_1)_!i_1^*\mathcal{F})(V) = ((i_1)_*\mathcal{F}|_{W_1})(V) = \mathcal{F}|_{W_1}(V \cap W_1) = \mathcal{F}(V \cap W_1).$$

Le même résultat est vrai pour i_2 . Finalement,

$$((i_1)_!i_1^*\mathcal{F} \oplus (i_2)_!i_2^*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(V \cap W_1) \oplus \mathcal{F}(V \cap W_2) \cong \mathcal{F}(V). \quad \square$$

Ce résultat implique le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.5 [54, Corollary 2.5]. *Soit X un espace topologique, A un sous-espace localement fermé de X constitué par la réunion disjointe de W_1 et W_2 , deux sous-espaces ouverts dans A . Soit \mathcal{F} un faisceau sur X et $j : A \rightarrow X$, $j_1 : W_1 \rightarrow X$, $j_2 : W_2 \rightarrow X$ les inclusions. Alors il y a un isomorphisme naturel*

$$j_!j^*\mathcal{F} \cong (j_1)_!j_1^*\mathcal{F} \oplus (j_2)_!j_2^*\mathcal{F}.$$

Démonstration. Soient $i_1 : W_1 \rightarrow A$ et $i_2 : W_2 \rightarrow A$ les inclusions. D'après le Lemme 2.1.4, on a

$$j^*\mathcal{F} \cong (i_1)_!i_1^*j^*\mathcal{F} \oplus (i_2)_!i_2^*j^*\mathcal{F} = (i_1)_!j_1^*\mathcal{F} \oplus (i_2)_!j_2^*\mathcal{F}$$

et alors

$$j_!j^*\mathcal{F} \cong j_!(i_1)_!j_1^*\mathcal{F} \oplus j_!(i_2)_!j_2^*\mathcal{F} \cong (j_1)_!j_1^*\mathcal{F} \oplus (j_2)_!j_2^*\mathcal{F},$$

où le dernier isomorphisme est conséquence de l'unicité du prolongement par zéro [71, 8.6, p. 63]. \square

Avant de montrer l'existence d'un isomorphisme naturel, montrons le lemme suivant.

Lemme 2.1.6 [54, Lemma 2.6]. *Soit X un espace topologique, $g : X \rightarrow X$ une application continue et $A \subset X$ un sous-espace localement fermé tel que $g(A) \subset A$. Si \mathcal{G} est un faisceau constant sur A et $i : A \subset X$ l'inclusion, on a*

$$g^*i_!\mathcal{G} \cong i_!\mathcal{G}.$$

Démonstration. Soit $p : A \rightarrow \{*\}$ l'application constante, V l'espace vectoriel déterminé par le faisceau constant et \mathcal{V} le faisceau constant sur $\{*\}$ dont les sections dans le point sont V . On a $\mathcal{G} = p^*\mathcal{V}$. Or, comme le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g|_A} & A \\ & \searrow p & \swarrow p \\ & & \{*\} \end{array}$$

est commutatif, on conclut $g^*_A\mathcal{G} = \mathcal{G}$. Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g|_A} & A \\ i \downarrow & & i \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Comme A est localement fermé dans X on a, d'après [40, Chapter II, 6.13]

$$g^*i_! \mathcal{G} \cong i_! g^*_{|A} \mathcal{G},$$

et alors

$$g^*i_! \mathcal{G} \cong i_! \mathcal{G}. \quad \square$$

Théorème 2.1.7 [54, Theorem 2.7]. *Soit X un complexe cellulaire définissable et soit $f: X \rightarrow X$ un homéomorphisme cellulaire. Soit \mathcal{F} un faisceau f - c -constructible tel que f respecte les composantes constantes du faisceau (c'est-à-dire, chaque réunion des composantes connexes d'un X_i où le faisceau $\mathcal{F}|_{X_i}$ a la même valeur). Alors il existe un isomorphisme naturel entre $f^*(\mathcal{F}')$ et \mathcal{F}' .*

Démonstration. Avec la notation du Lemme 0.4.16, on veut montrer que

$$f^*((i_1)_! i_1^* \mathcal{F} \oplus (i_2)_! i_2^* \mathcal{F} \oplus \dots \oplus (i_k)_! i_k^* \mathcal{F}) \cong (i_1)_! i_1^* \mathcal{F} \oplus (i_2)_! i_2^* \mathcal{F} \oplus \dots \oplus (i_k)_! i_k^* \mathcal{F}.$$

Comme l'image inverse respecte la somme directe, il suffit de prouver l'existence d'un isomorphisme entre $f^*((i_j)_! i_j^* \mathcal{F})$ et $(i_j)_! i_j^* \mathcal{F}$ pour tout $j = 1, \dots, k$.

D'après la Définition 2.1.3 on sait que ces faisceaux sont constants dans chaque composante connexe des sous-complexes X_j . Comme le nombre de ces composantes est fini, elles sont ouvertes et on peut appliquer le Corollaire 2.1.5 et séparer le faisceau $(i_j)_! i_j^* \mathcal{F}$ dans leur composantes constantes (les X_i 's sont localement fermés car ils sont homéomorphes à des sous-complexes incomplets localement compacts) et, comme elles sont aussi f -invariantes (f respecte ces composantes constantes), on peut appliquer le Lemme 2.1.6 et finir la démonstration. \square

Maintenant, il est possible de définir le nombre de Lefschetz pour des faisceaux f - c -constructibles.

Définition 2.1.8. Soit X un complexe cellulaire définissable, f un homéomorphisme cellulaire et \mathcal{F} un faisceau f - c -constructible sur X tel que f respecte les composantes constantes de \mathcal{F} . On définit le *nombre de Lefschetz faisceau-théorique de f associé à \mathcal{F}* comme

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(f^*, H_c^n(X, \mathcal{F}')).$$

On établit la notation $L_c(X, f) = L_c(X, f, \tilde{\mathbb{R}})$ (rappelons-nous que $\tilde{\mathbb{R}}$ est le faisceau constant à valeur \mathbb{R} sur X).

Observation 2.1.9. On verra que la somme $\sum_n (-1)^n \text{tr}(f^*, H_c^n(X, \mathcal{F}'))$ est convergente car $H_c^n(X, \mathcal{F}')$ devient nul après quelque naturel n suffisamment grand (voir Lemme 3.2.4).

Remarquons encore que la façon d'assigner le faisceau \mathcal{F}' à \mathcal{F} pourrait avoir été différente si on avait considéré une partition différente. Malgré cela, on verra avec le Théorème 3.2.5 que le nombre de Lefschetz est indépendant de ce choix et qu'il est alors bien défini. Par conséquence, employons \mathcal{F} pour désigner \mathcal{F} mais aussi \mathcal{F}' .

2.1.1 Un premier résultat d'invariance topologique

Dans cette sous-section, on montrera que le nombre de Lefschetz combinatoire est, en fait, le nombre de Lefschetz en cohomologie à support compact lorsque les espaces sont localement compacts et les homéomorphismes sont cellulaires (remarquons qu'une application simpliciale est aussi cellulaire). Ensuite, on obtiendra une nouvelle preuve pour le Lemme 1.2.2 et enfin on obtiendra un corollaire d'invariance topologique inspiré par l'invariance topologique de la cohomologie à support compact.

Commençons par montrer que le nombre de Lefschetz faisceau-théorique satisfait une propriété d'additivité.

Proposition 2.1.10 (Additivité par dimensions du nombre de Lefschetz faisceau-théorique [54, Proposition 3.1]). *Soit X un complexe cellulaire et soit D un sous-complexe localement compact. Considérons un homéomorphisme cellulaire $f : X \rightarrow X$ tel que D est f -invariant. Alors, le nombre de Lefschetz faisceau-théorique de f (associé à $\tilde{\mathbb{R}}$) est égal à la somme des nombres de Lefschetz faisceau-théoriques dans chaque dimension :*

$$L_c(D, f) = \sum_i L_c(D^{(i)} - D^{(i-1)}, f),$$

où $D^{(i)}$ est le i -squelette de D .

Démonstration. Supposons que la dimension de D est n . Alors, $D^{(n)} - D^{(n-1)}$, c'est-à-dire, la réunion de toutes les cellules ouvertes de dimension maximale de D , est ouverte dans D . Ainsi on a la suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H_c^m(D^{(n)} - D^{(n-1)}) \rightarrow H_c^m(D) \rightarrow H_c^m(D^{(n-1)}) \rightarrow \dots$$

la naturalité de cette suite entraîne la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_c^m(D^{(n)} - D^{(n-1)}) & \longrightarrow & H_c^m(D) & \longrightarrow & H_c^m(D^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots \\ & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_c^m(D^{(n)} - D^{(n-1)}) & \longrightarrow & H_c^m(D) & \longrightarrow & H_c^m(D^{(n-1)}) & \longrightarrow & \dots, \end{array}$$

et alors on obtient

$$L_c(D, f) = L_c(D^{(n)} - D^{(n-1)}, f) + L_c(D^{(n-1)}, f).$$

Ce résultat est conséquence de la division d'une suite exacte longue en suites exactes courtes et du fait que, dans une suite exacte courte, la trace de f^* au terme du milieu est égal à la somme des traces aux extrêmes.

Mais $D^{(n-1)}$ est un espace localement compact (il est un sous-espace fermé d'un espace localement compact) et donc on peut répéter l'argument et obtenir

$$L_c(D^{(n-1)}, f) = L_c(D^{(n-1)} - D^{(n-2)}, f) + L_c(D^{(n-2)}, f)$$

Finalement, comme $D^{(0)} = D^{(0)} - D^{(-1)}$, on arrive au résultat désiré. \square

Théorème 2.1.11 (Équivalence entre les nombres de Lefschetz [54, Theorem 3.2]). *Soit X un complexe cellulaire définissable et soit D un sous-complexe incomplet définissable et localement compact. Si $f: X \rightarrow X$ est un homéomorphisme cellulaire tel que D est f -invariant, alors $\Lambda(f, D)_X = L_c(D, f)$.*

Démonstration. Comme f est un homéomorphisme cellulaire et D est f -invariant, alors $X^{(i)}$, $D^{(i)} - D^{(i-1)}$ et $X^{(i)} - (D^{(i)} - D^{(i-1)})$ sont f -invariants dans chaque dimension i . Comme chaque $X^{(i)}$ est par lui-même un complexe cellulaire définissable, l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire (Proposition 1.3.1) implique

$$\Lambda(f, X^{(i)}) = \Lambda(f, X^{(i)})_X = \Lambda(f, D^{(i)} - D^{(i-1)})_X + \Lambda(f, X^{(i)} - (D^{(i)} - D^{(i-1)}))_X. \quad (2.1)$$

D'ailleurs, en employant un argument similaire à celui de la Proposition 2.1.10, on a :

$$L_c(X^{(i)}, f) = L_c(D^{(i)} - D^{(i-1)}, f) + L_c(X^{(i)} - (D^{(i)} - D^{(i-1)}), f). \quad (2.2)$$

Or, le premier et le dernier terme de l'Équation ((2.1)) sont le nombre de Lefschetz homologique (ou cohomologique car nous travaillons sur un corps) puisque ces espaces peuvent être triangulés par des complexes simpliciaux. Mais le premier et le

dernier terme de l'Équation ((2.2)) sont aussi le nombre de Lefschetz cohomologique d'après le Lemme 0.4.16 (D) et puisque les espaces sont compacts (et alors la cohomologie à support compact est égale à la cohomologie simpliciale). Ainsi on obtient $\Lambda(f, D^{(i)} - D^{(i-1)})_X = L_c(D^{(i)} - D^{(i-1)}, f)$. Finalement, d'après la Proposition 2.1.10 :

$$L_c(D, f) = \sum_i L_c(D^{(i)} - D^{(i-1)}, f)$$

et comme l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$\Lambda(f, D)_X = \sum_i \Lambda(f, D^{(i)} - D^{(i-1)})_X,$$

on conclut le résultat. □

Maintenant nous présentons une démonstration plus catégorique du Lemme 1.2.2. En fait, elle démontre l'indépendance de la définition du nombre de Lefschetz combinatoire par rapport aux triangulations dans le contexte de complexes cellulaires définissables au lieu de celui de complexes simpliciaux.

Corollaire 2.1.12 [54, Corollary 3.3]. *Soit X un complexe cellulaire définissable, D un sous-complexe incomplet définissable et localement compact et $f: X \rightarrow X$ un homéomorphisme cellulaire tel que D est f -invariant. Soient (Y, K, g) et (Y', K', g') deux triangulations de (X, D, f) . Dans ce cas, $\Lambda_c(g, K) = \Lambda_c(g', K')$.*

Démonstration. D'après le Théorème 2.1.11 il suffit de démontrer l'égalité entre $L_c(K, g) =$ et $L_c(K', g')$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & K \\ h \uparrow & & \uparrow h \\ D & \xrightarrow{f} & D \\ h' \downarrow & & \downarrow h' \\ K' & \xrightarrow{g'} & K' \end{array}$$

où $h: D \rightarrow K$ et $h': D \rightarrow K'$ sont les homéomorphismes des triangulations. Ce diagramme induit le diagramme commutatif suivant en prenant la cohomologie à support compact :

$$\begin{array}{ccc} H_c^*(K) & \xrightarrow{g^*} & H_c^*(K) \\ \downarrow (h(h')^{-1})^* & & \uparrow (h'(h)^{-1})^* \\ H_c^*(K') & \xrightarrow{g'^*} & H_c^*(K') \end{array}$$

où $(h'(h)^{-1})^*$ et $(h(h')^{-1})^*$ sont des isomorphismes. Par un argument d'algèbre linéaire, $L_c(K, g) = L_c(K', hh'^{-1}g'h^{-1})$, et alors $L_c(K, g) = L_c(K', g')$. \square

Finalement, on obtient un premier résultat d'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire.

Corollaire 2.1.13 [54, Corollary 3.4]. *Soient X et Y des complexes cellulaires définissables et soient $C \subset X$ (resp. $D \subset Y$) des sous-complexes incomplets définissables et localement compacts. Soient $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ des homéomorphismes cellulaires tels que C (resp. D) est f -invariant (resp. g -invariant). S'il existe un homéomorphisme $h : C \rightarrow D$ tel que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ D & \xrightarrow{g} & D, \end{array}$$

alors $\Lambda(f, C)_X = \Lambda(g, D)_Y$.

2.2 L'indice combinatoire et un nouveau résultat d'invariance

Pendant notre longue recherche de l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire, une nouvelle idée nous est apparue. Il y a une référence classique, [65, Theorem 2.5] et [65, Corollary 7.2], où un résultat d'invariance topologique de l'indice de point fixe est présenté. Ce résultat, dans le langage de cette thèse, peut être énoncé de la façon suivante.

Théorème 2.2.1. *Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application continue et $U \subset X$ un sous-espace ouvert tel que f n'a pas de points fixes dans la frontière de U . Si $U \cup f(U)$ est inclus dans un sous-complexe simplicial de X homéomorphe à un sous-complexe simplicial de Y (Y est aussi complexe simplicial)*

par un homéomorphisme h et $g : Y \rightarrow Y$ est tel que $(g \circ h)|_U = (h \circ f)|_U$, alors $i(X, f, U) = i(Y, g, h(U))$.

D'ailleurs, on sait que l'indice de point fixe est très lié au nombre de Lefschetz via l'axiome de normalisation (Définition 0.2.10). En plus, il est possible de considérer l'indice de $f : X \rightarrow X$ sur un ouvert $U \subset X$ même si $f(U)$ n'est pas inclus dans U . Alors, sera-t-il possible de trouver un lien entre le nombre de Lefschetz combinatoire et l'indice de point fixe et en profiter pour obtenir un résultat d'invariance topologique grâce au Théorème 2.2.1 ? En fait, de cette façon on pourrait étendre une sorte de mesure combinatoire du nombre de points fixes aux applications qui ne sont pas des homéomorphismes et à des espaces qui ne sont pas f -invariants ou définissables.

La réponse est affirmative mais, de nouveau, elle n'est pas triviale. Elle constitue la première moitié de [3]. Dans cette sous-section on rappellera le contenu nécessaire pour arriver au résultat principal de [3], le Théorème 2.2.10. Ce contenu est dans [3]. Dans cette sous-section, par simplicité, on travaillera de nouveau avec des complexes simpliciaux (les complexes cellulaires ne seront employés que dans les sections relatives au nombre de Lefschetz faisceau-théorique), mais tous les résultats peuvent s'étendre aux complexes cellulaires définissables d'après le théorème de triangulation (Théorème 0.3.8).

Avant de continuer, on introduit la notation suivante.

Soit \mathcal{D} la famille de triplets (X, f, U) , où X est un espace compact définissable, $f : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme et $U \subset X$ est un sous-espace définissable de X .

Définition 2.2.2. On dira que deux triplets (X, f, U) et (Y, g, V) de \mathcal{D} appartiennent à la même classe d'homéomorphisme s'il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que $h|_U : U \rightarrow V$ est aussi homéomorphisme et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

est commutatif. Les classes d'homéomorphisme des triplets déterminent une relation d'équivalence sur \mathcal{D} . On note \mathcal{C} , le quotient de \mathcal{D} par cette relation.

Commençons maintenant par définir une extension de l'indice aux sous-espaces sans points fixes dans leur frontière.

Définition 2.2.3. Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application continue et $U \subset X$ un sous-espace de X tel que f n'a pas de point fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$. L'indice de point fixe combinatoire (ou indice combinatoire) est défini comme :

$$i_c(X, f, U) = i(X, f, \overset{\circ}{U}),$$

où $i(X, f, \overset{\circ}{U})$ est l'indice de point fixe (Définition 0.2.10).

L'indice de point fixe combinatoire satisfait quelques bonnes propriétés. La première est une conséquence directe du Théorème 0.2.14.

Proposition 2.2.4. Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application continue et $U \subset X$ un sous-espace tel que f n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$. Si $i_c(X, f, U) \neq 0$, f a un point fixe dans $\overset{\circ}{U}$.

Démonstration. Comme $i_c(X, f, U) = i(X, f, \overset{\circ}{U}) \neq 0$, d'après [16, IV.A, Corollary 1], f doit avoir un point fixe dans $\overset{\circ}{U}$. \square

L'indice de point fixe combinatoire satisfait quatre des cinq axiomes de l'indice. Le cinquième (l'axiome de commutativité) est satisfait dans des espaces ouverts.

Théorème 2.2.5 [3, Theorem 2.8]. L'indice de point fixe combinatoire est le seul opérateur $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui satisfait les axiomes suivants :

- (CI1) *Axiome de localisation :* Si $f, g : X \rightarrow X$ sont deux applications sans point fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$ et telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \bar{U}$, alors $i_c(X, f, U) = i_c(X, g, U)$.
- (CI2) *Axiome d'homotopie :* Si $F : X \times I \rightarrow X$ est une homotopie entre f_0 et f_1 sans points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, alors $i_c(X, f_0, U) = i_c(X, f_1, U)$.
- (CI3) *Axiome d'additivité :* Si U est un sous-espace tel que f n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$ et $U_1, \dots, U_s \subset U$ sont des sous-espaces disjoints tels que tous les points fixes de f dans \bar{U} appartiennent à $\overset{\circ}{U}_1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{U}_s$ et f n'a pas de points fixes dans $\bar{U}_j \setminus \overset{\circ}{U}_j$ pour tout $j = 1, \dots, s$, alors $i_c(X, f, U) = \sum_j i_c(X, f, U_j)$.
- (CI4) *Axiome de normalisation :* $i_c(X, f, X) = \Lambda(f)$.
- (CI5) *Axiome de commutativité :* Si X et Y sont des complexes simpliciaux, $U \subset X$ est un sous-espace ouvert dans X et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ sont des applications continues telles que $g \circ f$ n'a pas des point fixes dans $\bar{U} \setminus U = \bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, alors $i_c(X, g \circ f, U) = i_c(Y, f \circ g, g^{-1}(U))$.

Démonstration. Commençons par démontrer que l'indice combinatoire satisfait ces axiomes. L'idée est profiter que l'indice de points fixe les satisfait et après recourir à $i_c(X, f, U) = i(X, f, \overset{\circ}{U})$. Montrons, par exemple, CII (la démonstration des autres est similaire).

[(CII)] Si f et g , sont égaux dans l'adhérence de l'intérieur de U , alors

$$i_c(X, f, U) = i(X, f, \overset{\circ}{U}) = i(X, g, \overset{\circ}{U}) = i_c(X, g, U).$$

Il reste à prouver que tout opérateur $\lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{Z}$ qui satisfait ces axiomes est nécessairement l'indice combinatoire. Si λ satisfait les cinq axiomes, alors, d'après [16, Appendix II], $\lambda(X, f, W) = i(X, f, W)$ pour tout W ouvert dans X . Prenons maintenant $(X, f, U) \in \mathcal{C}$. Comme f n'a pas de points fixes dans $\overline{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, d'après l'axiome d'additivité on a

$$\lambda(X, f, U) = \lambda(X, f, \overset{\circ}{U}) = i(X, f, \overset{\circ}{U}) = i_c(X, f, U). \quad \square$$

Dans [3], nous avons obtenu le lien entre le nombre de Lefschetz combinatoire et l'indice de point fixe combinatoire.

Théorème 2.2.6 [3, Theorem 2.9]. *Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme et $U \subset X$ un sous-espace f -invariant et définissable tel que f n'a pas de points fixes dans $\overline{U} \setminus \overset{\circ}{U}$. Alors*

$$\Lambda(f, U)_X = i_c(X, f, U).$$

Démonstration. On a les égalités suivantes :

$$\Lambda(f_{|\overline{U}}, \overline{U}) = i(\overline{U}, f_{|\overline{U}}, \overline{U}) = i(\overline{U}, f_{|\overline{U}}, \overset{\circ}{U}) = i(X, f, \overset{\circ}{U}) = i_c(X, f, U),$$

où la première égalité est conséquence de l'axiome de normalisation de l'indice de point fixe, la deuxième de l'axiome d'additivité et la troisième de l'invariance topologique de l'indice de point fixe [65, Theorem 2.5] et [65, Corollary 7.2]. La dernière égalité n'est que la définition de l'indice de point fixe combinatoire.

D'après l'Observation 1.1.5 et l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire (Proposition 1.3.1), on a :

$$\Lambda(f_{|\overline{U}}, \overline{U}) = \Lambda(f, \overline{U})_X = \Lambda(f, U)_X + \Lambda(f, \overline{U} \setminus U)_X. \quad (2.3)$$

Or, comme l'application f n'a pas de points fixes dans $\overline{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, elle n'en a pas non plus dans $\overline{U} \setminus U$. Alors, le Théorème 1.3.2 implique $\Lambda(f, \overline{U} \setminus U)_X = 0$ et de l'Équation ((2.3)) on obtient :

$$\Lambda(f_{|\overline{U}}, \overline{U}) = \Lambda(f, \overline{U})_X = \Lambda(f, U)_X. \quad \square \quad (2.4)$$

Le Théorème (2.3) et la Proposition 2.2.4 permettent de prouver de nouveau le théorème de Lefschetz du point fixe généralisé (Théorème 1.3.2) lorsque l'application f n'a pas de points fixes dans la frontière de l'espace définissable.

Théorème 2.2.7. *Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme et $U \subset X$ un sous-complexe f -invariant définissable tel que f n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$. Alors, si $\Lambda(f, U)_X \neq 0$, f a un point fixe dans $\overset{\circ}{U}$.*

Démonstration. D'après le Théorème (2.3), on a $0 \neq \Lambda(f, U)_X = i_c(X, f, U)$, mais donc, la Proposition 2.2.4 implique l'existence d'un point fixe de f dans $\overset{\circ}{U}$. \square

Observation 2.2.8. Dans la démonstration du Théorème (2.3), le Théorème 1.3.2 est utilisé, alors ce qu'on vient de présenter pourrait ne pas ressembler à une démonstration. Cependant, le Théorème (2.3) peut aussi être démontré sans le Théorème 1.3.2. L'idée est voir que l'indice combinatoire satisfait les axiomes du nombre de Lefschetz combinatoire (Sous-section 4.1.1).

Maintenant on peut énoncer quelques résultats de calcul local et d'invariance homotopique du nombre de Lefschetz combinatoire.

Corollaire 2.2.9 [3, Corollary 2.10]. *Soit X un complexe simplicial, $f, g : X \rightarrow X$ des homéomorphismes et $U \subset X$ un sous-espace f et g -invariant définissable tel que f et g n'ont pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$.*

- (1) *Le nombre de Lefschetz combinatoire de f dans U est égal au nombre de Lefschetz de $f|_{\bar{U}}$ et aussi à $\Lambda(f, \overset{\circ}{U})_X$, c'est-à-dire :*

$$\Lambda(f|_{\bar{U}}, \bar{U}) = \Lambda(f, U)_X = \Lambda(f, \overset{\circ}{U})_X.$$

- (2) *Si $f|_{\bar{U}}$ et $g|_{\bar{U}}$ sont homotopes, alors*

$$\Lambda(f, U)_X = \Lambda(g, U)_X.$$

- (3) *Si $F : X \times I \rightarrow X$ est une homotopie entre f et g sans point fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, alors*

$$\Lambda(f, U)_X = \Lambda(g, U)_X.$$

Démonstration. (1) La première égalité est conséquence de l'Équation ((2.4)). Pour la seconde, comme f est un homéomorphisme et U est f -invariant, $\overset{\circ}{U}$ sera aussi f -invariant. D'ailleurs, $\overset{\circ}{U}$ est définissable d'après la Propriété 0.3.6. Alors, $\Lambda(f, \overset{\circ}{U})_X$ est défini. Mais d'après le Théorème 2.2.6 on a

$$\Lambda(f, U)_X = i_c(X, f, U) = i(X, f, \overset{\circ}{U}) = i_c(X, f, \overset{\circ}{U}) = \Lambda(f, \overset{\circ}{U})_X.$$

- (2) Le Point (1) du Corollaire 2.2.9 implique $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(f|_{\bar{U}}, \bar{U})$ et $\Lambda(g, U)_X = \Lambda(g|_{\bar{U}}, \bar{U})$. Le résultat est donc conséquence de l'invariance homotopique du nombre de Lefschetz.
- (3) Ce résultat peut être déduit du Théorème 2.2.6 et de l'axiome d'homotopie de l'indice de point fixe combinatoire. \square

Finalement nous présentons un nouveau résultat autour de l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire.

Théorème 2.2.10 [3, Theorem 2.12]. *Soient U et V des espaces définissables et soient $f : U \rightarrow U$ et $g : V \rightarrow V$ des homéomorphismes tels qu'il existe un homéomorphisme définissable $h : U \rightarrow V$ de sorte que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & U \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ V & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

est commutatif. Supposons qu'il existe des complexes simpliciaux X et Y tels que $U \subset X$, $V \subset Y$, et de façon que f et g puissent être prolongés sur X et sur Y en des homéomorphismes $f' : X \rightarrow X$ et $g' : Y \rightarrow Y$ (mais X et Y ne sont pas nécessairement homéomorphes). Alors, si f' (resp. g') n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$ (resp. $\bar{V} \setminus \overset{\circ}{V}$) (ici les adhérences correspondent à celles de U et V comme sous-espaces de X et de Y respectivement), on a

$$\Lambda(f', U)_X = \Lambda(g', V)_Y.$$

Démonstration. D'après le Théorème 0.3.8, et le Théorème 2.0.1, on peut assumer que U et V sont des sous-complexes généralisés de X et de Y . De plus, l'Observation 1.1.5 implique $\Lambda(f', U)_X = \Lambda(f'|_{\bar{U}}, U)_{\bar{U}}$ et $\Lambda(g', V)_Y = \Lambda(g'|_{\bar{V}}, V)_{\bar{V}}$ (où les adhérences sont celles de U et V dans X et dans Y respectivement). Alors il suffit de montrer que $\Lambda(f'|_{\bar{U}}, U)_{\bar{U}} = \Lambda(g'|_{\bar{V}}, V)_{\bar{V}}$.

D'après le Théorème 2.2.6, on a $\Lambda(f'|_{\bar{U}}, U)_{\bar{U}} = i_c(\bar{U}, f'|_{\bar{U}}, U)$ et $\Lambda(g'|_{\bar{V}}, V)_{\bar{V}} = i_c(\bar{V}, g'|_{\bar{V}}, V)$.

On note $\text{Fix}(f'|_{\bar{U}})$, l'ensemble de points fixes de $f'|_{\bar{U}}$. Or, comme $f'|_{\bar{U}}$ n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, il est possible de prendre un ouvert W assez proche à

$\text{Fix}(f'_{|\bar{U}})$ pour garantir que $W \cup f'_{|\bar{U}}(W)$ est inclus dans un sous-complexe simplicial K d'une subdivision barycentrique de \bar{U} satisfaisant que la réalisation géométrique de K est contenue dans celle de U .

Maintenant, comme h était définissable, d'après le théorème de triangulation et le Théorème 2.0.1, on peut assumer que $h(K)$ est un sous-complexe simplicial d'une subdivision barycentrique de \bar{V} telle que la réalisation géométrique de $h(K)$ est contenue dans celle de V .

Dans ce cas, on peut appliquer [65, Theorem 2.5] et [65, Corollary 7.2] pour obtenir

$$i_c(\bar{U}, f'_{|\bar{U}}, U) = i_c(\bar{U}, f'_{|\bar{U}}, W) = i_c(\bar{V}, g'_{|\bar{V}}, h(W)) = i_c(\bar{V}, g'_{|\bar{V}}, V),$$

où la première et la troisième égalités sont conséquence de l'axiome d'additivité de l'indice de point fixe combinatoire. \square

Observation 2.2.11. Dans le Théorème 2.2.10, les complexes X et Y ne sont pas nécessairement homéomorphes (cela était la principale restriction du Théorème 2.0.1). En fait, l'existence de X , Y , f' et g' maintenant est seulement employée pour pouvoir parler du nombre de Lefschetz combinatoire.

Remarquons que h doit être définissable afin de garantir que $h(K)$ puisse être considéré comme un sous-complexe simplicial. Cela est important parce que [65, Theorem 2.5] demande l'existence de sous-complexes simpliciaux homéomorphes sous h contenant les points fixes de $f'_{|\bar{U}}$ et de $g'_{|\bar{V}}$.

2.3 L'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire

Après nos premiers travaux [3] et [54], dans [2] on obtient finalement l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire (Théorème 2.3.2). Cette sous-section est dédiée à démontrer ce résultat. On obtient aussi un théorème d'invariance topologique vraiment surprenant pour le nombre de Lefschetz relatif (Corollaire 2.3.4).

Avant de prouver l'invariance topologique, on a besoin du lemme suivant, lequel nous avons obtenu dans [2, Lemma 3.1]. On remarque aussi que pendant toute cette sous-section \mathring{A} sera l'intérieur de A en voyant celui-ci comme un sous-espace de \bar{A} .

Lemme 2.3.1. Soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ des sous-espaces définissables de complexes simpliciaux X et Y respectivement tels qu'il existe un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$. Considérons \bar{U}, \bar{V} comme les adhérences de U et V dans X et Y respectivement. Alors, h envoie \mathring{U} sur \mathring{V} et, par conséquent $U \setminus \mathring{U}$ sur $V \setminus \mathring{V}$ (h est un homéomorphisme), où \mathring{U} (resp. \mathring{V}) fait référence à l'intérieur de U comme sous-espace de \bar{U} (resp. \bar{V}).

Démonstration. Soient $v \in V \setminus \mathring{V}$ et $u \in \mathring{U}$ et supposons $h(u) = v$. Considérons un voisinage ouvert W_u de u tel que $\bar{W}_u \subset \mathring{U}$ et un voisinage ouvert W_v de v dans V tel que W_u est homéomorphe à W_v par h . Comme W_v est ouvert dans la topologie relative de V il existe un ouvert W'_v de \bar{V} , tel que $W'_v \cap V = W_v$. Alors, comme $v \in V \setminus \mathring{V}$, il existe un $v' \in \bar{V} \setminus V$ appartenant à W'_v , et comme $v' \in \bar{V}$, on peut garantir l'existence d'une suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenue dans $W'_v \cap V = W_v$ et convergente vers v' . Considérons maintenant $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comme la suite des images inverses de $\{v_n\}$ par f . Mais la suite $\{u_n\}$ est contenue dans W_u et, puisque $\bar{W}_u \subset \mathring{U}$ est borné et alors compact, il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers un point $u' \in U$. Alors, par continuité, $\{f(u_{n_k})\} = \{v_{n_k}\}$ devrait être convergente vers $f(u') \in V$. Or, $\{v_n\}$ (et alors aussi $\{v_{n_k}\}$) est convergente vers $v' \notin V$. \square

Maintenant nous démontrons l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire.

Théorème 2.3.2 [2, Theorem 3.2]. Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ des sous-espaces définissables des complexes simpliciaux X et Y tels qu'il y a des homéomorphismes $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ dont les restrictions $f|_A : A \rightarrow A$ et $g|_B : B \rightarrow B$ sont des homéomorphismes et tels qu'il existe un homéomorphisme $h : A \rightarrow B$ faisant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

commutatif. Alors $\Lambda(f, A)_X = \Lambda(g, B)_Y$.

Démonstration. D'après le Théorème 0.3.8, on peut supposer que A et B sont des sous-complexes simpliciaux généralisés.

On fait un raisonnement par récurrence sur la dimension de A et de B . Si A et B sont les deux de dimension zéro, ils doivent être des réunions finies des points et le résultat est clair.

2.3 L'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire

D'après l'Observation 1.1.5 $\Lambda(f, A)_X = \Lambda(f, A)_{\overline{A}}$ et $\Lambda(g, B)_Y = \Lambda(g, B)_{\overline{B}}$, on peut assumer que $X = \overline{A}$ et $Y = \overline{B}$. Par simplicité, on écrira f au lieu de $f|_{\overline{A}}$.

On a les décompositions

$$\overline{A} = \overset{\circ}{A} \sqcup (\overline{A} \setminus A) \sqcup (\overline{\overline{A} \setminus A} \cap A)$$

et

$$\overline{B} = \overset{\circ}{B} \sqcup (\overline{B} \setminus B) \sqcup (\overline{\overline{B} \setminus B} \cap B).$$

(Rappelons-nous que $\overset{\circ}{A}$ fait référence à l'intérieur de A comme sous-espace de \overline{A}). De plus, comme A (resp. B) est f -invariant (resp. g -invariant) et définissable et \overline{A} et \overline{B} sont définissables (Propriété 0.3.6), on conclut que $\overline{A} \setminus A$ (resp. $\overline{B} \setminus B$), $\overset{\circ}{A}$ (resp. $\overset{\circ}{B}$), $\overline{\overline{A} \setminus A}$ (resp. $\overline{\overline{B} \setminus B}$) et $\overline{\overline{A} \setminus A} \cap A$ (resp. $\overline{\overline{B} \setminus B} \cap B$) sont f -invariants (resp. g -invariants) et définissables. Maintenant, l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$\Lambda(f, \overline{A}) = \Lambda(f, \overline{A})_{\overline{A}} = \Lambda(f, \overset{\circ}{A})_{\overline{A}} + \Lambda(f, \overline{A} \setminus A)_{\overline{A}} + \Lambda(f, \overline{\overline{A} \setminus A} \cap A)_{\overline{A}} \quad (2.5)$$

(avec l'abus de notation $f \equiv f|_{\overline{A}}$, ici $\Lambda(f, \overline{A})$ correspond au nombre de Lefschetz de $f|_{\overline{A}}$ dans \overline{A}) et

$$\Lambda(g, \overline{B}) = \Lambda(g, \overline{B})_{\overline{B}} = \Lambda(g, \overset{\circ}{B})_{\overline{B}} + \Lambda(g, \overline{B} \setminus B)_{\overline{B}} + \Lambda(g, \overline{\overline{B} \setminus B} \cap B)_{\overline{B}}.$$

Aussi, d'après l'axiome de cofibration du nombre de Lefschetz [4, Theorem 1.1, (2)], on a

$$\Lambda(f, \overline{A}) = \Lambda(f_{\overline{\overline{A} \setminus A}}, \overline{\overline{A} \setminus A}) + \Lambda(\tilde{f}, \overline{A}/(\overline{\overline{A} \setminus A})) - 1, \quad (2.6)$$

où \tilde{f} est l'application induite par f sur le quotient. De la même façon, il est possible d'obtenir

$$\Lambda(g, \overline{B}) = \Lambda(g_{\overline{\overline{B} \setminus B}}, \overline{\overline{B} \setminus B}) + \Lambda(\tilde{g}, \overline{B}/(\overline{\overline{B} \setminus B})) - 1.$$

Maintenant, comme conséquence de l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire et de l'Observation 1.1.5, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(f_{\overline{\overline{A} \setminus A}}, \overline{\overline{A} \setminus A}) &= \Lambda(f_{\overline{\overline{A} \setminus A}}, \overline{\overline{A} \setminus A})_{\overline{\overline{A} \setminus A}} = \Lambda(f, \overline{\overline{A} \setminus A})_{\overline{A}} \\ &= \Lambda(f, \overline{A} \setminus A)_{\overline{A}} + \Lambda(f, \overline{\overline{A} \setminus A} \cap A)_{\overline{A}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda(g_{|\overline{B \setminus B}}, \overline{B \setminus B}) &= \Lambda(g_{|\overline{B \setminus B}}, \overline{B \setminus B})_{\overline{B \setminus B}} = \Lambda(g, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}} \\ &= \Lambda(g, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}} + \Lambda(g, \overline{B \setminus B} \cap B)_{\overline{B}}. \end{aligned}$$

Or, une combinaison des Équations (2.5), (2.6) et (2.7), nous permet d'arriver à

$$\Lambda(f, \mathring{A})_{\overline{A}} = \Lambda(\tilde{f}, \overline{A}/(\overline{A \setminus A})) - 1. \quad (2.8)$$

De même, on obtient pour B :

$$\Lambda(g, \mathring{B})_{\overline{B}} = \Lambda(\tilde{g}, \overline{B}/(\overline{B \setminus B})) - 1. \quad (2.9)$$

Comme

$$\begin{aligned} \Lambda(f, A)_{\overline{A}} &= \Lambda(f, \mathring{A})_{\overline{A}} + \Lambda(f, \overline{A \setminus A} \cap A)_{\overline{A}}, \\ \Lambda(g, B)_{\overline{B}} &= \Lambda(g, \mathring{B})_{\overline{B}} + \Lambda(g, \overline{B \setminus B} \cap B)_{\overline{B}}, \end{aligned}$$

il suffit de prouver que $\Lambda(f, \mathring{A})_{\overline{A}} = \Lambda(g, \mathring{B})_{\overline{B}}$ et $\Lambda(f, \overline{A \setminus A} \cap A)_{\overline{A}} = \Lambda(g, \overline{B \setminus B} \cap B)_{\overline{B}}$.

Afin de prouver que $\Lambda(f, \overline{A \setminus A} \cap A)_{\overline{A}} = \Lambda(g, \overline{B \setminus B} \cap B)_{\overline{B}}$ il suffit de montrer que $\overline{A \setminus A} \cap A$ est homéomorphe à $\overline{B \setminus B} \cap B$ par h car, comme la dimension de $\overline{A \setminus A} \cap A$ est inférieure à celle de A , on peut faire un raisonnement par récurrence. Mais cet homéomorphisme peut être déduit du Lemme 2.3.1.

Finalement d'après les Équations ((2.8)) et ((2.9)), pour montrer que $\Lambda(f, \mathring{A})_{\overline{A}} = \Lambda(g, \mathring{B})_{\overline{B}}$ il suffit de montrer que $\Lambda(\tilde{f}, \overline{A}/(\overline{A \setminus A})) = \Lambda(\tilde{g}, \overline{B}/(\overline{B \setminus B}))$. Mais cela est vrai car les deux espaces sont homéomorphes (en vertu du Lemme 2.3.1). \square

Maintenant nous obtenons un théorème d'invariance topologique pour le nombre de Lefschetz relatif. On commence par présenter le lien entre le nombre de Lefschetz combinatoire et le nombre de Lefschetz relatif d'un couple d'espaces.

Observation 2.3.3. Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme et $A \subset X$ un sous-espace f -invariant définissable. D'après l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire on a

$$\Lambda(f, X) = \Lambda(f, X)_X = \Lambda(f, A)_X + \Lambda(f, X \setminus A)_X,$$

Mais de cela on en déduit

$$\Lambda(f, A)_X = \Lambda(f, X) - \Lambda(f, X \setminus A)_X.$$

Maintenant, si A est ouvert dans X , $X \setminus A$ est, pour une certaine triangulation garantie par le Théorème 0.3.8, un sous-complexe simplicial de X et alors $\Lambda(f, X \setminus A)_X = \Lambda(f|_{X \setminus A}, X \setminus A)$. Mais si $\Lambda(f, X)$ et $\Lambda(f|_{X \setminus A}, X \setminus A)$ sont définis, le Corollaire 0.2.22 implique

$$\Lambda(f, X) - \Lambda(f|_{X \setminus A}, X \setminus A) = \Lambda(f, (X, X \setminus A)).$$

On en déduit que, si A est ouvert, on a $\Lambda(f, A)_X = \Lambda(f, (X, X \setminus A))$.

Maintenant, nous obtenons un résultat d'invariance pour le nombre de Lefschetz relatif.

Corollaire 2.3.4 [2, Corollaire 3.4]. *Soit X un complexe simplicial et soit $C \subset X$ un sous-complexe. Soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme tel que $f(C) = C$. Considérons maintenant un nouveau complexe simplicial Y avec un sous-complexe D et un homéomorphisme $g : Y \rightarrow Y$ tel que $g(D) = D$. Alors, l'existence d'un homéomorphisme $h : X \setminus C \rightarrow Y \setminus D$ tel que $g|_{Y \setminus D} \circ h = h \circ f|_{X \setminus C}$ implique*

$$\Lambda(f, (X, C)) = \Lambda(g, (Y, D)).$$

Démonstration. D'après l'Observation 2.3.3 on a $\Lambda(f, (X, C)) = \Lambda(f, X \setminus C)_X$ et $\Lambda(g, (Y, D)) = \Lambda(g, Y \setminus D)_Y$. Mais le Théorème 2.3.2 implique

$$\Lambda(f, X \setminus C)_X = \Lambda(g, Y \setminus D)_Y.$$

□

2.4 Le nombre de Lefschetz combinatoire pour des applications ouvertes

Rappelons l'idée de la définition du nombre de Lefschetz combinatoire. Étant donné $A \subset X$ et une application $f : X \rightarrow X$, on considérait une approximation simpliciale f^{simp} et ensuite on restreignait les matrices de l'automorphisme induit par f^{simp} sur les chaînes simpliciales aux faces dont l'intérieur était contenu dans A au moment de calculer les traces (un bon résumé de cette idée est dans [54, Section 2]). Malheureusement si f n'est pas un homéomorphisme, cette idée en général n'est pas bien définie comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 2.4.1. Soient $X = [0, 1]$, $A = (0, 1)$ et soit $f : X \rightarrow X$ l'application définie par $f(x) = \frac{1}{2}$. L'application simpliciale f^{simp} qui envoie le zéro sur lui-même et le 1 à 0 est une approximation simpliciale de f . Le calcul du nombre de Lefschetz combinatoire de f dans A avec cette approximation simpliciale donnerait 0. Cependant, l'identité de X est aussi une approximation simpliciale de f pour laquelle le calcul du nombre de Lefschetz combinatoire de f dans A donne -1 .

Ainsi, en général, le nombre de Lefschetz combinatoire n'existera pas. Or, les idées du Théorème 2.3.2 suggèrent qu'on pourrait au moins étendre la définition à certaines applications un peu plus générales que les homéomorphismes : les applications ouvertes.

Ainsi, on définit le nombre de Lefschetz combinatoire pour les applications ouvertes exactement comme dans le cas des homéomorphismes, c'est-à-dire, avec la notation des Définitions 1.1.2, 1.1.3 et 1.1.4, étant donné un complexe simplicial Z , un sous-espace définissable $D \subset Z$ et une application $l : Z \rightarrow Z$, on choisit d'abord une triangulation (X, A, f) de (Z, D, l) et une approximation simpliciale f^{simp} de f . Ensuite on définit

$$\Lambda(l, D)_Z := \Lambda_c(f, A) := \Lambda^c(f^{\text{simp}}, A) := \sum_p (-1)^p \text{tr}(M_p(f^{\text{simp}}, X)|_A),$$

où $\Lambda(l, D)_Z$ est le nombre de Lefschetz combinatoire. Dans cette section on montre que, dans le cas des applications ouvertes, cette définition est cohérente pour certains définissables (ceux qui satisfont une propriété similaire à celle de la f -invariance). Notamment nous prouverons le résultat suivant.

Théorème 2.4.2. *Le nombre de Lefschetz combinatoire est bien défini pour les applications ouvertes $l : Z \rightarrow Z$ d'un complexe simplicial sur lui-même et pour des sous-espaces définissables D tels que $f(D) \subset D$ et $f(Z \setminus D) \subset Z \setminus D$.*

Le Théorème 1.3.2 pourra aussi être étendu aux applications ouvertes et généralisera ainsi le théorème classique de point fixe du nombre de Lefschetz relatif [11, Theorem 3.1] et bien-sûr aussi le théorème classique du point fixe de Lefschetz.

Afin de démontrer le Théorème 2.4.2, on doit vérifier que la définition de $\Lambda(l, D)_Z$ ne dépend pas de la triangulation et de l'approximation simpliciale choisie. Plus précisément, le Théorème 2.4.2 peut être reformulé comme :

Théorème 2.4.3. *[[2, Theorem 3.8]] Soit $D \subset Z$ un sous-espace définissable d'un complexe simplicial Z et soit $l : Z \rightarrow Z$ une application ouverte telle que $l(D) \subset D$*

et $l(Z \setminus D) \subset Z \setminus D$. Considérons maintenant deux triangulations (X, A, f) et (Y, B, g) de (Z, D, h) dont l'existence est garantie par le Théorème 0.3.8. Dans ce cas,

$$\Lambda_c(f, A) = \Lambda_c(g, B).$$

Démonstration. Par définition, $\Lambda_c(f, A) = \Lambda^c(f^{\text{simp}}, A)$ et $\Lambda_c(g, B) = \Lambda^c(g^{\text{simp}}, B)$ pour des approximations simpliciales f^{simp} et g^{simp} de f et g respectivement (remarquons qu'une possibilité pourrait être $A = B$ et f^{simp} et g^{simp} deux approximations simpliciales différentes de f).

Employons un raisonnement par récurrence sur la dimension de A et B . Si les deux sont de dimension zéro, les deux sont une réunion finie du même nombre de sommets et alors

$$\Lambda^c(f^{\text{simp}}, A) = \Lambda(f, A) = \Lambda(g, B) = \Lambda^c(g^{\text{simp}}, B).$$

En général, comme $f(A) \subset A$ et $f(X \setminus A) \subset X \setminus A$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{A}$ et $f(\overline{X \setminus A}) \subset \overline{X \setminus A}$. Par conséquent, on a $f(\overline{A \setminus A}) \subset \overline{A \setminus A}$ et aussi $f(\overline{A \setminus A}) \subset \overline{A \setminus A}$. Mais cela signifie que f envoie les points de $\overline{A \setminus \overset{\circ}{A}}$ (ici $\overset{\circ}{A}$ fait référence une nouvelle fois à l'intérieur de A dans \overline{A}) sur $\overline{A \setminus \overset{\circ}{A}}$.

Montrons que $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{A}$. Afin de le prouver, remarquons en premier lieu que $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{A}$. En effet, si f envoie $x \in X \setminus \overline{A}$ sur \overline{A} , alors, comme f est ouverte, l'image par f d'un voisinage ouvert V de x dans $X \setminus \overline{A}$ sera un voisinage ouvert de $f(x) \in \overline{A}$, envoyant ainsi un point de $X \setminus A$ dans A .

En deuxième lieu, comme $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{A}$, $f_{\overline{A}}$ doit être ouverte. Cela peut être déduit du fait que si U est ouvert dans \overline{A} , on a $U = U' \cap \overline{A}$ où U' est un ouvert de X et alors $f_{\overline{A}}(U) = f(U') \cap \overline{A}$, donc $f_{\overline{A}}(U)$ est ouvert dans \overline{A} .

Finalement, afin de prouver $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{A}$, imaginons que f envoie un point $a \in \overset{\circ}{A}$ sur $\overline{A \setminus \overset{\circ}{A}} = \overline{A \setminus A}$ (rappelons nous que l'intérieur ici fait référence à celui de A comme sous-espace de \overline{A}). Prenons un voisinage ouvert V de a dans $\overset{\circ}{A}$. Comme $f_{\overline{A}}$ est ouverte, l'image de V par $f_{\overline{A}}$ doit être un voisinage ouvert de $f(a)$, lequel appartient à $\overline{A \setminus A}$, et alors f envoie des points de $\overset{\circ}{A}$ (et ainsi de A) en dehors de A . Mais cela entraîne une contradiction car, par hypothèse, $f(A) \subset A$.

Ainsi $f(\overset{\circ}{A}) \subset \overset{\circ}{A}$. De la même façon on obtient $g(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{B}$. Or, on a aussi $f(X \setminus \overset{\circ}{A}) \subset X \setminus \overset{\circ}{A}$ car, si $x \notin A$ alors $f(x) \notin A \supset \overset{\circ}{A}$ et si $x \in A \setminus \overset{\circ}{A}$, alors, comme $f_{\overline{A}}$ est ouverte, l'argument précédent montre que, si $f(x) \in \overset{\circ}{A}$, il doit exister un élément de $\overline{A \setminus A} \subset X \setminus A$ envoyé par f dans A et cela n'est pas possible. De même, on vérifie que f envoie $\overline{A \setminus A}$, $\overline{A \setminus A}$ et $\overline{A \setminus A} \cap A$ sur eux-mêmes en même temps quelle envoie

leur complémentaire aussi sur eux-mêmes. Aussi, comme A est définissable, tous ces espaces sont définissables. Par conséquent, on peut considérer le nombre de Lefschetz combinatoire de ces espaces (comme $(f^{\text{simp}})_{|\bar{A}}$ est une approximation simpliciale de $f_{|\bar{A}}$, on continuera à écrire f ou f^{simp} au lieu de leurs restrictions correspondantes afin de simplifier la notation). L'additivité déduite de la définition de Λ_c implique

$$\begin{aligned}\Lambda(f, \bar{A}) &= \Lambda^c(f^{\text{simp}}, \bar{A}) = \\ &= \Lambda^c(f^{\text{simp}}, \mathring{A}) + \Lambda^c(f^{\text{simp}}, \overline{\bar{A} \setminus A} \cap A) + \Lambda^c(f^{\text{simp}}, \bar{A} \setminus A) \\ &= \Lambda_c(f, \mathring{A}) + \Lambda_c(f, \overline{\bar{A} \setminus A} \cap A) + \Lambda_c(f, \bar{A} \setminus A),\end{aligned}$$

où la première égalité est conséquence du Théorème de la trace de Hopf. Mais comme $\overline{\bar{A} \setminus A}$ est un sous-complexe simplicial, le Théorème de la trace de Hopf implique aussi

$$\begin{aligned}\Lambda_c(f, \overline{\bar{A} \setminus A} \cap A) + \Lambda_c(f, \bar{A} \setminus A) \\ = \Lambda^c(f^{\text{simp}}, \overline{\bar{A} \setminus A} \cap A) + \Lambda^c(f^{\text{simp}}, \bar{A} \setminus A) \\ = \Lambda^c(f^{\text{simp}}, \overline{\bar{A} \setminus A}) = \Lambda(f, \overline{\bar{A} \setminus A}).\end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'axiome de cofibration du nombre de Lefschetz [4, Theorem 1.1] on a

$$\Lambda(f, \bar{A}) = \Lambda(f, \overline{\bar{A} \setminus A}) + \Lambda(\tilde{f}, \bar{A}/(\overline{\bar{A} \setminus A})) - 1,$$

où \tilde{f} fait référence à l'application induite par f sur le quotient.

Ces expressions conduisent à

$$\Lambda_c(f, \mathring{A}) = \Lambda(\tilde{f}, \bar{A}/(\overline{\bar{A} \setminus A})) - 1.$$

De la même façon on obtient

$$\Lambda_c(g, \mathring{B}) = \Lambda(\tilde{g}, \bar{B}/(\overline{\bar{B} \setminus B})) - 1.$$

Alors, d'après le Lemme 2.3.1 on obtient $\Lambda(\tilde{f}, \bar{A}/(\overline{\bar{A} \setminus A})) = \Lambda(\tilde{g}, \bar{B}/(\overline{\bar{B} \setminus B}))$ et donc $\Lambda_c(f, \mathring{A}) = \Lambda_c(g, \mathring{B})$.

Finalement,

$$\Lambda_c(f, A) = \Lambda_c(f, \mathring{A}) + \Lambda_c(f, \overline{\bar{A} \setminus A} \cap A),$$

$$\Lambda_c(g, B) = \Lambda_c(g, \overset{\circ}{B}) + \Lambda_c(g, \overline{B \setminus B \cap B}),$$

et l'hypothèse de récurrence (la dimension de $\overline{A \setminus A \cap A}$ est inférieure à celle de A) impliquent que $\Lambda_c(f, \overline{A \setminus A \cap A}) = \Lambda_c(g, \overline{B \setminus B \cap B})$ et donc

$$\Lambda_c(f, A) = \Lambda_c(g, B). \quad \square$$

Observation 2.4.4. Remarquons que les nouvelles conditions pour définir le nombre de Lefschetz combinatoire sont clairement plus générales que les conditions des Définitions 1.1.2, 1.1.3 et 1.1.4. Par exemple, si on considère le disque D^2 comme une boule dans \mathbb{C} centrée en 0, l'application qui envoie le zéro sur lui-même et z sur $|z| \cdot \frac{z^p}{|z^p|}$ est ouverte et toutes les boules et circonférences centrées en zéro sont envoyés par f sur elles-mêmes pendant que leurs complémentaires sont aussi envoyés sur eux-mêmes. Et, pourtant, cette application est loin d'être un homéomorphisme.

Observation 2.4.5. Pour les applications ouvertes, le nombre de Lefschetz combinatoire est toujours un invariant topologique. La démonstration est analogue à celle du Théorème 2.3.2. L'additivité est également satisfaite.

Observation 2.4.6. Comme conséquence de l'observation précédente, on peut étendre le Corollaire 2.3.4 aux applications ouvertes qui satisfont $f(C) \subset C$ et $f(X \setminus C) \subset X \setminus C$.

Finalement, on a aussi un théorème de Lefschetz du point fixe généralisé qui généralise le Théorème 1.3.2 et aussi [11, Theorem 3.1] lorsque l'application est ouverte (pour ce dernier on emploie l'Observation 2.3.3). La démonstration est analogue à celle du Théorème 1.3.2.

Théorème 2.4.7 [2, Theorem 3.11]. *Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application ouverte et $A \subset X$ un sous-espace définissable tel que $f(A) \subset A$ et $f(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Dans ce cas, si $\Lambda(f, A)_X \neq 0$, f a un point fixe dans \overline{A} .*

Comme dans l'Exemple 1.3.4, le nombre de Lefschetz combinatoire donne parfois une meilleure approximation du nombre de points fixes que celle donnée par le nombre de Lefschetz, même dans des situations où les deux nombres peuvent être appliqués. Lorsque f est seulement une application ouverte et pas un homéomorphisme, cet avantage continue à se produire, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.4.8 [2, Exemple 3.12]. *Soit X la couronne circulaire centrée en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ de la Figure 2.4.1. La ligne entre $(0, 0)$ et chaque $x \in X$ définit deux points*

d'intersection avec la frontière de la couronne. Notons p_x et q_x ces points (voir la Figure 2.4.1). Pour chaque $x \in X$ il existe un $t_x \in [0, 1]$ tel que $x = t_x \cdot p_x + (1 - t_x) \cdot q_x$. Soit $f : X \rightarrow X$ l'application ouverte qui envoie x sur $(3 - 3t_x) \cdot p_x + (3t_x - 2) \cdot q_x$ si $t_x \in [2/3, 1]$, sur $(3t_x - 1) \cdot p_x + (2 - 3t_x) \cdot q_x$ si $t_x \in [1/3, 2/3]$ et sur $(1 - 3t_x) \cdot p_x + 3t_x \cdot q_x$ si $t_x \in [0, 1/3]$. L'ensemble des points fixes de f est composé par trois circonférences. Toutefois, comme f est homotope à l'identité, $\Lambda(f, X) = \chi(X) = 0$ et pourtant, même dans un cas si évident, le théorème du point fixe de Lefschetz ne peut pas assurer l'existence de points fixes. Or, soit X_1 l'ensemble qui résulte d'enlever un segment ouvert (p_x, q_x) à X . Dans ce cas, l'additivité du nombre combinatoire implique

$$0 = \Lambda(f, X) = \Lambda(f, X_1)_X + \Lambda(f, (p_x, q_x))_X. \quad (2.10)$$

Maintenant, d'après la contractibilité du segment, on a

$$\Lambda(f, (p_x, q_x))_X + \Lambda(f, \{p_x, q_x\})_X = \Lambda(f, [p_x, q_x])_X = \Lambda(f|_{[p_x, q_x]}, [p_x, q_x]) = 1$$

et comme f n'a pas de points fixes dans l'adhérence de $\{p_x, q_x\}$, le Théorème 2.4.7 implique $\Lambda(f, \{p_x, q_x\})_X = 0$ et alors $\Lambda(f, (p_x, q_x))_X = 1$. Dans ce cas, l'Équation ((2.10)) implique $\Lambda(f, X_1)_X = -1$. Soit maintenant $x' \in X \setminus [p_x, q_x]$ et considérons $X_2 = X_1 \setminus (p_{x'}, q_{x'})$. Le même raisonnement conduit à $\Lambda(f, X_2) = -2$. On peut répéter ce procédé pour chaque $n \in \mathbb{N}$ (la Figure 2.4.2 montre le cas X_4) et ainsi on voit que la suite $|\Lambda(f, X_n)_X| = |-n| = n$ nous donne une meilleure notion du nombre de points fixes de f .

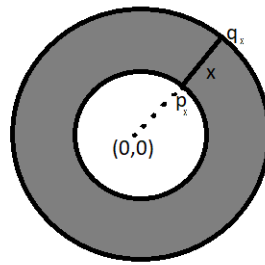


FIGURE 2.4.1 – Complexe X .

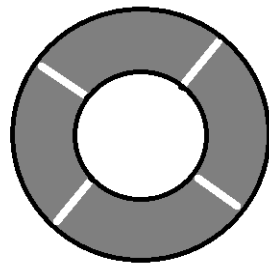


FIGURE 2.4.2 – X_4 .

Intégration par rapport au nombre de Lefschetz

L'intégration par rapport à certains invariants topologiques date, au moins, des idées de Blaschke en géométrie [10], où l'intégration par rapport à la caractéristique d'Euler est parue par première fois. Cette intégration par rapport à la caractéristique d'Euler, nommée Calcul d'Euler (ou Euler Calculus en anglais), a été ensuite appliquée dans des différents domaines des mathématiques, comme en géométrie algébrique [57], en théorie de faisceaux [67] ou en l'analyse [44]. Récemment, quelques applications pratiques par rapport à la détection et le comptage d'objets par des capteurs ont été aussi découvertes [7].

L'intégration par rapport au nombre de Lefschetz classique n'est pas bonne car elle n'est pas additive (par exemple, si f envoie chaque x sur x^2 $\Lambda(f, [0, 1]) = 1$ mais $\Lambda(f, \{0, 1\}) = 2$ et $\Lambda(f, (0, 1)) = 1$). Cependant, le nombre de Lefschetz combinatoire permettra avoir une bonne intégration par rapport aux points fixes de l'espace (en plus, à la Section 3.3 on établira aussi une intégration qui prendra en compte la "puissance" -l'indice- de chacun de ces points).

Dans [8] et [21], une intégration par rapport à la caractéristique d'Euler est présentée. Aussi, dans [7], quelques applications pratiques en sont obtenues. Ainsi, notre intégration généralisera cette intégration par rapport à la caractéristique d'Euler.

Dans [55], nous avons présentée une première intégration par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire d'homéomorphismes. Cette nouvelle intégration entraînera un grand intérêt dans [54] où elle nous permettra de calculer le nombre de Lefschetz faisceau-théorique. Dans [3], deux intégrations par rapport à l'indice de point fixe combinatoire sont définies. La première généralise largement l'intégration dans [55] et la deuxième permet d'intégrer des fonctions réelles (et non seulement entières) par rapport aux points fixes (l'intégration de fonctions réelles par rapport à la caractéristique d'Euler avait été présentée dans [8]).

À la Section 3.1, on commencera par construire l'intégration que nous avons présenté dans [55]. Cependant, en conséquence du Théorème 2.4.3, on construira cette

intégration non seulement pour des homéomorphismes mais aussi pour des applications ouvertes. Ensuite, à la Section 3.2, on obtiendra les applications de cette intégration à la théorie de faisceaux. À la Section 3.3 l'intégration par rapport à l'indice de point fixe combinatoire sera définie et, finalement, à la Section 3.4 une intégrale de fonctions réelles (aussi par rapport à l'indice de point fixe combinatoire) sera aussi présentée.

Les applications pratiques de cette intégration seront présentées au Chapitre 4.

3.1 Intégration par rapport au Nombre de Lefschetz Combinatoire

Dans cette section, on généralisera les résultats dans [55] pour des applications ouvertes. On étend aussi la règle du produit du nombre de Lefschetz combinatoire [55, Theorem 4.6] pour des applications ouvertes et non seulement pour des homéomorphismes.

Observation 3.1.1. Soit $f : X \rightarrow X$ une application ouverte et soit \mathcal{D}_f la famille de sous-espaces définissables $U \subset X$ tels que $f(U) \subset U$ et $f(X \setminus U) \subset X \setminus U$. Alors \mathcal{D}_f est fermée sous les réunions finies, les intersections finies et les complémentaires.

Avec cette structure, on peut définir une bonne intégration sur \mathcal{D}_f .

Définition 3.1.2. Soit X un complexe simplicial et $f : X \rightarrow X$ une application ouverte. Considérons $U_1, \dots, U_n \subset \mathcal{D}_f$ et $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$. On définit

$$\int_X (c_1 \mathbb{1}_{U_1} + \dots + c_n \mathbb{1}_{U_n}) d\Lambda f = c_1 \Lambda(f, U_1)_X + \dots + c_n \Lambda(f, U_n)_X .$$

Aussi, on dira qu'une fonction $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est *f-intégrable* si h peut s'écrire comme $h = \sum_{j=1}^n d_j \mathbb{1}_{U_j}$, où les U_j appartiennent à \mathcal{D}_f et les d_j sont des nombres entiers.

Théorème 3.1.3 [55, Theorem 5.2]. *L'intégrale par rapport au nombre de Lefschetz est bien définie. De plus, elle satisfait*

$$\int_X h d\Lambda f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \cdot \Lambda(f, \{h = k\})_X ,$$

où $\{h = k\} := \{x \in X : h(x) = k\}$.

Démonstration. Soit $g = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{U_i} = \sum_{j=1}^m d_j \mathbb{1}_{V_j}$, avec U_i et V_j dans les conditions de la Définition 3.1.2. On doit vérifier que

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot \Lambda(f, U_i)_X = \sum_{j=1}^m d_j \cdot \Lambda(f, V_j)_X .$$

Soient $W_\zeta = U_\zeta$ si $1 \leq \zeta \leq n$ et $W_\zeta = V_{\zeta-n}$ si $n+1 \leq \zeta \leq n+m$. Considérons maintenant une triangulation L de X compatible avec chaque W_ζ et aussi avec :

$$\begin{aligned} & \bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta, \\ & \bigcap_{\zeta \neq \zeta_1} W_\zeta \setminus \bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta, \\ & \bigcap_{\zeta \neq \zeta_2} W_\zeta \setminus \bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta \setminus \left(\left(\bigcap_{\zeta \neq \zeta_1} W_\zeta \right) \setminus \left(\bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta \right) \right), \quad \dots \end{aligned} \quad (3.1)$$

Or, ces espaces appartiennent à \mathcal{D}_f et, en plus, chaque W_ζ peut s'écrire comme une réunion disjointe de certains d'entre eux. Notons $\{K_\mu\}_{\mu \in M}$, les images des W_ζ et des espaces de (3.1) par la triangulation et soient $M_i = \{\mu \in M : \mu > n+m, K_\mu \subset K_i\}$ pour $i = 1, \dots, n+m$ (en particulier, la famille $\{K_\mu\}_{\mu \in M_i}$ établit une partition de K_i). Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \cdot \Lambda(f, U_i)_X &= \sum_{i=1}^n c_i \cdot \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K_i) = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \left(\sum_{\mu \in M_i} \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K_\mu) \right) \\ &= \sum_{\mu \in M} \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K_\mu) \cdot \left(\sum_{i: \mu \in M_i} c_i \right), \end{aligned}$$

où $M_i = \{\mu \in M : K_\mu \subset K_i\}$.

De la même façon, on obtient

$$\sum_{j=1}^m d_j \Lambda(f, V_j)_X = \sum_{\mu \in M} \Lambda^c(\tilde{f}^{\text{simp}}, K_\mu) \cdot \left(\sum_{j: \mu \in M_j} d_j \right) .$$

Maintenant, comme $\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{U_i} = \sum_{j=1}^m d_j \mathbb{1}_{V_j}$, on en déduit pour tout $\mu \in M$,

$$\sum_{i: \mu \in M_i} c_i = \sum_{j: \mu \in M_j} d_j .$$

Par conséquent, l'intégrale par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire est bien définie. La deuxième partie de la démonstration est une vérification directe. \square

Théorème 3.1.4 [55, Theorem 4.6]. *Soit $f : X \rightarrow X$ une application ouverte d'un complexe simplicial sur lui-même. Soient $U, U_1, U_2 \subset X$ des sous-ensembles définissables tels que $U_1, U_2 \subset U$, $\bar{U} \xrightarrow{g} \bar{U}_1 \times \bar{U}_2$, $U \xrightarrow{g|_U} U_1 \times U_2$, $f|_{\bar{U}} \equiv f_1 \times f_2$ et $f|_U \equiv f_1|_{U_1} \times f_2|_{U_2}$, où $f_1 : \bar{U}_1 \rightarrow \bar{U}_1$ et $f_2 : \bar{U}_2 \rightarrow \bar{U}_2$ sont des applications ouvertes telles que $f_1(U_1) \subset U_1$, $f_1(\bar{U}_1 \setminus U_1) \subset \bar{U}_1 \setminus U_1$, $f_2(U_2) \subset U_2$ et $f_2(\bar{U}_2 \setminus U_2) \subset \bar{U}_2 \setminus U_2$ (en particulier, si f_1 et f_2 sont des homéomorphismes tels que U_1 est f_1 -invariant et U_2 est f_2 -invariant, cette condition est satisfaite). Dans ce cas,*

$$\Lambda(f, U)_X = \Lambda(f_1, U_1)_{\bar{U}_1} \cdot \Lambda(f_2, U_2)_{\bar{U}_2}. \quad (3.2)$$

Observation 3.1.5. Remarquons que \bar{U}_1 et \bar{U}_2 ne sont pas nécessairement des sous-complexes simpliciaux et que $\Lambda(f_1, U_1)_{\bar{U}_1}$ (resp. U_2) n'a pas de sens en principe. En vérité on fait ici un petit abus de notation, en écrivant \bar{U}_1 au lieu du complexe simplicial par lequel on peut trianguler \bar{U}_1 d'après le Théorème 0.3.8.

Démonstration. Choisissons une triangulation $(Y, \bar{K}, K, \bar{A}, A, \bar{B}, B)$ qui est compatible avec $(X, \bar{U}, U, \bar{U}_1, U_1, \bar{U}_2, U_2)$. D'après la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bar{K} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \bar{K} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{U} & \xrightarrow{f} & \bar{U} \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ \bar{U}_1 \times \bar{U}_2 & \xrightarrow{f_1 \times f_2} & \bar{U}_1 \times \bar{U}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{A} \times \bar{B} & \xrightarrow{\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2} & \bar{A} \times \bar{B} \end{array}$$

on a $\bar{K} \approx \bar{A} \times \bar{B}$ et $\tilde{f} \equiv \tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2$. De la même manière on obtient $K \approx A \times B$ et $\tilde{f}|_K \equiv \tilde{f}_1|_A \times \tilde{f}_2|_B$.

Remarquons que (\bar{K}, K) , (\bar{A}, A) et (\bar{B}, B) sont des triangulations de (\bar{U}, U) , de (\bar{U}_1, U_1) et de (\bar{U}_2, U_2) , respectivement. Alors, $\Lambda(f, U)_X = \Lambda(\tilde{f}, K)_{\bar{K}}$.

En conséquence il suffit de prouver que $\Lambda(\tilde{f}, K)_{\bar{K}} = \Lambda(\tilde{f}_1, A)_{\bar{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, B)_{\bar{B}}$. Pour cela, on commencera par trianguler (\bar{K}, K) avec $(\bar{A} \times \bar{B}, A \times B)$, ce qui conduit

à

$$\Lambda(\tilde{f}, K)_{\overline{K}} = \Lambda(\tilde{f}, A \times B)_{\overline{A \times B}} = \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, A \times B)_{\overline{A \times B}}$$

et ensuite on démontrera que

$$\Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, A \times B)_{\overline{A \times B}} = \Lambda(\tilde{f}_1, A)_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, B)_{\overline{B}}.$$

En premier lieu, pour trianguler (\overline{K}, K) avec $(\overline{A \times B}, A \times B)$, $\overline{A \times B}$ doit avoir une structure de complexe simplicial. Comme \overline{A} et \overline{B} sont des complexes simpliciaux, il est possible d'obtenir cette structure en définissant dans $\overline{A \times B}$ des nouveaux sommets correspondants aux couples des barycentres des simplexes de \overline{A} et de \overline{B} . En plus, comme cette procédure respecte les sous-complexes généralisés de \overline{A} et \overline{B} , on obtient que $A \times B$, $(\overline{A} \setminus A) \times B$, $A \times (\overline{B} \setminus B)$ et $(\overline{A} \setminus A) \times (\overline{B} \setminus B)$ sont des sous-complexes généralisés disjoints de $\overline{A \times B}$ dont la réunion est $\overline{A \times B}$. D'ailleurs, comme $f_1(U_1) \subset U_1$, $f_1(\overline{U_1} \setminus U_1) \subset \overline{U_1} \setminus U_1$, $f_2(U_2) \subset U_2$ et $f_2(\overline{U_2} \setminus U_2) \subset \overline{U_2} \setminus U_2$, on voit que $\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2$ envoie chaque ensemble parmi $A \times B$, $(\overline{A} \setminus A) \times B$, $A \times (\overline{B} \setminus B)$ et $(\overline{A} \setminus A) \times (\overline{B} \setminus B)$ et leurs complémentaires sur lui-même. Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, \overline{A \times B}) &= \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, A \times B)_{\overline{A \times B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, (\overline{A} \setminus A) \times B)_{\overline{A \times B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, A \times (\overline{B} \setminus B))_{\overline{A \times B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, (\overline{A} \setminus A) \times (\overline{B} \setminus B))_{\overline{A \times B}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

En deuxième lieu, on peut appliquer la règle du produit du nombre de Lefschetz pour des produits de complexes simpliciaux (Observation 0.2.17) afin d'obtenir :

$$\Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, \overline{A \times B}) = \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A}) \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B}).$$

Remarquons maintenant qu'on peut reproduire les arguments du Théorème 2.4.3 pour voir que $\tilde{f}_1|_{\overline{A \setminus A}}$ et $\tilde{f}_2|_{\overline{B \setminus B}}$ sont des applications ouvertes. Maintenant, afin de simplifier la notation (qui va bientôt devenir très lourde) on n'écrira pas les restrictions des applications dans le reste de la démonstration. Ainsi, $\Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, C' \times D')$ signifiera $\Lambda(\tilde{f}_1|_{C'} \times \tilde{f}_2|_{D'}, C' \times D')$.

Considérons maintenant, par exemple, le terme $\Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, (\overline{A} \setminus A) \times B)$ de l'Équation ((3.3)) (l'argument avec les autres termes est analogue). Remarquons aussi que la dimension de $(\overline{A} \setminus A) \times B$ est inférieure à celle de $A \times B$. En plus, on peut

3.1 Intégration par rapport au Nombre de Lefschetz Combinatoire

reproduire l'argument de triangulation qui a permis l'obtention de l'Équation ((3.3)) mais appliqué cette fois à $\overline{A \setminus A} \times \overline{B}$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, \overline{A \setminus A} \times \overline{B}) &= \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, (\overline{A \setminus A}) \times B)_{\overline{A \setminus A} \times \overline{B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, ((\overline{A \setminus A}) \setminus (\overline{A \setminus A})) \times B)_{\overline{A \setminus A} \times \overline{B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, (\overline{A \setminus A}) \times (\overline{B \setminus B}))_{\overline{A \setminus A} \times \overline{B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, ((\overline{A \setminus A}) \setminus (\overline{A \setminus A})) \times (\overline{B \setminus B}))_{\overline{A \setminus A} \times \overline{B}}. \end{aligned}$$

On doit remarquer que tout cela a du sens car \tilde{f}_1 envoie tous les ensembles $\overline{A \setminus A}$, $(\overline{A \setminus A}) \setminus (\overline{A \setminus A})$ et leurs complémentaires sur eux-mêmes (la preuve suit le procédé de la démonstration du Théorème 2.4.3).

On peut répéter cet argument jusqu'à ce que les trois derniers termes soient de dimension zéro, étant donc des complexes simpliciaux auxquels on peut alors appliquer l'Observation 0.2.17. Supposons par exemple que

$$((\overline{A \setminus A}) \setminus (\overline{A \setminus A})) \times B, \quad (\overline{A \setminus A}) \times (\overline{B \setminus B}) \quad \text{et} \quad ((\overline{A \setminus A}) \setminus (\overline{A \setminus A})) \times (\overline{B \setminus B})$$

sont de dimension zéro. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A}) \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B}) &= \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, (\overline{A \setminus A}) \times B)_{\overline{A \setminus A} \times \overline{B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1, (\overline{A \setminus A}) \setminus (\overline{A \setminus A}))_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, B)_{\overline{B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}} \\ &+ \Lambda(\tilde{f}_1, (\overline{A \setminus A}) \setminus (\overline{A \setminus A}))_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
 & \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{\overline{A \setminus A}}) \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B}) \\
 &= \left[\Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A \setminus A}} + \Lambda(\tilde{f}_1, (\overline{\overline{A \setminus A}}) \setminus (\overline{A \setminus A}))_{\overline{A \setminus A}} \right] \\
 & \cdot \left[\Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}} + \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}} \right] \\
 &= \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}} + \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}} \\
 & \quad + \Lambda(\tilde{f}_1, (\overline{\overline{A \setminus A}}) \setminus (\overline{A \setminus A}))_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}} \\
 & \quad + \Lambda(\tilde{f}_1, (\overline{\overline{A \setminus A}}) \setminus (\overline{A \setminus A}))_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}}.
 \end{aligned}$$

Maintenant on combine les deux égalités afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, \overline{(\overline{A \setminus A}) \times B})_{\overline{A \setminus A \times B}} &= \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A \setminus A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}} \\
 &= \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}},
 \end{aligned}$$

où la dernière égalité est conséquence de l'Observation 1.1.5.

De cette façon, si l'on revient sur des dimensions supérieures jusqu'à atteindre l'Équation (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A}) \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B}) &= \Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, \overline{A \times B})_{\overline{A \times B}} + \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}} \\
 & \quad + \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}} + \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}},
 \end{aligned}$$

et, de nouveau, comme

$$\begin{aligned}
 \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A}) \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B}) &= \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}} + \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A \setminus A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}} \\
 & \quad + \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}} + \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B \setminus B})_{\overline{B}},
 \end{aligned}$$

on conclut

$$\Lambda(\tilde{f}_1 \times \tilde{f}_2, \overline{A \times B})_{\overline{A \times B}} = \Lambda(\tilde{f}_1, \overline{A})_{\overline{A}} \cdot \Lambda(\tilde{f}_2, \overline{B})_{\overline{B}}. \quad \square$$

Exemple 3.1.6. Considérons le complexe simplicial creux de la Figure 3.1.1. Soit U le sous-complexe généralisé qui résulte du produit des sous-complexes généralisés $U_1 = \{[d_1], [d_2], [d_3], [d_1, d_3], [d_2, d_3]\}$ et $U_2 = \{[b_3], [c_3], [a_3, b_3], [b_3, c_3], [c_3, d_3]\}$.

Soit $f : X \rightarrow X$ une rotation de X d'axe v_3 et le point milieu de l'arête $[a_3, d_3]$. c'est-à-dire, f est l'application simpliciale définie par

$$\begin{aligned} f(a_1) &= d_2, & f(a_2) &= d_1, & f(a_3) &= d_3, & f(b_1) &= c_2, & f(b_2) &= c_1, & f(b_3) &= c_3, \\ f(c_1) &= b_2, & f(c_2) &= b_1, & f(c_3) &= b_3, & f(d_1) &= a_2, & f(d_2) &= a_1, & f(d_3) &= a_3, \\ f(u_1) &= w_2, & f(u_2) &= w_1, & f(u_3) &= w_3, & f(v_1) &= v_2, & f(v_2) &= v_1, & f(v_3) &= v_3, \\ f(w_1) &= u_2, & f(w_2) &= u_1, & f(w_3) &= u_3. \end{aligned}$$

Or, le sous-complexe U est f -invariant et $f \equiv f_1 \times f_2$, où f_1 est la réflexion par rapport au segment d'extrêmes le sommet d_3 et le point milieu de l'arête $[d_1, d_2]$ et f_2 est la réflexion par rapport au point médian de l'arête $[a_3, d_3]$. Plus précisément, f_1 et f_2 sont les applications simpliciales définies par

$$\begin{aligned} f_1(d_1) &= d_2, & f_1(d_2) &= d_1, & f_1(d_3) &= d_3, \\ f_2(a_3) &= d_3, & f_2(b_3) &= c_3, & f_2(c_3) &= b_3, & f_2(d_3) &= a_3. \end{aligned}$$

Calculons alors $\Lambda(f, U)_X$, $\Lambda(f_1, U_1)_{X_1}$ et $\Lambda(f_2, U_2)_{X_2}$, où X_1 est le 1-complexe constitué par l'adhérence de U_1 dans X et X_2 est le 1-complexe constitué par l'adhérence de U_2 dans X .

Comme les trois applications sont simpliciales, il suffit de calculer les matrices $M_p(f, X)|_U$ pour $p = 0, 1, 2$ et les matrices $M_p(f_1, X_1)|_{U_1}$ et $M_p(f_2, X_2)|_{U_2}$ pour $p = 0, 1$. Les calculs deviennent plus simples en regardant quels simplexes restent fixes par les applications.

- Comme f n'a pas de sommets fixes dans U , on a $M_0(f, X)|_U = 0$.
- Comme f_1 n'a qu'un seul sommet fixe dans U_1 (d_3), on a $M_0(f_1, X_1)|_{U_1} = 1$.
- Comme f_2 n'a pas de sommets fixes dans U_2 , on a $M_0(f_2, X_2)|_{U_2} = 0$.
- Comme $[b_3, c_3]$ est la seule 1-face dans U fixe par f (et l'orientation est inversée), on a $M_1(f, X)|_U = -1$.
- Comme il n'y a pas de 1-faces dans U_1 fixes par f_1 (f_1 fixe seulement $[d_1, d_2]$, qui n'appartient pas à U_1), on a $M_1(f_1, X_1)|_{U_1} = 0$.
- Comme $[b_3, c_3]$ est la seule 1-face de U_2 fixe par f_2 (et l'orientation est inversée), on a $M_1(f_2, X_2)|_{U_2} = -1$.
- Comme f n'a pas de 2-faces fixes dans U , on a $M_2(f, X)|_U = 0$.

Ainsi, on obtient

- $\Lambda(f, U)_X = 0 - (-1) + 0 = 1$.
- $\Lambda(f_1, U_1)_{X_1} = 1 - 0 = 1$.
- $\Lambda(f_2, U_2)_{X_2} = 0 - (-1) = 1$.

et donc

$$\Lambda(f, U)_X = 1 = 1 \cdot 1 = \Lambda(f_1, U_1)_{X_1} \cdot \Lambda(f_2, U_2)_{X_2}.$$

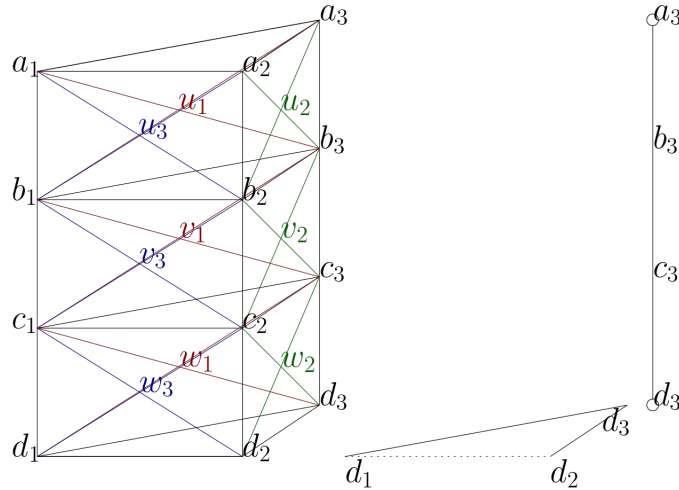


FIGURE 3.1.1 – Le complexe simplicial de l’Exemple 3.1.6.

L’intégrale de la Définition 3.1.2 permettra de généraliser la règle du produit du Théorème 3.1.4 pour obtenir un théorème de Fubini pour les espaces fibrés triangulables. Le théorème équivalent pour la caractéristique d’Euler combinatoire a été obtenu dans [21, Theorem 4.5].

Commençons par prouver quelques Lemmes.

Lemme 3.1.7. *Soit (X, p, B) un espace fibré de fibre F avec B un complexe simplicial. Alors, pour chaque $b \in B$, il y a un voisinage ouvert définissable $B_j \subset B$ de b tel que $\overline{p^{-1}(B_j)} \approx \overline{B_j} \times F$.*

Démonstration. Comme X est un espace fibré, il existe un voisinage ouvert U de p tel que $p^{-1}(U) \approx U \times F$. Soit $B_j \subset U$ une cellule ouverte de B (en particulier un sous-espace définissable) telle que son adhérence est contenue dans U (l’existence de cette cellule est fourni par la normalité de B). Alors, comme X est un espace fibré, on a $p^{-1}(\overline{B_j}) = \overline{p^{-1}(B_j)}$ et donc

$$\overline{p^{-1}(B_j)} \approx \overline{B_j} \times F, \quad p^{-1}(B_j) \approx B_j \times F. \quad \square$$

Lemme 3.1.8 [55, Lemma 6.2]. *Soit (X, p, B) un espace fibré de fibre F , avec p une projection définissable et X, F et B des complexes simpliciaux. Soit $A = p^{-1}(B_j)$ de façon que $\overline{p^{-1}(B_j)} \stackrel{g}{\cong} \overline{B_j} \times F$ et $p^{-1}(B_j) \stackrel{g}{\cong} B_j \times F$. Soit $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ définie comme $h = \mathbb{1}_A$. Soit $l : X \rightarrow X$ une application ouverte telle que $l(A) \subset A$, $l(X \setminus A) \subset X \setminus A$ et $l|_A \equiv \text{id} \times l_2$, avec $l_2 : F \xrightarrow{\cong} F$ une application ouverte. Dans ce cas,*

$$\int_X h d\Lambda l = \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} h d\Lambda(\text{id} \times l_2) \right) d\chi. \quad (3.4)$$

où $\int_X [\cdot] d\chi$ est l'intégrale par rapport à la caractéristique d'Euler définie dans [7] et qui est précisément l'intégrale de la Définition 3.1.2 pour $f = \text{id}$.

Démonstration. Le Théorème 3.1.4 nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} \int_X h d\Lambda l &= \Lambda(l, A)_X = \Lambda(\text{id}, B_j)_{\overline{B_j}} \cdot \Lambda(l_2, F) \\ &= \Lambda(l_2, F) \int_B \mathbb{1}_{B_j} d\chi = \int_B \Lambda(l_2, F) \cdot 1 \cdot \mathbb{1}_{B_j} d\chi \\ &= \int_B \Lambda(l_2, F) \cdot \Lambda(\text{id}, \{b\}) \mathbb{1}_{B_j} d\chi = \int_B \Lambda(\text{id} \times l_2, \{b\} \times F) \mathbb{1}_{B_j} d\chi \\ &= \int_B \Lambda(\text{id} \times l_2, p^{-1}(b)) \mathbb{1}_{B_j} d\chi = \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} h d\Lambda(\text{id} \times l_2) \right) \mathbb{1}_{B_j} d\chi \\ &= \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} h d\Lambda(\text{id} \times l_2) \right) d\chi. \square \end{aligned}$$

Observation 3.1.9. D'après le Lemme 3.1.8, on peut formuler un théorème de Fubini pour l'intégrale par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire. Mais avant, remarquons que, comme B est compact (B est un complexe simplicial fini), il y a un recouvrement fini $\{B_j\}_{j=1}^m$ où les B_j sont comme dans le Lemme 3.1.7. Ce recouvrement induit un recouvrement de X composé par $\{p^{-1}(B_j)\}_{j=1}^m$.

Théorème 3.1.10 (Théorème de Fubini, [55, Theorem 6.5]). *Soit (X, p, B) un espace fibré de fibre F tel que X, B et F sont des complexes simpliciaux et p est une projection définissable. Soit $\{B_j\}_{j=1}^m$ le recouvrement de l'Observation 3.1.9. Soit $l : X \rightarrow X$ une application ouverte telle que $l|_{\overline{p^{-1}(B_j)}} \equiv \text{id} \times l_2$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, où $l_2 : F \xrightarrow{\cong} F$ est une application ouverte (en particulier les*

$p^{-1}(B_j)$ seront dans \mathcal{D}_l). Dans ce cas,

$$\int_X h d\Lambda_l = \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} h d\Lambda_l \right) d\chi$$

pour toute fonction $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ l -intégrable.

Démonstration. Comme h est l -intégrable, par définition $h = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha}$, où $U_\alpha \in \mathcal{D}_l$ pour tout $\alpha \in I$. Alors on a

$$\begin{aligned} \int_X h d\Lambda_l &= \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \int_X \mathbb{1}_{U_\alpha} d\Lambda_l \\ &= \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \int_X \left[\sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{U_\alpha \cap p^{-1}(B_j)} - \sum_{j,k=1}^m \mathbb{1}_{U_\alpha \cap p^{-1}(B_j) \cap p^{-1}(B_k)} \dots \right] d\Lambda_l \\ &= \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \left[\sum_{j=1}^m \int_X \mathbb{1}_{U_\alpha \cap p^{-1}(B_j)} d\Lambda_l \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j,k=1}^m \int_X \mathbb{1}_{U_\alpha \cap p^{-1}(B_j) \cap p^{-1}(B_k)} d\Lambda_l \dots \right]. \end{aligned}$$

Maintenant, d'après [74, Chapter 9, Theorem 1.7] et le Lemme 3.1.8, le dernier terme peut être écrit comme

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha \in I} c_\alpha \left[\sum_{j=1}^m \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} \mathbb{1}_{U_\alpha \cap p^{-1}(B_j)} d\Lambda_l \right) d\chi \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j,k=1}^m \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} \mathbb{1}_{U_\alpha \cap p^{-1}(B_j) \cap p^{-1}(B_k)} d\Lambda_l \right) d\chi \dots \right] \\ &= \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} \mathbb{1}_{U_\alpha} d\Lambda_l \right) d\chi = \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} \sum_{\alpha \in \alpha} c_\alpha \mathbb{1}_{U_\alpha} d\Lambda_l \right) d\chi \\ &= \int_B \left(\int_{p^{-1}(b)} h d\Lambda_l \right) d\chi. \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Applications de l'Intégrale dans la Théorie de Faisceaux

L'intégrale par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire de la Définition 3.1.2 permet de calculer le nombre de Lefschetz faisceau-théorique. L'idée vient d'une

correspondance entre les faisceaux f - c -constructibles et les fonctions f -intégrables.

Même si la définition de fonction f -intégrable sera dans cette section très similaire à celle de la Définition 3.1.2, il y a une condition qui doit être demandée afin d'avoir un bon comportement avec les faisceaux (on doit notamment demander quelque compacité locale). Ainsi, on introduit une nouvelle définition de fonctions f -intégrables qui sera employée seulement dans cette section et à la Sous-section 4.1.2. Pour éviter des confusions, on appellera ces fonctions f -constructibles au lieu de f -intégrables. Aussi dans ces sections, on n'emploiera que des homéomorphismes plutôt que simplement des applications ouvertes pour simplifier le travail avec les faisceaux.

D'abord, seulement dans cette section et à la Sous-section 4.1.2, nos fonctions constructibles auront leurs images dans \mathbb{N} . Cela est parce que, dans ce cas, le lien entre fonctions f -constructibles et faisceaux f - c -constructibles est plus clair. Cependant, à la Sous-section 3.2.2, on travaillera avec des fonctions constructibles à image dans \mathbb{Z} (mais dans ce cas ce qu'on associera à la fonction constructible sera un complexe de faisceaux).

3.2.1 Fonctions \mathbb{N} -constructibles et faisceaux constructibles

Définition 3.2.1. Soient X un complexe cellulaire définissable et $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme cellulaire définissable. Une fonction $h : X \rightarrow \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$) est dite f -constructible s'il y a un nombre fini d'ensembles de niveau non vides $\{X_j\}_{j=0}^n = \{h^{-1}(j)\}_{j=0}^n$ et chacun de ces ensembles de niveau est un sous-complexe incomplet localement compact, f -invariant et définissable de X . Dans ce cas, $h = \sum_{j=1}^n j \mathbb{1}_{h^{-1}(j)}$ (où $\mathbb{1}_{h^{-1}(j)}$ est la fonction caractéristique de $h^{-1}(j)$) mais il y a d'autres expressions pour h de la forme $h = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{U_j}$, où $c_j \in \mathbb{N}$ et les U_j sont définissables et f -invariants. On définit

$$\int_X h d\Lambda f = \int_X (c_1 \mathbb{1}_{U_1} + \dots + c_n \mathbb{1}_{U_n}) d\Lambda f = c_1 \Lambda(f, U_1)_X + \dots + c_n \Lambda(f, U_n)_X.$$

Cette intégrale est bien définie d'après le Théorème 3.1.3 car les fonctions f -constructibles sont un cas particulier des fonctions f -intégrables (une fois on triangule le complexe cellulaire définissable X par un complexe simplicial). c'est-à-dire, cette définition d'intégrale ne dépend pas des U_j ou des c_j .

Observation 3.2.2. Les faisceaux f - c -constructibles et les fonctions f -constructibles partagent un fort lien. Un faisceau \mathcal{F} f - c -constructible dans X dont f respecte les composantes constantes de \mathcal{F} définit une fonction f -intégrable $h : X \rightarrow \mathbb{N}$. Cette

fonction h envoie chaque point $x \in X$ sur la dimension de la fibre \mathcal{F}_x et ses ensembles de niveau sont des sous-complexes incomplets localement compacts (alors h est f -constructible). Réciproquement, étant donnée une fonction f -constructible $h : X \rightarrow \mathbb{N}$, on peut définir un faisceau f - c -constructible associé à h . Afin d'atteindre ce but, pour chaque j on définit le faisceau $\tilde{\mathbb{R}}_{X_j}^j$ comme le prolongement par zéro à X du faisceau constant $\tilde{\mathbb{R}}^j$ sur X_j (ce prolongement existe car X_j est localement fermé puisqu'il est homéomorphe à un sous-complexe incomplet localement compact). On définit le faisceau f - c -constructible \mathcal{F} associé à h sur X comme $\mathcal{F} = \bigoplus_j \tilde{\mathbb{R}}_{X_j}^j$.

Proposition 3.2.3. *Soit X un complexe cellulaire définissable et soit $U \subset X$ un sous-complexe incomplet localement compact et définissable. Soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme cellulaire tel que U est f -invariant et soit \mathcal{F} le faisceau constant sur U à valeur \mathbb{R}^n . Dans ce cas, le nombre de Lefschetz faisceau-théorique de f associé à \mathcal{F} dans U est égal à n fois le nombre de Lefschetz combinatoire de f dans U , (i.e.),*

$$L_c(U, f, \mathcal{F}) = n\Lambda(f, U)_X.$$

Démonstration. Notons \mathbb{R} , à la fois, les nombres réels et le faisceau constant à valeur \mathbb{R} . D'après [29, II, S4, Théorème 4.12.1], on a un homomorphisme naturel

$$H_c^*(U, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_n H_c^*(U, \mathbb{R}).$$

Mais alors, le Lemme 0.4.16 implique $H_c^*(U, \mathcal{F}) \cong \bigoplus_n H_c^*(U; \mathbb{R})$. On en déduit $\Lambda_c(U, f, \mathcal{F}) = nL_c(U, f)$ et le Théorème 2.1.11 garantit que le dernier terme est égal à $n\Lambda(f, U)_X$. \square

Le lemme suivant peut être obtenu à partir de la Proposition 9.5, de l'Exemple 9.6 et de la Proposition 9.7 de [40, III].

Lemme 3.2.4. *Soit \mathcal{F} un faisceau c -constructible. On a $H_c^m(X, \mathcal{F}) = 0$ pour un m assez grand.*

Le calcul du nombre de Lefschetz faisceau-théorique devient beaucoup plus simple grâce au théorème suivant. Celui-ci constitue notre résultat principal dans [54].

Théorème 3.2.5 (Théorème de représentation [54, Theorem 4.3]). *Soit X un complexe cellulaire définissable et soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme cellulaire. Si \mathcal{F} est un faisceau f - c -constructible sur X tel que f respecte les composantes constantes de \mathcal{F} , alors*

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = \int_X h d\Lambda f, \tag{3.5}$$

où $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction f -constructible associée à \mathcal{F} . Réciproquement, si $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction f -constructible, $h = \sum_{j=1}^q c_j \mathbb{1}_{U_j}$, son faisceau f -constructible associé \mathcal{F} satisfait l'Équation ((3.5)).

Démonstration. Commençons par considérer $U_{1,n}$ comme l'ouvert qui consiste des cellules ouvertes de dimension maximale dans X qui appartiennent à une composante constante C_1 du faisceau (remarquons que $U_{1,n}$ peut être vide). Comme $U_{1,n}$ est ouvert et f -invariant, on peut considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H_c^l(U_{1,n}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^l(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^l(X - U_{1,n}, \mathcal{F}) & \longrightarrow \\ & f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow & \\ \longrightarrow & H_c^l(U_{1,n}, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^l(X, \mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^l(X - U_{1,n}, \mathcal{F}) & \longrightarrow . \end{array}$$

Par conséquent, comme les trois groupes de cohomologie deviennent nuls après une dimension l assez grande, on a

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = L_c(U_{1,n}, f, \mathcal{F}) + L_c(X - U_{1,n}, \mathcal{F}).$$

On peut répéter l'argument avec $U_{2,n}$ au lieu de $U_{1,n}$ et $X - U_{1,n}$ au lieu de X . Dans ce cas, on obtient

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = L_c(U_{1,n}, f, \mathcal{F}) + L_c(U_{2,n}, \mathcal{F}) + L_c(X - U_{1,n} - U_{2,n}, \mathcal{F}).$$

On peut répéter l'argument jusqu'à-ce qu'on arrive à

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = \sum_{j=1}^m L_c(U_{j,n}, f, \mathcal{F}) + L_c(X^{(n-1)}, f, \mathcal{F}),$$

et après répéter progressivement le même pour les cellules de dimension inférieure.

Finalement on obtient

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^m L_c(U_{j,i}, f, \mathcal{F}) \right). \quad (3.6)$$

Maintenant on applique le Théorème 3.2.3 à chaque terme du côté droit de l'équation afin d'obtenir

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^m c_j \Lambda(f, U_{j,i})_X \right),$$

où c_j est la dimension du faisceau sur C_j . Si l'on ajuste l'ordre des termes, l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire permet d'avoir :

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^m c_j \Lambda(f, U_{j,i})_X \right) = \sum_{j=i}^m c_j \left(\sum_{i=0}^n \Lambda(f, U_{j,i})_X \right) = \sum_{j=i}^m c_j \Lambda(f, C_j)_X.$$

Remarquons que $\int_X h d\Lambda f = \sum_{j=i}^m c_j \Lambda(f, C_j)_X$ où $h = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{C_j}$ est la fonction f -constructible associée au faisceau f - c -constructible \mathcal{F} . Pour la réciproque du théorème, remarquons que la fonction f -constructible associée au faisceau f - c -constructible \mathcal{F} associé à $h: X \rightarrow \mathbb{N}$ est précisément h . \square

Corollaire 3.2.6. *Soit X un complexe cellulaire définissable et soit $f: X \rightarrow X$ un homéomorphisme cellulaire. Si \mathcal{F} est un faisceau f - c -constructible sur X tel que f respecte les composantes constantes de \mathcal{F} et $L_c(X, f, \mathcal{F}) \neq 0$, alors f a un point fixe dans X .*

Démonstration. D'après le Théorème 3.2.5, on a

$$\int_X h d\Lambda f \neq 0,$$

où h est la fonction f -constructible associée à \mathcal{F} . Étant f -constructible, h admet une expression $h = \sum_{j=1}^q c_j \mathbb{1}_{U_j}$ et, par définition on a

$$\int_X h d\Lambda f = \int_X \sum_{j=1}^q c_j \mathbb{1}_{U_j} d\Lambda f = \sum_{j=1}^q c_j \Lambda(f, U_j)_X \neq 0.$$

Mais cela signifie qu'il existe un $j \in \{1, \dots, q\}$ tel que $\Lambda(f, U_j)_X \neq 0$. Alors, d'après le Théorème 1.3.2 f doit avoir un point fixe dans $\overline{U_j} \subset X$. \square

L'exemple suivant illustre l'emploi du Théorème 3.2.5.

Exemple 3.2.7. Considérons comme complexe cellulaire définissable le complexe simplicial X de la Figure 3.2.1.

Par simplicité, on prendra un faisceau \mathcal{F} qui a déjà une structure de faisceau associé. Considérons la partition $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ de la Figure 3.2.2.

On prend $\mathcal{F} = i_1! \mathcal{F}_1 \oplus i_2! \mathcal{F}_2 \oplus i_3! \mathcal{F}_3 \oplus i_4! \mathcal{F}_4 \oplus i_5! \mathcal{F}_5$, où $\mathcal{F}_1 = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F}_2 = \mathbb{R}^4$, $\mathcal{F}_3 = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_4 = \mathbb{R}^1$ et $\mathcal{F}_5 = \mathbb{R}^3$ sont des faisceaux constants.

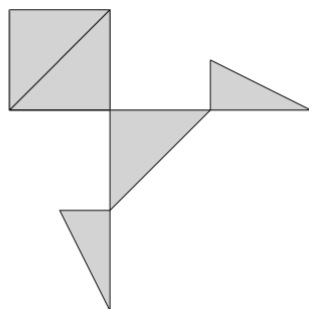


FIGURE 3.2.1 – Complexe X.

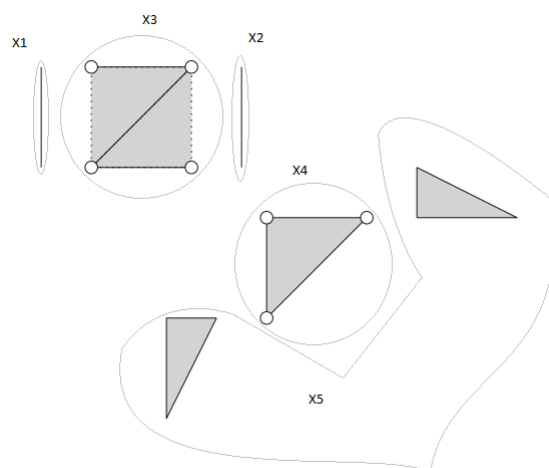


FIGURE 3.2.2 – Elements de la partition.

Définissons maintenant l'application f . Si on pense au carré supérieur comme $[0, 1] \times [0, 1]$, on y définit f comme l'homéomorphisme qui envoie chaque (x, y) sur $(x + x(1 - x)(x - y), y)$. Cette application dilate les parties intermédiaires du carré en laissant invariantes les arêtes et la diagonale.

D'autre part, on peut voir le triangle du milieu comme l'enveloppe convexe des points $(-1, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ du plan. Dans ce cas, on y définit f comme l'homéo-

morphisme qui envoie chaque (x, y) sur $(-x - x(y - (1 - x)), y)$ si $x \geq 0$ ou sur $((-x - x(y - (1 + x))), y)$ si $x < 0$. Cette application reflète le triangle au même temps que contracte l'intérieur et la base laissant fixe la ligne verticale sur $(0, 0)$. Finalement, l'application échangera les deux triangles de X_5 entre eux. Remarquons que $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ et les X_i seront précisément ceux de la Figure 3.2.2.

Or, si l'on veut calculer le nombre de Lefschetz faisceau-théorique $L_c(X, f, \mathcal{F})$, grâce au Théorème 3.2.5 on n'est pas forcé de calculer la cohomologie du faisceau directement.

Si l'on emploie le Théorème 3.2.5, le premier pas consiste à construire la fonction f -constructible h associée, laquelle dans ce cas est

$$h = 1 \cdot \mathbb{1}_{X_1} + 4 \cdot \mathbb{1}_{X_2} + 2 \cdot \mathbb{1}_{X_3} + 1 \cdot \mathbb{1}_{X_4} + 3 \cdot \mathbb{1}_{X_5}.$$

Maintenant on calcule

$$\int_X h d\Lambda f = 1\Lambda(f, X_1)_X + 4\Lambda(f, X_2)_X + 2\Lambda(f, X_3)_X + 1\Lambda(f, X_4)_X + 3\Lambda(f, X_5)_X.$$

Finalement, comme l'identité est une approximation simpliciale de f dans le carré et la réflexion est une approximation simpliciale de f dans le triangle du milieu, on obtient

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = \int_X h d\Lambda f = 1 + 4 - 2 + 0 + 0 = 3.$$

3.2.2 Fonctions \mathbb{Z} -constructibles, complexes de faisceaux et règle de Barrow.

Chaque fonction constructible à valeurs dans \mathbb{Z} donne un complexe borné de faisceaux constructibles associé. La réciproque est aussi vraie. Dans cette sous-section on emploiera la notation de la Section 13 dans [21].

Considérons un complexe borné de faisceaux f - c -constructibles tel que f respecte leurs composantes constantes, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F}^\bullet = \dots \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^i \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{d} \dots$$

Alors, si les morphismes du complexe ont un bon comportement avec f , on obtient une fonction associée f -constructible à valeurs dans \mathbb{Z} définie par

$$h(x) = \sum_i (-1)^i \dim(\mathcal{H}^i \mathcal{F}_x^i),$$

où les ensembles de niveau sont des sous-complexes incomplets localement compacts. Mais le plus important est que réciproquement, étant donnée une de ces fonctions f -constructibles à valeurs dans \mathbb{Z} , on peut lui associer un complexe de faisceaux f - c -constructibles \mathcal{F}^\bullet tel que $h(x) = \sum_i (-1)^i \dim(\mathcal{H}^i, \mathcal{F}_x^\bullet)$. Il suffit de considérer le complexe

$$0 \xrightarrow{0} \oplus_{n < 0} \tilde{\mathbb{R}}_{X_n}^{-n} \xrightarrow{0} \oplus_{n > 0} \tilde{\mathbb{R}}_{X_n}^n \xrightarrow{0} 0,$$

où les X_j sont les ensembles de niveau de h ($X_j = h^{-1}(j)$).

Pour conclure cette section, on obtient une règle de Barrow :

Théorème 3.2.8 [54, Theorem 4.5]. *Soit h une fonction f -constructible sur X dont les ensembles de niveau sont des sous-complexes incomplets localement compacts. Soient $\{X_j\}$ ces ensembles de niveau de h . On a*

$$\int_X h d\Lambda f = L_c(X, f, \oplus_{j > 0} \tilde{\mathbb{R}}_{X_j}^j) - L_c(X, f, \oplus_{j < 0} \tilde{\mathbb{R}}_{X_j}^{-j}).$$

Démonstration. D'après la définition d'intégrale (Définition 3.1.2), on a

$$\begin{aligned} \int_X h d\Lambda f &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \cdot \Lambda(f, X_j)_X = \sum_{j < 0} j \cdot \Lambda(f, X_j)_X + \sum_{j > 0} j \cdot \Lambda(f, X_j)_X \\ &= \sum_{j > 0} j \cdot \Lambda(f, X_j)_X - \sum_{j > 0} j \cdot \Lambda(f, X_{-j})_X \\ &= L_c(X, f, \oplus_{j > 0} \tilde{\mathbb{R}}_{X_j}^j) - L_c(X, f, \oplus_{j < 0} \tilde{\mathbb{R}}_{X_j}^{-j}). \square \end{aligned}$$

3.3 Une Intégrale par rapport à l'Indice de Point Fixe

L'intégration de la Définition 3.1.2 a une limitation claire : les applications f par rapport auxquelles on intègre doivent être ouvertes et les fonctions f -constructibles doivent avoir une expression $h = \sum_{j=1}^n d_j \mathbb{1}_{U_j}$ où les U_j sont définissables et satisfont $f(U_j) \subset U_j$ et $f(X \setminus U_j) \subset X \setminus U_j$.

Afin d'affaiblir cette restriction, on peut généraliser l'intégration par rapport au nombre de Lefschetz à une intégration par rapport à l'indice de point fixe. Dans le Théorème 2.2.6 on a vu que l'indice de point fixe combinatoire généralise le nombre de Lefschetz combinatoire. De plus, à l'heure de travailler avec l'indice de point fixe combinatoire il n'y a pas de restriction sur l'application et la seule condition que

devraient satisfaire les U_j serait celle de ne pas avoir de points fixes de f dans $\overline{U_j} \setminus \overset{\circ}{U_j}$. Alors, pourquoi ne pas intégrer par rapport à l'indice de point fixe ?

L'intégration par rapport à l'indice de point fixe correspond à la deuxième partie de [3]. Dans ce mémoire, on divisera les idées qui seront présentées entre cette section, centrée sur l'intégration des fonctions f -intégrables $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ et la Section 3.4, où les efforts seront concentrés sur l'intégration des fonctions à valeurs réelles.

On commencera par démontrer la cohérence de la définition de l'intégrale par rapport à l'indice de points fixes et ensuite, comme à la Section 3.1, on obtiendra quelques bonnes propriétés de cette intégrale.

Définition 3.3.1. Soit X un complexe simplicial et $f : X \rightarrow X$ une application continue. Une fonction $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ est appelée f -intégrable par rapport à l'indice si elle admet une expression

$$h = \sum_{j=1}^n d_j \mathbb{1}_{U_j},$$

où f n'a pas de points fixes dans $\overline{U_j} \setminus \overset{\circ}{U_j}$ pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$.

Définition 3.3.2. Soient X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application continue et $h = \sum_{j=1}^n d_j \mathbb{1}_{U_j} : X \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction f -intégrable par rapport à l'indice. On définit l'intégrale de h par rapport à l'indice de point fixe combinatoire de f comme

$$\int_X h \, di_c(f) = \sum_{j=1}^n d_j \cdot i_c(X, f, U_j).$$

On doit vérifier que cette intégrale est bien définie. La preuve est similaire à celle du Théorème 3.1.3.

Théorème 3.3.3 [3, Theorem 3.3]. Soient X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application continue et $h = \sum_{j=1}^n d_j \mathbb{1}_{U_j} = \sum_{k=1}^m e_k \mathbb{1}_{V_k}$, où f n'a pas de points fixes ni dans $\overline{U_j} \setminus \overset{\circ}{U_j}$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ ni dans $\overline{V_k} \setminus \overset{\circ}{V_k}$ pour $k \in \{1, \dots, m\}$. Dans ce cas,

$$\sum_{j=1}^n d_j \cdot i_c(X, f, U_j) = \sum_{k=1}^m e_k \cdot i_c(X, f, V_k).$$

Démonstration. Commençons par écrire h comme une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles compatibles avec les U_j 's et les V_k 's.

3.3 Une Intégrale par rapport à l'Indice de Point Fixe

Soit $W_\zeta = U_\zeta$ si $1 \leq \zeta \leq n$ et $W_\zeta = V_{\zeta-n}$ si $n+1 \leq \zeta \leq n+m$. On divise $(\cup_{j=1}^n U_j) \cup (\cup_{k=1}^m V_k)$ entre les sous-ensembles disjoints suivants (indexés avec $s = 1, \dots, \mu$) :

$$\begin{aligned} L_1 &= \bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta, \quad L_2 = \bigcap_{\zeta \neq \zeta_1} W_\zeta \setminus \bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta, \\ L_3 &= \bigcap_{\zeta \neq \zeta_2} W_\zeta \setminus \bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta \setminus \left(\left(\bigcap_{\zeta \neq \zeta_1} W_\zeta \right) \setminus \left(\bigcap_{\zeta=1}^{n+m} W_\zeta \right) \right), \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Soit \mathcal{B} la famille de sous-ensembles $A \subset X$ tels que f n'a pas de points fixes dans $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Remarquons que \mathcal{B} est fermée par rapport aux intersections finies et aux complémentaires, alors les éléments dans ((3.7)) appartiennent à \mathcal{B} . D'ailleurs si l'on écrit

$$\begin{aligned} N_j &= \{s \in \{1, \dots, \mu\} : L_s \subset U_j\}, \\ M_k &= \{s \in \{1, \dots, \mu\} : L_s \subset V_k\} \end{aligned}$$

et l'on applique l'axiome d'additivité de l'indice de point fixe combinatoire (Théorème 2.2.5) on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n d_j \cdot i_c(X, f, U_j) &= \sum_{j=1}^n d_j \sum_{s \in N_j} i_c(X, f, L_s) \\ &= \sum_{s=1}^{\mu} i_c(X, f, L_s) \cdot \sum_{j: s \in N_j} d_j = \sum_{s=1}^{\mu} i_c(X, f, L_s) \cdot \sum_{k: s \in M_k} e_k \\ &= \sum_{k=1}^m e_k \sum_{s \in M_k} i_c(X, f, L_s) = \sum_{k=1}^m e_k \cdot i_c(X, f, V_k), \end{aligned}$$

où la troisième égalité est conséquence de $\sum_{j: s \in N_j} d_j = \sum_{k: s \in M_k} e_k$ pour $s = 1, \dots, \mu$ (et cela est en même temps conséquence de $\sum_{j=1}^n d_j \mathbb{1}_{U_j} = \sum_{k=1}^m e_k \mathbb{1}_{V_k}$). \square

Maintenant on présente quelques bonnes propriétés satisfaites par cette intégrale.

Théorème 3.3.4 [3, Theorem 3.4]. *Soient X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application continue et $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction f -intégrable par rapport à*

l'indice. Dans ce cas,

$$\int_X h \, di_c(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} p \cdot i_c(X, f, \{h = p\}),$$

où $\{h = k\} := \{x \in X : h(x) = k\}$.

Démonstration. Comme la famille \mathcal{B} du Théorème 3.3.3 est aussi fermée par rapport aux réunions finies, le résultat est conséquence de l'axiome d'additivité de l'indice de point fixe combinatoire (Théorème 2.2.5) et de

$$\sum_{j=i}^n d_j \cdot i_c(X, f, U_j) = \sum_{s=1}^{\mu} i_c(X, f, L_s) \cdot \sum_{j:s \in N_j} d_j$$

(voir Théorème 3.3.3). □

Comme dans le cas de l'intégrale par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire, avec l'indice de point fixe on peut aussi obtenir une sorte de Théorème de Fubini.

Commençons par généraliser la règle du produit de l'indice de point fixe (Théorème 0.2.15)

Théorème 3.3.5 (Règle du produit de l'indice de point fixe combinatoire [3, Theorem 3.5]). *Soient X_1, X_2 des complexes simpliciaux, $f_1 : X_1 \rightarrow X_1, f_2 : X_2 \rightarrow X_2$ des applications continues et $A_1 \subset X_1, A_2 \subset X_2$ des sous-espaces tels que f_1 n'a pas de points fixes dans $\overline{A_1} \setminus \overset{\circ}{A_1}$ et f_2 n'a pas de points fixes dans $\overline{A_2} \setminus \overset{\circ}{A_2}$. Alors,*

$$i_c(X_1 \times X_2, f_1 \times f_2, A_1 \times A_2) = i_c(X_1, f_1, A_1) \cdot i_c(X_2, f_2, A_2).$$

Démonstration. Le théorème est conséquence de la règle du produit de l'indice de point fixe (Théorème 0.2.15). Remarquons d'abord que, comme f_1 n'a pas de points fixes dans $\overline{A_1} \setminus \overset{\circ}{A_1}$ et f_2 n'a pas de points fixes dans $\overline{A_2} \setminus \overset{\circ}{A_2}$, l'application $f_1 \times f_2$ n'aura pas de points fixes dans $\overline{A_1 \times A_2} \setminus (A_1 \overset{\circ}{\times} A_2)$. Si l'on applique le Théorème 0.2.15, on obtient

$$\begin{aligned} i_c(X_1 \times X_2, f_1 \times f_2, A_1 \times A_2) &= i_c(X_1 \times X_2, f_1 \times f_2, (A_1 \overset{\circ}{\times} A_2)) \\ &= i_c(X_1 \times X_2, f_1 \times f_2, \overset{\circ}{A_1} \times \overset{\circ}{A_2}) = i_c(X_1, f_1, \overset{\circ}{A_1}) \cdot i_c(X_2, f_2, \overset{\circ}{A_2}) \\ &= i_c(X_1, f_1, A_1) \cdot i_c(X_2, f_2, A_2). \square \end{aligned}$$

Finalement nous généralisons le Lemme 3.1.8.

Théorème 3.3.6 [3, Theorem 3.6]. *Soit (X, p, B) un espace fibré de fibre F , où p est définissable et X, B et F sont des complexes simpliciaux. Soit $B' \subset B$ un sous-espace définissable tel que, avec la notation $A = p^{-1}(B')$, on a $\overline{A} \stackrel{g}{\approx} \overline{B'} \times F$ et $A \stackrel{g}{\approx} B' \times F$. Définissons $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ comme $h = \mathbb{1}_A$ et soit $l : X \rightarrow X$ une application telle que $l|_{\overline{A}} \equiv l_1 \times l_2$ avec $l_1 : \overline{B'} \rightarrow \overline{B'}$ et $l_2 : F \rightarrow F$. Supposons aussi que l_1 n'a pas de points fixes dans $\overline{B'} \setminus \overset{\circ}{B'}$ (et alors l n'a pas de point fixes dans $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$). Dans ce cas,*

$$\int_X h \, di_c(l) = \int_{\overline{B'}} \left(\int_{p^{-1}(b)} h \, di_c(\text{id} \times l_2) \right) di_c(l_1).$$

Démonstration. On divise la preuve en deux cas. Si l n'a pas de point fixes dans \overline{A} alors, d'après le Corollaire 2.2.4 les deux termes sont nuls. S'il y a des points fixes dans \overline{A} , prenons $B'' \subset B'$ tel que tous les points fixes de l_1 dans B' sont dans $(B'')^\circ$ (et alors les points fixes de l dans \overline{A} sont tous dans $(p^{-1}(B''))^\circ$) et tel que $l(p^{-1}(B'')) \subset A$.

Considérons maintenant une triangulation (Y, \overline{W}, W, V) compatible avec

$$(X, \overline{p^{-1}(B')}, p^{-1}(B'), p^{-1}(B'')).$$

Par définition, on a

$$\int_X \mathbb{1}_A \, di_c(l) = i_c(X, l, p^{-1}(B')).$$

Or, compte tenu de l'axiome d'additivité de l'indice de point fixe combinatoire (Théorème 2.2.5) on peut conclure que le dernier terme est égal à $i_c(X, l, p^{-1}(B''))$. Maintenant on a

$$i_c(X, l, p^{-1}(B'')) = i(X, l, p^{-1}(\overset{\circ}{B}')) = i(Y, \tilde{l}, \overset{\circ}{V}),$$

où \tilde{l} est l'application induite par l dans la triangulation. Mais [65, Theorem 2.5] et [65, Corollary 7.2] impliquent

$$i(Y, \tilde{l}, \overset{\circ}{V}) = i(\overline{B'} \times F, l_1 \times l_2, (B'' \times F)) = i(\overline{B'}, l_1, \overset{\circ}{B}'') \cdot i(F, l_2, F),$$

où la dernière égalité est conséquence du Théorème 3.3.5. Finalement, si l'on prend

$b_0 \in B''$, on obtient

$$\begin{aligned}
 i(\overline{B'}, l_1, \mathring{B}'') \cdot i(F, l_2, F) &= i_c(\overline{B'}, l_1, B'') \cdot i_c(F, l_2, F) \\
 &= i_c(\overline{B'}, l_1, B'') \cdot \int_F \mathbb{1}_F d i_c(l_2) = i_c(\overline{B'}, l_1, B'') \cdot \int_{p^{-1}(b_0)} \mathbb{1}_{p^{-1}(b_0)} d i_c(\text{id} \times l_2) \\
 &= \int_{\overline{B'}} \mathbb{1}_{B''} \left(\int_{p^{-1}(b_0)} \mathbb{1}_{p^{-1}(b_0)} d i_c(\text{id} \times l_2) \right) d i_c(l_1) \\
 &= \int_{\overline{B'}} \left(\int_{p^{-1}(b)} \mathbb{1}_{p^{-1}(B'')} d i_c(\text{id} \times l_2) \right) d i_c(l_1) \\
 &= \int_{\overline{B'}} \left(\int_{p^{-1}(b)} \mathbb{1}_{p^{-1}(B'')} d i_c(\text{id} \times l_2) \right) d i_c(l_1) + 0 \\
 &= \int_{\overline{B'}} \left(\int_{p^{-1}(b)} \mathbb{1}_{p^{-1}(B'')} d i_c(\text{id} \times l_2) \right) d i_c(l_1) \\
 &+ \int_{\overline{B'}} \left(\int_{p^{-1}(b)} \mathbb{1}_{A \setminus p^{-1}(B'')} d i_c(\text{id} \times l_2) \right) d i_c(l_1) \\
 &= \int_{\overline{B'}} \left(\int_{p^{-1}(b)} h d i_c(\text{id} \times l_2) \right) d i_c(l_1). \square
 \end{aligned}$$

3.4 Une Intégrale de Fonctions Réelles par rapport à l'Ensemble des Points Fixes

Dans [8], sont introduits les concepts de somme inférieure et supérieure de Riemann pour une fonction réelle h définie sur un complexe simplicial X par rapport à la caractéristique d'Euler.

Le propos de cette sous-section est l'introduction des concepts de somme inférieure et supérieure de Riemann pour des fonctions réelles définies sur des complexes simpliciaux "par rapport aux point fixes" d'une application $f : X \rightarrow X$, ce qui correspond avec la dernière partie de [3].

Comme première idée, on pourrait essayer d'intégrer ce genre de fonctions par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire d'une application ouverte. Malheureusement, lorsqu'on prend des partitions de plus en plus fines d'un intervalle, f devrait toujours envoyer les images réciproques par h de ces éléments de la partition sur elles-mêmes et envoyer les complémentaires de ces images réciproques aussi sur eux-mêmes. Mais cela entraîne une très grande restriction sur l'application f .

3.4 Une Intégrale de Fonctions Réelles par rapport à l'Ensemble des Points Fixes

Afin de résoudre ce problème, on emploiera une intégration par rapport à l'indice de point fixe. D'ailleurs, avec cette intégration, on pourra intégrer par rapport aux applications continues f en général et non seulement par rapport à celles qui son ouvertes.

On commence par introduire deux définitions.

Définition 3.4.1. Soit X un complexe simplicial et soit $f : X \rightarrow X$ une application continue. On dit que f est *indice-stricte* si on a l'une des propriétés suivantes :

- Pour tous les sous-espaces ouverts $U \subset X$ tels que f n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, $i(X, f, U) \geq 0$.
- Pour tous les sous-espaces ouverts $U \subset X$ tels que f n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus \overset{\circ}{U}$, $i(X, f, U) \leq 0$.

Définition 3.4.2. Soit X un complexe simplicial et soit $f : X \rightarrow X$ une application indice-stricte. Une fonction $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *f -intégrable réelle* si elle satisfait les propriétés suivantes :

- Pour tout nombre rationnel $p \in \mathbb{Q}$, f n'a pas de points fixes dans $\overline{h^{-1}(p)}$.
- Pour toute couple (p, q) de nombres rationnels (avec $p < q$) f n'a pas de points fixes dans $\overline{h^{-1}((p, q))} \setminus h^{-1}(\overset{\circ}{(p, q)})$.
- la fonction h est bornée.

Les fonctions f -intégrables réelles sont plutôt fréquentes. En fait, les fonctions continues sont f -intégrables réelles si f n'a pas de points fixes dans les images réciproques par h des rationnels.

Lemme 3.4.3. Une fonction continue $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que f n'a pas de points fixes dans $h^{-1}(p)$ pour tout $p \in \mathbb{Q}$ est f -intégrable réelle.

Démonstration. Comme X est compact et la fonction h est continue, alors la fonction h est bornée. Considérons maintenant $p, q \in \mathbb{Q}$ ($p < q$). On doit vérifier que f n'a pas de points fixes dans $\overline{h^{-1}(p, q)} \setminus h^{-1}(\overset{\circ}{(p, q)})$. Or,

$$\begin{aligned} \overline{h^{-1}((p, q))} \setminus h^{-1}(\overset{\circ}{(p, q)}) &= \overline{h^{-1}((p, q))} \setminus h^{-1}((p, q)) \subset h^{-1}([p, q]) \setminus h^{-1}((p, q)) \\ &= h^{-1}(\{p, q\}) = h^{-1}(\{p\}) \cup h^{-1}(\{q\}). \end{aligned}$$

En conséquence, comme f n'a pas de points fixes dans $h^{-1}(\{p\})$ et dans $h^{-1}(\{q\})$, elle n'aura pas de points fixes non plus dans $\overline{h^{-1}(p, q)} \setminus h^{-1}(\overset{\circ}{(p, q)})$. \square

Définition 3.4.4. Soient X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application indice-stricte et $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction f -intégrable réelle. On définit la *somme de Riemann inférieure par rapport à l'indice de point fixe combinatoire* comme

$$\int_X h \lfloor di_c(f) \rfloor = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_X \lfloor 2^n h \rfloor di_c(f), \quad (3.8)$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière inférieure. Parallèlement, on définit la *somme de Riemann supérieure par rapport à l'indice de point fixe combinatoire* comme

$$\int_X h \lceil di_c(f) \rceil = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \int_X \lceil 2^n h \rceil di_c(f), \quad (3.9)$$

où $\lceil \cdot \rceil$ est la fonction partie entière supérieure.

Comme dans [8], les sommes inférieure et supérieure peuvent être différentes. Cependant, on peut prouver que ces sommes sont convergentes.

Théorème 3.4.5 [3, Theorem 4.6]. Soient X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application indice-stricte et $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction f -intégrable réelle. Dans ce cas, les limites des Équations ((3.8)) et ((3.9)) existent.

Démonstration. On montrera la convergence de la somme inférieure. Soient M_1 et M_2 les bornes entières inférieure et supérieure de h respectivement (rappelons-nous que la fonction h est bornée car elle est f -intégrable réelle). On a

$$\frac{1}{2^n} \int_X \lfloor 2^n h \rfloor di_c(f) = \sum_{m=M_1}^{M_2} \sum_{l=0}^{2^n-1} (m + \frac{l}{2^n}) \cdot i_c(X, f, h^{-1}((m + \frac{l}{2^n}, m + \frac{l+1}{2^n})))$$

(comme f n'a pas de points fixes dans les images réciproques des nombres rationnels, on a $i_c(X, f, h^{-1}[m + \frac{l}{2^n}, m + \frac{l+1}{2^n})) = i_c(X, f, h^{-1}(m + \frac{l}{2^n}, m + \frac{l+1}{2^n}))$).

Comme f est indice-stricte, supposons par exemple que $i_c(X, f, U) \geq 0$ pour tous les ouverts $U \subset X$ tels que f n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus U$. Comme conséquence de cette positivité et de l'axiome d'additivité de l'indice de point fixe combinatoire

3.4 Une Intégrale de Fonctions Réelles par rapport à l'Ensemble des Points Fixes

(Théorème 2.2.5) on a

$$\begin{aligned}
& \left(m + \frac{l}{2^n}\right) \cdot i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m + \frac{l}{2^n}, m + \frac{l+1}{2^n}\right)\right) \\
&= \left(m + \frac{l}{2^n}\right) \cdot \left(i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m + \frac{l}{2^n}, m + \frac{l}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\right. \\
&\quad \left.+ i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m + \frac{l}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, m + \frac{l+1}{2^n}\right)\right)\right) \\
&\leq \left(m + \frac{l}{2^n}\right) \cdot i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m + \frac{l}{2^n}, m + \frac{l}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&\quad + \left(m + \frac{l}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m + \frac{l}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, m + \frac{l+1}{2^n}\right)\right) \\
&= \left(m + \frac{2l}{2^{n+1}}\right) \cdot i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m + \frac{2l}{2^{n+1}}, m + \frac{2l+1}{2^{n+1}}\right)\right) \\
&\quad + \left(m + \frac{2l+1}{2^{n+1}}\right) \cdot i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m + \frac{2l+1}{2^{n+1}}, m + \frac{2l+2}{2^{n+1}}\right)\right)
\end{aligned}$$

pour tous $n, l \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ et $m \in \{M_1, \dots, M_2\}$.

Mais dans ce cas, la suite $\frac{1}{2^n} \int_X [2^n h] d i_c(f)$ est croissante et bornée par

$$\sum_{m=M_1}^{M_2} (m+1) \cdot i_c\left(X, f, h^{-1}\left(m, m+1\right)\right).$$

On en déduit qu'elle est convergente. Si l'indice $i(X, f, _)$ aurait été toujours négatif, la suite serait décroissante et elle aurait une borne inférieure. \square

Finissons ce chapitre par montrer que ces sommes de Riemann sont cohérentes avec les changements de systèmes de coordonnées. D'abord, on présente un lemme qui est une conséquence de l'axiome de commutativité de l'indice de point fixe (Définition 0.2.10).

Lemme 3.4.6. *Soient X et Y des complexes simpliciaux, $f : X \rightarrow X$ une application continue, $g : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme et $A \subset X$ un sous-ensemble ouvert tel que f n'a pas de points fixes dans $\bar{A} \setminus A$. Dans ce cas,*

$$i(X, f, A) = i(Y, g \circ f \circ g^{-1}, g(A)).$$

Finalement, le résultat suivant généralise [8, Lemma 2].

Proposition 3.4.7. Soient X et Y des complexes simpliciaux, $f : X \rightarrow X$ une application indice-stricte, $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction f -intégrable réelle et $g : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme. On a :

$$\int_X h[di_c(f)] = \int_Y h \circ g^{-1}[di_c(g \circ f \circ g^{-1})]$$

et

$$\int_X h[di_c(f)] = \int_Y h \circ g^{-1}[di_c(g \circ f \circ g^{-1})].$$

Démonstration. D'après le Lemme 3.4.6 on a

$$\frac{1}{2^n} \int_X [2^n h] di_c(f) = \frac{1}{2^n} \int_Y [2^n h \circ g^{-1}] di_c(g \circ f \circ g^{-1})$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour les sommes de Riemann supérieures c'est analogue). Le résultat devient donc une conséquence de la Définition 3.4.4. \square

Chapitre 4

Autres Applications

Finalement, dans ce chapitre, on obtiendra les conséquences principales du nombre de Lefschetz combinatoire au-delà du Théorème 1.3.2.

La première conséquence que nous obtenons c'est une nouvelle vision axiomatique du nombre de Lefschetz. Comme l'on expliquera dans la Section 4.1, ces formulations axiomatiques des invariants topologiques employés dans la théorie des points fixes sont très importantes dans la celle-ci, et le nombre de Lefschetz combinatoire fournit un ensemble d'axiomes pour le nombre de Lefschetz faisceau-théorique (Sous-section 4.1.2) et un nouvel ensemble d'axiomes pour le nombre de Lefschetz des homéomorphismes (Section 4.1.3). Aussi, le propre nombre de Lefschetz combinatoire admet un ensemble d'axiomes (Section 4.1.1).

Tous ces axiomes, importants par eux-mêmes, ouvriront le chemin d'une nouvelle voie pour calculer le nombre de Lefschetz de certains homéomorphismes et applications ouvertes. Dans la Section 4.2, on présentera avec beaucoup d'exemples des tactiques de calcul innovantes où le nombre de Lefschetz combinatoire (et surtout son invariance topologique) jouera un rôle principal en généralisant les idées de la Sous-section 4.1.3. Ainsi, on verra qu'une idée aussi simple que celle de construire un "nouveau nombre de Lefschetz" additif et invariant topologique (c'est-à-dire, le nombre de Lefschetz combinatoire) nous permettra d'avoir dorénavant un nouvel outil pour calculer le nombre de Lefschetz (et parfois simplement pour écarter la valeur zéro et ainsi pouvoir garantir l'existence de points fixes) qui devra toujours être considéré à l'heure de faire face à un calcul non trivial.

Par ailleurs, cette nouvelle tactique de calcul, de nouveau, importante par elle-même, aura une application encore plus précieuse : fournir des théorèmes de point fixe pour des espaces non bornés. Dans [17], Brown raconte l'histoire de quelques problèmes classiques de la théorie des points fixes qui sont encore ouverts. Un parmi eux consiste à "trouver un théorème du point fixe pour tous les fonctions analytiquement importantes définies sur des ANR". On donnera les détails dans la Section 4.5, mais l'existence de bornes pour l'indice de point fixe permettra d'établir des nouveaux théorèmes de point fixe dans des espaces non bornés où l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire sera la clé pour la fonctionnalité de

ces résultats. Aussi, dans cette section on exposera l'application de cette procédure lorsque elle est réalisée à l'envers, c'est-à-dire, comment le nombre de Lefschetz combinatoire permet de trouver des contre-exemples d'espaces où l'indice de point fixe n n'admet pas certaines bornes.

Finalement, dans ce chapitre, on consacrera deux sections pour présenter deux résultats très brefs mais pas du tout secondaires. Dans la Section 4.3, on généralisera après soixante-dix ans, le résultat classique [65] d'invariance topologique de l'indice de point fixe. D'autre part, dans la Section 4.4 on décrira une application pratique de l'intégration par rapport du nombre de Lefschetz combinatoire, laquelle, même si elle ne peut pas être comparée en intérêt aux autres applications de ce chapitre, a quand même quelque importance car elle a été l'une des raisons pour lesquelles le nombre de Lefschetz combinatoire est né.

4.1 Axiomes

L'étude de formulations axiomatiques d'invariants employés dans la théorie des points fixes est fondamentale dans celle-ci. Un exemple des applications de cette étude est dans [4], où les axiomes du nombre de Lefschetz permettent de démontrer d'une manière très claire le lien entre celui-ci et l'indice de point fixe (propriété de normalisation).

Historiquement, deux formulations axiomatiques de la caractéristique d'Euler ont été étudiées dans les années 60 [75], [76]. Les axiomes de l'indice de point fixe remontent aussi à cette époque [16], [22], [25], [65]. Cependant, pour le reste des invariants employés dans la théorie des points fixes, on a dû attendre jusqu'à l'apparition d'un ensemble de 4 axiomes pour le nombre de Lefschetz dans [4] pour commencer une course qui continue aujourd'hui à être ouverte (jusqu'à aujourd'hui on connaît différents ensembles d'axiomes pour la trace de Reidemeister, le nombre de Lefschetz équivariant, l'indice de coïncidence ou l'indice de point fixe pour des applications n -valuées [31], [32], [69], [70]). L'apparition d'axiomes différents de ceux qui sont déjà connus est aussi importante, comme on peut le voir avec les différentes ensembles d'axiomes qui existent concernant l'indice de point fixe.

L'une des conséquences principales de cette thèse est l'obtention de certaines nouvelles formulations axiomatiques pour le nombre de Lefschetz en employant le nombre de Lefschetz combinatoire. Ces résultats ont été obtenus dans [2], [3] et [54]. Ces résultats peuvent être classés dans trois groupes : axiomes pour le nombre de Lefschetz faisceau-théorique, de nouveaux axiomes pour le nombre de Lefschetz d'ho-

méomorphismes et évidemment, des axiomes pour le nombre de Lefschetz combinatoire. Ces axiomes sont présentés respectivement dans les Sous-sections 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.1.

4.1.1 Axiomes pour le nombre de Lefschetz combinatoire

Dans [3] un ensemble d'axiomes pour le nombre de Lefschetz combinatoire d'homéomorphismes est présenté. L'idée est que le nombre de Lefschetz combinatoire est le seul invariant qui peut être déduit du nombre de Lefschetz satisfaisant la propriété d'additivité. Dans cette Sous-section, on généralisera ces axiomes pour les applications ouvertes.

Les axiomes du nombre de Lefschetz combinatoire dans [3] employaient une famille semblable à la famille \mathcal{C} de la Définition 2.2.2, où les applications étaient des homéomorphismes. Maintenant comme on étend ces axiomes aux applications ouvertes, on doit définir une nouvelle famille \mathcal{C}' .

Soit \mathcal{D}' la famille de triplets (X, f, U) , où X est un espace compact définissable, $f : X \rightarrow X$ est une application ouverte et $U \subset X$ est un sous-espace définissable de X tel que $f(U) \subset U$ et $f(X \setminus U) \subset X \setminus U$.

Définition 4.1.1. On dira que deux triplets (X, f, U) et (Y, g, V) de \mathcal{D}' appartiennent à la même classe d'application ouverte s'il existe un homéomorphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que $h|_U : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

est commutatif. Les classes d'applications ouvertes déterminent une relation d'équivalence sur \mathcal{D}' . On note \mathcal{C}' , le quotient de \mathcal{D}' par cette relation.

Théorème 4.1.2. [[3, Theorem 2.4]] *Le nombre de Lefschetz combinatoire est le seul opérateur λ entre \mathcal{C}' et les nombres entiers qui satisfait les deux axiomes suivants :*

1. Si U est compact, $\lambda(X, f, U) = \Lambda(f|_U)$.
2. Si $U, V \subset X$ sont disjoints, alors

$$\lambda(X, f, U \cup V) = \lambda(X, f, U) + \lambda(X, f, V).$$

Démonstration. Le nombre de Lefschetz combinatoire satisfait les deux axiomes (le premier est conséquence de la définition et du Théorème de la trace de Hopf et le deuxième est l'Observation 2.4.5).

Soit $(X, f, U) \in \mathcal{C}'$. On doit vérifier que si l'opérateur $\lambda : \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfait ces axiomes, la seule possibilité est d'avoir $\lambda(X, f, U) = A(U, f)_X$. Soit (Y, g, K) un représentant de la classe de (X, f, U) dans \mathcal{C}' , avec Y un complexe simplicial et K un sous-complexe généralisé (l'existence de ce représentant est conséquence du Théorème 0.3.8). Par l'argument de la démonstration du Théorème 2.4.3, les triplets (Y, g, \overline{K}) , $(Y, g, \overline{K} \setminus K)$,... appartiendront aussi à \mathcal{C}' .

Comme λ satisfait le deuxième axiome on a :

$$\begin{aligned} \lambda(Y, g, \overline{K}) &= \lambda(Y, g, K) + \lambda(Y, g, \overline{K} \setminus K), \\ \lambda(Y, g, \overline{\overline{K} \setminus K}) &= \lambda(Y, g, \overline{K} \setminus K) + \lambda(Y, g, \overline{(\overline{K} \setminus K)} \setminus (\overline{K} \setminus K)), \\ \lambda(Y, g, \overline{\overline{\overline{K} \setminus K}} \setminus (\overline{K} \setminus K)) &= \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

En premier lieu, remarquons que, comme λ satisfait aussi le premier axiome, le terme à gauche dans chacune de ces égalités correspond au nombre de Lefschetz, (i.e.) :

$$\begin{aligned} A(g|_{\overline{K}}, \overline{K}) &= \lambda(Y, g, K) + \lambda(Y, g, \overline{K} \setminus K), \\ A(g|_{\overline{\overline{K} \setminus K}}, \overline{\overline{K} \setminus K}) &= \lambda(Y, g, \overline{K} \setminus K) + \lambda(Y, g, \overline{(\overline{K} \setminus K)} \setminus (\overline{K} \setminus K)), \\ A(g|_{\overline{\overline{\overline{K} \setminus K}} \setminus (\overline{K} \setminus K)}, \overline{\overline{\overline{K} \setminus K}} \setminus (\overline{K} \setminus K)) &= \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

Remarquons en deuxième lieu que, à chaque étape, la dimension du dernier terme du côté droit descend au moins de 1 et par conséquent, si la dimension de K est m , après au plus m étapes l'espace du dernier terme de la m -ème égalité sera une réunion finie de points ou l'ensemble vide. Comme ces deux options sont compactes, λ doit y correspondre avec le nombre de Lefschetz. Finalement, comme le nombre de Lefschetz combinatoire satisfait aussi ces deux axiomes, les mêmes égalités sont vraies si l'on y écrit le nombre de Lefschetz combinatoire au lieu de λ . Dans ce cas, l'égalité entre λ et le nombre de Lefschetz combinatoire est obtenue en revenant sur des dimensions supérieures. \square

4.1.2 Axiomes pour le nombre de Lefschetz faisceau-théorique

Dans [54], on a caractérisé le nombre de Lefschetz faisceau-théorique pour les homéomorphismes cellulaires $f : X \rightarrow X$ et les faisceaux f - c -constructibles. L'idée vient de donner un axiome de cofibration et un axiome de valeur initiale dans les bouquets de sphères de la même dimension. Dans [4] les axiomes de commutativité de d'homotopie étaient employés pour étendre l'axiome de valeur initiale (initialement donné pour les bouquets de circonférences) aux bouquets de sphères de la même dimension. Aussi, l'axiome d'homotopie était employé pour passer d'une application continue à une approximation cellulaire de cette application. Dans notre cas, comme nos applications sont déjà cellulaires et notre axiome de valeur initiale est appliqué sur le bouquet de sphères de la même dimension, il est logique de pouvoir enlever les autres deux axiomes. Finalement on doit mentionner que le théorème de représentation (Théorème 3.2.5) est clé à l'heure de fournir une valeur initiale calculable. Dans cette sous-section, afin de simplifier la notation, on notera le complémentaire avec $X - A$ au lieu de $X \setminus A$.

Commençons alors par introduire la famille avec laquelle on va travailler.

Définition 4.1.3. Soit \mathcal{C}'' la famille de triplets (X, f, \mathcal{F}) où X est un complexe cellulaire définissable et connexe et \mathcal{F} est un faisceau sur X f - c -constructible pour un homéomorphisme cellulaire f qui respecte les composantes connexes de \mathcal{F} .

Théorème 4.1.4 [54, Theorem 5.2]. *Le nombre de Lefschetz faisceau-théorique est le seul opérateur entre \mathcal{C}'' et \mathbb{Z} qui satisfait les axiomes suivants :*

1. (Axiome de cofibration). Soit $(X, f, \mathcal{F}) \in \mathcal{C}''$. Si $A \subset X$ est un sous-complexe connexe, f -invariant et définissable, $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/A$ est la suite de la cofibration et, s'il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \\ f' \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\ A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/A \end{array}$$

alors

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = L_c(X/A, \bar{f}, \pi_*\mathcal{F}) + L_c(A, f', \mathcal{F}) - r,$$

où f' est la restriction de f à A et r est la dimension du faisceau $(\pi_*\mathcal{F})|_{A/A}$.

2. (Axiome du bouquet de sphères) Si X est homéomorphe à un bouquet fini de n -sphères ou à un complexe de dimension 0 ou 1, \mathcal{F} est un faisceau qui est

f-c-constructible et f est un homéomorphisme cellulaire qui respecte les composantes constantes de \mathcal{F} , alors

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = \int_X hd\Lambda f,$$

où h est la fonction constructible associé au faisceau.

Démonstration. Commençons par la vérification des axiomes par le nombre de Lefschetz faisceau-théorique. En premier lieu, comme A est un sous-complexe cellulaire définissable de X (en particulier il est fermé, localement compact et avec un squelette définissable dans chaque dimension) et est aussi f -invariant, \mathcal{F} sera aussi un faisceau f - c -constructible sur A . De plus, comme $X - A$ est aussi localement compact (il est ouvert dans un espace localement compact) et f -invariant, on peut considérer le diagramme suivant, où les lignes sont exactes et les flèches verticales sont induites par f .

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & \rightarrow & H_c^0(X - A, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_c^0(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_c^0(A, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_c^1(X - A, \mathcal{F}) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H_c^0(X - A, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_c^0(X, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_c^0(A, \mathcal{F}) & \rightarrow & H_c^1(X - A, \mathcal{F}) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

par conséquent, comme les trois groupes de cohomologie deviennent nuls à partir d'une dimension n assez grande, on a

$$\begin{aligned} \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(X, \mathcal{F})) &= \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(X - A, \mathcal{F})) \\ &+ \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(A, \mathcal{F})). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Or, si l'on prend le quotient $\pi : X \rightarrow X/A$, on peut considérer l'image directe du faisceau \mathcal{F} par π (Définition 0.4.6). Comme A est définissable, d'après [74, Chapitre 10, 2.4] on peut assumer que l'application quotient et l'espace qui résulte de ce quotient par A sont définissables. Comme A/A est aussi définissable (d'après la définition de structure o -minimale) alors $X/A - A/A$ sera définissable. Maintenant, comme $(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F})$ est isomorphe à $(X - A, \mathcal{F})$, on peut garantir l'existence d'une partition définissable du complexe cellulaire X/A consistant du point A/A et de la partition induite par la partition définissable de $X - A$ et telle que le faisceau est constant sur les composantes connexes de chaque élément de la partition. Dans ce cas on a que $\pi_*\mathcal{F}$ est un faisceau f - c -constructible sur X/A (et aussi

sur $X/A - A/A$ et sur A/A). D'ailleurs, comme A/A est fermé dans X/A on obtient le diagramme commutatif suivante (avec colonnes exactes) :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^0(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^0(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^0(X/A, \pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^0(X/A, \pi_*\mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^0(A/A, \pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^0(A/A, \pi_*\mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^1(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^1(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^1(X/A, \pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^1(X/A, \pi_*\mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^2(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^2(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^2(X/A, \pi_*\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_c^2(X/A, \pi_*\mathcal{F}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & & \dots
 \end{array}$$

On voit que, pour $n > 1$,

$$H_c^n(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F}) \simeq H_c^n(X/A, \pi_*\mathcal{F}). \quad (4.2)$$

Aussi, si l'on prend les premières lignes du diagramme on obtient

$$\begin{aligned}
 & \text{tr}(f^*, H_c^0(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F})) - \text{tr}(f^*, H_c^1(X/A - A/A, \pi_*\mathcal{F})) \\
 &= \text{tr}(f^*, H_c^0(X/A, \pi_*\mathcal{F})) - \text{tr}(f^*, H_c^1(X/A, \pi_*\mathcal{F})) - \text{tr}(f^*, H_c^0(A/A, \pi_*\mathcal{F})).
 \end{aligned}$$

Avec cela et l'Équation ((4.2)), on peut remplacer les termes de l'Équation ((4.1)) et

obtenir

$$\begin{aligned}
 & \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(X, \mathcal{F})) \\
 = & \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(X - A, \mathcal{F})) + \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(A, \mathcal{F})) \\
 = & \sum_{i>1} (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(X/A, \pi_* \mathcal{F})) + \text{tr}(f^*, H_c^0(X - A, \mathcal{F})) \\
 & - \text{tr}(f^*, H_c^1(X - A, \mathcal{F})) - \text{tr}(f^*, H_c^0(A/A, \pi_* \mathcal{F})) + \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(A, \mathcal{F})) \\
 = & \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(X/A, \pi_* \mathcal{F})) - \text{tr}(f^*, H_c^0(A/A, \pi_* \mathcal{F})) + \\
 & \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(A, \mathcal{F})) \\
 = & \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(X/A, \pi_* \mathcal{F})) - \dim((\pi_* \mathcal{F})_{|A/A}) \\
 & + \sum_i (-1)^i \text{tr}(f^*, H_c^i(A, \mathcal{F})).
 \end{aligned}$$

Alors, le nombre de Lefschetz faisceau-théorique satisfait l'axiome de cofibration.

En plus, le nombre de Lefschetz faisceau-théorique satisfait l'Axiome du bouquet de sphères d'après le Théorème 3.2.5.

Voyons maintenant que le nombre de Lefschetz est le seul opérateur λ entre \mathcal{C}'' et \mathbb{Z} qui satisfait ces deux axiomes.

On emploie un argument de récurrence sur la dimension de X . Si la dimension de X est 1, ou si X est un bouquet de sphères, on emploie le deuxième axiome. Dans autre cas, soit (X, f, \mathcal{F}) un élément de \mathcal{C}'' , avec X un complexe cellulaire de dimension n . Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 X^{(n-1)} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/X^{(n-1)} \\
 f' \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\
 X^{(n-1)} & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X/X^{(n-1)}.
 \end{array}$$

Par l'axiome de cofibration on obtient

$$\lambda(X, f, \mathcal{F}) = \lambda(X/X^{(n-1)}, \bar{f}, \pi_* \mathcal{F}) + \lambda(X^{(n-1)}, f', \mathcal{F}) - r.$$

D'autre part on a aussi

$$L_c(X, f, \mathcal{F}) = L_c(X/X^{(n-1)}, \bar{f}, \pi_*\mathcal{F}) + L_c(X^{(n-1)}, f', \mathcal{F}) - r.$$

Par récurrence on a $\lambda(X^{(n-1)}, f', \mathcal{F}) = \Lambda_c(X^{(n-1)}, f', \mathcal{F})$. D'ailleurs, X/X^{n-1} est définissable et homéomorphe à un bouquet de sphères par un homéomorphisme qui envoie des cellules à cellules. Alors, l'axiome du bouquet de sphères implique

$$\lambda(X/X^{(n-1)}, \bar{f}, \pi_*\mathcal{F}) = \Lambda_c(X/X^{(n-1)}, \bar{f}, \pi_*\mathcal{F}).$$

Finalement on obtient $\lambda(X, f, \mathcal{F}) = L_c(X, f, \mathcal{F})$. \square

4.1.3 Nouveaux Axiomes pour le Nombre de Lefschetz

L'une des applications de l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire est l'obtention d'un nouvel ensemble d'axiomes pour le nombre de Lefschetz. Notamment, dans le langage de [4], l'axiome de cofibration pour les applications ouvertes et l'axiome du bouquet de circonférences pour des homéomorphismes peuvent être déduits de l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire.

Commençons par voir l'axiome de cofibration.

Théorème 4.1.5 [2, Theorem 4.1]. *Soit X un complexe simplicial, $f : X \rightarrow X$ une application ouverte et $A \subset X$ un sous-complexe simplicial (en particulier, définissable) tel que $f(A) = A$ (dans ce cas, $f(A) \subset A$ ne va pas être suffisant) et $f(X \setminus A) \subset X \setminus A$. Alors, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire implique*

$$\Lambda(f, X) = \Lambda(f|_A, A) + \Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{A}) - 1.$$

Démonstration. D'après l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(f, X) &= \Lambda(f, X)_X = \Lambda(f, A)_X + \Lambda(f, X \setminus A)_X = \\ &= \Lambda(f|_A, A) + \Lambda(f, X \setminus A)_X, \end{aligned} \quad (4.3)$$

où la dernière égalité est conséquence de l'Observation 1.1.5 (puisque A est fermé).

Comme f est une application ouverte, $f(A) = A$ et $f(X \setminus A) \subset X \setminus A$, il est facile de voir que $\tilde{f} : \frac{X}{A} \rightarrow \frac{X}{A}$ est aussi ouverte, $\tilde{f}(\{[A]\}) = \{[A]\}$ ($[A]$ est la classe de A dans $\frac{X}{A}$) et $\tilde{f}(\frac{X}{A} \setminus \{[A]\}) \subset \frac{X}{A} \setminus \{[A]\}$.

De nouveau, l'additivité implique

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{A}) &= \Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{A})_{\frac{X}{A}} = \Lambda(\tilde{f}, \{[A]\})_{\frac{X}{A}} + \Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{A} \setminus \{[A]\})_{\frac{X}{A}} = \\ &= 1 + \Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{A} \setminus \{[A]\})_{\frac{X}{A}}. \end{aligned}$$

Mais l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire nous donne

$$\Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{A} \setminus \{[A]\})_{\frac{X}{A}} = \Lambda(f, X \setminus A)_X,$$

et alors l'Équation ((4.3)) devient

$$\Lambda(f, X) = \Lambda(f|_A, A) + \Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{A}) - 1.$$

□

Lorsque l'application f est un homéomorphisme et non seulement une application ouverte, l'axiome du bouquet de cercles dans [4] peut aussi être déduit de l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire. Plus précisément, si $f : \bigvee_{j=1}^k S_j^1 \rightarrow \bigvee_{j=1}^k S_j^1$ est un homéomorphisme et $f_j : S_j^1 \rightarrow S_j^1$ est l'application $p_j \circ f \circ i_j$ (avec $i_j : S_j^1 \rightarrow \bigvee_{j=1}^k S_j^1$ l'inclusion et $p_j : \bigvee_{j=1}^k S_j^1 \rightarrow S_j^1$ la projection), l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire impliquera $\Lambda(f, \bigvee_{j=1}^k S_j^1) = 1 - (\deg f_1 + \dots + \deg f_k)$. On donne l'idée d'un argument par récurrence.

Idée 4.1.6 [2, Idea 4.2]. **Premier cas : Un cercle.** Étant donné un homéomorphisme $f : S^1 \rightarrow S^1$, [72, Lemma 2.7.4] fournit un homéomorphisme pointé homotope à f . Alors, à homotopie près, on peut assumer que les homéomorphismes de la circonférence ont un point fixe p . En fait, on peut assumer que chaque homéomorphisme f de la circonférence est homotope à id ou à id^{-1} car $\deg(f) = 1$ ou $\deg(f) = -1$. Dans ce cas, l'axiome du bouquet de circonférences implique que le nombre de Lefschetz doit être 0 ou 2. Cependant, on peut obtenir le même résultat sans employer cet axiome grâce à l'invariance du nombre de Lefschetz combinatoire.

Supposons, par exemple, que f est l'identité (l'autre cas est analogue). D'après l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire, on a

$$\Lambda(\text{id}, S^1) = \Lambda(\text{id}, S^1 \setminus \{p\})_{S^1} + \Lambda(\text{id}, p) = \Lambda(\text{id}, S^1 \setminus \{p\})_{S^1} + 1.$$

Or, $S^1 \setminus \{p\}$ est homéomorphe à l'intervalle $(0, 1)$ (et l'identité dans l'intervalle ouvert peut être prolongée en l'identité sur l'intervalle fermé $[0, 1]$). Dans ce cas, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire implique $\Lambda(\text{id}, S^1 \setminus \{p\})_{S^1} = \Lambda(\text{id}, (0, 1))_{[0,1]}$. Mais

$$1 = \Lambda(\text{id}, [0, 1]) = \Lambda(\text{id}, (0, 1))_{[0,1]} + \Lambda(\text{id}, \{0, 1\})_{[0,1]} = \Lambda(\text{id}, (0, 1))_{[0,1]} + 2,$$

(où la première égalité est conséquence de la connexité simple de l'intervalle). Ainsi, on obtient $\Lambda(\text{id}, S^1 \setminus \{p\})_{S^1} = -1$ et alors $\Lambda(\text{id}, S^1) = 0 = 1 - \deg(f)$.

Deuxième cas : Deux cercles. Considérons maintenant le bouquet $S_1^1 \vee S_2^1$ de deux circonférences. Comme l'application f est un homéomorphisme, elle doit envoyer le point commun p des deux circonférences sur lui-même. Dans ce cas, l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$\begin{aligned} \Lambda(f, S_1^1 \vee S_2^1) &= \Lambda(f, S_1^1 \vee S_2^1 \setminus \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} + \Lambda(f, \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} \\ &= \Lambda(f, S_1^1 \vee S_2^1 \setminus \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} + 1 \end{aligned}$$

D'autre part $S_1^1 \vee S_2^1 \setminus \{p\}$ est homéomorphe à la réunion disjointe de deux intervalles ouverts $\mathring{I}_1 \sqcup \mathring{I}_2$, où f induit un homéomorphisme $g : \mathring{I}_1 \sqcup \mathring{I}_2 \rightarrow \mathring{I}_1 \sqcup \mathring{I}_2$. Une possibilité pour g est envoyer \mathring{I}_1 sur \mathring{I}_2 et \mathring{I}_2 sur \mathring{I}_1 . Autrement, la seule option est d'envoyer \mathring{I}_1 sur \mathring{I}_1 et \mathring{I}_2 sur \mathring{I}_2 . Dans le premier cas, f enverrait $S_1^1 \setminus \{p\}$ sur $S_2^1 \setminus \{p\}$ et $S_2^1 \setminus \{p\}$ sur $S_1^1 \setminus \{p\}$ et, dans le deuxième cas, elle enverrait $S_1^1 \setminus \{p\}$ sur $S_1^1 \setminus \{p\}$ et $S_2^1 \setminus \{p\}$ sur $S_2^1 \setminus \{p\}$.

Dans le premier cas, (remarquons que g peut être prolongé sur $I_1 \sqcup I_2$ en un homéomorphisme), on a

$$\Lambda(g, \mathring{I}_1 \sqcup \mathring{I}_2)_{I_1 \sqcup I_2} = 0,$$

où la dernière égalité est conséquence du Théorème 1.3.2 puisque le prolongement de g sur $I_1 \sqcup I_2$ n'aurait pas de points fixes. Ainsi, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$\Lambda(f, S_1^1 \vee S_2^1) = 0 + 1 = 1 - \deg(f_1) - \deg(f_2).$$

Dans le deuxième cas, d'après l'Observation 1.1.5, on a

$$\Lambda(f, S_1^1)_{S_1^1 \vee S_2^1} = \Lambda(f|_{S_1^1}, S_1^1),$$

et on sait déjà

$$\Lambda(f|_{S_1^1}, S_1^1) = 1 - \deg(f_1) = 1 - \deg(f|_{S_1^1}).$$

De façon similaire on a

$$\Lambda(f, S_2^1)_{S_1^1 \vee S_2^1} = \Lambda(f|_{S_2^1}, S_2^1),$$

et alors $\Lambda(f|_{S_2^1}, S_2^1) = 1 - \deg(f_2) = 1 - \deg(f|_{S_2^1})$, Finalement, comme

$$\Lambda(f, S_1^1 \vee S_2^1) = \Lambda(f, S_1^1 \setminus \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} + \Lambda(f, \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} + \Lambda(f, S_2^1 \setminus \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1},$$

$$\Lambda(f|_{S_1^1}, S_1^1) = \Lambda(f|_{S_1^1}, S_1^1 \setminus \{p\})_{S_1^1} + \Lambda(f|_{S_1^1}, \{p\})_{S_1^1},$$

$$\Lambda(f|_{S_2^1}, S_2^1) = \Lambda(f|_{S_2^1}, S_2^1 \setminus \{p\})_{S_2^1} + \Lambda(f|_{S_2^1}, \{p\})_{S_2^1},$$

et, d'après l'Observation 1.1.5,

$$\Lambda(f, S_1^1 \setminus \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} = \Lambda(f|_{S_1^1}, S_1^1 \setminus \{p\})_{S_1^1},$$

$$\Lambda(f, S_2^1 \setminus \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} = \Lambda(f|_{S_2^1}, S_2^1 \setminus \{p\})_{S_2^1}$$

et

$$\Lambda(f, \{p\})_{S_1^1 \vee S_2^1} = \Lambda(f|_{S_1^1}, \{p\})_{S_1^1} = \Lambda(f|_{S_2^1}, \{p\})_{S_2^1} = 1,$$

on conclut $\Lambda(f, S_1^1 \vee S_2^1) = 1 - \deg(f_1) - \deg(f_2)$.

En général, si on a un bouquet de n circonférences, on divise l'étude en deux cas. Si f envoie une circonférence sur elle-même, l'additivité implique que le nombre de Lefschetz dans l'espace total sera la somme du nombre de Lefschetz dans cette circonférence (caractérisé dans notre premier cas) plus celle du nombre de Lefschetz dans le bouquet des autres $n - 1$ circonférences (déjà connu par récurrence) moins 1 (car le point commun des circonférences appartient à la première circonférence et au bouquet des autres $n - 1$ circonférences).

Dans le cas où aucune circonférence n'est envoyée sur elle-même par f , un argument similaire à celui du deuxième cas nous permet de conclure que le nombre de Lefschetz est $1 = 1 - (\deg(f_1) + \dots + \deg(f_2))$.

4.2 Quelques exemples

Le nombre de Lefschetz combinatoire, d'après l'Idée 4.1.6, établit aussi une technique pour calculer le nombre de Lefschetz de quelques applications homotopes à un homéomorphisme (et parfois seulement homotopes à une application ouverte). En plus, dans certains cas, ces techniques se révéleront plus efficaces que celles dans [4] ou, bien sûr, que le calcul direct des traces en homologique du nombre de Lefschetz.

Aussi, parfois le calcul exact du nombre de Lefschetz n'est pas nécessaire et il suffit d'éliminer certaines possibilités. Si l'objectif est de trouver un point fixe, il suffit d'écartier la valeur 0. Si maintenant, par exemple, notre espace X est une surface connexe, compacte et de caractéristique d'Euler négative et $f : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme et si l'on veut savoir si f a plus qu'un point fixe, d'après [42, Theorem 4.1] il suffit de voir que $\Lambda(f, X) > 1$ (en fait, dans la Section 4.4 on verra un théorème plus fort en termes du nombre de Lefschetz combinatoire). C'est aussi ici où le nombre de Lefschetz combinatoire aide à limiter les possibles valeurs du nombre de Lefschetz sans faire des calculs.

Dans cette section, on construira des exemples où l'on emploiera le nombre de Lefschetz combinatoire et son invariance topologique pour calculer les nombres de Lefschetz de certains homéomorphismes de complexes compacts. Il est aussi possible de traduire dans quelques situations ces idées pour des applications homotopes à une application ouverte. Cependant, par simplicité, on ne travaillera qu'avec des applications homotopes à un homéomorphisme.

La plupart de ces exemples seront théoriques (c'est-à-dire, sans un homéomorphisme explicite —même si l'on demandera quelques propriétés—) et sont parus dans notre article [2]. Cependant, dans l'Exemple 4.2.3 on donnera un homéomorphisme explicite. D'un autre côté, même si dans les premiers exemples la seule invariance topologique nécessaire sera celle de [55, Remark 3.5], dans les Exemples 4.2.5 et 4.2.6, l'invariance topologique dans le sens du Théorème 2.3.2 sera fondamentale.

Finalement, remarquons que certaines hypothèses considérées dans les exemples (comme, dans l'Exemple 4.2.5, le fait de demander à f envoyer S sur lui-même) en général ne constituent pas une grande limitation, car parfois on pourra trouver une application homotope satisfaisant les hypothèses demandées.

Exemple 4.2.1 [2, Example 4.9]. Soit Y un complexe simplicial connexe dont les groupes d'homologie ne sont pas faciles à calculer. Notons C , le cône sur Y . On attache maintenant un cylindre D à C le long d'une application injective entre la réunion des deux bases de D (chaque base du cylindre est homéomorphe à une circonférence) et la base de C . Notons X ce recollement. La Figure 4.2.1 montre un tel espace X . Finalement, soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme tel que $f(C) = C$ et $f(D) = D$ (et alors f envoie la réunion des deux bases du cylindre sur elle-même).

D'après l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire, on a

$$\begin{aligned} \Lambda(f, X) &= \Lambda(f, C)_X + \Lambda(f, X \setminus C)_X = \\ &= \Lambda(f|_C, C) + \Lambda(f, X \setminus C)_X = \\ &= 1 + \Lambda(f, X \setminus C)_X, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est conséquence de la contractibilité de C . Remarquons maintenant que $X \setminus C$ est un cylindre ouvert (c'est-à-dire, un cylindre sans les couvercles). On peut identifier cet espace avec $D \setminus (T \cup B)$, où T et B sont les deux bases du cylindre. Mais la définition de f dans T et B nous permet de prolonger $f|_{X \setminus C}$ en un homéomorphisme $f|_D : D \rightarrow D$. Dans ce cas, [55, Remark 3.5] implique $\Lambda(f, X \setminus C)_X = \Lambda(f|_D, X \setminus C)_D$. De nouveau, l'additivité implique

$$\Lambda(f|_D, D) = \Lambda(f|_D, D)_D = \Lambda(f|_D, X \setminus C)_D + \Lambda(f|_D, T \cup B)_D,$$

et alors

$$\begin{aligned} \Lambda(f|_D, X \setminus C)_D &= \Lambda(f|_D, D) - \Lambda(f|_D, T \cup B)_D = \\ &= \Lambda(f|_D, D) - \Lambda(f|_{T \cup B}, T \cup B)_{T \cup B}. \end{aligned}$$

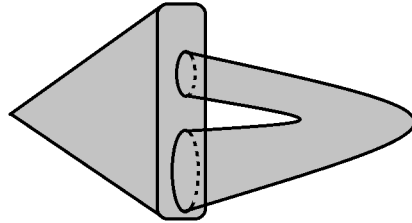
Par conséquent,

$$\Lambda(f, X) = 1 + \Lambda(f|_D, D) - \Lambda(f|_{T \cup B}, T \cup B)_{T \cup B}.$$

Mais le nombre de Lefschetz d'un homéomorphisme d'une circonférence (ou d'une réunion disjointe de deux circonférences) est très facile de calculer (l'axiome du bouquet de circonférences dans [4] réduit le problème à calculer le degré d'un homéomorphisme). Bref, on a réduit le calcul du nombre de Lefschetz de f dans X au calcul du nombre de Lefschetz d'un homéomorphisme du cylindre. En plus, comme le cylindre est homotope à la circonférence, [33, Remark 4.3.3] et l'invariance homotopique du nombre de Lefschetz nous permettront parfois de réduire de nouveau ce calcul à celui du degré d'une application d'une circonférence.

Observation 4.2.2. Dans l'Exemple 4.2.1 on réduit le calcul du nombre de Lefschetz d'un homéomorphisme de X au calcul du nombre de Lefschetz d'un homéomorphisme du cylindre. Dans ce cas, une fois qu'on est prêt à calculer le nombre de Lefschetz dans le cylindre, on pourrait essayer d'employer l'axiome de cofibration du nombre de Lefschetz [4]. Malheureusement, on obtiendrait

$$\Lambda(f, X) = \Lambda(f|_D, D) + \Lambda(\tilde{f}, \frac{X}{D}) - 1,$$

FIGURE 4.2.1 – Espace X .

et le nombre de Lefschetz de \tilde{f} dans $\frac{X}{D}$ serait probablement très difficile à calculer.

De la même façon, si on considère le quotient $\frac{X}{C}$, on obtient un espace où l'homologie est plus difficile à calculer que dans le cylindre.

Présentons maintenant un exemple explicite de l'Exemple 4.2.1.

Exemple 4.2.3 [2, Exemple 4.12]. Soit Y le complexe de la Figure 4.2.2. On peut considérer Y comme un complexe contenu dans l'hyperplan $x = 0$ de \mathbb{R}^3 de façon que le point p corresponde au point $(0, 0, 0)$. Soit maintenant C le cône sur Y dans \mathbb{R}^3 , où le sommet du cône est le point $c = (-1, 0, 0)$. Attachons maintenant le cylindre à C de façon que l'espace X résultant de ce recollement soit symétrique relativement à une rotation de 180° par rapport à l'axe x (voir Figure 4.2.3). Soit f cette rotation.

D'après l'Exemple 4.2.1, on sait

$$\Lambda(f, X) = 1 + \Lambda(f|_D, D) - \Lambda(f|_{T \cup B}, T \cup B)_{T \cup B}.$$

Mais $\Lambda(f|_{T \cup B}, T \cup B)_{T \cup B} = 0$ car f envoie T sur B et B sur T . Alors, il ne reste qu'à calculer $\Lambda(f|_D, D)$. Or, remarquons que f envoie la circonférence S du milieu du cylindre (celle marquée dans la Figure 4.2.3) sur elle-même. De plus, $f|_S$ est une réflexion par rapport à l'un des diamètres de S et donc, d'après [4], $\Lambda(f|_S, S) = 2$.

Soit maintenant $r : D \rightarrow S$ la rétraction du cylindre sur cette circonférence. Comme $f|_D$ est homotope à $f|_S \circ r$ on a $\Lambda(f|_D, D) = \Lambda(i \circ f|_S \circ r, D)$. De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{r} & S \\
 i \circ f|_S \circ r \downarrow & i \circ f|_S \swarrow & f|_S \downarrow \\
 D & \xrightarrow{r} & S
 \end{array}$$

et donc, d'après [33, Properties 2.4.1], on obtient

$$\Lambda(f|_D, D) = \Lambda(f|_S, S) = 2.$$

Ainsi, on conclut $\Lambda(f, X) = 3$.

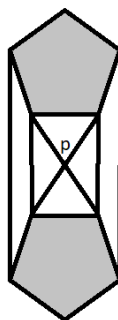
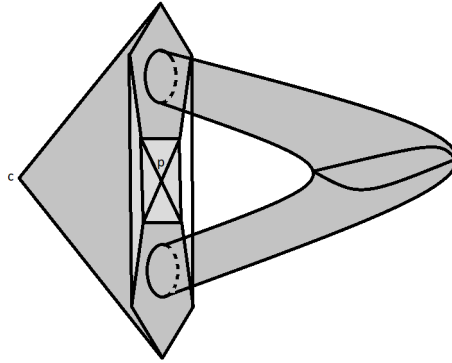


FIGURE 4.2.2 – Espace Y .

L'exemple suivant est similaire à l'Exemple 4.2.1. L'importance de cette nouvelle construction est cependant de montrer que même lorsque les espaces qui interviennent sont des sphères et des espaces contractiles, parfois le procédé décrit dans [4] pour calculer le nombre de Lefschetz n'est pas plus efficace.

Rappelons-nous que le procédé dans [4] est le suivant : les axiomes d'homotopie, cofibration et commutativité permettent d'étendre l'axiome du bouquet de circonférences à un axiome de valeur initiale pour le bouquet de sphères (on a mentionné ce point dans la Sous-section 4.1.2). Cette valeur initiale est aussi énoncée en termes du degré. Ensuite, on prend une approximation cellulaire f^c de notre application f (axiome d'homotopie) et le calcul des nombres de Lefschetz $\Lambda(f^c, X^{(n-1)})$ et $\Lambda(\tilde{f}^c, \frac{X}{X^{(n-1)}})$ conduit, grâce à l'axiome de cofibration, à l'obtention de $\Lambda(f^c, X)$. Finalement, on répète la même procédure pour $\Lambda(f^c, X^{(n-1)})$.

FIGURE 4.2.3 – Espace X .

Exemple 4.2.4 [2, Exemple 4.13]. Soit C un cône sur le disque D^2 et considérons la sphère S^2 . Soit α le lacet dans S^2 représenté dans la Figure 4.2.4 dont la réalisation géométrique est l'attachement par deux points d'un équateur et un méridien. Soit X l'espace résultant du recollement de S^2 à C le long d'une application injective entre α et D^2 . Finalement, soit $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme tel que $f(C) = C$ et $f(S^2) = S^2$ (et ainsi, $f(\alpha) = \alpha$).

Maintenant on pourrait employer l'axiome de cofibration. Dans ce cas, on aurait

$$\Lambda(X, f) = \Lambda(f|_C, C) + \Lambda\left(\tilde{f}, \frac{X}{C}\right) - 1 = \Lambda\left(\tilde{f}, \frac{X}{C}\right),$$

où \tilde{f} est l'application induite par f sur le quotient. Maintenant $\frac{X}{C}$ est homéomorphe à $\frac{S^2}{\alpha}$, c'est-à-dire, il est un bouquet de quatre sphères S^2 . Même si dans ce cas les calculs ne devraient pas être très compliqués, l'emploi du nombre de Lefschetz combinatoire va les rendre encore plus simples.

Soient p et q les points d'intersection de l'équateur et le méridien qui forment le lacet α . Comme f est un homéomorphisme et $f(\alpha) = \alpha$, on a $f(\{p, q\}) = \{p, q\}$ et $f(\alpha \setminus \{p, q\}) = \alpha \setminus \{p, q\}$. Maintenant, l'additivité du nombre de Lefschetz combi-

natoire implique

$$\begin{aligned} \Lambda(f, X) &= \Lambda(f, X)_X = \Lambda(f, C)_X + \Lambda(f, S^2 \setminus \alpha)_X = \\ &= \Lambda(f, C) + \Lambda(f|_{S^2}, S^2 \setminus \alpha)_{S^2} = 1 + \Lambda(f|_{S^2}, S^2)_{S^2} - \Lambda(f|_{S^2}, \alpha)_{S^2} = \\ &= 1 + \Lambda(f|_{S^2}, S^2) - \Lambda(f|_{\alpha}, \alpha), \end{aligned}$$

où l'on a employé aussi que le nombre de Lefschetz dans C est 1 (C est contractile) et le Théorème 2.0.1. Pour l'instant, on a déjà réduit le problème de calculer un nombre de Lefschetz dans un bouquet de quatre sphères à calculer le nombre de Lefschetz dans une sphère (où il correspond à 0 ou 2 car l'application est un homéomorphisme) et dans α . Mais, comme $f(\{p, q\}) = \{p, q\}$, l'additivité implique aussi :

$$\Lambda(f|_{\alpha}, \alpha) = \Lambda(f|_{\alpha}, \{p, q\}) + \Lambda(f|_{\alpha}, \alpha \setminus \{p, q\}).$$

Remarquons maintenant que le calcul du premier terme du côté droit de l'égalité est direct une fois l'application est connue. Pour l'autre terme, puisque $\alpha \setminus \{p, q\}$ est homéomorphe à la réunion disjointe de quatre intervalles ouverts, on répète l'argument de l'Idée 4.1.6 pour quatre circonférences. Ainsi, cet exemple illustre que, parfois, le nombre de Lefschetz combinatoire permet de réduire la dimension des espaces pour lesquels on doit faire les calculs.

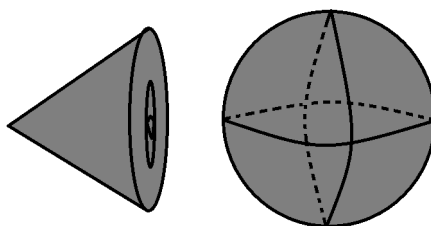


FIGURE 4.2.4 – Recollement d'un cône et une sphère.

Finalement, on présente deux exemples où le Théorème 2.3.2 joue un rôle fondamental.

Exemple 4.2.5 [2, Exemple 4.12]. Considérons la bouteille de Klein K comme le quotient dans le carré décrit dans la première étape de la Figure 4.2.5. Soit $f : K \rightarrow$

K un homéomorphisme tel qu'il existe une ligne verticale S dans le carré (la ligne pointillée de la Figure 4.2.5) telle que $f(S) = S$ (S correspond, à une circonférence dans le quotient).

Dans ce cas, l'additivité implique

$$\begin{aligned} \Lambda(f, K) &= \Lambda(f, S)_K + \Lambda(f, K \setminus S)_K = \\ &= \Lambda(f|_S, S) + \Lambda(f, K \setminus S)_K. \end{aligned}$$

Or, on sait que le nombre de Lefschetz d'un homéomorphisme de la circonférence doit être 0 ou 2. Une fois que l'on connaît l'orientation de f , le choix est direct.

D'autre part, $K \setminus S$ est homéomorphe à un cylindre ouvert sans les bases (voir la Figure 4.2.5). Une compactification de cet espace peut être le cylindre compact $S^1 \times I$, où l'on peut y prolonger $f|_{K \setminus S}$ en un homéomorphisme \tilde{f} en définissant \tilde{f} dans chaque base du cylindre comme $f|_S$ et en envoyant chacune de ces bases sur elle-même ou en les échangeant entre elles en fonction du comportement de f . Notons C , ce cylindre et C' le cylindre sans les bases. Ici, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$\Lambda(f, K \setminus S)_K = \Lambda(\tilde{f}, C')_C.$$

Par ailleurs, si T et B sont les deux bases de C , on a

$$\begin{aligned} \Lambda(\tilde{f}, C) &= \Lambda(\tilde{f}, C)_C = \Lambda(\tilde{f}, C')_C + \Lambda(\tilde{f}, \{T, B\})_C = \\ &= \Lambda(\tilde{f}, C')_C + \Lambda(\tilde{f}|_{\{T, B\}}, \{T, B\}) \end{aligned}$$

Mais, par définition de \tilde{f} , $\Lambda(\tilde{f}|_{\{T, B\}}, \{T, B\})$ ne peut être que 0 (si \tilde{f} échange T et B) ou $2\Lambda(f|_S, S)$ et donc on obtient

$$\Lambda(f, K) = \Lambda(f|_S, S) + \Lambda(\tilde{f}, C)$$

ou

$$\Lambda(f, K) = \Lambda(\tilde{f}, C) - \Lambda(f|_S, S).$$

Bref, on a réduit le calcul du nombre de Lefschetz dans la bouteille de Klein au calcul du nombre de Lefschetz d'un homéomorphisme du cylindre.

Exemple 4.2.6 [2, Exemple 4.15]. Le protagoniste dans ce dernier exemple sera le fibré $S^1 \rightarrow K \rightarrow S^1$. Soit C le cône sur la circonférence S^1 et soit X l'espace de

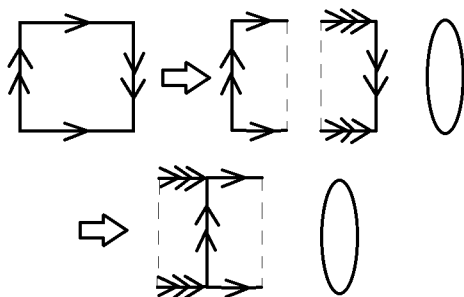


FIGURE 4.2.5 – Exemple 4.2.5.

recollement qui résulte de l'attachement de la base de C à K le long d'une section s du fibré (c'est-à-dire, X est le cône d'une section du fibré). Soit maintenant $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme tel que $f(C) = C$ et $f(K) = K$ (et aussi $f(s) = s$ car $s \equiv C \cap K$). On a

$$\begin{aligned} \Lambda(f, X) &= \Lambda(f, C)_X + \Lambda(f, K \setminus s)_X = \\ &= \Lambda(f|_C, C) + \Lambda(f, K \setminus s)_X = 1 + \Lambda(f, K \setminus s)_X. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Mais $K \setminus s$ est homéomorphe à un ruban de Möbius ouvert M' . Maintenant, si l'homéomorphisme $f|_{K \setminus s}$ est assez bon, on peut le prolonger en un homéomorphisme \tilde{f} du ruban de Möbius fermé M et dans ce cas, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$\Lambda(f, K \setminus s)_X = \Lambda(\tilde{f}, M')_M.$$

Mais, par l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire, on a aussi

$$\Lambda(\tilde{f}, M')_M = \Lambda(\tilde{f}, M) - \Lambda(\tilde{f}, S)_M = \Lambda(\tilde{f}, M) - \Lambda(\tilde{f}|_S, S),$$

où S est la circonférence de la frontière de M' dans M . Ainsi, on a réduit le problème de calculer le nombre de Lefschetz dans la bouteille de Klein à celui de le calculer dans un ruban de Möbius, lequel est homotope au cercle.

Dans le cas où l'homéomorphisme $f|_{K \setminus s}$ n'est pas assez bon, on pourrait considérer la compactification d'Alexandroff. Mais l'espace résultant de cette compactification est $\mathbb{R}P^2$, lequel serait homotope à X . Alors, dans ce cas, le nombre de Lefschetz combinatoire n'impliquerait rien de nouveau.

Observation 4.2.7. Notons que l'inclusion $K \rightarrow X$ est une cofibration [72, Proposition 5.3.1]. Aussi, l'inclusion $C_0 \rightarrow X$ est une cofibration (C_0 est la "moitié" du cône C qui contient le sommet -voir [72, Proposition 4.6.5] pour des détails). Alors, étant donné une application $f : X \rightarrow X$, cela aidera parfois à trouver un homéomorphisme f' homotope à f et qui satisfait les propriétés demandées dans l'exemple précédent.

4.3 Un Théorème d'Invariance Topologique de l'Indice de Point Fixe

Dans les années 50, O'Neill obtient un résultat d'invariance topologique pour l'indice de point fixe dans le cas où les points fixes de l'espace ne sont pas nécessairement isolés [65, Theorem 2.5] et [65, Corollary 7.2]. Aucun nouveau résultat ne l'a suivi.

Or, dans cette thèse on a montré l'existence d'un fort lien entre le nombre de Lefschetz combinatoire et l'indice de point fixe (Théorème 2.2.6). On a aussi démontré que le nombre de Lefschetz combinatoire est un invariant topologique. Sera-t-il possible alors profiter du Théorème 2.3.2 pour généraliser le résultat d'O'Neill ?

La réponse est oui, toujours dans le cas des applications ouvertes (où le nombre de Lefschetz combinatoire est défini). Avant de le montrer, remarquons que le Théorème 2.2.6 peut être généralisé pour des applications ouvertes et non seulement pour des homéomorphismes [2, Theorem 3.14]. Maintenant, comme application de l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire, nous généralisons le théorème de O'Neill.

Théorème 4.3.1 [2, Theorem 3.15]. *Soient X et Y des complexes simpliciaux, $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ des applications ouvertes et $U \subset X$ et $V \subset Y$ des sous-espaces ouverts définissables tels que $f(U) \subset U$, $g(V) \subset V$, $f(X \setminus U) \subset X \setminus U$, $g(Y \setminus V) \subset Y \setminus V$, f n'a pas de points fixes dans $\bar{U} \setminus U$ et g n'a pas de points fixes dans $\bar{V} \setminus V$. Dans ce cas, l'existence d'un homéomorphisme $h : U \rightarrow V$ tel que $g|_V \circ h = h \circ f|_U$ implique $i(X, f, U) = i(Y, g, V)$.*

Démonstration. Le Théorème 2.2.6 implique $i(X, f, U) = \Lambda(f, U)_X$ et $i(Y, g, V) = \Lambda(g, V)_Y$. Mais, d'après le Théorème 2.3.2 on peut conclure le résultat. \square

Observation 4.3.2. Notons que si U et V sont homéomorphes, on peut appliquer le Théorème 4.3.1 même s'ils ne sont pas inclus dans des sous-complexes homéomorphes. C'est ici où apparaît la généralisation face au résultat d'O'Neill.

4.4 Applications pratiques

La caractéristique d'Euler combinatoire est employée dans [21] pour compter des objets avec des réseaux de capteurs. Étant donné que le nombre de Lefschetz combinatoire généralise la caractéristique d'Euler combinatoire, on peut imaginer que ces résultats peuvent aussi être généralisés. En plus, même quand les résultats dans [21] ne peuvent pas être appliqués, il est parfois possible de trouver une application ouverte par rapport à laquelle pouvoir obtenir un résultat équivalent. C'est pour cela que dans cette petite section, on construira un exemple de ce genre d'applications avec un complexe simplicial où les résultats dans [21] ne peuvent pas être appliqués. Cet exemple fait partie de [55].

Supposons que nous sommes dans un bâtiment où le sol est si plein de capteurs que nous pouvons supposer qu'il y a un capteur pour chaque point du sol.

En plus, le fonctionnement des capteurs est le suivant : chaque objet α sur le sol (par exemple une personne) active les capteurs qui sont dans un certain voisinage autour de lui. Alors, on peut définir une *fonction de comptage* sur les points du sol. Cela est une fonction qui fournit le nombre d'objets détectés par chaque capteur.

Nous obtenons le résultat suivant, lequel généralise [55, Theorem 7.1] en considérant maintenant des applications ouvertes plutôt que des homéomorphismes.

Théorème 4.4.1 [55, Theorem 7.1]. *Soit $h : X \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction de comptage. S'il existe une application ouverte $f : X \rightarrow X$ telle que $h = \sum_{\alpha \in I} \mathbb{1}_{U_\alpha}$, où U_α est définissable, $f(U_\alpha) \subset U_\alpha$ et $f(X \setminus U_\alpha) \subset X \setminus U_\alpha$ pour tout $\alpha \in I$, et où $\Lambda(f, U_\alpha)_X = N \neq 0$, alors*

$$|I| = \frac{1}{N} \int_X h d\Lambda f .$$

Démonstration. On a

$$\int_X h d\Lambda f = \sum_{\alpha \in I} \Lambda(f, U_\alpha)_X = |I| \cdot N. \quad \square$$

Finalement on montre un exemple où les résultats de [21] ne peut être pas appliqué mais où l'on peut appliquer le Théorème 4.4.1.

Exemple 4.4.2 [55, Example 7.3]. Considérons le complexe simplicial X de la Figure 4.4.1. Soit $h : X \rightarrow \mathbb{Z}$ la fonction qui envoie le simplexe fermé $[a_2, a_5, a_8]$ sur 2 et le reste du complexe sur 1. Cette fonction peut être considérée comme la

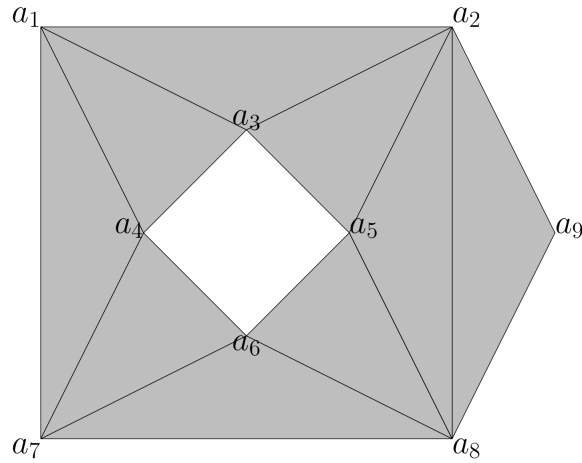


FIGURE 4.4.1 – Complexe simplicial X .

somme de la fonction caractéristique du sous-complexe qui est généré par les sommets $\{a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8\}$ et la fonction caractéristique du sous-complexe généré par les sommets $\{a_2, a_5, a_8, a_9\}$ sans la face ouverte correspondant au simplexe $\{a_2, a_8\}$. Les deux sous-complexes sont invariants par la réflexion f par rapport à la ligne qui contient les sommets a_4, a_5 et a_9 , mais leurs caractéristiques d'Euler combinatoires sont différentes et, ainsi, les techniques dans [21] ne peuvent pas être appliqués à cet exemple.

4.5 Un Théorème de Point Fixe pour des Espaces non Bornés

Comme on a déjà mentionné plusieurs fois dans cette thèse, la conséquence principale du nombre de Lefschetz combinatoire est l'obtention de certains théorèmes du point fixe de Lefschetz pour des espaces qui ne sont pas compacts. D'abord, le Théorème 2.4.7, généralise le théorème du point fixe du nombre de Lefschetz relatif et permet de trouver des points fixes dans des sous-espaces définissables, non nécessairement fermés d'un complexe simplicial compact. Cependant, comme on verra dans cette section, les conséquences sont encore plus fortes en ce que l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire permettra d'obtenir, grâce à certains théorèmes qui établissent des bornes pour l'indice de point fixe, de nouveaux

théorèmes de point fixe pour certains homéomorphismes (parfois on pourra étendre ces résultats aussi à quelques applications ouvertes) d'espaces définissables et fermés dans \mathbb{R}^n et non nécessairement bornés. Remarquons que, même si les applications qui interviennent dans ces résultats seront des homéomorphismes, ceux-là continuent à avoir une grande importance dans la théorie des points fixes (par exemple les applications utilisées dans [46], [47], [48], [49], [52] et [53] sont aussi des homéomorphismes).

Pendant plus de soixante ans, les mathématiciens ont essayé d'étendre le théorème du point fixe de Lefschetz énoncé pour des complexes simpliciaux ou des ANR compacts à des espaces plus généraux. En général, le théorème de Lefschetz n'est pas valide : puisque \mathbb{R} est contractile, le nombre de Lefschetz de l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui envoie x sur $x + 1$ est $1 \neq 0$, mais cette application n'a pas de points fixes. La question est donc trouver des situations où le nombre de Lefschetz garantit l'existence de points fixes. L'apparition de [51] a ouvert les portes pendant la deuxième moitié du XXe siècle à de nombreux travaux qui ont trouvé des situations où le nombre de Lefschetz donnait un théorème de point fixe. On pourrait notamment citer [13], [15], [27], [34], [51], [58], [62], [63], [64] et [73]. Aussi, dans [14], un théorème pour des espaces de Banach de dimension infinie est présenté. Récemment, les seuls progrès importants dans cette ligne ont été [18] et [19] (il y a eu aussi quelques idées dans le contexte des variétés différentielles, mais avec des hypothèses assez restrictives sur les espaces ou les applications).

On doit remarquer que tous ces travaux ont un lien commun : la compacité ne disparaît jamais. Les hypothèses des théorèmes demanderont aux applications d'être compactes, CAC, condensantes, etc, et seulement grâce à cela la compacité de l'espace pourra être oubliée. Une bonne référence pour tous ces théorèmes est [33].

Or, dans cette section, la compacité ne sera demandée que dans le sens très général de demander aux applications d'être propres (parmi d'autres hypothèses qui n'ont rien à voir avec la compacité). Même si l'on emploiera des compactifications, elles n'entraîneront aucune limitation, car les théorèmes seront énoncés en fonction du nombre de Lefschetz combinatoire d'un espace en général non compact et pour lequel il existera toujours au moins une compactification avec laquelle il sera possible de travailler. Ainsi, les résultats dans cette thèse, même s'ils sont limités aux homéomorphismes et à quelques applications ouvertes, peuvent être vus comme la première attaque généraliste à l'un des principaux problèmes ouverts de la théorie topologique des points fixes sans employer la compacité. Ainsi, à partir de l'Idée 4.5.9, on obtiendra de nombreux théorèmes (les Théorèmes 4.5.10, 4.5.12, 4.5.16, 4.5.18 et l'Exemple 4.5.20) qui garantiront l'existence de points fixes.

Finalement, dans la Sous-section 4.5.1, on insistera sur l'importance de trouver de nouvelles bornes pour l'indice de point fixe. Le Théorème 4.5.21 montrera le pouvoir qu'aurait dans la théorie des points fixes une conjecture comme la Conjecture 1 si celle-ci pouvait être démontrée. D'ailleurs, on verra aussi que, toujours grâce à l'Idée 4.5.9, on peut employer le nombre de Lefschetz combinatoire pour trouver des contre-exemples d'espaces où l'indice de point fixe n'est pas borné par une quantité donnée (la démonstration du Théorème 4.5.23, dont l'énoncé est un résultat assez connu, montre le procédé pour trouver ces contre-exemples). On doit remarquer que ceci est aussi important puisque la recherche de nouvelles bornes pour l'indice de point fixe est aujourd'hui un domaine important dans la théorie topologique des points fixes avec un certain nombre de travaux [30], [42], [43], [45], [46], [77]. Des exemples de l'importance de ces bornes peuvent être [46] et [52].

Commençons alors cette dernière étape de la thèse en voyant comment l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire nous permet de définir un nombre de Lefschetz combinatoire pour des espaces définissables non bornés. Cette extension de la définition existera toujours lorsque l'espace est fermé et l'application est un homéomorphisme.

Définition 4.5.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un espace définissable et soit $f : U \rightarrow U$ une application continue. S'il existe une compactification définissable X de U (cela signifie que X est définissable et l'inclusion de U dans X aussi) et un prolongement ouvert $\tilde{f} : X \rightarrow X$ de f tel que $\tilde{f}(X \setminus U) \subset X \setminus U$, alors on définit le *nombre de Lefschetz combinatoire* de f dans U comme

$$A_{\text{comb}}(f, U) = A(\tilde{f}, U)_X.$$

L'Observation 2.4.5 implique que ce nombre est bien défini.

Observation 4.5.2. Remarquons qu'on donne le même nom à ce nouvel invariant que dans le cas borné car, si $U \subset X$ est un sous-ensemble définissable d'un complexe simplicial X et $f : X \rightarrow X$ est une application ouverte telle que $f(U) \subset U$ et $f(X \setminus U) \subset X \setminus U$, alors

$$A(f, U)_X = A(f, U)_{\bar{U}} = A_{\text{comb}}(f|_U, U)$$

(on a vu dans le Théorème 2.4.3 que l'application $f|_{\bar{U}}$ est ouverte).

Observation 4.5.3. Maintenant, si U est définissable et fermé dans \mathbb{R}^n et il n'est pas borné, la compactification d'Alexandroff de U peut être vue comme la composition de l'inclusion de U dans \mathbb{R}^n avec la compactification $c : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$. Or, l'inclusion est

toujours définissable, et, d'après [68], c est aussi définissable. Comme la composition d'applications définissables est aussi définissable (Propriété 0.3.7), la compactification d'Alexandroff d'un sous-ensemble définissable fermé est définissable. Notons U^∞ , cette compactification. De plus, si $f : U \rightarrow U$ est un homéomorphisme, l'application $\tilde{f} : U^\infty \rightarrow U^\infty$ définie comme f sur les points dans U et par $\tilde{f}(\infty) = \infty$ est aussi un homéomorphisme. Alors, le nombre de Lefschetz combinatoire peut toujours être défini pour les homéomorphismes entre espaces définissables fermés dans \mathbb{R}^n .

Observation 4.5.4. En général, si l'application $f : U \rightarrow U$ est propre, on peut la prolonger en une application $\tilde{f} : U^\infty \rightarrow U^\infty$, mais on doit aussi surveiller si ce prolongement est ouvert. Ainsi, même si les théorèmes de cette section peuvent être appliqués à certaines applications ouvertes, afin de simplifier la notation (car les idées seront les mêmes dans les deux cas), on ne parlera que d'homéomorphismes.

L'indice de point fixe et l'indice des classes de point fixe (en particulier, si l'application n'a qu'un seul point fixe les deux choses ne font qu'un) admettent parfois quelques bornes. Parmi certains résultats, pour cette thèse on va distinguer les quatre suivants. Ici, si x est un point fixe isolé de f , $\text{ind}(x)$ signifiera la même chose que $i(X, f, U)$ avec U un ouvert tel que $x \in U$ est le seul point fixe de f dans \overline{U} (l'axiome d'additivité de l'indice implique que cette notation est indépendante du choix de l'ouvert). Si F est une classe de point fixe, $\text{ind}(f, F)$ sera la même chose que $i(X, f, U)$, avec U un ouvert contenant F et où les seuls points fixes sont ceux dans F (l'existence d'un tel ouvert est garantie par [16, VI.B Theorem 1].)

Dans [42], on a le théorème suivant :

Théorème 4.5.5. *Soit X une surface compacte et connexe à caractéristique d'Euler négative et soit $f : X \rightarrow X$ une application continue. Dans ce cas, l'indice de toutes les classes de point fixe F de f est inférieur ou égal à 1 et on a*

$$\sum_{\text{ind}(f, F) < -1} (\text{ind}(f, F) + 1) \geq 2\chi(X).$$

Un résultat similaire au théorème précédent peut être trouvé dans [46].

Dans [45], on a

Théorème 4.5.6. *Soit X une surface à bord connexe et compacte et soit $f : X \rightarrow X$ une application continue telle que $\#\text{Fix}(f) \leq \#\text{Fix}(g)$ pour toute application g homotope à f (ici on a noté $\text{Fix}(f)$, l'ensemble des points fixes de f). Alors l'indice*

de tout point fixe est inférieur ou égal à 1 et

$$\sum_{\text{ind}(x) < -1} (\text{ind}(x) + 1) \geq 2\chi(X).$$

Dans [30], on a le théorème suivant :

Théorème 4.5.7. *Soit X le bouquet de m surfaces X_1, \dots, X_m (avec ou sans bord) qui sont connexes et compactes et à caractéristique d'Euler non positive. Soit $f : X \rightarrow X$ une application telle que $\#\text{Fix}(f) \leq \#\text{Fix}(g)$ pour toute application $g : X \rightarrow X$ homotope à f . Alors :*

$$\sum_{\text{ind}(x) \geq 1} (\text{ind}(x) - 1) \leq 0$$

et

$$\sum_{\text{ind}(x) \leq -1} (\text{ind}(x) + 1) \geq 2\chi(X).$$

En particulier, l'indice de tout point fixe isolé doit être inférieur ou égal à 1.

Finalement, dans [43] on trouve une borne dans le cas des graphes. Le théorème suivante est conséquence directe de [43, Theorem 1.1].

Théorème 4.5.8. *Soit X un graphe connexe et fini et $f : X \rightarrow X$ une application continue. Alors l'indice de chaque classe de point fixe est inférieur ou égal à 1.*

Maintenant on donne l'idée des théorèmes finaux de cette thèse.

Idée 4.5.9. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ définissable et fermé dans \mathbb{R}^n et soit $f : U \rightarrow U$ un homéomorphisme. Supposons aussi que U^∞ et \tilde{f} satisfont les hypothèses d'un des Théorèmes 4.5.5, 4.5.6, 4.5.7 ou 4.5.8.

Maintenant, supposons que f n'a pas de points fixes. Dans ce cas, ∞ est le seul point fixe de \tilde{f} (en particulier l'indice du point ∞ est égal à celui de sa classe de point fixe). Alors, par les Théorèmes 4.5.5, 4.5.6, 4.5.7 ou 4.5.8, on a que l'indice $\text{ind}(\infty)$ est inférieur ou égal à 1 (on aura aussi une certaine borne inférieure qui dépendra de la caractéristique d'Euler de l'espace).

D'un autre côté on a

$$\begin{aligned} \text{ind}(\infty) &= \Lambda(\tilde{f}, U^\infty) = \Lambda(\tilde{f}, U)_{U^\infty} + \Lambda(\tilde{f}, \{\infty\})_{U^\infty} \\ &= \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1, \end{aligned}$$

où la première égalité est conséquence des axiomes de normalisation et additivité de l'indice. Ainsi,

$$\Lambda_{\text{comb}}(f, U) = \text{ind}(\infty) - 1.$$

Or, comme $\text{ind}(\infty) \leq 1$, $\Lambda_{\text{comb}}(f, U)$ doit être inférieur ou égal à 0. Alors, dans le cas où $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \geq 1$, f doit avoir un point fixe (et ainsi, de cette façon, on peut énoncer un théorème de point fixe pour certains espaces non bornés). Remarquons que l'importance de ce résultat est que, comme $\Lambda_{\text{comb}}(f, U)$ ne dépend pas de la compactification de U choisie, parfois le calcul de $\Lambda_{\text{comb}}(f, U)$ avec une autre compactification différente de U^∞ sera plus simple que celui de $\Lambda(f, U)_{U^\infty}$ ou celui de $\Lambda(\tilde{f}, U^\infty)$ et puis employer l'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire pour obtenir $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) = \Lambda(\tilde{f}, U^\infty) - 1$.

Ainsi, dans cette thèse on obtient certains théorèmes. On les énoncera en termes d'homéomorphismes mais parfois, un énoncé pour des applications ouvertes propres peut être aussi valide (mais plus pénible). En fait, si f admet un prolongement $\tilde{f} : U^\infty \rightarrow U^\infty$ ouvert tel que $\tilde{f}(\infty) = \infty$, tous ces théorèmes sauf le Théorème 4.5.10 seront aussi valides, mais l'énoncé sera moins propre.

Théorème 4.5.10 [2, Theorem 5.15]. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un définissable connexe et fermé dans \mathbb{R}^n et de dimension 1 (avec cela on veut dire qu'il admet une triangulation par un complexe simplicial généralisé de dimension 1). Soit $f : U \rightarrow U$ un homéomorphisme tel que $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \geq 1$. Alors, f a un point fixe.*

Démonstration. Comme U est de dimension 1, U^∞ doit être un graphe fini. Si f n'a pas de points fixes, alors ∞ est le seul point fixe de $\tilde{f} : U^\infty \rightarrow U^\infty$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \text{ind}(\infty) &= \Lambda(\tilde{f}, U^\infty)_{U^\infty} = \Lambda(\tilde{f}, U)_{U^\infty} + \Lambda(\tilde{f}, \infty)_{U^\infty} = \\ &= \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\Lambda_{\text{comb}}(f, U) = \text{ind}(\infty) - 1.$$

Or, d'après le Théorème 4.5.8, on conclut $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \leq 0$ et cela entraîne une contradiction. Alors f doit avoir un point fixe. \square

Exemple 4.5.11. Par exemple, si notre espace U est celui de la Figure 4.5.1, c'est-à-dire, un faisceau de droites (dans ce cas, 4 droites) où l'on définit un homéomorphisme f . Parfois l'homéomorphisme peut être prolongé sur des compactifications différentes de celle d'Alexandroff par lesquelles il sera plus facile de calculer $\Lambda_{\text{comb}}(f, U)$.

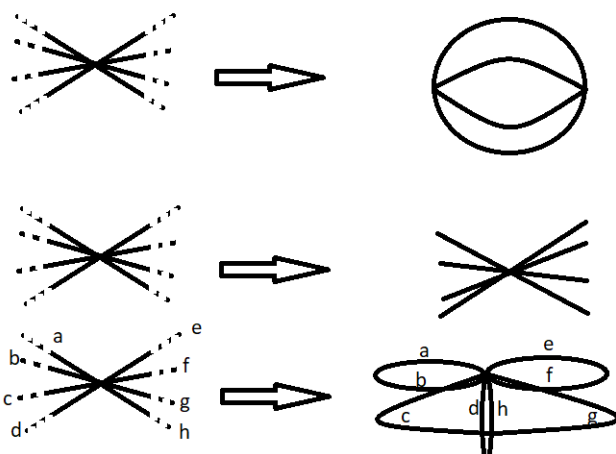


FIGURE 4.5.1 – Des différentes compactifications possibles. La première est celle d’Alexandroff.

Théorème 4.5.12 [2, Theorem 5.11]. Soient $U_1, \dots, U_m \subset \mathbb{R}^n$ des sous-espaces disjoints, définissables et fermés dans \mathbb{R}^n tels que U_i^∞ est une surface (avec ou sans bord) connexe et compacte pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Supposons aussi que $\Lambda_{\text{comb}}(\text{id}, U_i) \leq -1$ (c’est-à-dire, la caractéristique d’Euler combinatoire des U_i est négative). Soit $f : \bigcup_{i=1}^m U_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^m U_i$ un homéomorphisme. Si $\Lambda_{\text{comb}}(f, \bigcup_{i=1}^m U_i) > 0$, f a un point fixe. De plus, si $\sum_i \Lambda_{\text{comb}}(\text{id}, U_i) = -1$ et si $\Lambda_{\text{comb}}(f, \bigcup_{i=1}^m U_i) < -2$, f a un point fixe.

Démonstration. Supposons que f n’a pas de points fixes et notons $U = \bigcup_{i=1}^m U_i$. Dans ce cas, ∞ est le seul point fixe de \tilde{f} .

D’abord pour chaque i on a

$$\Lambda(\text{id}, U_i^\infty) = \Lambda_{\text{comb}}(\text{id}, U_i) + \Lambda(\text{id}, \infty) = \Lambda_{\text{comb}}(\text{id}, U_i) + 1.$$

Comme $\Lambda_{\text{comb}}(\text{id}, U_i) \leq -1$ on conclut que U_i^∞ est une surface connexe, compacte et à caractéristique d’Euler non positive. En plus, comme

$$\Lambda(\tilde{f}, U^\infty) = \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1$$

et $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) > 0$, on obtient $\Lambda(\tilde{f}, U^\infty) \neq 0$ et dans ce cas, le théorème classique du point fixe de Lefschetz implique l’existence d’un point fixe pour toute application

homotope à \tilde{f} . Or, comme on a supposé que \tilde{f} n'a qu'un seul point fixe, on est dans les conditions du Théorème 4.5.7 et ainsi $\text{ind}(\infty) \leq 1$.

Dans ce cas

$$1 \geq \text{ind}(\infty) = \Lambda(\tilde{f}, U^\infty) = \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1$$

et donc $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \leq 0$, mais cela entraîne une contradiction. Alors f doit avoir un point fixe.

Pour la deuxième partie du théorème, supposons de nouveau que f n'a pas de points fixes. Remarquons maintenant que $\sum_i \Lambda_{\text{comb}}(\text{id}, U_i) = -1$ implique $\chi(U^\infty) = -1 + 1 = 0$. Aussi, comme $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) < -2$, on en déduit $\Lambda(\tilde{f}, U^\infty) < -2 + 1 = -1$ et en particulier $\Lambda(\tilde{f}, U^\infty) \neq 0$. Ainsi, toute application homotope à \tilde{f} doit avoir un point fixe et, comme on a supposé que \tilde{f} n'a qu'un seul point fixe, on est dans les conditions du Théorème 4.5.7. Ainsi, $\text{ind}(\infty) \geq -1$. Or,

$$-1 \leq \text{ind}(\infty) = \Lambda(\tilde{f}, U^\infty) = \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1,$$

et ainsi, $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \geq -2$, obtenant, de nouveau, une contradiction. □

Observation 4.5.13. Le Théorème 4.5.7 fournit des bornes de l'indice aussi lorsque $\chi(U^\infty) < 0$. On peut employer aussi ces bornes dans l'Idée 4.5.9 pour obtenir des nouveaux théorèmes de point fixe.

Exemple 4.5.14. Considérons l'espace U de la Figure 4.5.2. Il est formé par deux bouteilles de Klein auxquelles on a enlevé un point et étiré ensuite un voisinage de ce point vers l'infini. Évidemment, U^∞ est le bouquet de deux bouteilles de Klein, et pour certains homéomorphismes $f : U \rightarrow U$, on pourrait employer le Théorème 4.5.12. D'ailleurs, aussi pour certains homéomorphismes f , on pourrait calculer $\Lambda_{\text{comb}}(f, U)$ comme $\Lambda(\tilde{f}', U)_{4\mathbb{P}}$ au lieu de $\Lambda(\tilde{f}, U^\infty)$, où $4\mathbb{P}$ est la surface non orientable de genre 4 qui résulte de la compactification de la Figure 4.5.3 et $\tilde{f}' : 4\mathbb{P} \rightarrow 4\mathbb{P}$ est un homéomorphisme qui prolonge f .

Observation 4.5.15. Le nombre d'exemples de ce genre est très grand. Un exemple différent, sans augmenter le nombre de surfaces dans le bouquet, serait répéter l'idée de l'Exemple 4.5.14 avec une bouteille de Klein et un tore. Dans ce cas, une compactification différente de celle d'Alexandroff pourrait être obtenue en considérant une nouvelle surface non orientable.

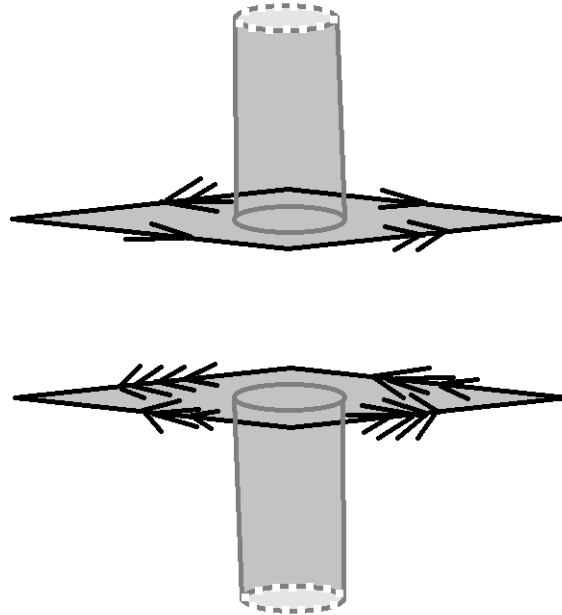


FIGURE 4.5.2 – Espace U .

Théorème 4.5.16 [2, Theorem 5.16]. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble définissable et fermé dans \mathbb{R}^n tel que U^∞ est une surface à bord connexe et compacte. Soit $f : U \rightarrow U$ un homéomorphisme tel que $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \geq 1$. Alors, f a un point fixe.*

Observation 4.5.17. Comme dans le Théorème 4.5.12, on peut aussi, employer la borne inférieure du Théorème 4.5.6 pour fournir un théorème de point fixe.

Démonstration. Supposons que f n'a pas de points fixes. Dans ce cas, ∞ est le seul point fixe de \tilde{f} . Comme

$$\Lambda(\tilde{f}, U^\infty) = \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1$$

et $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \geq 1$, on a $\Lambda(\tilde{f}, U^\infty) \neq 0$ et alors, d'après le théorème du point fixe de Lefschetz, toute application homotope à \tilde{f} doit avoir un point fixe. Maintenant on

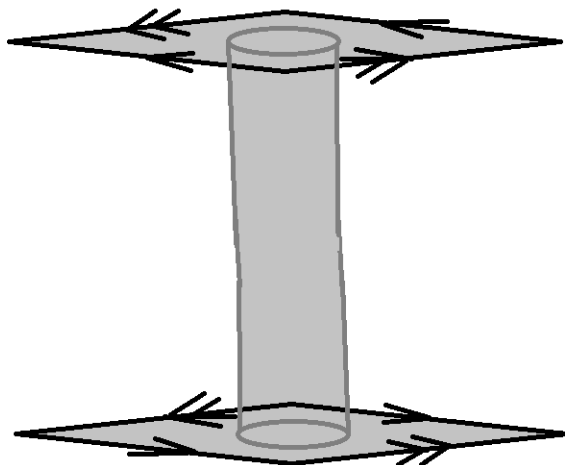


FIGURE 4.5.3 – Autre possible compactification : la surface $4\mathbb{P}$.

peut appliquer le Théorème 4.5.6, et ainsi $\text{ind}(\infty) \leq 1$. Or,

$$1 \geq \text{ind}(\infty) = \Lambda(\tilde{f}, U^\infty) = \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1$$

et donc $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \leq 0$, mais cela entraîne une contradiction. \square

Théorème 4.5.18 [2, Theorem 5.17]. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble définissable et fermé dans \mathbb{R}^n tel que U^∞ est une surface connexe, compacte et à caractéristique d'Euler négative. Soit $f : U \rightarrow U$ un homéomorphisme. Si $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \geq 1$, f a un point fixe.*

Observation 4.5.19. Comme dans le Théorème 4.5.12, on peut aussi employer la borne inférieure du Théorème 4.5.5 pour fournir un théorème de point fixe.

Démonstration. Supposons que f n'a pas de points fixes. Dans ce cas, ∞ est le seul point fixe de \tilde{f} et alors, la classe de point fixe de ∞ est exactement $\{\infty\}$. Le Théorème 4.5.5 implique donc $\text{ind}(\infty) \leq 1$. Or,

$$1 \geq \text{ind}(\infty) = \Lambda(\tilde{f}, U^\infty) = \Lambda_{\text{comb}}(f, U) + 1$$

et ainsi $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \leq 0$, mais cela entraîne une contradiction. \square

Parfois, on peut faire le procédé inverse par rapport aux compactifications. C'est-à-dire, obtenir une borne pour l'indice dans une certaine compactification sur laquelle f admet un prolongement et après simplifier le calcul de $A_{\text{comb}}(f, U)$ dans une compactification différente. L'exemple suivant montre l'idée (remarquons que, afin de simplifier la compréhension, les points fixes de cette application sont évidents).

Exemple 4.5.20 [2, Exemple 5.18]. Considérons l'espace U de la Figure 4.5.4. Cet espace est une réunion disjointe de deux tores auxquels on a enlevé un disque et ensuite étiré un voisinage de ce disque vers l'infini.

On peut avoir l'énoncé suivant :

“Soit $f : U \rightarrow U$ un homéomorphisme qui peut être prolongé en un homéomorphisme \tilde{f} de la compactification de U donnée par le double tore $2\mathbb{T}$ (Figure 4.5.5). Supposons en plus que \tilde{f} laisse fixe la circonférence qu'on ajoute à U pour obtenir la compactification. Si $A_{\text{comb}}(f, U) \geq 2$, f a un point fixe”.

La démonstration est similaire à celle des théorèmes précédents. Supposons que f n'a pas de points fixes. Alors, la circonférence qui rejoint les deux tores est l'ensemble de points fixes de \tilde{f} . Comme elle est connexe, elle est précisément une seule classe de point fixe [41, Corollary 1.14]. Notons F , cette classe de point fixe. Maintenant, le Théorème 4.5.5 implique $\text{ind}(F) \leq 1$. Dans ce cas, comme la définition de $A_{\text{comb}}(f, U)$ est indépendante de la compactification choisie,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \text{ind}(F) = A(\tilde{f}, 2\mathbb{T}) = A_{\text{comb}}(f, U) + A(\tilde{f}, |F|)_{2\mathbb{T}} = \\ &A_{\text{comb}}(f, U) + A(\tilde{f}|_{|F|}, |F|)_{|F|} = A_{\text{comb}}(f, U) + A(\text{id}, |F|) = \\ &A_{\text{comb}}(f, U) + \chi(S^1) = A_{\text{comb}}(f, U) + 0, \end{aligned}$$

où la première égalité est conséquence des axiomes de normalisation et d'additivité de l'indice et $|F|$ représente la circonférence constituée par les points dans F . Ainsi on obtient $A_{\text{comb}}(f, U) \leq 1$ et cela suppose une contradiction.

Voyons un cas pratique. Soit $g : U \rightarrow U$ la rotation de 180 degrés autour de la droite de la Figure 4.5.4. Dans une circonférence d'un cylindre, la restriction de cette application est une rotation $r : S^1 \rightarrow S^1$ de 180 degrés. Définissons maintenant une application f homotope à g . La description de f est la suivante :

Dans les parties de U qui ressemblent à un tore dans la Figure 4.5.4, $f = g$. Par contre, dans les deux cylindres, f est le résultat de l'homotopie canonique entre $r : S^1 \rightarrow S^1$ et $\text{id}_{|S^1}$ de sorte que l'homotopie atteindrait $\text{id}_{|S^1}$ à l'infini.

Cette homéomorphisme f peut se prolonger en un homéomorphisme sur $2\mathbb{T}$ en laissant fixe $|F|$. Soit \tilde{f} cet homéomorphisme.

Or, au lieu de calculer $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) = \Lambda(\tilde{f}, U)_{2\mathbb{T}}$ (ce qui pourrait être très compliqué), on peut faire $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) = \Lambda(\tilde{f}', U)_{\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2}$, où \tilde{f}' est l'homéomorphisme qui envoie chaque point $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{T}_i = S_i^1 \times S_i^1$ sur $(-x_1, y_1, x_2, -y_2) \in \mathbb{T}_i$ pour $i = 1, 2$ (notons que \tilde{f}' n'est pas un prolongement de f sur $\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2$ mais il est homotope à celui-ci). La Figure 4.5.6 représente cet homéomorphisme.

L'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$\Lambda(\tilde{f}', U)_{\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2} = \Lambda(\tilde{f}', \mathbb{T}_1 \setminus \{p\})_{\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2} + \Lambda(\tilde{f}', \mathbb{T}_2 \setminus \{q\})_{\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2}$$

et par symétrie on a

$$\Lambda(\tilde{f}', U)_{\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2} = 2\Lambda(\tilde{f}', \mathbb{T}_1 \setminus \{p\})_{\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2} = 2\Lambda(\tilde{f}'_{|\mathbb{T}_1}, \mathbb{T}_1 \setminus \{p\})_{\mathbb{T}_1}.$$

Calculons alors $\Lambda(\tilde{f}'_{|\mathbb{T}_1}, \mathbb{T}_1 \setminus \{p\})_{\mathbb{T}_1}$.

Par additivité, $\Lambda(\tilde{f}'_{|\mathbb{T}_1}, \mathbb{T}_1 \setminus \{p\})_{\mathbb{T}_1} = \Lambda(\tilde{f}'_{|\mathbb{T}_1}, \mathbb{T}_1) - 1$. Or, $\tilde{f}'^* : H^1(S_1^1 \times S_1^1) \rightarrow H^1(S_1^1 \times S_1^1)$ est l'homomorphisme qui envoie chaque générateur α_i^* sur $-\alpha_i^*$ pour $i = 1, 2$ et, alors, d'après [12],

$$\Lambda(\tilde{f}'_{|\mathbb{T}_1}, \mathbb{T}_1) = \det \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 0 \\ 0 & 1 - (-1) \end{pmatrix} = 4$$

et ainsi $\Lambda(\tilde{f}'_{|\mathbb{T}_1}, \mathbb{T}_1 \setminus \{p\})_{\mathbb{T}_1} = 3$. Dans ce cas, $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) = 2 \cdot 3 = 6 \geq 2$ et on déduit que f a un point fixe.

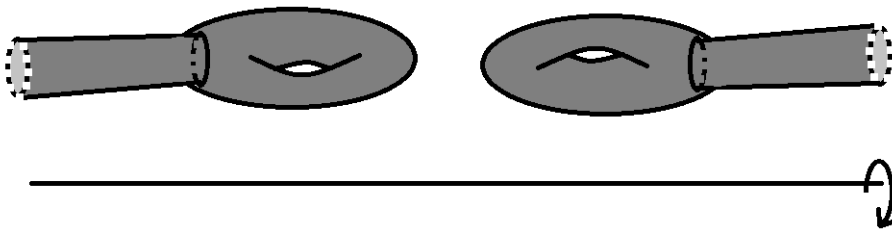


FIGURE 4.5.4 – L'ensemble U .

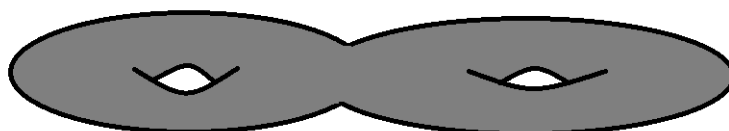


FIGURE 4.5.5 – Double tore $2\mathbb{T}$.

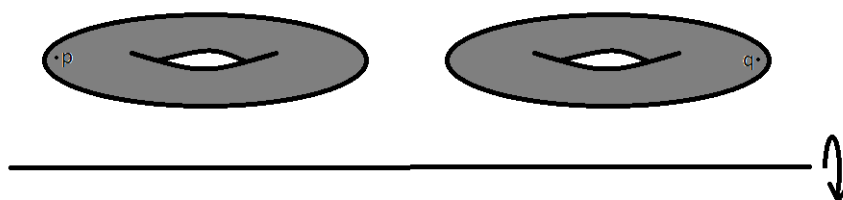


FIGURE 4.5.6 – $\mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2$.

4.5.1 L'importance de nouvelles bornes

Les références [30], [45], [42], [43] et [46], donnent des bornes pour l'indice de points fixes dans des graphes, dans des surfaces (avec ou sans bord) connexes, compactes et à caractéristique d'Euler non positive et dans des bouquets de ces surfaces.

Cependant, l'Idée 4.5.9 pourrait aussi être appliquée avec de nouvelles bornes. Cette sous-section est dédiée à justifier l'importance de trouver ce genre de nouvelles bornes. Un cas très intéressant est celui de certains collapsés des surfaces connexes, compactes et à caractéristique d'Euler non positive. Les exemples les plus simples dans notre cas sont les collapsés dans le tore. Par exemple, la Figure 4.5.7 montre un tore où l'on a collapsé une circonférence et la Figure 4.5.8 est le collapsé du tore par deux points. Notons X_1 et X_2 les espaces de ces figures.

Imaginons qu'il existe une borne pour l'indice des points fixes isolés pour des

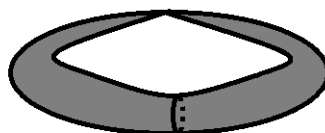


FIGURE 4.5.7 – Collapse du tore par une circonférence (X_1).

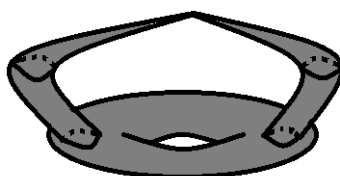


FIGURE 4.5.8 – Collapse du tore par deux points (X_2).

homéomorphismes de ces collapses. Par exemple,

Conjecture 1. Soient X un espace résultant de ce genre de collapses du tore (on peut penser à X_1 ou X_2), $f : X \rightarrow X$ un homéomorphisme tel que $\# \text{Fix}(f) \leq \# \text{Fix}(g)$ pour toute application g homotope à f et soit $x \in X$ un point fixe de f . Dans ce cas, $\text{ind}(x) \leq 1$ et l'indice est aussi borné inférieurement avec une borne dépendant de la caractéristique d'Euler de X .

L'importance des collapses comme X_1 ou X_2 est que, sauf dans un point, ils sont localement des surfaces et dans ce point exceptionnel ils sont localement un bouquet de surfaces. Il est certain que le point du collapse maintenant n'est pas un point de séparation global, mais il semble quand même que le Théorème 4.5.7 pourrait être adapté.

Si cette conjecture est vraie, on aurait le théorème suivant (et aussi des théorèmes équivalents pour d'autres collapses du tore ou des collapses d'autres surfaces).

Théorème 4.5.21. *Supposons que la Conjecture 1 est vraie. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace définissable et fermé de \mathbb{R}^n tel que $U^\infty = X_i$ (avec $i = 1$ ou $i = 2$) et soit $f : U \rightarrow U$ un homéomorphisme. Si $\Lambda_{\text{comb}}(f, U) \geq 1$, alors f a un point fixe.*

Démonstration. Supposons que f n'a pas de points fixes. Dans ce cas, ∞ est le seul point fixe de \tilde{f} . Comme

$$A(\tilde{f}, X_i) = A(\tilde{f}, U^\infty) = A_{\text{comb}}(f, U) + 1$$

et $A_{\text{comb}}(f, U) \geq 1$, $A(\tilde{f}, X_i) \neq 0$ et alors toute application homotope à \tilde{f} doit avoir au moins un point fixe. Dans ce cas, la Conjecture 1 implique $\text{ind}(\infty) \leq 1$ et alors

$$1 \geq \text{ind}(\infty) = A(\tilde{f}, U^\infty) = A_{\text{comb}}(f, U) + 1.$$

Ainsi, $A_{\text{comb}}(f, U) \leq 0$, mais cela entraîne une contradiction. Par conséquent, f doit avoir un point fixe. \square

Un exemple de ce résultat (si l'on suppose que la Conjecture 1 est vraie) serait le suivant.

Exemple 4.5.22. Soit U l'espace de la Figure 4.5.9 et soit f , comme l'application dans l'Exemple 4.5.20, c'est-à-dire, la rotation de 180 degrés par rapport au plan $z = 0$.

Calculons $A_{\text{comb}}(f, U)$. Or, au lieu d'employer la compactification $U^\infty = X_2$, employons la compactification \mathbb{T} . Soit $\tilde{f} : \mathbb{T} = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1 = \mathbb{T}$ l'application qui envoie (x_1, y_1, x_2, y_2) sur $(-x_1, y_1, x_2, -y_2)$. L'additivité du nombre de Lefschetz combinatoire implique

$$A(\tilde{f}, \mathbb{T}) = A_{\text{comb}}(f, U) + 2,$$

où le 2 est le nombre de Lefschetz dans les deux points de $\mathbb{T} \setminus U$ (qui sont des points fixes de \tilde{f}). Encore une fois, $\tilde{f}^* : H^1(S_1^1 \times S_1^1) \rightarrow H^1(S_1^1 \times S_1^1)$ est l'application qui envoie chaque générateur α_i^* sur $-\alpha_i^*$ pour $i = 1, 2$ et, alors, d'après [12],

$$A(\tilde{f}, \mathbb{T}) = \det \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 0 \\ 0 & 1 - (-1) \end{pmatrix} = 4,$$

et donc $A_{\text{comb}}(f, U) = 2 \geq 1$. Par conséquent, f doit avoir un point fixe.

Le nombre d'exemples qu'on peut construire dans ce nouveau cas et où changer de compactification simplifie le calcul de $A_{\text{comb}}(f, U)$ serait maintenant vraiment très grand. Avant, on était limités parce que la compactification devait être une surface (et cela supposait une restriction au point ∞) ou un bouquet de surfaces (dans ce cas, l'ensemble U devait avoir plus d'une composante connexe). Maintenant, par contre,



FIGURE 4.5.9 – Espace U .

les compactifications des espaces peuvent être parmi une grande variété de collapses des surfaces compactes à caractéristique d'Euler non positive. Ceci est la raison pour laquelle trouver une borne pour les points fixes isolés dans ces collapses de surfaces est si important.

Une autre possibilité où il semble aussi possible de trouver une borne pour l'indice est le bouquet de certaines surfaces par plus d'un point (voir le premier espace de la Figure 4.5.10). L'avantage de cela est que, pour des espaces où U^∞ est un bouquet de ce genre, il y a d'autres compactifications plus régulières de U où calculer $\Lambda_{\text{comb}}(f, U)$ peut devenir un travail plus simple (voir le deuxième espace de la Figure 4.5.10).

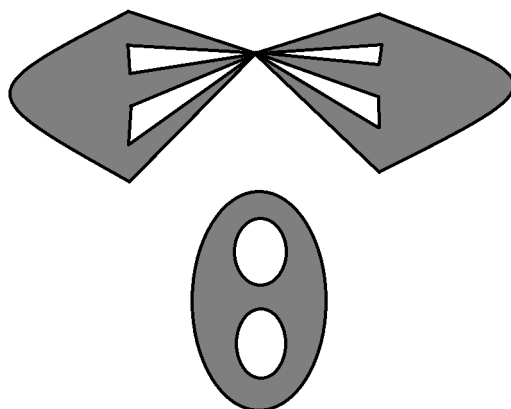


FIGURE 4.5.10 – Deux compactifications du même espace.

4.5 Un Théorème de Point Fixe pour des Espaces non Bornés

La dernière borne de l'indice dont on veut remarquer l'intérêt est celle dans des recollements de certaines surfaces par plus d'un point. Appelons ces espaces *recollements de surfaces par plusieurs points* (un cas particulier est celui du paragraphe précédent mais aussi l'identification bijective de n points d'une surface avec n points d'une autre surface). Un exemple de cela est le troisième espace de la Figure 4.5.11. L'existence d'une borne dans ces recollements par plusieurs points serait aussi très importante par la raison suivante :

Soit U le premier espace de la Figure 4.5.11. Remarquons que U^∞ (le deuxième espace de la figure) n'est pas une variété à cause du point ∞ . Dans ce cas, on est dans les conditions similaires à celles de la Conjecture 1. Or, si cette conjecture n'est pas vraie, une borne de l'indice dans des recollements de surfaces par plusieurs points nous permettrait d'appliquer l'Idée 4.5.9 aux espaces comme le troisième de la Figure 4.5.11. Dans ce cas, pour énoncer un théorème de point fixe, avec la notation de la Figure 4.5.11, on devrait connaître $\Lambda(\tilde{f}, (U^\infty/S) \setminus \{\infty\})_{U^\infty/S}$, c'est-à-dire, $\Lambda_{\text{comb}}(\tilde{f}, (U^\infty/S) \setminus \{\infty\})$. Mais cela peut être déduit de $\Lambda_{\text{comb}}(f, U)$ grâce à l'axiome de cofibration.

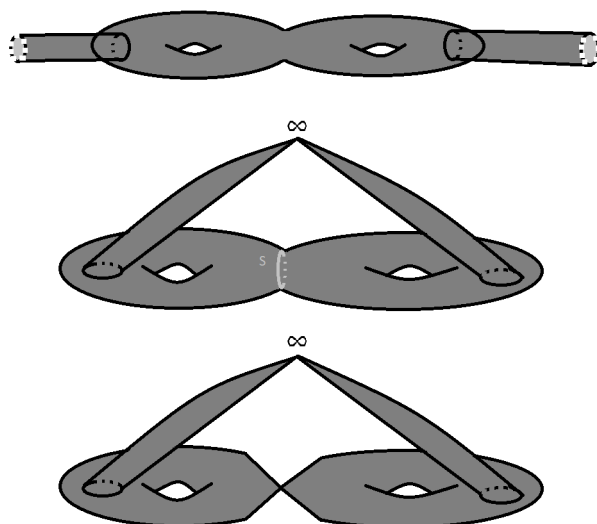


FIGURE 4.5.11 – U , U^∞ et U^∞/S .

Finalemment, remarquons que l'Idée 4.5.9 permet aussi de trouver quelques contre-exemples pour des bornes de l'indice. Les bornes de l'indice sont assez étudiées en théorie topologique des points fixes. En plus de certains articles où ce genre de bornes sont obtenues (comme les déjà mentionnés [42], [45], [43], [46] et beaucoup plus) il y a aussi des articles où l'on présente des espaces pour lesquels ces bornes ne sont plus valides [77]. En particulier, connaître quand l'indice de point fixe est inférieur ou égal à 1 est très important [52].

Dans cette recherche de contre-exemples, il faut remarquer que le nombre de Lefschetz combinatoire (et surtout son invariance topologique) peut devenir un outil très important. Pour comprendre cela, on montrera ici, grâce à l'Idée 4.5.9 et seulement à manière d'exemple, un fait déjà très connu : l'indice de point fixe dans S^2 n'est pas borné par 1.

Théorème 4.5.23. *Il existe un homéomorphisme $\tilde{f} : S^2 \rightarrow S^2$ tel que $\# \text{Fix}(\tilde{f}) \leq \# \text{Fix}(g)$ pour toute application g homotope à \tilde{f} et tel qu'il a un point fixe isolé d'indice 2.*

Démonstration. Supposons que l'indice de point fixe était inférieur ou égal à 1 pour la situation décrite dans l'énoncé du théorème. Dans ce cas, un homéomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $A_{\text{comb}}(f, \mathbb{R}^2) \geq 1$ devrait avoir un point fixe (d'après l'Idée 4.5.9).

Or, soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'homéomorphisme qui envoie (x, y) sur $(x, y + 1)$. Cet homéomorphisme n'a pas de point fixes mais son nombre de Lefschetz combinatoire est 1. Ceci est conséquence du fait suivant. L'homéomorphisme $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2)^\infty = S^2 \rightarrow S^2$ est homotope à l'identité et donc $A(\tilde{f}, S^2) = \chi(S^2) = 2$. D'autre part, l'additivité du nombre combinatoire implique

$$2 = A(\tilde{f}, S^2) = A_{\text{comb}}(f, \mathbb{R}^2) + 1.$$

et ainsi $A_{\text{comb}}(f, \mathbb{R}^2) = 1$. □

Conclusions Générales

Les objectifs de cette thèse ont été réalisés dans leur totalité.

Au Chapitre 1, on définit le nombre de Lefschetz combinatoire. Dans ce chapitre, on a aussi démontré que cet opérateur est additif. Par ailleurs, un théorème du point fixe pour des espaces définissables et f -invariants inclus dans un complexe simplicial fini a été prouvé. Ce nouveau théorème généralise le théorème classique du point fixe de Lefschetz et le théorème de point fixe du nombre de Lefschetz relatif [11].

Au Chapitre 2, on établit l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire. Les idées dans la démonstration de cette propriété ont permis d'étendre le nombre de Lefschetz combinatoire aux applications ouvertes.

Dans le Chapitre 3, on a défini une intégration par rapport au nombre de Lefschetz combinatoire d'applications ouvertes. On a aussi obtenu quelques bons résultats pour le nombre de Lefschetz faisceau-théorique et une intégration par rapport à l'indice de point fixe a aussi été présentée. Finalement, on a construit une intégration par rapport à l'indice de point fixe pour des fonctions réelles.

Le Chapitre 4 présente de nombreuses applications du nombre de Lefschetz combinatoire. D'abord, dans la Section 4.1, trois nouveaux ensembles d'axiomes ont été énoncés : un pour le nombre de Lefschetz combinatoire, un autre pour le nombre de Lefschetz faisceau-théorique et le dernier pour le nombre de Lefschetz d'homéomorphismes de complexes simpliciaux. Ensuite, dans la Section 4.2, on a montré une méthode pour optimiser le calcul du nombre de Lefschetz de certaines applications ouvertes grâce au nombre de Lefschetz combinatoire. Plusieurs exemples ont été aussi donnés. Dans la Section 4.3, on a généralisé le théorème d'invariance topologique de l'indice de point fixe d'O'Neill. Ensuite, quelques applications pratiques de comptage d'objets avec des capteurs ont été données. Finalement, la Section 4.4 présente plusieurs théorèmes du point fixe de Lefschetz pour des espaces non bornés qui constituent l'application principale de cette thèse. Des problèmes ouverts qui permettront d'augmenter la puissance des théorèmes qui suivent l'Idée 4.5.9 composent la sous-section finale de ce mémoire.

Bibliographie

- [1] T. Adamski, W. El Ouadghiri, Géométrie o-minimale, Lecture dirigée de L3, École Normale Supérieure de Rennes (2023). https://tadamski.pages.math.cnrs.fr/ecrits/Geometrie_o-minimale.pdf
- [2] J. A Álvarez López, A. O. Majadas-Moure, On the Lefschetz number of homeomorphisms and open maps, Preprint (2026), Arxiv : 2601.11370.
- [3] J. A Álvarez López, A. O. Majadas-Moure, D. Mosquera-Lois, A combinatorial study of the fixed point index, Preprint (2025), Arxiv :2505.24530.
- [4] M. Arkowitz, R. F. Brown, The Lefschetz-Hopf theorem and axioms for the Lefschetz number, *J. Fixed Point Theory Appl.* **1** (2004) 1–11.
- [5] M. Atiyah, R. Boot, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. I, *Ann. Math.* **86** (2) (1967) 374–407.
- [6] M. Atiyah, R. Boot, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II : Applications, *Ann. Math.* **88** (2) (1968) 451–491.
- [7] Y. Baryshnikov, R. Grhist, Tarjet enumeration via Euler characteristic integrals, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **70** (3) (2009) 825–844.
- [8] Y. Baryshnikov, R. Grhist, Euler integration over definable functions, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **21** (107) (2010) 9525–9530.
- [9] T. Beke, Topological invariance of the combinatorial Euler characteristic of tame spaces, *Homology, Homotopy and Applications* **13** (2) (2011) 165–174.
- [10] W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Teubner **1**, 1936.
- [11] C. Bowszyc, Fixed point theorems for pairs of spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.* **16** (1968) 845–850.
- [12] R. S. Brooks, R. F. Brown, J. Pak, D. H. Taylor, Nielsen numbers of maps of tori, *Proc. Am. Math. Soc.* **52** (1975) 398–400.

- [13] F. E. Browder, On the fixed point index for continuous mappings of locally connected spaces, *Summa Brasil. Math* **4** (1960) 253–293.
- [14] F. E. Browder, Fixed point theorems on infinite dimensional manifolds, *Trans. Am. Math. Soc.* **119** (1965) 179–194.
- [15] F. E. Browder Asymptotic fixed point theorems, *Math. Ann.* **185** (1970) 38–60.
- [16] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott, Foresman and Company, 1971.
- [17] R. F. Brown, On some old problems of fixed point theory, *Rocky Mt. J. Math.* **4** (1) (1974) 3–14.
- [18] R. Cauty, Le théorème de Lefschetz-Hopf pour les applications compactes des espaces ULC, *J. Fixed Point Theory Appl.* **1** (1) (2007) 123–134.
- [19] R. Cauty, Un Théorème de Lefschetz-Hopf pour les fonctions à itérées compactes, *J. Reine Angew. Math.* **729** (2017) 1–27.
- [20] A. Connes, Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function, *Sel. Math., New Ser.* **5** (1) (1999) 29–106.
- [21] J. Curry, R. Ghrist, M. Robinson, Euler calculus with applications to signals and sensing, in : *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **70** 2012, 75–146.
- [22] A. Deleanu, Théorie des points fixes. Commutativité de l'indice total, *Bull. Soc. Math. Fr.* **91** (1963) 285–288.
- [23] P. Deligne, La conjecture de Weil. I, *Publ. Math., Inst. hautes Étud. Sci* **43** (1973) 273–307.
- [24] A. Dimca, *Sheaves in Topology*, Springer, 2004.
- [25] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1972.
- [26] E. Fadell, G. Fournier, Open problems, in : *Fixed Point Theory, Lectures Notes in Mathematics*, Springer **886**, 1981.
- [27] J. Fells, G. Fournier, La théorie des points fixes des applications à itérée condensante, *Bull. Soc. Math. Fr. Suppl. Mém.* **46** (1976) 91–120.
- [28] M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, *J. Differ. Geom.* **17** (1982) 357–453.
- [29] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, Hermann & Cie, 1959.

Références

- [30] D. L. Gonçalves, M. R. Kelly, Index bounds for maps defined on a wedge of surfaces, *JP Journal of Geometry and Topology* **21** (3) (2018) 255–264.
- [31] D. L. Gonçalves, P. C. Staecker, Axioms for the coincidence index of maps between manifolds of the same dimension, *Topology Appl.* **159** (18) (2012) 3760–3776.
- [32] D. L. Gonçalves, J. Weber, Axioms for the equivariant Lefschetz number and for the Reidemeister trace, *J. Fixed Point Theory Appl.* **2** (1) (2007) 55–72.
- [33] L. Górniewicz, On the Lefschetz Fixed Point Theorem, in : *Handbook of Topological Fixed Point Theory*, Springer, 2005, pp. 43–82.
- [34] A. Granas, Generalizing the Hopf-Lefschetz fixed point theorem for non-compact ANRs, in : *Symp. Inf. Dim Topol. Baton-Rouge 1967*, *Ann. Math. Studies*, **69**, 1972, 119–130.
- [35] A. Grothendieck, Sur quelques points d’algèbre homologique, *Tohoku Math. J.* **9** (2) (1957) 119–221.
- [36] A. Grothendieck et al., Séminaire de Géométrie Algébrique, SGA5, *Lecture Notes in Math.*, **589**, Springer, 1977.
- [37] L. Hainaut, Some computations of compact support cohomology of configuration spaces, Ph.D. thesis, Stockholm University, Stockholm (2022). <https://su.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1653463&dswid=-8329>.
- [38] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.
- [39] H. Hopf, Über die algebraische anzahl von fixpunkten, *Math. Z.* **29** (1929) 493–524.
- [40] B. Iversen, *Cohomology of Sheaves*, Springer-Verlag, 1986.
- [41] B. Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, *Contemporary Mathematics*, American Mathematical Society **14** (1983) 110 pp.
- [42] B. Jiang, Bounds for fixed points on surfaces, *Math. Ann.* **311** (1998) 467–479.
- [43] B. Jiang, S. Wang, Q. Zhang, Bounds for fixed points and fixed subgroups on surfaces and graphs, *Algebr. Geom. Topol.* **11** (4) (2011) 2297–2318.
- [44] M. Kashiwara, Index theorem for maximally overdetermined systems of linear differential equations, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **49** (10) (1973) 803–804.
- [45] M. R. Kelly, A bound on the fixed-point index for surface mappings, *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **17** (6) (1997) 1393–1408.

- [46] P. Le Calvez, Une propriété dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe d'indice >1 , *Topology* **38** (1) (1999) 23–35.
- [47] P. Le Calvez, Dynamique des homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **36** (4) (2003) 139–171.
- [48] P. Le Calvez, Pourquoi les points périodiques des homéomorphismes du plan tournent-ils autour de certains points fixes ?, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **41** (4) (2008) 141–176.
- [49] P. Le Calvez, J-C. Yoccoz, Un théorème d'indice pour les homéomorphismes du plan au voisinage d'un point fixe, *Ann. Math.* **146** (2) (1997) 241–293.
- [50] J. Leray, Sur les équations et les transformations, *J. Pures et appl.* **24** (1945) 201–248.
- [51] J. Leray, Théorie des point fixes : Indice total et nombre de Lefschetz, *Bull. Soc. Math. Fr.* **87** (1959) 221–233.
- [52] F. Le Roux, Homéomorphismes de surfaces : théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable, *Astérisque* **292** (2004) 210 pp.
- [53] F. Le Roux, Un indice qui affine l'indice de Poincaré-Lefschetz pour les homéomorphismes de surfaces, *Ann. Math.* **171** (2) (2010) 1531–1589.
- [54] A. O. Majadas-Moure, D. Mosquera-Lois, Sheaf theoretic approach to Lefschetz calculus, Preprint (2024), Arxiv :2410.13653.
- [55] A. O. Majadas-Moure, D. Mosquera-Lois, Integration with respect to the Lefschetz number, *J. Fixed Point theory Appl.* **27** (2) (2025) 51–23 pp.
- [56] S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag, 1963.
- [57] R. MacPherson, Chern classes for singular algebraic varieties, *Ann. of Math.* **100** (1974) 423–432.
- [58] J. Mallet-Paret, R. D. Nussbaum, Asymptotic fixed point theory and the beer barrel theorem, *J. Fixed Point Theory Appl.* **4** (2) (2008) 203–245.
- [59] C. McCrory, A. Parusinski, Algebraically constructible functions, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **30** (4) (1997) 527–552.
- [60] J. W. Milnor, Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, *Ann. Math.* **74** (2) (1961) 575–590.
- [61] J. R. Munkres *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.
- [62] R. D. Nussbaum, Asymptotic fixed point theorems for local condensing maps, *Math. Ann.* **191** (1971) 181–195.

Références

- [63] R. D. Nussbaum, Some asymptotic fixed point theorems, *Trans. Am. Math. Soc.* **171** (1971) 349–375.
- [64] R. D. Nussbaum, Generalizing the fixed point index, *Math. Ann.* **228** (1979) 259–278.
- [65] B. O’Neill, Essential sets and fixed point, *Amer. J. Math.* **75** (1953) 297–509.
- [66] H. Putz, Triangulation of Fibre Bundles, *Canadian Journal of Mathematics*, **19** (1967) 499–513.
- [67] P. Schapira, Operations on constructible functions, *J. Pure Appl. Algebra*, **72** (1991) 83–93.
- [68] A. Shaviv, Tempered distributions and Schwartz functions on definable manifolds, *J. Funct. Anal.* **278** (11) (2022) 108471.
- [69] P. C. Staecker, Axioms for a local Reidemeister trace in fixed point and coincidence theory on differentiable manifolds, *J. Fixed Point Theory Appl.* **5** (2) (2009) 237–247.
- [70] P. C. Staecker, Axioms for the fixed point index of n -valued maps, and some applications, *J. Fixed Point Theory Appl.* **20** (2) (2018) 61 pp.12.
- [71] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, Cambridge University Press, 1975.
- [72] T. tom Dieck, *Algebraic Topology*, EMS Textbooks in mathematics, 2008.
- [73] A. J. Tromba, A general asymptotic fixed point theorem, *J. Reine. Angew. Math.* **332** (1982) 118–125.
- [74] L. P. D. van den Dries, *Tame Topology and O-minimal Structures*, Cambridge University Press, 2009.
- [75] C. T. C. Wall, Arithmetic invariants of subdivision of complexes, *Can. J. Math.* **18** (1966) 92–96.
- [76] C. E. Watts, On the Euler characteristics of polyhedra, *Proc. Am. Math. Soc.* **13** (1962) 304–306.
- [77] Q. Zhang, X. Zhao, Aspherical manifolds which do not have bounded index property, *Topology Appl.* **341** (2024) Article no. 108757 8 pp.

Politique de réutilisation de l'éditeur

[55] A. O. Majadas-Moure, David Mosquera-Lois. *Integration with respect to the Lefschetz number*. *J. Fixed Point Theory Appl.* **27** (2) (2025), 51 23 pp.

Springer autorise à l'auteur de réutiliser son travail publié dans ses propres nouveaux travaux, tel que l'apparition de l'article dans sa thèse de doctorat :

Integration with respect to the Lefschetz number	
SPRINGER NATURE	Author: Alejandro O. Majadas-Moure et al Publication: Journal of Fixed Point Theory and Applications Publisher: Springer Nature Date: May 17, 2025 <small>Copyright © 2025. The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature Switzerland AG</small>
License Number	6152110805607 Printable Details
License date	Nov 18, 2025
Licensed Content	Order Details
Licensed Content Publisher	Type of Use
Licensed Content Publication	Requestor Type
Licensed Content Title	Format
Licensed Content Author	Portion
Licensed Content Date	Will you be translating?
	Number of languages
	Circulation/distribution
	Author of this Springer Nature content
About Your Work	Additional Data
Title of new work	The Requesting Person / Organization to Appear on the License
Institution name	Specific Languages
Expected presentation date	
Requestor Location	Tax Details

See this url



Le nombre de Lefschetz est un invariant topologique fondamental dans la théorie des points fixes. Cependant il présente quelques limitations.

Dans cette thèse, on définit le nombre de Lefschetz combinatoire, une généralisation du nombre de Lefschetz qui permettra d'avoir des théorèmes de point fixe même dans des espaces qui ne sont pas compacts (en particulier, on obtient quelques bons résultats avec des espaces réels non bornés sans imposer aux applications des hypothèses de compacité). En plus, l'invariance topologique du nombre de Lefschetz combinatoire (laquelle on démontre aussi dans cette thèse) permet de simplifier notamment les calculs du nombre de Lefschetz classique.