Lucía Búa Devesa

FORMULACIÓN LAGRANGIANA: SIMETRÍAS Y REDUCCIÓN

Universidade de Santiago de Compostela

Departamento de Xeometría e Topoloxía

FORMULACIÓN LAGRANGIANA:

SIMETRÍAS Y REDUCCIÓN

Lucía Búa Devesa

Memoria realizada en el Departamento de Xeometría e Topoloxía de la Facultad de Matemáticas, bajo la dirección del Profesor Dr. Modesto R. Salgado Seco, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Santiago de Compostela.

Autorización do director da tese

Don Modesto R. Salgado Seco, profesor do departamento de Xeometría e Topoloxía, como Director da Tese de Doutoramento titulada **“Formulación lagrangiana: simetrías y reducción”** presentada por Dna. Lucía Búa Devesa, alumna do Programa de Doutoramento en Matemáticas - D1071V01.

Autoriza a presentación da tese indicada, considerando que reúne os requisitos esixidos no artigo 34 do regulamento de Estudos de Doutoramento, e que como Director da mesma non incurre nas causas de abstención establecidas na lei 30/1992.

O Director: A alumna:

Modesto R. Salgado Seco Lucía Búa Devesa

A mi hermana.

Agradecimientos

Con la redacción de esta memoria cierro una etapa muy importante en mi vida, una etapa en la que he estado rodeada de muchas personas, que de una u otra manera, me han facilitado la realización de mi cometido.

En primer lugar quisiera agradecer al Prof. Modesto R. Salgado Seco, no sólo por aceptarme para realizar esta tesis doctoral bajo su dirección, sino por su entrega, su dedicación y su comprensión en el transcurso de estos años. Él ha sido quien me ha guiado a lo largo de los temas tratados en esta memoria y su trabajo el punto de apoyo en todo momento. Sin su ayuda, sin duda, todo esto no habría sido posible. GRACIAS.

Quisiera también agradecer a los profesores Ioan Bucataru de la Universidad Alexandru Ioan Cuza y Tom Mestdag de la Universidad de Ghent por su activa colaboración en diversos temas tratados en esta memoria, sobre todo por su predisposición y ayuda.

Me gustaría extender este agradecimiento a los profesores Manuel de León y Silvia Vilariño por su contribución en uno de los trabajos incluídos en esta memoria.

Al departamento de Xeometría e Topoloxía de la Universidad de Santiago de Compostela por su acogida y el excelente ambiente de trabajo.

Por brindarme la oportunidad de presentar mis trabajos en diversos encuentros, y hacer que estos sean en un ambiente profesional y familiar a la vez, quiero dar las gracias a todos y cada uno de los miembros de la red de “Geometría, Mecánica y Control”.

Quiero dar las gracias especialmente al Prof. Antonio G. Tato y a todo su equipo, por permitirme compatibilizar la elaboración de esta tesis con el trabajo diario. Las facilidades y ánimo que me aportan ha sido un gran respaldo. Sin duda, trabajar en más de un área de las matemáticas ha sido muy enriquecedor personal y profesinalmente.

A mis compañeros de despacho, Antón, Cris y Xabi, y mis compañeros “adoptivos”, ya que ellos han sido un apoyo esencial para alcanzar el final de este largo camino, y se han convertido en imprescindibles según ha ido pasando el tiempo.

A mis amigos, los de toda la vida y los que he ido conociendo a lo largo de estos años, ellos han sido los que han celebrado conmigo triunfos y compartido buenos momentos, pero también me han animado y llenado de energía en los malos.

A la persona que más ha sacrificado durante este tiempo, Fran, él ha sufrido y celebrado de esta etapa a partes iguales. Por su comprensión, paciencia y cariño, dándome ánimos y valor para seguir adelante.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional a cambio de nada. En especial a mis padres por confiar siempre en mi y educarme en una vida llena valores; y a mi hermana, por enseñarme a luchar por mis objetivos y por ser mi ejemplo a seguir, por eso a ella le dedico esta tesis.

"Un matemático ha dicho que el placer no está en descubrir la verdad sino en el esfuerzo de buscarla."

Lev Tolstói

Índice general

Introducción

El marco geométrico para la formulación de las ecuaciones de Hamilton y de Euler-Lagrange, de la Mecánica Clásica, son las variedades simpléctica y cosimpléctica.

Existen varias alternativas para la descripción geométrica de las ecuaciones de campo (Hamilton y Euler-Lagrange) de la Teoría Clásica de Campos. Estas se conocen como formalismo polisimpléctico, k-simpléctico, k-cosimpléctico, y multisimpléctico.

Los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctico son una generalización de los formalismos simpléctico y cosimpléctico, y describen las ecuaciones de campo autónomas y no-autónomas, respectivamente. Estos formalismos fueron introducidos por de León et al. [64, 65, 67, 80, 81].

Una de las ventajas de utilizar estos formalismos, k-simpléctico y k-cosimpléctico, es que para desarrollarlos solamente es necesario el fibrado tangente y cotangente de una variedad.

Un enfoque diferente a los anteriores son el formalismo polisimpléctico desarrollado por Kanatchikov [46], y el formalismo polisimpléctico desarrollado por Giachetta, Mangiarotti y Sardanashvily en [34, 35, 95].

Una alternativa para derivar las ecuaciones de campo es utilizar el llamado formalismo multisimpléctico, desarrollado por la escuela de Tulczyjew en Warsaw (véase [47, 48, 49, 99]), e independientemente por García y Pérez-Rendón [31, 32] y Goldschmidt y Sternberg [36]. Esta aproximación fue revisada por Gotay et al. [37, 38, 39, 40] y más recientemente por Cantrijn et al. [11, 12]. La relación entre los formalismos k-simpléctico, k-cosimpléctico y multisimpléctico fue estudiada en [67, 90].

Los principales objetivos de esta memoria son los siguientes:

i) Ampliar el estudio de simetrías en el formalismo k-simpléctico lagrangiano.

ii) Mostrar que tanto el proceso de reducción como el de reconstrucción funcionan en el contexto de la formulación k-simpléctica lagrangiana.

iii) Establecer una nueva formulación lagrangiana de la Teoría Clásica de Campos, considerando una fibración sobre un espacio euclídeo $\mathbb{R}^k$.

iv) Introducir y estudiar las simetrías generalizadas, teniendo como marco la formulación lagrangiana que hemos desarrollado.

v) Desarrollar una introducción al estudio de derivaciones a lo largo de aplicaciones con el fin de abordar el problema inverso.

El esquema general de esta memoria es el siguiente:

- **Capítulo 1: Formalismo k-simpléctico lagrangiano**
  En este capítulo recordamos la formulación k-simpléctica de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange, véase [67, 80].

- **Capítulo 2: Simetrías y leyes de conservación**
  Una simetría de una ecuación en derivadas parciales es un difeomorfismo que transforma soluciones de la ecuación en soluciones de la misma ecuación.

  En este capítulo se estudiarán simetrías y leyes de conservación para lagrangianos definidos en $T^1_kQ = TQ \oplus \stackrel{k}{\dots} \oplus TQ$. Se hace una demostración (global) del Teorema de Noether, localmente demostrado en [92], y se establece una condición necesaria para que el recíproco de dicho teorema se verifique.

  Se introducen los campos de vectores Newtonoides en el marco del formalismo k-simpléctico. Eel caso $k = 1$ dichos campos aparecen en [69].

  Finalmente, se estudia la relación entre las simetrías de Cartan, los campos de vectores Newtonoides, las simetrías dinámicas y leyes de conservación.

  Los contenidos de este capítulo están recogidos en [7], trabajo realizado en colaboración con los Profesores Ioan Bucatatru y Modesto Salgado.

- **Capítulo 3: Campos de k-vectores invariantes**
  En este capítulo se considera la acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M. Se establecen condiciones sobre la integrabilidad de los campos de k-vectores G-invariantes en M.

Se demuestra que la integrabilidad de dicho campo equivale a la integrabilidad del correspondiente campo de k-vectores reducido en M/G, y a la anulación de la curvatura de cierta conexión asociada a dicho campo.

- **Capítulo 4: Reducción de un campo de k-vectores lagrangiano**
  En este capítulo se demostrará que si el lagrangiano es una función invariante, entonces sus SOPDEs lagrangianos, soluciones de las ecuaciones de campo, también son invariantes.

  En este caso, describimos la expresión local del SOPDE lagrangiano reducido, y obtenemos las ecuaciones locales de sus secciones integrales, es decir las ecuaciones de Lagrange-Poincaré.

  Finalmente caracterizamos la integrabilidad de un SOPDE lagrangiano, utilizando los resultados relativos a la integrabilidad descritos en el Capítulo 3.

- **Capítulo 5: k-conexiones y reconstrucción**
  Recordemos que una conexión en un fibrado $M \to N$ nos proporciona una descomposición del fibrado tangente TM en suma directa de un subfibrado horizontal y el subfibrado vertical.

  Una k-conexión en el mismo fibrado nos proporciona una descomposición del fibrado k-tangente T^1_kM en suma de un subfibrado horizontal y el subfibrado vertical.

  Cuando $N = M/G$, siendo G un grupo de Lie, se introduce el concepto de k-conexión principal. A partir de una k-conexión principal en $M \to M/G$ establecemos unas condiciones que nos permiten obtener una sección integral de un campo de k-vectores G-invariante en la variedad M a partir de una sección integral del campo de k-vectores reducido en M/G.

  Finalmente se define una k-conexión principal en el fibrado $T^1_kQ \to T^1_kQ/G$, que llamaremos k-conexión mecánica, puesto que es similar a la llamada conexión mecánica que aparece en [78].

  Bajo ciertas condiciones de regularidad en el lagrangiano, utilizaremos esta k-conexión para obtener secciones integrales de un SOPDE lagrangiano a partir de las secciones integrales del SOPDE lagrangiano reducido.

  Los contenidos de los capítulos 3, 4 y 5 están recogidos en [8], trabajo realizado en colaboración con los Profesores Tom Mestdag y Modesto Salgado.

- **Capítulo 6: Fibrados de jets**
  En este capítulo comenzamos recordando el concepto de sección de un fibrado a lo largo de una aplicación y de derivaciones a lo largo de aplicaciones.

En lo que resta de la memoria consideramos un fibrado $\pi : E \to \mathbb{R}^k$. Después de describir los fibrados de jets de primer y segundo orden $J^1\pi$ y $J^2\pi$, respectivamente, introduciremos los campos de vectores canónicos $T_\alpha^{(0)}$ a lo largo de $\pi_{1,0} : J^1\pi \to E$, y los campos de vectores canónicos $T_\alpha^{(1)}$ a lo largo de $\pi_{2,1} : J^2\pi \to J^1\pi$. Estos campos serán fundamentales para caracterizar los SOPDEs y las simetrías generalizadas.

Siguiendo a Saunders [98], recordamos la prolongación *natural* de campos de vectores X en E a campos de vectores X^1 en $J^1\pi$, y la prolongación de campos de vectores X, a lo largo de $\pi_{1,0}$, a campos de vectores $X^{(1)}$ a lo largo de $\pi_{2,1}$. Estos campos se utilizarán para introducir las simetrías generalizadas.

De nuevo, siguiendo a Saunders [98], asociamos a cada 1-forma dt^α en $\mathbb{R}^k$ el tensor S_{dt^α}, en $J^1\pi$, de tipo $(1,1)$, donde $1 \leq \alpha \leq k$. *La existencia de estos tensores es fundamental, pues nos permitirán introducir las formas de Poincaré-Cartan en el capítulo siguiente.*

Terminamos el capítulo introduciendo los SOPDEs en $J^1\pi$, que son campos de k-vectores cuyas secciones integrales son primeras prolongaciones $j^1\phi$ de secciones ϕ de π. Estos campos son una generalización de los SODEs.

- **Capítulo 7: Formalismo lagrangiano en fibrado de jets.**
En este capítulo se desarrolla el nuevo formalismo lagrangiano para un lagrangiano $L : J^1\pi \to \mathbb{R}$. Después de definir las formas de Poincarè-Cartan

$$\Theta_L^\alpha = dL \circ S_{dt^\alpha}, \quad \Omega_L^\alpha = -d\Theta_L^\alpha \quad 1 \leq \alpha \leq k,$$

establecemos las ecuaciones geométricas de este nuevo formalismo

$$dt^\alpha(X_\beta) = \delta_\beta^\alpha \quad , \quad i_{X_\alpha}\Omega_L^\alpha = (k-1)dL,$$

donde la solución es un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ en $J^1\pi$. Si L es regular entonces $\mathbf{X}$ es un SOPDE, y si además $\mathbf{X}$ es integrable, entonces sus soluciones ϕ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Este nuevo formalismo tiene como caso particular la formulación geométrica cosimpléctica de la Mecánica de Lagrange dependiente del tiempo, [13, 17, 25, 66], y está relacionada con las formulaciones k-cosimpléctica [65] y multisimpléctica.

Observemos que, aunque todo fibrado sobre $\mathbb{R}^k$ es un fibrado trivial, ya que $\mathbb{R}^k$ es contráctil (Steenrod 1951 [100]), no se utiliza este hecho para desarrollar nuestra formulación lagrangiana.

Después de estudiar la relación entre este nuevo formalismo y el formalismo k-cosimpléctico, se finaliza el capítulo presentando una nueva descripción geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange, en la que se utilizan los campos canónicos $T_\alpha^{(0)}$ y $T_\alpha^{(1)}$, introducidos en el capítulo anterior y una generalización de las f-derivaciones introducidas por Tulczyjew en [102, 103].

- **Capítulo 8: Simetrías y leyes de conservación**
  En este capítulo se caracterizan, en primer lugar, las leyes de conservación en términos de los campos de k-vectores lagrangianos.

  A continuación, se introducen las simetrías generalizadas a las que se asocia una ley de conservación (Teorema de Noether). Para la Mecánica dependiente del tiempo este estudio se encuentra en J.F. Cariñena et al. [16].

  Finalmente, se estudia la relación de las simetrías generalizadas con las simetrías variacionales, introducida por Olver en [86]; y con las simetrías de Noether, introducidas en [70] cuando consideramos que E es un fibrado trivial.

  Los contenidos de los capítulos 6, 7 y 8 están recogidos en [6], trabajo realizado en colaboración con los Profesores Ioan Bucataru, Manuel de León, Modesto Salgado y Silvia Vilariño.

- **Capítulo 9: Derivaciones: una introducción al problema inverso**
  En este capítulo se realiza un primer acercamiento al estudio del problema inverso en Teoría Clásica de Campos, es decir, partiendo de un SOPDE arbitrario, se pretenden establecer las condiciones necesarias bajo las cuales existe un lagrangiano que determina dicho SOPDE.

  De manera análoga a [96], cuyo punto de partida fue [73, 74], en este capítulo se describen las conexiones no lineales asociadas a un SOPDE, y se estudian prolongaciones de campos de vectores, 1-formas y derivaciones a lo largo de la proyección $\pi_{1,0}\colon J^1\pi \to E$, que serán necesarias para establecer un primer resultado en relación con el problema inverso.

Obsérvese que todos los temas tratados en esta memoria se centran en el estudio de diversos aspectos de la formulación lagrangiana de la Teoría Clásica de Campos.

Parte I

Teoría k-simpléctica lagrangiana

Capítulo 1

Formalismo k-simpléctico lagrangiano

La finalidad de este primer capítulo es revisar la formulación k-simpléctica lagrangiana de las Teorías Clásicas de Campos de primer orden, véase [67, 76, 80, 92, 105].

1.1. Elementos geométricos

1.1.1. El fibrado tangente de las k^1-velocidades

Sea Q una variedad diferenciable de dimensión n y sea $\tau_Q \colon TQ \to Q$ el fibrado tangente de la variedad Q. Denotemos por T^1_kQ la suma de Whitney de k copias del fibrado tangente TQ de Q, esto es,

$$T^1_kQ = TQ \oplus \overset{k}{\ldots} \oplus TQ\,.$$

Los elementos de T^1_kQ son k-tuplas

$$(u_{1_q}, \ldots, u_{k_q})$$

de vectores tangentes en el mismo punto $q \in Q$.

Se denotará por τ_Q^k la proyección canónica

$$\begin{array}{rccc} \tau_Q^k & : & T_k^1Q & \longrightarrow & Q \\ & & (u_{1_q},\dots,u_{k_q}) & \mapsto & q \end{array}$$

y por $\tau_Q^{k,\alpha}$ la proyección

$$\begin{array}{rccc} \tau_Q^{k,\alpha} & : & T_k^1Q & \longrightarrow & TQ \\ & & (u_{1_q},\dots,u_{k_q}) & \mapsto & u_{\alpha_q} \end{array}$$

en la α-ésima copia TQ de T_k^1Q, para todo $\alpha = 1,\dots,k$.

Si (q^A) son coordenadas locales en $U \subseteq Q$ entonces las coordenadas locales inducidas en $T_k^1U = \tau_Q^{-1}(U)$ se denotan por

$$(q^A, u_\alpha^A)$$

donde $1 \leq A \leq n$, $1 \leq \alpha \leq k$, y están definidas por

$$q^A(u_{1_q},\dots,u_{k_q}) = q^A(q)\,,\quad u_\alpha^A(u_{1_q},\dots,u_{k_q}) = u_{\alpha_q}(q^A) = dq^A(q)(u_{\alpha_q})$$

donde $(u_{1_q},\dots,u_{k_q}) \in T_k^1Q$, es decir

$$u_{\alpha_q} = u_\alpha^A \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_q .$$

Estas coordenadas canónicas dotan a T_k^1Q de una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n(k+1)$.

A lo largo de esta memoria se utilizarán letras en negrita $\mathbf{u}_q$ para denotar elementos $(u_{1_q},\dots,u_{k_q})$ en T_k^1Q, y se asumirá implicitamente la suma en índices repetidos covariantes y contravariantes $A, B, C, ... \in \{1, ..., n\}$, así como la suma sobre índices griegos repetidos $\alpha, \beta, ... \in \{1, ..., k\}$.

Observación 1.1 Esta variedad T_k^1Q es difeomorfa a la variedad $J_0^1(\mathbb{R}^k, Q)$ de las k^1-velocidades de Q; esto es, la variedad de 1-jets $j^1_{0,q}\sigma$ en $0 \in \mathbb{R}^k$ de aplicaciones $\sigma \colon U_0 \subset \mathbb{R}^k \to Q$, donde U_0 es un abierto que contiene al $0 \in \mathbb{R}^k$.

El difeomorfismo que identifica estas dos variedades es

$$\begin{array}{ccc} J_0^1(\mathbb{R}^k, Q) & \equiv & T_k^1Q \\ j^1_{0,q}\sigma & \equiv & (u_{1_q},\dots,u_{k_q}) \end{array}$$

donde

$$q = \sigma(0) \quad \text{y} \quad u_{\alpha_q} = \sigma_*(0)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_0\right) \;\; 1 \leq \alpha \leq k.$$

1.1.2. Levantamientos de aplicaciones y campos de vectores

Levantamiento de aplicaciones

Definición 1.2 *Sea $h\colon Q \to Q$ una aplicación diferenciable, entonces la primera prolongación de h a T^1_kQ es la aplicación*

$$T^1_k h : T^1_kQ \to T^1_kQ$$

definida por

$$T^1_k h(u_{1_q}, \dots, u_{k_q}) = (h_*(q)(u_{1_q}), \dots, h_*(q)(u_{k_q})),$$

para todo k-vector $(u_{1_q}, \dots, u_{k_q}) \in T^1_kQ$, $q \in Q$.

En términos de jets, esto significa que $T^1_k h(j^1_0\sigma) = j^1_0(h \circ \sigma)$.

Levantamientos verticales

La *distribución vertical* es la distribución de dimensión kn en T^1_kQ dada por

$$V = \operatorname{Ker} T\tau^k_Q$$

y generada localmente por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\,,\ 1 \le A \le n,\ 1 \le \alpha \le k \right\}.$$

Sea $X_q \in T_qQ$ un vector tangente a Q. Para cada $\alpha = 1, \dots, k$, se define su **levantamiento vertical α-ésimo**, $(X_q)^{V_\alpha}$, como el campo de vectores en la fibra $(\tau^k_Q)^{-1}(q) \subset T^1_kQ$ definido por

$$(X_q)^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q) = \frac{d}{ds}(v_{1q}, \dots, v_{\alpha-1q}, v_{\alpha q} + sX_q, v_{\alpha+1q}, \dots, v_{kq})\Big|_{s=0} \tag{1.1}$$

para todo punto $\mathbf{v}_q = (v_{1q}, \dots, v_{kq}) \in (\tau^k_Q)^{-1}(q) \subset T^1_kQ$.

Si $X_q = X^A \dfrac{\partial}{\partial q^A}\Big|_q$ entonces

$$(X_q)^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q) = X^A \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\Big|_{\mathbf{v}_q}. \tag{1.2}$$

El levantamiento vertical de vectores induce el levantamiento vertical de campos de vectores.

Sea X un campo de vectores en Q. Se llama **levantamiento vertical α-ésimo** de X a T^1_kQ al campo de vectores $X^{V_\alpha} \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ definido como sigue

$$X^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q) = (X(q))^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q) \quad 1 \leq \alpha \leq k\,, \tag{1.3}$$

para todo elemento $\mathbf{v}_q = (v_{1q}, \ldots, v_{kq}) \in T^1_kQ$.

En un sistema de coordenadas canónicas, si $X = X^A \dfrac{\partial}{\partial q^A}$ entonces de (1.2) se deduce que

$$X^{V_\alpha} = (X^A \circ \tau^k_Q) \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\,. \tag{1.4}$$

Levantamiento completo

Si X es un campo de vectores en Q, con grupo local 1-paramétrico de transformaciones locales $\{h_s\}$, entonces el grupo local 1-paramétrico de transformaciones locales $\{T^1_kh_s\}$ genera un campo de vectores X^C en T^1_kQ, el cual se llama *levantamiento completo* de X a T^1_kQ.

Si localmente

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A}\,,$$

entonces el levantamiento completo tiene la siguiente expresión en coordenadas locales

$$X^C = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + u^A_\alpha \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \frac{\partial}{\partial u^B_\alpha}. \tag{1.5}$$

De la expresión anterior se obtiene

$$(fX)^C = (f \circ \tau^k_Q)\, X^C + f_\beta\, X^{V_\beta} \tag{1.6}$$

donde la función $f_\beta \colon T^1_kQ \to \mathbb{R}$ está definida por

$$f_\beta(\mathbf{u}_q) = u_{\beta_q}(f) \in \mathbb{R}\,,$$

para cada $\mathbf{u}_q = (u_{1_q}, \ldots, u_{k_q})$ y $\beta = 1, \ldots, k$.

Se pueden demostrar las siguientes propiedades para corchetes de levantamientos completos y verticales, véase [79],

$$[X^C, Y^C] = [X, Y]^C, \quad [X^C, Y^{V_\alpha}] = [X, Y]^{V_\alpha}, \quad [X^{V_\alpha}, X^{V_\beta}] = 0. \tag{1.7}$$

Estas fórmulas extienden las propiedades del corchete de Lie para levantamientos verticales y completos de campos de vectores a TQ, vése [106].

Estructura k-tangente canónica

Los levantamientos verticales permiten introducir la generalización de la estructura tangente canónica del fibrado tangente.

La *estructura k-tangente canónica* en T^1_kQ es el conjunto $(J^1, \ldots, J^k)$ de campos de tensores de tipo $(1,1)$ en T^1_kQ definido por

$$J^\alpha(\mathbf{v}_q)(Z_{\mathbf{v}_q}) = ((\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)(Z_{\mathbf{v}_q}))^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q)\,, \tag{1.8}$$

donde $\mathbf{v}_q \in T^1_kQ$ y $Z_{\mathbf{v}_q} \in T_{\mathbf{v}_q}(T^1_kQ)$, véase [62, 67].

Alternativamente se puede definir J^α, por su acción en los levantamientos vertical y completo de campos de vectores. J^α es el único campo de tensores de tipo (1,1) en T^1_kQ para el cual $J^\alpha(X^C) = X^{V_\alpha}$ y $J^\alpha(X^{V_\beta}) = 0$. Su expresión local es

$$J^\alpha = \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} \otimes \mathrm{d}q^A, \quad \alpha \in \{1, ..., k\}\,, \tag{1.9}$$

lo cual se deduce de (1.2) y (1.8).

Para el caso $k = 1$, J^1 es la bien conocida estructura canónica tangente del fibrado tangente.

Campo de vectores de Liouville

Definición 1.3 *El campo de vectores de Liouville $\Delta \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ está definido como el generador infinitesimal del siguiente flujo*

$$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R} \times T^1_kQ & \to & T^1_kQ \\ & (s, (v_{1_q}, \ldots, v_{k_q})) & \mapsto & \psi(s, (v_{1_q}, \ldots, v_{k_q})) = (e^s v_{1_q}, \ldots, e^s v_{k_q}). \end{array}$$

En coordenadas locales el campo de vectores de Liouville es de la forma

$$\Delta = u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}. \tag{1.10}$$

Alternativamente, se puede definir este campo de vectores utilizando el levantamiento vertical α-ésimo como sigue

$$\Delta(\mathbf{v}_q) = \sum_{\alpha=1}^{k} (v_{\alpha_q})^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q)\,,$$

para cada $\mathbf{v}_q = (v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) \in T^1_k Q$.

1.2. Campos de k-vectores y SOPDEs

En esta sección se estudiarán los campos de k-vectores en una variedad M, dichos campos de k-vectores se interpretan como la descripción geométrica de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en M.

Además, para el caso particular donde la variedad es el fibrado tangente de las k^1-velocidades, $M = T^1_k Q$, se estudiará un tipo especial de campos de k-vectores, que se identifican con un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (SOPDE) en Q.

1.2.1. Campos de k-vectores

Sea M una variedad de dimensión m.

Definición 1.4 *Un campo de k-vectores en una variedad arbitraria M es una sección $\mathbf{X}\colon M \longrightarrow T^1_k M$ de la proyección canónica $\tau^k_M\colon T^1_k M \to M$.*

Como $T^1_k M$ es la suma de Whitney $TM \oplus \overset{k}{\dots} \oplus TM$ de k copias de TM, cada campo de k-vectores $\mathbf{X}$ define una familia de k campos de vectores $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, proyectando $\mathbf{X}$ sobre cada factor, esto es,

$$X_\alpha = \tau^{k,\alpha}_M \circ \mathbf{X}\,,$$

donde $\tau_M^{k,\alpha}\colon T_k^1M \to TM$ es la proyección canónica en la α-ésima copia TM de T_k^1M. Se denotará el conjunto de campos de k-vectores en M por $\mathfrak{X}^k(M)$.

El levantamiento tangente de curvas en M a curvas en TM se generaliza como sigue. Sea (U, x^A) un sistema de coordenadas en M, con $A = 1, \ldots, m$.

Definición 1.5 *Dada una aplicación $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^k \to M$ se define la primera prolongación $\phi^{(1)}$ de ϕ a T_k^1M, como sigue*

$$\begin{array}{rcl} \phi^{(1)} : U \subset \mathbb{R}^k & \to & T_k^1M \\ t & \to & \phi^{(1)}(t) = \left(\phi_*(t)\left(\dfrac{\partial}{\partial t^1}\Big|_t\right), \ldots, \phi_*(t)\left(\dfrac{\partial}{\partial t^k}\Big|_t\right)\right) . \end{array} \tag{1.11}$$

En coordenadas locales, si $\phi(t) = (x^A \circ \phi(t)) = (\phi^A(t))$, entonces la expresión local de $\phi^{(1)}$ es

$$\phi^{(1)}(t) = \left(\phi^A(t), \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}(t)\right) . \tag{1.12}$$

Por lo tanto el siguitente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & T_k^1M \\ & \overset{\phi^{(1)}}{\nearrow} & \Big\downarrow \tau_M^k \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\ \phi\ } & M \end{array}$$

es conmutativo.

Una generalización del concepto de curva integral es el de sección integral que definimos a continuación.

Definición 1.6 *Una sección integral de un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$, pasando por el punto $x \in M$, es una aplicación $\phi\colon U \subset \mathbb{R}^k \to M$, definida en un entorno abierto U de $0 \in \mathbb{R}^k$, tal que*

$$\phi(0) = x, \ \ \phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = X_\alpha(\phi(t)) \in T_{\phi(t)}M, \tag{1.13}$$

para todo $t \in U$, y para todo $\alpha \in \{1, \ldots, k\}$; ó equivalentemente, ϕ verifica

$$\mathbf{X} \circ \phi = \phi^{(1)} ,$$

es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & T^1_k M \\ \mathbb{R}^k \arrow[ur, "\phi^{(1)}"] \arrow[r, "\phi"'] & M \arrow[u, "\mathbf{X}"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ en M es integrable si existe una sección integral pasando por cada punto de M.

De la definición anterior se deduce que: ϕ es una sección integral de $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ si y sólo si, ϕ es solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

$$X^A_\alpha(\phi(t)) = \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t, \tag{1.14}$$

donde $X_\alpha = X^A_\alpha \partial/\partial x^A$ en el sistema de coordenadas (U, x^A) en M, $x^A \circ \phi = \phi^A$, y t^α son las coordenadas en $\mathbb{R}^k$.

1.2.2. Sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden: SOPDEs

En el desarrollo del formalismo k-simpléctico lagrangiano aparecen ciertas ecuaciones en derivadas parciales (EDP's) de segundo orden definidas en $T^1_k Q$. Estas EDP's aparecen asociadas a ciertos campos de k-vectores, que se denominarán SOPDEs, (abreviatura del inglés *second order partial differential equations*). En esta sección se recordará cuáles son los campos de k-vectores que dan lugar a ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Un campo de k-vectores en la variedad $T^1_k Q$ es una sección $\mathbf{X}\colon T^1_k Q \longrightarrow T^1_k(T^1_k Q)$ de la proyección canónica $\tau^k_{T^1_k Q}\colon T^1_k(T^1_k Q) \to T^1_k Q$.

Definición 1.7 *Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden ó SOPDE es un campo de k-vectores*

$$\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$$

en $T^1_k Q$, el cual es una sección de la proyección

$$T^1_k \tau^k_Q\colon T^1_k(T^1_k Q) \to T^1_k Q$$

es decir, el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
T^1_kQ \arrow[d, "\mathbf{\Gamma}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_{T^1_kQ}"] & \\
T^1_k(T^1_kQ) \arrow[r, "T^1_k\tau_Q"] & T^1_kQ
\end{tikzcd} \quad ,
$$

es conmutativo.

Equivalentemente, $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ *es un* SOPDE *si y sólo si,*

$$
T\tau^k_Q \circ \Gamma_\alpha = \tau^{k,\alpha}_Q : T^1_kQ \to TQ \tag{1.15}
$$

para cada $\alpha = 1, \ldots, k$*, es decir, el siguiente diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
T^1_kQ \arrow[d, "\Gamma_\alpha"'] \arrow[dr, "\tau^{k,\alpha}_Q"] & \\
T(T^1_kQ) \arrow[r, "T\tau^k_Q"] & TQ
\end{tikzcd}
$$

es conmutativo.

La condición (1.15) nos dice que $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ es un SOPDE si y sólo si se verifica

$$
(\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)(\Gamma_\alpha(\mathbf{v}_q)) = \mathbf{v}_{\alpha_q}, \quad \alpha = 1, \ldots, k\,,
$$

siendo $\mathbf{v}_q = (v_{1_q}, \ldots, v_{k_q}) \in T^1_kQ$.

En el caso $k = 1$, la Definición 1.7 se reduce a la definición de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (SODE).

La expresión local de un SOPDE $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ es

$$
\Gamma_\alpha = u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma^A_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, \quad 1 \leq \alpha \leq k, \tag{1.16}
$$

donde $\Gamma^A_{\alpha\beta}$ son funciones diferenciables definidas en el dominio de las cartas inducidas en T^1_kQ.

Se puede reformular la definición de SOPDE, usando la estructura k-tangente y el campo de vectores de Liouville Δ (ver ecuaciones (1.9) y (1.10)), como sigue:

Proposición 1.8 *Un campo de k-vectores $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ en T^1_kQ es un* SOPDE *si y sólo si $J^\alpha \Gamma_\alpha = \Delta$.*

Las curvas integrales de un SODE en TQ son levantamientos tangentes de curvas en la variedad Q. A continuación mostraremos que las secciones integrales de un SOPDE son primeras prolongaciones de aplicaciones de $\mathbb{R}^k$ en Q.

Sea
$$\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to T^1_kQ$$
una sección integral de un SOPDE $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ y supongamos que su expresión local es
$$\phi(t) = (\phi^A(t), \phi^A_\alpha(t)) \,.$$

De la Definición 1.6 y la fórmula (1.16) se obtiene que ϕ es sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ si y sólo si es solución del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden
$$\frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t = \phi^A_\alpha(t), \quad \frac{\partial \phi^A_\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t = \Gamma^A_{\alpha\beta}(\phi(t)). \tag{1.17}$$

En efecto, por la Definición 1.6 se deduce que ϕ es sección integral del SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ si y sólo si $\mathbf{\Gamma} \circ \phi = \phi^{(1)}$ o equivalentemente
$$(\Gamma_\alpha \circ \phi)(t) = \phi_*(t) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \right) .$$

Teniendo en cuenta la expresión local del SOPDE $\Gamma_\alpha = u^A_\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma^A_{\alpha\beta} \dfrac{\partial}{\partial u^A_\beta}$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\alpha \circ \phi)(t) &= \phi^A_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\phi(t)} + \Gamma^A_{\alpha\beta}(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}\Big|_{\phi(t)} , \\
\phi_*(t) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \right) &= \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\phi(t)} + \frac{\partial \phi^A_\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}\Big|_{\phi(t)} ,
\end{aligned}$$

de donde se concluyen las ecuaciones (1.17).

Utilizando la identidad (1.12) y las ecuaciones (1.17) se obtiene la siguiente caracterización para las secciones integrales de un SOPDE.

Proposición 1.9 *Sea $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ un* SOPDE *integrable. Si ψ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$, entonces*

(1) *$\psi=\phi^{(1)}$, donde $\phi^{(1)}$ es la prolongación de primer orden de la aplicación*

$$\phi=\tau_Q^k\circ\psi : U\subset\mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi} T_k^1Q \xrightarrow{\tau_Q^k} Q,$$

(2) *ϕ es una solución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden*

$$\frac{\partial^2\phi^A}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}(t)=\Gamma^A_{\alpha\beta}\left(\phi^B(t),\frac{\partial\phi^B}{\partial t^\gamma}(t)\right). \tag{1.18}$$

Recíprocamente, si $\phi : U\subset\mathbb{R}^k\to Q$ es cualquier solución del sistema (1.18)*, entonces $\phi^{(1)}$ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}=(\Gamma_1,\dots,\Gamma_k)$.*

Demostración:

Sea $\psi=(\psi^A,\psi^A_\alpha)$ una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ entonces por la primera ecuación en (1.17) obtenemos que $\psi^A_\alpha(t)=\dfrac{\partial\psi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t$, es decir

$$\psi(t)=(\psi^A(t),\psi^A_\alpha(t))=(\psi^A(t),\frac{\partial\psi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t)=\phi^{(1)}(t)$$

donde $\phi=\tau^k_Q\circ\psi$.

Además, por la segunda ecuación en (1.17) deducimos que

$$\Gamma^A_{\alpha\beta}(\psi^B(t),\frac{\partial\psi^B}{\partial t^\gamma}(t))=\frac{\partial\psi^A_\beta}{\partial t^\alpha}(t)=\frac{\partial^2\psi^A}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}(t)\,.$$

Recíprocamente, sea ϕ una solución de (1.18), y se denota $\psi=\phi^{(1)}$, es decir

$$\psi(t)=(\phi^A(t),\frac{\partial\phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t)$$

por lo tanto la primera ecuación en (1.17) se verifica trivialmente, además teniendo en cuenta que ϕ es solución de (1.18) obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\left(\frac{\partial\phi^A}{\partial t^\beta}\right)=\frac{\partial^2\phi^A}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\Big|_t=\Gamma^A_{\alpha\beta}(\psi(t))$$

lo que concluye que $\phi^{(1)}$ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$.

$\square$

Definición 1.10 *Si $\phi^{(1)}$ es una sección integral de un* SOPDE $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, *entonces la aplicación ϕ se llamará solución de $\mathbf{\Gamma}$.*

De la ecuación (1.18) se deduce que si $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE integrable entonces necesariamente tenemos la simetría $\Gamma^A_{\alpha\beta} = \Gamma^A_{\beta\alpha}$ para todo $\alpha, \beta = 1, \dots, k$.

La integrabilidad de un SOPDE está demostrada en la Observación 3.4, para un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$, cuya expresión local está dada por (1.16), las condiciones de integrabilidad son

$$\Gamma^A_{\alpha\beta} = \Gamma^A_{\beta\alpha}, \quad \Gamma_\alpha(\Gamma^A_{\beta\gamma}) = \Gamma_\beta(\Gamma^A_{\alpha\gamma}), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \{1, ..., k\}. \tag{1.19}$$

1.3. Formalismo k-simpléctico lagrangiano. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a un lagrangiano L en T^1_kQ son

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} \circ \phi^{(1)}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} \circ \phi^{(1)} = 0\,, \quad 1 \le A \le n \tag{1.20}$$

cuya solución es una función $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to Q$.

A continuación se estudiará cómo obtener las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange a partir de un principio variacional.

Definición 1.11 *Se denota por $\mathcal{C}^\infty_C(\mathbb{R}^k, Q)$ el conjunto de aplicaciones*

$$\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \to Q,$$

con soporte compacto, definidas en un conjunto abierto U_0. Sea $L : T^1_kQ \to \mathbb{R}$ un lagrangiano, se define la acción asociada a L por

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{J}: & \mathcal{C}^\infty_C(\mathbb{R}^k, Q) & \to & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & \mathcal{J}(\phi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} (L \circ \phi^{(1)})(t) d^kt\,, \end{array}$$

en donde $d^kt = dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k$ es una forma de volumen en $\mathbb{R}^k$ y $\phi^{(1)} : U_0 \subset \mathbb{R}^k \to T^1_kQ$ denota la primera prolongación de ϕ.

Definición 1.12 *Una aplicación $\phi : U_0 \subseteq \mathbb{R}^k \to Q$, perteneciente al conjunto $\mathcal{C}^\infty_C(\mathbb{R}^k, Q)$, es un extremal de $\mathcal{J}$ si*

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{J}(\tau_s \circ \phi) = 0$$

para cada flujo τ_s en Q tal que $\tau_s(q) = q$ para todo q de la frontera de $\phi(U_0) \subset Q$.

Los flujos $\tau_s : Q \to Q$ considerados en la definición anterior están generados por campos de vectores en Q que se anulan en la frontera de $\phi(U_0)$.

El problema variacional, asociado a un lagrangiano L, consiste en encontrar los extremales de la acción integral $\mathcal{J}$. En la siguiente proposición se caracterizan los extremales de la acción $\mathcal{J}$ asociada a un lagrangiano L, véase [105].

Proposición 1.13 *Sean $L : T^1_k Q \to \mathbb{R}$ una función lagrangiana y $\phi \in \mathcal{C}^\infty_C(\mathbb{R}^k, Q)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *$\phi : U_0 \subset \mathbb{R}^k \to Q$ es un extremal del problema variacional asociado a L.*

(2) *Para cada campo de vectores Z en Q, que se anula en los puntos de la frontera de $\phi(U_0)$, se verifica:*

$$\int_{U_0} \left((\mathcal{L}_{Z^c} L) \circ \phi^{(1)} \right)(t) d^k t = 0 \,,$$

donde Z^C es el levantamiento completo de Z a $T^1_k Q$.

(3) *ϕ es solución de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.20).*

□

Desarrollando las ecuaciones (1.20) se obtiene

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^A_\alpha \partial u^B_\beta} \frac{\partial^2 q^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} u^B_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \quad 1 \leq A \leq n \,, \tag{1.21}$$

que son un sistema de n ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

Definición 1.14 *Un lagrangiano $L \in C^\infty(T^1_kQ)$ se dice regular si el Hessiano de L con respecto a las coordenadas de la fibra,*

$$g^{\alpha\beta}_{AB} = \frac{\partial^2 L}{\partial u^A_\alpha \partial u^B_\beta} \tag{1.22}$$

tiene rango máximo kn en todo punto de T^1_kQ.

$\boxed{\text{Energía Lagrangiana.}}$

Para un lagrangiano $L : T^1_kQ \to Q$, la *función Energía Lagrangiana* se define como la función

$$E_L = \Delta(L) - L \in C^\infty(T^1_kQ)$$

cuya expresión local es

$$E_L = u^A_\alpha \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} - L. \tag{1.23}$$

$\boxed{\text{Formas de Poincaré-Cartan en } T^1_kQ.}$

La familia de 1-formas de Poincaré-Cartan son

$$\theta^\alpha_L = dL \circ J^\alpha,$$

y la familia de 2-formas de Poincaré-Cartan en T^1_kQ son

$$\omega^\alpha_L = -d\theta^\alpha_L.$$

En el sistema de coordenadas locales inducidas (q^A, u^A_α) en T^1_kQ, se tiene

$$\begin{aligned} \theta^\alpha_L &= \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} dq^A, \\ \omega^\alpha_L &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} dq^A \wedge dq^B + \frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\beta \partial u^A_\alpha} dq^A \wedge du^B_\beta. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Recuérdese que una estructura *k-simpléctica* [67] en una variedad M de dimensión $k + nk$ está dada por una familia de k 2-formas cerradas $(\omega^1, ..., \omega^k)$ y una distribución V kn-dimensional en M tal que

- $\cap_{\alpha=1}^{k} \operatorname{Ker}(\omega^\alpha) = \{0\}$,
- $\omega^\alpha_{|V\times V} = 0, \quad \alpha \in \{1, ..., k\}$.

De las fórmulas (1.24) se obtiene que un lagrangiano L es regular si y sólo si las 2-formas de Poincaré-Cartan y la distrubución vertical, $(\omega_L^1, \dots, \omega_L^k, V = \operatorname{Ker} T\tau_Q^k)$ definen una estructura k-simpléctica en T^1_kQ, véase [80].

Formalismo k-simpléctico lagrangiano.

Denotaremos por $\mathfrak{X}^k_L(T^1_kQ)$ el conjunto de campos de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ en T^1_kQ, que son solución de la ecuación

$$i_{X_\alpha}\omega_L^\alpha = dE_L\,, \tag{1.25}$$

a estos campos de k-vectores se le llamarán campos de k-vectores lagrangianos.

Esta es la ecuación geométrica de la formulación k-simpléctica lagrangiana de la Teoría Clásica de Campos, véase [67, 76, 80, 105].

En efecto, si la expresión local de cada X_α es

$$X_\alpha = X^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + X^A_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, \quad 1 \le \alpha \le k, \tag{1.26}$$

entonces $(X_1, \dots, X_k)$ es solución de (1.25) si y sólo si las funciones X^A_α y $X^A_{\alpha\beta}$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial u^B_\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha}\right) X^B_\alpha - \frac{\partial^2 L}{\partial u^A_\alpha \partial u^B_\beta} X^B_{\alpha\beta} &= u^B_\alpha \frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial u^B_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^A} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\beta \partial u^A_\alpha} X^A_\alpha &= \frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\beta \partial u^A_\alpha} u^A_\alpha . \end{aligned} \tag{1.27}$$

Si L es un lagrangiano regular, las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^A_\alpha \partial u^B_\beta} X^B_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} u^B_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0, \quad X^A_\alpha = u^A_\alpha . \tag{1.28}$$

Usando las ecuaciones (1.27) se deduce el siguiente lema.

Lema 1.15 *Se considera un lagrangiano $L \in C^\infty(T^1_kQ)$.*

(1) *Si L es regular, entonces cualquier campo de k-vectores lagrangiano $\mathbf{X}$ es un* SOPDE*, y satisface las ecuaciones* (1.28).

(2) *Si $\mathbf{X}$ es un* SOPDE *lagrangiano entonces se verifica la ecuación* (1.28).

$\square$

La siguiente proposición caracteriza el conjunto de SOPDEs lagrangianos.

Proposición 1.16 *Sea $L \in C^\infty(T^1_kQ)$ un lagrangiano y sea $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ un* SOPDE *en T^1_kQ.*

Entonces $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE *lagrangiano si y sólo si satisface la siguiente condición:*

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha_L = dL, \quad \text{ó localmente} \quad \Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^A}. \tag{1.29}$$

Demostración:

Se comenzará demostrando que la primera ecuación en (1.29) es equivalente a la ecuación (1.25).

Como $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE tenemos que $J^\alpha\Gamma_\alpha = \Delta$ y por lo tanto se sigue que $i_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha_L = \theta^\alpha_L(\Gamma_\alpha) = (dL \circ J^\alpha)(\Gamma_\alpha) = \Delta(L)$.

Usando el hecho de que $\omega^\alpha_L = -d\theta^\alpha_L$ obtenemos

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha_L = di_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha_L + i_{\Gamma_\alpha}d\theta^\alpha_L = d(\Delta(L)) - i_{\Gamma_\alpha}\omega^\alpha_L = dL + (dE_L - i_{\Gamma_\alpha}\omega^\alpha_L)\,.$$

Por lo tanto $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha_L = dL$ si y solo si $dE_L = i_{\Gamma_\alpha}\omega^\alpha_L$.

Por otra parte, como $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE se verifica que $\Gamma_\alpha(q^A) = u^A_\alpha$ y por lo tanto obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha_L - dL &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}dq^A\right) - dL = \Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right)dq^A + \left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right)du^A_\alpha - dL \\ &= \left[\Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\right]dq^A,\end{aligned}$$

lo que finaliza la demostración. $\square$

Se estudiará ahora la relación entre soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.20) ó (1.21) y las secciones integrales de campos de k-vectores lagrangianos.

Proposición 1.17 *Sea X un campo de k-vectores lagrangiano*

(1) *Si L es regular entonces $\mathbf{X}$ es un* SOPDE*, y si $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to Q$ es una solución de $\mathbf{X}$, entonces ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange* (1.20)*.*

(2) *Si $\mathbf{X}$ es integrable, y $\phi^{(1)} : U \subset \mathbb{R}^k \to T^1_k Q$ es una sección integral de $\mathbf{X}$, entonces $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to Q$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange* (1.20)*.*

Sea $\mathbf{\Gamma}$ un SOPDE *lagrangiano entonces, una aplicación $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to Q$ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange* (1.20) *si y sólo si*

$$g^{\alpha\beta}_{AB} \circ \phi^{(1)} \left(\Gamma^B_{\alpha\beta} \circ \phi^{(1)} - \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} \right) = 0. \tag{1.30}$$

Demostración:

(1) Si $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to Q$ es una solución de $\mathbf{X}$ entonces satisface la ecuación (1.18). Además, se verifican las ecuaciones (1.30) y por lo tanto ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.21).

(2) Como $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k_L(T^1_k Q)$ se sigue que $\mathbf{X}$ satisface la primera ecuación (1.27). Si se restringe esta ecuación a $\phi^{(1)} : U \subset \mathbb{R}^k \to T^1_k Q$, la cual es una sección integral de $\mathbf{X}$, se obtiene que ϕ satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.21).

Sea $\mathbf{\Gamma}$ un SOPDE lagrangiano y se considera una aplicación $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to Q$. Si ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler Lagrange (1.21), entonces se tiene

$$g^{\alpha\beta}_{AB} \circ \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} \circ \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^B}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^A} \circ \phi^{(1)} = 0. \tag{1.31}$$

Como $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE, entonces es lagrangiano si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha}\, u^B_\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial u^A_\alpha \partial u^B_\beta} \Gamma^B_{\alpha\beta} = \frac{\partial L}{\partial q^A}. \tag{1.32}$$

Si se restringe la ecuación (1.32) a la imagen de $\phi^{(1)}$ se obtiene

$$g^{\alpha\beta}_{AB} \circ \phi^{(1)} \Gamma^B_{\alpha\beta} \circ \phi^{(1)} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} \circ \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^B}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^A} \circ \phi^{(1)} = 0. \tag{1.33}$$

Usando las ecuaciones (1.33) se sigue que ϕ verifica (1.30) si y sólo si satisface (1.31) que es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.21).

□

Observación 1.18 Los resultados del Lema 1.15 y los resultados (1) y (2) de la Proposición 1.17 son los fundamentos del formalismo k-simpléctico lagrangiano.

A continuación, se presenta un sencillo ejemplo de la versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange, véase [7]. Más ejemplos pueden encontrarse en [81].

Ejemplo 1.19 Se considera el ejemplo de la cuerda vibrante. Las coordenadas (t^1, t^2) son interpretadas como el tiempo y la distancia a lo largo de la cuerda, respectivamente. Si

$$\phi : (t^1, t^2) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow \phi(t^1, t^2) \in \mathbb{R}$$

denota el desplazamiento de cada punto de la cuerda en función del tiempo t^1 y de la posición t^2, la ecuación de movimiento es

$$\sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^1)^2} - \tau \frac{\partial^2 \phi}{\partial (t^2)^2} = 0, \tag{1.34}$$

donde σ y τ son ciertas constantes del sistema mecánico.

La ecuación (1.34) es la ecuación de Euler-Lagrange para el siguiente lagrangiano regular

$$L : T^1_2\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ L(q, u_1, u_2) = \frac{1}{2}(\sigma u_1^2 - \tau u_2^2). \tag{1.35}$$

De las fórmulas (1.23), (1.24) y (1.35) se deduce que

$$\omega^1_L = \sigma dq \wedge du_1, \quad \omega^2_L = -\tau dq \wedge du_2, \quad dE_L = \sigma u_1 du_1 - \tau u_2 du_2. \tag{1.36}$$

Entonces un SOPDE $(\Gamma_1, \Gamma_2) \in \mathfrak{X}(T^1_2\mathbb{R})$ con expresión local

$$\Gamma_1 = u_1 \frac{\partial}{\partial q} + \Gamma_{11} \frac{\partial}{\partial u_1} + \Gamma_{12} \frac{\partial}{\partial u_2} \quad , \quad \Gamma_2 = u_2 \frac{\partial}{\partial q} + \Gamma_{12} \frac{\partial}{\partial u_1} + \Gamma_{22} \frac{\partial}{\partial u_2},$$

es una solución de la ecuación (1.25) , es decir

$$i_{\Gamma_1}\omega_L^1 + i_{\Gamma_1}\omega_L^2 = dE_L$$

si y sólo si se verifica

$$\sigma\Gamma_{11} - \tau\Gamma_{22} = 0. \tag{1.37}$$

Un ejemplo de un SOPDE integrable solución de (1.37) está dado por

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= u_1\frac{\partial}{\partial q} + \tau\left(\sigma(u_1)^2 + \tau(u_2)^2\right)\frac{\partial}{\partial u_1} + 2\sigma\tau u_1 u_2\frac{\partial}{\partial u_2},\\ \Gamma_2 &= u_2\frac{\partial}{\partial q} + 2\sigma\tau u_1 u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \sigma\left(\sigma(u_1)^2 + \tau(u_2)^2\right)\frac{\partial}{\partial u_2}\,,\end{aligned}$$

ya que las condiciones de integrabilidad (1.19), en este caso son

$$\frac{\partial\Gamma_{11}}{\partial u_1} = \frac{\partial\Gamma_{12}}{\partial u_2}, \quad \sigma\frac{\partial\Gamma_{11}}{\partial u_2} = \tau\frac{\partial\Gamma_{12}}{\partial u_1}. \tag{1.38}$$

Si $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es solución del SOPDE (Γ_1, Γ_2), por la ecuación (1.18) sabemos que

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t = \Gamma_{\alpha\beta}(\phi^{(1)}(t))\,.$$

Evaluando ahora la ecuación (1.37) en la imagen de $\phi^{(1)}$ se obtiene la siguiente expresión

$$0 = \sigma\Gamma_{11}(\phi^{(1)}(t)) - \tau\Gamma_{22}(\phi^{(1)}(t)) = \sigma\frac{\partial^2\phi}{\partial(t^1)^2}\Big|_t - \tau\frac{\partial^2\phi}{\partial(t^2)^2}\Big|_t\,,$$

es decir, ϕ es solución de la ecuación de la cuerda vibrante (1.34).

1.3.1. Las cuasi-velocidades

En esta sección se establecerán las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange para una referencia local arbitraria en Q. Esta referencia local permitirá inducir una referencia en $T_k^1 Q$ y por lo tanto se podrá expresar cada SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ en función de esta nueva referencia, para ello será necesario introducir el concepto de cuasi-velocidades.

Sea $\{Z_A\}$ una *referencia local en* Q, es decir una base local de campos de vectores en Q; entonces cada campo de vectores Z en Q puede ser escrito como $Z = Z^A Z_A$, para algunas funciones locales Z^A en Q.

Del mismo modo, cada vector tangente $v_q \in T_qQ$ puede escribirse como $v_q = v^A Z_A(q)$ con $A \in \{1, \ldots, n\}$.

De las expresiónes locales (1.2) y (1.5), se puede concluir que:

Proposición 1.20 *Si $\{Z_A\}$ es cualquier referencia local en Q, entonces $\{Z_A^C, Z_A^{V_\alpha}\}$ es una referencia local en T_k^1Q.*

Demostración:

Sea $\{Z_A\}$ una base local para Q, entonces Z_A se puede escribir como

$$Z_A = Z_A^B \frac{\partial}{\partial q^B} ,$$

siendo (Z_A^B) una matriz no singular en cada punto.

Si se calculan los levantamientos completo y vertical de Z_A se obtiene:

$$\begin{aligned} Z_A^C &= Z_A^B \frac{\partial}{\partial q^B} + u_\alpha^C \frac{\partial Z_A^B}{\partial q^C} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^B} , \\ Z_A^{V_\alpha} &= Z_A^B \frac{\partial}{\partial u_\alpha^B} . \end{aligned}$$

Se puede comprobar directamente que $\{Z_A^C, Z_A^{V_\alpha}\}$ son linealmente independientes y generan el conjunto de campos de vectores en T_k^1Q.

$\square$

Dado que $[\Gamma_\alpha, Z^C] = W_\alpha$ y $[\Gamma_\alpha, Z^{V_\beta}] = -\delta_\alpha^\beta Z^C + V_\alpha^\beta$, donde todos los V_α^β y W_α son campos de vectores verticales para la proyección $\tau_Q^k : T_k^1Q \to Q$, cuando se aplica la relación (1.29) a un levantamiento completo Z^C se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta_L^\alpha - \mathrm{d}L)(Z^C) = \Gamma_\alpha(\theta_L^\alpha(Z^C)) - \theta_L^\alpha([\Gamma_\alpha, Z^C]) - Z^C(L) \\ &= \Gamma_\alpha(Z^{V_\alpha}(L)) - Z^C(L). \end{aligned}$$

Y cuando se aplica a un levantamiento vertical Z^{V_β}, se obtiene la identidad “0=0”. Teniendo en cuenta la Proposición 1.20, se deduce el siguiente resultado

Proposición 1.21 *Sea L un lagrangiano regular. Un* SOPDE $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_\alpha)$ *es lagrangiano, es decir, $i_{\Gamma_\alpha}\omega_L^\alpha = dE_L$ si y sólo si, para cada campo de vectores Z en Q, se verifica*

$$\Gamma_\alpha(Z^{V_\alpha}(L)) - Z^C(L) = 0,$$

ó, equivalentemente, si para cada referencia local $\{Z_A\}$ de campos de vectores en Q, se verifica

$$\Gamma_\alpha(Z_A^{V_\alpha}(L)) - Z_A^C(L) = 0, \qquad A = 1 \dots n. \tag{1.39}$$

□

En particular, si se toma la referencia estándar $\{\partial/\partial q^A\}$ en Q, las ecuaciones (1.39) se convierten en

$$\Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0.$$

Sin embargo, en el Capítulo 4 se necesitarán las expresiones (1.39), expresadas en función de las llamadas *cuasi-velocidades* de una referencia dada $\{Z_A\}$ en Q.

Definición 1.22 *Considérese una referencia local $\{Z_A\}$ en Q. Dado un elemento $\mathbf{v}_q = (v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) \in T_k^1Q$, las componentes de los vectores $\{v_{1_q}, \dots, v_{k_q}\}$ con respecto a la base $Z_A(q)$, se denotan por v_α^A, es decir*

$$v_{\alpha_q} = v_\alpha^A Z_A(q) \quad 1 \leq \alpha \leq k\,,$$

y los números reales v_α^A se denominarán las cuasi-velocidades del elemento $\mathbf{v}_q$.

Se puede además usar (q^A, v_α^A) como las coordenadas (no naturales) en T_k^1Q. Si $Z_A = Z_A^B\partial/\partial q^B$, su relación con las coordenadas naturales inducidas (q^A, u_α^A) es

$$u_\alpha^B = v_\alpha^A Z_A^B\,, \tag{1.40}$$

con $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ y $A, B \in \{1, \dots, n\}$.

Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$, un campo de k-vectores en T_k^1Q, tal que cada X_α se escribe como sigue

$$X_\alpha = X_\alpha^A Z_A^C + (Y_\alpha)_\beta^A Z_A^{V_\beta}\,.$$

Sea ϕ una aplicación expresada en coordenadas (q^A, v_β^A)

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & U \subset \mathbb{R}^k & \longrightarrow & T_k^1Q \\ & & t & \to & \phi(t) = (q^A = \phi^A(t), v_\beta^A = \phi_\beta^A(t)) \end{array}$$

que es sección integral de $\mathbf{X}$, entonces por (1.13)

$$\phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = X_\alpha(\phi(t))\,,$$

donde

$$\phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\phi(t)} + \frac{\partial \phi^A_\beta}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial}{\partial v^A_\beta}\Big|_{\phi(t)}\,,$$

y

$$\begin{aligned} X_\alpha(\phi(t)) &= (X^B_\alpha Z^A_B)(\phi(t))\frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\phi(t)} + \left(X^A_\alpha u^C_\beta \frac{\partial Z^B_A}{\partial q^C} + (Y_\alpha)^A_\beta Z^B_A\right)(\phi(t))\frac{\partial}{\partial u^B_\beta}\Big|_{\phi(t)} \\ &= (X^B_\alpha Z^A_B)(\phi(t))\frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\phi(t)} + \left(X^A_\alpha v^D_\beta Z^E_D \frac{\partial Z^B_A}{\partial q^E}(Z^C_B)^{-1} + (Y_\alpha)^A_\beta\right)(\phi(t))\frac{\partial}{\partial v^C_\beta}\Big|_{\phi(t)}\,. \end{aligned}$$

Entonces, ϕ es sección integral de $\mathbf{X}$ si satisface

$$\frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha} = (X^B_\alpha Z^A_B)\circ\phi, \qquad \frac{\partial \phi^A_\beta}{\partial t^\alpha} = (X^A_\alpha v^D_\beta Z_D(Z^B_A)(Z^C_B)^{-1} + (Y_\alpha)^A_\beta)\circ\phi\,. \tag{1.41}$$

A continuación, se expresa un SOPDE en T^1_kQ en términos de la referencia $\{Z^C_A, Z^{V_\alpha}_A\}$.

Lema 1.23 *Un* SOPDE Γ, *escrito en términos de las cuasi-velocidades, toma la forma*

$$\Gamma_\alpha = v^A_\alpha Z^C_A + (\Gamma_\alpha)^A_\beta Z^{V_\beta}_A \tag{1.42}$$

para algunas funciones $(\Gamma_\alpha)^A_\beta$ *en* T^1_kQ.

Demostración:

Esto es consecuencia de la Proposición 1.20 y de las propiedades $T\tau^k_Q \circ Z^C_A = Z_A\circ\tau^k_Q$ y $T\tau^k_Q\circ Z^{V_\beta}_A = 0$.

□

Para finalizar esta sección, se estudiará la regularidad en términos de la referencia no estándar.

Proposición 1.24 *Sea $\{Z_A\}$ una referencia local de campos de vectores en Q. Un lagrangiano L es regular si y sólo si la matriz cuadrada de dimensión nk de funciones $(Z_A^{V_\alpha}(Z_B^{V_\beta}(L)))$ en T_k^1Q tiene rango máximo.*

Demostración:

Si $Z_A = Z_A^C \partial/\partial q^C$, entonces la matriz $Z = (Z_A^B)$ de funciones en Q es no-singular en cada punto. Tenemos

$$\Big(Z_A^{V_\alpha}(Z_B^{V_\beta}(L))\Big) = \Big(Z_A^C \frac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^C \partial u_\beta^E} Z_B^E\Big) = \Big(Z_A^C \delta_\alpha^\gamma\Big)\Big(\frac{\partial^2 L}{\partial u_\gamma^C \partial u_\epsilon^E}\Big)\Big(Z_B^E \delta_\beta^\epsilon\Big),$$

donde la parte de la derecha puede ser interpretada como la matriz multiplicación de 3 matrices cuadradas de dimensión nk. Dado que el determinante de la matriz $\big(Z_A^C \delta_\alpha^\gamma\big)$ es $k\det(Z) \neq 0$, se prueba que el determinante de la matriz en la parte izquierda nunca se anula

$\square$

Capítulo 2

Simetrías y leyes de conservación

El estudio de las simetrías y leyes de conservación para lagrangianos en T^1_kQ comenzó en [92]. En dicho trabajo, el correspondiente Teorema de Noether se demostró utilizando coordenadas locales.

En este capítulo se dará una demostración global y se establecerá una condición bajo la cual leyes de conservación y simetrías de Cartan son equivalentes en el caso $k > 1$, como es conocido que siempre lo son en el caso $k = 1$.

Para ilustrar los resultados anteriores, se mostrarán algunos ejemplos de leyes de conservación inducidas por simetrías de Cartan y otras para las cuales no existen simetrías de Cartan que las induzca.

Se terminará el capítulo introduciendo los campos de vectores Newtonoides, se estudia su relación con las simetrías de Cartan y se establece un teorema de Noether bajo ciertas condiciones. Estos campos de vectores Newtonoides fueron introducidos en el caso $k = 1$ por Marmo y Mukunda [69].

2.1. Leyes de conservación

Esta primera sección es una introducción al concepto de leyes de conservación y su relación con los SOPDEs lagrangianos e integrables.

Definición 2.1 *Una aplicación* $f = (f^1, \dots, f^k) \colon T^1_kQ \to \mathbb{R}^k$ *se dice que es una ley de conservación (o una cantidad conservada) para las ecuaciones de Euler-Lagrange*

(1.20) *si la divergencia de la función*

$$f \circ \phi^{(1)} = (f^1 \circ \phi^{(1)}, \ldots, f^k \circ \phi^{(1)}) \colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

es cero, para toda solución $\phi \colon U \subset R^k \to Q$ *de las ecuaciones de Euler-Lagrange* (1.20)*, esto es*

$$0 = \frac{\partial (f^\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^\alpha}\Big|_t = \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^A}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t + \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^A_\beta}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t . \tag{2.1}$$

Veamos un ejemplo sencillo de ley de conservación.

Ejemplo 2.2 Las funciones $(f^1, f^2) \colon T^1_2\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f^1(u_1, u_2) = -2\sigma u_1 u_2 \quad , \quad f^2(u_1, u_2) = \sigma (u_1)^2 + \tau (u_2)^2 \, . \tag{2.2}$$

definen una ley de conservación para las ecuaciones de Euler Lagrange de la cuerda vibrante (1.34).

En efecto, sea ϕ una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.34), entonces denotando $\partial_\alpha \phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial t^\alpha}\Big|_t$ y $\partial_{\alpha\beta}\phi = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (f^1 \circ \phi^{(1)})}{\partial t^1}\Big|_t + \frac{\partial (f^2 \circ \phi^{(1)})}{\partial t^2}\Big|_t &= \frac{\partial f^1}{\partial q}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \partial_1 \phi + \frac{\partial f^1}{\partial u_1}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \partial_{11}\phi + \frac{\partial f^1}{\partial u_2}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \partial_{12}\phi \\
&+ \frac{\partial f^2}{\partial q}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \partial_2 \phi + \frac{\partial f^2}{\partial u_1}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \partial_{21}\phi + \frac{\partial f^2}{\partial u_2}\Big|_{\phi^{(1)}(t)} \partial_{22}\phi \\
&= -2\partial_2 \phi \, (\sigma \partial_{11}\phi - \tau \partial_{22}\phi) = 0.
\end{aligned}$$

A continuación se estudiará una condición necesaria para que una función sea una ley de conservación para las ecuaciones de Euler-Lagrange, véase [92].

Lema 2.3 *Sea* $f = (f^1, \ldots, f^k) \colon T^1_k Q \to \mathbb{R}^k$ *una ley de conservación entonces*

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = 0 \tag{2.3}$$

para todo SOPDE *lagrangiano e integrable* $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$*.*

Demostración:

Como $\mathbf{\Gamma}$ es integrable, se deduce que para todo punto $\mathbf{v}_q \in T^1_kQ$ existe una sección integral

$$\begin{array}{rcl} \phi^{(1)} : U \subset \mathbb{R}^k & \longrightarrow & T^1_kQ \\ t & \to & \phi^{(1)}(t) = (\phi^A(t), \dfrac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t) = \left(\ldots, \dfrac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t \dfrac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\phi(t)}, \ldots \right) \end{array}$$

tal que

(1) ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, como consecuencia de la Proposición 1.17 ya que $\mathbf{\Gamma}$ es lagrangiano.

(2) ϕ verifica que

$$\phi^{(1)}(0) = \mathbf{v}_q, \quad (\phi^{(1)})_*(t) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \right) = \Gamma_\alpha(\phi^{(1)}(t)) \in T_{\phi^{(1)}(t)} \left(T^1_kQ \right),$$

para todo $t \in U$, $1 \leq \alpha \leq k$.

Sea

$$\Gamma_\alpha = u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma^A_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, \quad 1 \leq \alpha \leq k,$$

la expresión local de Γ_α, entonces la condición (2) significa que

$$\Gamma^A_{\alpha\beta}(\phi^{(1)}(t)) = \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t, t \in U. \tag{2.4}$$

Como $f = (f^1, \ldots, f^k)$ es una ley de conservación, utilizando la identidad (2.1) para $t = 0$, la fórmula (2.4), y el hecho de que $u^A_\alpha(\phi^{(1)}(t)) = \dfrac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t$ obtenemos que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \dfrac{\partial (f^\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^\alpha}\Big|_0 = \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial q^A}\Big|_{\phi^{(1)}(0)} \dfrac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_0 + \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial u^A_\beta}\Big|_{\phi^{(1)}(0)} \dfrac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_0 \\ & = & \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial q^A}\Big|_{\mathbf{v}_q} \dfrac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_0 + \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial u^A_\beta}\Big|_v \dfrac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_0 = \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial q^A}\Big|_{\mathbf{v}_q} u^A_\alpha(\mathbf{v}_q) + \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial u^A_\beta}\Big|_{\mathbf{v}_q} \Gamma^i_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_q) \\ & = & \Gamma_\alpha(\mathbf{v}_q)(f^\alpha) \end{array}$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Sin embargo, bajo ciertas hipótesis adicionales en las funciones $f = (f^1, \dots, f^k)$, el recíproco del lema anterior es cierto, como se demostrará a continuación.

Lema 2.4 *Si se supone que existe un campo de vectores* $X \in \mathfrak{X}(T^1_k Q)$ *y una función* $f = (f^1, \dots, f^k) : T^1_k Q \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$i_X \omega^\alpha_L = df^\alpha, \ \forall \alpha \in \{1, ..., k\}, \tag{2.5}$$

Entonces, $f = (f^1, \dots, f^k)$ *define una ley de conservación si y sólo si* $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = 0$, *para todo* SOPDE *lagrangiano e integrable* $\mathbf{\Gamma}$.

Demostración:

La implicación directa está dada por el Lema 2.3, para esta implicación no es necesario suponer la existencia del campo de vectores X verificando (2.5).

Para la implicación recíproca se considera un campo de vectores en $T^1_k Q$

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + X^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}$$

que satisface (2.5). Teniendo en cuenta la expresión local de las 2-formas de Poincaré-Cartan ω^α_L, en la segunda fórmula de (1.24) se puede escribir la ecuación (2.5) del siguiente modo

$$\left[\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial u^B_\alpha} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} \right) X^B - g^{\alpha\beta}_{AB} X^B_\beta \right] dq^A + g^{\alpha\beta}_{AB} X^A du^B_\beta = \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^A} dq^A + \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^B_\beta} du^B_\beta ,$$

y necesariamente se obtiene que

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial u^B_\beta} = g^{\alpha\beta}_{AB} X^A . \tag{2.6}$$

Si se considera ahora cualquier solución ϕ de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.21) (que podría no ser solución de ningún $\mathbf{\Gamma}$), como se supone que $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE integrable, de la Proposición 1.17 se deduce que ϕ satisface la ecuación (1.30), esto es

$$g^{\alpha\beta}_{AB} \circ \phi^{(1)} \left(\Gamma^B_{\alpha\beta} \circ \phi^{(1)} - \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} \right) = 0 \, .$$

Si se hace la *contracción* de las ecuaciones anteriores, (1.30), por $X^A \circ \phi^{(1)}$, se obtiene

$$(X^A \circ \phi^{(1)})(g^{\alpha\beta}_{AB} \circ \phi^{(1)}) \left(\frac{\partial^2 \phi^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} - \Gamma^B_{\alpha\beta} \circ \phi^{(1)} \right) = 0. \tag{2.7}$$

Reemplazando ahora la fórmula (2.6) en la ecuación (2.7) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f^\alpha}{\partial u^B_\beta} \circ \phi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \phi^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} - \Gamma^B_{\alpha\beta} \circ \phi^{(1)} \right) \\ &= \frac{\partial (f^\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial f^\alpha}{\partial t^\alpha} \circ \phi^{(1)} - \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^B} \circ \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^B}{\partial t^\alpha} \\ & \quad -\Gamma_\alpha(f^\alpha) \circ \phi^{(1)} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t^\alpha} \circ \phi^{(1)} + (u^B_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^B}) \circ \phi^{(1)} \\ &= \frac{\partial (f^\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^\alpha} - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha \circ \phi^{(1)} \, , \end{aligned}$$

y esta ecuación demuestra que

$$\frac{\partial (f^\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^\alpha} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = 0 \, .$$

□

2.2. Simetrías de Cartan y Teorema de Noether

Para el caso $k = 1$ el conocido Teorema de Noether enuncia que cada simetría de Cartan induce una constante de movimiento; y su recíproco, que cada constante de movimiento induce una simetría de Cartan.

Para $k > 1$, el Teorema de Noether también es cierto, cada simetría de Cartan induce una ley de conservación, véase el Teorema 2.6. Sin embargo, su recíproco puede no ser cierto, en la Proposición 2.8 se estudiará bajo qué condiciones se verifica dicho resultado.

Para mostrar que hay casos en los que el recíproco del Teorema de Noether no es cierto, se aportará algún ejemplo de leyes de conservación que no están inducidas por simetrías de Cartan.

A continuación se recuerda la definición de simetría de Cartan para un lagrangiano L, véase [92].

Definición 2.5 *Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(T^1_k Q)$ se llama simetría de Cartan del lagrangiano L, si*

$$\mathcal{L}_X \omega^\alpha_L = 0 \quad y \quad \mathcal{L}_X E_L = 0 \, ,$$

para todo $\alpha = 1, ..., k$.

En este caso el flujo ϕ_t de X es una simetría de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir, cada ϕ_t transforma soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange en soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, véase [92].

Se prueba que (localmente) toda simetría de Cartan verifica (2.5).

De la condición $\mathcal{L}_X \omega_L^\alpha = 0$ se obtiene localmente

$$0 = \mathcal{L}_X \omega_L^\alpha = d i_X \omega_L^\alpha + i_X d\omega_L^\alpha = d i_X \omega_L^\alpha$$

por lo tanto las formas $i_X \omega_L^\alpha$ son cerradas y existen unas funciones locales $f^\alpha \colon T_k^1 Q \to \mathbb{R}$ tales que $i_X \omega_L^\alpha = df^\alpha$ para todo $\alpha = 1, \dots, k$.

Por lo tanto si X es una simetría de Cartan, se verifican las hipótesis del Lema 2.4 (localmente).

El siguiente Teorema de Noether esta probado en [92, Thm 3.13] utilizando coordenadas locales. Aquí se proporciona una demostración directa del mismo utilizando el formalismo de Frölicker-Nijenhuis en $T_k^1 Q$. Esta prueba permitirá estudiar tambien cuando el recíproco del Teorema de Noether es cierto, para $k > 1$.

Teorema 2.6 *(Teorema de Noether) Sea* L *un lagrangiano en* $T_k^1 Q$ *y* $X \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$ *una simetría de Cartan para* L.

Entonces, existen unas funciones $(g^1, \dots, g^k)$ *locales en* $T_k^1 Q$ *verificando*

$$\mathcal{L}_X \theta_L^\alpha = dg^\alpha . \tag{2.8}$$

La función $(f^1, \dots, f^k) : T_k^1 Q \to \mathbb{R}^k$ *donde*

$$f^\alpha = \theta_L^\alpha(X) - g^\alpha \tag{2.9}$$

verifica que

$$i_X \omega_L^\alpha = df^\alpha$$

y es una ley de conservación para las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Demostración:

Como X es una simetría de Cartan para L se sigue que $\mathcal{L}_X \omega_L^\alpha = 0$ y entonces las 1-formas $\mathcal{L}_X \theta_L^\alpha$ son cerradas. Por lo tanto, existen funciones locales g^α tales que $\mathcal{L}_X \theta_L^\alpha = dg^\alpha$, es decir

$$i_X d\theta_L^\alpha + d i_X \theta_L^\alpha = dg^\alpha,$$

o equivalentemente

$$i_X\omega_L^\alpha = d(\theta_L^\alpha(X) - g^\alpha).$$

Ahora se probará que las funciones $f^\alpha = \theta_L^\alpha(X) - g^\alpha$ definen una ley de conservación, para ello hay que probar que $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = 0$, para todo SOPDE lagrangiano integrable $\mathbf{\Gamma}$, donde se está utilizando el Lema 2.4.

Utilizando la ecuación (2.9) se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} i_X\theta_L^\alpha - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} g^\alpha = i_X\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta_L^\alpha + i_{[\Gamma_\alpha,X]}\theta_L^\alpha - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} g^\alpha \\ &= i_X dL + i_{[\Gamma_\alpha,X]}\theta_L^\alpha - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} g^\alpha, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde se ha utilizado en la última igualdad la ecuación (1.29).

Si se aplica i_{Γ_α} a ambos términos en la fórmula $\mathcal{L}_X\theta_L^\alpha = dg^\alpha$, sumando en α, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} g^\alpha &= i_{\Gamma_\alpha} dg^\alpha = i_{\Gamma_\alpha}\mathcal{L}_X\theta_L^\alpha = \mathcal{L}_X i_{\Gamma_\alpha}\theta_L^\alpha + i_{[\Gamma_\alpha,X]}\theta_L^\alpha \\ &= \mathcal{L}_X\Delta(L) + i_{[\Gamma_\alpha,X]}\theta_L^\alpha.\end{aligned}$$

Ahora, reemplazando $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} g^\alpha$, en la ecuación (2.10) se obtiene $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = -\mathcal{L}_X(E_L) = 0$. Además puesto que

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = 0 \quad , \quad i_X\omega_L^\alpha = df^\alpha.$$

utilizando el Lema 2.4 se sigue que f^α es una ley de conservación para L.

□

Se ha probado que si X es una simetría de Cartan para un lagrangiano L en T_k^1Q entonces existen funciones (locales) $f^\alpha \in C^\infty(T_k^1Q)$, que verifican $i_X\omega_L^\alpha = df^\alpha$, y definen una ley de conservación para L,

$$f^\alpha = \theta_L^\alpha(X) - g^\alpha \quad \text{donde} \quad \mathcal{L}_X\theta_L^\alpha = dg^\alpha$$

.

Se dirá que esta ley de conservación f^α está *inducida* por la simetría de Cartan X.

Para el caso $k = 1$ el recíproco de este teorema también es cierto: cualquier constante del movimiento de un lagrangiano está inducida por una simetría de Cartan. Sin embargo, *para $k > 1$, existen leyes de conservación que no están inducidas por simetrías de Cartan*, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 2.7 **a**) Se ha visto en el Ejemplo 2.2 que las funciones

$$f^1(u_1, u_2) = -2\sigma u_1 u_2 \quad , \quad f^2(u_1, u_2) = \sigma(u_1)^2 + \tau(u_2)^2 \, .$$

definen una ley de conservación para las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.34) de la cuerda vibrante.

Ahora se probará que esta ley de conservación no está inducida por una simetría de Cartan, es decir no existe una simetría de Cartan $X \in \mathfrak{X}(T_2^1\mathbb{R})$ verificando

$$i_X\omega_L^1 = df^1 \, , \quad i_X\omega_L^2 = df^2$$

Se escribe $X \in \mathfrak{X}(T_2^1\mathbb{R})$ como sigue

$$X = Z\frac{\partial}{\partial q} + Z_1\frac{\partial}{\partial u_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial u_2} \, .$$

como la expresión local de ω_L^1 es

$$\omega_L^1 = \sigma dq \wedge du_1,$$

se deduce que

$$i_X\omega_L^1 = \sigma(Zdu_1 - Z_1dq).$$

Si se verificase que $i_X\omega_L^1 = df^1$, se tendría que

$$\sigma(Zdu_1 - Z_1dq) = i_X\omega_L^1 = df^1 = \frac{\partial f^1}{\partial q}dq + \frac{\partial f^1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f^1}{\partial u_2}du_2 \, ,$$

lo que implicaría que $\dfrac{\partial f^1}{\partial u_2} = 0$, lo cual no es cierto, ya que en este caso $\dfrac{\partial f^1}{\partial u_2} = -2\sigma u_1$.

b) Considérese la ecuación de ondas 2-dimensional homogénea e isótropa

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial(t^1)^2} - c\frac{\partial^2\phi}{\partial(t^2)^2} - c\frac{\partial^2\phi}{\partial(t^3)^2} = 0, \tag{2.11}$$

ésta es la ecuación de Euler-Lagrange para el lagrangiano regular $L \in C^\infty(T_3^1\mathbb{R})$ definido por

$$\begin{array}{rccl} L \; : & T_3^1\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (q, u_1, u_2, u_3) & \mapsto & L(q, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}\left((u_1)^2 - c(u_2)^2 - (u_3)^2\right) . \end{array}$$

Los siguientes conjuntos de funciones en $T^1_3\mathbb{R}$ definen leyes de conservación para el lagrangiano anterior:

$$(1) \quad f^1(u_1,u_2,u_3) = (u_1)^2 + c(u_2)^2 + c(u_3)^2, \quad f^2(u_1,u_2,u_3) = -2cu_1u_2,$$
$$f^3(u_1,u_2,u_3) = -2cu_1u_3;$$

$$(2) \quad f^1(u_1,u_2,u_3) = 2u_1u_2, \quad f^2(u_1,u_2,u_3) = -(u_1)^2 - c(u_2)^2 + c(u_3)^2,$$
$$f^3(u_1,u_2,u_3) = -2cu_2u_3;$$

$$(3) \quad f^1(u_1,u_2,u_3) = 2u_1u_3, \quad f^2(u_1,u_2,u_3) = -2cu_2u_3,$$
$$f^3(u_1,u_2,u_3) = -(u_1)^2 + c(u_2)^2 - c(u_3)^2.$$

Se probará que $\left.\dfrac{\partial(f^\alpha \circ \phi^{(1)})}{\partial t^\alpha}\right|_t = 0$ para toda solución ϕ de las ecuaciones (2.11) para el caso (1), los otros dos se demuestran de manera análoga. En efecto, puesto que $\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial q} = 0$ para todo $\alpha = 1, 2, 3$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial(f^\alpha\circ\phi^{(1)})}{\partial t^\alpha}\right|_t &= \left.\frac{\partial f^\alpha}{\partial q}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^\alpha}\right|_t+\left.\frac{\partial f^\alpha}{\partial u_\beta}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\right|_t=\left.\frac{\partial f^\alpha}{\partial u_\beta}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^\alpha\partial t^\beta}\right|_t\\
&= \left.\frac{\partial f^1}{\partial u_1}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^1)^2}\right|_t+\left.\frac{\partial f^1}{\partial u_2}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^2}\right|_t+\left.\frac{\partial f^1}{\partial u_3}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^3}\right|_t\\
&\quad+\left.\frac{\partial f^2}{\partial u_1}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^2}\right|_t+\left.\frac{\partial f^2}{\partial u_2}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^2)^2}\right|_t+\left.\frac{\partial f^2}{\partial u_3}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2\partial t^3}\right|_t\\
&\quad+\left.\frac{\partial f^3}{\partial u_1}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^3}\right|_t+\left.\frac{\partial f^3}{\partial u_2}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2\partial t^3}\right|_t+\left.\frac{\partial f^3}{\partial u_3}\right|_{\phi^{(1)}(t)}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^3)^3}\right|_t\\
&= 2\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\right|_t\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^1)^2}+2c\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^2}\right|_t\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^2}\right|_t+2c\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^3}\right|_t\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^2}\\
&\quad-2c\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^2}\right|_t\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^2}\right|_t-2c\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\right|_t\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^2)^2}\right|_t\\
&\quad-2c\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^3}\right|_t\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial t^1\partial t^3}\right|_t-2c\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\right|_t\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^3)^2}\right|_t\\
&= 2\left.\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\right|_t\left(\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^1)^2}\right|_t-c\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^2)^2}\right|_t-c\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial (t^3)^2}\right|_t\right)=0\,,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado en la última igualdad que ϕ es solución de las ecuaciones (2.11). Por lo tanto, se ha probado que el conjunto de funciones (1) definen una ley de conservación.

A continuación se comprobará que las leyes de conservación (1), (2) y (3) no están inducidas por ninguna simetría de Cartan.

En primer lugar, utilizando la expresión local (1.24) de las 2-formas de Poincaré-Cartan ω_L^α para el lagrangiano L definido por (2.12) se obtiene que

$$\omega_L^1=dq\wedge du_1\,,\quad \omega_L^2=-c dq\wedge du_2\,,\quad \omega_L^3=-dq\wedge du_3\,.$$

Si se supone que la ley de conservación definida por (f^1,f^2,f^3) está inducida por una simetría de Cartan

$$X=Z\frac{\partial}{\partial q}+Z_1\frac{\partial}{\partial u_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial u_2}+Z_3\frac{\partial}{\partial u_3}\,,$$

entonces $i_X\omega_L^\alpha = df^\alpha$, en particular para $\alpha = 1$ se sigue que

$$\frac{\partial f^1}{\partial q} = Z^1\,, \quad \frac{\partial f^1}{\partial u_1} = Z\,, \quad \frac{\partial f^1}{\partial u_2} = 0\,, \quad \frac{\partial f^1}{\partial u_3} = 0\,.$$

Pero para cada uno de los tres conjuntos se obtiene que

$$\begin{aligned} &(1) \quad \frac{\partial f^1}{\partial u_2} = 2cu_2 \neq 0\,,\\ &(2) \quad \frac{\partial f^1}{\partial u_2} = 2u_1 \neq 0\,,\\ &(3) \quad \frac{\partial f^1}{\partial u_3} = 2u_1 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ninguna de estas leyes de conservación están inducidas por simetrías de Cartan.

El Teorema 2.6 muestra que cualquier simetría de Cartan de un lagrangiano L induce leyes de conservación (definidas localmente), para $k \geq 1$.

Como ya se ha mostrado en los Ejemplos 2.7, para el caso $k > 1$, existen leyes de conservación, que no están inducidas por simetrías de Cartan. Por lo tanto el recíproco del Teorema 2.6 no se verificará, a no ser que se impongan algunas hipótesis extra.

La siguiente proposición muestra una condición bajo la cual las leyes de conservación están inducidas por simetrías de Cartan.

Proposición 2.8 *Si se supone que existen las funciones $f^1, \dots, f^k \in C^\infty(T_k^1 Q)$, y un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$ tales que se verifican las identidades* (2.5), *es decir,*

$$i_X\omega_L^\alpha = df^\alpha\,, \quad 1 \leq \alpha \leq k\,.$$

Entonces $(f^1, \dots, f^k)$ define una ley de conservación para L si y sólo si X es una simetría de Cartan.

Demostración:

Utilizando el Lema 2.4 se probará que X es una simetría de Cartan si y sólo si $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = 0$ para todo SOPDE lagrangiano integrable $\mathbf{\Gamma}$.

De la fórmula (2.5), y el hecho de que $\mathbf{\Gamma}$ es lagrangiano, se tiene que

$$X(E_L) = i_X dE_L = -i_X i_{\Gamma_\alpha}\omega_L^\alpha = i_{\Gamma_\alpha} i_X \omega_L^\alpha = i_{\Gamma_\alpha} df^\alpha = \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha . \tag{2.12}$$

De la ecuación (2.5) se sigue que

$$\mathcal{L}_X \omega_L^\alpha = d i_X \omega_L^\alpha = d(df^\alpha) = 0\,.$$

Por lo tanto, X será una simetría de Cartan si y sólo si $X(E_L) = 0$ y, por la ecuación (2.12), esto es equivalente a que $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} f^\alpha = 0$.

□

Para el caso $k = 1$, la condición de regularidad del lagrangiano implica que la 2-forma de Poincaré-Cartan ω es una forma simpléctica y entonces la ecuación (2.5) siempre tiene una única solución.

Para el caso $k > 1$, fijadas las funciones $f^\alpha \in C^\infty(T^1_k Q)$, podría no haber soluciones $X \in \mathfrak{X}(T^1_k Q)$ verificando las ecuaciones (2.5).

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de leyes de conservación inducidas por simetrías de Cartan.

Ejemplos 2.9

(1) Sean los lagrangianos $L : T^1_2\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(a) \quad L(q,u_1,u_2) = \frac{1}{2}(\sigma u_1^2 - \tau u_2^2)\,, \qquad (b) \quad L(q,u_1,u_2) = \sqrt{1 + (u_1)^2 + (u_2)^2}$$

Se prueba directamente que el campo de vectores $X = \dfrac{\partial}{\partial q}$ en $T^1_2\mathbb{R}$ es una simetría de Cartan para ambos lagrangianos y las correspondientes leyes de conservación son respectivamente

$$(a) \qquad f^1 = \sigma u_1\,, \quad f^2 = -\tau u_2\,,$$

$$(b) \qquad f^1 = \frac{u_1}{\sqrt{1+(u_1)^2+(u_2)^2}}\,, \quad f^2 = \frac{u_2}{\sqrt{1+(u_1)^2+(u_2)^2}}\,.$$

Obsérvese que las ecuaciones de la cuerda vibrante y las ecuaciones de las superficies minimales son las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange para los lagrangianos anteriores, véase [81, 86].

(2) Para el lagrangiano $L : T^1_3\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(q, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}((u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2)$$

el campo de vectores $X = \dfrac{\partial}{\partial q}$ en $T^1_3\mathbb{R}$ es una simetría de Cartan, y la ley de conservación inducida es

$$f^1(u_1) = u_1\,, \quad f^2(u_2) = u_2\,, \quad f^3(u_3) = u_3\,.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a L son las ecuaciones de Laplace, [81].

(3) Para el lagrangiano $L : T^1_2\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(q^1, q^2, u^1_1, u^1_2, u^2_1, u^2_2) = \left(\frac{1}{2}\lambda + \nu\right)[(u^1_1)^2 + (u^2_2)^2] + \frac{1}{2}\nu[(u^1_2)^2 + (u^2_1)^2] + (\lambda+\nu)u^1_1 u^2_2\,,$$

el campo de vectores $X = \dfrac{\partial}{\partial q^1} + \dfrac{\partial}{\partial q^2}$ es una vez más una simetría de Cartan y la ley de conservación inducida es

$$f^1 = (\lambda + 2\nu)u^1_1 + \nu u^2_1 + (\lambda + \nu)u^2_2\,, \quad f^2 = (\lambda + \nu)u^1_1 + \nu u^1_2 + (\lambda + 2\nu)u^2_2.$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a L son las ecuaciones de Navier, véase [81, 86]

2.3. Campos de vectores Newtonoides

Los campos de vectores Newtonoides para el caso $k = 1$ fueron introducidos por Marmo y Mukunda en [69], los flujos de estos campos son difeomeomorfismos de TQ que transforman un SODE en otro SODE.

En esta sección se introducen los campos de vectores Newtonoides asociados a un SOPDE para el caso $k > 1$, se estudia la relación entre los campos de vectores Newtonoides y las simetrías de Cartan y se establece un teorema de Noether para ciertos campos de vectores Newtonoides.

Sea $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ un SOPDE y se considera el siguiente conjunto de campos de vectores en T^1_kQ

$$\mathfrak{X}_{\mathbf{\Gamma}} = \mathrm{Ker}\,(J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}) \subset \mathfrak{X}(T^1_kQ). \tag{2.13}$$

Sea X un campo de vectores con expresión local

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + X^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\,,$$

entonces por un cálculo directo se obtiene que

$$\begin{aligned}
[\Gamma_\alpha, X] &= \left[u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma^A_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + X^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} \right] \\
&= \left(\Gamma_\alpha(X^A) - X^A_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial q^A} + \left(\Gamma_\alpha(X^A_\beta) - X(\Gamma^A_{\alpha\beta})\right) \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Si $X \in \mathfrak{X}_{\mathbf{\Gamma}}$ entonces $J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} X = 0$, es decir, $\Gamma_\alpha(X^A) - X^A_\alpha = 0$. Por lo tanto, la expresión local de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}_{\mathbf{\Gamma}}$ es

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma_\alpha(X^A) \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\,. \tag{2.15}$$

Definición 2.10 .

i) *Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}_\Gamma$ se denomina Newtonoide con respecto a $\mathbf{\Gamma}$.*

ii) *Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(T^1_k Q)$ se denomina simetría dinámica del* SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ *si*

$$[\Gamma_\alpha, X] = 0 \quad \textit{para todo} \quad \alpha = 1, ..., k\,.$$

Por lo tanto $\mathfrak{X}_\Gamma$ es el conjunto de campos de vectores Newtonoides.

Las simetrías dinámicas $X \in \mathfrak{X}(T^1_k Q)$ generalizan el caso $k = 1$, donde $X \in \mathfrak{X}(TQ)$ es una simetría dinámica de $Y \in \mathfrak{X}(TQ)$ si y sólo si los flujos $\{h_s\}$ de X son simetrías de Y, es decir, $Th_s(Y) = Y$.

Lema 2.11 *Sea $\mathbf{\Gamma}$ un* SOPDE*. Si X es un simetría dinámica del* SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ *entonces X es un campo de vectores Newtonoide con respecto a $\mathbf{\Gamma}$.*

Demostración:

Sea $X \in \mathfrak{X}(T^1_k Q)$ una simetría dinámica de $\mathbf{\Gamma}$, es decir $[\Gamma_\alpha, X] = 0$. Por la identidad (2.14) se concluye que $\mathbf{X}$ debe verificar

$$\Gamma_\alpha(X^A) = X^A_\alpha\,, \quad \Gamma_\alpha(X^A_\beta) = X(\Gamma^A_{\alpha\beta})$$

y por lo tanto de la primera de estas ecuaciones se obtiene que X es un campo de vectores Newtonoide con respecto a Γ.

$\square$

En el siguiente lema se aportan algunas propiedades al conjunto de campos de vectores Newtonoides.

Lema 2.12 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *un* SOPDE, *y la aplicación*

$$\pi_\Gamma : \mathfrak{X}(T^1_kQ) \to \mathfrak{X}(T^1_kQ)\,,$$

definida por $\pi_\Gamma = \mathrm{Id} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}$.

i) Se verifica que $\pi_\Gamma \circ \pi_{\Gamma'} = \pi_\Gamma$, *para cualesquiera* SOPDE*s* $\mathbf{\Gamma}$ *y* $\mathbf{\Gamma}'$. *En particular se tiene que* $\pi^2_\Gamma = \pi_\Gamma$ *y por lo tanto* π_Γ *es un proyector.*

ii) Se verifica

$$\mathrm{Im}\,\pi_\Gamma = \mathfrak{X}_\Gamma \;,\; \mathrm{Ker}\,\pi_\Gamma = \mathfrak{X}^v(T^1_kQ)\,,$$

y entonces la siguiente sucesión

$$0 \to \mathfrak{X}^v(T^1_kQ) \xrightarrow{i} \mathfrak{X}(T^1_kQ) \xrightarrow{\pi_\Gamma} \mathfrak{X}_\Gamma \to 0$$

es exacta, donde $\mathfrak{X}^v(T^1_kQ)$ *es el módulo de campos de vectores verticales e* i *es la inclusión.*

iii) Para $f \in C^\infty(T^1_kQ)$ *y* $X \in \mathfrak{X}_\Gamma$, *se define el producto*

$$f * X = \pi_\Gamma(fX) = fX + \Gamma_\alpha(f)J^\alpha X \in \mathfrak{X}_\Gamma. \tag{2.16}$$

El conjunto $\mathfrak{X}_\Gamma$ *es un* $C^\infty(T^1_kQ)$*-módulo con respecto al producto* $*$.

iv) Un campo de vectores X *en* T^1_kQ *es un Newtonoide para* $\mathbf{\Gamma}$ *si y sólo si tiene la siguiente expresión local*

$$X = X^A(q,u) * \frac{\partial}{\partial q^A}. \tag{2.17}$$

Demostración:

i) Usando la definición de la aplicación π_Γ se sigue que

$$\begin{aligned}\pi_\Gamma \circ \pi_{\Gamma'} &= (\mathrm{Id} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}) \circ (\mathrm{Id} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma'_\alpha}) \\ &= \mathrm{Id} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma'_\alpha} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} \circ J^\beta \circ \mathcal{L}_{\Gamma'_\beta}.\end{aligned}$$

Por otro lado, se calcula directamente

$$\begin{aligned}(J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} \circ J^\beta)(X) &= (J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha})(X^A \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}) = J^\alpha([\Gamma_\alpha, X^A \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}]) \\ &= J^\alpha \left(\Gamma_\alpha(X^A) \frac{\partial}{\partial u^A_\beta} - X^A \delta^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial q^A} - X^A \frac{\partial \Gamma^B_{\alpha\gamma}}{\partial u^A_\beta} \frac{\partial}{\partial u^B_\gamma} \right) \\ &= -X^A \delta^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} = -J^\beta(X)\,,\end{aligned}$$

donde $X = X^A \dfrac{\partial}{\partial q^A} + X^A_\alpha \dfrac{\partial}{\partial u^A_\alpha}$, es decir, $J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} \circ J^\beta = -J^\beta$, y por lo tanto se sigue que

$$\pi_\Gamma \circ \pi_{\Gamma'} = \mathrm{Id} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma'_\alpha} - J^\beta \circ \mathcal{L}_{\Gamma'_\beta} = \mathrm{Id} + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} = \pi_\Gamma,$$

lo que demuestra que la primera parte del lema.

ii) Usando la ecuación (2.14), para $X = X^A \dfrac{\partial}{\partial q^A} + X^A_\alpha \dfrac{\partial}{\partial u^A_\alpha}$ se tiene que

$$\pi_\Gamma(X) = X + \left(\Gamma_\alpha(X^A) - X^A_\alpha\right) \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma_\alpha(X^A) \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha},$$

lo que muestra que $\operatorname{Im} \pi_\Gamma = \mathfrak{X}_\Gamma$.

Además de la expresión de $\pi_\Gamma(X)$ se obtiene que $X \in \operatorname{Ker} \pi_\Gamma$ si y sólo si $X^A = 0$, es decir X es vertical; o equivalentemente $\operatorname{Ker} \pi_\Gamma = \mathfrak{X}^v(T^1_k Q)$.

iii) Puesto que $(\mathfrak{X}(T^1_k Q), \cdot)$ es un $C^\infty(T^1_k Q)$-módulo, y utilizando el producto $*$ definido en fórmula (2.16),

$$f * X = \pi_\Gamma(fX)\,,$$

la aplicación π_Γ lleva dicha estructura de $C^\infty(T^1_k Q)$-módulo a $(\mathfrak{X}_\Gamma, *)$.

iv) Se tiene que $\operatorname{Im} \pi_\Gamma = \mathfrak{X}_\Gamma$. Además $X \in \mathfrak{X}_\Gamma$ si y sólo si $X = \pi_\Gamma(X)$. Usando las propiedades anteriores de la aplicación π_Γ, un campo de vectores X en $T^1_k Q$ está localmente dado por la fórmula (2.17), es decir,

$$X = X^A(q,u) * \frac{\partial}{\partial q^A} = \pi_\Gamma(X^A \frac{\partial}{\partial q^A}) = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma_\alpha(X^A) \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\,,$$

si y sólo si X es un Newtonoide para $\mathbf{\Gamma}$. □

De la ecuación (1.5) se sigue que el levantamiento compoleto $X^C \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(Q)$ es un campo de vectores Newtonoide para un SOPDE arbitrario $\mathbf{\Gamma}$, ya que como, $\dfrac{\partial X^A}{\partial u^B_\beta} = 0$ se obtiene

$$X^C = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + u^A_\alpha \frac{\partial X^B}{\partial q^A}\frac{\partial}{\partial u^B_\alpha} = X^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma_\alpha(X^B)\frac{\partial}{\partial u^B_\alpha}$$

En la siguiente proposición se probará que el conjunto de campos de vectores Newtonoides contiene también las simetrías de Cartan.

Proposición 2.13 *Sea L un lagrangiano regular en T^1_kQ.*

Si $X \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ es una simetría de Cartan entonces X es un campo de vectores Newotonoide con respecto a todo SOPDE $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(T^1_kQ)$.

Demostración:

Dado que $X \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ es una simetría de Cartan y $\mathbf{\Gamma}$ es lagrangiano se verifica

$$\mathcal{L}_X\omega^\alpha_L = 0 \quad , \quad \mathcal{L}_X E_L = 0 \quad , \quad i_{\Gamma_\alpha}\omega^\alpha_L = dE_L\,. \tag{2.18}$$

Si se aplica la derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ a ambos lados de la tercera ecuación anterior, se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X i_{\Gamma_\alpha}\omega^\alpha_L &= i_{\Gamma_\alpha}\mathcal{L}_X\omega^\alpha_L - i_{[\Gamma_\alpha,X]}\omega^\alpha_L\,, \\ \mathcal{L}_X dE_L &= d\mathcal{L}_X E_L\,, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$i_{\Gamma_\alpha}\mathcal{L}_X\omega^\alpha_L - i_{[\Gamma_\alpha,X]}\omega^\alpha_L = d\mathcal{L}_X E_L \tag{2.19}$$

De (2.18) y de (2.19) se deduce que

$$i_{[\Gamma_\alpha,X]}\omega^\alpha_L = 0. \tag{2.20}$$

Ahora se probará que la ecuación (2.20) implica que $J^\alpha[\Gamma_\alpha, X] = 0$ y por lo tanto X será un campo de vectores Newtonoide con respecto a $\mathbf{\Gamma}$. Usando la fórmula (2.14), se tiene que

$$[\Gamma_\alpha, X] = V^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + V^A_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, \tag{2.21}$$

donde $V_\alpha^A = \Gamma_\alpha(X^A) - X_\alpha^A$ y $V_{\alpha\beta}^A = \Gamma_\alpha(X_\beta^A) - X(\Gamma_{\alpha\beta}^A)$. De la ecuación (1.24), se sigue que las 2-formas k-simplécticas ω_L^α se pueden escribir como sigue

$$\omega_L^\alpha = a_{AB}^\alpha dq^A \wedge dq^B + g_{AB}^{\alpha\beta} dq^A \wedge du_\beta^B, \tag{2.22}$$

donde

$$a_{AB}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u_\alpha^A} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^A \partial u_\alpha^B}\right), \quad g_{AB}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^A \partial u_\beta^B}.$$

Reemplazando ahora las fórmulas (2.21) y (2.22) en la ecuación (2.20) obtenemos

$$\left(2a_{AB}^\alpha V_\alpha^B - g_{AB}^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta}^B\right) dq^A + g_{AB}^{\alpha\beta} V_\alpha^A du_\beta^B = 0,$$

lo que implica que $g_{AB}^{\alpha\beta} V_\alpha^A = 0$.

Puesto que el lagrangiano L es regular se sigue que $g_{AB}^{\alpha\beta}$ tiene rango máximo y entonces $V_\alpha^A = \Gamma_\alpha(X^A) - X_\alpha^A = 0$, lo que demuestra que X es un campo de vectores Newotonoide con respecto al SOPDE Γ.

$\square$

En la proposición anterior se ha probado que las simetrías de Cartan son campos de vectores Newtonoides. En el siguiente teorema se demuestra que bajo ciertas hipótesis los campos de vectores Newtonoides inducen simetrías de Cartan y por lo tanto leyes de conservación. Este teorema generaliza el resultado obtenido en el caso $k = 1$ por Marmo y Mukunda [69] para lagrangianos regulares.

Teorema 2.14 *Sea L un lagrangiano regular en $T_k^1 Q$. Supóngase que existe $X \in \mathfrak{X}(T_k^1 Q)$ y $(g^1, \ldots, g^k) \in C^\infty(T_k^1 Q)$ tal que*

$$\pi_\Gamma(X)(L) = \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} g^\alpha, \quad \forall \text{ SOPDE } \Gamma_\alpha. \tag{2.23}$$

Entonces, se verifica:

i) Si Γ es lagrangiano entonces $\pi_\Gamma(X)$ es una simetría de Cartan para L.

ii) Las funciones $f^\alpha = \theta_L^\alpha(X) - g^\alpha$ definen una ley de conservación para L.

Demostración:

i) Dado que Γ es lagrangiano, hay que probrar que

$$(a) \quad \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\omega_L^\alpha = 0 \quad , \quad (b) \quad \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}E_L = 0 \quad .$$

(a) Para cada $\alpha \in \{1, ..., k\}$ se denotan las 1-formas

$$\eta^\alpha = \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\theta_L^\alpha - dg^\alpha. \tag{2.24}$$

Primero se prueba que

$$i_{V_\alpha}\eta^\alpha = 0 \quad , \quad L_{\Gamma_\alpha}\eta^\alpha(V) = 0$$

para campos de vectores verticales arbitrarios $V, V_1, V_2, \ldots, V_k$.

La primera de las anteriores condiciones es equivalente al hecho de que $\eta^\alpha = \eta_A^\alpha dq^A$ son 1-formas semi-básicas. Además, utilizando el hecho de que

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\eta^\alpha = \Gamma_\alpha(\eta_A^\alpha)dq^A + \eta_A^\alpha du_\alpha^A\,,$$

se sigue que las segunda condición implicará $\eta^\alpha = 0$.

Sea $\Gamma_\alpha \in \mathfrak{X}(T_k^1Q)$ un SOPDE y V_α un campo de vectores vertical. Se sigue que $\Gamma'_\alpha = \Gamma_\alpha - V_\alpha$ también es un SOPDE. Ahora si se utiliza que θ_L^α son 1-formas semi-básicas y V_α son campos de vectores verticales, se tiene que $i_{V_\alpha}\theta_L^\alpha = 0$. Además, haciendo uso de las correspondientes reglas conmutativas, se obtiene que

$$\begin{aligned}
i_{V_\alpha}\eta^\alpha &= i_{V_\alpha}\mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\theta_L^\alpha - i_{V_\alpha}dg^\alpha = i_{V_\alpha}\mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\theta_L^\alpha - \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}i_{V_\alpha}\theta_L^\alpha - i_{V_\alpha}dg^\alpha \\
&= i_{[V_\alpha,\pi_\Gamma(X)]}\theta_L^\alpha - i_{V_\alpha}dg^\alpha = i_{J^\alpha[V_\alpha,\pi_\Gamma(X)]}dL - i_{V_\alpha}dg^\alpha \\
&= i_{\pi_\Gamma(X)}dL - i_{\pi_{\Gamma'}(X)}dL - i_{V_\alpha}dg^\alpha = \Gamma_\alpha(g^\alpha) - \Gamma'_\alpha(g^\alpha) - V_\alpha(g^\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

En los cálculos anteriores se ha utilizado que

$$\pi_\Gamma(X) - \pi_{\Gamma'}(X) = X + J^\alpha[\Gamma_\alpha, X] - X - J^\alpha[\Gamma'_\alpha, X] = J^\alpha[\Gamma_\alpha - \Gamma'_\alpha, X] = J^\alpha[V_\alpha, \pi_\Gamma(X)]$$

y el hecho de que los SOPDEs $\mathbf{\Gamma}$ and $\mathbf{\Gamma}'$ satisfacen las hipótesis (2.23).

Si se fija ahora $\mathbf{\Gamma}$ un SOPDE lagrangiano, y como L es regular entonces se verifica $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta_L^\alpha = dL$. Utilizando la notación (2.24) se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\eta^\alpha &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\theta_L^\alpha - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}dg^\alpha = \mathcal{L}_{[\Gamma_\alpha,\pi_\Gamma(X)]}\theta_L^\alpha + \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta_L^\alpha - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}dg^\alpha \\
&= i_{[\Gamma_\alpha,\pi_\Gamma(X)]}\omega_L^\alpha + \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}dL - d\Gamma_\alpha(g^\alpha) = i_{[\Gamma_\alpha,\pi_\Gamma(X)]}\omega_L^\alpha + d(\pi_{\mathbf{\Gamma}}(X)(L) - \Gamma_\alpha(g^\alpha)) \\
&= i_{[\Gamma_\alpha,\pi_\Gamma(X)]}\omega_L^\alpha.
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $[\Gamma_\alpha, \pi_\Gamma(X)]$ es un campo de vectores vertical, y la estructura k-simpléctica en la fórmula (1.24) se anula cuando se evalúa en pares de campos de vectores verticales, se sigue que para un campo de vectores vertical arbitrario V se tiene

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\eta^\alpha(V) = \omega_L^\alpha([\Gamma_\alpha, \pi_\Gamma(X)], V) = 0.$$

Luego, se ha probado que $\eta^\alpha = 0$, lo que significa que

$$\mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\theta_L^\alpha = dg^\alpha. \tag{2.25}$$

Si ahora se aplica la derivada exterior en la fórmula anterior se sigue que $\mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\omega_L^\alpha = 0$.

(b) Con la finalidad de probar que $\pi_\Gamma(X)$ es una simetría de Cartan, se probará que $\pi_\Gamma(X)(E_L) = 0$. Para esto se utiliza el hecho de que $\Delta = J^\alpha(\Gamma_\alpha)$ y entonces $\Delta(L) = i_\Delta dL = i_{\Gamma_\alpha}\theta_L^\alpha$. Además,

$$\begin{aligned}
\pi_\Gamma(X)(E_L) &= \pi_\Gamma(X)(\Delta(L)) - \pi_\Gamma(X)(L) = \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)} i_{\Gamma_\alpha}\theta_L^\alpha - \mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}L \\
&= i_{[\pi_{\mathbf{\Gamma}}(X),\Gamma_\alpha]}\theta_L^\alpha + i_{\Gamma_\alpha}\mathcal{L}_{\pi_{\mathbf{\Gamma}}(X)}\theta_L^\alpha - \pi_{\mathbf{\Gamma}}(X)(L) \\
&= i_{\Gamma_\alpha}\mathcal{L}_{\pi_{\mathbf{\Gamma}}(X)}\theta_L^\alpha - \Gamma_\alpha(g^\alpha) \\
&= i_{\Gamma_\alpha}\left(\mathcal{L}_{\pi_\Gamma(X)}\theta_L^\alpha - dg^\alpha\right) = 0\,,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado una vez más que $[\pi_{\mathbf{\Gamma}}(X), \Gamma_\alpha]$ es vertical y por lo tanto $i_{[\pi_{\mathbf{\Gamma}}(X),\Gamma_\alpha]}\theta_L^\alpha = 0$.

ii) Se ha probado que $\pi_\Gamma(X)$ es una simetría de Cartan y satisface la fómula (2.25). Teniendo en cuenta que $J^\alpha \circ \pi_\Gamma = J^\alpha$ y el Teorema de Noether 2.6 se sigue que las funciones $f^\alpha = \theta_L^\alpha(\pi_\Gamma(X)) - g^\alpha = \theta_L^\alpha(X) - g^\alpha$ definen una ley de conservación para L.

□

El Teorema 2.14 extiende los resultados del Corolario 3.14 en [92]. Si $X = Z^C$ para algún $Z \in \mathfrak{X}(Q)$ y $g^\alpha \in C^\infty(Q)$ entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}g^\alpha &= \Gamma_\alpha(g^\alpha) = u_\alpha^A\frac{\partial g^\alpha}{\partial q^A} \\
\pi_{\mathbf{\Gamma}}(X) &= \pi_{\mathbf{\Gamma}}(Z^C) = Z^C + J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}Z^C = Z^C
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que Z^C es Newtonoide, es decir, $J^\alpha \circ \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}Z^C = 0$. Por lo tanto la condición (2.23) se convierte en

$$Z^C(L) = u_\alpha^A\frac{\partial g^\alpha}{\partial q^A}\,.$$

En caso de que se verifique la condición anterior, Z^C es una simetría de Cartan y las funciones

$$f^\alpha = \theta_L^\alpha(Z^C) - g^\alpha = Z^{V_\alpha}(L) - g^\alpha$$

definen una ley de conservación.

Capítulo 3

Campos de k-vectores invariantes

En este capítulo se considera la acción (libre y propia) de un grupo de Lie G sobre una variedad M, y su extensión natural a la acción del grupo de Lie sobre T^1_kQ. Esto permite introducir la noción de campos de k-vectores G-invariantes en T^1_kQ, y campos de k-vectores reducidos en T^1_kQ/G.

Se describirá la integrabilidad de dichos campos de k-vectores en términos de la anulación de la curvatura de ciertas conexiones asociadas a dichos campos de k-vectores.

3.1. Conexión asociada a un campo de k-vectores e integrabilidad

En esta sección se describe la conexión en el fibrado trivial

$$\mathbb{R}^k \times M \to M$$

asociada a cada campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k) \in \mathfrak{X}^k(M)$, y se demuestra que la integrabilidad de $\mathbf{X}$ equivale a la anulación de la curvatura de dicha conexión, o también a que los corchetes $[X_\alpha, X_\beta]$ sean nulos, para cada $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$.

3.1.1. Conexión en un fibrado

En esta sección se recordará la noción de conexión en un fibrado arbitrario, y se fijarán notaciones.

Sea $p : E \to B$ un fibrado. Para cada $e \in E$, el espacio vertical V_eE en el punto e es el núcleo de la aplicación tangente

$$p_*(e) : T_eE \to T_{p(e)}B,$$

por lo tanto, la distribución vertical es

$$VE = \{V_eE = \, ker\, p_*(e) \mid e \in E\} \, .$$

Se denotará por $E \times_B TB$ el fibrado pull-back de $p : E \to B$ mediante la proyección $\tau_B \colon TB \to B$.

Sea

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & VE \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & TE \arrow[r, "j"] \arrow[d] & E \times_B TB \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\ & & E & & \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

la sucesión exacta corta de fibrados sobre E, donde j es la aplicación definida por

$$\begin{array}{rccl} j & : & TE & \to & E \times_B TB \\ & & v_e & \mapsto & (e, p_*(e)(v_e)) \, . \end{array}$$

e i es la inclusión canónica.

Una conexión en $p \colon E \to B$ está definida por una escisión por la derecha

$$\gamma : E \times_B TB \to TE \, ,$$

de la sucesión exacta corta (3.1), es decir una aplicación lineal γ que verifica

$$j \circ \gamma = Id_{E \times_B TB} \, ,$$

o por la correspondiente escisión por la izquierda (proyector vertical)

$$\omega = Id_{TE} - \gamma \circ j : TE \to VE \subset TE \, .$$

La aplicación

$$h = Id_{TE} - \omega = \gamma \circ j$$

se denomina *proyector horizontal* de la conexión.

Cada conexión da lugar a la siguiente descomposición del espacio tangente a la variedad E en cada punto

$$T_eE = Im\,\gamma \oplus Im\,i\; = H_eE \oplus V_eE$$

o a la descomposición

$$TE = Im\,h \oplus Im\,\omega\; = HE \oplus VE$$

en suma directa de los subfibrados horizontal HE y vertical VE.

La sucesión exacta corta anterior se extiende naturalmente al nivel de secciones de los correspondientes fibrados en E,

$$0 \to Sec(VE) \to \mathfrak{X}(E) \to Sec(E \times_B TB) \to 0.$$

y tanto h como ω se pueden ver como campos de tensores, de tipo $(1,1)$, en E.

Definición 3.1 *La curvatura de la conexión es el campo de tensores de tipo* $(1,2)$ *en* E*, definido por*

$$\begin{array}{rcccl} K & : & \mathfrak{X}(E)\times\mathfrak{X}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^V(E) \\ & & (X,Y) & \mapsto & -\omega([hX,hY]) \end{array}$$

para cualesquiera campos de vectores $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$.

En la literatura se encuentran diferentes convenciones relacionadas con el signo de la definición de la curvatura. En esta memoria se ha decidido utilizar una coherente con [1] y [21] para acciones por la izquierda.

Sea T un campo de vectores en B. Se define su *levantamiento horizontal* T^h como el campo de vectores en E definido por

$$T^h(e) = \gamma(e, T(p(e)))\,. \tag{3.2}$$

También se utilizará el término "curvatura" para la restricción de K a dos levantamientos horizontales y se utilizará la siguiente notación

$$K(T,S) = -\omega([T^h, S^h]) \in \mathfrak{X}^V(E) \tag{3.3}$$

donde $T, S \in \mathfrak{X}(B)$.

Sean X e Y dos campos de vectores en E que proyectan en los campos T y S en B respectivamente, es decir, $T = Tp \circ X$ y $S = Tp \circ Y$, en este caso se obtiene que

$$T^h(e) = \gamma(e, T(p(e))) = \gamma(e, p_*(e)X(e)) = (\gamma \circ j)(X_e) = h(X_e)\,,$$

por lo tanto $T^h = h(X)$ y del mismo modo $S^h = h(Y)$. Teniendo en cuenta estas identidades se tiene la siguiente relación,

$$K(T, S) = -\omega([T^h, S^h]) = -\omega([h(X), h(Y)]) = K(X, Y)\,.$$

Por lo tanto, para el caso de campos de vectores X e Y proyectables, las dos definiciones alternativas de curvatura coinciden. En las siguientes secciones se se utilizarán ambas definiciones.

3.1.2. Conexión asociada a un campo de k-vectores $\mathbf{X}$

En esta sección utilizaremos los conceptos de campos de jets y secciones integrales de campos de jets, véase [98].

Sea M una variedad diferenciable. Una sección arbitraria del fibrado trivial

$$\pi \colon \mathbb{R}^k \times M \to \mathbb{R}^k$$

es de la forma

$$(Id_{\mathbb{R}^k}, \phi) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \times M\,,$$

donde ϕ es una función de $\mathbb{R}^k$ en M.

El fibrado de jets $J^1\pi$ se identifica con $\mathbb{R}^k \times T^1_k M$, del siguiente modo:

$$j^1_t(Id_{\mathbb{R}^k}, \phi) \equiv \left(t, (\ldots, \phi_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t), \ldots)\right) = (t, \phi^{(1)}(t)).$$

Para cada campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$, el par

$$(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X}) \colon \mathbb{R}^k \times M \to \mathbb{R}^k \times T^1_k M,$$

define un *campo de jets en* π, esto es, una sección de la proyección canónica

$$\pi_{1,0} : J^1\pi \equiv \mathbb{R}^k \times T^1_k M \to \mathbb{R}^k \times M\,;$$

véase el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & J^1\pi \equiv \mathbb{R}^k \times T^1_k M \arrow[dl, "\pi_{1,0}"'] \arrow[dd, "\pi_1"] \\
\mathbb{R}^k \times M \arrow[ur, bend left, "(Id_{\mathbb{R}^k},\mathbf{X})"] \arrow[dr, "\pi"'] & \\
 & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
\; .
$$

En coordenadas locales, la sección $(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X})$ se escribe como

$$(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X})(t^\alpha, x^I) = (t^\alpha, x^I, X^I_\alpha(x))\,, \quad 1 \leq I \leq dim\, M,$$

donde $X_\alpha = X^I_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^I}$.

Una sección $\bar{\psi} = (Id_{\mathbb{R}^k}, \psi)$ de π se llama sección integral del campo de jets $(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X})$ si

$$j^1\bar{\psi} = (Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X}) \circ \bar{\psi}\,.$$

Puesto que

$$j^1_t\bar{\psi} = j^1_t(Id_{\mathbb{R}^k}, \psi) = (t, \psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)) = (Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X}) \circ \bar{\psi}(t) = (t, X_\alpha(\psi(t))\,,$$

se deduce que

$(Id_{\mathbb{R}^k}, \psi)$ *es sección integral de* $(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X})$ *si y sólo si* ψ *es sección integral de* $\mathbf{X}$.

Es bien conocido que cada campo de jets se interpreta como una conexión (véase [98] para más detalles).

En nuestro caso, el campo de jets $(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X})$ asociado a $\mathbf{X}$ se identifica con una conexión en el fibrado trivial $\pi\colon \mathbb{R}^k \times M \to \mathbb{R}^k$, es decir con una conexión $\gamma^{\mathbf{X}}$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{R}^k \times TM \arrow[r, "i"] & T(\mathbb{R}^k \times M) \arrow[r, "j"] & M \times T\mathbb{R}^k \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\gamma^{\mathbf{X}}"] & 0
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

en el fibrado trivial $\mathbb{R}^k \times M$; donde se han utilizado las identificaciones:

$$V(\mathbb{R}^k \times M) = \mathbb{R}^k \times TM \quad \text{y} \quad (\mathbb{R}^k \times M) \times_{\mathbb{R}^k} T\mathbb{R}^k = M \times T\mathbb{R}^k\,,$$

que se describen a continuación

$$\begin{aligned} V_{(t,m)}(\mathbb{R}^k \times M) &= \{Z_{(t,m)} \in T(\mathbb{R}^k \times M) \mid \pi_*(t,m)(Z_{(t,m)}) = 0\} \\ &= \{Z_{(t,m)} \in T(\mathbb{R}^k \times M) \mid Z_{(t,m)} = Z^I \frac{\partial}{\partial x^I}\Big|_{(t,m)}\} \\ &\equiv (t, Z^I \frac{\partial}{\partial x^I}\Big|_m) \in \mathbb{R}^k \times TM\,, \end{aligned}$$

y

$$(\mathbb{R}^k \times M) \times_{\mathbb{R}^k} T\mathbb{R}^k = \{((t,m), v_t) \in (\mathbb{R}^k \times M) \times T\mathbb{R}^k\} \equiv M \times T\mathbb{R}^k\,.$$

Entonces puesto que la aplicación $j\colon T(\mathbb{R}^k \times M) \to M \times T\mathbb{R}^k$ está definida por:

$$\begin{aligned} j(Z_{(t,m)}) &= j(T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,m)} + Z^I \frac{\partial}{\partial x^I}\Big|_{(t,m)}) = ((t,m), \pi_*(t,m) Z_{(t,m)}) \\ &= ((t,m), T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t) = (m, T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t) \in M \times T\mathbb{R}^k \end{aligned}$$

la conexión

$$\gamma^{\mathbf{X}}\colon M \times T\mathbb{R}^k \to T(\mathbb{R}^k \times M)$$

en el fibrado

$$\mathbb{R}^k \times M \to \mathbb{R}^k$$

asociada a $\mathbf{X}$ tiene la siguiente expresión local

$$\gamma^{\mathbf{X}}(m, T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t) = T^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,m)} + X^I_\alpha(m) \frac{\partial}{\partial x^I}\Big|_{(t,m)} \right). \tag{3.5}$$

La escisión por la izquierda

$$\omega^{\mathbf{X}}\colon T(\mathbb{R}^k \times M) \to V(\mathbb{R}^k \times M) \equiv \mathbb{R}^k \times TM$$

es

$$\omega^{\mathbf{X}} = Id_{T(\mathbb{R}^k \times M)} - \gamma^{\mathbf{X}} \circ j\,,$$

y teniendo en cuenta las identificaciones anteriores, su expresión local es

$$\omega^{\mathbf{X}} \left(T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,m)} + Y^I \frac{\partial}{\partial x^I}\Big|_{(t,m)} \right) = \left(t, (Y^I - X^I_\alpha T^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^I}\Big|_m \right) \in \mathbb{R}^k \times TM. \tag{3.6}$$

Se ha visto que el campo de jets $(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X})$ es integrable, si y sólo si $\mathbf{X}$ es integrable. Se puede comprobar fácilmente (véase la Proposición 4.6.10 en [98]) que $(Id_{\mathbb{R}^k}, \mathbf{X})$ es integrable si y sólo si la curvatura $K^{\mathbf{X}}$ de la conexión asociada a $\mathbf{X}$ es idénticamente nula.

Resumiendo, se verifica

Proposición 3.2 *El campo de k-vectores $\mathbf{X}$ es integrable si y sólo si la curvatura $K^{\mathbf{X}}$ de la conexión asociada a $\mathbf{X}$ es idénticamente nula.*

$\square$

Sean T y S dos campos de vectores en $\mathbb{R}^k$ con expresión local

$$T = T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \quad \text{y} \quad S = S^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

entonces, de (3.5) y (3.6) se obtiene que:

$$K^{\mathbf{X}}(T,S) = -\omega^{\mathbf{X}}([\gamma^{\mathbf{X}}(T), \gamma^{\mathbf{X}}(S)]) = -T^\alpha S^\beta [X_\alpha, X_\beta]\,.$$

De la Proposición 3.2 y de esta última identidad se deduce

Proposición 3.3 *El campo de k-vectores $\mathbf{X}$ es integrable, si y sólo si la curvatura $K^{\mathbf{X}}$ de la conexión asociada es idénticamente nula, o equivalentemente con $[X_\alpha, X_\beta] = 0$,es decir*

$$X^I_\alpha \frac{\partial X^J_\beta}{\partial x^I} - X^I_\beta \frac{\partial X^J_\alpha}{\partial x^I} = 0, \tag{3.7}$$

para todo punto de M.

$\square$

Observación 3.4 Para el caso particular $M = T^1_k Q$ y $\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma}$ un SOPDE, la condición de integrabilidad anterior (3.7),

$$0 = [X_\alpha, X_\beta] = \left(X^I_\alpha \frac{\partial X^J_\beta}{\partial x^I} - X^I_\beta \frac{\partial X^J_\alpha}{\partial x^I} \right) \frac{\partial}{\partial x^I} = \big(X_\alpha(X^J_\beta) - X_\beta(X^J_\alpha) \big) \frac{\partial}{\partial x^I}$$

se escribe, en coordenadas canónicas (q^A, u^A_α) de $T^1_k Q$ como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= [\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = \big(\Gamma_\alpha(u^A_\beta) - \Gamma_\beta(u^A_\alpha)\big) \frac{\partial}{\partial q^A} + \big(\Gamma_\alpha(\Gamma^A_{\beta\gamma}) - \Gamma_\beta(\Gamma^A_{\alpha\gamma})\big) \frac{\partial}{\partial u^A_\gamma} \\ &= \big(\Gamma^A_{\alpha\beta} - \Gamma^A_{\beta\alpha}\big) \frac{\partial}{\partial q^A} + \big(\Gamma_\alpha(\Gamma^A_{\beta\gamma}) - \Gamma_\beta(\Gamma^A_{\alpha\gamma})\big) \frac{\partial}{\partial u^A_\gamma} \end{aligned}$$

por lo tanto, las condiciones de integrabilidad (3.7) son equivalentes a las condiciones de integrabilidad (1.19).

3.2. Campos de k-vectores invariantes

En esta sección, a partir de una acción $\Phi : G\times M \to M$ se define de modo canónico la acción k-tangente $\Phi^{T^1_k M}\colon G \times T^1_k M \to T^1_k M$ que permite introducir los campos de vectores y k-vectores G-invariantes, tanto en M como en $T^1_k M$.

Sean (x^I) (con $I = 1,\dots,\dim M = m$) coordenadas locales en $U \subset M$ entonces las coordenadas locales inducidas (x^I, u^I) en $TU = \tau_M^{-1}(U)$ son

$$x^I(u_m) = x^I(m), \qquad u^I(u_m) = u_m(x^I), \quad u_m \in T_m M,$$

y las coordenadas

$$x^I(\mathbf{u}_m) = x^I(m)\ ,\ u^I_\alpha(\mathbf{u}_m) = u_{\alpha_m}(x^I)$$

donde $\mathbf{u}_m \in T^1_k U = (\tau^1_M)^{-1}(U)$, $I = 1,\dots,\dim M$; $\alpha = 1,\dots,k$; es decir u^I_α son las α-ésimas componentes del vector u_{α_m} de $\mathbf{u}_m$ con respecto a la base natural de $T_m M$.

Sea

$$\Phi : G\times M \to M$$

una acción libre y propia de un grupo de Lie G conexo en M. Entonces, la proyección

$$\pi_M : M \to M/G$$

en el conjunto de clases de equivalencia define una estructura de fibrado principal en M.

Se denotará por $\Phi_g\colon M \to M$ y $\Phi_m\colon G \to M$ las aplicaciones

$$\Phi_g(m) = \Phi(g,m) = g\,m, \quad \Phi_m(g) = \Phi(g,m) = g\,m\,.$$

Definición 3.5 **(1)** *Un campo de vectores W en M se dice que es invariante si*

$$(\Phi_g)_*(m)(W(m)) = W(\Phi_g(m))\,,$$

para todo $g \in G$ y $m \in M$.

(2) *El campo de vectores reducido $\breve{W} \in \mathfrak{X}(M/G)$ está definido por la relación*

$$\breve{W} \circ \pi_M = T\pi_M \circ W \tag{3.8}$$

es decir

$$\breve{W}(\pi_M(m)) = (\pi_M)_*(m)(W(m))\,,$$

para todo $m \in M$.

Del mismo modo, toda función invariante

$$F : M \to \mathbb{R}$$

en M, es decir, que verifica que $F \circ \Phi_g = F$ para cada $g \in G$, induce la función reducida $f\colon M/G \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\pi_M(m)) = F(m) \quad m \in M.$$

es decir $f \circ \pi_M \,=\, F$.

Se verifica que

$$W(F) \,=\, W(f \circ \pi_M) \,=\, \breve{W}(f) \circ \pi_M, \tag{3.9}$$

esto es, $\breve{W}(f)$ es la función reducida en M/G de la función invariante $W(F)$ en M.

Definición 3.6 *Un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ en M es G-invariante si y sólo si cada X_α es G-invariante, es decir*

$$(\Phi_g)_*(m)(X_\alpha(m)) = X_\alpha(\Phi_g(m)) \quad m \in M,\ 1 \leq \alpha \leq k\,.$$

La acción $\Phi : G{\times}M \to M$ se extiende a una acción

$$\Phi^{T^1_kM}\colon G \times T^1_kM \to T^1_kM$$

que se llamará acción k-tangente, definida por

$$\begin{array}{rccl} \Phi^{T^1_kM} & : & G \times T^1_kM & \to & T^1_kM \\ & & (g, v_{1_m}, \ldots, v_{k_m}) & \mapsto & ((\Phi_g)_*(m)(v_{1_m}), \ldots, (\Phi_g)_*(m)(v_{k_m}))\ , \end{array} \tag{3.10}$$

donde $\mathbf{v}_m = (v_{1_m}, \ldots, v_{k_m}) \in T^1_kM$ y $g \in G$.

Obsérvese que, para $(g, \mathbf{v}_m) \in G \times T^1_kM$ se verifica que

$$\Phi^{T^1_kM}(g, \mathbf{v}_m) = T^1_k\Phi_g(\mathbf{v}_m)\,.$$

Consecuencia inmmediata de la definición anterior es que un campo de k-vectores $\mathbf{X}$ en M es G-invariante si $\Phi_g^{T^1_kM} \circ \mathbf{X} = \mathbf{X} \circ \Phi_g$, para todo $g \in G$.

Si la acción $\Phi\colon G \times M \to M$ se escribe en coordenadas locales como $\Phi_g(x^I) = (\Phi^I_g(x^J))$ entonces la expresión local de $\Phi^{T^1_kM}$ es

$$\Phi_g^{T^1_kM}(x^I, u^I_\alpha) = \left(\Phi^I_g(x^J), \frac{\partial \Phi^I_g}{\partial x^J} u^J_\alpha\right)\,.$$

Cuando la acción Φ es libre y propia, la estructura de espacio fibrado principal

$$\pi_M : M \to M/G$$

nos permite introducir el campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$ en M/G de un campo de k-vectores invariante $\mathbf{X}$ en M.

Si $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ es G-invariante entonces el campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}} = (\breve{X}_1, \ldots, \breve{X}_k)$ está definido por

$$\breve{X}_\alpha(\pi_M(m)) = (\pi_M)_*(m)(X_\alpha(m)) \quad m \in M, 1 \leq \alpha \leq k.$$

Definición 3.7 *El campo de k-vectores*

$$\breve{\mathbf{X}} = (\breve{X}_1, \ldots, \breve{X}_k)$$

en M/G se denomina campo de k-vectores reducido del campo de k-vectores $\mathbf{X}$.

De la relación (1.13) y de la definición anterior de $\breve{X}_\alpha$ se puede concluir fácilmente:

Proposición 3.8 *Si ϕ es una sección integral de un campo de k-vectores invariante* $\mathbf{X}$ *en M, entonces $\breve{\phi} = \pi_M \circ \phi$ es una sección integral del campo de k-vectores reducido* $\breve{\mathbf{X}}$ *en M/G.*

Demostración:

Sea ϕ una sección integral de $\mathbf{X}$, entonces se verifica que

$$X_\alpha(\phi(x)) = \phi_*(x)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_x\right),$$

de esta identidad y de la relación (3.7) se obtiene que,

$$\begin{aligned} \breve{X}_\alpha(\breve{\phi}(x)) &= \breve{X}_\alpha((\pi_M \circ \phi)(x)) = (\pi_M)_*(\phi(x))\left(X_\alpha(\phi(x))\right) \\ &= (\pi_M)_*(\phi(x))\left(\phi_*(x)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_x\right)\right) = \breve{\phi}_*(x)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_x\right) \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

□

Observación 3.9 A lo largo de esta memoria se denotará por ξ_M el campo de vectores fundamental para la acción Φ asociado a un elemento ξ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del grupo de Lie G. Las siguientes propiedades son conocidas,

Lema 3.10 *Sea G un grupo de Lie conexo.*

- *Una función f en M es invariante si y sólo si $\xi_M(f) = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.*
- *Un campo de vectores X en M es invariante si y sólo si $[X, \xi_M] = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.*

$\square$

Observación 3.11 El corchete de Lie $[X, Y]$ de dos campos de vectores X e Y G-invariantes en M es G-invariante. En efecto, si los campos X e Y son invariantes entonces $[\xi_M, X] = [\xi_M, Y] = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ y por lo tanto utilizando la identidad de Jacobi se obtiene que

$$0 = [[X, Y], \xi_M] + [[\xi_M, X], Y] + [[Y, \xi_M], X] = [[X, Y], \xi_M]\,,$$

lo que demuestra que $[X, Y]$ es un campo de vectores G-invariante.

Definición 3.12 *Sea X un campo de vectores en M. La derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ de un campo de k-vectores $\mathbf{Y}$ en M es el campo de k-vectores $\mathcal{L}_X\mathbf{Y}$ en M cuyo α-ésimo componente está dado por el campo de vectores $[X, Y_\alpha]$ en M.*

Una formulación equivalente utilizando el flujo ϕ_t del campo de vectores X es la siguiente

$$\mathcal{L}_X\mathbf{Y}(m) = \lim_{t \mapsto 0} \frac{T^1_k\phi_t(\mathbf{Y}(m)) - \mathbf{Y}(m)}{t}. \tag{3.11}$$

Por la Definición 3.6 se deduce que un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ es G-invariante si y sólo si cada X_α es G-invariante, o lo que es lo mismo $[X_\alpha, \xi_M] = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$. Por lo tanto, utilizando la definición anterior de derivada de Lie de un campo de k-vectores se obtiene que:

Un campo de k-vectores $\mathbf{X}$ es invariante en M si y sólo si $\mathcal{L}_{\xi_M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

3.3. Integrabilidad de un campo de k-vectores y su reducido

En esta sección se probará que:

i) si un campo de k-vectores invariante $\mathbf{X}$ en M es integrable entonces su campo de k-vectores reducido $\check{\mathbf{X}}$ en M/G es integrable,

ii) si $\check{\mathbf{X}}$ es integrable entonces $[X_\alpha, X_\beta]$ es vertical para todo $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$.

Ahora se describirán las coordenadas adaptadas en el fibrado principal $\pi_M \colon M \to M/G$ que se utilizarán en las próximas secciones.

Sea $U \subset M/G$ un conjunto abierto tal que $(\pi_M)^{-1}(U)$ es difeomorfo a $U \times G$ (abierto de trivialidad).

Sean (x^i, x^a) las coordenadas en el abierto de trivialidad $(\pi_M)^{-1}(U)$, conteniendo a $U \times \{e\}$, donde e denota el emento neutro de G, es decir (x^i) son las coordenadas en U, y (x^a) son las coordenadas en la fibra G.

Entonces, la expresión local de la proyección $\pi_M : M \to M/G$ es

$$\begin{array}{rcl} (\pi_M)^{-1}(U) \simeq U \times G & \longrightarrow & U \\ (x^I) = (x^i, x^a) & \mapsto & (x^i), \end{array} \tag{3.12}$$

donde $1 \leq a \leq dim\, G = d$ y $1 \leq i \leq dim\, M - dim\, G = m - d$.

Teniendo en cuenta esta descomposición, la acción por la izquierda de G sobre $(\pi_M)^{-1}(U) \simeq U \times G$ se escribe como sigue

$$\Phi_g(x, h) = (x, gh).$$

Supongamos que la expresión local de un campo de k-vectores $\mathbf{X}$ en M es

$$X_\alpha = X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}\,, \tag{3.13}$$

si además $\mathbf{X}$ es G-invariante entonces, cada X_α es G-invariante para todo $\alpha \in \{1, \ldots, k\}$, es decir,

$$(\Phi_g)_*(m)(X_\alpha(m)) = X_\alpha(\Phi_g(m)), \qquad m \in M.$$

Si se calculan ambos términos de esta igualdad se obtienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}(\Phi_g)_*(m)(X_\alpha(m)) &= X^i_\alpha(m)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{gm} + \tilde{X}^a_\alpha(m)\frac{\partial}{\partial x^a}(x^b\circ\Phi_g)\frac{\partial}{\partial x^b}\Big|_{gm},\\ X_\alpha(\Phi_g(m)) &= X^i_\alpha(gm)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{gm} + \tilde{X}^a_\alpha(gm)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{gm},\end{aligned}\tag{3.14}$$

de las que se deduce que $X^i_\alpha(m) = X^i_\alpha(gm)$, es decir, las funciones X^i_α son funciones invariantes en M y por lo tanto definen las funciones $\breve{X}^i_\alpha$ en M/G.

De las expresiones (3.8) y (3.14) se deduce que

Lema 3.13 *El campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}} = (\breve{X}_\alpha)$ tiene la siguiente expresión local*

$$\breve{X}_\alpha = \breve{X}^i_\alpha\frac{\partial}{\partial x^i},\tag{3.15}$$

donde $\breve{X}^i_\alpha\circ\pi_M = X^i_\alpha$.

$\square$

Describimos a continuación la conexión asociada al campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$. Para ello, teniendo en cuenta (3.4), se considera la sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{R}^k\times T(M/G) \arrow[r, "i"] & T(\mathbb{R}^k\times(M/G)) \arrow[r, "j"] \arrow[l, bend left, "\omega^{\breve{\mathbf{X}}}"] & (M/G)\times T\mathbb{R}^k \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\gamma^{\breve{\mathbf{X}}}"] & 0 \end{tikzcd}$$

donde se han vuelto a utilizar las identificaciones:

$$V(\mathbb{R}^k\times M/G)\equiv\mathbb{R}^k\times T(M/G)$$

y

$$(\mathbb{R}^k\times M/G)\times_{\mathbb{R}^k} T\mathbb{R}^k\equiv M/G\times T\mathbb{R}^k\,.$$

De (3.5) y de (3.15) se deduce que la conexión asociada al campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$, está determinada por la escisión por la derecha,

$$\gamma^{\breve{\mathbf{X}}}\colon (M/G)\times T\mathbb{R}^k\to T(\mathbb{R}^k\times(M/G))\,,$$

cuya expresión local es

$$\gamma^{\breve{\mathbf{X}}}([m], T^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t) = T^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,[m])} + \breve{X}^i_\alpha([m])\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,[m])}\right).\tag{3.16}$$

La correspondiente escisión por la izquierda es

$$\omega^{\breve{\mathbf{X}}}\left(T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,[m])} + Y^i \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,[m])}\right) = (Y^i - \breve{X}^i_\alpha T^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,[m])} \equiv \left(t, (Y^i - \breve{X}^i_\alpha T^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{[m]}\right).$$

Se denotará la curvatura de la conexión asociada a $\breve{\mathbf{X}}$ por $K^{\breve{\mathbf{X}}}$.

La siguiente proposición establece los resultados mencionados al principio de la Sección 3.3.

Proposición 3.14 **(1)** *Si* $\mathbf{X}$ *es integrable, entonces también lo es el campo de k-vectores reducido* $\breve{\mathbf{X}}$*, es decir* $K^{\breve{\mathbf{X}}} = 0$.

(2) *Si* $\breve{\mathbf{X}}$ *es integrable entonces los campos de vectores* $[X_\alpha, X_\beta]$ *toman valores en la distribución vertical de* π_M.

Demostración:

Ambas propiedades se siguen fácilmente de la identidad $T\pi_M \circ [X_\alpha, X_\beta] = [\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta] \circ \pi_M$.

(1) Como $\mathbf{X}$ es integrable entonces $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ y por lo tanto

$$0 = (\pi_M)_*(m)([X_\alpha, X_\beta](m)) = ([\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta] \circ \pi_M)(m) = [\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta](\pi_M(m))$$

para todo $m \in M$, de donde se deduce que $\breve{\mathbf{X}}$ es integrable.

(2) Si se calcula el corchete de Lie de X_α y X_β, donde $X_\alpha = X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}$, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}[X_\alpha, X_\beta] = \; & [X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}, X^j_\beta \frac{\partial}{\partial x^j}] + [X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}, \tilde{X}^b_\beta \frac{\partial}{\partial x^b}] \\ & + [\tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}, X^j_\beta \frac{\partial}{\partial x^j}] + [\tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}, \tilde{X}^b_\beta \frac{\partial}{\partial x^b}]\end{aligned}$$

donde el primero de los cuatro corchetes se anula por ser $\breve{\mathbf{X}}$ integrable y los otros tres son verticales ya que, por ser $\mathbf{X}$ invariante, las funciones X^i_α son G-invariantes y por lo tanto no dependen de las variables coordenadas (x^a).

□

Observación 3.15 Si $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ es G-invariante y $\breve{\mathbf{X}}$ es integrable entonces

$$[X_\alpha, X_\beta] = \left[X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}, \tilde{X}^a_\beta \frac{\partial}{\partial x^a}\right] - \left[X^i_\beta \frac{\partial}{\partial x^i}, \tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}\right] + \left[\tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}, \tilde{X}^b_\beta \frac{\partial}{\partial x^b}\right]. \qquad (3.17)$$

En este capítulo se mostrará que la condición (3.17) puede "interpretarse" como la anulación de la curvatura de cierta conexión en un fibrado principal asociado a una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$.

3.3.1. El fibrado $\breve{\phi}^*M \to \mathbb{R}^k$ asociado a una sección integral

En esta sección se construye un fibrado principal asociado a cada sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$, que servirá para que en la siguiente sección se establezca una nueva caracterización de la integrabilidad de $\mathbf{X}$ y $\breve{\mathbf{X}}$.

Supóngase que el campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$ en M/G es integrable, y sea $\breve{\phi} : \mathbb{R}^k \to M/G$ una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$.

Sea $\breve{\phi}^*M$ el fibrado pull-back del fibrado de $\pi_M \colon M \to M/G$

$$\begin{tikzcd}
\breve{\phi}^*M \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"'] & M \arrow[d, "\pi_M"] \\
\mathbb{R}^k \arrow[r, "\breve{\phi}"] & M/G
\end{tikzcd}$$

mediante $\breve{\phi} : \mathbb{R}^k \to M/G$, es decir

$$\breve{\phi}^*M = \left\{(t, m) \in \mathbb{R}^k \times M \,:\, \pi_M(m) = \breve{\phi}(t)\right\} ,$$

y $\pi_2 : \breve{\phi}^*M \to \mathbb{R}^k$ es la proyección canónica $\pi_2(t, m) = t$.

Como consecuencia de que $\pi_M \colon M \to M/G$ es un fibrado principal se obtiene el siguiente resultado:

Lema 3.16 *El fibrado pull-back $\pi_2 : \breve{\phi}^*M \to \mathbb{R}^k$ es un fibrado principal con grupo de estructura G.*

Demostración:

En primer lugar se comprobará que la acción de G en $\breve{\phi}^*M$ está bien definida,

$$\begin{array}{ccc} G\times\breve{\phi}^*M & \to & \breve{\phi}^*M \\ (g,p=(t,m)) & \mapsto & (t,gm), \end{array}$$

como $[gm]=[m]=\breve{\phi}(t)$ entonces $(t,gm)\in\breve{\phi}^*M$.

Sea i la inclusión $i:\breve{\phi}^*M\to\mathbb{R}^k\times M$, se utilizará p para un punto en $\breve{\phi}^*M$, e $i(p)=(t,m)$ para su inclusión en $\mathbb{R}^k\times M$.

A continuación se probará que $\pi_2\colon\breve{\phi}^*M\to\mathbb{R}^k$ es un fibrado principal, véase [50]:

- G actúa libremente en $\breve{\phi}^*M$ por la izquierda,

  $$(t,m)=g(t,m)=(t,gm)\Rightarrow m=gm$$

  y como la acción Φ es libre entonces se tiene que g es el elemento neutro de G.

- $\breve{\phi}^*M/G\equiv\mathbb{R}^k$.

  Teniendo en cuenta la acción de G en $\breve{\phi}^*M$, se deduce que dado un elemento $[p]\in\breve{\phi}^*M/G$ tal que $p\in\breve{\phi}^*M$ e $i(p)=(t,m)\in\mathbb{R}^k\times M$ entonces

  $$[p]=[(t,m)]=(t,[m])=(t,\breve{\phi}(t))$$

  y por lo tanto cualquier elemento $[p]$ de $\breve{\phi}^*M/G$ está completamente determinado por un elemento $t\in\mathbb{R}^k$, es decir, esta propiedad se sigue de la identificación

  $$\begin{array}{ccc} \breve{\phi}^*M/G & \to & \mathbb{R}^k \\ \\ [p] & \mapsto & t \end{array}$$

  donde $\pi_2(p)=t$.

- $\breve{\phi}^*M$ es localmente trivial.

  Sea $p=(t,m)\in\breve{\phi}^*M$ y U un entorno abierto de $t\in\mathbb{R}^k$, se define

  $$\begin{array}{cccl} \psi & : & \pi_2^{-1}(U) & \to & G\times U \\ & & (t,m) & \mapsto & \psi(t,m)=(\varphi(t,m),\pi_2(t,m))=(\varphi(t,m),t) \end{array}$$

  siendo $\varphi\colon\pi_2^{-1}(U)\to G$ la trivialización definida por $\varphi(t,m)=g^{-1}$, donde g es el único elemento de G tal que $\breve{\phi}(t)=gm$, puesto que $\breve{\phi}(t)=[m]$.

Por lo tanto se tiene que

$$\varphi(h(t,m)) = \varphi(t,hm) = (gh^{-1})^{-1} = hg^{-1} = h\varphi(t,m)$$

donde se ha utilizado que $\breve{\phi}(t) = gm = gh^{-1}hm$.

$\square$

A continuación, se probarán más propiedades que verifican las secciones integrales del campo de k-vectores reducido.

Lema 3.17

(1) *Sea $\breve{\phi} : \mathbb{R}^k \to M/G$ una sección integral del campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$. Se verifica*

$$\gamma^{\breve{\mathbf{X}}}(\breve{\phi}(t), v_t) = \hat{\phi}_*(t)(v_t), \quad \textit{para todo } v_t \in T_t\mathbb{R}^k. \tag{3.18}$$

siendo $\hat{\phi}$ la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \hat{\phi} : \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^k \times M/G \\ t & \mapsto & (t, \breve{\phi}(t)) \end{array}$$

y $\gamma^{\breve{\mathbf{X}}}$ la conexión asociada a $\breve{\mathbf{X}}$.

(2) *El siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} \breve{\phi}^*M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_2"'] & \mathbb{R}^k \times M \arrow[d, "\bar{\pi}_M=(Id_{\mathbb{R}^k},\pi_M)"] \\ \mathbb{R}^k \arrow[r, "\hat{\phi}"] & \mathbb{R}^k \times M/G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} p \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_2"'] & (t,m) \arrow[d, "\bar{\pi}_M=(Id_{\mathbb{R}^k},\pi_M)"] \\ t \arrow[r, "\hat{\phi}"] & (t,[m]) \end{tikzcd}$$

esto es

$$\bar{\pi}_M \circ i = \hat{\phi} \circ \pi_2 \tag{3.19}$$

Demostración:

(1) Teniendo en cuenta la expresión (3.16), se obtiene:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_*(t)(v_t) &= v_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{\hat{\phi}(t)} + \frac{\partial \breve{\phi}^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\hat{\phi}(t)} \right) \\ \gamma^{\breve{\mathbf{X}}}(\breve{\phi}(t), v_t) &= v_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{\hat{\phi}(t)} + \breve{X}^i_\alpha(\breve{\phi}(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\hat{\phi}(t)} \right)\end{aligned}$$

donde $v_t = v_\alpha \dfrac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \in T_t\mathbb{R}^k$ y la expresión local de $\breve{\phi}$ es $\breve{\phi}(t) = (\breve{\phi}^i(t^\alpha))$.

Por lo tanto se verifica (3.18) si y sólo si

$$\breve{X}^i_\alpha(\breve{\phi}(t)) = \frac{\partial \breve{\phi}^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t, \tag{3.20}$$

que es consecuencia de que $\breve{\phi}$ sea sección integral de $\breve{X}$.

(2) Sea p un punto arbitrario de $\breve{\phi}^*M$, entonces

$$(\bar{\pi}_M \circ i)(p) = \bar{\pi}_M(t, m) = (Id_{\mathbb{R}^k}, \pi_M)(t, m) = (t, [m])$$

y

$$(\hat{\phi} \circ \pi_2)(p) = \hat{\phi}(t) = (t, \breve{\phi}(t))$$

pero $[m]$ y $\breve{\phi}(t)$ coinciden por la definición de $\breve{\phi}^*M$.

□

3.3.2. Integrabilidad del campo de k-vectores reducido y conexiones en $\breve{\phi}^*M$

Con la finalidad de describir el corchete de la ecuación (3.17) como la curvatura de una conexión, se definirá una conexión $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ en $\breve{\phi}^*M$, utilizando la conexión $\omega^{\mathbf{X}}$ asociada a $\mathbf{X}$.

Las coordenadas locales en $\breve{\phi}^*M$ son (t^α, x^a), puesto que para un punto $p = (t, m) \in \breve{\phi}^*M$ se verifica

$$t^\alpha(p) = t^\alpha, \quad x^i(p) = x^i(m) = x^i(\pi_M(m)) = x^i(\breve{\phi}(t)), \quad x^a(p) = x^a(m)\,,$$

y por lo tanto las expresiones locales de i y π_2 son

$$i(t^\alpha, x^a) = (t^\alpha, \breve{\phi}^i(t), x^a) \quad \pi_2(t^\alpha, x^a) = (t^\alpha)\,. \tag{3.21}$$

En estas coordenadas, los vectores V_p tangentes a $\breve{\phi}^*M$ (en un punto p) son localmente de la forma

$$V_p = T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_p + \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_p\,. \tag{3.22}$$

De (3.20) y (3.21) se deduce que

$$\begin{aligned} i_*(p)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_p\right) &= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,m)} + \frac{\partial \breve{\phi}^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,m)} = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,m)} + (\breve{X}^i_\alpha \circ \breve{\phi})(t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,m)}, \\ i_*(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_p\right) &= \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{(t,m)}, \end{aligned}$$

por lo tanto la expresión local de

$$i_*(p)(V_p) \in T_{(t,m)}(\mathbb{R}^k \times M) \equiv T_t\mathbb{R}^k \times T_mM.$$

es

$$i_*(p)(V_p) = T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{(t,m)} + (\breve{X}^i_\alpha \circ \breve{\phi})(t) T^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(t,m)} + \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{(t,m)}. \tag{3.23}$$

Puesto que los vectores verticales para el fibrado π_2 son aquellos con $T^\alpha = 0$, es decir, tienen expresión local

$$V_p = \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_p\,.$$

deducimos que

$$i_*(p)(V_p) = \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{(t,m)} \in T(\mathbb{R}^k \times M) \equiv \left(t, \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m\right) \in \mathbb{R}^k \times TM$$

es decir, los vectores verticales para π_2 se identifican con los elementos en $\mathbb{R}^k \times VM$, donde VM es la distribución vertical de $\pi_M : M \to M/G$.

Fjado $\mathbf{X}$, sea $\omega^{\mathbf{X}}$ la conexión asociada a $\mathbf{X}$,

$$\omega^{\mathbf{X}} : T(\mathbb{R}^k \times M) \to \mathbb{R}^k \times TM\,.$$

Para $V_p \in T(\breve{\phi}^*M)$, con $i(p) = (t, m)$, se sigue de (3.6) y (3.23) que

$$\omega^{\mathbf{X}}(i_*(p)(V_p)) = \left(t, (\tilde{Y}^a - \tilde{X}^a_\alpha(m) T^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m\right). \tag{3.24}$$

Como el segundo elemento, $(\tilde{Y}^a - \tilde{X}^a_\alpha(m)T^\alpha)\dfrac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m$, es claramente π_M-vertical en M, se puede utilizar para definir una conexión en $\breve{\phi}^*M$.

Una conexión en $\pi_2\colon \breve{\phi}^*M \to \mathbb{R}^k$ es una escisión $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ de la sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V(\breve{\phi}^*M) \equiv \mathbb{R}^k \times VM \arrow[r, "i"] & T(\breve{\phi}^*M) \arrow[r, "j"] \arrow[l, bend left, "\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}"] & \breve{\phi}^*M \times_{\mathbb{R}^k} T\mathbb{R}^k \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}"] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Definición 3.18 *La conexión principal $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ en $\breve{\phi}^*M$, se define mediante la aplicación conexión del siguiente modo*

$$\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(V_p) = \omega^{\mathbf{X}}(i_*(p)(V_p)) \in \mathbb{R}^k \times V_mM. \tag{3.25}$$

Su expresión, en coordenadas, es (3.24).

Efectivamente, la conexión $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es principal, para probarlo en primer lugar se estudiarán los campos de vectores fundamentales en $\breve{\phi}^*M$.

Sea p un punto en $\breve{\phi}^*M$ tal que $i(p) = (t, m)$, entonces

$$\begin{array}{rccc} \Phi_p^{\breve{\phi}^*M}\colon & G & \to & \breve{\phi}^*M \\ & g & \mapsto & gp\,, \end{array}$$

donde $i(gp) = (t, gm)$ y por lo tanto, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\Phi_p^{\breve{\phi}^*M}"] \arrow[dr, "\Phi_m^M"'] & & \breve{\phi}^*M \\ & (\pi_M)^{-1}([m]) \subset M \arrow[ur, "i_t"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir

$$\Phi_p^{\breve{\phi}^*M}(g) = i_t(\Phi_m^M(g))$$

siendo i_t la aplicación definida como sigue

$$\begin{array}{rccc} i_t\colon & (\pi_M)^{-1}([m]) \subset M & \to & \breve{\phi}^*M \\ & n & \mapsto & \bar{p}\,, \end{array}$$

siendo $i(\bar{p}) = (t, n)$.

Por lo tanto, para cualquier elemento $\xi \in \mathfrak{g}$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\xi_{\breve{\phi}^*M}(p) &= (\Phi_p^{\breve{\phi}^*M})_*(e)(\xi) = (i_t \circ \Phi_m)_*(e)(\xi) = (i_t)_*(\Phi_m(e))(\Phi_m)_*(e)(\xi)\\ &= (i_t)_*(m)\xi_M(m)\,.\end{aligned}$$

Puesto que $VM \equiv M \times \mathfrak{g}$,

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_m = (\Phi_m^M)_*(e)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_e\right) = (\Phi_m^M)_*(e)E_a \equiv (m, E_a) \in M \times \mathfrak{g}$$

y $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es una aplicación en $T(\breve{\phi}^*M) \to V(\breve{\phi}^*M) \equiv \mathbb{R}^k \times VM$ entonces se puede definir

$$\begin{array}{rccl}\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}: & T(\breve{\phi}^*M) & \to & \mathfrak{g}\\ & V_p & \mapsto & \vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(V_p) = (\tilde{Y}^a - \tilde{X}^a_\alpha(m)T^\alpha)E_a\,.\end{array}$$

Ahora se probará que la conexión $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es principal, véase [21],

i) $\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(\xi_{\breve{\phi}^*M}) = \xi$

Si se denota $\xi_M(m) = \xi^a \left.\dfrac{\partial}{\partial x^a}\right|_m$ donde $i(p) = (t,m)$, entonces

$$\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(\xi_{\breve{\phi}^*M}(p)) = \vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}((i_t)_*(m)(\xi_M(m))) = \vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(\xi^a \left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_p) = \xi^a E_a = \xi\,.$$

ii) $\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}((\Phi_g^{\breve{\phi}^*M})_*(p)(V_p)) = Ad_g(\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(V_p))$

En primer lugar, si V_p es horizontal con $i(p) = (t,m)$, entonces

$$V_p = T^\alpha\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_p + \breve{X}^a_\alpha(m)\left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_p\right)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}(\Phi_g^{\breve{\phi}^*M})_*(p)(V_p) &= T^\alpha\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_{gp} + \breve{X}^a_\alpha(m)\left.\frac{\partial(x^b\circ\phi_g)}{\partial x^a}\right|_m\left.\frac{\partial}{\partial x^b}\right|_{gp}\right)\\ &= T^\alpha\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_{gp} + \breve{X}^a_\alpha(gm)\left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_{gp}\right)\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado (3.14) puesto que $\mathbf{X}$ es G-invariante. Así por esta expresión local se deduce que $(\Phi_g^{\breve{\phi}^*M})_*(p)(V_p)$ es horizontal y por lo tanto

$$\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}((\Phi_g^{\breve{\phi}^*M})_*(p)(V_p)) = (T^\alpha \breve{X}^a_\alpha(gm) - \breve{X}^a_\alpha(gm)T^\alpha)E_a = 0$$

donde $i(gp) = (t, gm)$.

Por otro lado,

$$Ad_g(\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(V_p)) = 0\,.$$

Ahora si V_p es vertical, es decir $V_p = \xi_{\breve{\phi}^*M}$ para algún $\xi \in \mathfrak{g}$.

$$\begin{aligned}\vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}((\Phi_g^{\breve{\phi}^*M})_*(p)(\xi_{\breve{\phi}^*M}(p))) &= \vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}((\Phi_{g-1}^{\breve{\phi}^*M})^*(\xi_{\breve{\phi}^*M}(gp))) \\ &= \vartheta^{\breve{\phi},\mathbf{X}}((Ad_g\xi)_{\breve{\phi}^*M}(gp)) = Ad_g\xi\end{aligned}$$

Por lo tanto, por verificarse las condiciones $i)$ y $ii)$ se concluye que la conexión $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es principal.

A continuación se estudiará la curvatura de esta conexión, para ello es necesario introducir el correspondiente levantamiento horizontal T^h de un campo de vectores

$$T = T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

en $\mathbb{R}^k$,

$$T^h = \gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(T) = T^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} + (\tilde{X}^a_\alpha \circ \pi_1) \frac{\partial}{\partial x^a} \right) \in \mathfrak{X}(\breve{\phi}^*M)\,,$$

donde $\pi_1 \colon \breve{\phi}^*M \to M$ denota la composición de las aplicaciones $pr_2 \circ i$, véase (3.2).

Si

$$T = T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \quad \text{y} \quad S = S^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

son dos campos de vectores en $\mathbb{R}^k$ entonces la curvatura de la conexión $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es

$$\begin{aligned} K^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(T,S) &= -\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}([\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(T), \gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(S)]) \qquad (3.26) \\ &= -T^\alpha S^\beta \left(\left(\frac{\partial(\tilde{X}^a_\beta \circ \pi_1)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial(\tilde{X}^a_\alpha \circ \pi_1)}{\partial t^\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x^a} + \left[(\tilde{X}^a_\alpha \circ \pi_1) \frac{\partial}{\partial x^a}, (\tilde{X}^b_\beta \circ \pi_1) \frac{\partial}{\partial x^b} \right] \right) \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cálculo

$$\frac{\partial(\tilde{X}^a_\beta \circ \pi_1)}{\partial t^\alpha} = \left(\frac{\partial \tilde{X}^a_\beta}{\partial x^m} \circ \pi_1\right) \frac{\partial \breve{\phi}^m}{\partial t^\alpha} = \left(\frac{\partial \tilde{X}^a_\beta}{\partial x^m} \circ \pi_1\right) (\breve{X}^m_\alpha \circ \breve{\phi}) = \left(\frac{\partial \tilde{X}^a_\beta}{\partial x^m} X^m_\alpha\right) \circ \pi_1$$

donde se ha utilizado la regla de la cadena y que $\breve{\phi}$ es sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$, y además como X^i_α son funciones invariantes, entonces $\partial X^i_\alpha / \partial x^a = 0$, y por lo tanto se deduce que el primer sumando de (3.26) es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\tilde{X}^a_\beta \circ \pi_1)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial(\tilde{X}^a_\alpha \circ \pi_1)}{\partial t^\beta}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} &= \left(\frac{\partial \tilde{X}^a_\beta}{\partial x^i} X^i_\alpha - \frac{\partial \tilde{X}^a_\alpha}{\partial x^i} X^i_\beta\right) \circ \pi_1 \frac{\partial}{\partial x^a} \\ &= \left(\left[X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}, \tilde{X}^a_\beta \frac{\partial}{\partial x^a}\right] - \left[X^i_\beta \frac{\partial}{\partial x^i}, \tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}\right]\right) \circ \pi_1 \end{aligned} \tag{3.27}$$

finalmente substituyendo (3.27) en (3.26) se obtiene que

$$\begin{aligned} & T\pi_1(K^{\breve{\phi},\mathbf{X}}(T,S)) = \\ & -T^\alpha S^\beta \left(\left[X^i_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}, \tilde{X}^a_\beta \frac{\partial}{\partial x^a}\right] - \left[X^i_\beta \frac{\partial}{\partial x^i}, \tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}\right] + \left[\tilde{X}^a_\alpha \frac{\partial}{\partial x^a}, \tilde{X}^b_\beta \frac{\partial}{\partial x^b}\right]\right) \circ \pi_1. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Si se compara esta identidad con la expresión (3.17), se concluye de la Proposición 3.14 que:

Proposición 3.19 *Un campo de k-vectores G-invariante $\mathbf{X}$ es integrable si y sólo si*

i) su campo de vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$ es integrable (es decir, la curvatura de la conexión asociada a $\breve{\mathbf{X}}$ es idénticamente nula) y

ii) la curvatura de la conexión $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es idénticamente nula para cada sección integral $\breve{\phi} : \mathbb{R}^k \to M/G$ de $\breve{\mathbf{X}}$.

Demostración:

Sea $\mathbf{X}$ un campo de k-vectores G-invariante e integrable. Entonces por la primera parte de la Proposición 3.14, se obtiene que $\breve{\mathbf{X}}$ es integrable.

Además, la integrabilidad de $\mathbf{X}$ es equivalente a que $[X_\alpha, X_\beta] = 0$. Como la curvatura (3.28) de la conexión $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ coincide con la parte vertical (3.17) de $[X_\alpha, X_\beta]$, se concluye que la curvatura de $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es cero.

Recíprocamente, si $\breve{\mathbf{X}}$ es integrable entonces por la segunda parte de la Proposición 3.14, los campos de vectores $[X_\alpha, X_\beta]$ toman valores en la distribución vertical de π_M, y esta parte vertical está determinada por (3.17). Además esta expresión coincide con la curvatura de la conexión $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ que es cero. Por lo tanto $[X_\alpha, X_\beta] = 0$.

□

De la proposición anterior se deduce que si $\breve{\phi}$ es una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$ entonces existe una sección integral ϕ de $\mathbf{X}$ que proyecta en $\breve{\phi}$ tal que la curvatura de la conexión $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ es idénticamente nula. En la Sección 5 se proporcionará un método que permitirá reconstruir realmente una sección integral ϕ de $\mathbf{X}$, a partir de una sección integral $\breve{\phi}$ del campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$.

3.4. Conexión principal en $\pi_M : M \to M/G$ y referencia asociada

Supóngase que se tiene una conexión principal en el fibrado principal

$$\pi_M : M \to M/G$$

construiremos una referencia local $\{Z_A\}$ en M asociada a dicha conexión, que juega un papel fundamental en el resto de la primera parte de la memoria.

Se considerarán tres conjuntos de campos de vectores

$$\{X_i\}, \{\widetilde{E}_a\}, \{\widehat{E}_a\}$$

en M donde $i = 1, \ldots, dim\, M - dim\, G = m - d$; $a = 1, \ldots, dim\, G = d$, que se describen a continuación.

El primer conjunto, $\{X_i\}$, son los levantamientos horizontales de una base coordenada de campos de vectores $\partial/\partial x^i$ en M/G dada por la conexión principal.

Estos campos de vectores son G-invariantes por construcción, y forman una base del subespacio horizontal en cualquier punto.

Los otros dos conjuntos de campos de vectores, $\{\widetilde{E}_a\}$ y $\{\widehat{E}_a\}$, formarán una base para el subespacio vertical de π_M en cada punto.

Los campos de vectores $\{\widetilde{E}_a\} = \{(E_a)_M\}$ son los campos de vectores fundamentales en M, asociado a la base $\{E_a\}$ del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

En general, no son campos de vectores invariantes. Como son verticales por construcción, se denotará su expresión local como sigue

$$\widetilde{E}_a = K_a^b \frac{\partial}{\partial x^b}, \quad 1 \leq a, b \leq d, \tag{3.29}$$

para alguna matriz no singular (K_a^b).

Se denota la aplicación adjunta por

$$\begin{array}{rcccl} Ad & : & G & \to & Aut(\mathfrak{g}) \\ & & g & \mapsto & Ad(g) \equiv Ad_g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\,. \end{array}$$

Los campos de vectores $\widehat{E}_a$ están definidos por

$$\widehat{E}_a(x, g) = (Ad_{g^{-1}} E_a)_M(x, g), \tag{3.30}$$

donde se está utilizando la trivialización local (3.12), y la notación ξ_M se refiere una vez más a campos de vectores fundamentales definidos por $\xi \in \mathfrak{g}$.

Los campos de vectores $\widehat{E}_a$ son invariantes, en efecto para cada $h \in G$ se verifica

$$\begin{aligned} &(\Phi_h)_*(x, g)\widehat{E}_a(x, g) = (\Phi_h)_*(x, g)(Ad_{g^{-1}} E_a)_M(x, g) \\ &= (\Phi_h)_*(x, g)\left((\Phi_g)_*(x, e)\widetilde{E}_a(x, e)\right) = (\Phi_{hg})_*(x, e)\widetilde{E}_a(x, e)\,, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\widehat{E}_a(\Phi_h(x, g)) = \widehat{E}_a(x, hg) = (Ad_{(hg)^{-1}} E_a)_M(x, hg) = (\Phi_{hg})_*(x, e)\widetilde{E}_a(x, e)\,,$$

de donde se deduce la invarianza de los campos de vectores $\widehat{E}_a$.

A continuación se muestran ciertas propiedades de los campos de vectores $\{X_i, \widetilde{E}_a, \widehat{E}_a\}$.

Relación entre $\widehat{E}_a$ y $\widetilde{E}_a$

De la definición de $\widehat{E}_a$, véase (3.30), se sigue que

$$\begin{aligned}\widehat{E}_a(x,g) &= (Ad_{g^{-1}}E_a)_M(x,g) = (\Phi_g)_*(x,e)\big(A_a^b(g)E_b(x,e)\big)\\ &= A_a^b(g)(\Phi_g)_*(x,e)E_b(x,e) = A_a^b(g)\widetilde{E}_b(x,g)\,,\end{aligned}$$

y por lo tanto, la relación entre $\widehat{E}_a$ y $\widetilde{E}_a$ es

$$\widehat{E}_a(x,g) \;=\; A_a^b(g)\widetilde{E}_b(x,g), \tag{3.31}$$

donde $(A_a^b(g))$ es la matriz de $Ad_{g^{-1}}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, con respecto a la base $\{E_a\}$ de $\mathfrak{g}$. En particular $A_a^b(e)=\delta_a^b$.

Relación entre X_i y $\widehat{E}_a$

Si se escribe el campo de vectores X_i como

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma_i^b(x^i,x^a)\widehat{E}_b, \quad 1\leq i\leq m-d, \tag{3.32}$$

entonces se obtiene que

$$(\Phi_h)_*(x,g)X_i(x,g) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(x,hg)} - \gamma_i^b(x,g)\widehat{E}_a(x,hg)$$

donde se ha utilizado que los campos de vectores $\widehat{E}_a$ son invariantes. Además se verifica que

$$X_i(\Phi_h(x,g)) = X_i(x,hg) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{(x,hg)} - \gamma_i^b(x,hg)\widehat{E}_a(x,hg)$$

por lo tanto la invarianza de X_i, $(\Phi_h)_*X_i = X_i$, equivale a que

$$\partial\gamma_i^b/\partial x^a = 0\,. \tag{3.33}$$

Corchetes de Lie entre X_i, $\widehat{E}_a$ y $\widetilde{E}_a$

De (3.3) se deduce que la expresión local de la curvatura de una conexión en $\pi_M \colon M \to M/G$ es

$$K^M = K^a_{ij}\, \widehat{E}_a \otimes (dx^i \otimes dx^j)$$

Los corchetes de Lie de los campos de vectores anteriores se recogen en la siguiente proposición (véase [78]):

Proposición 3.20 *Se verifican las siguientes igualdades*

$$\begin{array}{lll} [\widetilde{E}_a, \widetilde{E}_b] = -C^c_{ab}\widetilde{E}_c, & [\widehat{E}_a, \widehat{E}_b] = C^c_{ab}\widehat{E}_c, & [X_i, \widetilde{E}_a] = 0, \\ [X_i, \widehat{E}_a] = \Upsilon^b_{ia}\widehat{E}_b, & [X_i, X_j] = -K^a_{ij}\widehat{E}_a, & [\widetilde{E}_a, \widehat{E}_b] = 0. \end{array} \tag{3.34}$$

donde

- C^c_{ab} *son las constantes de estructura del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*,*
- $\Upsilon^b_{ia} = -\gamma^c_i C^b_{ca}$*,*

Además, las componentes locales K^a_{ij} *de la curvatura* K^M *(con respecto a la referencia vertical* $\widehat{E}_a$*), es*

$$K^a_{ij} = \frac{\partial \gamma^c_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma^c_i}{\partial x^j} + \gamma^a_i \gamma^b_j C^c_{ab}\,.$$

Demostración:

- $[\widetilde{E}_a, \widetilde{E}_b] = [(E_a)_M, (E_b)_M] = -([E_a, E_b])_M = -(C^c_{ab}E_c)_M = -C^c_{ab}\widetilde{E}_c$.
- Puesto que el corchete de Lie de dos campos de vectores invariantes por la izquierda es invariante por la izquierda, se deduce que $[\widehat{E}_a, \widehat{E}_b]$ es invariante por la izquierda. Además existe un isomorfismo entre los campos de vectores invariantes por la izquierda y el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que preserva el corchete de Lie, por lo tanto $[\widehat{E}_a, \widehat{E}_b] = C^c_{ab}\widehat{E}_c$.
- Como X_i es invariante, $[X_i, \widetilde{E}_a] = 0$.
- $[X_i, \widehat{E}_a] = [\dfrac{\partial}{\partial x^i} - \gamma^b_i \widehat{E}_b, \widehat{E}_a] = -\gamma^b_i[\widehat{E}_b, \widehat{E}_a] = \gamma^b_i C^c_{ba}\widehat{E}_c = \Upsilon^c_{ia}\widehat{E}_c$.

- $[X_i, X_j] = [\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] - [\frac{\partial}{\partial x^i}, \gamma_j^b \widehat{E}_b] - [\gamma_i^a \widehat{E}_a, \frac{\partial}{\partial x^j}] + [\gamma_i^a \widehat{E}_a, \gamma_j^b \widehat{E}_b] = -[\frac{\partial \gamma_j^c}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_i^c}{\partial x^j} + \gamma_i^a \gamma_j^b C_{ab}^c]\widehat{E}_c$.

  Si se escribe el proyector horizontal $h^M = id - \omega^M$ en coordenadas locales
$$h^M = (\frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma_i^b \widehat{E}_b) \otimes dx^i = (\frac{\partial}{\partial x^i} - \gamma_i^b A_b^c K_c^a \frac{\partial}{\partial x^a}) \otimes dx^i \ ,$$
  entonces la curvatura K^M se escribe localmente como
$$\begin{aligned} K^M &= \frac{1}{2}\Bigg(-\frac{\partial \gamma_j^b}{\partial x^i} A_b^c K_c^a + \frac{\partial \gamma_i^b}{\partial x^j} A_b^c K_c^a \\ &\quad + \gamma_i^d A_d^b K_c^b \gamma_j^f \frac{\partial (A_f^e K_e^a)}{\partial x^b} - \gamma_j^d A_d^c K_c^b \gamma_i^f \frac{\partial (A_f^e K_e^a)}{\partial x^b} \Bigg) \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes (dx^i \wedge dx^j) \end{aligned}$$
  véase [98].

  Por lo tanto por un cálculo directo se obtiene que
$$K^M = K_{ij}^a \widehat{E}_a \otimes (dx^i \otimes dx^j),$$
  donde
$$K_{ij}^a = \frac{\partial \gamma_j^c}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_i^c}{\partial x^j} + \gamma_i^a \gamma_j^b C_{ab}^c,$$
  entonces se concluye que $[X_i, X_j] = -K_{ij}^a \widehat{E}_a$.

- Como $\widehat{E}_b$ es invariante, $[\widehat{E}_a, \widehat{E}_b] = 0$.

□

3.4.1. Integrabilidad de campos de k-vectores reducidos y fibrado adjunto

En la Proposición 3.19 se demostró que la integrabilidad del campo de k-vectores $\mathbf{X}$ es equivalente a la integrabilidad del campo de k-vectores reducido $\check{\mathbf{X}}$ y a la anulación de la curvatura de la conexión $\gamma^{\check{\phi},\mathbf{X}}$.

En esta sección se expresará la condición $ii)$ de la Proposición 3.19, referida a la anulación de la curvatura, en función de secciones del fibrado adjunto y del campo de k-vectores reducido.

En primer lugar, se estudiará como a cada sección $\sigma\colon M/G \to TM/G$ de la proyección $\kappa_M\colon TM/G \to M/G$ se le asocia un campo de vectores $\Pi^*(\sigma)$ en M. Además, se probará que una sección $\bar{E}_a$ del fibrado adjunto puede considerarse como una sección de κ_M, y por lo tanto asociarle un campo de vectores que será precisamente $\Pi^*(\bar{E}_a) = \widehat{E}_a$.

Sea $m \in M$, y se considera la aplicación

$$\Pi_m\colon \tau_M^{-1}(m) \subset TM \to (\kappa_M)^{-1}([m]) \subset TM/G$$

donde $\tau_M\colon TM \to M$ es la proyección canónica. La aplicación Π_m es un isomorfismo lineal.

Sea σ una sección de κ_M, se define el campo de vectores $\Pi^*(\sigma)$ en M como sigue

$$(\Pi^*(\sigma))(m) = \Pi_m^{-1}(\sigma([m]))$$

de forma que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "\tau_M"] & TM/G \arrow[d, "\kappa_M"'] \\ M \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[u, bend left, "\Pi^*(\sigma)"] & M/G\,. \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Los campos de vectores $\Pi^*(\sigma)$ así definidos son invariantes. Teniendo en cuenta que para $[v_m] \in TM/G$, se sigue directamente que

$$\Pi_{gm}\left((\Phi_g)_*(m)(\Pi_m^{-1}([v_m]))\right) = \Pi_{gm}((\Phi_g)_*(m)(v_m)) = [(\Phi_g)_*(m)(v_m)] = [v_m]\,,$$

o equivalentemente $(\Phi_g)_*(m) \circ \Pi_m^{-1} = \Pi_{gm}^{-1}$. Entonces,

$$(\Pi^*(\sigma))(gm) = \Pi_{gm}^{-1}(\sigma([gm])) = (\Phi_g)_*(m)(\Pi_m^{-1}(\sigma([m]))) = (\Phi_g)_*(m)(\Pi^*(\sigma)(m))$$

Por lo tanto, a cada sección σ de la proyección $\kappa_M\colon TM/G \to M/G$ se le puede asociar un campo de vectores $\Pi^*(\sigma)$ en M. A continuación, se le asociará a cada sección del fibrado adjunto $\bar{\mathfrak{g}}$ un campo de vectores en M, para ello en primer lugar se mostrará que existe un isomorfismo que permite considerar cada sección del fibrado adjunto como una sección de κ_M.

Dado el fibrado adjunto

$$\bar{\mathfrak{g}} = (M \times \mathfrak{g})/G \to M/G\,,$$

existe un isomorfismo, véase [21]

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_A\colon & TM/G & \to & T(M/G)\oplus\bar{\mathfrak{g}} \\ & [v_m] & \mapsto & \alpha_A([v_m]) = (\pi_M)_*(m)(v_m)\oplus[m, A(v_m)]\,, \end{array} \tag{3.35}$$

donde $A\colon TM\to\mathfrak{g}$ es una conexión principal.

Para cada elemento E_a de la base de $\mathfrak{g}$ se considera la sección del fibrado adjunto $\bar{E}_a$ definido como sigue

$$\begin{array}{rrcl} \bar{E}_a\colon & M/G & \to & \bar{\mathfrak{g}} = (M\times\mathfrak{g})/G \\ & x & \mapsto & [(x,e), E_a]\,, \end{array}$$

donde e es el elemento neutro del grupo de Lie G, x es un punto del abierto de trivialidad $U\subset M/G$ y se denota $(x,e)=\psi(x,e)\in(\pi_M)^{-1}(U)\subset M$, siendo ψ el homeomorfismo de la trivialización local

$$\begin{tikzcd} U\times G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & (\pi_M)^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi_M"] \\ & U & \end{tikzcd} .$$

Teniendo en cuenta el isomorfismo (3.35) se considera la sección $\bar{E}_a$ del fibrado adjunto como una sección

$$\begin{array}{rrcl} \bar{\mathbf{E}}_a\colon & M/G & \to & TM/G \\ & x & \mapsto & \left[\widetilde{E}_a(x,e)\right] \end{array}$$

Se define el *levantamiento vertical* de $\bar{E}_a$ como el campo de vectores vertical e invariante en M, definido por

$$\bar{E}_a^v(m) = \Pi^*(\bar{\mathbf{E}}_a)(m) = \Pi_m^{-1}(\bar{\mathbf{E}}_a([m]))$$

Sea $m\in M$ tal que $\pi_M(m)=[m]=x\in M/G$ entonces existe un único $g\in G$ tal que $m=gx$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{E}_a^v(m) &= \Pi^*(\bar{\mathbf{E}}_a)(m) = \Pi_m^{-1}(\bar{\mathbf{E}}_a([m])) = \Pi_{gx}^{-1}(\bar{\mathbf{E}}_a(x)) = \Pi_{gx}^{-1}\left(\left[\widetilde{E}_a(x,e)\right]\right) \\ &= (\Phi_g)_*(x,e)\widetilde{E}_a(x,e) = \widehat{E}_a(gx) = \widehat{E}_a(m) \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que si $\Pi_{gm}^{-1}([\mathbf{v}_m]) = Z_{gm}$ entonces $[\mathbf{v}_m] = \Pi_{gm}(Z_{gm}) = [Z_{gm}]$ y por lo tanto $Z_{gm} = (\Phi_g)_*(m)(\mathbf{v}_m)$.

Es decir, se identifican campos de vectores verticales invariantes en M con secciones en el fibrado adjunto $\bar{\mathfrak{g}}$,

$$(X^a \bar{E}_a)^v = X^a \widehat{E}_a,$$

véase por ejemplo [22].

El levantamiento horizontal determinado por una conexión principal asocia a cada campo de vectores $\breve{X} = \breve{X}^i \partial/\partial x^i$ en M/G el campo de vectores horizontal e invariante

$$X^h = \breve{X}^i X_i$$

en M. La descomposición de un campo de vectores G-invariante X en una parte horizontal y otra vertical es entonces

$$X = \breve{X}^h + \bar{X}^v = \breve{X}^i X_i + X^a \widehat{E}_a \tag{3.36}$$

para ciertos $\breve{X} \in \mathfrak{X}(M/G)$ y $\bar{X} \in Sec(\bar{\mathfrak{g}} \to M/G)$. Ambos coeficientes $\breve{X}^i$ y X^a se identifican con funciones G-invariantes en M, y además con funciones en M/G.

Sea $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + X^a \dfrac{\partial}{\partial x^a}$ un campo de vectores G-invariante en M, entonces se escribe la descomposición

$$X = \breve{X}^i X_i + (\breve{X}^i \gamma_b^i + X^a (A_b^c K_c^a)^{-1}) \widehat{E}_b = \breve{X}^h + \bar{X}^v$$

donde $\breve{X} = \breve{X}^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ y $\bar{X} = (\breve{X}^i \gamma_b^i + X^a (A_b^c K_c^a)^{-1}) \bar{E}_b$, siendo $\breve{X}^i = X^i \circ \pi_M$.

A continuación, se calculará el corchete de Lie $[X, Y]$ de dos campos de vectores X e Y G-invariantes, teniendo en cuenta su descomposición en la parte vertical y horizontal.

El corchete de Lie $[\bar{X}, \bar{Y}]$ de secciones del fibrado adjunto $\bar{\mathfrak{g}} \to M/G$ está determinado por

$$[\bar{X}, \bar{Y}]^v = [\bar{X}^v, \bar{Y}^v] \qquad \text{ó} \qquad [\bar{E}_a, \bar{E}_b] = C_{ab}^c \bar{E}_c,$$

y la derivada covariante ∇ asociada al fibrado adjunto $\bar{\mathfrak{g}} = (M \times \mathfrak{g})/G \to M/G$,

$$\begin{array}{rccc} \nabla\colon & \mathfrak{X}(M/G) \times Sec(\bar{\mathfrak{g}}) & \to & Sec(\bar{\mathfrak{g}}) \\ & (\breve{X}, \bar{Y}) & \mapsto & \nabla_{\breve{X}} \bar{Y} \end{array}$$

se define como

$$(\nabla_{\breve{X}}\bar{Y})^v = [\breve{X}^h, \bar{Y}^v] \qquad \text{ó} \qquad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \bar{E}_a = \Upsilon^b_{ia}\bar{E}_b,$$

véase [21] para más detalles.

Sean entonces X e Y dos campos de vectores invariantes, se obtiene la siguiente expresión, véase por ejemplo el Teorema 5.2.4 en [21], o [77],

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= [\breve{X}^h, \breve{Y}^h] + [\breve{X}^h, \bar{Y}^v] + [\bar{X}^v, \breve{Y}^h] + [\bar{X}^v, \bar{Y}^v] \\
&= h([\breve{X}^h, \breve{Y}^h]) + \omega^M([\breve{X}^h, \breve{Y}^h]) + (\nabla_{\breve{X}}\bar{Y})^v - (\nabla_{\breve{Y}}\bar{X})^v + ([\bar{X}, \bar{Y}])^v \\
&= ([\breve{X}, \breve{Y}])^h + \omega^M([\breve{X}^h, \breve{Y}^h]) + \left(\nabla_{\breve{X}}\bar{Y} - \nabla_{\breve{Y}}\bar{X} + [\bar{X}, \bar{Y}]\right)^v ,
\end{aligned}$$

Además, si se considera la identificación de $K^M(\breve{X}, \breve{Y}) = -\omega^M([\breve{X}^h, \breve{Y}^h])$ (que es un campo de vectores vertical)

$$(\bar{K}^M(\breve{X}, \breve{Y}))^v = -\omega^M([\breve{X}^h, \breve{Y}^h]) \tag{3.37}$$

donde K^M es la curvatura de la conexión ω^M. Entonces se obtiene la siguiente descomposición del corchete de Lie $[X,Y]$

$$[X,Y] = ([\breve{X}, \breve{Y}])^h + (\nabla_{\breve{X}}\bar{Y} - \nabla_{\breve{Y}}\bar{X} + [\bar{X}, \bar{Y}] - \bar{K}^M(\breve{X}, \breve{Y}))^v . \tag{3.38}$$

Si $\mathbf{X} = (X_\alpha)$ es un campo de k-vectores G-invariante en M, entonces la descomposición (3.36) define un campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}} = (\breve{X}_\alpha)$ en M/G y una sección $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_\alpha)$ de $\bar{\mathfrak{g}}^k = \bar{\mathfrak{g}} \times \overset{k}{\ldots} \times \bar{\mathfrak{g}} \to M/G$.

Proposición 3.21 *Dada una conexión principal ω^M en el fibrado principal $\pi_M\colon M \to M/G$, un campo de k-vectores G-invariante $\mathbf{X}$ es integrable si y sólo si*

(1) $\breve{\mathbf{X}}$ *es integrable y*

(2) $\nabla_{\breve{X}_\alpha}\bar{X}_\beta - \nabla_{\breve{X}_\beta}\bar{X}_\alpha + [\bar{X}_\alpha, \bar{X}_\beta] - \bar{K}^M(\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta) = 0.$

Demostración:

La integrabilidad de $\mathbf{X}$ está determinada por la anulación del corchete $[X_\alpha, X_\beta]$. Pero como se tiene,

$$[X_\alpha, X_\beta] = ([\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta])^h + (\nabla_{\breve{X}_\alpha}\bar{X}_\beta - \nabla_{\breve{X}_\beta}\bar{X}_\alpha + [\bar{X}_\alpha, \bar{X}_\beta] - \bar{K}^M(\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta))^v$$

deben anularse los dos sumandos. Lo que concluye la prueba.

□

La primera condición significa que la curvatura de la conexión asociada a $\breve{\mathbf{X}}$ debe anularse. Si se denota

$$X_\alpha = (\breve{X}_\alpha)^h + (\bar{X}_\alpha)^v = X^i_\alpha X_i + X^a_\alpha \widehat{E}_a, \tag{3.39}$$

entonces de (3.13), (3.29), (3.31) y (3.32), se deduce que

$$\tilde{X}^a_\alpha = (X^c_\alpha - \breve{X}^i_\alpha \gamma^c_i) A^b_c K^a_b. \tag{3.40}$$

En coordenadas locales, si se tienen en cuenta las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \nabla_{\breve{X}_\alpha} \bar{X}_\beta &= X^i_\alpha X^a_\beta \Upsilon^b_{ia} \bar{E}_b + \breve{X}^i_\alpha \frac{\partial X^a_\beta}{\partial x^i} \bar{E}_a\,, \\ K^M(\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta) &= \breve{X}^i_\alpha \breve{X}^j_\beta K^a_{ij} \bar{E}_a\,, \\ [\bar{X}_\alpha, \bar{X}_\beta] &= X^a_\alpha X^b_\beta C^c_{ab} \bar{E}_c\,, \end{aligned}$$

entonces la segunda condición de la Proposición 3.21 es

$$\breve{X}_\alpha(X^b_\beta) - \breve{X}_\beta(X^b_\alpha) + (\breve{X}^i_\alpha X^a_\beta - \breve{X}^i_\beta X^a_\alpha)\Upsilon^b_{ia} + C^b_{ac} X^a_\alpha X^c_\beta - K^b_{ij} \breve{X}^i_\alpha \breve{X}^j_\beta = 0. \tag{3.41}$$

Comparando la Proposición 3.19 y la Proposición 3.21 se obtiene que la expresión (3.41) es equivalente a la anulación de la curvatura de la conexión $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ para cada sección integral $\breve{\phi}$, y por lo tanto es equivalente con la condición (3.17).

La expresión (3.41) será necesaria más tarde en la Sección 4.4 para caracterizar la integrabilidad de un SOPDE lagrangiano.

A continuación, se mostrará como a partir de una conexión principal ω^M, se puede construir la conexión $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ en dos pasos consecutivos. Esta construcción será útil para comparar los resultados obtenidos con los resultados de [30].

Sea el fibrado pull-back $\breve{\phi}^* M \to \mathbb{R}^k$. Se denota la aplicación $p \in \breve{\phi}^* M \to m \in M$, como antes, por π_1. Entonces se define una nueva conexión principal $\omega^{\breve{\phi}}$ en $\breve{\phi}^* M$ como

$$\omega^{\breve{\phi}}(V_p) = \omega^M((\pi_1)_*(p)(V_p)), \quad \forall\, V_p \in T(\breve{\phi}^* M). \tag{3.42}$$

Los vectores tangentes a $\breve{\phi}^* M$ (en un punto $i(p) = (t, m)$ con $\phi(t) = \pi(m) \in M/G$) se escriben en coordenadas locales de la siguiente manera

$$i_*(V_p) = T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t + (\breve{X}^i_\alpha \circ \breve{\phi}) T^\alpha X_i(m) + Y^a \widehat{E}_a(m),$$

$$(\pi_1)_*(V_p) = (\breve{X}^i_\alpha \circ \breve{\phi})T^\alpha X_i(m) + Y^a \widehat{E}_a(m).$$

La relación entre Y^c y $\tilde{Y}^a$ de la expresión (3.23) es

$$\tilde{Y}^a = (Y^c - T^\alpha(\breve{X}^i_\alpha \circ \breve{\phi})\gamma^c_i)A^b_c K^a_b\,. \tag{3.43}$$

Una expresión local para esta conexión entonces es

$$\omega^{\breve{\phi}}(V_p) = Y^a \widehat{E}_a(m).$$

Sea $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{X}_\alpha = X^a_\alpha \bar{E}_a)$ una sección de $\bar{\mathfrak{g}}^k \to M/G$. Se puede levantar verticalmente la sección $(X^a_\alpha \circ \breve{\phi})\bar{E}_a$ de $\breve{\phi}^*M$ y sumarla a la conexión $\omega^{\breve{\phi}}$ para formar una nueva conexión en $\breve{\phi}^*M$, como

$$\omega^{\breve{\phi},\bar{\mathbf{X}}}(V_p) = (Y^a - (X^a_\alpha \circ \breve{\phi})T^\alpha)\widehat{E}_a(m). \tag{3.44}$$

De (3.40), (3.43) y (3.44), se deduce que la conexión $\omega^{\breve{\phi},\bar{\mathbf{X}}}$ es la misma que la conexión $\omega^{\breve{\phi},\mathbf{X}}$ que se ha introducido anteriormente.

Capítulo 4

Reducción de un campo de k-vectores lagrangiano

En este capítulo se demostrará que si el lagrangiano es una función G-invariante, entonces sus SOPDEs lagrangianos $\mathbf{\Gamma}$ también son invariantes. En este caso, se podrá describir la expresión local del campo de k-vectores reducido de dicho SOPDE lagrangiano y se aportarán las ecuaciones de Lagrange-Poincarè.

A pesar de que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange se proyectan sobre las soluciones de las ecuaciones de Lagrange-Poincarè, no se puede realizar el proceso inverso; es decir, no toda solución de las ecuaciones de Lagrange-Poincarè puede ser extendida a una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Finalmente, utilizando la Proposició 3.21, se caracterizará la integrabilidad de un SOPDE invariante a partir de la integrabilidad de su SOPDE reducido.

En lo que resta de esta primera parte de la memoria se considerará que L es un lagrangiano regular.

4.1. SOPDEs lagrangianos invariantes

Sea $L\colon T^1_kQ \longrightarrow \mathbb{R}$ un lagrangiano G-invariante y regular. Los campos de k-vectores solución de la ecuación

$$i_{\Gamma_\alpha}\omega^\alpha_L = dE_L\,,$$

son SOPDEs que se denominarán lagrangianos. En esta sección se demostrará que dichos SOPDEs son G-invariantes.

Sea

$$\Phi\colon G\times Q\longrightarrow Q$$

una acción libre y propia de G en Q por la izquierda, entonces

$$\pi_Q\colon Q\longrightarrow Q/G$$

es un fibrado principal, y considerando la correspondiente acción k-tangente

$$\Phi^{T^1_kQ}\colon G\times T^1_kQ\longrightarrow T^1_kQ$$

se tiene el fibrado principal

$$\pi_{T^1_kQ}\colon T^1_kQ\longrightarrow (T^1_kQ)/G\,.$$

Como en la Sección 3.2, se denota con ξ_Q el campo de vectores fundamental correspondiente a $\xi\in\mathfrak{g}$.

De la definición de levantamiento completo en la Sección 1.1.2, se sigue que los campos de vectores fundamentales $\xi_{T^1_kQ}$ de esta acción son los levantamientos completos ξ_Q^C de los campos de vectores fundamentales ξ_Q de la acción en Q, para cada $\xi\in\mathfrak{g}$, es decir,

$$\xi_{T^1_kQ}=\xi_Q^C\,.$$

Lema 4.1 *Sea $\{Z_A\}$ una referencia invariante en Q, entonces la referencia $\{Z_A^C, Z_A^{V_\alpha}\}$ en T^1_kQ también es invariante, con respecto a la acción levantada en T^1_kQ.*

Demostración:

Este resultado se sigue de las relaciones de los corchetes (1.7):

$$[\xi_Q^C, Z_A^C]=[\xi_Q, Z_A]^C=0,\qquad [\xi_Q^C, Z_A^{V_\beta}]=[\xi_Q, Z_A]^{V_\beta}=0,$$

dado que por ser Z_A invariante se verifica $[\xi_Q, Z_A]=0$.

□

Se utilizarán coordenadas $(q^A) = (q^i, q^a)$ en Q que están adaptadas a la estructura de fibrado principal $Q \longrightarrow Q/G$, como se ha explicado en la Sección 3.3 (ahora con $M = Q$).

Recordemos que en T^1_kQ tenemos dos tipos de coordenadas

(1) Las coordenadas naturales (q^A, u^A_α) cuando cada vector del k-vector $\mathbf{v}_q$ se escribe como

$$v_{\alpha_q} = u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_q .$$

(2) Las coordenadas cuasi-velocidades (q^A, v^A_α) cuando cada vector del k-vector $\mathbf{v}_q$ se escribe como

$$v_{\alpha_q} = v^A_\alpha Z_A(q) ,$$

siendo $\{Z_A\}$ una referencia local de campos de vectores en Q.

El primer propósito de esta sección es demostrar que las funciones coordenadas q^i, v^i_α y v^a_α son G-invariantes si $\{Z_A\}$ es una referencia local invariante, para ello necesitaremos la siguiente definición.

Definición 4.2 *Sea θ una 1-forma en Q. Se definen, para cada $\alpha = 1, \dots, k$, las funciones lineales*

$$\overrightarrow{\theta}_\alpha \colon T^1_kQ \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

como sigue

$$\overrightarrow{\theta}_\alpha(\mathbf{v}_q) = \theta(q)(v_{\alpha_q}) ,$$

para $\mathbf{v}_q = (v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) \in T^1_kQ$.

Si la expresión en coordenadas locales de la 1-forma θ y de $\mathbf{v}_q = (v_{1_q}, \dots, v_{k_q}) \in T^1_kQ$ es

$$\theta = \theta_A \, dq^A, \quad v_{\alpha_q} = u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_q ,$$

entonces se deduce que

$$\overrightarrow{\theta}_\alpha = \theta_A \, u^A_\alpha. \tag{4.1}$$

De (1.2), (1.5) y (4.1) se concluyen las siguientes relaciones.

Lema 4.3 *Sea X un campo de vectores en Q, f una función en Q, y θ una 1-forma en Q. Entonces*

$$X^C(f) = (\tau_Q^k)^*(X(f)), \quad X^{V_\beta}(f) = 0, \quad X^C(\overrightarrow{\theta_\alpha}) = \overrightarrow{(\mathcal{L}_X\theta)_\alpha}, \quad X^{V_\beta}(\overrightarrow{\theta_\alpha}) = \delta_\alpha^\beta \theta(X).$$

Demostración:

Las dos primeras expresiones se obtienen de manera directa. Si se escribe X en coordenadas locales como $X = X^A \dfrac{\partial}{\partial q^A}$, de (1.2) y (1.5) se obtiene que

$$\begin{aligned} X^C(f) &= X^A \frac{\partial f}{\partial q^A} + u_\alpha^A \frac{\partial X^B}{\partial q^A} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha^B} = X^A \frac{\partial f}{\partial q^A} = X(f)\,, \\ X^{V_\alpha}(f) &= X^A \frac{\partial f}{\partial u_\alpha^A} = 0\,. \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la expresión local (4.1), se obtiene que

$$X^C(\overrightarrow{\theta_\alpha}) = X^C(\theta_B u_\alpha^B) = \left(X^A \frac{\partial \theta_B}{\partial q^A} + \theta_A \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \right) u_\alpha^B\,.$$

Puesto que

$$\mathcal{L}_X\theta = \left(\frac{\partial X^A}{\partial q^B}\theta_A + \frac{\partial \theta_B}{\partial q^A} X^A \right) dq^B$$

entonces se obtiene que

$$\overrightarrow{(\mathcal{L}_Z\theta)_\alpha} = \left(\frac{\partial X^A}{\partial q^B}\theta_A + \frac{\partial \theta_B}{\partial q^A} X^A \right) u_\alpha^B = X^C(\overrightarrow{\theta_\alpha})\,,$$

De manera similar,

$$X^{V_\beta}(\overrightarrow{\theta_\alpha}) = X^A \frac{\partial}{\partial u_\alpha^A}\left(\theta_B u_\beta^B\right) = X^A \theta_B \delta_A^B \delta_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha \theta(X)\,.$$

$\square$

Si la expresión local de la referencia Z_A es

$$\{Z_A = Z_A^B \frac{\partial}{\partial q^B}\}$$

y la de su correferencia dual es

$$\{\theta^A = \theta^A_B dq^B\}$$

entonces las cuasi-velocidades locales v^A_α de T^1_kQ se corresponden con las funciones lineales $\overrightarrow{(\theta^A)_\alpha}$ dado que

$$\overrightarrow{(\theta^A)_\alpha} = \theta^A_B u^B_\alpha = v^A_\alpha\,. \tag{4.2}$$

Lema 4.4 *Para una referencia local invariante $\{Z_A\}$ en Q, las funciones coordenadas q^i y v^A_α son G-invariantes en T^1_kQ.*

Demostración:

Para probar este resultado se utiliza el hecho de que una función f es invariante si y sólo si $\xi^C_Q(f) = 0$.

Los campos de vectores fundamentales ξ_Q son verticales con respecto a la proyección $\pi_Q : Q \longrightarrow Q/G$, por lo que $\xi^C_Q(q^i) = \xi_Q(q^i) = 0$.

Del Lema 4.3 y de (4.2) se obtiene

$$\xi^C_Q(v^A_\alpha) = \xi^C_Q(\overrightarrow{\theta^A_\alpha}) = \overrightarrow{(\mathcal{L}_{\xi_Q}\theta^A)_\alpha}.$$

Como

$$(\mathcal{L}_{\xi_Q}\theta^A)(Z_B) = \mathcal{L}_{\xi_Q}(\theta^A(Z_B)) - \theta^A(\mathcal{L}_{\xi_Q}Z_B) = 0,$$

donde se ha utilizado que la referencia local $\{Z_A\}$ es invariante, $\mathcal{L}_{\xi_Q}Z_B = 0$. Por lo tanto se obtiene que $\xi^C_Q(v^A_\alpha) = 0$.

□

Para el resto de esta primera parte de la memoria se supone que el lagrangiano L es invariante bajo la acción libre y propia $\Phi^{T^1_kQ}$, véase (3.10), para un grupo G conexo. Esto significa que $\xi^C_Q(L) = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Recúerdese que, si E_a es un elemento de la base de $\mathfrak{g}$, se ha utilizado la notación $\widetilde{E}_a = (E_a)_Q$ para sus campos de vectores fundamentales asociados en Q.

Proposición 4.5 *Sea L un lagrangiano regular e invariante. Los campos de k-vectores lagrangianos, es decir aquellos $\mathbf{\Gamma}$ que son solución de*

$$i_{\Gamma_\alpha}\omega_L^\alpha = dE_L \,,$$

son SOPDE*s G-invariantes.*

Demostración:

Del Lema 1.15 se deduce que si el lagrangiano L es regular entonces el campo de k-vectores lagrangiano $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE. Para probar que $\mathbf{\Gamma}$ es G-invariante, hay que comprobar que

$$[\widetilde{E}_a^C, \Gamma_\alpha] = 0 \,.$$

De (1.42), se tiene la siguiente expresión

$$\Gamma_\alpha = v_\alpha^A Z_A^C + (\Gamma_\alpha)_\beta^A Z_A^{V_\beta} \,.$$

Puesto que los campos de vectores de esta expresión, Z_A^C y $Z_A^{V_\beta}$, son invariantes y las cuasi-velocidades v_α^A son funciones invariantes, se obtiene entonces que

$$[\widetilde{E}_a^C, \Gamma_\alpha] = \widetilde{E}_a^C((\Gamma_\alpha)_\beta^A) Z_A^{V_\beta}, \tag{4.3}$$

es decir,

$\mathbf{\Gamma}$ será G-invariante si se demuestra que las funciones $(\Gamma_\alpha)_\beta^A$ son invariantes.

Cuando se aplica el campo de vectores $\widetilde{E}_a^C$ a ambos lados de la ecuación (1.39),

$$\Gamma_\alpha(Z_A^{V_\alpha}(L)) - Z_A^C(L) = 0$$

se deduce que

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \widetilde{E}_a^C\left(\Gamma_\alpha(Z_A^{V_\alpha}(L)) - Z_A^C(L)\right) = [\widetilde{E}_a^C, \Gamma_\alpha](Z_A^{V_\alpha}(L)) + \Gamma_\alpha(\widetilde{E}_a^C(Z_A^{V_\alpha}(L))) \\ & -[\widetilde{E}_a^C, Z_A^C](L) - Z_A^C(\widetilde{E}_a^C(L)) = [\widetilde{E}_a^C, \Gamma_\alpha](Z_A^{V_\alpha}(L)) \\ & +\Gamma_\alpha\left([\widetilde{E}_a^C, Z_A^{V_\alpha}](L) + Z_A^{V_\alpha}(\widetilde{E}_a^C(L))\right) = [\widetilde{E}_a^C, \Gamma_\alpha](Z_A^{V_\alpha}(L)) \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que los corchetes de Lie $[\widetilde{E}_a^C, Z_A^C]$ y $[\widetilde{E}_a^C, Z_A^{V_\alpha}]$ son cero y que $\widetilde{E}_a^C(L) = 0$. Por lo tanto,

$$[\widetilde{E}_b^C, \Gamma_\alpha](Z_B^{V_\alpha}(L)) = 0.$$

Ahora, utilizando la expresión (4.3), se obtiene que

$$0 = [\widetilde{E}^C_b, \Gamma_\alpha](Z^{V_\alpha}_B(L)) = \widetilde{E}^C_a((\Gamma_\alpha)^A_\beta) Z^{V_\beta}_A(Z^{V_\alpha}_B(L)) .$$

Puesto que la matriz $(Z^{V_\beta}_A(Z^{V_\alpha}_B(L)))$ tiene rango máximo para un lagrangiano regular (véase la Proposición 1.24), se deduce que $[\widetilde{E}_b, \Gamma_\alpha] = 0$.

□

Cuando un SOPDE lagrangiano $\mathbf{\Gamma}$ es invariante, se denotará por $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ el campo de k-vectores reducido en $(T^1_k Q)/G$. El objetivo de las siguientes secciones es aportar una expresión en coordenadas de este campo de k-vectores. Para conseguirlo será necesario utilizar una conexión principal en el fibrado $Q \longrightarrow Q/G$.

4.2. Referencias locales de campos de vectores en $T^1_k Q$

Como en la Sección 3.4, se considera una conexión principal en el fibrado principal $\pi_Q : Q \longrightarrow Q/G$, (ahora con $M = Q$). En esta sección se utilizará la referencia invariante $\{X_i, \widehat{E}_a\}$, y se escribirá

$$v_{\alpha_q} = v^i_\alpha X_i(q) + w^a_\alpha \widehat{E}_a(q) ,$$

donde $\mathbf{v}_q = (v_{1_\alpha}, \ldots, v_{k_\alpha}) \in T^1_k Q$. Las coordenadas y las correspondientes cuasi-velocidades en $T^1_k Q$ se denotarán por

$$(q^i, q^a, v^i_\alpha, w^a_\alpha) .$$

Del Lema 4.1 se deduce que los campos de vectores de la referencia

$$\{Z^C_A, Z^{V_\alpha}_A\} = \{X^C_i, X^{V_\alpha}_i, \widehat{E}^C_a, \widehat{E}^{V_\alpha}_a\}$$

son campos de vectores en $T^1_k Q$ invariantes.

Los correspondientes campos de vectores reducidos

$$\breve{X}^C_i, \breve{X}^{V_\alpha}_i, \breve{\widehat{E}}^C_a, \breve{\widehat{E}}^{V_\alpha}_a,$$

campos de vectores en $(T^1_kQ)/G$, se denotarán por

$$\{\breve{X}_i^C, \breve{X}_i^{V_\alpha}, \breve{E}_a^C, \breve{E}_a^{V_\alpha}\},$$

y en esta sección obtendremos sus expresiones locales.

Por el Lema 4.4, las funciones coordenadas $q^i, v^i_\alpha, w^a_\alpha$ son funciones G-invariantes en T^1_kQ y, por lo tanto se pueden utilizar como coordenadas en $(T^1_kQ)/G$. En resumen, se puede decir que las proyecciones canónicas se escriben localmente como sigue

$$\begin{array}{rcl} \pi_Q : Q & \longrightarrow & Q/G \\ (q^i, q^a) & \mapsto & (q^i) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rcl} \pi_{T^1_kQ} : T^1_kQ & \longrightarrow & (T^1_kQ)/G \\ (q^i, q^a, v^i_\alpha, w^a_\alpha) & \mapsto & (q^i, v^i_\alpha, w^a_\alpha). \end{array}$$

Lema 4.6 *Si se aplican los campos de vectores $X_i^C, X_i^{V_\alpha}, \widehat{E}_a^C, \widehat{E}_a^{V_\alpha}$ a las funciones invariantes $q^i, v^i_\alpha, w^a_\alpha$ se obtiene*

$$\begin{array}{lll} X_i^C(q^j) = \delta_i^j\,, & X_i^C(v^j_\beta) = 0\,, & X_i^C(w^b_\beta) = -\Upsilon^b_{ic} w^c_\beta + K^b_{ik} v^k_\beta\,, \\ X_i^{V_\alpha}(q^j) = 0\,, & X_i^{V_\alpha}(v^j_\beta) = \delta^j_i \delta^\alpha_\beta\,, & X_i^{V_\alpha}(w^b_\beta) = 0\,, \\ \widehat{E}_a^C(q^j) = 0\,, & \widehat{E}_a^C(v^j_\beta) = 0\,, & \widehat{E}_a^C(w^b_\beta) = \Upsilon^b_{ka} v^k_\beta - C^b_{ac} w^c_\beta\,, \\ \widehat{E}_a^{V_\alpha}(q^j) = 0\,, & \widehat{E}_a^{V_\alpha}(v^j_\beta) = 0\,, & \widehat{E}_a^{V_\alpha}(w^b_\beta) = \delta^b_a \delta^\alpha_\beta\,. \end{array}$$

Demostración:

Sea $\{\vartheta^j, \varpi^a\}$ la base dual de $\{X_i, \widehat{E}_a\}$. De las relaciones de los corchetes (3.34), se puede ver que $\mathcal{L}_{X_i}\vartheta^j = 0$ y que $\mathcal{L}_{X_i}\varpi^b = -\Upsilon^b_{ic}\varpi^c + K^b_{ik}\vartheta^k$.

- $X_i^C(q^j) = X_i(q^j) = \delta^i_j$.
- $X_i^C(v^j_\beta) = X_i^C(\overrightarrow{\vartheta^j_\beta}) = \overrightarrow{(\mathcal{L}_{X_i}\vartheta^j)_\beta} = 0$.
- $X_i^C(w^b_\beta) = X_i^C(\overrightarrow{\varpi^b_\beta}) = \overrightarrow{(\mathcal{L}_{X_i}\varpi^b)_\beta} = -\Upsilon^b_{ic} w^c_\beta + K^b_{ik} v^k_\beta$.
- Como q^j es una función en Q, se tiene que $X_i^{V_\alpha}(q^j) = 0$.
- $X_i^{V_\alpha}(v^j_\beta) = X_i^{V_\alpha}(\overrightarrow{\vartheta^j_\beta}) = \delta^\alpha_\beta \vartheta^j(X_i) = \delta^\alpha_\beta \delta^i_j$.
- $X_i^{V_\alpha}(w^b_\beta) = X_i^{V_\alpha}(\overrightarrow{\varpi^b_\beta}) = \delta^\alpha_\beta \varpi^b(X_i) = 0$.

Por otro lado, se tiene que $\mathcal{L}_{\widehat{E}_a}\vartheta^j = 0$ y $\mathcal{L}_{\widehat{E}_a}\varpi^b = \Upsilon^b_{ja}\vartheta^j - C^b_{ac}\varpi^c$, por lo tanto,

- $\widehat{E}_a^C(q^j) = \widehat{E}_a(q^j) = 0$.
- $\widehat{E}_a^C(v^j_\beta) = \widehat{E}_a^C(\overrightarrow{\vartheta^j_\beta}) = \overrightarrow{(\mathcal{L}_{\widehat{E}_a}\vartheta^j)_\beta} = 0$.
- $\widehat{E}_a^C(w^b_\beta) = \widehat{E}_a^C(\overrightarrow{\varpi^b_\beta}) = \overrightarrow{(\mathcal{L}_{\widehat{E}_a}\varpi^b)_\beta} = \Upsilon^b_{ja}v^j_\beta - C^b_{ac}w^c_\beta$.
- La función q^j está definida en Q, entonces $\widehat{E}_a^{V_\alpha}(q^j) = 0$.
- $\widehat{E}_a^{V_\alpha}(v^j_\beta) = \widehat{E}_a^{V_\alpha}(\overrightarrow{\vartheta^j_\beta}) = \delta^\alpha_\beta\vartheta^j(\widehat{E}_a) = 0$.
- $\widehat{E}_a^{V_\alpha}(w^b_\beta) = \widehat{E}_a^{V_\alpha}(\overrightarrow{\varpi^b_\alpha}) = \delta^\alpha_\beta\varpi^b(\widehat{E}_a) = \delta^b_a\delta^\alpha_\beta$.

□

El lema anterior nos permite calcular la expresión local de los campos de vectores reducidos de la referencia invariante $\{X_i^C, X_i^{V_\alpha}, \widehat{E}_a^C, \widehat{E}_a^{V_\alpha}\}$.

Lema 4.7 *Los campos de vectores reducidos en T^1_kQ/G definidos por los campos de vectores G-invariantes*

$$X_i^C, X_i^{V_\alpha}, \widehat{E}_a^C, \widehat{E}_a^{V_\alpha}$$

en T^1_kQ tienen las siguientes expresiones locales

$$\begin{aligned} \breve{X}_i^C &= \frac{\partial}{\partial q^i} + (K^b_{ik}v^k_\beta - \Upsilon^b_{ic}w^c_\beta)\frac{\partial}{\partial w^b_\beta}, & \breve{X}_i^{V_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial v^i_\alpha}, \\ \breve{E}_a^C &= (\Upsilon^b_{ka}v^k_\beta - C^b_{ac}w^c_\beta)\frac{\partial}{\partial w^b_\beta}, & \breve{E}_a^{V_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial w^a_\alpha}. \end{aligned}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta que $(q^i, v^i_\alpha, w^a_\alpha)$ forman un conjunto de funciones coordenadas en $(T^1_kQ)/G$, utilizando las expresiones del Lema 4.6 y la relación (3.9) entre campos de vectores invariantes y su reducido, se pueden determinar los campos de vectores completamente.

Si se evalúa el campo de vectores $\breve{X}_i^C$ sobre las funciones coordenadas se obtiene,

$$\breve{X}_i^C(q^j)\circ\pi_{T^1_kQ} = X_i^C(q^j\circ\pi_{T^1_kQ}) = X_i^C(q^j) = \delta^i_j,$$

$$\breve{X}_i^C(v_\beta^j)\circ\pi_{T_k^1Q} = X_i^C(v_\beta^j\circ\pi_{T_k^1Q}) = X_i^C(v_\beta^j) = 0,$$
$$\breve{X}_i^C(w_\beta^b)\circ\pi_{T_k^1Q} = X_i^C(w_\beta^b\circ\pi_{T_k^1Q}) = X_i^C(w_\beta^b) = K_{ik}^b v_\beta^k - \Upsilon_{ic}^b w_\beta^c\,,$$

y por lo tanto

$$\breve{X}_i^C = \frac{\partial}{\partial q^i} + (K_{ik}^b v_\beta^k - \Upsilon_{ic}^b w_\beta^c)\frac{\partial}{\partial w_\beta^b}\,.$$

Análogamente, se obtiene para los otros tres campos de vectores $\breve{X}_i^{V_\alpha}$, $\breve{E}_a^C$ y $\breve{E}_a^{V_\alpha}$ que

$$\left.\begin{array}{r}\breve{X}_i^{V_\alpha}(q^j)\circ\pi_{T_k^1Q} = X_i^{V_\alpha}(q^j\circ\pi_{T_k^1Q}) = X_i^{V_\alpha}(q^j) = 0\\ \breve{X}_i^{V_\alpha}(v_\beta^j)\circ\pi_{T_k^1Q} = X_i^{V_\alpha}(v_\beta^j\circ\pi_{T_k^1Q}) = \delta_j^i\delta_\beta^\alpha\\ \breve{X}_i^{V_\alpha}(w_\beta^b)\circ\pi_{T_k^1Q} = X_i^{V_\alpha}(w_\beta^b\circ\pi_{T_k^1Q}) = X_i^{V_\alpha}(w_\beta^b) = 0\end{array}\right\}\Rightarrow \breve{X}_i^{V_\alpha} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha^i}\,,$$

$$\left.\begin{array}{r}\breve{E}_a^C(q^j)\circ\pi_{T_k^1Q} = \widehat{E}_a^C(q^j\circ\pi_{T_k^1Q}) = \widehat{E}_a^C(q^j) = 0\\ \breve{E}_a^C(v_\beta^j)\circ\pi_{T_k^1Q} = \widehat{E}_a^C(v_\beta^j\circ\pi_{T_k^1Q}) = \widehat{E}_a^C(v_\beta^j) = 0\\ \breve{E}_a^C(w_\beta^b)\circ\pi_{T_k^1Q} = \widehat{E}_a^C(w_\beta^b\circ\pi_{T_k^1Q}) = \widehat{E}_a^C(w_\beta^b) = \Upsilon_{ka}^b v_\beta^k - C_{ac}^b w_\beta^c\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \breve{E}_a^C = (\Upsilon_{ka}^b v_\beta^k - C_{ac}^b w_\beta^c)\frac{\partial}{\partial w_\beta^b}\,,$$

$$\left.\begin{array}{r}\breve{E}_a^{V_\alpha}(q^j)\circ\pi_{T_k^1Q} = \widehat{E}_a^{V_\alpha}(q^j\circ\pi_{T_k^1Q}) = \widehat{E}_a^{V_\alpha}(q^j) = 0\\ \breve{E}_a^{V_\alpha}(v_\beta^j)\circ\pi_{T_k^1Q} = \widehat{E}_a^{V_\alpha}(v_\beta^j\circ\pi_{T_k^1Q}) = 0\\ \breve{E}_a^{V_\alpha}(w_\beta^b)\circ\pi_{T_k^1Q} = \widehat{E}_a^{V_\alpha}(w_\beta^b\circ\pi_{T_k^1Q}) = \widehat{E}_a^{V_\alpha}(w_\beta^b) = \delta_\beta^\alpha\delta_j^i\end{array}\right\}\Rightarrow \breve{E}_a^{V_\alpha} = \frac{\partial}{\partial w_\alpha^a}\,.$$

□

4.3. El SOPDE lagrangiano reducido: ecuaciones de Lagrange-Poincaré

En esta sección se describirá la expresión local del campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ de un SOPDE lagrangiano $\mathbf{\Gamma}$, así como las ecuaciones locales de sus secciones integrales, las *ecuaciones de Lagrange-Poincaré*.

Sea $L \in C^\infty(T^1_kQ)$ un lagrangiano invariante. Entonces las funciones $X_i^C(L)$, $X_i^{V_\alpha}(L)$, $\widehat{E}_a^C(L)$, $\widehat{E}_a^{V_\alpha}(L)$, son invariantes, dado que dichos campos son G-invariantes. De la relación (3.9), se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
X_i^{V_\alpha}(L) &= X_i^{V_\alpha}(l \circ \pi_{T^1_kQ}) = \breve{X}_i^{V_\alpha}(l) \circ \pi_{T^1_kQ},\\
X_i^{C}(L) &= X_i^{C}(l \circ \pi_{T^1_kQ}) = \breve{X}_i^{C}(l) \circ \pi_{T^1_kQ},\\
\widehat{E}_a^{V_\alpha}(L) &= \widehat{E}_a^{V_\alpha}(l \circ \pi_{T^1_kQ}) = \breve{E}_a^{V_\alpha}(l) \circ \pi_{T^1_kQ},\\
\widehat{E}_a^{C}(L) &= \widehat{E}_a^{C}(l \circ \pi_{T^1_kQ}) = \breve{E}_a^{C}(l) \circ \pi_{T^1_kQ},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde $l : (T^1_kQ)/G \longrightarrow \mathbb{R}$ es el *lagrangiano reducido*, definido por $l \circ \pi_{T^1_kQ} = L$.

Por la Proposición 1.21, se deduce que un SOPDE *lagrangiano* $\mathbf{\Gamma}$ sastisface las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha(X_i^{V_\alpha}(L)) - X_i^C(L) = 0,\\
\Gamma_\alpha(\widehat{E}_a^{V_\alpha}(L)) - \widehat{E}_a^C(L) = 0.
\end{aligned}$$

Como cada Γ_α es un campo de vectores invariante en T^1_kQ, se sigue de (3.9) y (4.4) que

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha(X_i^{V_\alpha}(L)) &= \Gamma_\alpha(\breve{X}_i^{V_\alpha}(l) \circ \pi_{T^1_kQ}) &= \breve{\Gamma}_\alpha(\breve{X}_i^{V_\alpha}(l)) \circ \pi_{T^1_kQ}\\
\Gamma_\alpha(\widehat{E}_a^{V_\alpha}(L)) &= \Gamma_\alpha(\breve{E}_i^{V_\alpha}(l) \circ \pi_{T^1_kQ}) &= \breve{\Gamma}_\alpha(\breve{E}_i^{V_\alpha}(l)) \circ \pi_{T^1_kQ}
\end{aligned}$$

y por lo tanto el campo de vectores reducido $\breve{\Gamma}_\alpha$ satisface las ecuaciones

$$\breve{\Gamma}_\alpha(\breve{X}_i^{V_\alpha}(l)) - \breve{X}_i^C(l) = 0,$$

$$\breve{\Gamma}_\alpha(\breve{E}_a^{V_\alpha}(l)) - \breve{E}_a^C(l) = 0,$$

en $(T^1_kQ)/G$.

De las expresiones locales del Lema 4.7 se deduce que las ecuaciones anteriores se pueden escribir como sigue

$$\begin{aligned}
\breve{\Gamma}_\alpha\left(\frac{\partial l}{\partial v^i_\alpha}\right) - \frac{\partial l}{\partial q^i} &= \left(K^b_{ik}v^k_\beta - \Upsilon^b_{ic}w^c_\beta\right)\frac{\partial l}{\partial w^b_\beta},\\
\breve{\Gamma}_\alpha\left(\frac{\partial l}{\partial w^a_\alpha}\right) &= \left(\Upsilon^b_{ka}v^k_\beta - C^b_{ac}w^c_\beta\right)\frac{\partial l}{\partial w^b_\beta}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

A continuación se obtiene la expresión local del SOPDE reducido. Y se termina la sección estableciendo las ecuaciones de Lagrange-Poincaré, que se obtienen de (4.5) utilizando una sección integral del campo de k-vectores reducido.

Si se escribe un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ en términos de la referencia inducida por la referencia $\{Z_A\} = \{X_i, \widehat{E}_a\}$, véase el Lema 1.23, podemos escibir la siguiente expresión

$$\Gamma_\alpha = v^i_\alpha X_i^C + w^a_\alpha \widehat{E}_a^C + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^j_\beta X_j^{V_\beta} + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^a_\beta \widehat{E}_a^{V_\beta}. \tag{4.6}$$

En la demostración de la Proposición 4.5 se ha probado que las funciones $(\widehat{\Gamma}_\alpha)^j_\beta$ y $(\widehat{\Gamma}_\alpha)^a_\beta$ son invariantes, y entonces se identifican con funciones en $(T^1_kQ)/G$.

Lema 4.8 *Las expresiones locales de los campos de vectores reducidos $\breve{\Gamma}_\alpha$ en $(T^1_kQ)/G$, de un* SOPDE *lagrangiano Γ_α, son*

$$\begin{aligned} \breve{\Gamma}_\alpha &= v^i_\alpha \frac{\partial}{\partial q^i} + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^j_\beta \frac{\partial}{\partial v^j_\beta} + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^c_\beta \frac{\partial}{\partial w^c_\beta} \\ &\quad + \left(\Upsilon^c_{ib}(v^i_\beta w^b_\alpha - v^i_\alpha w^b_\beta) - C^c_{ab} w^a_\alpha w^b_\beta + K^c_{ij} v^i_\alpha v^j_\beta\right) \frac{\partial}{\partial w^c_\beta}\,. \end{aligned}$$

Demostración:

Los campos de vectores reducidos $\breve{\Gamma}_\alpha$ son,

$$\breve{\Gamma}_\alpha = v^i_\alpha \breve{X}_i^C + w^a_\alpha \breve{E}_a^C + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^j_\beta \breve{X}_j^{V_\beta} + (\breve{\Gamma}_\alpha)^a_\beta \breve{E}_a^{V_\beta}.$$

y por lo tanto, de las expresiones del Lema 4.7, se concluye el resultado.

□

Sea $\breve{\phi}\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow T^1_kQ/G$ una sección integral del campo de vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ del SOPDE lagrangiano $\mathbf{\Gamma}$, con expresión local

$$\begin{array}{rccl} \breve{\phi}\colon & \mathbb{R}^k & \longrightarrow & T^1_kQ/G \\ & t & \mapsto & \breve{\phi}(t) = (q^i = \breve{\phi}^i(t), v^i_\alpha = \breve{\phi}^i_\alpha(t), w^a_\alpha = \breve{\phi}^a_\alpha(t))\,. \end{array}$$

Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.5), $\breve{\phi}$ satisface las *ecuaciones de campo de Lagrange-Poincaré*,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \breve{\phi}^i}{\partial t^\alpha} = \phi^i_\alpha, \\
&\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial l}{\partial v^i_\alpha}\circ\breve{\phi}\right) - \frac{\partial l}{\partial q^i}\circ\breve{\phi} = \left(K^b_{ik}\phi^k_\beta - \Upsilon^b_{ic}\phi^c_\beta\right)\frac{\partial l}{\partial w^b_\beta}\circ\breve{\phi}, \\
&\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial l}{\partial w^a_\alpha}\circ\breve{\phi}\right) = \left(\Upsilon^b_{ka}\phi^k_\beta - C^b_{ac}\phi^c_\beta\right)\frac{\partial l}{\partial w^b_\beta}\circ\breve{\phi}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Las ecuaciones anteriores se corresponden con las ecuaciones de Lagrange-Poincaré que aparecen en [30] teniendo en cuenta que el formalismo utilizado en este caso (el formalismo k-simpléctico) no coincide con el utilizado en [30] (el formalismo de fibrados de jets). Una manera de relacionar estos dos enfoques es escogiendo el espacio base del fibrado de jets en [30] como $P = \mathbb{R}^k \times Q$, y suponer que el lagrangiano $L\colon J^1P \equiv \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \to \mathbb{R}$ no depende de los parámetros t^α.

Si se supone ahora que el espacio Q coincide con el grupo de simetrías G, entonces las ecuaciones de Lagrange-Poincarè (4.7) se simplifican a las siguientes ecuaciones en $(T^1_kG)/G = \mathfrak{g}^k$

$$
\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial l}{\partial w^a_\alpha}\right) = -C^b_{ac}\phi^c_B\,\frac{\partial l}{\partial w^b_B}\,,
$$

que son las llamadas *ecuaciones de campo de Euler-Poincaré*, véase [19].

Por la Proposición 3.8 se deduce que una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.20) proyecta sobre una solución de las ecuaciones de Lagrange-Poincaré. Sin embargo, a partir de una solución cualquiera de las ecuaciones de Lagrange-Poincaré (4.7) no se puede obtener una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por esta razón, tenemos que estudiar bajo qué condiciones los campos de k-vectores lagrangianos $\mathbf{\Gamma}$ son integrables, suponiendo integrable el campo de k-vectores reducido, como se verá en la Proposición 4.12.

4.4. Integrabilidad de un SOPDE invariante

La finalidad de esta sección es caracterizar la integrabilidad de un SOPDE lagrangiano $\mathbf{\Gamma}$. En el Capítulo 3 se ha estudiado la integrabilidad de un campo de k-vectores $\mathbf{X}$ en la variedad M utilizando una conexión principal ω^M en el fibrado

$\pi_M : M \to M/G$, véase la Proposición 3.21. Para el caso particular donde la variedad $M = T^1_kQ$ y el campo de k-vectores $\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE necesitaremos introducir una conexión principal en el fibrado $T^1_kQ \to T^1_kQ/G$.

Con el objetivo de aplicar los resultados relativos a la integrabilidad del Capítulo 3, definiremos una conexión principal en $T^1_kQ \to T^1_kQ/G$ a partir de una conexión en $Q \to Q/G$, esto nos permitirá relacionar las curvaturas de ambas conexiones, así como relacionar las derivadas covariantes ∇ asociadas a los fibrados adjuntos $(Q \times \mathfrak{g})/G$ y $(T^1_kQ \times \mathfrak{g})/G$.

De hecho, de este modo podremos utilizar la Proposición 3.21 y probararemos el siguiente resultado:

Un SOPDE $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ *es integrable si y sólo si su campo de k-vectores reducido* $\breve{\mathbf{\Gamma}} \in \mathfrak{X}(T^1_kQ/G)$ *lo es, y si se verifica la siguiente identidad*

$$\breve{\Gamma}_\alpha(w^b_\beta) - \breve{\Gamma}_\beta(w^b_\alpha) + (v^i_\alpha w^a_\beta - v^i_\beta w^a_\alpha)\Upsilon^b_{ia} + C^b_{ac} w^a_\alpha w^c_\beta - K^b_{ij} v^i_\alpha v^j_\beta = 0.$$

que se recoge en la Proposición 4.12.

Con la finalidad de definir una conexión principal en $T^1_kQ \to T^1_kQ/G$, estudiaremos los campos de vectores fundamentales y los campos de vectores invariantes en Q y en T^1_kQ, así como la relación entre ellos.

Asociados a la acción

$$\Phi : G \times Q \longrightarrow Q$$

se tienen los campos de vectores fundamentales $\widetilde{E}_a = (E_a)_Q \in \mathfrak{X}(Q)$, definidos para cada elemento $\{E_a\}$ de la base de $\mathfrak{g}$; y los campos invariantes $\widehat{E}_a = A^b_a \widetilde{E}_b \in \mathfrak{X}(Q)$.

Y asociados a la acción

$$\Phi^{T^1_kQ} : G \times T^1_kQ \longrightarrow T^1_kQ$$

se tienen los campos de vectores fundamentales $\{(E_a)_{T^1_kQ}\}$ en $M = T^1_kQ$, para los cuales se verifica

$$(E_a)_{T^1_kQ} = [(E_a)_Q]^C = \widetilde{E}^C_a\,,$$

puesto que, recordemos $\xi_{T^1_kQ} = (\xi_Q)^C$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Denotemos por $\widehat{E}^{T^1_kQ}_a$ los campos de vectores invariantes definidos como en (3.30). A continuación describiremos la relación entre $\widehat{E}^C_a$ y $\widehat{E}^{T^1_kQ}_a$ que utilizaremos en el Lema 4.11. Teniendo en cuenta la propiedad (3.31), se verifica que

$$\widehat{E}^{T^1_kQ}_a = A^b_a \widetilde{E}^{T^1_kQ}_a = A^b_a \widetilde{E}^C_b\,.$$

Puesto que $\widehat{E}_a = A_a^b \widetilde{E}_b$, teniendo en cuenta (1.6), se verifica

$$\begin{aligned}\widehat{E}_a^C &= (A_a^b \widetilde{E}_b)^C = A_a^b \widetilde{E}_b^C + (A_a^b)_\beta \widetilde{E}_b^{V_\beta} \\ &= A_a^b \widetilde{E}_b^C + u_\beta^d \frac{\partial A_a^b}{\partial x^d} \widetilde{E}_b^{V_\beta} = \widehat{E}_a^{T_k^1 Q} + u_\beta^d \frac{\partial A_a^b}{\partial x^d} \widetilde{E}_b^{V_\beta}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Por otro lado, utilizando la expresión del levantamiento completo (1.5) de

$$\widehat{E}_a = A_a^b K_b^c \frac{\partial}{\partial x^c},$$

obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\widehat{E}_a^C &= A_a^b K_b^c \frac{\partial}{\partial x^c} + u_\alpha^A A_a^b \frac{\partial K_b^c}{\partial x^A} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^c} + u_\alpha^A \frac{\partial A_a^b}{\partial x^A} K_b^c \frac{\partial}{\partial u_\alpha^C} \\ &= A_a^b (K_b^c \frac{\partial}{\partial x^c})^C + u_\alpha^i \frac{\partial A_a^b}{\partial x^i} K_b^c \frac{\partial}{\partial u_\alpha^c} + u_\alpha^d \frac{\partial A_a^b}{\partial x^d} K_b^c \frac{\partial}{\partial u_\alpha^c} \\ &= \widehat{E}_a^{T_k^1 Q} + \left(u_\alpha^i \frac{\partial A_a^b}{\partial x^i} + u_\alpha^d \frac{\partial A_a^b}{\partial x^d} \right) \widetilde{E}_b^{V_\beta},\end{aligned} \tag{4.9}$$

la relación de las cuasi-velocidades (1.40), para la referencia $Z_A = \{X_i, \widehat{E}_A\}$ es la siguiente

$$u_\alpha^i = v_\alpha^i, \quad u_\beta^e = (w_\beta^c - \gamma_i^c v_\beta^i) K_c^d A_d^e,$$

entonces substituyendo estas identidades en la ecuación (4.9) se sigue que

$$\begin{aligned}\widehat{E}_a^C &= \widehat{E}_a^{T_k^1 Q} + \left(v_\alpha^i \frac{\partial A_a^b}{\partial x^i} + (w_\alpha^c - \gamma_i^c v_\alpha^i) K_c^e A_e^d \frac{\partial A_a^b}{\partial x^d} \right) \widetilde{E}_b^{V_\beta} \\ &= \widehat{E}_a^{T_k^1 Q} + \left(v_\alpha^i X_i(A_a^b) + w_\alpha^c \widehat{E}_c(A_a^b) \right) \widetilde{E}_b^{V_\beta}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Si igualamos las ecuaciones (4.8) y (4.10) se obtiene la siguiente identidad:

$$\frac{\partial A_a^b}{\partial x^d} u_\beta^d = X_i(A_a^b) v_\beta^i + \widehat{E}_c(A_a^b) w_\beta^c \,. \tag{4.11}$$

Por otro lado, de la Proposición 3.20, se deduce que

$$\begin{aligned}\Upsilon_{ia}^b \widehat{E}_b &= [X_i, \widehat{E}_a] = [X_i, A_a^b \widetilde{E}_b] = X_i(A_a^b) \widetilde{E}_b \\ C_{ab}^c \widehat{E}_c &= [\widehat{E}_a, \widehat{E}_b] = [\widehat{E}_a, A_b^c \widetilde{E}_c] = \widehat{E}_a(A_b^c) \widetilde{E}_c\end{aligned} \tag{4.12}$$

Entonces, de (4.8), (4.11) y (4.12) se obtiene que

$$\widehat{E}_a^C = \widehat{E}_a^{T_k^1Q} + (\Upsilon_{ia}^b v_\beta^i + C_{ca}^b w_\beta^c)\widehat{E}_b^{V_\beta}. \tag{4.13}$$

Esta identidad se utilizará, como ya hemos dicho, en el Lema 4.11 para determinar la acción de la conexión sobre la referencia invariante $\{X_i^C, X_i^{V_\alpha}, \widehat{E}_a^C, \widehat{E}_a^{V_\alpha}\}$.

Por la Proposición 4.5 se conoce que un campo de k-vectores lagrangiano $\mathbf{\Gamma}$ es G-invariante en T_k^1Q. Por lo tanto, para estudiar su integrabilidad será necesario definir una conexión principal en el fibrado $\pi_{T_k^1Q} : M = T_k^1Q \longrightarrow M/G = (T_k^1Q)/G$, véase la Proposición 3.21.

Definición 4.9 *[21] Sea $\pi_Q \colon Q \to Q/G$ un fibrado principal por la izquierda. Una* conexión principal ϑ^Q *en Q es una 1-forma valudada en el álgebra de Lie*

$$\vartheta^Q : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que verifica las siguientes propiedades:

(1) $\vartheta^Q(\xi_Q) = \xi$, *para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.*

(2) $\vartheta^Q((\Phi_g)_*(q)(v_q)) = Ad_g(\vartheta^Q(v_q))$, *para todo $v_q \in TQ$; donde Ad_g denota la acción adjunta de G en $\mathfrak{g}$.*

Definición 4.10 *Sea $\vartheta^Q : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}$ una conexión principal en*

$$\pi_Q : Q \longrightarrow Q/G\,.$$

El levantamiento vertical

$$\vartheta^{T_k^1Q} : T(T_k^1Q) \longrightarrow \mathfrak{g}$$

es la conexión principal en el fibrado principal $\pi_{T_k^1Q} \colon T_k^1Q \longrightarrow (T_k^1Q)/G$, definida por

$$\vartheta^{T_k^1Q}(W_{\mathbf{v}_q}) = \vartheta^Q((\tau_Q^k)_*(\mathbf{v}_q)(W_{\mathbf{v}_q})),$$

para todo $W_{\mathbf{v}_q} \in T_{\mathbf{v}_q}(T_k^1Q)$.

Por lo tanto el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T^1_kQ) \arrow[d, "T\tau^k_Q"'] \arrow[dr, "\vartheta^{T^1_kQ}"] & \\ TQ \arrow[r, "\vartheta^Q"] & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

El hecho de que esta conexión sea principal, se sigue de que la conexión ω^Q lo es, y de la propiedad

$$T\tau^k_Q(g\mathbf{v}_q)\left((\Phi_g^{T^1_kQ})_*(W_{\mathbf{v}_q})\right) = (\Phi_g)_*(gq)\left(T\tau^k_Q(\mathbf{v}_q)(W_{\mathbf{v}_q})\right)\,.$$

La correspondiente forma de conexión o proyector vertical

$$\omega^{T^1_kQ} : \mathfrak{X}(T^1_kQ) \longrightarrow \mathfrak{X}(T^1_kQ)$$

verifica, para cada $W \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$, la siguiente relación

$$\begin{aligned} \omega^{T^1_kQ}(W(\mathbf{v}_q)) &= [\vartheta^{T^1_kQ}(W(\mathbf{v}_q))]_{T^1_kQ}(\mathbf{v}_q) = [\vartheta^{T^1_kQ}(W(\mathbf{v}_q))]^C_Q(\mathbf{v}_q) \\ &= [\vartheta^Q\left((\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)W(\mathbf{v}_q)\right)]^C_Q(\mathbf{v}_q) \end{aligned} \tag{4.14}$$

ya que $\xi_{T^1_kQ} = \xi^C_Q$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Lema 4.11 *La conexión $\omega^{T^1_kQ}$ verifica:*

$$\omega^{T^1_kQ}(\widehat{E}_a^{V_\beta}) = 0, \qquad \omega^{T^1_kQ}(X_i^C) = 0, \qquad \omega^{T^1_kQ}(X_i^{V_\beta}) = 0$$

$$\omega^{T^1_kQ}(\widehat{E}_a^C) = \widehat{E}_a^{T^1_kQ} = \widehat{E}_a^C - (\Upsilon^b_{ia}v^i_\beta + C^b_{ca}w^c_\beta)\widehat{E}_b^{V_\beta},$$

Demostración:

Por un lado, puesto que $(\tau^k_Q)_*(\widehat{E}_a^{V_\beta}) = 0$ y $(\tau^k_Q)_*(X_i^{V_\beta}) = 0$ por ser levantamientos verticales de campos de vectores en Q se obtiene por la definición (4.14), que $\omega^{T^1_kQ}(\widehat{E}_a^{V_\beta}) = 0$ y $\omega^{T^1_kQ}(X_i^{V_\beta}) = 0$.

Por otro lado, como X_i es horizontal y $(\tau^k_Q)_*(X_i^C) = X_i$ se concluye que $\omega^{T^1_kQ}(X_i^C) = 0$.

Finalmente, utilizando que $\omega^{T^1_kQ}(\widetilde{E}^C_a) = \widetilde{E}^C_a$ por ser $\omega^{T^1_kQ}$ una conexión principal, las ecuaciones anteriores, (4.8) y (4.13) se concluye que

$$\begin{aligned} \omega^{T^1_kQ}(\widehat{E}^C_a) &= \omega^{T^1_kQ}(A^b_a\widetilde{E}^C_b + u^d_\beta \frac{\partial A^b_a}{\partial x^d}\widetilde{E}^{V_\beta}_b) = A^b_a\omega^{T^1_kQ}(\widetilde{E}^C_b) + u^d_\beta \frac{\partial A^b_a}{\partial x^d}\omega^{T^1_kQ}(\widetilde{E}^{V_\beta}_b) \\ &= A^b_a\widetilde{E}^C_b = \widehat{E}^{T^1_kQ}_a \end{aligned}$$

□

A continuación, descompondremos un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ en su parte horizontal y vertical con respecto a la conexión $\omega^{T^1_kQ}$, lo cual será imprescindible para establecer la relación entre las curvaturas de las dos conexiones definidas anteriormente, ω^Q y $\omega^{T^1_kQ}$.

Si se escribe Γ_α como en la fórmula (4.6), entonces

$$\omega^{T^1_kQ}(\Gamma_\alpha) = \omega^{T^1_kQ}(v^i_\alpha X^C_i + w^a_\alpha \widehat{E}^C_a + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^j_\beta X^{V_\beta}_j + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^a_\beta \widehat{E}^{V_\beta}_a) = w^a_\alpha \widehat{E}^{T^1_kQ}_a$$

y por lo tanto la parte horizontal de Γ_α es

$$v^i_\alpha X^C_i + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^j_\beta X^{V_\beta}_j + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^a_\beta \widehat{E}^{V_\beta}_a + (\Upsilon^b_{ia} v^i_\beta w^a_\alpha + C^b_{ca} w^c_\beta w^a_\alpha)\widehat{E}^{V_\beta}_b.$$

Utilizando las ecuaciones del Lema 4.7, se calcula la expresión local del campo de vectores reducido correspondiente a esta parte horizontal

$$v^i_\alpha(\frac{\partial}{\partial q^i} + (K^b_{ik}v^k_\beta - \Upsilon^b_{ic}w^c_\beta)\frac{\partial}{\partial w^b_\beta}) + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^j_\beta \frac{\partial}{\partial v^j_\beta} + (\widehat{\Gamma}_\alpha)^a_\beta \frac{\partial}{\partial w^a_\beta} + (\Upsilon^b_{ia}v^i_\beta w^a_\alpha + C^b_{ca}w^c_\beta w^a_\alpha)\frac{\partial}{\partial w^b_\beta}.$$

La expresión anterior coincide con la expresión del Lema 4.8 del campo de vectores reducidos $\breve{\Gamma}_\alpha$. Por lo tanto, utilizando la conexión $\omega^{T^1_kQ}$, la descomposición (3.39) de Γ_α en su parte horizontal y vertical es la siguiente:

$$\Gamma_\alpha = (\breve{\Gamma}_\alpha)^h + (\bar{\Gamma}_\alpha)^v = (\breve{\Gamma}_\alpha)^h + w^a_\alpha \widehat{E}^{T^1_kQ}_a, \tag{4.15}$$

es decir, la sección $\bar{\Gamma}_\alpha \in Sec(\tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow (T^1_kQ)/G)$ tiene como coeficientes $X^a_\alpha = w^a_\alpha$.

Ahora se estudiarán una serie de propiedades que permitirán relacionar la curvatura de la conexión $\omega^{T^1_kQ}$ y la curvatura de la conexión ω^Q:

- *Si los campos de vectores $W \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$ y $X \in \mathfrak{X}(Q)$ están τ^k_Q-relacionados, entonces también lo están los campos de vectores $\omega^{T^1_kQ}(W)$ y $\omega^Q(X)$.*

  Sea $\mathbf{v}_q \in T^1_kQ$ y los campos de vectores $W \in \mathfrak{X}(T^1_kQ)$, $X \in \mathfrak{X}(Q)$ τ^k_Q-relacionados, es decir $(\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)W_{\mathbf{v}_q} = X_{\tau^k_Q(\mathbf{v}_q)} = X_q$, entonces

$$\begin{aligned}
(\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)(\omega^{T^1_kQ}(W_{\mathbf{v}_q})) &= (\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)\left((\vartheta^{T^1_kQ}(W_{\mathbf{v}_q}))^C_Q(\mathbf{v}_q)\right)\\
&= (\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)\left((\vartheta^Q(\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)(W_{\mathbf{v}_q}))^C_Q(\mathbf{v}_q)\right)\\
&= (\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)\left((\vartheta^Q(X_q))^C_Q(\mathbf{v}_q)\right)\\
&= (\vartheta^Q(X_q))_Q(q)\\
&= \omega^Q(X_q)
\end{aligned}$$

- Para los levantamientos horizontales, correspondientes a cada una de las dos conexiones, existe una propiedad similar. Si se denota el levantamiento horizontal asociado a ω^Q por h, y el levantamiento horizontal asociado a $\omega^{T^1_kQ}$ por h_k, obtenemos que *si $\breve{W} \in \mathfrak{X}(T^1_kQ/G)$ y $\breve{X} \in \mathfrak{X}(Q/G)$ están $\tilde{\tau}^k_Q$-relacionados, siendo $\tilde{\tau}^k_Q \colon T^1_kQ/G \to Q/G$, entonces $\breve{W}^{h_k}$ y $\breve{X}^h$ están τ^k_Q-relacionados.*

  En efecto, sea $\mathbf{v}_q \in T^1_kQ$, como $\breve{W}$ y $\breve{X}$ están $\tilde{\tau}^k_Q$-relacionados se tiene que $(\tau^k_Q)_*([\mathbf{v}_q])\breve{W}_{[\mathbf{v}_q]} = \breve{X}_{\tilde{\tau}^k_Q([\mathbf{v}_q])} = \breve{X}_{[q]}$. Entonces se sigue que,

$$\begin{aligned}
(\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)\breve{W}^{h_k}(\mathbf{v}_q) &= (\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)\gamma^{T^1_kQ}(\mathbf{v}_q, \breve{W}([\mathbf{v}_q]))\\
&= (\gamma^Q \circ (\tau^k_Q, T\tilde{\tau}^k_Q))(\mathbf{v}_q, \breve{W}([\mathbf{v}_q]))\\
&= \gamma^Q(q, (\tilde{\tau}^k_Q)_*([\mathbf{v}_q])\breve{W}([\mathbf{v}_q]))\\
&= \gamma^Q(q, \breve{X}_{[q]}) = \breve{X}^h(q)
\end{aligned}$$

  donde se ha utilizado la definición (3.2) de levantamiento horizontal de una conexión y la propiedad $T\tau^k_Q \circ \gamma^{T^1_kQ} = \gamma^Q \circ (\tau^k_Q, T\tilde{\tau}^k_Q)$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T^1_kQ \times_{T^1_kQ/G} T(T^1_kQ/G) \arrow[r, "\gamma^{T^1_kQ}"] \arrow[d, "(\tau^k_Q, T\tilde{\tau}^k_Q)"'] & T(T^1_kQ) \arrow[d, "T\tau^k_Q"] \\
Q \times_{Q/G} T(Q/G) \arrow[r, "\gamma^Q"] & TQ
\end{tikzcd}$$

  es conmutativo.

- De la propiedad anterior se obtiene directamente la siguiente propiedad, sean dos pares de campos de vectores $\breve{W}_1$, $\breve{W}_2$, $\breve{X}_1$ y $\breve{X}_2$ tales que $\breve{W}_i$ *y* $\breve{X}_i$ *están* $\tilde{\tau}^k_Q$*-relacionados,* $i = 1, 2$*. Entonces* $[\breve{W}_1^{h_k}, \breve{W}_2^{h_k}]$ *está* τ^k_Q*-relacionado con* $[\breve{X}_1^h, \breve{X}_2^h]$.

Entonces, se concluye que si $\breve{W}_i$ y $\breve{X}_i$ están $\tilde{\tau}^k_Q$-relacionados, para $i = 1, 2$, entonces las curvaturas

$$(\bar{K}^{T^1_kQ}(\breve{W}_1, \breve{W}_2))^v = -\omega^{T^1_kQ}([\breve{W}_1^{h_k}, \breve{W}_2^{h_k}])$$

y

$$(\bar{K}^Q(\breve{X}_1, \breve{X}_2))^v = -\omega^Q[\breve{X}_1^h, \breve{X}_2^h])$$

están τ^k_Q-relacionadas, donde $()^v$ representa tanto el levantamiento vertical asociado al fibrado $T^1_kQ \longrightarrow (T^1_kQ)/G$ como el levantamiento vertical correspondiente al fibrado $Q \longrightarrow Q/G$.

Por lo tanto, se deduce que los únicos coeficientes de la curvatura $K^{T^1_kQ}$ no nulos son aquellos de K^Q.

Del mismo modo, para la conexión adjunta, si $\breve{W}$ es un campo de vectores en $(T^1_kQ)/G$ que está $\tilde{\tau}^k_Q$-relacionado con un campo de vectores $\breve{X}$ en Q/G, y si $\bar{Z}$ es una sección de $(T^1_kQ \times \mathfrak{g})/G$ que está relacionada con una sección $\bar{Y}$ de $(Q \times \mathfrak{g})/G$, entonces

$$(\nabla^{T^1_kQ}_{\breve{W}} \bar{Z})^v = [\breve{W}^{h_k}, \bar{Z}^v] \quad \text{y} \quad (\nabla^Q_{\breve{X}} \bar{Y})^v = [\breve{X}^h, \bar{Y}^v]$$

están τ^k_Q-relacionados. Por lo tanto, en términos de los coeficientes de la conexión $\nabla^{T^1_kQ}$, esto significa que los únicos coeficientes de la conexión no nulos son aquellos de ∇^Q.

El siguiente resultado establece la expresión en coordenadas (3.41), para el caso de $\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma}$.

Proposición 4.12 *Un* SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ *es integrable si y sólo si su campo de* k*-vectores reducido* $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ *lo es, y si*

$$\breve{\Gamma}_\alpha(w^b_\beta) - \breve{\Gamma}_\beta(w^b_\alpha) + (v^i_\alpha w^a_\beta - v^i_\beta w^a_\alpha)\Upsilon^b_{ia} + C^b_{ac} w^a_\alpha w^c_\beta - K^b_{ij} v^i_\alpha v^j_\beta = 0.$$

□

En términos de secciones integrales, si

$$\breve{\phi}(t) = (q^i = \phi^i(t), v^i_\alpha = \phi^i_\alpha(t), w^a_\alpha = \phi^a_\alpha(t))$$

es una sección integral del campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ esto significa que

$$\frac{\partial \phi^b_\beta}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial \phi^b_\alpha}{\partial t^\beta} + (\phi^i_\alpha \phi^a_\beta - \phi^i_\beta \phi^a_\alpha)\Upsilon^b_{ia} + C^b_{ac}\phi^a_\alpha \phi^c_\beta - K^b_{ij}\phi^i_\alpha \phi^j_\beta = 0.$$

donde $\breve{\Gamma}_\alpha(w^b_\beta)(\breve{\phi}(t)) = (\widehat{\Gamma}_\alpha)^b_\beta(\breve{\phi}(t)) = \dfrac{\partial \phi^b_\beta}{\partial t^\alpha}$.

Como el campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ es integrable, es decir $[\breve{\Gamma}_\alpha, \breve{\Gamma}_\beta] = 0$, se obtiene que, entre otras cosas, las secciones integrales deben verificar

$$\frac{\partial \phi^i_\beta}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial \phi^i_\alpha}{\partial t^\beta} = 0.$$

Si se considera el espacio $Q = G$, entonces simplemente se obtiene la siguiente expresión

$$\breve{\Gamma}_\alpha(w^b_\beta) - \breve{\Gamma}_\beta(w^b_\alpha) + C^b_{ac} w^a_\alpha w^b_\beta = 0,$$

que es el análogo a la condición de anulación de la curvatura del Teorema 3.2 de [19], que permite establecer la equivalencia entre soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange y las soluciones de las ecuaciones de Euler-Poincaré.

A continuación, veremos la comparación con [30], cuando estos resultados son trasladados al formalismo k-simpléctico.

Como al final de la Sección 3.4.1, podemos definir la conexión $\gamma^{\breve{\phi},\mathbf{\Gamma}}$ como en (3.44), es decir,

$$\omega^{\breve{\phi},\mathbf{\Gamma}}(V_p) = \omega^{\breve{\phi}}(V_p) - [(\Gamma^a_\alpha \circ \breve{\phi})\bar{E}_a]^V \,, \tag{4.16}$$

donde en este caso la expresión (3.42) es:

$$\omega^{\breve{\phi}}(V_p) = \omega^{T^1_k Q}((\pi_1)_*(p)(V_p))\,.$$

En [30] se definen las conexiones $\mathcal{A}^\rho$ y $\mathcal{A}^{\breve{\phi}}$, con

$$\mathcal{A}^{\breve{\phi}} = \mathcal{A}^\rho - \omega^{\breve{\phi}}\,,$$

donde $\rho = \pi_{T^1_k Q} \circ \phi$; estas conexiones, cuando se trasladan al formalismo k-simpléctico son análogas a las conexiones que aparecen en (4.16).

Por lo tanto, la Proposición 3.19 para el caso cuando el campo de k-vectores $\mathbf{X}$ es un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ (que es equivalente a la Proposición 4.12), caracteriza la integrabilidad de $\mathbf{\Gamma}$ a partir de la integrabilidad de $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ y es análoga al resultado que aparecen en [30] en su sección sobre "Condiciones de reconstrucción".

Capítulo 5

k-conexiones: k-conexiones principales y reconstrucción

El objetivo fundamental de este capítulo es, a partir de una sección integral del campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$, solución de las ecuaciones de Lagrange-Poincarè; construír una sección integral del campo de k-vectores $\mathbf{\Gamma}$ lagrangiano.

5.1. k-conexiones

Sea $\pi : M \to N$ un fibrado, con coordenadas locales adaptadas (x^i, x^a). En esta sección se introducirá la noción de k-conexión en $\pi : M \to N$.

La sucesión exacta corta (3.1)

$$0 \to VM \xrightarrow{i} TM \xrightarrow{j} M \times_N TN \to 0,$$

donde VM es la distribución vertical del fibrado $\pi\colon M \to N$, se extiende al nivel de $T^1_k M$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (VM)^k \arrow[r, "i^k"] \arrow[dr] & T^1_k M \arrow[r, "j^k"] \arrow[d] & M \times_N T^1_k N \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\ & & M & & \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

siendo $(VM)^k = VM \times \overset{k}{\ldots} \times VM$, y denotando por $i^k = (i, \overset{k}{\ldots}, i)$ la inclusión canónica y por j^k la aplicación

$$j^k \colon T_k^1 M \to M \times_N T_k^1 N$$

definida por

$$j^k(\mathbf{w}_m) = j^k(w_{1_m}, \ldots, w_{k_m}) = (m, (\pi_*(m) w_{1_m}, \ldots, \pi_*(m) w_{k_m})) = (m, T_k^1 \pi(\mathbf{v}_m)) \,.$$

Definición 5.1 *Una k-conexión en $\pi : M \to N$ es una aplicación lineal de fibrados $\gamma^k : M \times_N T_k^1 N \to T_k^1 M$ tal que*

$$j^k \circ \gamma^k = id_{M \times_N T_k^1 N} \,, \tag{5.2}$$

es decir, una escisión por la derecha de la sucesión exacta corta.

Asociadas a la k-conexión γ^k en $\pi : M \to N$ se tienen las aplicaciones

$$h^k = \gamma^k \circ j^k \colon T_k^1 M \to T_k^1 M, \quad \omega^k = Id_{T_k^1 M} - h^k \colon T_k^1 M \to T_k^1 M$$

y así la k-conexión induce la descomposición:

$$(T_k^1 M)_m = \, Im\, \gamma^k \oplus \, Im\, i^k = \mathbf{H} M_m \oplus \mathbf{V} M_m$$

donde

$$\mathbf{H} M_m = \, Im\, \gamma^k$$

denota el correspondiente subespacio horizontal, y

$$\mathbf{V} M_m = (VM)^k_m = V_m M \times \overset{k}{\ldots} \times V_m M = \, Im\, i^k$$

denota el correspondiente subespacio vertical. Los correspondientes subfibrados horizontal $\mathbf{H}M$ y vertical $\mathbf{V}M$ proporcionan la descomposición

$$T_k^1 M = \, Im\, h^k \oplus \, Im\, \omega^k = \mathbf{H} M \oplus \mathbf{V} M$$

A continuación calculamos las expresiones locales de γ^k, h^k y ω^k.

$\boxed{\text{Expresión local de } \gamma^k \colon M \times_N T_k^1 N \to T_k^1 M}$

Dado que $\gamma^k(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) \in T_k^1 M$, se escribe la aplicación γ^k como sigue

$$\gamma^k(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) = \left(\ldots, H^i_\alpha(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - H^a_\alpha(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m, \ldots \right) \in T_k^1 M \tag{5.3}$$

donde H^i_α y H^a_α son funciones definidas en $M \times_N T^1_k N$.

De (5.2) y (5.3) se obtiene

$$(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) = (j^k \circ \gamma^k)(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) = (m, (\ldots, H^i_\alpha(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)}, \ldots)),$$

pero puesto que

$$v_{\alpha_{\pi(m)}} = u^i_\alpha(\mathbf{v}_{\pi(m)}) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)}, \quad 1 \leq \alpha \leq k$$

se deduce que

$$H^i_\alpha(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) = u^i_\alpha(\mathbf{v}_{\pi(m)}),$$

es decir, la expresión local (5.3) es

$$\gamma^k(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) = \left(\ldots, u^i_\alpha(\mathbf{v}_{\pi(m)}) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - H^a_\alpha(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m, \ldots \right) \in T^1_k M \quad (5.4)$$

donde $1 \leq \alpha \leq k$.

Si utilizamos el carácter lineal de la k-conexión γ^k se sigue de (5.4) que

$$
\begin{aligned}
\gamma^k(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) &= \gamma^k\left(m, (\ldots, u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)}) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)}, \ldots,)\right) \\
&= \gamma^k\left(m, \sum_{\beta=1}^{k} u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)})(0, \ldots, 0, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\beta}\Big|_{\pi(m)}, 0, \ldots, 0)\right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{k} u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)})\, \gamma^k \left(m, (0, \ldots, 0, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\beta}\Big|_{\pi(m)}, 0, \ldots, 0)\right) \\
&\overset{(5.4)}{=} \sum_{\beta=1}^{k} u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)}) \left(\ldots, u^j_\alpha(0, \ldots, 0, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\beta}\Big|_{\pi(m)}, 0, \ldots, 0)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_m \right. \\
&\qquad \left. - H^a_\alpha(m, (0, \ldots, 0, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\beta}\Big|_{\pi(m)}, 0, \ldots, 0))\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m, \ldots \right) \\
&= \sum_{\beta=1}^{k} u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)})(\ldots, \delta^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - B^{a\beta}_{\alpha i}(m)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m, \ldots)\,.
\end{aligned}
$$

donde las funciones $B^{a\beta}_{\alpha i} \in C^\infty(M)$ están definidas por

$$
B^{a\beta}_{\alpha i}(m) = H^a_\alpha(m, (0, \ldots, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\beta}\Big|_{\pi(m)}, \ldots, 0))
$$

y se denominarán “coeficientes de la k-conexión” γ^k.

Por lo tanto, podemos escribir

$$
\gamma^k(m, \mathbf{v}_{\pi(m)}) = \left(\ldots, u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)})(\delta^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - B^{a\beta}_{\alpha i}(m)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m), \ldots\right)\,, \quad 1 \leq \alpha \leq k, \tag{5.5}
$$

ó equivalentemente

$$(\gamma^k(m,\mathbf{v}_{\pi(m)}))_\alpha = u^i_\alpha(\mathbf{v}_{\pi(m)})\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)})\, B^{a\beta}_{\alpha i}(m)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m . \tag{5.6}$$

Observación 5.2 *La expresión local de γ^k, en forma abreviada, es*

$$\gamma^k(x^i,x^a,u^i_\alpha) = (x^i,x^a,u^i_\alpha,u^a_\alpha = -B^{a\beta}_{\alpha i}u^i_\beta)\,. \tag{5.7}$$

$\boxed{\text{Expresión local del proyector horizontal } h^k = \gamma^k\circ j^k\colon T^1_kM\to T^1_kM}$

Sea $\mathbf{w}_m = (w_{1_m},\dots,w_{k_m})\in T^1_kM$ entonces

$$j^k(\mathbf{w}_m) = (m,(v_{1_{\pi(m)}},\dots,v_{k_{\pi(m)}}))$$

donde $v_{\alpha_{\pi(m)}} = \pi_*(m)w_{\alpha_m}$. Por lo tanto, de (5.5) obtenemos:

$$\begin{aligned} h^k(\mathbf{w}_m) &= \gamma^k\circ j^k(\mathbf{w}_m) = \gamma^k(m,(v_{1_{\pi(m)}},\dots,v_{k_{\pi(m)}}))\\ &= \Big(\dots,u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)})(\delta^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - B^{a\beta}_{\alpha i}(m)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m),\dots\Big)\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)}) = u^i_\beta(\mathbf{w}_{\pi(m)})$, ó equivalentemente,

$$(h^k(\mathbf{w}_m))_\alpha = u^i_\alpha(\mathbf{w}_m)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - u^i_\beta(\mathbf{w}_m)\, B^{a\beta}_{\alpha i}(m)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m .$$

$\boxed{\text{Expresión local del proyector vertical } \omega^k = Id_{T^1_kM} - h^k\colon T^1_kM\to T^1_kM}$

$$\begin{aligned}\omega^k(\mathbf{w}_m) &= \omega^k(w_{1_m},\dots,w_{k_m}) = (w_{1_m},\dots,w_{k_m}) - h^k(w_{1_m},\dots,w_{k_m})\\ &= (\dots,w_{\alpha_m} - (h^k(w_{1_m},\dots,w_{k_m}))_\alpha,\dots)\end{aligned}$$

Ahora, de un cálculo directo se obtiene que

$$w_{\alpha_m} - (h^k(w_{1_m},\dots,w_{k_m}))_\alpha = (u^a_\alpha(\mathbf{w}_m) + B^{a\beta}_{i\alpha}(m)u^i_\beta(\mathbf{w}_m))\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m$$

ó equivalentemente

$$\omega^k(\mathbf{w}_m) = (\dots,(u^a_\alpha(\mathbf{w}_m) + B^{a\beta}_{i\alpha}(m)u^i_\beta(\mathbf{w}_m))\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m,\dots)\,. \tag{5.8}$$

A continuación describimos las bases de $\mathbf{H}M$ y de $\mathbf{V}M$. Cualquier k-vector

$$\mathbf{w}_m = (w_{1_m}, \ldots, w_{k_m})$$

en M puede escribirse de forma única como la suma

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_m &= h^k(\mathbf{w}_m) + \omega^k(\mathbf{w}_m) \\
&= \left(\ldots, u^i_\beta(\mathbf{v}_{\pi(m)})(\delta^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - B^{a\beta}_{\alpha i}(m) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m), \ldots \right) \\
&+ \left(\ldots, (u^a_\alpha(\mathbf{w}_m) + B^{a\beta}_{i\alpha}(m) u^i_\beta(\mathbf{w}_m)) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m, \ldots \right)
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\mathbf{w}_m = u^i_\beta(\mathbf{w}_m)\, \mathbf{X}^\beta_i(m) + (u^a_\alpha(\mathbf{w}_m) + B^{a\beta}_{i\alpha}(m) u^i_\beta(\mathbf{w}_m)) \mathbf{X}^\alpha_a(m) \tag{5.9}$$

donde

$$\mathbf{X}^\beta_i = ((X^\beta_i)_1, \ldots, (X^\beta_i)_k)$$

son los campos de k-vectores locales en M definidos por

$$(X^\beta_i)_\alpha(m) = [\gamma^k(m, (0, \ldots, 0, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\beta}\Big|_{\pi(m)}, 0, \ldots, 0))]_\alpha = \delta^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m - B^{a\beta}_{i\alpha}(m) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m ; \tag{5.10}$$

y $\mathbf{X}^\beta_a$ los correspondientes campos de k-vectores verticales locales definidos por:

$$\mathbf{X}^\beta_a(m) = i^k(0, \ldots, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^a}}^{\beta}\Big|_m, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^a}}^{\beta}\Big|_m, 0, \ldots, 0).$$

Para cada componente α-ésima podemos escribir

$$w_{\alpha_m} = u^i_\beta(\mathbf{w}_m)\, (X^\beta_i)_\alpha(m) + (u^a_\alpha(\mathbf{w}_m) + B^{a\beta}_{i\alpha}(m) u^i_\beta(\mathbf{w}_m)) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m .$$

Si $\mathbf{X}$ es un campo de k-vectores en M se descompone como sigue

$$\mathbf{X} = X^i_\alpha\, \mathbf{X}^\alpha_i + (X^a_\alpha + B^{a\beta}_{i\alpha} X^i_\beta) \mathbf{X}^\alpha_a,$$

donde $X_\alpha = X^i_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^i} + X^a_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x^a}$.

Con respecto a las dimensiones se tiene

$$dim\,(T^1_k M)_x = k\,m, \quad dim\,\mathbf{H}M_x = nk, \quad dim\,\mathbf{V}M_x = (m-n)\,k\,,$$

donde

$$x \in M, \quad m = dim\,M, \quad n = dim\,N\,.$$

Obsérvese que las expresiones de $(h^k(\mathbf{X}))_\alpha$ y $\omega^k(\mathbf{X})_\alpha$ no sólo contiene las componentes del vector α-ésimo X_α.

5.1.1. Levantamiento horizontal de campos de k-vectores

De manera análoga a la definición (3.2) de levantamiento horizontal de un campo de vectores, se define el levantamiento horizontal de un campo de k-vectores con respecto a una k-conexión γ^k como sigue.

Definición 5.3 *El levantamiento horizontal de un campo de k-vectores $\mathbf{Y}$ en N es el campo de k-vectores $\mathbf{Y}^H$ en M, definido por*

$$\mathbf{Y}^H(m) = \gamma^k(m, \mathbf{Y}(\pi(m))).$$

Si $Y_\beta = Y^i_\beta \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, o equivalentemente

$$\mathbf{Y} = Y^i_\beta\,(0, \ldots, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\beta}, \ldots, 0)\,,$$

entonces, por el carácter lineal de la k-conexión γ^k, se deduce que

$$\mathbf{Y}^H(m) = \gamma^k(m, Y^i_\beta(0, \ldots, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)}}^{\beta}, \ldots, 0)) = Y^i_\beta \gamma^k(m, (0, \ldots, \overbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)}}^{\beta}, \ldots, 0))$$

y de la expresión local (5.10) se obtiene que

$$\mathbf{Y}^H = Y^i_\beta\,\mathbf{X}^\beta_i = (Y^i_\beta \circ \pi)\,((X^\beta_i)_1, \ldots, (X^\beta_i)_k)$$

y por lo tanto

$$(\mathbf{Y}^H)_\alpha = (Y^i_\beta \circ \pi)\,(X^\beta_i)_\alpha = (Y^i_\beta \circ \pi)\,(\delta^\alpha_\beta \frac{\partial}{\partial x^i} - B^{a\beta}_{\alpha i}\frac{\partial}{\partial x^a})\,. \tag{5.11}$$

5.1.2. Ejemplos de k-conexiones

A continuación se muestran dos ejemplos de k-conexiones. Un tercer ejemplo, llamado "la k-conexión mecánica", se estudiará en la Sección 5.4 y será fundamental para desarrollar la reconstrucción de una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de una solución de las ecuaciones de Lagrange-Poincaré.

Ejemplo 5.4 Una conexión "simple".
Sea γ^M una conexión en $\pi : M \to N$. A partir de γ^M se puede construir fácilmente una k-conexión γ^k como sigue

$$\gamma^k(m, \mathbf{u}) = (\gamma^M(m, u_1), \ldots, \gamma^M(m, u_k)), \quad \mathbf{u} \in T^1_k N.$$

Si la aplicación γ^M tiene la siguiente expresión en coordenadas locales

$$\gamma^M(x^i, x^a, \dot{x}^i) = (x^i, x^a, \dot{x}^i, \dot{x}^a = \Gamma^a_i(x)\dot{x}^i)\,,$$

para ciertos coeficientes de conexión Γ^a_i, entonces

$$\gamma^k(m, \mathbf{u}) = (m, u^i_\alpha, \Gamma^a_i(m)u^i_\alpha)\,,$$

es decir, $B^{a\beta}_{i\alpha} = \Gamma^a_i \delta^\beta_\alpha$. A este tipo de k-conexión se llamarán k-conexiones de tipo "simple".

Para estudiar el siguiente ejemplo será necesario introducir el concepto de campo de k-tensores.

Se dirá que $\mathbf{A}$ es un *campo de k-tensores de tipo (1,1) en M* si es un campo de tensores de tipo (1,1) en τ^k_M, es decir, es una aplicación $C^\infty(M)$-lineal

$$\mathbf{A}\colon \mathfrak{X}^k(M) \to \mathfrak{X}^k(M)\,.$$

Localmente, se puede escribir para $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ que

$$\begin{tikzcd} T^1_k M \arrow[r, "\mathbf{A}"] \arrow[d, "\tau^k_M"'] & T^1_k M \\ M \arrow[u, bend left, "\mathbf{Y}"] \arrow[ur, "\mathbf{Z}=\mathbf{A}\circ\mathbf{Y}"'] & \end{tikzcd}$$

es decir,

$$\mathbf{A}(\mathbf{Y}) = \mathbf{Z}\,,$$

con $Z^B_\beta = A^{B\alpha}_{\beta A} Y^A_\alpha$.

Como un caso especial, se considera un campo de tensores A de tipo (1,1) en M, y se extiende a un campo de k-tensores de tipo (1,1), como $Z_\beta = A(Y_\beta)$. Entonces $A^{B\alpha}_{\beta A} = A^B_A \delta^\beta_\alpha$.

Se define la derivada de Lie a campos de k-tensores como sigue

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{A})(\mathbf{Y}) = \mathcal{L}_X(\mathbf{A}(\mathbf{Y})) - \mathbf{A}(\mathcal{L}_X \mathbf{Y}) \tag{5.12}$$

para un campo de k-tensores $\mathbf{A}$ de tipo (1,1), donde $\mathcal{L}_X \mathbf{Y} = ([X, Y_1], \dots, [X, Y_k])$.

Ejemplo 5.5 La conexión asociada a un SOPDE**.**
Sea $M = T^1_k Q$ y $N = Q$, se supone que $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_\alpha)$ es un SOPDE. Se denota por $\mathbf{J}^\gamma$ el campo de k-tensores de tipo (1,1), dado por

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{J}^\gamma & : & T^1_k M = T^1_k(T^1_k Q) & \to & T^1_k M = T^1_k(T^1_k Q) \\ & & (X_1, \dots, X_k) & \mapsto & \mathbf{J}^\gamma(\mathbf{X}) = (J^\gamma(X_1), \dots, J^\gamma(X_k)) \end{array}$$

donde $(J^1, \dots, J^k)$ es la estructura k-tangente canónica definida en (1.9), es decir $\mathbf{J}^\gamma$ está determinado por

$$\begin{tikzcd} T(T^1_k Q) \arrow[rr, "J^\gamma"] & & T(T^1_k Q) \\ & T^1_k Q \arrow[ul, "X_\alpha"] \arrow[ur, "J^\gamma(X_\alpha)"'] & \end{tikzcd} .$$

Entonces, por la definición (5.12) de derivada de Lie

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\gamma} \mathbf{J}^\gamma \colon T^1_k(T^1_k Q) \to T^1_k(T^1_k Q)$$

(suma sobre γ) es un campo de k-tensores de tipo (1,1) en $M = T^1_k Q$.

Se define una k-conexión en el fibrado $T^1_k Q \to Q$ mediante su aplicación conexión, es decir, mediante su proyector vertical:

$$\omega^k \colon T^1_k(T^1_k Q) \to T^1_k(T^1_k Q)$$

definido por

$$\omega^k = \frac{1}{k+1} \left(k\, Id_{T^1_k(T^1_k Q)} + \mathcal{L}_{\Gamma_\gamma} \mathbf{J}^\gamma \right) .$$

Si la expresión local del SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ en T^1_kQ es

$$\Gamma_\beta = u^A_\beta \frac{\partial}{\partial q^A} + (\Gamma_\beta)^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}$$

y la del campo de k-vectores $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k(T^1_kQ)$ es

$$X_\beta = X^A_\beta \frac{\partial}{\partial q^A} + (X_\beta)^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\,,$$

entonces $\omega^k(\mathbf{X}) = ((\omega^k(\mathbf{X}))_1, \dots, (\omega^k(\mathbf{X}))_k)$ tiene expresión

$$(\omega^k(\mathbf{X}))_\beta = ((X_\beta)^A_\gamma + X^C_\alpha B^{A\beta}_{C\gamma\alpha}) \frac{\partial}{\partial u^A_\gamma}$$

donde los coeficientes de la conexión son $B^{A\beta}_{C\gamma\alpha} = \delta^\beta_\alpha \Gamma^A_{C\gamma}$ y

$$\Gamma^A_{C\gamma} = -\frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial u^C_\delta} (\Gamma_\delta)^A_\gamma\,.$$

Entonces, como sugiere la forma de los coeficientes de la k-conexión $B^{A\beta}_{C\gamma\alpha}$, esta k-conexión es de tipo simple. De hecho es la conexión asociada a la conexión en el fibrado $T^1_kQ \to Q$ que fue definida en [93] para $\mathbf{\Gamma}$.

5.2. k-conexiones principales

A continuación se definirán k-conexiones principales en el fibrado principal $\pi_M : M \to N = M/G$, como cierto tipo de k-conexiones en dicho fibrado.

Es conocido que la distribución vertical VM se identifica con $M \times \mathfrak{g}$ del siguiente modo

$$\begin{array}{ccc} VM & \to & M \times \mathfrak{g} \\ \xi_M(m) & \mapsto & (m, \xi)\,. \end{array}$$

Si ξ_α pertenece a $\mathfrak{g}$, se define el *campo de k-vectores fundamental* $(\xi_1, \dots, \xi_k)_M$ como

$$(\xi_1, \dots, \xi_k)_M \colon = ((\xi_1)_M, \dots, (\xi_k)_M) \in \mathfrak{X}^k(M),$$

por lo tanto, también se puede identificar $(VM)^k$ con $M \times \mathfrak{g}^k$, como sigue

$$\begin{array}{rcl} (VM)^k = VM\times \overset{k}{\ldots} \times VM & \equiv & M \times \mathfrak{g}^k \\ ((\xi_1)_M(m), \ldots, (\xi_k)_M(m)) & \equiv & (m, \xi_1, \ldots, \xi_k)\,. \end{array} \tag{5.13}$$

Teniendo en cuenta esta identificación, la sucesión exacta corta (5.1) es ahora de la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \times \mathfrak{g}^k \equiv (VM)^k \arrow[r, "i^k"] & T^1_k M \arrow[r, "j^k"] \arrow[l, bend left, "\omega^k"] & M \times_{M/G} T^1_k(M/G) \arrow[r] \arrow[l, bend left, "\gamma^k"] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Sea γ^k una k-conexión asociada a dicha k-conexión, se define la "forma"

$$\begin{array}{rcccl} \vartheta^k & : & T^1_k M & \to & \mathfrak{g}^k \\ & & \mathbf{v}_m & \to & \vartheta^k(\mathbf{v}_m) = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \end{array}$$

siendo

$$\omega^k(\mathbf{v}_m) = (\xi_1, \ldots, \xi_k)_M(m)$$

donde $\omega^k : T^1_k M \to (VM)^k \subset T^1_k Q$ es la correspondiente escisión por la izquierda.

Recuérdese de nuevo que una conexión principal en $\pi_M \colon M \to M/G$ es una 1-forma ϑ en M y $\mathfrak{g}$-valuada verificando

(1) $\vartheta(\xi_M(m)) = \xi$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$ y para todo $m \in M$.

(2) $\vartheta((\Phi_g)_*(m)(\mathbf{v}_m)) = Ad_g(\vartheta(\mathbf{v}_m))$, donde $m \in M$ y $\mathbf{v}_m \in T^1_k Q$.

Es evidente que

$$\vartheta^k((\xi_1, \ldots, \xi_k)_M) = (\xi_1, \ldots, \xi_k)\,,$$

que se corresponde con la propiedad (1) de la definición de conexión principal. La propiedad (2) nos lleva a establecer la siguiente definición.

Definición 5.6 *Una k-conexión γ^k en $\pi_M : M \to M/G$ se dice que es principal si*

$$(\vartheta^k \circ \Phi_g^{T^1_k M})(\mathbf{v}_m) = (Ad_g)^k(\vartheta^k(\mathbf{v}_m)), \tag{5.14}$$

para todo $\mathbf{v}_m \in T^1_k M$, donde $(Ad_g)^k : \mathfrak{g}^k \to \mathfrak{g}^k$ es la aplicación $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ en cada uno de los k factores.

Obsérvese que la condición (5.14) significa que

$$\vartheta^k((\Phi_g)_*(m)v_{1_m},\ldots,(\Phi_g)_*(m)v_{k_m}) = (Ad_g(\vartheta^k(\mathbf{v}_m))_1,\ldots,Ad_g(\vartheta^k(\mathbf{v}_m))_k)\,.$$

Cuando se expresa la misma condición en términos del k-tensor

$$\omega^k : T^1_k M \to T^1_k M$$

dicha condición es equivalente a

$$\Phi_g^{T^1_k M}\circ\omega^k = \omega^k\circ\Phi_g^{T^1_k M}\,. \tag{5.15}$$

En efecto, si $\vartheta^k(\mathbf{v}_m) = (\xi_1,\ldots,\xi_k)$ entonces

$$\begin{aligned}
\omega^k(gm)(g\mathbf{v}_m) &= [\vartheta^k(g\mathbf{v}_m)]_M(gm)\\
&= [(Ad_g)^k(\vartheta^k(\mathbf{v}_m))]_M(gm)\\
&= ((Ad_g\xi_1)_M,\ldots,(Ad_g\xi_k)_M)(gm)\\
&= (\Phi^*_{g^{-1}}(\xi_1)_M(gm),\ldots,\Phi^*_{g^{-1}}(\xi_k)_M(gm))\\
&= ((\Phi_g)_*(m)((\xi_1)_M(m)),\ldots,(\Phi_g)_*(m)((\xi_k)_M(m)))\\
&= g(\xi_1,\ldots,\xi_k)_M(m)\\
&= g(\vartheta^k(\mathbf{v}_m))\\
&= g\omega^k(m)(\mathbf{v}_m))
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado $(\Phi_{g^{-1}})^*\xi_M(gm) = (\Phi_g)_*(m)\xi_M(m)$ y $(Ad_g\xi)_M = \Phi^*_{g^{-1}}\xi_M$, véase [1], y la notación $g\mathbf{v}_m = \Phi_g^{T^1_k M}(\mathbf{v}_m)$.

Observación 5.7 Teniendo en cuenta la definición de derivada de Lie (5.12) de campos de k-tensores, (5.15) es equivalente (cuando G es conexo) a

$$\mathcal{L}_{\xi_M}\omega^k = \mathbf{0}, \tag{5.16}$$

si se considera la acción de ω^k en campos de k-vectores.

En efecto, sea $\mathbf{Y}$ un campo de k-vectores en $T^1_k M$, entonces se tiene

$$(\mathcal{L}_{\xi_M}\omega^k)(\mathbf{Y}) = \mathcal{L}_{\xi_M}(\omega^k(\mathbf{Y})) - \omega^k(\mathcal{L}_{\xi_M}\mathbf{Y})\,.$$

Por un lado, por la definición de derivada de Lie de campos de k-vectores (3.11), obtenemos que

$$\omega^k(\mathcal{L}_{\xi_M}\mathbf{Y}) = \omega^k\left(\lim_{t\to 0}\frac{T^1_k\Phi(\exp t\xi, \mathbf{Y}(m)) - \mathbf{Y}(m)}{t}\right) = \omega^k\left(\lim_{t\to 0}\frac{\Phi^{T^1_kM}_{\exp t\xi}(\mathbf{Y}(m)) - \mathbf{Y}(m)}{t}\right),$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\xi_M}(\omega^k(\mathbf{Y})) &= \lim_{t\to 0}\frac{T^1_k\Phi(\exp t\xi, \omega^k(\mathbf{Y})(m)) - \omega^k(\mathbf{Y})(m)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\Phi^{T^1_kM}_{\exp t\xi}(\omega^k(\mathbf{Y})(m)) - \omega^k(\mathbf{Y})(m)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\omega^k(\Phi^{T^1_kM}_{\exp t\xi}(\mathbf{Y})(m) - \mathbf{Y}(m))}{t}
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado que $\omega^k \circ \Phi^{T^1_kM}_g = \Phi^{T^1_kM}_g \circ \omega^k$.

5.2.1. Invarianza del levantamiento horizontal

A continuación, se probará la invarianza del levantamiento horizontal de un campo de k-vectores en un fibrado principal $\pi_M : M \to N = M/G$, lo que nos permitirá afirmar que los campos de vectores $X^\beta_{i\alpha}$ son invariantes.

Lema 5.8 *Una k-conexión principal verifica que*

$$\gamma^k(gm, \mathbf{u}_n) = g\gamma^k(m, \mathbf{u}_n) = \Phi^{T^1_kM}_g \circ \gamma^k(m, \mathbf{u}_n)\,,$$

donde $n \in N = M/G$ y $\mathbf{u}_n \in T^1_kN$, es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \times_{M/G} T^1_k(M/G) \arrow[r, "\gamma^k"] \arrow[d, "\Phi_g \times Id_{T^1_k(M/G)}"'] & T^1_kM \arrow[d, "\Phi^{T^1_kM}_g"] \\
M \times_{M/G} T^1_k(M/G) \arrow[r, "\gamma^k"] & T^1_kM
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración:

Sea $\mathbf{v}_m \in T^1_k M$ tal que $T^1_k\pi(\mathbf{v}_m) = \mathbf{u}_n$, y que además verifica

$$g\mathbf{v}_m = (\dots, (\Phi_g)_*(m)(v_{\alpha_m}), \dots) = \mathbf{w}_{gm}$$

por lo tanto $j^k(\mathbf{w}_{gm}) = (gm, T^1_k\pi(\mathbf{w}_{gm}) = T^1_k\pi(\mathbf{v}_m) = \mathbf{u}_n)$, entonces utilizando $\omega^k = id - \gamma^k \circ j^k$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\gamma^k(gm, \mathbf{u}_n) &= (\gamma^k \circ j^k)(g\mathbf{v}_m) = g\mathbf{v}_m - \omega^k(g\mathbf{v}_m) = g(\mathbf{v}_m - \omega^k(\mathbf{v}_m)) \\ &= g(\gamma^k \circ j^k)(\mathbf{v}_m) = g\gamma^k(m, \mathbf{u}_n).\end{aligned}$$

□

Proposición 5.9 *El levantamiento horizontal* $\breve{\mathbf{X}}^H \in \mathfrak{X}^k(M)$ *de un campo de* k*-vectores* $\breve{\mathbf{X}} \in \mathfrak{X}^k(M/G)$ *es* G*-invariante.*

Demostración:

Sea $\breve{\mathbf{X}}$ un campo de k-vectores en N. Hay que demostrar que

$$\Phi_g^{T^1_k M} \circ \breve{\mathbf{X}}^H = \breve{\mathbf{X}}^H \circ \Phi_g\,,$$

es decir $\breve{\mathbf{X}}^H(gm) = g\breve{\mathbf{X}}^H(m)$, la cual se obtiene a partir de lema anterior. En efecto se verifica

$$\breve{\mathbf{X}}^H(gm) = \gamma^k(gm, \breve{\mathbf{X}}(\pi(gm))) = g\gamma^k(m, \breve{\mathbf{X}}(\pi(m))) = g\breve{\mathbf{X}}^H(m)\,.$$

□

Puesto que el campo de k-vectores $\breve{\mathbf{X}}^H$ en M es invariante, se verfica $\mathcal{L}_{\xi_M}\breve{\mathbf{X}}^H = 0$, para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

En coordenadas, esto significa que si $\breve{X}_\alpha = \breve{X}^i_\alpha(x^j)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ entonces teniendo en mente (5.11) se verifica que

$$0 = \left(\mathcal{L}_{\widetilde{E}_a}(\breve{\mathbf{X}}^H)\right)_\alpha = [\widetilde{E}_a, \breve{X}^i_\beta X^\beta_{i\alpha}] = \widetilde{E}_a(\breve{X}^i_\alpha)X^\beta_{i\alpha} + \breve{X}^i_\alpha[\widetilde{E}_a, X^\beta_{i\alpha}] = \breve{X}^i_\alpha[\widetilde{E}_a, X^\beta_{i\alpha}]\,,$$

puesto que $\widetilde{E}_a(\breve{X}^i_\alpha) = 0$. Por lo tanto, esta identidad implica que los campos de vectores $X^\beta_{i\alpha}$ en M son invariantes.

Observación 5.10 *Como se puede observar de la demostración de la Proposición 5.9, el resultado es válido para cualquier campo de* k*-vectores en* M/G*.*

5.2.2. Integrabilidad del levantamiento horizontal: k-conexión simple

A continuación, se discutirá brevemente la integrabilidad de un levantamiento horizontal del campo de k-vectores con respecto a una k-conexión principal.

Sea $\breve{\mathbf{X}}$ un campo de k-vectores integrable en M/G. Para el caso especial donde $\mathbf{X} = \breve{\mathbf{X}}^H$, la Proposición 3.19 dice que si $\mathbf{X} = \breve{\mathbf{X}}^H$ es integrable entonces la curvatura de $\omega^{\breve{\phi},\breve{\mathbf{X}}^H}$ debe anularse para toda sección $\breve{\phi}$ de $\breve{\mathbf{X}}$.

Sea $\breve{\phi}$ una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$ y V_p un vector tangente a $\breve{\phi}^*M$ en un punto p tal que $i(p) = (t, m) \in \mathbb{R}^k \times M$, si V_p tiene expresión local (3.22), es decir,

$$V_p = T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_p + \tilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_p$$

entonces de (3.23), y (5.10) se obtiene que

$$\begin{aligned}
i_*(p)(V_p) &= T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{i(p)} + (\breve{X}^i_\alpha \circ \breve{\phi}) T^\alpha \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{i(p)} + \widetilde{Y}^a \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{i(p)} \\
&= T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{i(p)} + (\breve{X}^i_\beta \circ \breve{\phi}) T^\alpha X^\beta_{i\alpha}(i(p)) + ((\breve{X}^i_\beta \circ \breve{\phi}) T^\alpha B^{a\beta}_{i\alpha} + \widetilde{Y}^a) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{i(p)} \\
&= T^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{i(p)} + (\breve{X}^i_\beta \circ \breve{\phi}) T^\alpha X^\beta_{i\alpha}(i(p)) + Z^a \widehat{E}_a(i(p)),
\end{aligned}$$

donde Z^a está está definido por

$$Z^c A^b_c K^a_b = (\breve{X}^i_\beta \circ \breve{\phi}) T^\alpha B^{a\beta}_{i\alpha} + \tilde{Y}^a \,.$$

Entonces, de (3.24) y (3.25), se deduce que

$$\begin{aligned}
\omega^{\breve{\phi},\breve{\mathbf{X}}^H}(V_p) &= \left(t, (\tilde{Y}^a - (\breve{\mathbf{X}}^H)^a_\alpha(m) T^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m \right) \\
&= \left(t, (\tilde{Y}^a + B^{a\beta}_{i\alpha} \breve{X}^i_\beta T^\alpha) \frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m \right) \\
&= (t, Z^a \widehat{E}_a) \,.
\end{aligned}$$

A continuación, se considera una k-conexión γ^k construida a partir de una conexión γ^M, es decir, la restricción al "caso simple" y se proporcionará una segunda interpretación de las condiciones de integrabilidad, como se hizo en la Proposición 3.21.

Puesto que para una k-conexión de tipo simple $B^{a\beta}_{i\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha}\Gamma^a_i$, el levantamiento horizontal de un campo de k-vectores $\breve{\mathbf{X}}$ en M/G es de la forma

$$(\breve{\mathbf{X}}^H)_\alpha = X^i_\alpha(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^a_i\frac{\partial}{\partial x^a}) = (X_\alpha)^h \, ,$$

donde el último ^{h} se refiere al levantamiento horizontal asociado a γ^M. Como para cada $\alpha = 1, \ldots, k$, la descomposición (3.36) de $(\breve{X}_\alpha)^h$ tiene parte vertical nula, entonces de (3.38) se obtiene que

$$[(\breve{\mathbf{X}}^H)_\alpha, (\breve{\mathbf{X}}^H)_\beta] = [(\breve{X}_\alpha)^h, (\breve{X}_\beta)^h] = [\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta]^h - K^M(\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta)\, , \tag{5.17}$$

donde K^M denota, como antes, la curvatura de de la conexión γ^M, tomando valores en la distribución vertical de $\pi : M \to M/G$. Se puede entonces concluir que:

Proposición 5.11 *El levantamiento horizontal $\breve{\mathbf{X}}^H$ de $\breve{\mathbf{X}}$ correspondiente a una k-conexión simple es integrable si y sólo si $\breve{\mathbf{X}}$ es integrable y $K^M(\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta) = 0$, para todo α y β.*

Demostración:

El resultado se sigue de la ecuación (5.17) teniendo en cuenta que $[\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta]^h$ es horizontal y $K^M(\breve{X}_\alpha, \breve{X}_\beta)$ vertical. Por lo tanto $[(\breve{\mathbf{X}}^H)_\alpha, (\breve{\mathbf{X}}^H)_\beta] = 0$ si y sólo si se anulan ambos sumandos.

□

5.3. Método de reconstrucción

El objetivo de esta sección, véase Proposición 5.16, es construir una sección integral ϕ del campo de k-vectores G-invariante $\mathbf{X}$, a partir de una sección integral $\breve{\phi}$ del campo de vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$.

En esta sección consideramos de nuevo el fibrado principal $\pi_M : M \to N = M/G$, suponemos que existe una k-conexión principal γ^k (o $\omega^k : T^1_kM \to T^1_kM$) y que los campos de k-vectores $\breve{\mathbf{X}} \in \mathfrak{X}^k(M/G)$ y $\breve{\mathbf{X}}^H \in \mathfrak{X}^k(M)$ son integrables.

Utilizaremos las expresiones locales

$$X_\alpha(m) = X^i_\alpha(m)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_m + X^a_\alpha(m)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_m \, ,$$

$$\breve{X}_\alpha(\pi_M(m)) = \breve{X}^i_\alpha(\pi_M(m))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)} = X^i_\alpha(m)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)}$$

y

$$(\breve{\mathbf{X}}^H)_\alpha(m) \;= X^i_\alpha(m)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\pi(m)} - B^{a\beta}_{\alpha i}(m)X^i_\beta(m)\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{\pi(m)}$$

de $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}^k(M)$, $\breve{\mathbf{X}} \in \mathfrak{X}^k(M/G)$ y $\breve{\mathbf{X}}^H \in \mathfrak{X}^k(M)$, respectivamente.

Definición 5.12 *Una aplicación $\breve{\phi}_H : \mathbb{R}^k \to M$ se llama levantamiento horizontal de $\breve{\phi}$ si*

(1) *$\pi_M \circ \breve{\phi}_H = \breve{\phi}$, es decir, que el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\pi_M"] \\ \mathbb{R}^k \arrow[ur, "\breve{\phi}_H"] \arrow[r, "\breve{\phi}"'] & M/G \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y

(2) *$\breve{\phi}_H$ es una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}^H$.*

A continuación se estudiará qué condiciones debe cumplir el levantamiento horizontal de una sección $\breve{\phi}$ de $\breve{\mathbf{X}}$.

Si las expresiones locales de $\breve{\phi}$ y $\breve{\phi}^H$ son

$$\breve{\phi}(t) = (x^i = \breve{\phi}^i(t)), \quad \text{y} \quad \breve{\phi}_H(t) = (\phi^i_H(t), \phi^a_H(t))\,,$$

entonces $\breve{\phi}^i(t) = \pi_M \circ \phi^i_H(t)$.

Puesto que $\breve{\phi}_H$ es una sección integral del campo de k-vectores $\breve{\mathbf{X}}^H$. se verifica que

$$\breve{X}^H_\alpha(\breve{\phi}_H(t)) = (\breve{\phi}_H)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)\,,$$

y ahora calculamos ambas partes de esta identidad, la parte derecha es

$$(\breve{\phi}_H)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = \frac{\partial \phi^i_H}{\partial t^\alpha}\Big|_t\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\breve{\phi}_H(t)} + \frac{\partial \phi^a_H}{\partial t^\alpha}\Big|_t\frac{\partial}{\partial x^a}\Big|_{\breve{\phi}_H(t)} \tag{5.18}$$

y la parte izquierda se obtiene utilizando (5.11)

$$(\breve{\mathbf{X}}^H)_\alpha(\breve{\phi}_H(t)) = X^i_\alpha(\breve{\phi}_H(t))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\breve{\phi}_H(t)} - B^{a\beta}_{\alpha i}(\breve{\phi}_H(t))X^i_\beta(\breve{\phi}_H(t))\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\breve{\phi}_H(t)}\,. \tag{5.19}$$

Por lo tanto de (5.18) y (5.19) obtenemos

$$\frac{\partial \phi_H^i}{\partial t^\alpha}\Big|_t = X_\alpha^i(\breve{\phi}_H(t))\,, \quad \frac{\partial \phi_H^a}{\partial t^\alpha}\Big|_t = -B_{i\alpha}^{a\beta}(\breve{\phi}_H(t))\frac{\partial \phi_H^i}{\partial t^\beta}\Big|_t. \tag{5.20}$$

Por otro lado, recordemos que de (5.8) se verifica

$$(\omega^k(\mathbf{X}))_\alpha = (X_\alpha^a + B_{i\alpha}^{a\beta}X_\beta^i)\frac{\partial}{\partial x^a}$$

y entonces de (5.19) obtenemos

$$(\omega^k(\breve{\mathbf{X}}^H(\breve{\phi}_H(t)))_\alpha = (-B_{i\alpha}^{a\beta}X_\beta^i(\breve{\phi}_H(t)) + B_{i\alpha}^{a\beta}X_\beta^i(\breve{\phi}_H(t)))\frac{\partial}{\partial x^a} = 0, \tag{5.21}$$

que es equivalente a que $\omega^k(\breve{\phi}_H^{(1)}) = 0$ puesto que

$$\breve{\phi}_H^{(1)}(t) = \breve{\mathbf{X}}^H(\breve{\phi}_H(t))$$

donde $\breve{\phi}_H^{(1)}$ denota la primera prolongación de $\breve{\phi}_H$ (véase Sección 1.2).

En resumen, hemos demostrado que si $\breve{\phi}_H$ es una sección integral del campo de k-vectores $\breve{\mathbf{X}}^H$, entonces la primera prolongación $\breve{\phi}_H^{(1)}$ del levantamiento horizontal de $\breve{\phi}_H$ es horizontal, es decir,

$$\breve{\phi}_H^{(1)}(t) \in \mathbf{H}M \subset T_k^1 M.$$

Lema 5.13 *Sea $\breve{\phi}$ una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$. Si $\breve{\phi}_H\colon \mathbb{R}^k \to M$ es un levantamiento horizontal de $\breve{\phi}$, entonces*

$$\omega^k(\breve{\phi}_H^{(1)}) = 0. \tag{5.22}$$

□

A continuación se estudiarán una serie de propiedades para aplicaciones $\phi\colon \mathbb{R}^k \to M$ que permitirán reconstruir una sección integral de $\mathbf{X}$ a partir de una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$.

Sea $g : \mathbb{R}^k \to G$ una aplicación, y $g^{(1)}$ la primera prolongación de g

$$\begin{array}{rccl} g^{(1)}: & \mathbb{R}^k & \to & T_k^1 G \\ & t & \to & g^{(1)}(t) = (\ldots, g_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t), \ldots) \end{array}$$

entonces para cada α se verifica

$$(L_{g^{-1}(t)})_*(g(t))\left(g_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t)\right) \in T_{g^{-1}(t)g(t)}G \equiv T_eG \equiv \mathfrak{g}\,.$$

En lo que sigue se utilizará la notación

$$g^{-1}(t)g^{(1)}(t) \in \mathfrak{g}^k$$

para el elemento de $\mathfrak{g}^k$ dado por

$$\left((L_{g^{-1}(t)})_*(g(t))\left(g_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^1}\Big|_t)\right), \dots, (L_{g^{-1}(t)})_*(g(t))\left(g_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^k}\Big|_t)\right)\right).$$

Lema 5.14 *Si dos aplicaciones $\phi, \psi : \mathbb{R}^k \to M$ están relacionadas por $\phi(t) = g(t)\psi(t)$, para alguna aplicación $g : \mathbb{R}^k \to G$, entonces sus prolongaciones de primer orden satisfacen*

$$\phi^{(1)} = g\left(\psi^{(1)} + (g^{-1}g^{(1)})_M \circ \psi\right)\,, \tag{5.23}$$

o lo que es lo mismo

$$\phi^{(1)}_\alpha(t) = (\Phi_{g(t)})_*(\psi(t))\left[\psi^{(1)}_\alpha(t) + \left((L_{g^{-1}(t)})_*(g(t))\left(g^{(1)}_\alpha(t)\right)\right)_M(\psi(t))\right]$$

para todo $t \in Dom\,\phi \cap Dom\,\psi$ y para todo $\alpha = 1, \dots, k$, donde

$$\phi^{(1)}_\alpha(t) = \left(\phi^{(1)}(t)\right)_\alpha = \phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right).$$

Demostración:

Sean $v_h \in T_hG$ y $m \in M$. Fijemos $\eta = h^{-1}v_h \in \mathfrak{g}$. Entonces es conocido que,

$$(\Phi_m)_*(h)(v_h) = (\Phi_h)_*(m)(\eta_M(m)),$$

véase [1].

Utilizando la regla de Leibniz y la propiedad anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}_\alpha(t) &= \phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = (\Phi_{g(t)})_*(\psi(t))\left(\psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)\right) \\ &\quad + (\Phi_{\psi(t)})_*(g(t))\left(g_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)\right) \\ &= (\Phi_{g(t)})_*(\psi(t))\left(\psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) + (\xi_\alpha)_M \circ \psi\right), \end{aligned} \tag{5.24}$$

donde

$$\xi_\alpha = (L_{g^{-1}(t)})_*(g(t))(g_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t)) \in \mathfrak{g},$$

denota el α-ésimo componente de $g^{-1}g^{(1)} : \mathbb{R}^k \to \mathfrak{g}^k$. Por lo tanto sustituyendo $\psi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = \psi_\alpha^{(1)}(t)$ y ξ_α en (5.24) se obtiene

$$\phi_\alpha^{(1)}(t) = (\Phi_{g(t)})_*(\psi(t))\left[\psi_\alpha^{(1)}(t) + ((L_{g^{-1}(t)})_*(g(t))\left(g_\alpha^{(1)}(t)\right)\right)_M(\psi(t))\right] ,$$

lo que concluye el resultado.

□

Problema de reconstrucción

Para resolver el problema de reconstrucción debemos plantearnos la siguiente cuestión, ¿cuáles son las condiciones que debe verificar $g(t)$ para que

$$\phi(t) = g(t)\breve{\phi}_H(t)$$

sea una sección integral de $\mathbf{X}$?

Por la definición (1.13) de sección integral , se debe verificar que

$$\phi^{(1)} = \mathbf{X}\circ\phi$$

o equivalentemente, por la propiedad (5.23), tomando

$$\psi = \breve{\phi}_H$$

se ha de verificar que

$$\phi^{(1)} = g\left(\breve{\phi}_H^{(1)} + (g^{-1}g^{(1)})_M\circ\breve{\phi}_H\right)$$

es decir

$$g^{-1}\,\phi^{(1)} = g^{-1}\,\mathbf{X}\circ\phi = \breve{\phi}_H^{(1)} + (g^{-1}g^{(1)})_M\circ\breve{\phi}_H\,. \tag{5.25}$$

Si se multiplica la parte izquierda de la ecuación anterior por g^{-1}, entonces por ser $\mathbf{X}$ invariante y la acción libre se obtiene que

$$[g^{-1}(\mathbf{X}\circ\phi)](t) = g^{-1}(t)(\mathbf{X}(\phi(t))) = \mathbf{X}(g^{-1}(t)\,\phi(t)) = \mathbf{X}(g^{-1}(t)g(t)\breve{\phi}_H(t)) = \mathbf{X}(\breve{\phi}_H(t))\,;$$

es decir

$$g^{-1}\phi^{(1)} = \mathbf{X} \circ \breve{\phi}_H \tag{5.26}$$

y por lo tanto de (5.25) y (5.26) se deduce que

$$\mathbf{X} \circ \breve{\phi}_H = g^{-1}\, \phi^{(1)} = \breve{\phi}_H^{(1)} + (g^{-1}g^{(1)})_M \circ \breve{\phi}_H. \tag{5.27}$$

Si se aplica la forma de conexión ω^k en ambos lados se obtiene que

$$\omega^k(\mathbf{X} \circ \breve{\phi}_H) = \omega^k(\breve{\phi}_H^{(1)} + (g^{-1}g^{(1)})_M \circ \breve{\phi}_H) = \omega^k((g^{-1}g^{(1)})_M \circ \breve{\phi}_H) = g^{-1}g^{(1)},$$

donde se ha utilizado (5.22), es decir $\omega^k(\breve{\phi}_H^{(1)}) = 0$.

Por lo tanto podemos afirmar

Lema 5.15 *La condición que debe verificar $g(t)$ para que $\phi(t) = g(t)\breve{\phi}_H(t)$ sea sección integral de $\mathbf{X}$ es la siguiente,*

$$g^{-1}g^{(1)} = \omega^k(\mathbf{X} \circ \breve{\phi}_H). \tag{5.28}$$

es decir

$$(\omega^k(\mathbf{X} \circ \breve{\phi}_H(t))_\alpha = (L_{g^{-1}(t)})_*(g(t))[(g^{(1)}(t))_\alpha] \qquad 1 \leq \alpha \leq k.$$

Esta ecuación en derivadas parciales en g se denominará la *ecuación de reconstrucción.*

Si esta ecuación tiene una solución $g(t)$, entonces se puede reconstruir una sección integral $\phi(t)$ para $\mathbf{X}$ a partir de una sección integral $\breve{\phi}_H(t)$ de $\breve{\mathbf{X}}^H$.

El resumen de esta sección se recoge en la siguiente proposición.

Proposición 5.16 *Sea $\mathbf{X}$ un campo de k-vectores integrable e invariante en M con campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{X}}$. Sea $\breve{\phi}$ una sección integral de $\breve{\mathbf{X}}$ y $\breve{\phi}_H \colon \mathbb{R}^k \to M$ un levantamiento horizontal de $\breve{\phi}$. Si $g \colon \mathbb{R}^k \to G$ es una solución de las ecuaciones de reconstrución (5.28), entonces la aplicación $\phi \colon \mathbb{R}^k \to M$ definida por*

$$\phi(t) = g(t)\breve{\phi}_H(t)$$

es una sección integral de $\mathbf{X}$.

5.4. La k-conexión mecánica

En esta sección construiremos la k-conexión mecánica, que es una k-conexión principal en el siguiente fibrado

$$\pi_{T^1_kQ}\colon T^1_kQ \to T^1_kQ/G$$

considerando un lagrangiano $L \in C^\infty(T^1_kQ)$ invariante con ciertas condiciones de regularidad, es decir, debemos construir una escisión de la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow (V(T^1_kQ))^k \xrightarrow{i^k} T^1_k(T^1_kQ) \xrightarrow{j^k} T^1_kQ \times_{T^1_kQ/G} T^1_k(T^1_kQ/G) \longrightarrow 0 \ ,$$

o describir el correspondiente subespacio horizontal.

Con la finalidad de construir una escisión para la sucesión exacta corta anterior, se consideran las formas k-simplécticas ω^α_L de L, y se definen las aplicaciones lineales

$$\begin{array}{rcccl} g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q} & : & T_qQ \times T_qQ & \to & \mathbb{R} \\ & & (u_q, w_q) & \to & g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(u_q, w_q) = \omega^\alpha_L(\mathbf{v}_q)(X^C(\mathbf{v}_q), Y^{V_\beta}(\mathbf{v}_q)), \end{array}$$

donde X, Y son campos de vectores en Q tales que $X(q) = u_q$ y $Y(q) = w_q$.

La expresión local de $g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}$ en coordenadas locales (q^A, u^A_α) es

$$g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q} = \frac{\partial^2 L}{\partial u^A_\alpha \partial u^B_\beta}\Big|_{\mathbf{v}_q} dq^A(\mathbf{v}_q) \otimes dq^B(\mathbf{v}_q).$$

A continuación, se utilizarán las siguientes notaciones para los coeficientes de $g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}$ con respecto a la base de campos de vectores $\{X_i, \tilde{E}_a\}$ en Q:

$$g^{\alpha,\beta}_{ij}(\mathbf{v}_q) = g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(X_i(q), X_j(q)), \quad g^{\alpha,\beta}_{ia}(\mathbf{v}_q) = g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}}(X_i(q), \widetilde{E}_a(q)),$$
$$g^{\alpha,\beta}_{ab}(\mathbf{v}_q) = g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(\widetilde{E}_a(q), \widetilde{E}_b(q)),$$

que tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
g_{ij}^{\alpha,\beta}(\mathbf{v}_q) &= g_{\mathbf{v}_q}^{\alpha,\beta}(X_i(q), X_j(q))) = \frac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^i \partial u_\beta^j}\Big|_{\mathbf{v}_q} - \gamma_i^b A_b^c K_c^a \frac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^a \partial u_\beta^j}\Big|_{\mathbf{v}_q} \\
&\quad -\gamma_j^b A_b^c K_c^a \frac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^i \partial u_\beta^a}\Big|_{\mathbf{v}_q} + \gamma_i^b A_b^c K_c^a \gamma_j^d A_d^e K_e^f \frac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^c \partial u_\beta^f}\Big|_{\mathbf{v}_q} \\
&= X_i^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q) \left(\frac{\partial L}{\partial u_\beta^j}\Big|_{\mathbf{v}_q} - \gamma_j^b A_b^c K_c^a \frac{\partial L}{\partial u_\beta^a}\Big|_{\mathbf{v}_q} \right) \\
&= X_i^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q)(X_j^{V_\beta}(\mathbf{v}_q)(L))\,, \\
g_{ia}^{\alpha,\beta}(\mathbf{v}_q) &= g_{\mathbf{v}_q}^{\alpha,\beta}(X_i(q), \widetilde{E}_a(q)) = \frac{\partial^2 L}{\partial u_\beta^b \partial u_\alpha^i}\Big|_{\mathbf{v}_q} K_a^b - \frac{\partial^2 L}{\partial u_\beta^b \partial u_\alpha^d}\Big|_{\mathbf{v}_q} K_a^b \gamma_i^e A_e^c K_c^d \\
&= X_i^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q) \left(\frac{\partial L}{\partial u_\beta^b}\Big|_{\mathbf{v}_q} K_a^b \right) = X_i^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q)(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(\mathbf{v}_q)(L))\,, \\
g_{ab}^{\alpha,\beta}(\mathbf{v}_q) &= g_{\mathbf{v}_q}^{\alpha,\beta}(\widetilde{E}_a(q), \widetilde{E}_b(q)) = \frac{\partial^2 L}{\partial u_\beta^d \partial u_\alpha^c}\Big|_{\mathbf{v}_q} K_a^c K_b^d = \widetilde{E}_a^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q) \left(\frac{\partial L}{\partial u_\beta^d}\Big|_{\mathbf{v}_q} K_B^d \right) \\
&= \widetilde{E}_a^{V_\alpha}(\mathbf{v}_q)(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(\mathbf{v}_q)(L))\,,
\end{aligned}$$

entonces:

$$g_{ij}^{\alpha,\beta} = X_i^{V_\alpha}(X_j^{V_\beta}(L)), \quad g_{ia}^{\alpha,\beta} = X_i^{V_\alpha}(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L)), \quad g_{ab}^{\alpha,\beta} = \widetilde{E}_a^{V_\alpha}(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L)). \tag{5.29}$$

Definición 5.17 *Un lagrangiano L se denomina G-regular si la matriz $(g_{ab}^{\alpha\beta})$ es no singular.*

Obsérvese que, teniendo en cuenta la Proposición 1.24, se sigue que

$$(g_{ab}^{\alpha\beta}) = (\widetilde{E}_a^{V_\alpha}(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L))) = \left(K_a^c K_b^d \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^c \partial u_\alpha^d} \right) \right)\,,$$

por lo tanto, la condición de la definición anterior es equivalente a que la matriz $\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial u_\alpha^a \partial u_\beta^b} \right)$ sea no singular en todo punto.

Las aplicaciones $g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}$ no son completamente simétricas, sean

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial x^A} \text{ e } Y = Y^A \frac{\partial}{\partial x^A}$$

tales que $X(q) = u_q$ y $Y(q) = w_q$, entonces

$$\begin{aligned} g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(u_q, w_q) &= \omega^\alpha_L(\mathbf{v}_q)(X^C(\mathbf{v}_q), Y^{V_\beta}(\mathbf{v}_q)) = \frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\beta \partial u^A_\alpha}\Big|_{\mathbf{v}_q} X^A Y^B \\ g^{\beta,\alpha}_{\mathbf{v}_q}(u_q, w_q) &= \omega^\beta_L(\mathbf{v}_q)(X^C(\mathbf{v}_q), Y^{V_\alpha}(\mathbf{v})) = \frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\alpha \partial u^A_\beta}\Big|_{\mathbf{v}_q} X^A Y^B \end{aligned}$$

pero sí se verifica la relación $g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(u_q, w_q) = g^{\beta,\alpha}_{\mathbf{v}_q}(w_q, u_q)$, que da lugar a la siguiente aplicación simétrica

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{v}_q} \quad : \qquad (T^1_k Q)_q \times (T^1_k Q)_q \qquad &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{u}_q = (u_{\alpha_q}), \mathbf{w}_q = (w_{\beta_q})) \;\; &\to \; g_{\mathbf{v}_q}(\mathbf{u}_q, \mathbf{w}_q) = \sum_{\alpha,\beta=1}^k g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(u_{\alpha_q}, w_{\beta_q}), \end{aligned}$$

sumando en $\alpha, \beta \in \{1, \dots, k\}$.

Definimos ahora el subespacio horizontal de la k-conexión mecánica en el fibrado $\pi_{T^1_k Q} \colon T^1_k Q \to T^1_k Q/G$.

Definición 5.18 *Dado un k-vector $\mathbf{v}_q \in T^1_k Q$ se define el subespacio horizontal en dicho punto como sigue*

$$\mathbf{H}(T^1_k Q)_{\mathbf{v}_q} = \left\{ \mathbf{W}_{\mathbf{v}_q} \in (T^1_k(T^1_k Q))_{\mathbf{v}_q} \,:\, g_{\mathbf{v}_q}(T^1_k \tau^k_Q(\mathbf{W}_{\mathbf{v}_q}), (\xi_1, \dots, \xi_k)_Q(q)) = 0 \right\} .$$

Un elemento

$$\mathbf{W}_{\mathbf{v}_q} = ((W_1)_{\mathbf{v}_q}, \dots, (W_k)_{\mathbf{v}_q}) \in T^1_k(T^1_k Q)\,, \quad \mathbf{v}_q \in T^1_k Q$$

es horizontal para la k-conexión mecánica si y sólo si se verifica

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^k g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}\left((\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)((W_\alpha)_{\mathbf{v}_q}), (\xi_\beta)_Q(q)\right) = 0 \tag{5.30}$$

para todas las k-tuplas $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathfrak{g}^k$.

Si se escribe cada elemento

$$(W_\alpha)_{\mathbf{v}_q} \in T_{\mathbf{v}_q}(T^1_k Q) \quad 1 \leq \alpha \leq k$$

en función de la referencia inducida por $\{X_i, \widetilde{E}_a\}$, véase la Proposición 1.20

$$(W_\alpha)_{\mathbf{v}_q} = W^i_\alpha X^C_i(\mathbf{v}_q) + W^a_\alpha \widetilde{E}^C_a(\mathbf{v}_q) + Z^i_{\alpha\beta} X^{V_\beta}_i(\mathbf{v}_q) + Z^a_{\alpha\beta} \widetilde{E}^{V_\beta}_a(\mathbf{v}_q) \tag{5.31}$$

donde $1 \leq i \leq n-d$ y $1 \leq a \leq d$, siendo $n = \dim Q$ y $d = \dim G$; entonces, teniendo en cuenta (5.30), se obtiene el siguiente resultado

Lema 5.19 **(1)** *El k-vector*

$$\mathbf{W}_{\mathbf{v}_q} = ((W_1)_{\mathbf{v}_q}, \ldots, W_1)_{\mathbf{v}_q})$$

es horizontal, si y sólo si,

$$W^i_\alpha\, g^{\alpha,\beta}_{ib} + W^a_\alpha\, g^{\alpha,\beta}_{ab} = 0 \tag{5.32}$$

para cada $\alpha = 1, \ldots, k$.

(2) *Si el lagrangiano es G-regular, entonces el k-vector $\mathbf{W}_{\mathbf{v}_q}$ es horizontal si y sólo si*

$$(W_\alpha)_{\mathbf{v}_q} = W^i_\gamma H^\gamma_{i\alpha}(\mathbf{v}_q) + Z^i_{\alpha\beta} X^{V_\beta}_i(\mathbf{v}_q) + Z^a_{\alpha\beta} \widetilde{E}^{V_\beta}_a(\mathbf{v}_q), \tag{5.33}$$

donde

$$H^\gamma_{i\alpha} = \delta^\gamma_\alpha X^C_i - \tilde{B}^{\gamma a}_{\alpha i} \widetilde{E}^C_a$$

con

$$\tilde{B}^{\gamma a}_{\alpha i} = g^{ba}_{\beta,\alpha}\, g^{\gamma,\beta}_{ib}\,. \tag{5.34}$$

Demostración:

(1) El k-vector $\mathbf{W}_{\mathbf{v}_q}$ es horizontal si, y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}\left((\tau^k_Q)_*(\mathbf{v}_q)((W_\alpha)), \xi_{\beta_Q}(q)\right) = g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}\Big(W^i_\alpha X_i(q) + W^a_\alpha \widetilde{E}_a(q)\,,\, \xi^b_\beta \widetilde{E}_b(q)\Big) \\ &= W^i_\alpha\, \xi^b_\beta\, g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(X_i(q), \widetilde{E}_b(q)) + W^a_\alpha\, \xi^b_\beta\, g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q}(\widetilde{E}_a(q), \widetilde{E}_b(q)) \\ &= \xi^b_\beta\,(W^i_\alpha\, g^{\alpha,\beta}_{ib} + W^a_\alpha\, g^{\alpha,\beta}_{ab}) \end{aligned}$$

para todo ξ^b_β, de donde se deduce el resultado.

(2) Si el lagrangiano es G-regular, entonces de (5.32) el k-vector $\mathbf{W}_{\mathbf{v}_q}$ será horizontal si verifica

$$W^a_\alpha = -W^i_\gamma\,(g^{\alpha,\beta}_{\mathbf{v}_q})_{ab})^{-1}\,(g^{\gamma,\beta}_{\mathbf{v}_q})_{ib} = -W^i_\gamma\,g^{ba}_{\beta,\alpha}\,g^{\gamma,\beta}_{ib} \tag{5.35}$$

es decir, (W_α) toma la forma

$$(W_\alpha)_{\mathbf{v}_q} = W^i_\alpha X^C_i(\mathbf{v}_q) - W^i_\gamma\,g^{ba}_{\beta,\alpha}\,g^{\gamma,\beta}_{ib}\widetilde{E}^C_a(\mathbf{v}_q) + Z^i_{\alpha\beta}X^{V_\beta}_i(\mathbf{v}_q) + Z^a_{\alpha\beta}\widetilde{E}^{V_\beta}_a(\mathbf{v}_q)$$

lo que concluye la demostración.

□

De las expresiones (5.31) y (5.33) se concluye que cada elemento

$$\mathbf{W}_{\mathbf{v}_q} = ((W_1)_{\mathbf{v}_q}, \ldots, (W_k)_{\mathbf{v}_q})$$

de $(T^1_k(T^1_kQ))_{\mathbf{v}_q}$, se descompone en una k-tupla horizontal

$$(\mathbf{HW}_{\mathbf{v}_q})_\alpha = W^i_\gamma H^\gamma_{i\alpha}(\mathbf{v}_q) + Z^i_{\alpha\beta}X^{V_\beta}_i(\mathbf{v}_q) + Z^a_{\alpha\beta}\widetilde{E}^{V_\beta}_a(\mathbf{v}_q)$$

y una k-tupla vertical

$$(\mathbf{VW}_{\mathbf{v}_q})_\alpha = (W^a_\alpha + W^i_\gamma\tilde{B}^{\gamma a}_{\alpha i})\widetilde{E}^C_a(\mathbf{v}_q)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(W_\alpha)_{\mathbf{v}_q} &= (\mathbf{HW}_{\mathbf{v}_q})_\alpha + (\mathbf{VW}_{\mathbf{v}_q})_\alpha \\ &= \Big[W^i_\gamma H^\gamma_{i\alpha}(\mathbf{v}_q) + Z^i_{\alpha\beta}X^{V_\beta}_i(\mathbf{v}_q) + Z^a_{\alpha\beta}\widetilde{E}^{V_\beta}_a(\mathbf{v}_q)\Big] + \Big[(W^a_\alpha + W^i_\gamma\tilde{B}^{\gamma a}_{\alpha i})\widetilde{E}^C_a(\mathbf{v}_q)\Big]\,.\end{aligned} \tag{5.36}$$

Es decir, la k-conexión mecánica induce la descomposición:

$$(T^1_k(T^1_kQ))_{\mathbf{v}_q} = \mathbf{H}(T^1_kQ)_{\mathbf{v}_q} \oplus \mathbf{V}(T^1_kQ)_{\mathbf{v}_q},$$

donde el subfibrado horizontal local $\mathbf{H}(T^1_kQ)_{\mathbf{v}_q} = Im\,\gamma^k$ está generado por:

$$< \mathbf{H}^\alpha_i(\mathbf{v}_q), \mathbf{X}^{\alpha\beta}_i(\mathbf{v}_q), \mathbf{X}^{\alpha\beta}_a(\mathbf{v}_q) >$$

siendo los campos de k-vectores los definidos a continuación

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_i^\alpha(\mathbf{v}_q) &= (H_{i1}^\alpha(\mathbf{v}_q), \ldots, H_{ik}^\alpha(\mathbf{v}_q))\,,\\
\mathbf{X}_i^{\alpha\beta}(\mathbf{v}_q) &= (0, \ldots, 0, \overbrace{X_i^{V_\beta}}^{\alpha}(\mathbf{v}_q), 0, \ldots, 0)\,,\\
\mathbf{X}_a^{\alpha\beta}(\mathbf{v}_q) &= (0, \ldots, 0, \overbrace{\widetilde{E}_a^{V_\beta}}^{\alpha}(\mathbf{v}_q), 0, \ldots, 0)\,;
\end{aligned}$$

y el subfibrado vertical local $\mathbf{V}(T_k^1Q)_{\mathbf{v}_q} = Im\, i^k$ está generado por:

$$< \mathbf{X}_a^\alpha(\mathbf{v}_q) >$$

siendo los campos de vectores

$$\mathbf{X}_a^\alpha(\mathbf{v}_q) = (0, \ldots, 0, \overbrace{\widetilde{E}_a^C}^{\alpha}(\mathbf{v}_q), 0, \ldots, 0)\,.$$

Con respecto a las dimensiones se tiene

$$dim\,(T_k^1(T_k^1Q)_{\mathbf{v}_q} = k\,n \,+\, k^2\,n,$$
$$dim\,\mathbf{H}(T_k^1Q)_{\mathbf{v}_q} = k\,(n-d) \,+\, k^2\,n, \quad dim\,\mathbf{V}(T_k^1Q)_{\mathbf{v}_q} = d\,k\,,$$

donde

$$\mathbf{v}_q \in T_k^1Q, \quad n = dim\,Q, \quad d = dim\,G\,.$$

Obsérvese que las expresiones de $\mathbf{HW}_\alpha$ y $\mathbf{VW}_\alpha$ no sólo contiene las componentes del vector α-ésimo W_α. Por lo tanto, la conexión mecánica no es de tipo simple.

La correspondiente aplicación $\Omega^k : T_k^1(T_k^1Q) \to \mathfrak{g}^k$ asociada a la k-conexión mecánica verifica

$$\Omega^k(\mathbf{HW}_{\mathbf{v}_q}) = 0, \quad \Omega^k((\xi_1, \ldots, \xi_k)_{T_k^1Q}(\mathbf{v}_q)) = (\xi_1, \ldots, \xi_k).$$

Lema 5.20 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *un* SOPDE, *su descomposición en parte horizontal y parte vertical es la siguiente*

$$\begin{aligned}
\mathbf{H\Gamma}_\alpha &= -(v_\gamma^i \tilde{B}_{\alpha i}^{\gamma a})\widetilde{E}_a^C + v_\alpha^i X_i^C + (\widetilde{\Gamma}_\alpha)_\beta^j X_j^{V_\beta} + (\widetilde{\Gamma}_\alpha)_\beta^a \widetilde{E}_a^{V_\beta},\\
\mathbf{V\Gamma}_\alpha &= (v_\alpha^a + v_\gamma^i \tilde{B}_{\alpha i}^{\gamma a})\widetilde{E}_a^C.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Demostración:

Sea $\mathbf{\Gamma}$ un SOPDE, por el Lema 1.23 su expresión local términos de la referencia $\{X_i, \widetilde{E}_a\}$ es

$$\Gamma_\alpha = v^i_\alpha X^C_i + v^a_\alpha \widetilde{E}^C_a + (\widetilde{\Gamma}_\alpha)^j_\beta X^{V_\beta}_j + (\widetilde{\Gamma}_\alpha)^a_\beta \widetilde{E}^{V_\beta}_a ,$$

y de la descomposición (5.36) se concluye el resultado.

□

Además, la k-conexión mecánica así definida verifica la siguiente propiedad:

Proposición 5.21 *Sea L un lagrangiano G-regular e invariante. La k-conexión mecánica Ω^k determinada por L es una k-conexión principal en el fibrado principal $\pi_{T^1_kQ} : T^1_kQ \to (T^1_kQ)/G$.*

Demostración:

Por la Definición 5.6 de k-conexión principal y la condición equivalente (5.16), hay que comprobar que

$$\mathcal{L}_{\xi_{T^1_kQ}} \omega^k = \mathcal{L}_{\xi^C_Q} \omega^k = 0,$$

donde $\omega^k \colon T^1_k(T^1_kQ) \to T^1_k(T^1_kQ)$ es el campo de k-tensores de tipo $(1,1)$ asociado a la conexión Ω^k, y la derivada de Lie es la definida en la expresión (5.12).

Sea $\mathbf{W}$ un campo de k-vectores en T^1_kQ, entonces

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\widetilde{E}^C_a} \omega^k)(\mathbf{W}) &= \mathcal{L}_{\widetilde{E}^C_a}(\omega^k(\mathbf{W})) - \omega^k([\widetilde{E}^C_a, \mathbf{W}]) \\
&= \mathcal{L}_{\widetilde{E}^C_a}(\omega^k(\mathbf{V}W)) - \omega^k([\widetilde{E}^C_a, \mathbf{V}W]) - \omega^k([\widetilde{E}^C_a, \mathbf{H}W]) \\
&= \mathcal{L}_{\widetilde{E}^C_a} \mathbf{V}W - [\widetilde{E}^C_a, \mathbf{V}W] - \omega^k(\mathbf{V}[\widetilde{E}^C_a, \mathbf{H}W]) \\
&= -\mathbf{V}[\widetilde{E}^C_a, \mathbf{H}W] ,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que $\omega^k(\mathbf{H}W) = 0$, $\omega^k(\mathbf{V}W) = \mathbf{V}W$ y que los campos de vectores $\mathcal{L}_{\widetilde{E}^C_a} \mathbf{V}W = [\widetilde{E}^C_a, \mathbf{V}W]$ son verticales.

Si se escribe $\mathbf{W}$ en coordenadas locales como

$$W_\alpha = W^i_\alpha X^C_i + W^a_\alpha \widetilde{E}^C_a + Z^i_{\alpha\beta} X^{V_\beta}_i + Z^a_{\alpha\beta} \widetilde{E}^{V_\beta}_a$$

entonces su parte horizontal será de la forma,

$$\mathbf{H}\mathbf{W}_\alpha = W^i_\gamma H^\gamma_{i\alpha} + Z^i_{\alpha\beta} X_i^{V_\beta} + Z^a_{\alpha\beta} \widetilde{E}_a^{V_\beta}.$$

Si se calcula ahora el corchete de Lie $[\widetilde{E}_a^C, \mathbf{H}W]$ se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned}[\widetilde{E}_a^C, \mathbf{H}W] &= \widetilde{E}_a^C(W^i_\gamma)H^\gamma_{i\alpha} + W^i_\gamma[\widetilde{E}_a^C, H^\gamma_{i\alpha}] + \widetilde{E}_a^C(Z^i_{\alpha\beta})X_i^{V_\beta} + Z^i_{\alpha\beta}[\widetilde{E}_a^C, X_i^{V_\beta}] \\ &\quad + \widetilde{E}_a^C(Z^b_{\alpha\beta})\widetilde{E}_b^{V_\beta} + Z^b_{\alpha\beta}[\widetilde{E}_a^C, \widetilde{E}_b^{V_\beta}],\end{aligned}$$

cuya parte vertical es

$$\mathbf{V}[\widetilde{E}_a^C, \mathbf{H}W] = W^i_\gamma[\widetilde{E}_a^C, H^\gamma_{i\alpha}],$$

puesto que $[\widetilde{E}_a^C, X_i^{V_\beta}] = [\widetilde{E}_a, X_i]^{V_\beta} = 0$ y $[\widetilde{E}_a^C, \widetilde{E}_b^{V_\beta}] = [\widetilde{E}_a, \widetilde{E}_b]^{V_\beta} = C^c_{ab}\widetilde{E}_c^{V_\beta}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}_{\widetilde{E}_a^C}\omega^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\widetilde{E}_a^C, H^\gamma_{i\alpha}] = 0\,,$$

es decir, hay que comprobar que los campos de vectores $H^\gamma_{i\alpha}$ son campos de vectores invariantes en T^1_kQ.

Por un cálculo directo se obtiene que

$$[\widetilde{E}_a^C, H^\gamma_{i\alpha}] = \left(-\widetilde{E}_a^C(\tilde{B}^{\gamma d}_{\alpha i}) + \tilde{B}^{\gamma b}_{\alpha i}C^d_{ab}\right)\widetilde{E}_d^C\,,$$

entonces la invarianza de $H^\gamma_{i\alpha}$ es equivalente a

$$\widetilde{E}_a^C(\tilde{B}^{\gamma d}_{\alpha i}) = \tilde{B}^{\gamma b}_{\alpha i}C^d_{ba}.$$

Utilizando las relaciones (5.29) y la invarianza del lagrangiano se obtienen las siguientes ecuaciones,

- $\widetilde{E}_d^C(g^{\alpha,\beta}_{ab}) = C^e_{da}\, g^{\alpha,\beta}_{eb} + C^e_{db}\, g^{\alpha,\beta}_{ae}$

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_d^C(g^{\alpha,\beta}_{ab}) &= \widetilde{E}_d^C(\widetilde{E}_a^{V_\alpha}(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L))) = [\widetilde{E}_d^C, \widetilde{E}_a^{V_\alpha}](\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L)) + \widetilde{E}_a^{V_\alpha}(\widetilde{E}_d^C(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L))) \\ &= [\widetilde{E}_d, \widetilde{E}_a]^{V_\alpha}(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L)) + \widetilde{E}_a^{V_\alpha}([\widetilde{E}_d^C, \widetilde{E}_b^{V_\beta}](L)) + \widetilde{E}_a^{V_\alpha}(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(\widetilde{E}_d^C(L))) \\ &= C^e_{da}\widetilde{E}_e^{V_\alpha}(\widetilde{E}_b^{V_\beta}(L)) + \widetilde{E}_a^{V_\alpha}(C^e_{db}\widetilde{E}_e^{V_\beta}(L)) \\ &= C^e_{da}\, g^{\alpha,\beta}_{eb} + C^e_{db}\, g^{\alpha,\beta}_{ae}\end{aligned}$$

- $\widetilde{E}^C_d(g^{\alpha,\beta}_{ib}) = C^e_{db}\, g^{\alpha,\beta}_{ie}$

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}^C_d(g^{\alpha,\beta}_{ib}) &= \widetilde{E}^C_d(X^{V_\alpha}_i(\widetilde{E}^{V_\beta}_b(L))) = [\widetilde{E}^C_d, X^{V_\alpha}_i](\widetilde{E}^{V_\beta}_b(L)) + X^{V_\alpha}_i(\widetilde{E}^C_d(\widetilde{E}^{V_\beta}_b(L)))\\
&= X^{V_\alpha}_i\Big([\widetilde{E}^C_d, \widetilde{E}^{V_\beta}_b](L) + \widetilde{E}^{V_\beta}_b(\widetilde{E}^C_d(L))\Big)\\
&= X^{V_\alpha}_i(C^e_{db}\widetilde{E}^{V_\beta}_e(L)) = C^e_{db}\, g^{\alpha,\beta}_{ie}
\end{aligned}$$

- $\widetilde{E}^C_d(g^{ec}_{\epsilon,\gamma}) = -\widetilde{E}^C_d(g^{\alpha,\beta}_{ab})\, g^{ac}_{\alpha,\gamma}\, g^{eb}_{\epsilon,\beta}$
  Como $\widetilde{E}^C_d(g^{\alpha,\beta}_{ab}\, g^{ac}_{\alpha,\gamma}) = \widetilde{E}^C_d(\delta^\beta_\gamma\, \delta^b_c) = 0$ se sigue que $g^{\alpha,\beta}_{ab}\, \widetilde{E}^C_d\,(g^{ac}_{\alpha,\gamma}) = -\widetilde{E}^C_d(g^{\alpha,\beta}_{ab})\, g^{ac}_{\alpha,\gamma}$ además, por ser L G-regular se tiene la ecuación deseada para la matriz inversa $g^{ec}_{\epsilon,\gamma}$.

Utilizando estas propiedades y la expresión $\tilde{B}^{\gamma d}_{\alpha i} = g^{bd}_{\beta\alpha} g^{\gamma\beta}_{ib}$ se obtiene directamente que

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}^C_a(\tilde{B}^{\gamma d}_{\alpha i}) &= \widetilde{E}^C_a(g^{bd}_{\beta,\alpha}\, g^{\gamma,\beta}_{ib}) = \widetilde{E}^C_a(g^{bd}_{\beta,\alpha})\, g^{\gamma,\beta}_{ib} + g^{bd}_{\beta,\alpha}\, \widetilde{E}^C_a(g^{\gamma,\beta}_{ib})\\
&= -\widetilde{E}^C_a(g^{\gamma,\epsilon}_{ec})\, g^{ed}_{\gamma,\alpha}\, g^{bc}_{\beta,\epsilon}\, g^{\gamma,\beta}_{ib} + g^{db}_{\beta,\alpha}\, \widetilde{E}^C_a(g^{\gamma,\beta}_{ib})\\
&= -(C^f_{ae}\, g^{\gamma,\epsilon}_{fc} + C^f_{ac}\, g^{\gamma,\epsilon}_{ef}) g^{ed}_{\gamma,\alpha}\, g^{bc}_{\beta,\epsilon}\, g^{\gamma,\beta}_{ib} + g^{bd}_{\beta,\alpha}\, C^e_{ab}\, g^{\gamma,\beta}_{ie}\\
&= -C^b_{ae}\, g^{ed}_{\beta,\alpha}\, g^{\gamma,\beta}_{ib} - C^d_{ac}\, g^{bc}_{\beta,\alpha}\, g^{\gamma,\beta}_{ib} + g^{ed}_{\beta,\alpha}\, C^b_{ae}\, g^{\gamma,\beta}_{ib}\\
&= -C^d_{ac}\, g^{bc}_{\beta,\alpha}\, g^{\gamma,\beta}_{ib} = -C^d_{ac}\, \tilde{B}^{\gamma C}_{\alpha i} = \tilde{B}^{\gamma b}_{\alpha i} C^d_{ba}
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

□

En la siguiente observación estableceremos los componentes de la k-conexión mecánica:

Observación 5.22 Consideremos las coordenadas $(q^i, q^a, v^i_\alpha, w^a_\alpha)$ en T^1_kQ, con la finalidad de establecer la relación de la k-conexión mecánica en T^1_kQ con la definición general (5.7) de k-conexión en una variedad M, determinamos las coordenadas

(x^i, x^a) en $M = T^1_k Q$ como $(x^i) = (q^i, v^i_\alpha, w^a_\alpha)$ y $(x^a) = (q^a)$, es decir

$$\begin{array}{rccl} \pi_{T^1_k Q} & : & T^1_k Q & \to \; T^1_k Q/G \\ & & (q^i, q^a, v^i_\alpha, w^a_\alpha) & \mapsto \; (q^i, v^i_\alpha, w^a_\alpha) \end{array}$$

entonces, haciendo un cálculo directo en coordenadas locales se deduce que los coeficientes de la k-conexión mecánica son:

$$B^{a\,\beta}_{\alpha\,i} = \delta^\alpha_\beta \gamma^b_i A^a_b + \tilde{B}^{\beta b}_{\alpha i}(K^{-1})^a_b \quad \text{y} \quad B^{a\,\beta}_{\alpha,\,i_\gamma} = B^{a\,\beta}_{\alpha\,b_\gamma} = 0\,,$$

donde $\tilde{B}^{\beta b}_{\alpha i}$ están dados por (5.34)

Esta sección finaliza con la reconstrucción de secciones integrales de un SOPDE lagrangiano $\mathbf{\Gamma}$ a partir de secciones integrales del campo de k-vectores reducido, utilizando la k-conexion mecánica.

Como $\mathbf{\Gamma}$ es G-invariante, y la k-conexión mecánica es principal, la componente horizontal $\mathbf{H\Gamma}$ de $\mathbf{\Gamma}$ es el levantamiento horizontal $\breve{\mathbf{\Gamma}}^H$ del campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$.

Por definición el levantamiento horizontal de una sección integral

$$(q^i = \phi^i(t), v^i_\alpha = \phi^i_\alpha(t), w^a_\alpha = \phi^a_\alpha(t))$$

de $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ es una sección integral de $\breve{\mathbf{\Gamma}}^H = \mathbf{H\Gamma}_\alpha$. En principio, es necesario reescribir $\mathbf{H\Gamma}_\alpha$ en téminos de la referencia $\{Z_A\} = \{X_i, \widehat{E}_a\}$, y utilizar las expresiones (1.41) para calcular una sección integral

$$(q^i = \breve{\phi}^i(t), q^a = \breve{\phi}^a_H(t), v^i_\alpha = \breve{\phi}^i_\alpha(t), w^a_\alpha = \breve{\phi}^a_\alpha(t))$$

de $\mathbf{H\Gamma}$ (en función de las quasi-velocidades).

Sin embargo, solo es necesaria la ecuación que determina $\breve{\phi}^a_H(t)$, ya que el resto $(q^i = \breve{\phi}^i(t), v^i_\alpha = \breve{\phi}^i_\alpha(t), w^a_\alpha = \breve{\phi}^a_\alpha(t))$ está determinado por el campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$. Utilizando las primeras relaciones en (1.41), y la expresión local (5.37) de $\mathbf{H}\Gamma = \mathbf{\Gamma}^H$, las ecuaciones para $\phi^a_H(t)$ son

$$\frac{\partial \breve{\phi}^a_H}{\partial t^\alpha} = -\breve{\phi}^i_\gamma \Big(K^a_b(\gamma^c_i A^b_c \delta^\gamma_\alpha + \tilde{B}^{\gamma b}_{\alpha i}) \circ \breve{\phi}_H \Big), \tag{5.38}$$

donde se han utilizado las expresiones $X_i = \dfrac{\partial}{\partial q^i} - \gamma^a_i \widehat{E}_a$ y $\widetilde{E}_b = K^a_b \dfrac{\partial}{\partial q^a}$.

Por otro lado, si se utiliza la k-conexión mecánica y las expresiones (5.37) , la ecuación de reconstrucción (5.28) se convierte en la siguiente

$$(g^{-1}g^{(1)})_\alpha = \left((v^a_\alpha + v^i_\gamma \tilde{B}^{\gamma a}_{\alpha i}) \circ \breve{\phi}_H \right) E_a. \tag{5.39}$$

Esto permite reconstruir las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.20) a partir de una solución de las ecuaciones de Lagrange-Poincaré (4.7),

Proposición 5.23 *Sea L un lagrangiano regular, G-regular e invariante. Con la de finalidad de llevar a cabo la reconstrucción mediante la k-conexión mecánica, es necesario resolver sucesivamente*

(1) *las ecuaciones de campo de Lagrange-Poincaré (4.7) para*

$$\breve{\phi}(t) = (q^i = \breve{\phi}^i(t), v^i_\alpha = \breve{\phi}^i_\alpha(t), w^a_\alpha = \breve{\phi}^a_\alpha(t)),$$

(2) *las ecuaciones (5.38) para $\breve{\phi}^a_H(t)$, y*

(3) *la ecuación de reconstrucción (5.39) para $g(t)$,*

para obtener la solución $\phi(t) = g(t)\breve{\phi}_H(t)$ de las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange (1.20).

5.5. Ejemplo: Las aplicaciones harmónicas

Las aplicaciones harmónicas son aplicaciones diferenciables $\phi : M \to Q$ entre dos variedades Riemannianas (M, g) y (Q, h) que tienen la propiedad de que sus campos de tensiones

$$\tau(\phi) = g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta} - {}^g\Gamma^\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\delta} + {}^h\Gamma^A_{BC} \frac{\partial \phi^B}{\partial t^\alpha} \frac{\partial \phi^C}{\partial t^\beta} \right),$$

se anulan (véase por ejemplo [44]). Aquí ${}^g\Gamma^\delta_{\alpha\beta}$ y ${}^h\Gamma^A_{BC}$ denotan los símbolos de Christoffel de g y h, respectivamente.

Cuando (M, g) es $\mathbb{R}^k$ con la métrica Euclidea estándar, es conocido que las condiciones anteriores son las ecuaciones de campo de Euler-Lagrange correspondientes al lagrangiano

$$\begin{array}{rccl} L & : & T^1_k Q & \to & \mathbb{R} \\ & & (q^A, u^A_\alpha) & \mapsto & \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta} h_{AB}(q) u^A_\alpha u^B_\beta. \end{array}$$

Sea $\mathbf{\Gamma}$ un SOPDE lagrangiano para L con expresión local

$$\Gamma_\alpha = u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + (\Gamma_\alpha)^A_\beta \frac{\partial}{\partial u^B_\beta}\,,$$

por la Proposición 1.16, debe satisfacer

$$\delta^\alpha_\beta (\Gamma_\alpha)^D_\beta = -\delta^\alpha_\beta u^B_\alpha u^C_\beta \Gamma^D_{BC}.$$

Por lo tanto, en particular el campo de k-vectores $\mathbf{\Gamma}$ con expresión local

$$\Gamma_\alpha = u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} - \Gamma^A_{BC} u^B_\alpha u^C_\beta \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}$$

es lagrangiano (a partir de ahora se escribirá solamente ${}^h\Gamma^A_{BC} = \Gamma^A_{BC}$).

Supongamos que la métrica h tiene un grupo de Lie de simetrías G que actúa libre y propiamente por la izquierda como isometrías

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & I(Q)\times Q & \to & Q \\ & & (f,q) & \mapsto & \Phi(f,q)=f(q) \end{array}$$

donde $G = I(Q) = \{f\colon Q \to Q \mid f^*h = h\}$ es el grupo de isometrías de la métrica h, cuya operación es la composición y el elemento neutro es la función identidad.

La base correspondiente de campos de vectores verticales invariantes se denotan, como antes, por $\widehat{E}_a$.

La acción Φ de $I(Q)$ en Q induce una acción $\Phi^{T^1_kQ}$ en T^1_kQ definida por

$$\begin{array}{rcccl} \Phi^{T^1_kQ} & : & I(Q)\times T^1_kQ & \to & T^1_kQ \\ & & (f,\mathbf{v}_q) & \mapsto & \Phi^{T^1_kQ}(f,\mathbf{v}_q) = (\ldots,(\Phi_f)_*(q)(\mathbf{v}_q),\ldots) \end{array}$$

Si la expresión en coordenadas locales de f y $\mathbf{v}_q \in T^1_kQ$ es $f(q^A) = (f^A(q^B))$ y $\mathbf{v}_q = (q^A, u^A_\alpha)$ entonces se tiene que

$$\Phi^{T^1_kQ}(f,\mathbf{v}_q) = (f^A(q^B), u^A_\alpha \frac{\partial f^B}{\partial q^A})\,.$$

Utilizando esta expresión local se prueba que el lagrangiano L es G-invariante,

$$\begin{array}{rcl} L(\Phi^{T^1_kQ}_f(\mathbf{v}_n)) & = & L(f^A, v^A_\alpha \dfrac{\partial f^B}{\partial q^A}) = \delta^{\alpha\beta}\dfrac{1}{2}h_{AB}(f^C(q))u^D_\alpha \dfrac{\partial f^A}{\partial q^D} u^E_\beta \dfrac{\partial f^B}{\partial q^E} \\ & = & \delta^{\alpha\beta}\frac{1}{2}h_{DE}(q)u^D_\alpha u^E_\beta = L(\mathbf{v}_n) \end{array}$$

Se define una conexión principal en $Q \to Q/G$ donde los campos de vectores horizontales pertenecen al espacio complementario del espacio de los campos de vectores verticales. Esto es equivalente a decir que los campos de vectores X_i en Q están definidos por las relaciones

$$h(X_i, \widehat{E}_a) = 0$$

y por el hecho de que proyectan en los campos de vectores coordenados en Q/G (esto es, de hecho, la definición de conexión mecánica de la métrica Riemanniana h, véase [78]).

Denotamos $\mathbf{h}_{ij} = h(X_i, X_j)$ y $\mathbf{h}_{ab} = h(\widehat{E}_a, \widehat{E}_b)$. Estas funciones son invariantes. Además se supone que la parte vertical de la métrica, $\mathbf{h}_{ab}$, proviene de una métrica bi-invariante en G, o, equivalentemente, de un producto interior Ad-invariante en $\mathfrak{g}$, es decir,

$$h(\widetilde{E}_a, \widetilde{E}_b) = h(A_a^c \widetilde{E}_c, A_b^d \widetilde{E}_d) = h(\widehat{E}_a, \widehat{E}_b) = \mathbf{h}_{ab}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{\widetilde{E}_a} h(\widetilde{E}_b, \widetilde{E}_c) = \widetilde{E}_a(h(\widetilde{E}_b, \widetilde{E}_c)) - h([\widetilde{E}_a, \widetilde{E}_b], \widetilde{E}_c) - h(\widetilde{E}_b, [\widetilde{E}_a, \widetilde{E}_c]) \\ &= \widetilde{E}_a(\mathbf{h}_{bc}) - h(-C_{ab}^d \widetilde{E}_d, \widetilde{E}_c) - h(\widetilde{E}_b, -C_{ac}^d \widetilde{E}_d) = C_{ab}^d \mathbf{h}_{dc} + C_{ac}^d \mathbf{h}_{bd}\,, \end{aligned}$$

esto es, todas las $\mathbf{h}_{ab}$ son constantes verificando

$$\mathbf{h}_{ab} C_{cd}^b + \mathbf{h}_{cb} C_{ad}^b = 0.$$

Utilizando $\Upsilon_{ia}^b = -\gamma_i^c C_{ca}^b$, también se obtiene que

$$\mathbf{h}_{ab} \Upsilon_{ic}^b + \mathbf{h}_{cb} \Upsilon_{ia}^b = 0.$$

De esas relaciones, se calcula que

$$\delta_\beta^\alpha \mathbf{h}_{db} C_{ac}^b w_\beta^c w_\alpha^d = 0\,, \tag{5.40}$$

en efecto,

$$\begin{aligned} \delta_\beta^\alpha \mathbf{h}_{db} C_{ac}^b w_\beta^c w_\alpha^d &= \tfrac{1}{2}\left(\delta_\beta^\alpha \mathbf{h}_{db} C_{ac}^b w_\beta^c w_\alpha^d + \delta_\beta^\alpha \mathbf{h}_{db} C_{ac}^b w_\beta^c w_\alpha^d\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \mathbf{h}_{db} C_{ac}^b w_\beta^c w_\alpha^d - \tfrac{1}{2}\delta_\beta^\alpha \mathbf{h}_{cd} C_{ad}^b w_\beta^c w_\alpha^d = 0 \end{aligned}$$

y de manera directa se tiene que

$$\delta_\beta^\alpha \mathbf{h}_{ab} \Upsilon_{ic}^b w_\beta^c w_\alpha^a = 0\,. \tag{5.41}$$

Teniendo en cuenta las relaciones

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}_{ij} &= h_{ij} - \gamma_i^a A_a^b K_b^c h_{cj}\,,\\
h_{ia} &= \gamma_i^b A_b^c K_c^d h_{da}\,,\\
\mathbf{h}_{ab} &= A_a^c K_c^d A_b^e K_e^f h_{df}\,,
\end{aligned}
$$

entonces, se puede reescribir el lagrangiano en términos de estas funciones invariantes, y por lo tanto el lagrangiano reducido es

$$l = \frac{1}{2}\delta_\beta^\alpha(\mathbf{h}_{ij} v_\alpha^i v_\beta^j + \mathbf{h}_{ab} w_\alpha^a w_\beta^b)\,.$$

A continuación, teniendo en cuenta la expresión del lagragngiano reducido, se estudiarán las soluciones $\breve{\mathbf{\Gamma}}$ de las ecuaciones de Lagrange-Poincaré (4.5).

Sea $\breve{\Gamma}_\alpha$ un campo de k-vectores, cuya expresión local está dada en el Lema 4.8, entonces utilizando las propiedades (5.40) y (5.41), las ecuaciones de Lagrange-Poincaré (4.5) son equivalentes a

$$
\begin{aligned}
\delta_\beta^\alpha(\breve{\Gamma}_\alpha)_\beta^j &= \delta_\beta^\alpha(-\Gamma_{kl}^j v_\alpha^k v_\beta^l + \mathbf{h}^{ij}\mathbf{h}_{ab} K_{ik}^b v_\beta^k w_\alpha^a)\\
\delta_\beta^\alpha(\Gamma_\alpha)_\beta^b &= -\delta_\beta^\alpha \Upsilon_{kd}^b v_\beta^k w_\alpha^d\,,
\end{aligned}
$$

donde las funciones Γ_{jk}^i son los símbolos de Christoffel de $\mathbf{h}_{ij}$ (que es una métrica Riemanniana en Q/G).

Por lo tanto, en particular el campo de k-vectores $\breve{\Gamma}_\alpha$ del Lema 4.8, con

$$(\breve{\Gamma}_\alpha)_\beta^j = -\Gamma_{kl}^j v_\alpha^k v_\beta^l + \mathbf{h}^{ji}\mathbf{h}_{ab} K_{ik}^b v_\beta^k w_\alpha^a, \qquad (\breve{\Gamma}_\alpha)_\beta^b = -\Upsilon_{kd}^b v_\beta^k w_\alpha^d \tag{5.42}$$

satisface las ecuaciones (4.5).

Las secciones integrales del campo de k-vectores reducido $\breve{\mathbf{\Gamma}}$

$$\breve{\phi}(t) = (\breve{\phi}^j(t), \breve{\phi}_\alpha^j(t), \breve{\phi}_\alpha^b(t))$$

son entonces soluciones de las siguientes ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial\breve{\phi}^j}{\partial t^\alpha} = \breve{\phi}_\alpha^j, \qquad \frac{\partial\breve{\phi}_\alpha^j}{\partial t^\beta} = -\Gamma_{kl}^j \breve{\phi}_\alpha^k \breve{\phi}_\beta^l + \mathbf{h}^{ji}\mathbf{h}_{ab} K_{ik}^b \breve{\phi}_\beta^k \breve{\phi}_\alpha^a, \qquad \frac{\partial\breve{\phi}_\alpha^b}{\partial t^\beta} = -\Upsilon_{kd}^b \breve{\phi}_\beta^k \breve{\phi}_\alpha^d. \tag{5.43}$$

De las dos primeras ecuaciones, se obtiene que la curvatura K_{ik}^b de la conexión actúa como una obstrucción para que la ecuación reducida sea otra vez del tipo de las aplicaciones harmónicas $(\mathbb{R}^k, \delta_{\alpha\beta}) \to (Q/G, h_{ij})$, es decir, si la curvatura K^b_{ik} fuese cero, entonces la ecuación reducida sería una aplicación harmónica.

Con la finalidad de reconstruir la sección integral de las ecuaciones de campo de k-vectores $\mathbf{\Gamma}$, es necesario calcular el levantamiento horizontal $\breve{\phi}_H$ de una sección integral de $\breve{\mathbf{\Gamma}}$, con respecto a la k-conexión mecánica que se ha introducido en la Sección 5.4. Esta conexión tiene una forma bastante más simple en este caso.

Como se ha definido la conexión en $Q \to Q/G$ como aquella para la cual $\mathbf{h}_{ia} = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}_{ij} &= X_i^{V_\alpha}(X_j^{V_\beta}(L)) = \delta^\alpha_\beta(h_{ij} - \gamma^a_i A^b_a K^c_b h_{jc}) = \delta^\alpha_\beta \mathbf{h}_{ij}\,,\\
g^{\alpha\beta}_{ia} &= X_i^{V_\alpha}(\widehat{E}_a^{V_\beta}(L)) = A^b_a K^c_b \delta^\alpha_\beta h_{ic} - A^b_A K^c_b \gamma^d_i A^e_d K^f_e \delta^\alpha_\beta h_{fc}\\
&= A^b_a K^c_b \delta^\alpha_\beta h_{ic} - A^b_a K^c_b \delta^\alpha_\beta h_{ic} = 0\,,\\
g^{\alpha\beta}_{ab} &= \widehat{E}_a^{V_\alpha}(\widehat{E}_b^{V_\beta}(L)) = A^c_b K^d_c A^e_a K^f_e \delta^\alpha_\beta h_{fd} = \delta^\alpha_\beta \mathbf{h}_{ab}\,,
\end{aligned}$$

y por lo tanto también

$$\tilde{B}^{\gamma a}_{\alpha i} = g^{ba}_{\beta\alpha} g^{\gamma\beta}_{ib} = 0\,.$$

La ecuación (5.38) a partir de la cual se podrá determinar el levantamiento horizontal $\breve{\phi}^H(t) = (\breve{\phi}^i(t), \breve{\phi}^a_H(t), \breve{\phi}^i_\alpha(t), \breve{\phi}^a_\alpha(t))$ es entonces de la forma

$$\frac{\partial \breve{\phi}^a_H}{\partial t^\alpha} = -\breve{\phi}^i_\gamma\Big(\gamma^c_i K^a_b (A^b_c \delta^\alpha_\gamma + \tilde{B}^{\gamma b}_{\alpha i}) \circ \breve{\phi}_H\Big) = -\breve{\phi}^i_\alpha\Big(\gamma^c_i K^a_b A^b_c \circ \breve{\phi}_H\Big). \tag{5.44}$$

Del mismo modo, la ecuación de reconstrucción (5.39), con $v^a_\alpha = A^a_b w^b_\alpha$, es

$$(g^{-1}g^{(1)})_\alpha = ((v^a_\alpha + v^i_\gamma \tilde{B}^{\gamma a}_{\alpha i}) \circ \breve{\phi}_H)E_a = (v^a_\alpha \circ \breve{\phi}_H)E_a = ((A^a_b w^b_\alpha) \circ \breve{\phi}_H)E_a\,,$$

es decir,

$$(g^{-1}g^{(1)})_\alpha = \Big(A^a_b \circ \breve{\phi}_H\Big)\breve{\phi}^b_\alpha E_a. \tag{5.45}$$

Presentaremos un ejemplo explícito para mostrar como se puede reconstruir una solución, a partir de una solución de las ecuaciones de Lagrange-Poincaré. Sea G el grupo de Lie de matrices de dimensión 4, cuyos elementos $g = (x, y, z, \theta)$ son del tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & y\cos\theta + x\sin\theta & -y\sin\theta + x\cos\theta & z\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & x\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & -y\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.46}$$

Sea $\bar{g} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\theta}) \in G$ entonces el producto de las matrices que representan los elementos g y $\bar{g}$ es la matriz producto $g\bar{g}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \begin{array}{c} x\cos\bar{\theta}\sin\theta + y\cos\bar{\theta}\cos\theta \\ -y\sin\bar{\theta}\sin\theta + x\sin\bar{\theta}\cos\theta \\ \bar{y}\cos\bar{\theta} + \bar{x}\sin\theta \end{array} & \begin{array}{c} -y\cos\bar{\theta}\sin\theta + x\cos\bar{\theta}\cos\theta \\ -x\sin\bar{\theta}\sin\theta - y\sin\bar{\theta}\cos\theta \\ +\bar{x}\cos\bar{\theta} - \bar{y}\sin\bar{\theta} \end{array} & \begin{array}{c} z + \bar{z} \\ +(x\bar{x} + y\bar{y})\sin\theta \\ +(\bar{x}y - x\bar{y})\cos\theta \end{array} \\ 0 & \cos(\theta+\bar{\theta}) & -\sin(\theta+\bar{\theta}) & x + \bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta \\ 0 & \sin(\theta+\bar{\theta}) & \cos(\theta+\bar{\theta}) & -y + \bar{x}\sin\theta - \bar{y}\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la multiplicación por la izquierda

$$L_g : G \to G$$

tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\theta}) \mapsto \quad & (x + \bar{x}\cos\theta + \bar{y}\sin\theta, y - \bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta, \\ & z + \bar{z} + (x\bar{x} + y\bar{y})\sin\theta + (y\bar{x} - x\bar{y})\cos\theta, \theta + \bar{\theta}). \end{aligned} \tag{5.47}$$

En [33] se clasifican las doce álgebras de Lie en dimensión 4, que se denotan por $A_{4,n}$, con n entre 1 y 12 y en cada caso se enumeran los corchetes de Lie no nulos.

Para el álgebra de Lie $A_{4,10}$ cuyo grupo de representación está dado por las matrices del tipo (5.46), tiene como únicos corchetes de Lie no nulos

$$[E_2, E_3] = E_1\,, \quad [E_2, E_4] = -E_3 \quad \text{y} \quad [E_3, E_4] = E_2\,.$$

Además, se puede encontrar en [33] que una base para los campos de vectores invariantes por la derecha son

$$\widetilde{E}_x = \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \widetilde{E}_y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad \widetilde{E}_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \widetilde{E}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} - x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x},$$

o equivalentemente, si se escribe $\widetilde{E}_a = K_a^b \dfrac{\partial}{\partial q^b}$, entonces

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.48}$$

Por otro lado, la siguiente lista proporciona una base de los campos de vectores invariantes por la izquierda, $\widehat{E}_a(g) = (L_g)_*(e)(E_a)$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{E}_x &= (L_g)_*(e)(\frac{\partial}{\partial x}\Big|_e) = \cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) - \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),\\
\widehat{E}_y &= (L_g)_*(e)(\frac{\partial}{\partial y}\Big|_e) = \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) + \cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}\right),\\
\widehat{E}_z &= (L_g)_*(e)(\frac{\partial}{\partial z}\Big|_e) = \frac{\partial}{\partial z}\\
\widehat{E}_\theta &= (L_g)_*(e)(\frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_e) = \frac{\partial}{\partial \theta}.
\end{aligned}
$$

Si se calculan los corchetes de Lie de los campos de vectores anteriores se obtiene

$$
\begin{array}{rclrclrcl}
[\widehat{E}_x, \widehat{E}_y] &=& -2\widehat{E}_z\,, & [\widehat{E}_x, \widehat{E}_z] &=& 0\,, & [\widehat{E}_x, \widehat{E}_\theta] &=& \widehat{E}_y\,,\\
[\widehat{E}_y, \widehat{E}_z] &=& 0\,, & [\widehat{E}_y, \widehat{E}_\theta] &=& -\widehat{E}_x\,, & [\widehat{E}_z, \widehat{E}_\theta] &=& 0\,.
\end{array}
$$

por lo tanto, las únicas constantes de estructura no nulas son $C_{xy}^z = -2$, $C_{x\theta}^y = 1$ y $C_{y\theta}^x = -1$.

Considerando las expresiones de los campos de vectores $\widetilde{E}_a$ y $\widehat{E}_a$, se comprueba que la matriz A_b^a que aparece en la expresión $\widehat{E}_a = A_a^b \widetilde{E}_b$ es

$$
A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 2(y\cos\theta + x\sin\theta) & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 2(y\sin\theta - x\cos\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -y & x & x^2+y^2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.49}
$$

Observemos que esta matriz es independiente de z, este hecho se utilizará más adelante.

Sea la variedad $Q = \mathbb{R}\times G$ con la G-acción natural. Denotaremos las coordenadas en $Q/G = \mathbb{R}$ por q, y (x, y, z, θ) para aquellas en G,

$$
\begin{array}{rcl}
Q = \mathbb{R}\times G & \to & Q/G = \mathbb{R}\\
(q, (x, y, z, \theta)) & \mapsto & q
\end{array}
$$

La métrica Riemanniana

$$
h = dq\otimes dq + \gamma dq\otimes d\theta + dx\otimes dx + dy\otimes dy - ydx\otimes d\theta + xdy\otimes d\theta + dz\otimes d\theta
$$

satisface $\mathcal{L}_{\widetilde{E}_a} h = 0$, por lo tanto es una métrica invariante. La conexión principal correspondiente en $Q \to Q/G$ puede ser representada por el unico campo de vectores horizontal $X = \partial/\partial q - \gamma \partial/\partial z$ que proyecta en $\partial/\partial q$. Entonces,

$$\Upsilon^b_{qa} = -\gamma C^b_{za} = 0\,, \tag{5.50}$$

puesto que as únicas consatantes de estructura no nulas son C^z_{xy}, $C^y_{x\theta}$ y $C^x_{y\theta}$.

Tomando la notación precedente, tenemos $\mathbf{h}_{qq} = h(X, X) = 1$. La parte vertical de la métrica es

$$(\mathbf{h}_{ab}) = dx \otimes dx + dy \otimes dy - ydx \otimes d\theta + xdy \otimes d\theta + dz \otimes d\theta$$

representa una métrica bi-invariante en G, véase [33].

Estamos entonces en la situación descrita anteriormente y por lo tanto podemos utilizar los campos de k-vectores reducidos (5.42) para calcular sus secciones integrales

$$(t^\alpha) \mapsto (\phi^q(t), v^q_\alpha(t), w^x_\alpha(t), w^y_\alpha(t), w^z_\alpha(t), w^\theta_\alpha(t))$$

es decir, las ecuaciones de campo de Lagrange-Poincaré. Teniendo en cuenta (5.43) obtenemos las siguientes expresiones,

$$\frac{\partial \phi^q}{\partial t^\alpha} = v^q_\alpha(t), \qquad \frac{\partial v^q_\beta}{\partial t^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial w^a_\beta}{\partial t^\alpha} = 0, \tag{5.51}$$

donde hemos utilizado la nulidad de los símbolos de Christoffel Γ^q_{qq} de la conexión $\mathbf{h}_{qq}$, de las componentes locales de la curvatura K^a_{qq} y finalmente de Υ^b_{qb}, véase (5.50).

De las ecuaciones (5.51) podemos concluir que

$$\phi^q(t) = c^q_\alpha t^\alpha + b^q, \qquad w^a_\beta(t) = c^a_\beta,$$

es decir

$$\begin{array}{rcrcl} \breve{\phi} & : & \mathbb{R}^k & \to & T^1_k Q/G \\ & & (t^\alpha) & \mapsto & (c^q_\alpha t^\alpha + b^q,\, c^q_\alpha,\, c^x_\beta,\, c^y_\beta,\, c^z_\beta\,, c^\theta_\beta)\,. \end{array}$$

Ahora utilizando las matrices K y A, véase (5.48) y (5.49) respectivamente, y la ecuación (5.44) , podemos obtener la expresión del levantamiento horizontal $\breve{\phi}_H$, de la sección integral $\breve{\phi}$, es decir

$$\frac{\partial \phi^x_H}{\partial t^\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \phi^y_H}{\partial t^\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \phi^z_H}{\partial t^\alpha} = -\gamma c^q_\alpha, \qquad \frac{\partial \phi^\theta_H}{\partial t^\alpha} = 0.$$

Se sigue que:

$$\phi_H^z(t) = -\gamma c_\alpha^q t^\alpha + b^z, \qquad \phi_H^a(t) = b^a \quad (a \neq z)\,,$$

es decir, el levantamiento horizontal $\breve{\phi}_H$ tiene la siguiente expresión local:

$$\begin{array}{rccl} \breve{\phi}_H & : & \mathbb{R}^k & \to & T_k^1 Q \\ & & (t^\alpha) & \mapsto & (c_\alpha^q t^\alpha + b^q,\, b^x,\, b^y,\, -\gamma c_\alpha^q t^\alpha + b^z,\, b^\theta,\, c_\alpha^q,\, c_\beta^x,\, c_\beta^y,\, c_\beta^z\,, c_\beta^\theta)\,. \end{array}$$

En este momento ya disponemos de la expresión del levantamiento horizontal $\breve{\phi}_H$ y por lo tanto podemos establecer la ecuación de reconstrucción (5.45).

Recordemos que la matriz A no depende de z, por lo tanto la parte de la derecha de las ecuaciones de reconstrucción (5.45) contiene solamente las constantes c_β^a y b^a. Entonces es de la forma

$$C_\alpha^x E_x + C_\alpha^y E_y + C_\alpha^z E_z + C_\alpha^\theta E_\theta. \tag{5.52}$$

Si desarrollamos las ecuaciones de reconstrucción obtenemos que las constantes C_α^a son

$$\begin{array}{rcl} C_\alpha^x & = & c_\alpha^x \cos b^\theta - c_\alpha^y \sin b^\theta - b^y c_\alpha^\theta\,, \\ C_\alpha^y & = & -c_\alpha^x \sin b^\theta + c_\alpha^y \cos b^\theta + b^x c_\alpha^\theta\,, \\ C_\alpha^z & = & 2c_\alpha^x (b^y \cos b^\theta + b^x \sin b^\theta) + 2c_\alpha^y (b^y \sin b^\theta - b^x \cos b^\theta) + c_\alpha^z + ((b^x)^2 + (b^y)^2) c_\alpha^\theta\,, \\ C_\alpha^\theta & = & c_\alpha^\theta\,. \end{array}$$

Veamos ahora la parte izquierda de dicha ecuación. Sea $g\colon \mathbb{R}^k \to G$ con expresión

$$g(t) = (\phi_g^x(t), \phi_g^y(t), \phi_g^z(t), \phi_g^\theta(t))\,,$$

entonces su inversa tiene la siguiente expresión

$$\begin{array}{l} g^{-1}(t) = \\ \big(-\phi_g^x(t)\cos(\phi_g^\theta(t)) + \phi_g^y(t)\sin(\phi_g^\theta(t)), \\ -\phi_g^y(t)\cos(\phi_g^\theta(t)) - \phi_g^x(t)\sin(\phi_g^\theta(t)),\ -\phi_g^z(t),\ -\phi_g^\theta(t)\big)\,. \end{array}$$

Ahora bien, utilizando la expresión (5.47) de la multiplicación por la izquierda, deducimos

$$
\begin{aligned}
&(g^{-1}g^{(1)})_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \left(x \circ L_{g^{-1}(t)} \circ g\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}_t \left(-\phi_g^x(t)\cos(\phi_g^\theta(t)) + \phi_g^y(t)\sin(\phi_g^\theta(t)) + \phi_g^x \cos(\phi_g^\theta(t)) - \phi_g^y \sin(\phi_g^\theta(t))\right) \\
&= \frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\alpha}\Big|_t \cos(\phi_g^\theta(t)) - \frac{\partial \phi_g^y}{\partial t^\alpha}\Big|_t \sin(\phi_g^\theta(t))\,,
\end{aligned}
$$

y de manera análoga:

$$
\begin{aligned}
(g^{-1}g^{(1)})_\alpha(y) &= \sin(\phi_g^\theta(t))\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\alpha}\Big|_t + \cos(\phi_g^\theta(t))\frac{\partial \phi_g^y}{\partial t^\alpha}\Big|_t, \\
(g^{-1}g^{(1)})_\alpha(z) &= \frac{\partial \phi_g^z}{\partial t^\alpha}\Big|_t - \phi_g^y(t)\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\alpha}\Big|_t + \phi_g^x(t)\frac{\partial \phi_g^y}{\partial t^\alpha}\Big|_t, \\
(g^{-1}g^{(1)})_\alpha(\theta) &= \frac{\partial \phi_g^\theta}{\partial t^\alpha}\Big|_t.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se deduce que la parte izquierda de la ecuación de reconstrucción es la siguiente

$$
\begin{aligned}
(g^{-1}g^{(1)})_\alpha &= \left(\cos(\phi_g^\theta(t))\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\alpha} - \sin(\phi_g^\theta(t))\frac{\partial \phi_g^y}{\partial t^\alpha}\right) E_x \\
&+ \left(\sin(\phi_g^\theta(t))\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\alpha} + \cos(\phi_g^\theta(t))\frac{\partial \phi_g^y}{\partial t^\alpha}\right) E_y \\
&+ \left(\phi_g^x(t)\frac{\partial \phi_g^y}{\partial t^\alpha} - \phi_g^y(t)\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial \phi_g^z}{\partial t^\alpha}\right) E_z + \frac{\partial \phi_g^\theta}{\partial t^\alpha} E_\theta.
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

De este modo, igualando las ecuaciones (5.52) y (5.53) obtenemos las ecuaciones de reconstrucción.

De las dos primeras ecuaciones de reconstrucción se puede concluir que

$$
\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\alpha} = C_\alpha^x \cos(\phi_g^\theta(t)) + C_\alpha^y \sin(\phi_g^\theta(t)), \qquad \frac{\partial \phi_g^y}{\partial t^\alpha} = -C_\alpha^x \sin(\phi_g^\theta(t)) + C_\alpha^y \cos(\phi_g^\theta(t)),
$$

y, recordando que $C_\alpha^\theta = c_\alpha^\theta$, de la última ecuación que

$$
\phi_g^\theta(t) = c_\alpha^\theta t^\alpha + B^\theta\,.
$$

Para facilitar los cálculos, consideraremos el caso donde la solución para ϕ_g^θ está dada por

$$\phi_g^\theta(t) = t^1.$$

Puesto que suponemos integrabilidad, las derivadas parciales de segundo orden deben coincidir, en particular

$$\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial t^\beta}\left(\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^1}\right).$$

Como la última derivada de la derecha se anula,

$$\frac{\partial}{\partial t^\beta}\left(\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^1}\right) = \frac{\partial}{\partial t^\beta}\left(C_1^x \cos t^1 + C_1^y \sin t^1\right) = 0$$

entonces se debe anular la siguiente derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial t^1}\left(\frac{\partial \phi_g^x}{\partial t^\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial t^1}\left(C_\beta^x \cos t^1 + C_\beta^y \sin t^1\right) = -C_\beta^x \sin t^1 + C_\beta^y \cos t^1$$

y por lo tanto se concluye que las constantes C_β^x son cero cuando $\beta > 1$. Entonces:

$$\phi_g^x(t) = C_1^x \sin t^1 - C_1^y \cos t^1 + B^x.$$

Igualmente,

$$\phi_g^y(t) = C_1^x \cos t^1 + C_1^y \sin t^1 + B^y.$$

Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones anteriores, la solución de (5.45) para ϕ_g^z es

$$\phi_g^z(t) = -(B^x C_1^x + B^y C_1^y)\cos t^1 - (B^x C_1^y - B^y C_1^x)\sin t^1 + ((C_1^x)^2 + (C_1^y)^2)t^1 + C_\alpha^z t^\alpha + B^z.$$

Por lo tanto, puesto que la expresión del levantamiento horizontal $\breve{\phi}_H \colon \mathbb{R}^k \to T_k^1 Q$ de la solución de las ecuaciones de Lagrange-Poincarè tiene expresión:

$$\left(c_\alpha^q t^\alpha + b^q,\, b^x,\, b^y,\, -\gamma c_\alpha^q t^\alpha + b^z,\, b^\theta,\, c_\alpha^q,\, c_\beta^x,\, c_\beta^y,\, c_\beta^z\,, c_\beta^\theta\right),$$

y por otro lado, por la ecuación de reconstrución, la aplicación $g \colon \mathbb{R}^k \to G$ tiene expresión

$$g(t) = \left(\phi_g^x(t), \phi_g^y(t), \phi_g^z(t), \phi_g^\theta(t)\right),$$

donde

$$\begin{aligned}\phi_g^x(t) &= C_1^x \sin t^1 - C_1^y \cos t^1 + B^x, \\ \phi_g^y(t) &= C_1^x \cos t^1 + C_1^y \sin t^1 + B^y, \\ \phi_g^z(t) &= t^1\end{aligned}$$

y

$$\phi_g^z(t) = -(B^x C_1^x + B^y C_1^y)\cos t^1 - (B^x C_1^y - B^y C_1^x)\sin t^1 + ((C_1^x)^2 + (C_1^y)^2)t^1 + C_\alpha^z t^\alpha + B^z.$$

Entonces, si utilizamos la multiplicación por la izquierda (5.47), se obtiene que la solución de las ecuaciones de campo lagrangianas

$$\phi(t) = g(t)\phi_H(t)$$

son:

$$\begin{aligned}\phi^q(t) &= c_\alpha^q t^\alpha + b^q, \\ \phi^x(t) &= \bar{C}_1^x \sin t^1 - \bar{C}_1^y \cos t^1 + B^x, \\ \phi^y(t) &= \bar{C}_1^x \cos t^1 + \bar{C}_1^y \sin t^1 + B^y, \\ \phi^z(t) &= -(B^x \bar{C}_1^x + B^y \bar{C}_1^y)\cos t^1 - (B^x \bar{C}_1^y - B^y \bar{C}_1^x)\sin t^1 + \bar{C}_\alpha^z t^\alpha + \bar{B}^z, \\ \phi^\theta(t) &= t^1 + b^\theta,\end{aligned}$$

donde las constantes $\bar{C}_1^x$, $\bar{C}_1^y$, $\bar{C}_\alpha^z$ y $\bar{B}^z$ tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\bar{C}_1^x &= C_1^x + b^y, \\ \bar{C}_1^y &= C_1^y - b^x, \\ \bar{C}_\alpha^z &= ((C_\alpha^x)^2 + (C_\alpha^y)^2)\delta_1^\alpha + C_\alpha^z - \gamma c_\alpha^q, \\ \bar{B}^z &= B^z + b^z + C_1^x b^x + C_1^y b^y.\end{aligned}$$

Parte II

Teoría lagrangiana en fibrados de jets

Capítulo 6

Fibrados de jets

En la segunda parte de la memoria consideramos un fibrado $\pi : E \to \mathbb{R}^k$. Es conocido que un fibrado sobre $\mathbb{R}^k$ es trivial puesto que $\mathbb{R}^k$ es contrátil (Steenrod, 1951 [100]), sin embargo nosotros no utilizaremos este hecho para desarrollar la formulación lagrangiana del Capítulo 7.

En este capítulo comenzamos recordando el concepto de sección de un fibrado a lo largo de una aplicación y de derivaciones a lo largo de aplicaciones.

Después de describir los fibrados de jets de primer y segundo orden $J^1\pi$ y $J^2\pi$, respectivamente, introducimos los campos de vectores canónicos, $T_\alpha^{(0)}$ a lo largo de $\pi_{1,0} : J^1\pi \to E$, y los campos de vectores $T_\alpha^{(1)}$ a lo largo de $\pi_{2,1} : J^2\pi \to J^1\pi$, donde $\alpha \in \{1, \ldots, k\}$. Estos campos serán fundamentales para caracterizar los SOPDEs y las simetrías generalizadas.

Siguiendo a Saunders [98], recordamos la prolongación de campos de vectores X en E a campos de vectores X^1 en $J^1\pi$, y la prolongación de campos de vectores X a lo largo de $\pi_{1,0}$, a campos de vectores $X^{(1)}$ a lo largo de $\pi_{2,1}$.

De nuevo, siguiendo a Saunders [98], asociamos a cada 1-forma dt^α en $\mathbb{R}^k$ el tensor S_{dt^α}, en $J^1\pi$, de tipo $(1,1)$. Estos tensores nos permitirán introducir las formas de Poincaré-Cartan en el Capítulo 7.

Finalizamos el capítulo introduciendo los SOPDEs en $J^1\pi$, que son campos de k-vectores cuyas secciones integrales son primeras prolongaciones $j^1\phi$ de secciones ϕ de π. Estos campos son una generalización de los SODEs que aparecen en la descripción geométrica de la Mecánica dependiente del tiempo, y juegan un papel fundamental en el formalismo lagrangiano que desarrollamos en el Capítulo 7.

6.1. Secciones a lo largo de aplicaciones

El concepto de secciones a lo largo de aplicaciones es una noción fundamental en la descripción geométrica de la Mecánica Clásica [15, 18, 42, 88, 98].

Dado un fibrado $\pi : B \to M$ y una aplicación diferenciable $f : N \to M$, *una sección de π a lo largo de f* es una aplicación diferenciable $\sigma : N \to B$ tal que $\pi \circ \sigma = f$ (véase por ejemplo [89]), es decir, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Si $\pi : B \to M$ es el fibrado tangente de M, $\tau_M : TM \to M$ es la proyección canónica, entonces las secciones X a lo largo de $f\colon N \to M$ se denominan *campos de vectores a lo largo de f*.

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\tau_M"] \\ N \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

El módulo que forman estas secciones se denotará por $\mathfrak{X}(f)$.

Si $\pi : B \to M$ es el fibrado cotangente de M, $\pi_M : T^*M \to M$ es la proyección canónica, entonces las secciones θ a lo largo de $f\colon N \to M$ se denominan 1-*formas a lo largo de f*.

$$\begin{tikzcd} & T^*M \arrow[d, "\pi_M"] \\ N \arrow[ur, "\theta"] \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

El módulo que forman estas secciones se denotar por $\Lambda^1(f)$.

Definición 6.1 *Una derivación a lo largo de $f : N \to M$ (o f-derivación) de grado r es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal*

$$D\colon \bigwedge M \to \bigwedge N$$

que satisface las siguientes propiedades:

- *si $\omega \in \bigwedge^s M$ entonces $D\omega \in \bigwedge^{r+s} N$,*

- *si* $\omega_1 \in \bigwedge^{s_1} M$ *y* $\omega_2 \in \bigwedge^{s_2} M$ *entonces*

$$D(\omega_1 \wedge \omega_2) = D\omega_1 \wedge f^*(\omega_2) + (-1)^{rs_1} f^*(\omega_1) \wedge D\omega_2 \,.$$

Del mismo modo que un campo de vectores sobre una variedad determina dos derivaciones en el álgebra de las formas diferenciales sobre esa variedad (la contracción y la derivada de Lie); un campo de vectores a lo largo de una aplicación f determina dos f-derivaciones que transforma formas diferenciales de M en formas diferenciales de N.

Sea X un campo de vectores a lo largo de $f : N \to M$ entonces se define una f-derivación

$$i_X : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(N)$$

de grado -1 y de tipo i_*, como sigue:

- para todo función $g \in C^\infty(M)$ se define $i_X g = 0$,
- para todo forma $\omega \in \Lambda^p(M)$ se define

$$(i_X\omega)(n)\left(v_{1_n}, \dots, v_{(p-1)_n}\right) = \omega\left(f(n)\right)\left(X(n), f_*(n)v_{1_n}, \dots, f_*(n)v_{(p-1)_n}\right) \tag{6.1}$$

  donde $v_{1_n}, \dots, v_{(p-1)_n} \in T_nN$.

Existe otra f-derivación d_X definida por

$$d_X = i_X \circ d + d \circ i_X, \tag{6.2}$$

donde d se refiere al operador de la derivada exterior. Esta derivación es de grado 0 y tipo d_*, es decir, $d_X \circ d = d \circ d_X$.

Observemos que cuando $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces la id_M-derivación i_X y d_X no son más que el producto interior o la contracción i_X y la derivada de Lie $\mathcal{L}_X$, respectivamente.

Además d_X es una f^*-derivación asociada a X en el sentido de Pidello y Tulczyjew [88].

Si X es un campo de vectores a lo largo de $f : N \to M$

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "\tau_M"] \\ N \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

deducimos, de (6.1) y (6.2) que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} d_X & : & C^\infty(M) & \to & C^\infty(N) \\ & & F & \to & d_X F \end{array}$$

está definida por

$$(d_X F)(n) = (i_X\, dF)(n) = dF(f(n))(X(n)) = X(n)(F),\ \forall n \in N. \tag{6.3}$$

puesto que $X(n) \in T_{f(n)}M$.

Por lo tanto

$$d_X F : N \to \mathbb{R}$$

es la función

$$X(F) : N \to \mathbb{R}$$

definida por

$$(X(F))(n) = X(n)(F)\,. \tag{6.4}$$

Esta relación entre funciones y campos de vectores queda reflejada en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & TM \arrow[d, "\tau_M"] & \\ \mathbb{R} & N \arrow[l, "X(F)"] \arrow[ur, "X"] \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "F"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \;. \tag{6.5}$$

6.2. Fibrados de jets de primer y segundo orden

En esta segunda parte de la memoria, trabajaremos con fibrados de jets de primer y segundo orden $J^1\pi$ y $J^2\pi$ de un fibrado $\pi : E \to \mathbb{R}^k$, donde E es una variedad de dimensión $n + k$.

Si (t^α) son las coordenadas locales en $\mathbb{R}^k$ y (t^α, q^A) son las coordenadas locales en E, utilizaremos las coordenadas estándar inducidas $(t^\alpha, q^A, u^A_\alpha)$ en $J^1\pi$ y $(t^\alpha, q^A, u^A_\alpha, u^A_{\alpha\beta})$ en $J^2\pi$, que están definidas como sigue

$$t^\alpha(j^1_t\phi) = t^\alpha(t) = t^\alpha, \quad q^A(j^1_t\phi) = q^A(\phi(t)),$$
$$u^A_\alpha(j^1_t\phi) = \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t, \qquad u^A_{\alpha\beta}(j^2_t\phi) = \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t,$$

donde $1 \leq A \leq n$, $1 \leq \alpha, \beta \leq k$.

Aquí, ϕ es una sección de π y $j^1_t\phi$, $j^2_t\phi$ son el 1-jet y el 2-jet de ϕ en el punto t, respectivamente.

Para las proyecciones canónicas, utilizamos las notaciones usuales

$$\begin{tikzcd} & J^1\pi \arrow[dl, "\pi_{1,0}"'] \arrow[dd, "\pi_1"] \\ E \arrow[dr, "\pi"'] & \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{array}{ccccccccc} J^1\pi & \xrightarrow{\pi_{1,0}} & E, & J^1\pi & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{R}^k, & J^2\pi & \xrightarrow{\pi_{2,1}} & J^1\pi \\ j^1_t\phi & \to & \phi(t) & j^1_t\phi & \to & t & j^2_t\phi & \to & j^1_t\phi\ . \end{array}$$

Para las proyecciones correspondientes al fibrado $\pi_1 : J^1\pi \to \mathbb{R}^k$, se utilizarán también las notaciones habituales

$$\begin{tikzcd} & J^1\pi_1 \arrow[dl, "(\pi_1)_{1,0}"'] \arrow[dd, "(\pi_1)_1"] \\ J^1\pi \arrow[dr, "\pi_1"'] & \\ & \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{array}{cccccc} J^1\pi_1 & \xrightarrow{(\pi_1)_{1,0}} & J^1\pi, & J^1\pi_1 & \xrightarrow{(\pi_1)_1} & \mathbb{R}^k \\ j^1_t\Psi & \to & \Psi(t) & j^1_t\Psi & \to & t\ . \end{array}$$

Sea $\Psi : \mathbb{R}^k \to J^1\pi_1$ una sección de π_1 cuya expresión local es

$$\Psi(t) = (t, \Psi^A(t), \Psi^A_\alpha(t))$$

entonces, las coordenadas canónicas

$$(t^\alpha, q^A, u^A_\alpha, u^A_{,\alpha}, u^A_{\alpha,\beta})$$

de $j^1_t\Psi$ son

$$\begin{gathered} t^\alpha(j^1_t\Psi) = t^\alpha(t), \qquad q^A(j^1_t\Psi) = \Psi^A(t), \quad u^A_\alpha(j^1_t\Psi) = \Psi^A_\alpha(t) \\ u^A_{,\alpha}(j^1_t\Psi) = \frac{\partial \Psi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t, \quad u^A_{\alpha,\beta}(j^1_t\Psi) = \frac{\partial \Psi^A_\alpha}{\partial t^\beta}\Big|_t \quad . \end{gathered} \tag{6.6}$$

Por lo tanto las proyecciones se esriben localmente como sigue

$$(\pi_1)_{1,0}(t^\alpha, q^A, u^A_\alpha, u^A_{,\alpha}, u^A_{\alpha,\beta}) = (t^\alpha, q^A, u^A_\alpha)\,, \quad (\pi_1)_1(t^\alpha, q^A, u^A_\alpha, u^A_{,\alpha}, u^A_{\alpha,\beta}) = (t^\alpha)\,.$$

Denotamos por $\hat{J}^2\pi$ la variedad de los 2-jets semiholonómicos, esto es, el conjunto de todos los 1-jets de secciones ψ de π_1 tales que

$$u^A_\alpha(j^1_t\Psi) = u^A_{,\alpha}(j^1_t\Psi)\,,$$

por lo que las coordenadas en $\hat{J}^2\pi$ son $(t^\alpha, q^i, u^A_\alpha, u^A_{\alpha,\beta})$, y la expresión local de las inclusiones $J^2\pi \subset \hat{J}^2\pi \subset J^1\pi_1$ es

$$(t^\alpha, q^A, u^A_\alpha, u^A_{\alpha\beta}) \hookrightarrow (t^\alpha, q^A, u^A_\alpha, u^A_{\alpha\beta}) \hookrightarrow (t^\alpha, q^A, u^A_\alpha, u^A_\alpha, u^A_{\alpha\beta})\,.$$

6.3. Campos de vectores canónicos a lo largo de las proyecciones $\pi_{1,0}$ y $\pi_{2,1}$

Para cada $\alpha = 1, \ldots, k$, el campo de vectores $T^{(0)}_\alpha$ en E a lo largo de $\pi_{1,0}$, y el campo de vectores $T^{(1)}_\alpha$ en $J^1\pi$ a lo largo $\pi_{2,1}$

$$\begin{tikzcd}
 & T(J^1\pi) \arrow[d, "\tau_{J^1\pi}"] & TE \arrow[d, "\tau_E"] \\
J^2\pi \arrow[ur, "T^{(1)}_\alpha"] \arrow[r, "\pi_{2,1}"] & J^1\pi \arrow[ur, "T^{(0)}_\alpha"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"] & E
\end{tikzcd}$$

están definidos respectivamente por

$$\begin{aligned} T^{(0)}_\alpha(j^1_t\phi) &= \phi_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) \in T_{\phi(t)}E\,, \\ T^{(1)}_\alpha(j^2_t\phi) &= (j^1\phi)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) \in T_{j^1_t\phi}(J^1\pi)\,, \end{aligned} \tag{6.7}$$

y sus expresiones locales son

$$\begin{aligned} T^{(0)}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\circ\pi_{1,0} + u^A_\alpha\frac{\partial}{\partial q^A}\circ\pi_{1,0}\,, \\ T^{(1)}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\circ\pi_{2,1} + u^A_\alpha\frac{\partial}{\partial q^A}\circ\pi_{2,1} + u^A_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^A_\beta}\circ\pi_{2,1}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Utilizando (6.3) tenemos las aplicaciones $d_{T_\alpha^{(0)}}$ y $d_{T_\alpha^{(1)}}$

$$\begin{array}{rcccl} d_{T_\alpha^{(0)}} & : & C^\infty(E) & \longrightarrow & C^\infty(J^1\pi) \\ d_{T_\alpha^{(1)}} & : & C^\infty(J^1\pi) & \longrightarrow & C^\infty(J^2\pi) \end{array}$$

definidas por $T_\alpha^{(0)}$, $T_\alpha^{(1)}$, respectivamente.

Como $T_\alpha^{(0)} \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} d_{T_\alpha^{(0)}} & : & C^\infty(E) & \longrightarrow & C^\infty(J^1\pi) \\ & & f & \longrightarrow & d_{T_\alpha^{(0)}} f = T_\alpha^{(0)}(f) = f^{(\alpha)} \end{array}$$

está definida por

$$f^{(\alpha)}(j_t^1\phi) = d_{T_\alpha^{(0)}} f(j_t^1\phi) = [T_\alpha^{(0)}(f)](j_t^1\phi) = T_\alpha^{(0)}(j_t^1\phi)(f)\,.$$

La función $f^{(\alpha)}$ se llamará el α-ésimo levantamiento de f a $C^\infty(J^1\pi)$.

De (6.8) se obtiene que su expresión local es

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial f}{\partial t^\alpha} \circ \pi_{1,0} + u_\alpha^A \frac{\partial f}{\partial q^A} \circ \pi_{1,0}\,. \tag{6.9}$$

Como $T_\alpha^{(1)} \in \mathfrak{X}(\pi_{2,1})$ la aplicación

$$\begin{array}{rcccl} d_{T_\alpha^{(1)}} & : & C^\infty(J^1\pi) & \longrightarrow & C^\infty(J^2\pi) \\ & & G & \longrightarrow & d_{T_\alpha^{(1)}} G = T_\alpha^{(1)}(G) = G^{(\alpha)} \end{array}$$

está definida por

$$G^{(\alpha)}(j_t^2\phi) = d_{T_\alpha^{(1)}} G(j_t^2\phi) = [T_\alpha^{(1)}(G)](j_t^2\phi) = T_\alpha^{(1)}(j_t^2\phi)(G)\,.$$

Llamaremos a $G^{(\alpha)}$ el α-ésimo levantamiento de G a $C^\infty(J^2\pi)$.

De (6.8) se obtiene que su expresión local es

$$G^{(\alpha)} = \frac{\partial G}{\partial t^\alpha} \circ \pi_{2,1} + u_\alpha^A \frac{\partial G}{\partial q^A} \circ \pi_{2,1} + u_{\alpha\beta}^A \frac{\partial G}{\partial u_\beta^A} \circ \pi_{2,1}\,. \tag{6.10}$$

Dadas dos funciones F y G en $J^1\pi$, se puede probar que

$$(FG)^{(\alpha)} = F^{(\alpha)}(\pi_{2,1}^* G) + (\pi_{2,1}^* F) G^{(\alpha)}\,.$$

Observación 6.2 Observemos que los campos de vectores $T_\alpha^{(0)}$ y $T_\alpha^{(1)}$ están $(\pi_{2,1}, \pi_{1,0})$-relacioneados en el siguiente sentido $(\pi_{1,0})_* \circ T_\alpha^{(1)} = T_\alpha^{(0)} \circ \pi_{2,1}$.

6.4. Prolongaciones de campos de vectores

Recordamos ahora las prolongaciones de campos de vectores de E a campos de vectores en $J^1\pi$ y la prolongación de campos de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$ a campos de vectores a lo largo de $\pi_{2,1}$, véase Saunders [98], Sección 4.4 y Sección 6.4.

$\boxed{\text{Prolongación de } X \in \mathfrak{X}(E) \text{ a } X^1 \in \mathfrak{X}(J^1\pi)}$

Sea X un campo de vectores en E con expresión local

$$X = X^\alpha(t,q)\frac{\partial}{\partial t^\alpha} + X^A(t,q)\frac{\partial}{\partial q^A}, \tag{6.11}$$

entonces su prolongación X^1 es un campo de vectores en $J^1\pi$ cuya expresión local es

$$X^1 = X^\alpha\frac{\partial}{\partial t^\alpha} + X^A\frac{\partial}{\partial q^A} + \left(\frac{dX^A}{dt^\alpha} - u^A_\beta\frac{dX_\beta}{dt^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}, \tag{6.12}$$

donde d/dt^α denota la derivada total, esto es,

$$\frac{d}{dt^\alpha} = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + u^B_\alpha\frac{\partial}{\partial q^B} \qquad 1 \leq \alpha \leq k.$$

Observemos que

$$\frac{dF}{dt^\alpha} = T^{(0)}_\alpha(F) : J^1\pi \to \mathbb{R}$$

para cada $F \in C^\infty(J^1\pi)$.

Por lo tanto podemos reescribir la prolongación X^1 de X como

$$X^1 = (X^\alpha\circ\pi_{1,0})\frac{\partial}{\partial t^\alpha} + (X^A\circ\pi_{1,0})\frac{\partial}{\partial q^A} + \left(T^{(0)}_\alpha(X^A) - u^A_\beta\, T^{(0)}_\alpha(X^\beta)\right)\frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}, \tag{6.13}$$

cuyas componentes indicamos en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & T(E) \arrow[d, "\tau_E"] & \\
\mathbb{R} & J^1\pi \arrow[l, shift right, "T^{(0)}_\alpha(X^\beta)"'] \arrow[l, shift left, "T^{(0)}_\alpha(X^A)"] \arrow[ur, "T^{(0)}_\alpha"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"] & E \arrow[r, "X^\beta", "X^A"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} .$$

$\boxed{\text{Prolongación de } X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0}) \text{ a } X^{(1)} \in \mathfrak{X}(\pi_{2,1})}$

Sea ahora X un campo de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$, denotaremos por $X^{(1)}$ su prolongación de primer orden a lo largo de $\pi_{2,1}$,

$$\begin{tikzcd}
 & T(J^1\pi) \arrow[d, "\tau_{J^1\pi}"] & TE \arrow[d, "\tau_E"] \\
J^2\pi \arrow[ru, "X^{(1)}"] \arrow[r, "\pi_{2,1}"'] & J^1\pi \arrow[ru, "X"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"'] & E\,.
\end{tikzcd}$$

Si la expresión local de X es

$$X = X^\alpha(x,q,v)\,\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \circ \pi_{1,0} + X^A(x,q,v)\frac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{1,0}$$

entonces la expresión local de $X^{(1)}$ es

$$\begin{aligned} X^{(1)} \;&=\; (X^\alpha \circ \pi_{2,1})\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \circ \pi_{2,1} + (X^A \circ \pi_{2,1})\frac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{2,1} \\ &\quad + \left(T_\alpha^{(1)}(X^A) - T_\alpha^{(1)}(X^\beta)u_\beta^A\right)\frac{\partial}{\partial u_\alpha^A} \circ \pi_{2,1} \quad . \end{aligned} \tag{6.14}$$

cuyas componentes se describen en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & T(J^1\pi) \arrow[d, "\tau_{J^1\pi}"] & \\
\mathbb{R} & J^2\pi \arrow[l, shift right, "T_\alpha^{(1)}(X^\beta)"'] \arrow[l, shift left, "T_\alpha^{(1)}(X^A)"] \arrow[ru, "T_\alpha^{(1)}"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"] & J^1\pi \arrow[r, shift left, "X^\beta"] \arrow[r, shift right, "X^A"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} \quad .$$

Observación 6.3 Si X es un campo de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$ y π-vertical entonces la expresión local de $X^{(1)}$ es

$$X^{(1)} = \left(X^A \frac{\partial}{\partial q^A}\right) \circ \pi_{2,1} + \left(\frac{\partial X^A}{\partial t^\alpha} \circ \pi_{2,1} + u_\alpha^B \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \circ \pi_{2,1} + u_{\alpha\beta}^B \frac{\partial X^A}{\partial u_\beta^B} \circ \pi_{2,1}\right) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^A} \circ \pi_{2,1} \tag{6.15}$$

puesto que

$$T_\alpha^{(1)}(X^A) \circ \pi_{2,1} = \frac{\partial X^A}{\partial t^\alpha} \circ \pi_{2,1} + u_\alpha^B \frac{\partial X^A}{\partial q^B} \circ \pi_{2,1} + u_{\alpha\beta}^B \frac{\partial X^A}{\partial u_\beta^B} \circ \pi_{2,1}.$$

De acuerdo con (6.3), sabemos que el campo de vectores $X^{(1)}$, a lo largo de $\pi_{2,1}$, define una aplicación

$$\begin{array}{rcccl} d_{X^{(1)}} & : & C^\infty(J^1\pi) & \to & C^\infty(J^2\pi) \\ & & F & \to & d_{X^{(1)}}F = X^{(1)}(F)\ , \end{array}$$

con expresión local

$$d_{X^{(1)}}F = X^\alpha\circ\pi_{2,1}\frac{\partial F}{\partial t^\alpha}\circ\pi_{2,1}+X^A\circ\pi_{2,1}\frac{\partial F}{\partial q^A}\circ\pi_{2,1}+\big(T^{(1)}_\alpha(X^A) - u^A_\beta T^{(1)}_\alpha(X^\beta)\big)\,\frac{\partial F}{\partial u^A_\alpha}\circ\pi_{2,1}\ , \tag{6.16}$$

cuyas componentes se describen en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & T(J^1\pi) \arrow[d, "\tau_{J^1\pi}"] & \\
\mathbb{R} & J^2\pi \arrow[l, shift right, "T^{(1)}_\alpha(X^\beta)"'] \arrow[l, shift left, "T^{(1)}_\alpha(X^A)"] \arrow[ur, "X^{(1)}"] \arrow[r, "\pi_{2,1}"] & J^1\pi \arrow[r, "X^\beta", "X^A"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd} \quad .$$

Observación 6.4 Si X es un campo de vectores en E podemos considerar el campo de vectores $X\circ\pi_{1,0}$ es a lo largo de $\pi_{1,0}$

$$\begin{tikzcd}
 & TE \arrow[d] \\
J^1\pi \arrow[ur, "X\circ\pi_{1,0}"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"] & E \arrow[u, bend right, "X"']
\end{tikzcd}$$

De las expresiones locales de $X^{(1)}$ y X^1 se deduce que

$$(X\circ\pi_{1,0})^{(1)} = X^1\circ\pi_{2,1}. \tag{6.17}$$

6.5. Endomorfismos verticales

Si $E\to M$ es un fibrado arbitrario, a cada 1-forma ω en M, se le asocia un campo de tensores S_ω en $J^1\pi$, de tipo $(1,1)$, véase Saunders [98], página 156.

Así en nuestro caso, para el fibrado $E\to\mathbb{R}^k$, cada 1-forma dt^α, $1\leq\alpha\leq k$, define un campo de tensores canónico S_{dt^α} en $J^1\pi$ de tipo $(1,1)$, con expresión local

$$S_{dt^\alpha}\equiv(dq^A-u^A_\beta dt^\beta)\otimes\frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\ , \tag{6.18}$$

que a lo largo de la memoria denotaremos por S^α.

Observación 6.5 La k-forma vectorial S en $J^1\pi$, definida en [97, 98], cuyos valores son vectores verticales sobre E, tiene la siguiente expresión local

$$S = \left((dq^A - u^A_\beta dt^\beta) \wedge d^{k-1}t_\alpha\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} \tag{6.19}$$

donde

$$d^{k-1}t_\alpha = i_{\partial/\partial t^\alpha} d^k t = (-1)^{\alpha-1} dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^{\alpha-1} \wedge dt^{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge dt^k$$

y $d^k t = dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k$ es la forma de volumen estándar en $\mathbb{R}^k$.

De (6.18) y (6.19) se deduce que S y $\{S_{dt^1}, \dots, S_{dt^k}\}$ están relacionadas mediante la fórmula

$$S = S^\alpha \wedge d^{k-1}t_\alpha .$$

También tenemos $dt^\alpha \wedge S = -S^\alpha \wedge d^k t$.

6.6. SOPDEs: ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

En esta sección estudiaremos un tipo especial de campos de k-vectores en la variedad $J^1\pi$ que denominamos SOPDEs, que se identifican con las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, y que aparecerán en este formalismo lagrangiano. Veremos que al igual que en el formalismo k-simpléctico (y k-cosimpléctico) lagrangiano (véase la Proposición 1.17), las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden obtener como secciones integrales de ciertos SOPDEs.

Definición 6.6 *Sea*

$$\begin{array}{rcl} \phi : U \subset \mathbb{R}^k & \longrightarrow & E \\ t & \longrightarrow & \phi(t) \equiv \left(t^1, \dots, t^k, \phi^A(t^1, \dots, t^k)\right) \end{array}$$

una sección de π. La primera prolongación $j^1\phi$ *de ϕ es la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} j^1\phi : U \subset \mathbb{R}^k & \longrightarrow & J^1\pi \\ t & \longrightarrow & j^1_t\phi \equiv \left(t^1, \dots, t^k, \phi^A(t^1, \dots, t^k), \dfrac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}(t^1, \dots, t^k)\right) . \end{array} \tag{6.20}$$

Recordemos que una 1-forma $\theta \in \Lambda^1(J^1\pi)$ se dice que es una 1-forma de contacto si $(j^1\phi)^*\theta = 0$ para toda sección ϕ de π.

El módulo de las formas de contacto es

$$\Lambda^1_C(J^1\pi) \,=\, \{\theta \in \Lambda^1(J^1\pi),\ (j^1\phi)^*\theta = 0,\ \forall \phi \in\ Sec\,(\pi)\},$$

y está generado por las formas

$$\delta q^A = dq^A - u^A_\beta dt^\beta, \quad i = A, \ldots, n. \tag{6.21}$$

La siguiente proposición es conocida y muestra la importancia de las formas de contacto.

Proposición 6.7 *Una sección ψ de π_1 es la primera prolongación de una sección de π si y sólo si $\psi^*\theta = 0$ para todo $\theta \in \Lambda^1_C(J^1\pi)$.*

Demostración:

Consideremos

$$\begin{array}{rcccl} \psi & : & \mathbb{R}^k & \to & J^1\pi \\ & & (t^\alpha) & \mapsto & \psi(t^\alpha) = (t^\alpha, \psi^A(t^\alpha), \psi^A_\beta(t^\alpha)) \end{array}$$

una sección de π_1 y $\theta = \theta_A(dq^A - u^A_\beta dt^\beta) \in \Lambda^1_C(J^1\pi)$. Entonces

$$\psi^*\theta = \theta_A \circ \psi \left(\frac{\partial \psi^A}{\partial t^\beta} - \psi^A_\beta \right) dt^\alpha \,.$$

Por lo tanto, $\psi^*\theta = 0$ para todo $\theta \in \Lambda^1_C(J^1\pi)$ si y sólo si $\psi^A_\beta = \partial\psi^A/\partial t^\beta$, es decir $\psi = \phi^{(1)}$ donde ϕ es una sección de π con expresión local $\phi(t) = (t^\alpha, \psi^A(t^\alpha))$.

$\square$

Las formas de contacto forman una distribución de dimensión n que anula a la *distribución de Cartan*, que es la distribución de dimensión $k + nk$, definida por

$$C(J^1\pi) = \ Ker\, S^1 \cup \ldots \cup \ Ker\, S^k \,.$$

De (6.18) se deduce que $X \in C(J^1\pi)$ si y sólo si

$$(dq^A - u^A_\alpha dt^\alpha)(X) = 0, \quad 1 \leq A \leq k,$$

y entonces la expresión local de X es

$$X = X^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} + u_\alpha^A \frac{\partial}{\partial q^A} \right) + X_\alpha^A \frac{\partial}{\partial u_\alpha^A}.$$

Una base local para $C(J^1\pi)$ son los $k + nk$ campos de vectores locales

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha} + u_\alpha^A \frac{\partial}{\partial q^A} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial u_\alpha^A} \quad 1 \leq A \leq n, \quad 1 \leq \alpha \leq k \ .$$

Definición 6.8 *Un campo de k-vectores $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ en $J^1\pi$ se dice que es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden (*SOPDE*) si*

$$dt^\alpha(\Gamma_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad S^\alpha(\Gamma_\beta) = 0,$$

o equivalentemente,

$$dt^\alpha(\Gamma_\beta) = \delta_\beta^\alpha, \quad \delta q^A(\Gamma_\beta) = 0$$

para todo $A = 1 \ldots n$, $\alpha, \beta = 1 \ldots k$.

Todo campo de vectores Γ_α de un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ pertenece a la distribución de Cartan, puesto que

$$(dq^A - u_\beta^A dt^\beta)(\Gamma_\alpha) = \delta q^A(\Gamma_\alpha) = 0\,.$$

Veamos ahora la expresión local de un SOPDE. Sea $\mathbf{\Gamma}$ un SOPDE con expresión local

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t^\beta} + \Gamma_\alpha^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma_{\alpha\beta}^A \frac{\partial}{\partial u_\beta^A}\,,$$

entonces por la Definición 6.8 y de la expresión (6.18) de S^α, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta_\beta^\alpha &= dt^\alpha(\Gamma_\beta) = \Gamma_\beta^\alpha \\ 0 &= S^\alpha(\Gamma_\beta) = (\Gamma_\beta^A - u_\gamma^A \Gamma_\beta^\gamma) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^A} = (\Gamma_\beta^A - u_\beta^A) \frac{\partial}{\partial u_\alpha^A} \end{aligned}$$

por lo tanto la expresión local de un SOPDE $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ es

$$\Gamma_\alpha(t^\beta, q^A, u_\beta^A) = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + u_\alpha^A \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma_{\alpha\beta}^A \frac{\partial}{\partial u_\beta^A}, \quad 1 \leq \alpha \leq k \tag{6.22}$$

donde $\Gamma_{\alpha\beta}^A$ son funciones definidas localmente en $J^1\pi$. Como consecuencia directa de la expresión local anterior, deducimos que la familia de campos de vectores $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ son linealmente independientes.

Veremos que las secciones integrales de un SOPDE son primeras prolongaciones de secciones de π.

Proposición 6.9 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *un campo de* k*-vectores integrable. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) $\mathbf{\Gamma}$ *es un* SOPDE .

(2) *Las secciones integrales de* $\mathbf{\Gamma}$ *son primeras prolongaciones de secciones de* π.

(3) *Existe una sección* γ *de* $\pi_{2,1}$ *tal que* $\Gamma_\alpha = T_\alpha^{(1)} \circ \gamma$*, es decir, el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & T(J^1\pi) \arrow[d] \\
J^2\pi \arrow[ur, "T_\alpha^{(1)}"] \arrow[r, "\pi_{2,1}"] & J^1\pi \arrow[u, bend right, "\Gamma_\alpha"'] \arrow[l, bend left, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración:

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Sea $\mathbf{\Gamma}$ un campo de k-vectores integrable y $\psi \colon U \subset \mathbb{R}^k \to J^1\pi$ una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$. Entonces de la definición de sección integral (1.13) y de la expresión local (6.22) de Γ_α, otenemos

$$\begin{aligned}
(\pi_1 \circ \psi)_*(t) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \right) &= (\pi_1)_*(\psi(t)) \left(\psi_*(t) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \right) \right) = (\pi_1)_*(\psi(t)) \Gamma_\alpha(\psi(t)) \\
&= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{\pi_1(\psi(t))},
\end{aligned}$$

para cada $t \in U$, lo que significa que

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t (t^\beta \circ \pi_1 \circ \psi) = \delta_\beta^\alpha$$

por lo tanto $\pi_1 \circ \psi = id_U$, es decir, ψ es una sección local para π_1.

Tenemos que probar que $\psi = j^1\phi$ donde ϕ es una sección de π. Para esto utilizamos la Proposición 6.7, es decir, demostraremos que $\psi^*\theta = 0$ para todo $\theta \in \Lambda_C^1(J^1\pi)$.

Como $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE y $\theta \in \Lambda_C^1(J^1\pi)$, se verifica $i_{\Gamma_\alpha}\theta = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(\psi^*\theta)(t) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \right) &= \theta(\psi(t)) \left(\psi_*(t) \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \right) \right) \\
&= \theta(j_t^1\psi) \left(\Gamma_\alpha(\psi(t)) \right) = 0
\end{aligned}$$

para cada $t \in U$.

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Definimos

$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & J^1\pi & \to & J^2\pi \\ & j^1_t\sigma & \to & \gamma(j^1_t\sigma) = j^2_t\varphi , \end{array}$$

donde $j^1\varphi$ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ pasando por $j^1_t\sigma$ (i.e., $j^1_t\varphi = j^1\varphi(t) = j^1_t\sigma$).

Entonces

$$(\pi_{2,1} \circ \gamma)(j^1_t\sigma) = \pi_{2,1}(\gamma(j^1_t\sigma)) = \pi_{2,1}(j^2_t\varphi) = j^1_t\varphi = j^1_t\sigma \,.$$

Es decir, la aplicación γ es una sección de $\pi_{2,1}$. Puesto que $j^1\varphi$ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$, y de la definición de $T^{(1)}_\alpha$ y de γ se deduce

$$\Gamma_\alpha(j^1_t\sigma) = (j^1\varphi)_*(t)\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_t\right) = T^{(1)}_\alpha(j^2_t\varphi) = (T^{(1)}_\alpha \circ \gamma)(j^1_t\sigma)\,.$$

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Sea γ una sección de $\pi_{2,1}$, tenemos que probar que $\Gamma_\alpha = T^{(1)}_\alpha \circ \gamma$ define un SOPDE. Como

$$\tau_{J^1\pi} \circ \Gamma_\alpha = \tau_{J^1\pi} \circ T^{(1)}_\alpha \circ \gamma = \pi_{2,1} \circ \gamma = id_{J^1\pi},$$

donde $\tau_{J^1\pi}\colon T(J^1\pi) \to J^1\pi$ es la proyección canónica, entonces $\Gamma_\alpha = T^{(1)}_\alpha \circ \gamma$ es un campo de vectores en $J^1\pi$. Además, $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE

$$dt^\beta(\Gamma_\alpha)(j^1_t\sigma) = dt^\beta(T^{(1)}_\alpha \circ \gamma)(j^1_t\sigma) = \delta^\alpha_\beta$$

y

$$\begin{aligned} \delta q^A(\Gamma_\alpha)(j^1_t\sigma) &= \delta q^A(j^1_t\sigma)\left((T^{(1)}_\alpha \circ \gamma)(j^1_t\sigma)\right) = \delta q^A(j^1_t\sigma)\left(T^{(1)}_\alpha(j^2_t\varphi)\right) \\ &= u^A_\alpha(j^2_t\varphi) - u^A_\alpha(j^1_t\sigma) = 0, \end{aligned}$$

donde la última identidad se verifica porque γ es una sección de $\pi_{2,1}$ así que $j^1_t\sigma = (\pi_{2,1} \circ \gamma)(j^1_t\sigma) = \pi_{2,1}(j^2_t\varphi) = j^1_t\varphi$.

$\square$

Finalizamos el capítulo estableciendo las condiciones de integrabilidad para un SOPDE.

De (1.13) y (6.22), deducimos que ϕ es una solución de $\mathbf{\Gamma}$ si y sólo si, $q^A \circ \phi = \phi^A$ es una solución del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

$$\left.\frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\right|_t = \Gamma^A_{\alpha\beta}\left(t, \phi^A(t), \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\gamma}\right). \tag{6.23}$$

donde $1 \leq A \leq n$ y $1 \leq \alpha, \beta \leq k$.

Definición 6.10 *Si $j^1\phi$ es una sección integral de un* SOPDE $\mathbf{\Gamma}$*, entonces ϕ se llama solución de $\mathbf{\Gamma}$.*

Por la Proposición 3.7 (con $M = J^1\pi$ y $\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma}$), la integrabilidad de un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ está determinada por la nulidad de la curvatura de la conexión asociada a $\mathbf{\Gamma}$, o equivalentemente con $[\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta] = 0$ para todo $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$.

Entonces, cuando consideramos un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$ integrable estamos suponiendo las siguientes condiciones de integrabilidad

$$\Gamma^A_{\alpha\beta} = \Gamma^A_{\beta\alpha}, \quad \Gamma_\alpha(\Gamma^A_{\beta\gamma}) = \Gamma_\beta(\Gamma^A_{\alpha\gamma}). \tag{6.24}$$

Otra demostración de las condiciones de integrabilidad puede verse en el Trabajo Fin de Máster de Hèctor Marañón [68], dirigido por el profesor Xavier Gràcia.

Capítulo 7

Formalismo lagrangiano en fibrados de jets

Considerando un fibrado $\pi\colon E \to \mathbb{R}^k$ y un lagrangiano $L\colon J^1\pi \to \mathbb{R}$, desarrollaremos un formalismo lagrangiano, que nos permitirá establecer una nueva versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange utilizando campos de k-vectores en $J^1\pi$.

Después de definir las 1-formas de Poincaré-Cartan, $\Theta_L^\alpha = dL \circ S_{dt^\alpha}$, y las 2-formas de Poincaré-Cartan, $\Omega_L^\alpha = -d\Theta_L^\alpha$, establecemos dichas ecuaciones geométricas de este nuevo formalismo

$$dt^\alpha(X_\beta) = \delta_\beta^\alpha \quad , \quad i_{X_\alpha}\Omega_L^\alpha = (k-1)dL$$

donde la solución es un campo de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ en $J^1\pi$. Si L es regular y $\mathbf{X}$ integrable entonces $\mathbf{X}$ es un SOPDE y sus soluciones ϕ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Después de estudiar la relación entre este nuevo formalismo y el formalismo k-cosimpléctico, se finaliza el capítulo presentando una nueva descripción geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange, utilizando los campos de vectores canónicos $T_\alpha^{(0)}$ y $T_\alpha^{(1)}$, introducidos en el capítulo anterior, y una generalización de las f-derivaciones introducidas en [102, 103].

7.1. Formas de Poincaré-Cartan

Sea $L : J^1\pi \to \mathbb{R}$ un lagrangiano, para cada $\alpha = 1, \dots, k$, definimos las 1-*formas de Poincaré-Cartan* Θ^α_L en $J^1\pi$ como las 1-formas

$$\Theta^\alpha_L = Ldt^\alpha + dL \circ S^\alpha \,, \quad 1 \leq \alpha \leq k.$$

Sus expresiones locales son

$$\Theta^\alpha_L = \left(L\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} u^A_\beta \right) dt^\beta + \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} dq^A, \tag{7.1}$$

o equivalentemente

$$\Theta^\alpha_L = \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}(dq^A - u^A_\beta dt^\beta) + Ldt^\alpha = \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\delta q^A + Ldx^\alpha \ . \tag{7.2}$$

Observemos que el hecho de trabajar en un fibrado sobre $\mathbb{R}^k$ nos permite introducir los tensores $S_{dt^\alpha} = S^\alpha$ y en consecuencia las 1-formas Θ^α_L.

Para cada $\alpha = 1, \dots, k$ se definen las 2-formas de *Poincaré-Cartan* $\Omega^\alpha_L = -d\Theta^\alpha_L$ en $J^1\pi$ cuyas expresiones locales son

$$\Omega^\alpha_L = -d\Theta^\alpha_L = dt^\beta \wedge d\left(L\delta^\alpha_\beta - \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} u^A_\beta \right) + dq^A \wedge d(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}) \tag{7.3}$$

Observación 7.1 Es conocido que un lagrangiano $L\colon J^1\pi \to \mathbb{R}$ induce una k-forma Θ_L, llamada forma de Cartan en Teorías Clásicas de Campo de primer orden, véase [97, 98], que está definida por

$$\Theta_L = Ld^kt + dL \circ S.$$

y cuya expresión local es

$$\Theta_L = \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}(dq^A - u^A_\beta dt^\beta) \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial t^\alpha}} \wedge d^kt) + Ld^kt \ .$$

La relación entre la forma de Cartan y las 1-formas de Poincaré-Cartan es

$$\Theta_L = \Theta^\alpha_L \wedge d^{k-1}t_\alpha + (1-k)Ld^kt \,. \tag{7.4}$$

7.2. Ecuaciones de campo de Euler-Lagrange: formulación geométrica

Sea L un lagrangiano en $J^1\pi$, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a L son:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^\alpha \partial u^A_\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + \frac{\partial \phi^B}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t \frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\beta \partial u^A_\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} = \frac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi}, \tag{7.5}$$

con $t \in Dom\,\phi$ y siendo su solución ϕ una sección de $\pi : E \to \mathbb{R}^k$. Las ecuaciones (7.5) también se suelen escribir como sigue

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} \circ j^1\phi\right) = \frac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi}, \quad 1 \leq A \leq k\,.$$

El principio variacional correspondiente a estas ecuaciones es completamente análogo al del formalismo lagrangiano k-cosimpléctico, véase [105].

Sea $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$ un SOPDE. Utilizando las expresiones locales (6.22) y (7.1) de Γ_α y Θ^α_L, se obtiene que

$$i_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = kL\,. \tag{7.6}$$

Ahora un cálculo directo nos proporciona la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L &= di_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L + i_{\Gamma_\alpha} d\Theta^\alpha_L \\ &= dL + \left(\Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\right)(dq^A - u^A_\beta dt^\beta) + (\Gamma^A_{\alpha\beta} - \Gamma^A_{\beta\alpha})\frac{\partial L}{\partial q^A} dt^\alpha\,, \end{aligned}$$

entonces, si además, el SOPDE es integrable, de (6.24), deducimos que se verifica

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = dL + \left(\Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\right)(dq^A - u^A_\beta dt^\beta). \tag{7.7}$$

Consecuencia inmediata de esta identidad es la siguiente proposición

Proposición 7.2 *Sea $\mathbf{\Gamma}$ un* SOPDE *integrable, entonces*

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = dL \tag{7.8}$$

si y sólo si

$$\Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0\,, \quad A = 1, \dots, n. \tag{7.9}$$

Lema 7.3 *Sea* $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ *un* SOPDE *integrable verificando*

$$\Gamma_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0 \,, \quad A = 1, \ldots, n \,.$$

Si ϕ *es una solución de* $\mathbf{\Gamma}$*, entonces* ϕ *es una solución a las ecuaciones de Euler-Lagrange* (7.5)*.*

Demostración:

Puesto que $j^1\phi$ una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ se verifica

$$\Gamma_\alpha(j^1_t\phi) = (j^1\phi)_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t)$$

entonces de la hipótesis se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_\alpha(j^1_t\phi) \left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} = (j^1\phi)_*(t)(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t) \left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} \\ &= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} \circ j^1\phi \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} \end{aligned}$$

es decir, ϕ es solución local de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$\square$

Entonces, de (7.9) y del Lema 7.3, obtenemos el siguiente resultado

Corolario 7.4 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *un* SOPDE *integrable; si* $j^1\phi$ *es solución de (7.8), esto es*

$$(\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L) \circ j^1\phi = dL \circ j^1\phi \,,$$

entonces ϕ *es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

De (7.8) y de la identidad $i_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = kL$ deducimos las siguiente proposición:

Proposición 7.5 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *un* SOPDE *integrable. Entonces* $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = dL$ *es equivalente a*

$$i_{\Gamma_\alpha}\Omega^\alpha_L = (k-1)dL \,. \tag{7.10}$$

Demostración:

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = dL \Leftrightarrow i_{\Gamma_\alpha} d\Theta^\alpha_L + d i_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = dL \Leftrightarrow i_{\Gamma_\alpha}\Omega^\alpha_L = (k-1)dL$$

$\square$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores probaremos ahora el Teorema que proporciona la nueva formulación geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange, cuando se utilizan campos de vectores en $J^1\pi$ y los campos se interpretan como secciones del fibrado $\pi\colon E \to \mathbb{R}^k$.

En primer lugar recordemos que un lagrangiano $L : J^1\pi \to \mathbb{R}$ se dice que es regular si la matriz

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\alpha \partial u^A_\beta}\right)$$

es no singular, donde $1 \leq \alpha, \beta \leq k$, $1 \leq A, B \leq n$.

Teorema 7.6 *Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ un campo de k-vectores en $J^1\pi$ verificando*

$$dt^\alpha(X_\beta) = \delta^\alpha_\beta \quad , \quad i_{X_\alpha}\Omega^\alpha_L = (k-1)dL\,, \tag{7.11}$$

(1) *Si L es regular entonces $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ es un* SOPDE. *Si además $\mathbf{X}$ es integrable y $\phi\colon U_0 \subset \mathbb{R}^k \to E$ es una solución de $\mathbf{X}$, entonces ϕ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5).*

(2) *Si $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ es integrable y $j^1\phi$ es una sección integral de $\mathbf{X}$, entonces ϕ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5).*

Demostración:

Si escribimos cada X_α en coordenadas locales como

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + X^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + X^A_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, \quad 1 \leq \alpha \leq k,$$

entonces, de (7.1) y (7.11), obtenemos

$$\begin{array}{lrcl}
(i) & X_\alpha\left(L\delta^\alpha_\beta - \dfrac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}u^A_\beta\right) + (u^A_\alpha - X^A_\alpha)\dfrac{\partial^2 L}{\partial t^\beta \partial u^A_\alpha} & = & \dfrac{\partial L}{\partial t^\beta} \\
(ii) & X_\alpha\left(\dfrac{\partial L}{\partial u^B_\alpha}\right) + (u^A_\alpha - X^A_\alpha)\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} & = & \dfrac{\partial L}{\partial q^B} \\
(iii) & (u^A_\alpha - X^A_\alpha)\dfrac{\partial^2 L}{\partial u^B_\alpha \partial u^A_\beta} & = & 0.
\end{array}$$

(1) Utilizando que L es regular deducimos de (iii) que $X^A_\alpha = u^A_\alpha$, lo que implica que $\mathbf{X}$ es un SOPDE. Si además suponemos que es integrable, entonces sus secciones integrales son prolongaciones $j^1\phi$ de secciones ϕ de π, es decir, se verifica que

$$X_\alpha(j^1_t\phi) = (j^1\phi)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)$$

de donde deducimos que

$$X^A_\alpha \circ j^1\phi = u^A_\alpha \circ j^1\phi = \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\,, \quad X^A_{\alpha\beta} \circ j^1\phi = \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha t^\beta}\,. \tag{7.12}$$

Por lo tanto, de (ii), obtenemos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^\alpha \partial u^A_\alpha} + \frac{\partial \phi^B}{\partial t^\alpha}\frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u^A_\alpha} + \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\frac{\partial^2 L}{\partial u^B_\beta \partial u^A_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^A}.$$

lo que significa que ϕ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5).

(2) Si $j^1\phi$ es una sección integral de $\mathbf{X}$, es decir,

$$X_\alpha(j^1_t\phi) = (j^1\phi)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)$$

entonces de la expresión local (6.20) de $j^1\phi$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl}
X_\alpha(j^1_t\phi) & = & \dfrac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t + X^A_\alpha(j^1_t\phi)\dfrac{\partial}{\partial q^A}\Big|_t + X^A_{\alpha\beta}(j^1_t\phi)\dfrac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\Big|_t\,, \\
(j^1\phi)_*(t)\left(\dfrac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) & = & \dfrac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t + \dfrac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t\dfrac{\partial}{\partial q^A}\Big|_t + \dfrac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t\dfrac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\Big|_t\,,
\end{array}$$

es decir,

$$X^A_\alpha \circ j^1\phi = \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\,, \quad X^A_{\alpha\beta}(j^1_t\phi) = \frac{\partial^2 \phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\,.$$

Entonces, de la ecuación (ii) deducimos que ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5).

$\square$

Observación 7.7 El caso $k = 1$, se corresponde con la fibración $E \to \mathbb{R}$, y la ecuación (7.10) es la conocida ecuación dinámica $i_\Gamma d\Theta = 0$, donde $\mathbf{\Gamma}$ es una ecuación diferencial de segundo orden (SODE), y Θ es la 1-forma de Poincaré-Cartan asociada al lagrangiano L cuya expresión local es

$$\Theta = \frac{\partial L}{\partial u^A}(dq^A - u^A dt) - L dt\,,$$

véase [17].

En el caso $E = \mathbb{R} \times Q \to \mathbb{R}$, las ecuaciones (7.11) son las ecuaciones dinámicas

$$dt(X) = 1, \quad i_X \Omega_L = 0$$

donde Ω_L es la 2-forma de Poincaré-Cartan definida por el lagrangiano $L\colon \mathbb{R}\times TQ \to \mathbb{R}$. Estas ecuaciones coinciden con la formulación cosimpléctica de la mecánica no autonoma, véase [13, 66].

La relación entre este formalismo y el formalismo k-cosimpléctico, descrito en [65], véase también [25, 55, 81, 90], será analizada en la siguiente sección.

Ejemplo 7.8 Sea $E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ y consideremos el fibrado trivial $\pi\colon E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{tikzcd}
 & J^1\pi \arrow[dl, "\pi_{1,0}"'] \arrow[dd, "\pi_1"] \\
E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \arrow[dr, "\pi"'] & \\
 & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

Las soluciones $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones

- Ecuación de la cuerda vibrante: $\sigma \partial_{11}\phi - \tau \partial_{22}\phi = 0$
- Ecuación de Sine-Gordon: $0 = \partial_{11}\phi - a^2 \partial_{22}\phi + \Omega^2 \sin\phi$
- Ecuación de Ginzburg-Landau: $\partial_{11}\phi - a^2\partial_{22}\phi - 4\lambda\phi(\phi^2 - 1) = 0$

se pueden interpretar como secciones del fibrado trivial $\pi\colon E = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Además estas ecuaciones son las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a los siguientes lagrangianos regulares $L : J^1\pi \to \mathbb{R}$

- $L(t^1, t^2, q, u_1, u_2) = \frac{1}{2}(\sigma(u_1)^2 - \tau(u_2)^2)$
- $L(t^1, t^2, q, u_1, u_2) = \dfrac{1}{2}((u_1)^2 - a^2(u_2)^2 - \Omega^2(1 - \cos(q)))$
- $L(t^1, t^2, q, u_1, u_2) = \dfrac{1}{2}((u_1)^2 - a^2(u_2)^2) + \lambda(q^2 - 1)^2$.

Por lo tanto las soluciones de dichas ecuaciones se pueden describir como soluciones del SOPDE (Γ_1, Γ_2) verificando

$$i_{\Gamma_1}\Omega_L^1 + i_{\Gamma_2}\Omega_L^2 = dL$$

Ejemplo 7.9 Consideremos el fibrado trivial $\pi\colon E = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Las soluciones $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de la ecuación de Laplace

$$\partial_{11}\phi + \partial_{22}\phi + \partial_{33}\phi = 0$$

se pueden describir como soluciones del SOPDE $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3)$ verificando

$$i_{\Gamma_1}\Omega_L^1 + i_{\Gamma_2}\Omega_L^2 + i_{\Gamma_3}\Omega_L^3 = 2dL$$

donde $L : J^1\pi \to \mathbb{R}$ es el siguiente lagrangiano regular

$$L(t^1, t^2, t^3, q, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}((u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2)\,.$$

Ejemplo 7.10 La ecuación del campo escalar ϕ (por ejemplo el campo gravitacional) el cual actúa en el espacio-tiempo de dimensión 4 es, véase [49],

$$(\Box + m^2)\phi = F'(\phi) \tag{7.13}$$

donde m es la masa de la partícula sobre la cual actúa el campo, F es una función escalar tal que $F(\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ es la energía potencial de una partícula de masa m, y $\Box$ es el operador de Laplace-Beltrami definido por

$$\Box\phi := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial t^\alpha}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial t^\beta})\,,$$

siendo $(g_{\alpha\beta})$ un tensor métrico pseudo-riemanniano en el espacio-tiempo 4-dimensional de signatura $(- + ++)$.

Ahora consideramos el fibrado trivial $\pi : E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, con coordenadas $(t^1, \dots t^4, q)$ en E, y $(t^1, \dots, t^4, q, u_1, \dots, u_4)$ las coordenadas inducidas en $J^1\pi$.

En este ejemplo el lagrangiano $L : J^1\pi \to \mathbb{R}$, regular, es

$$L(t^1, \dots, t^4, q, u_1, \dots, u_4) = \sqrt{-g}(F(q) - \frac{1}{2}m^2q^2 + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta),$$

y es regular.

Supongamos que $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ es un campo de 4-vectores integrable en $J^1\pi$ solución de las ecuaciones (7.11), esto es

$$dt^\alpha(X_\beta) = \delta^\alpha_\beta \ , \quad i_{X_1}\Omega^1_L + i_{X_2}\Omega^2_L + i_{X_3}\Omega^3_L + i_{X_4}\Omega^4_L = 3dL \tag{7.14}$$

De (7.14) deducimos

$$X_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q},$$

lo que es equivalente a

$$X_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}u_\beta) = \frac{\partial L}{\partial q} = \sqrt{-g}(F'(q) - m^2q) \, .$$

Como L es regular, entoces $\mathbf{X}$ es un SOPDE, y si $j^1\phi$ es una sección integral de $\mathbf{X}$, entonces

$$(j^1\phi)_*(t) \left(\left. \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \right|_t \right) (\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}u_\beta) = \sqrt{-g}(F'(\phi(t)) - m^2\phi(t))$$

que puede ser escrito como

$$0 = \sqrt{-g}\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(g^{\alpha\beta}\frac{\partial \phi}{\partial t^\beta} \right) - \sqrt{-g}(F'(\phi) - m^2\psi)$$

y entonces obtenemos que ϕ es solución de la ecuación del campo escalar (7.13).

Observación 7.11 Algunos casos particulares de la ecuación de campo escalar (7.13) son:

(1) si $F = 0$, obtenemos la ecuación de campo escalar lineal.

(2) Si $F(q) = m^2q^2$, obtenemos la ecuación de Klein-Gordon, véase [45],

$$(\Box + m^2)\phi = 0\,.$$

Los ejemplos anteriores fueron descritos en [81], utilizando el formalismo lagrangiano k-simpléctico (Ejemplos 7.8 y 7.9) y el formalismo lagrangiano k-cosimpléctico (Ejemplo 7.10).

7.3. Relación con el formalismo k-cosimpléctico

En esta sección mostraremos las diferencias entre las correspondientes formas de Poincaré-Cartan en este nuevo formalismo y las formas de Poincaré-Cartan del formalismo k-cosimpléctico.

A lo largo de esta sección consideraremos el fibrado trivial $E = \mathbb{R}^k \times Q \to \mathbb{R}^k$. En este caso, la variedad $J^1\pi$ del fibrado trivial $\pi : \mathbb{R}^k \times Q \to \mathbb{R}^k$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$, donde T^1_kQ denota una vez más la suma de Whitney de k copias de TQ.

Recordemos que el difeomorfismo está definido como sigue

$$\begin{array}{rcl} J^1\pi & \to & \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \\ j^1_t\phi = j^1_t(Id_{\mathbb{R}^k}, \phi_Q) & \to & (t, u_1, \ldots, u_k) \end{array}$$

donde $\phi_Q : \mathbb{R}^k \stackrel{\phi}{\to} \mathbb{R}^k \times Q \stackrel{\pi_Q}{\to} Q$, y

$$u_\alpha = (\phi_Q)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right), \quad 1 \leq \alpha \leq k\,.$$

Ahora recordemos el formalismo k-cosimpléctico lagrangiano, comenzando con los elementos geométricos necesarios

- El campo de vectores de Liouville Δ en $\mathbb{R}^k \times T^1_kQ$ es el generador infinitesimal del siguiente flujo

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k \times T^1_kQ) & \to & \mathbb{R}^k \times T^1_kQ \\ (s, (t, v_{1_q}, \cdots, v_{k_q})) & \to & (t, e^s v_{1_q}, \cdots, e^s v_{k_q}) \end{array}$$

  y en coordenadas locales es de la forma $\Delta = u^A_\alpha \dfrac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\,.$

- El campo de vectores canónico $\Delta^\alpha_\beta\,,\ 1\leq\alpha,\beta\leq k$, es el campo de vectores en $\mathbb{R}^k\times T^1_kQ$ definido por

$$\Delta^\alpha_\beta(t,u_{1_q},\dots,u_{k_q})=\frac{d}{ds}\Big|_0\Big(t,u_{1_q},\dots,u_{\alpha-1_q},u_{\alpha_q}+su_{\beta_q},u_{\alpha+1_q},\dots,u_{k_q}\Big)$$

con expresión local $\Delta^\alpha_\beta=u^A_\beta\dfrac{\partial}{\partial u^A_\alpha}$. Observemos que $\Delta=\Delta^\alpha_\alpha$.

- Para un lagrangiano $L:\mathbb{R}^k\times T^1_kQ\to\mathbb{R}$, la *función energía* está definida como $E_L=\Delta(L)-L$ y su expresión local es

$$E_L=u^A_\alpha\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}-L\,. \tag{7.15}$$

- Recordemos que la estructura canónica k-tangente en T^1_kQ es la familia $\{J^1,\dots,J^k\}$ de campos de tensores dados localmente por

$$J_\alpha=\frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\otimes dq^A\,.$$

La *extensión natural* J^α de los campos de tensores J^α en T^1_kQ a $\mathbb{R}^k\times T^1_kQ$ será denotado por $\widetilde{J}^\alpha$, y tiene la misma expresión local.

- Las 1-formas de Poincaré-Cartan introducidas en [65] son

$$\theta^\alpha_L=dL\circ\widetilde{J}^\alpha\quad 1\leq\alpha\leq k\,,$$

y su expresión local es

$$\theta^\alpha_L=\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\,dq^A\,. \tag{7.16}$$

Las correspondientes 2-formas de Poincaré-Cartan son $\omega^\alpha_L=-d\theta^\alpha_L$. De (7.1) y (7.16) deducimos que la relación entre las 1-formas de Poincaré-Cartan Θ^α_L y θ^α_L está dada por la siguiente ecuación

$$\Theta^\alpha_L=\theta^\alpha_L+\big(\delta^\alpha_\beta L-\Delta^\alpha_\beta(L)\big)\,dt^\beta. \tag{7.17}$$

Como consecuencia de (7.17), las soluciones $(X_1,\dots,X_k)$ de nuestras ecuaciones geométricas

$$dt^\alpha(X_\beta)=\delta^\alpha_\beta\quad,\quad i_{X_\alpha}\Omega^\alpha_L=(k-1)dL$$

coinciden con las soluciones de las ecuaciones de campo k-cosimplécticas

$$
\begin{aligned}
dt^\alpha(X_\beta) &= \delta^\alpha_\beta, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq k\,,\\
i_{X_\alpha}\omega^\alpha_L &= dE_L + \frac{\partial L}{\partial t^\alpha} dt^\alpha\,.
\end{aligned}
$$

introducidas en [65], y también las correspondientes secciones integrales, si existen.

7.4. Derivaciones de Tulczyjew

En esta sección se dará una nueva interpretación de las ecuaciones de Euler-Lagrange, utilizando la noción de f-derivación establecida en (6.1), la cual es una generalización de las derivaciones de Tulczyjew introducidas en [102, 103], para el caso $k = 1$.

Dado el fibrado $\pi_1 \colon J^1\pi \to \mathbb{R}^k$, y las correspondientes proyecciones canónicas

$$
\begin{tikzcd}
 & J^1\pi_1 \arrow[dl, "(\pi_1)_{1,0}"'] \arrow[dd, "(\pi_1)_1"] \\
J^1\pi \arrow[dr, "\pi_1"'] & \\
 & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

consideramos el campo de vectores canónico $\mathbf{T}^{(0)}_\alpha$ en $J^1\pi$ a lo largo de la proyección $(\pi_1)_{1,0}$

$$
\begin{tikzcd}
 & T(J^1\pi) \arrow[d, "\tau_{J^1\pi}"] \\
J^1\pi_1 \arrow[ur, "\mathbf{T}^{(0)}_\alpha"] \arrow[r, "(\pi_1)_{1,0}"'] & J^1\pi
\end{tikzcd}
$$

definido, como en (6.7), por

$$
\mathbf{T}^{(0)}_\alpha(j^1_t\Psi) = \Psi_*(t)\Big(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\Big) \in T_{\Psi(t)}J^1\pi\,.
$$

Su expresión local es

$$
\mathbf{T}^{(0)}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \circ (\pi_1)_{1,0} + u^A_{,\alpha}\frac{\partial}{\partial q^A} \circ (\pi_1)_{1,0} + u^A_{\beta,\alpha}\frac{\partial}{\partial u^A_\beta} \circ (\pi_1)_{1,0}\,. \tag{7.18}
$$

Como $\mathbf{T}_\alpha^{(0)}$ es un campo de vectores a lo largo de $(\pi_1)_{1,0}$, podemos determinar la $(\pi_1)_{1,0}$-derivación

$$i_{\mathbf{T}_\alpha^{(0)}} : \Lambda^p(J^1\pi) \to \Lambda^{p-1}(J^1\pi_1)$$

definida en (6.1). En el caso $p = 2$

$$\begin{array}{rcccl} i_{\mathbf{T}_\alpha^{(0)}} & : & \Lambda^2(J^1\pi) & \to & \Lambda^1(J^1\pi_1) \\ & & \Omega_L^\alpha & \to & i_{\mathbf{T}_\alpha^{(0)}}\Omega_L^\alpha \end{array}$$

su expresión es

$$(i_{\mathbf{T}_\alpha^{(0)}}\Omega_L^\alpha)(j_t^1\Psi)\left(Z_{j_t^1\Psi}\right) = \Omega_L^\alpha(\Psi(t))\left(\mathbf{T}_\alpha^{(0)}(j_t^1\Psi), ((\pi_1)_{1,0})_*(j_t^1\psi)Z_{j_t^1\Psi}\right),$$

donde $j_t^1\Psi \in J^1\pi_1$ y $Z_{j_t^1\Psi} \in T_{j_t^1\psi}(J^1\pi_1)$.

El siguiente teorema nos proporciona una nueva versión geométrica de las ecuaciones de Euler-Lagrange

Teorema 7.12 *Sea $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to E$ una sección de π tal que*

$$\left(i_{\mathbf{T}_\alpha^{(0)}}\Omega_L^\alpha\right) \circ j^1(j^1\phi) = (k-1)\left[((\pi_1)_{1,0})^*\, dL\right] \circ j^1(j^1\phi) \tag{7.19}$$

entonces ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5).

Demostración:

Es un cálculo directo utilizando las expresiones locales (7.3) y (7.18), de Ω_L^α y $\mathbf{T}_\alpha^{(0)}$, respectivamente.

Aplicando ambos lados de la ecuación (7.19) a los campos de vectores coordenados de $J^1\pi_1$ se obtiene

$$\begin{aligned} &(i_{T_\alpha^{(0)}}\Omega_L^\alpha) \circ j_t^1(j^1\phi) = (k-1)dL(j_t^1\phi) \\ &+ \left(\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial^2 L}{\partial t^\alpha \partial u_\alpha^A} - u_\alpha^B(j_t^1\phi)\frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial u_\alpha^A} - u_{\alpha\beta}^B(j_t^1(j^1\phi))\frac{\partial^2 L}{\partial u_\beta^B u_\alpha^A}\right)\delta q^A(j_t^1\phi)\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si ϕ es una solución de (7.19) entonces ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5).

□

La relación entre los dos enfoques geométricos descritos anteriormente (Teorema 7.6 y Teorema 7.12) se establece en la siguiente proposición.

Proposición 7.13 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *un* SOPDE *integrable solución de (7.11). Si* ϕ *es una solución de* $\mathbf{\Gamma}$ *entonces* ϕ *es solución de (7.19).*

Demostración:

Sea ϕ cualquier solución de Γ y sea $z = j^1_t(j^1\phi)$, entonces

$$(\pi_1)_{1,0}(z) = (\pi_1)_{1,0}(j^1_t(j^1\phi)) = j^1_t\phi.$$

De la definición de $\mathbf{T}^{(0)}_\alpha$ y como $j^1\phi$ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ entonces

$$\Gamma_\alpha(j^1_t\phi) = (j^1\phi)_*(t)\left(\left.\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right|_t\right) = \mathbf{T}^{(0)}_\alpha(z)\,. \tag{7.20}$$

Sea Y_z un vector tangente a $J^1\pi_1$. De (7.20) obtenemos

$$\left[(\pi_1)^*_{1,0}(i_{X_\alpha}\Omega^\alpha_L)\right](z)Y_z = (i_{\mathbf{T}^{(0)}_\alpha}\Omega^\alpha_L)(z)Y_z\,. \tag{7.21}$$

Ahora, de (7.11) sabemos que

$$(\pi_1)^*_{1,0}(i_{X_\alpha}\Omega^\alpha_L) = (\pi_1)^*_{1,0}[(k-1)dL], \tag{7.22}$$

y entonces, de (7.21) y (7.22), deducimos (7.19).

□

Describimos ahora las ecuaciones de Maxwell utilizando el Teorema 7.12.

7.4.1. Ejemplo: campo electromagnético en vacío: las ecuaciones de Maxwell

Consideramos la formulación de las ecuaciones de Maxwell en dimensión 4. Para ello, consideramos el espacio de Minkowski de la Relatividad Especial. Como el tiempo es una coordenada más a tener en cuenta junto con las coordenadas espaciales, el espacio-tiempo es una variedad M^4 de dimensión 4 que es topológicamente $\mathbb{R}^4$.

Un punto en el espacio-tiempo tiene como coordenadas (t, x, y, z), la coordenada temporal t y las coordenadas espaciales x, y, z. Escribiremos estas coordenadas como (t^0, t^1, t^2, t^3).

Este espacio nos permite considerar la métrica de Minkowski, donde el tensor métrico podemos escribirlo como

$$ds^2 = d(t^1)^2 + d(t^2)^2 + d(t^3)^2 - d(t^0)^2$$

donde, por simplicidad, hemos asumido que la velocidad de la luz $c = 1$.

Las ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{J} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ es el campo eléctrico, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ es el campo magnético, ρ es el vector densidad de carga, y $\mathbf{J} = (j_1, j_2, j_3)$ es el vector densidad de corriente eléctrica.

Consideramos el fibrado $\pi\colon \wedge^1 \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, donde $\wedge^1\mathbb{R}^4$ denota el conjunto de 1-formas en $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{tikzcd}
& J^1\pi \arrow[dl, "\pi_{1,0}"'] \arrow[dd, "\pi_1"] \\
\wedge^1\mathbb{R}^4 \arrow[dr, "\pi"] & \\
& \mathbb{R}^4 \arrow[ul, bend left, "A"]
\end{tikzcd}$$

Cada sección A de π se escribe como

$$A(t) = \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha(t) dt^\alpha(t) \in T_t^*\mathbb{R}^4$$

donde $A_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Las coordenadas del 1-jet $j_t^1 A$ en $J^1\pi$ son

$$t^\alpha(j_t^1 A) = t^\alpha(t) = t^\alpha\,, \quad q^\alpha(j_t^1 A) = A_\alpha(t), \quad u_\beta^\alpha(j_t^1 A) = \left.\frac{\partial A_\alpha}{\partial t^\beta}\right|_t,$$

donde $\alpha, \beta = \{0, \dots, 3\}$.

Sea $L\colon J^1\pi \to \mathbb{R}$ el lagrangiano definido por

$$L(t^\alpha, q^\beta, u^\alpha_\beta) = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta=1}^{3}\Big((u^1_\beta - u^\beta_1)^2 - (u^0_\beta - u^\beta_0)^2\Big) + (u^3_2 - u^2_3)^2\right) - j_\beta q^\beta \tag{7.23}$$

donde $j_0 = \rho$ es la densidad de carga y (j_1, j_2, j_3) es el vector densidad eléctrica. Por lo tanto, si calculamos las derivadas parciales obtenemos

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial t^\alpha} = 0\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial q^\beta} = -j^\beta\,, \\ \frac{\partial L}{\partial u^\alpha_\beta} = \begin{cases} -(u^\alpha_\beta - u^\beta_\alpha) & si \quad \alpha = 0 \ \text{ ó } \ \beta = 0\,, \\ \ \ (u^\alpha_\beta - u^\beta_\alpha) & si \quad \alpha \neq 0 \ \text{ y } \ \beta \neq 0\,, \end{cases} \end{gathered} \tag{7.24}$$

entonces, en particular tenemos $\dfrac{\partial L}{\partial u^\alpha_\alpha} = 0$, de donde se deduce que la matriz $\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial u^\alpha_\beta \partial u^\gamma_\sigma}\right)$ es singular, es decir, el lagrangiano no es regular.

Supongamos que $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es una sección de π, solución de (7.19), es decir, se verifica

$$\left(i_{T^{(0)}_0}\Omega^0_L + i_{T^{(0)}_1}\Omega^1_L + i_{T^{(0)}_2}\Omega^2_L + i_{T^{(0)}_3}\Omega^3_L\right) \circ j^1(j^1 A) = 3(\pi_1)^*_{1,0} dL \circ j^1(j^1 A)\,. \tag{7.25}$$

y por lo tanto A es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_{\alpha,\beta,\sigma=0}^{3} \frac{\partial^2 A_\sigma}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t \frac{\partial^2 L}{\partial u^\sigma_\beta u^\gamma_\alpha}\Big|_{j^1_t A} + j_\gamma = 0\,, \tag{7.26}$$

donde $\gamma = 0, 1, 2, 3$.

De (7.24) y(7.26) se deduce que

$$\partial_\alpha(\partial_\alpha A_0 - \partial_0 A_\alpha) \ = \ \rho \tag{7.27}$$

$$\partial_0(\partial_1 A_0 - \partial_0 A_1) - \partial_2(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) + \partial_3(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) \ = \ -j_1 \tag{7.28}$$

$$\partial_0(\partial_2 A_0 - \partial_0 A_2) + \partial_1(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) - \partial_3(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \ = \ -j_2 \tag{7.29}$$

$$\partial_0(\partial_3 A_0 - \partial_0 A_3) - \partial_1(\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) + \partial_2(\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \ = \ -j_3 \tag{7.30}$$

Definiendo E_α y B_α como sigue

$$E_\alpha = \partial_\alpha A_0 - \partial_0 A_\alpha \,, \tag{7.31}$$

$$B_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \,, \quad B_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \,, \quad B_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \,. \tag{7.32}$$

obtendremos que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son soluciones de las ecuaciones de Maxwell.

Por un lado, de (7.27) y (7.31) obtenemos

$$\rho = \partial_\alpha(\partial_\alpha A_0 - \partial_0 A_\alpha) = \partial_\alpha(E_\alpha) = \nabla \cdot \mathbf{E} \,.$$

Por otro lado, y de manera análoga, de (7.28),(7.29), (7.30), (7.31) y (7.32) se sigue que,

$$\begin{aligned}
\partial_0 E_1 - \partial_2 B_3 + \partial_3 B_2 &= -j_1 \,, \\
\partial_0 E_2 + \partial_1 B_3 - \partial_3 B_1 &= -j_2 \,, \\
\partial_0 E_3 - \partial_1 B_2 + \partial_2 B_1 &= -j_3 \,,
\end{aligned}$$

o lo que que es equivalente

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \,.$$

Por lo tanto, hemos obtenido las ecuaciones no homogéneas de Maxwell.

Ahora, por un cálculo directo utilizando la definición del campo magnético (7.32) obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= \partial_1 B_1 + \partial_2 B_3 + \partial_3 B_3 \\
&= \partial_{12} A_3 - \partial_{13} A_2 + \partial_{23} A_2 - \partial_{21} A_3 + \partial_{31} A_2 - \partial_{32} A_2 = 0 \,.
\end{aligned}$$

Finalmente, de (7.31) y (7.32), obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_0 B_1,\, -\partial_1 E_3 + \partial_3 E_1 + \partial_0 B_2,\, \partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_0 B_3) \\
&= (\partial_{23} A_0 - \partial_{20} A_3 - \partial_{32} A_0 + \partial_{30} A_2 + \partial_{02} A_3 - \partial_{03} A_2, \\
&\quad -\partial_{13} A_0 + \partial_{10} A_3 + \partial_{31} A_0 - \partial_{30} A_1 + \partial_{03} A_1 - \partial_{01} A_3, \\
&\quad \partial_{12} A_0 - \partial_{10} A_2 - \partial_{21} A_0 + \partial_{20} A_1 + \partial_{01} A_2 - \partial_{02} A_1) \\
&= 0 \,,
\end{aligned}$$

es decir, hemos comprobado que la solución A de (7.25) nos proporciona la solución de las ecuaciones homogéneas de Maxwell.

Capítulo 8

Simetrías y leyes de conservación

En este capítulo se caracterizan, en primer lugar, las leyes de conservación en términos de los campos de k-vectores lagrangianos.

Se introducen las simetrías generalizadas a las que se asocia una ley de conservación (Teorema de Noether).

Se estudian las simetrías variacionales, introducida por Olver en [86] y su relación con las generalizadas.

Se finaliza describiendo la relación de las simetrías generalizadas con las simetrías de Noether, introducidas en [70] cuando consideramos que E es un fibrado trivial.

8.1. Leyes de conservación

El conjunto de campos de k-vectores $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_k)$ que son solución de las ecuaciones (7.11), es decir,

$$dt^\alpha(X_\beta) = \delta^\alpha_\beta, \quad i_{X_\alpha}\Omega^\alpha_L = (k-1)dL$$

se denotará por $\mathfrak{X}^k_L(J^1\pi)$ y se denominarán campos de k-vectores lagrangianos.

Como consecuencia de las Proposiciones 7.2 y 7.5 tenemos que

Lema 8.1 *Sea* $\mathbf{\Gamma}$ *un* SOPDE *integrable. Entonces*

$$\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(J^1\pi) \Leftrightarrow \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = dL \Leftrightarrow \Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0\,. \tag{8.1}$$

$\square$

Definición 8.2 *Una* ley de conservación *o una* cantidad conservada,*para las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5), es una aplicación $G = (G^1, \ldots, G^k)\colon J^1\pi \to \mathbb{R}^k$ tal que la divergencia de la función*

$$G \circ j^1\phi = (G^1 \circ j^1\phi, \ldots, G^k \circ j^1\phi)\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

es cero, para toda sección $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to E$ que es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5). Es decir, que para todo $t \in U \subset \mathbb{R}^k$ se verifica

$$0 = [Div(G \circ j^1\phi)](t) = \frac{\partial(G^\alpha \circ j^1\phi)}{\partial t^\alpha}\Big|_t = j^1\phi_*(t)\Big(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\Big)(G^\alpha) = T_\alpha^{(1)}(j^2_t\phi)(G^\alpha).$$

Caracterizaremos a continuación las leyes de conservación en término de SOPDEs en $\mathfrak{X}^k_L(J^1\pi)$.

Proposición 8.3 *La aplicación $G = (G^1, \ldots, G^k)\colon J^1\pi \to \mathbb{R}^k$ define una ley de conservación, si y sólo, si para todo* SOPDE *lagrangiano e integrable $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k) \in \mathfrak{X}^k_L(J^1\pi)$ se verifica que*

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} G^\alpha = 0.$$

Demostración:

Sea $j^1_t\phi$ un punto arbitrario de $J^1\pi$. Como $\mathbf{\Gamma}$ es un SOPDE integrable, denotemos por $j^1\psi$ la sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ pasando por el punto $j^1_t\phi$, lo que significa

$$j^1\psi(0) = j^1_0\psi = j^1_t\phi, \quad \Gamma_\alpha(j^1_t\psi) = (j^1\psi)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right), \quad t \in \mathrm{Dom}\,\psi\,.$$

Como $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{X}^k_L(J^1\pi)$, y ψ es una sección integral de $\mathbf{\Gamma}$ entonces ψ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5). Como $G = (G^1, \ldots, G^k)$ es una ley de conservación, entonces por hipótesis

$$\frac{\partial(G^\alpha \circ j^1\psi)}{\partial t^\alpha}\Big|_0 = 0,$$

y por lo tanto deducimos

$$\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} G^\alpha(j^1_t\phi) = \Gamma_\alpha(j^1_0\psi)(G^\alpha) = (j^1\psi)_*(0)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_0\right)(G^\alpha) = \frac{\partial(G^\alpha \circ j^1\psi)}{\partial t^\alpha}\Big|_0 = 0.$$

Recíprocamente, debemos probar que

$$\frac{\partial(G^\alpha \circ j^1\phi)}{\partial t^\alpha}\Big|_t = 0,$$

para todas las secciones $\phi : W \subset \mathbb{R}^k \to E$, las cuales son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5).

Como $j^1\phi\Big|_W : W \subset \mathbb{R}^k \to J^1\pi$ es una inmersión inyectiva ($j^1\phi$ es una sección y entonces su imagen es una subvariedad embebida), se puede definir el SOPDE $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ en $j^1\phi(W)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha(j^1_t\phi) &= (j^1\phi)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right) = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + \frac{\partial \phi^A}{\partial t^\alpha}\Big|_t \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} + \frac{\partial^2\phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}\Big|_{j^1_x\phi} \\
&= \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + u^A_\alpha(j^1_t\phi)\frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} + \frac{\partial^2\phi^A}{\partial t^\alpha \partial t^\beta}\Big|_t \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}\Big|_{j^1_x\phi}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $j^1\phi$ es una sección integral del SOPDE Γ, que es integrable en $j^1\phi(W)$.

A continuación probaremos que $\Gamma \in \mathfrak{X}^k_L(j^1\phi(W))$. Un cálculo directo muestra que

$$\left(\Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\right)\Big|_{j^1\phi(W)} = 0$$

Ahora, como Γ es un SOPDE integrable, de la Proposiciones 7.2 y 7.5 deducimos que Γ es una solución de las ecuaciones (7.11), y entonces $\Gamma \in \mathfrak{X}^k_L(j^1\phi(W))$.

Las siguientes identidades concluyen la demostración:

$$\frac{\partial(G^\alpha \circ j^1\phi)}{\partial t^\alpha}\Big|_t = (j^1\phi)_*(t)\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t\right)(G^\alpha) = \Gamma_\alpha(j^1_t\phi)(G^\alpha) = \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}G^\alpha(j^1_t\phi) = 0.$$

□

8.2. Formas de Euler-Lagrange y de Poincaré-Cartan: formas asociadas

La siguiente definición de levantamiento de formas será útil en lo que sigue.

Definición 8.4 *Sea $\pi : B \to M$ un fibrado diferenciable. Denotamos el módulo de p-forma π-semibásicas en B por $\Lambda^p_\pi(B)$.*

Cada $\alpha \in \Lambda^p_\pi(B)$ define una p-forma α^V a lo largo de π, $\alpha^V \in \Lambda^p(\pi)$,

$$\begin{tikzcd} & (T^*M)^p \arrow[d, "\pi_M"] \\ B \arrow[ur, "\alpha^V"] \arrow[r, "\pi"] & M \end{tikzcd}$$

como sigue

$$\alpha^V(b)(v_{1\pi(b)}, \ldots, v_{p\pi(b)}) = \alpha(b)(w_{1b}, \ldots, w_{pb}), b \in B \tag{8.2}$$

donde $v_{i\pi(b)} \in T_{\pi(b)}M$ y $w_{ib} \in T_bB$ son tales que $\pi_*(b)w_{ib} = v_{i\pi(b)}$, para cada $i = 1, \ldots, p$.

Así hemos definido una aplicación

$$\alpha \in \Lambda^p_\pi(B) \longrightarrow \alpha^V \in \Lambda^p(\pi)\,. \tag{8.3}$$

$\boxed{\text{Forma de Euler-Lagrange y forma asociada}}$

Definición 8.5 *La forma de Euler-Lagrange δL es la 1-forma en $J^2\pi$ definida por*

$$\delta L = d_{T^{(1)}_\alpha}\Theta^\alpha_L - \pi^*_{2,1}dL\,,$$

De (7.1) se deduce que su expresión local es

$$\delta L = \left(T^{(1)}_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\circ\pi_{2,1}\right)(dq^A - u^A_\beta dt^\beta).$$

Esta forma es una forma $\pi_{2,0}$-semibásica, y utilizando (8.3)

$$\delta L \in \Lambda^1_{\pi_{2,0}}(J^2\pi) \longrightarrow (\delta L)^V \in \Lambda^1(\pi_{2,0})\,,$$

definimos su forma asociada $(\delta L)^V$, a lo largo de $\pi_{2,0}$,

$$\begin{tikzcd} & T^*E \arrow[d, "\pi_E"] \\ J^2\pi \arrow[ur, "(\delta L)^V"] \arrow[r, "\pi_{2,0}"] & E \end{tikzcd}$$

cuya expresión local es

$$(\delta L)^V = \left(T_\alpha^{(1)}(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}) - \frac{\partial L}{\partial q^A} \circ \pi_{2,1} \right) (dq^A \circ \pi_{2,0} - u_\beta^A dt^\beta \circ \pi_{2,0}) \,, \tag{8.4}$$

es decir

$$(\delta L)^V(j_t^2\phi) = \left(T_\alpha^{(1)}(j_t^2\phi)(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}) - \frac{\partial L}{\partial q^A}(j_t^1\phi) \right) (dq^A(\phi(t)) - u_\beta^A(j_t^2\phi)dt^\beta(\phi(t))) \,.$$

$\boxed{\text{Formas de Poincaré-Cartan y formas asociadas}}$

Las 1-formas Θ_L^α son 1-formas $\pi_{1,0}$-semibásicas, utilizando (8.3) tenemos

$$\Theta_L^\alpha \in \Lambda^1_{\pi_{1,0}}(J^1\pi) \longrightarrow (\Theta_L^\alpha)^V \in \Lambda^1(\pi_{1,0}) \,,$$

sus formas asociadas $(\Theta_L^\alpha)^V$

$$\begin{tikzcd} & T^*E \arrow[d, "\pi_E"] \\ J^1\pi \arrow[ur, "(\Theta_L^\alpha)^V"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"'] & E \end{tikzcd}$$

a lo largo de $\pi_{1,0}$.

Su expresión local es

$$(\Theta_L^\alpha)^V = (L\delta_\beta^\alpha - \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A} u_\beta^A)\, dt^\beta \circ \pi_{1,0} + \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\, dq^A \circ \pi_{1,0} \,, \tag{8.5}$$

es decir

$$(\Theta_L^\alpha)^V(j_t^1\phi) = (L\delta_\beta^\alpha - \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A} u_\beta^A)(j_t^1\phi)\, dt^\beta(\phi(t)) + \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}(j_t^1\phi)\, dq^A(\phi(t))$$

Observación 8.6

(1) Recordemos que, como $T_\alpha^{(1)} \in \mathfrak{X}(\pi_{2,1})$, para cada función $G \in C^\infty(J^2\pi)$, la aplicación

$$d_{T_\alpha^{(1)}} G \colon J^2\pi \longrightarrow \mathbb{R}$$

está definida por

$$d_{T_\alpha^{(1)}} G(j_t^2\phi) = T_\alpha^{(1)}(j_t^2\phi)(G) \,.$$

(2) Si X es un campo de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$. entonces:

a) La función
$$(\delta L)^V(X \circ \pi_{2,1}) : J^2\pi \longrightarrow \mathbb{R}$$
está definida por
$$\left[(\delta L)^V(X \circ \pi_{2,1})\right](j^2_t\phi) = (\delta L)^V(j^2_t\phi)(X(j^1_t\phi))\,.$$

b) La función
$$\left[(\Theta^\alpha_L)^V(X)\right] : J^2\pi \longrightarrow \mathbb{R}$$
está definida por
$$\left[(\Theta^\alpha_L)^V(X)\right](j^1_t\phi) = (\Theta^\alpha_L)^V(j^1_t\phi)(X(j^1_t\phi))\,.$$

c) La función
$$d_{X^{(1)}}L \colon J^2\pi \longrightarrow \mathbb{R}$$
está definida por
$$d_{X^{(1)}}L(j^2_t\phi) = X^{(1)}(j^2_t\phi)(L)\,.$$

Teniendo en cuenta la observación anterior enunciamos el siguiente lema que será útil en el estudio de simetrías generalizadas.

Lema 8.7 *Sea X un campo de vectores π-vertical a lo largo de $\pi_{1,0}$. Se verifica*

(1) *Si existen funciones $G^\alpha : J^1\pi \to \mathbb{R}$, $\alpha = 1, \ldots, k$, tales que*
$$(d_{T^{(1)}_\alpha}G^\alpha) \circ j^2\phi = -[(\delta L)^V(X \circ \pi_{2,1})] \circ j^2\phi \tag{8.6}$$
para toda solución ϕ de las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces $(G^1, \ldots, G^k)$ es una ley de conservación.

(2) *Se verifica*
$$d_{X^{(1)}}L = -(\delta L)^V(X \circ \pi_{2,1}) + d_{T^{(1)}_\alpha}\left[(\Theta^\alpha_L)^V(X)\right]\,. \tag{8.7}$$

Demostración:

(1) De (6.7) deducimos

$$d_{T_\alpha^{(1)}} G^\alpha(j_t^2\phi) = \frac{\partial(G^\alpha \circ j^1\phi)}{\partial t^\alpha}\Big|_t \tag{8.8}$$

para cualquier $j_t^2\phi \in J^2\pi$.

Como la expresión local de X es

$$X = X^A(x,q,v)\frac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{1,0}$$

entonces la expresión local de $X \circ \pi_{2,1}$ es

$$X \circ \pi_{2,1} = \left(X^A(x,q,v)\frac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{1,0}\right) \circ \pi_{2,1} = X^A(x,q,v) \circ \pi_{2,1}\, \frac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{2,0}\,.$$

De la expresión local anterior de $X \circ \pi_{2,1}$ y de la expresión local (8.4) de $(\delta L)^V$ obtenemos

$$-(\delta L)^V(X \circ \pi_{2,1})(j_t^2\phi) = -\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A} \circ j^1\phi\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j_t^1\phi}\right) X^A(j_t^1\phi) \tag{8.9}$$

Ahora, de (8.6), (8.8) y de (8.9), se deduce que si ϕ es una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrenge entonces

$$\frac{\partial(G^\alpha \circ j^1\phi)}{\partial t^\alpha}\Big|_t = 0\,.$$

(2) Utilizando las expresiones locales (8.4) y (8.5), de $(\delta L)^V$ y $(\Theta_L^\alpha)^V$, y las expresiones locales de X y de $X \circ \pi_{2,1}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
(\delta L)^V(X \circ \pi_{2,1}) &= \left(T_\alpha^{(1)}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} \circ \pi_{2,1}\right)(X^A \circ \pi_{2,1})\,, \\
d_{T_\alpha^{(1)}}[(\Theta_L^\alpha)^V(X)] &= d_{T_\alpha^{(1)}}[\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}X^A] = d_{T_\alpha^{(1)}}(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A})X^A + d_{T_\alpha^{(1)}}(X^A)\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& -(\delta L)^V(X \circ \pi_{2,1}) + d_{T_\alpha^{(1)}}[(\Theta_L^\alpha)^V(X)] \\
=\ & -T_\alpha^{(1)}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\right)X^A + X^A\frac{\partial L}{\partial q^A} + d_{T_\alpha^{(1)}}\left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\right)X^A + (d_{T_\alpha^{(1)}}X^A)\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A} \\
=\ & (X^A \circ \pi_{2,1})\frac{\partial L}{\partial q^A} \circ \pi_{2,1} + d_{T_\alpha^{(1)}}X^A\frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A} \circ \pi_{2,1}
\end{aligned}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las expresiones (6.15) y (6.16) obtenemos que este último término coincide con $d_{X^{(1)}}L$.

□

8.3. Simetrías generalizadas. Teorema de Noether

En esta sección, se introducen las simetrías generalizadas del lagrangiano, que consisten en transformaciones infinitesimales dependientes de las velocidades u^A_α, y se prueba el teorema de Noether el cual asocia a cada simetría una ley de conservación.

La siguiente proposición puede verse como la motivación de la condición (8.11) en la definición de simetría generalizada, y también es una generalización de la Proposición 3.15 en [92].

Proposición 8.8 *Sea X un campo de vectores π-vertical en E. Si existen funciones $(g^1,\dots,g^k) : E \to \mathbb{R}$ tales que*

$$X^1(L) = d_{T^{(0)}_\alpha} g^\alpha \tag{8.10}$$

entonces las funciones $(G^1,\dots,G^k)$, donde $G^\alpha = (\pi_{1,0})^* g^\alpha - \Theta^\alpha_L(X^1)$, definen una ley de conservación.

Demostración:

Si X se escribe localmente como

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A}$$

se deduce de (6.12) y (7.1), que localmente

$$G^\alpha = g^\alpha \circ \pi_{1,0} - (X^A \circ \pi_{1,0}) \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\,.$$

Entonces, teniendo en cuenta las ecuaciones (6.9) y (6.12), se deduce que para toda solución ϕ de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5) se verifica

$$\frac{\partial (G^\alpha \circ j^1\phi)}{\partial t^\alpha}\Big|_t = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_t \left(g^\alpha \circ \phi - (X^A \circ \phi)\, (\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha} \circ j^1\phi)\right) = [d_{T^{(0)}_\alpha} g^\alpha - X^1(L)](j^1_t\phi) = 0\,,$$

por lo tanto, $(G^1,\dots,G^k)$ define una ley de conservación.

□

Algunas clases de simetrías dependen sólo de las variables (coordenadas) en E. En esta sección consideramos transformaciones infinitesimales dependientes de las variables u_α^A. Estas transformaciones se pueden interpretar como campos de vectores X a lo largo de $\pi_{1,0}$.

La siguiente definición está establecida en [16] para el fibrado $\pi\colon \mathbb{R}\times Q \to Q$; y está motivada por la Proposición 8.8.

Definición 8.9 *Un campo de vectores X a lo largo de $\pi_{1,0}$, y π-vertical, se llama simetría generalizada si existe una aplicación $(F^1,\dots,F^k)\colon J^1\pi \to \mathbb{R}^k$ tal que*

$$d_{X^{(1)}} L(j_t^2\phi) = d_{T_\alpha^{(1)}} F^\alpha(j_t^2\phi) \tag{8.11}$$

para toda solución ϕ de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La siguiente versión del Teorema de Noether asocia a cada *simetría generalizada*, en el sentido dado anteriormente, una ley de conservación.

Teorema 8.10 *Sea X una simetría generalizada entonces la aplicación*

$$G = (G^1,\dots,G^k)\colon J^1\pi \to \mathbb{R}^k$$

donde

$$G^\alpha = F^\alpha - (\Theta_L^\alpha)^V(X)$$

define una ley de conservación.

Demostración:

Sea X una simetría generalizada, entonces de (8.7) y de (8.6) obtenemos que

$$\begin{aligned} d_{T_\alpha^{(1)}} G^\alpha &= d_{T_\alpha^{(1)}}\left[F^\alpha - (\Theta_L^\alpha)^V(X)\right] = d_{T_\alpha^{(1)}} F^\alpha - d_{T_\alpha^{(1)}}\left((\Theta_L^\alpha)^V(X)\right) \\ &= d_{X^{(1)}} L - d_{T_\alpha^{(1)}}\left((\Theta_L^\alpha)^V(X)\right) = -(\delta L)^V(X\circ \pi_{2,1}) \end{aligned}$$

y del Lema 8.7 deducimos que las funciones $G^\alpha = F^\alpha - (\Theta_L^\alpha)^V(X)$ definen una ley de conservación.

□

Ejemplo 8.11 Consideremos la ecuación de ondas 2-dimensional homogénea e isótropa.

$$\partial_{11}\phi - c^2\partial_{22}\phi - c^2\partial_{33}\phi = 0, \tag{8.12}$$

donde $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una solución, y define una sección del fibrado trivial $\pi\colon E = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

La ecuación (8.12) es la ecuación de Euler-Lagrange para el lagrangiano $L\colon \mathbb{R}^3 \times T^1_3\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(t, q, u) = \frac{1}{2}\left((u_1)^2 - c^2(u_2)^2 - c^2(u_3)^2\right).$$

El campo de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$ y π-vertical

$$X = u_1\frac{\partial}{\partial q} \circ \pi_{1,0}$$

es una simetría generalizada pues existen las funciones

$$F^1(u_1, u_2, u_3) = -c^2(u_2)^2 - c^2(u_3)^2, \;\; F^2(u_1, u_2, u_3) = c^2u_1u_2, \;\; F^3(u_1, u_2, u_3) = c^2u_1u_3\,.$$

en $J^1\pi$ verificando (8.11). Entonces, por el Teorema 8.10, deducimos que las siguientes funciones

$$\begin{array}{rcccl} G^1 &=& F^1 - (\Theta^1_L)^V(X) &=& -c^2(u_2)^2 - c^2(u_3)^2 - (u_1)^2 \\ G^2 &=& F^2 - (\Theta^2_L)^V(X) &=& 2c^2u_1u_2 \\ G^3 &=& F^3 - (\Theta^3_L)^V(X) &=& 2c^2u_1u_3 \end{array}$$

definen una ley de conservación.

8.4. Simetrías variacionales

En esta sección recordamos la definición y algunos resultados de las simetrías variacionales de las ecuaciones de Euler-Lagrange que pueden verse en el libro de Olver [86]; para ello consideraremos el fibrado trivial $\pi : E = \mathbb{R}^k \times Q \to \mathbb{R}^k$.

Recordemos que las soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange (7.5) se pueden describir como los extremales del funcional

$$\mathcal{L}(\phi) = \int_{\Omega_0} (L \circ j^1\phi)(t)d^kt\,,$$

donde $d^kt = dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k$ es la forma de volumen en $\mathbb{R}^k$. A grosso modo, una simetría variacional es un difeomorfismo que deja inalterado la integral variacional $\mathcal{L}$.

Definición 8.12 **(1)** *Una simetría variacional es un difeomorfismo $\Phi\colon E = \mathbb{R}^k \times Q \to E = \mathbb{R}^k \times Q$ verificando las siguientes condiciones:*

i) Φ induce un difeomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ tal que $\pi \circ \Phi = \varphi \circ \pi$, es decir, preserva las fibras del fibrado $\pi\colon E \to \mathbb{R}^k$.

ii) Si $\tilde{t} = \varphi(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}^k$

$$\int_{\tilde{\Omega}} (L \circ j^1(\Phi \circ \phi \circ \varphi^{-1}))(\tilde{t})d^k\tilde{t} = \int_{\Omega} (L \circ j^1\phi)(t)d^kt$$

donde $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$.

(2) *Una simetría variacional infinitesimal es un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times Q)$ cuyos flujos locales son simetrías variacionales.*

El siguiente resultado puede verse en el Teorema 4.12 y en el Corolario 4.30 del libro [86] .

Teorema 8.13 *i) Un campo de vectores X en $\mathbb{R}^k \times Q$ es una simetría variacional si y sólo si*

$$X^1(L) + L\, d_{T_\alpha^{(0)}} X_\alpha = 0\,,$$

donde $X_\alpha = dx^\alpha(X)$.

ii) Si X es una simetría variacional entonces $(\Theta_L^1(X^1), \ldots, \Theta_L^k(X^1))$ define una ley de conservación.

Ejemplo 8.14 Consideremos otra vez la ecuación de ondas 2-dimensional homogénea e isótropa, véase la ecuación (8.12).

El campo de vectores

$$X = -t^3 \frac{\partial}{\partial t^2} + t^2 \frac{\partial}{\partial t^3}$$

es una simetría variacional, y entonces la correspondiente ley de conservación

$$(\Theta_L^1(X^1), \Theta_L^2(X^1), \Theta_L^3(X^1))$$

es

$$\left(xt^3 u_1 u_2 - t^2 u_1 u_3,\ -\frac{1}{2} t^3\, w + t^2 u_2 u_3,\ -\frac{1}{2} t^2\, w - u_3 u_2 t^3 \right)$$

donde $w = (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2$.

Ejemplo 8.15 Consideremos $Q = \mathbb{R}$, y sea

$$0 = \left(1 + (\partial_2\phi)^2\right) \partial_{11}\phi - 2\partial_1\phi\, \partial_2\phi\, \partial_{12}\phi + \left(1 + (\partial_1\phi)^2\right) \partial_{22}\phi$$

la ecuación de superficies minimales, que es la ecuación de Euler-Lagrange para el lagrangiano $L\colon \mathbb{R}^2 \times T^1_2\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(t^1, t^2, q, u_1, u_2) = \sqrt{1 + (u_1)^2 + (u_2)^2}\,.$$

El campo de vectores

$$X = -q\frac{\partial}{\partial t^1} - q\frac{\partial}{\partial t^2} + (t^1 + t^2)\frac{\partial}{\partial q}$$

es una simetría variacional, y por lo tanto la correspondiente ley de conservación

$$(\Theta^1_L(X^1), \Theta^2_L(X^1))$$

es

$$\left(\frac{-q(1 + (u_2)^2 - u_1 u_2) + (t^1 + t^2) u_1}{\sqrt{1 + (u_1)^2 + (u_2)^2}}, \frac{-q(1 + (u_1)^2 - u_1 u_2) + (t^1 + t^2) u_2}{\sqrt{1 + (u_1)^2 + (u_2)^2}} \right)$$

A continuación describiremos algunas relaciones entre las simetrías anteriores.

Teorema 8.16 *i) Si X es una simetría variacional y π-vertical, entonces el campo de vectores $X \circ \pi_{1,0}$, a lo largo de $\pi_{1,0}$, es una simetría generalizada.*

ii) Las leyes de conservación inducidas por X y $X \circ \pi_{1,0}$ coinciden.

Demostración:

i) Como X es una simetría variacional y π-vertical, entonces localmente

$$X = X^A(t, q)\frac{\partial}{\partial q^A}\,,$$

y por el Teorema 8.13 obtenemos que $X^1(L) = 0$.

De (6.17) sabemos que $(X \circ \pi_{1,0})^{(1)} = X^1 \circ \pi_{2,1}$ y por lo tanto,

$$d_{(X\circ\pi_{1,0})^{(1)}} L(j^2_t\phi) = (X \circ \pi_{1,0})^{(1)}(j^2_t\phi)(L) = X^1(j^1_t\phi)(L) = 0\,, \tag{8.13}$$

es decir, $X \circ \pi_{1,0}$ es una simetría generalizada.

ii) Teniendo en cuenta los Teoremas 8.10 y 8.13, el resultado es consecuencia de $\Theta^\alpha_L(X^1) = (\Theta^\alpha_L)^V(X \circ \pi_{1,0})$ y de (8.13).

□

8.4.1. Simetrías de Noether

En [70] se ha introducido la siguiente definición:

Definición 8.17 *Un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^k \times T^1_kQ)$ es una simetría infinitesimal de Noether si*

$$\mathcal{L}_Y\omega^\alpha_L = 0, \quad i_Y dt^\alpha = 0, \quad \mathcal{L}_Y E_L = 0.$$

Teorema 8.18 *Sea X un campo de vectores π-vertical en $\mathbb{R}^k \times Q$ tal que X^1 es una simetría de Noether infinitesimal, entonces $X = X \circ \pi_{1,0}$ es una simetría generalizada.*

Demostración:

Utilizando las ecuaciones (6.12), (7.15), entonces de la expresión local

$$X = X^A \frac{\partial}{\partial q^A}$$

y de la condición

$$\mathcal{L}_{X^1}E_L = 0$$

deducimos que

$$(X^A \circ \pi_{1,0})\frac{\partial L}{\partial q^A} = u^A_\alpha X^1\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right)\,. \tag{8.14}$$

De la condición $\mathcal{L}_{X^1}\omega_L^\alpha = 0$ se obtiene que $d(\mathcal{L}_{X^1}\theta_L^\alpha) = 0$ y por lo tanto existen funciones (localmente definidas) $F^\alpha \colon U \subset \mathbb{R}^k \times T_k^1 Q \to \mathbb{R}$ tales que

$$\mathcal{L}_{X^1}\theta_L^\alpha = dF^\alpha \quad 1 \leq \alpha \leq k\,.$$

Desarrollando esta identidad, obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial t^\beta} = \dfrac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\dfrac{\partial X^A}{\partial t^\beta} \circ \pi_{1,0} & \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial q^B} = \dfrac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\dfrac{\partial X^A}{\partial q^B} \circ \pi_{1,0} - X^1\left(\dfrac{\partial L}{\partial u_\alpha^B}\right) \\ \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial u_\beta^B} = \dfrac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\dfrac{\partial X^A}{\partial u_\beta^B} \circ \pi_{1,0} = 0 & \end{array} \tag{8.15}$$

De (6.17), (8.14) y (8.15), se deduce que

$$\begin{aligned} d_{(X\circ\pi_{1,0})^{(1)}} L(j_t^2\phi) &= X^A(\phi(x))\dfrac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j_t^1\phi} + \left(\dfrac{\partial X^A}{\partial t^\alpha}\Big|_{\phi(t)} + u_\alpha^B(j_t^1\phi)\dfrac{\partial X^A}{\partial q^B}\Big|_{j_t^1\phi}\right)\dfrac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\Big|_{j_t^1\phi} \\ &= X^A(\phi(t))\dfrac{\partial L}{\partial q^A}\Big|_{j_t^1\phi} + \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial t^\alpha}\Big|_{j_t^1\phi} \\ &\quad + u_\alpha^B(j_t^1\phi)\left(\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial q^B}\Big|_{j_t^1\phi} + X^1(j_t^1\phi)\left(\dfrac{\partial L}{\partial u_\alpha^B}\right)\right) \\ &= \dfrac{\partial F^\alpha}{\partial t^\alpha}\Big|_{j_t^1\phi} + u^B\alpha(j_t^1\phi)\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial q^B}\Big|_{j_t^1\phi} = d_{T_\alpha^{(1)}}F^\alpha(j_t^2\phi) \end{aligned}$$

para cualquier $j_t^2\phi$.

Esto demuestra que $X \circ \pi_{1,0}$ es una simetría generalizada.

$\square$

Capítulo 9

Derivaciones: introducción al problema inverso

En [73, 74], se estudian las formas a lo largo del fibrado $TM \to M$, en particular se estudian derivaciones del álgebra de las formas a lo largo del fibrado $TM \to M$, y se aporta una clasificación y caracterización de dichas derivaciones, para lo cual es necesario disponer de una conexión en TM.

Estos trabajos motivaron el estudio para el caso dependiente del tiempo, es decir para el fibrado $\mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R} \times M$, véase [96], del mismo modo que en el caso autónomo para la clasificación de las derivaciones es fundamental utilizar una conexión en $\mathbb{R} \times TM$.

Una de las aplicaciones de las teorías desarrolladas en estos trabajos, [73], [74] y [96] es establecer el problema inverso de la Mecánica lagrangiana.

El objetivo de este capítulo es menos ambicioso que el de los trabajos citados anteriormente, de manera análoga a [96] se pretende dar un punto de partida para estudiar el problema inverso en teoría clásica de campos, sin embargo no se pretenderá clasificar las derivaciones de las formas a lo largo de $\pi_{1,0}$.

9.1. Conexiones no lineales en $\pi_{1,0}\colon J^1\pi \to E$

Recordemos que una conexión de Erhesmann o conexión no lineal en $\pi_{1,0}$, véase la Sección 3.1.1 para un fibrado cualquiera $p\colon E \to B$, es un subfibrado diferenciable $H(J^1\pi)$ de $T(J^1\pi)$, llamado el subfibrado horizontal de la conexión, el cual es complementario al subfibrado vertical $V(J^1\pi)$, es decir, $T(J^1\pi) = H(J^1\pi) \oplus V(J^1\pi)$.

Consideremos la sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V(\pi_{1,0}) \arrow[r, "\mathbf{i}"] \arrow[dr] & T(J^1\pi) \arrow[r, "\mathbf{j}"] \arrow[d] & J^1\pi \times_E TE \arrow[r] \arrow[dl] & 0 \\
& & J^1\pi & &
\end{tikzcd}$$

donde $\mathbf{i}$ es la inclusión y $\mathbf{j}$ está definida por

$$\mathbf{j}(Z_{j^1_t\phi}) = (j^1_t\phi, (\pi_{1,0})_*(j^1_t\phi)Z_{j^1_t\phi}) = \left(j^1_t\phi, Z^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{\pi_{1,0}(j^1_t\phi)} + Z^A \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\pi_{1,0}(j^1_t\phi)} \right)$$

donde

$$Z_{j^1_t\phi} = Z^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + Z^A \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} + Z^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} .$$

Una escisión por la derecha

$$\gamma : J^1\pi \times_E TE \longrightarrow T(J^1\pi)$$

de la sucesión exacta corta se llama *aplicación horizontal para* $\pi_{1,0}$. Esta aplicación es un morfismo de fibrados vectoriales (cuyo morfismo sobre la base es $Id_{J^1\pi}$) verificando

$$\mathbf{j} \circ \gamma = Id_{J^1\pi \times_E TE} .$$

Su expresión local es

$$\gamma(j^1_t\phi, X_{\phi(t)}) = X^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + X^A \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} - (X^\alpha N^B_{\alpha\beta} + X^A N^B_{A\beta}) \frac{\partial}{\partial u^B_\beta}\Big|_{j^1_t\phi} \tag{9.1}$$

donde $X^\alpha, X^A \in C^\infty(E)$ puesto que $X \in \mathfrak{X}(E)$ y las funciones $N^B_{\beta\alpha}$, $N^B_{A\beta} \in C^\infty(J^1\pi)$ se llaman componentes de la conexión definidos por γ.

A cada aplicación horizontal γ se le asocia un proyector horizontal y uno vertical del siguiente modo:

(1) *El proyector horizontal* está definido por

$$\mathbf{h} := \gamma \circ \mathbf{j} : T(J^1\pi) \to T(J^1\pi) ,$$

y su expresión local es

$$\mathbf{h} = \left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha} - N^B_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u^B_\beta} \right) \otimes dt^\alpha + \left(\frac{\partial}{\partial q^A} - N^B_{A\beta} \frac{\partial}{\partial u^B_\beta} \right) \otimes dq^A . \tag{9.2}$$

(2) *El proyector vertical* está definido por

$$\mathbf{v} := Id_{T(J^1\pi)} - \mathbf{h}$$

y su expresión local es

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial u^B_\beta} \otimes (du^B_\beta + N^B_{\beta\alpha} dt^\alpha + N^B_{\beta A} dq^A) . \tag{9.3}$$

Entonces el espacio tangente a $J^1\pi$ se descompone en suma directa del fibrado horizontal y del fibrado vertical

$$T(J^1\pi) = Im\, \mathbf{h} \oplus Im\, \mathbf{v} = H(J^1\pi) \oplus V(J^1\pi) .$$

9.1.1. Conexiones no lineales asociadas a un SOPDE

En esta sección mostraremos que cada SOPDE induce una conexión no lineal.

Sea $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$ un SOPDE entonces definimos la conexión no lineal asociada a $\mathbf{\Gamma}$ como la conexión cuyo proyector horizontal es el siguiente:

$$\mathbf{h}_\Gamma = \frac{1}{k+1} \left(\mathrm{Id} + k\ \Gamma_\alpha \otimes dt^\alpha - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha} S^\alpha \right) . \tag{9.4}$$

Si la expresión local del SOPDE es

$$\Gamma_\alpha = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A} + \Gamma^A_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, \quad 1 \le \alpha \le k$$

entonces las componentes de la conexión definidas por Γ son

$$N^B_{A\beta} = -\frac{1}{k+1} \frac{\partial \Gamma^B_{\alpha\beta}}{\partial u^A_\alpha} , \quad N^B_{\beta\alpha} = -\Gamma^B_{\beta\alpha} - u^A_\alpha N^B_{A\beta} \tag{9.5}$$

En este caso, la distribución horizontal $H(J^1\pi) = Im\,\mathbf{h}$, de dimesión $n+k$, está localmente generada por los campos

$$\Gamma_\alpha, \quad \frac{\delta}{\delta q^A} = \frac{\partial}{\partial q^A} - N^B_{\alpha A}\frac{\partial}{\partial u^B_\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq k, \quad 1 \leq A \leq n\,.$$

Por lo tanto, una base, adaptada a la descomposición $TJ^1\pi = H \oplus V$ es

$$\left\{\Gamma_\alpha, \frac{\delta}{\delta q^A}, \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}\right\},$$

siendo su base dual

$$\{dt^\alpha, \delta q^A, \delta u^A_\alpha\}$$

donde $\delta q^A = dq^A - v^A_\alpha dt^\alpha$ son las 1-formas de contacto y

$$\delta u^A_\alpha = du^A_\alpha + N^A_{\alpha B} dq^B + N^A_{\alpha\beta} dt^\beta = du^A_\alpha + N^A_{\alpha B}\delta q^B - \Gamma^A_{\alpha\beta} dt^\beta$$

Con respecto a esta base adaptada, los proyectores horizontal y vertical tienen la siguiente expresión local

$$\mathbf{h}_\Gamma = \Gamma_\alpha \otimes dt^\alpha + \frac{\delta}{\delta q^A} \otimes \delta q^A, \quad \mathbf{v}_\Gamma = \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} \otimes \delta u^A_\alpha\,.$$

9.2. Prolongaciones y derivaciones a lo largo de $\pi_{1,0}$

El objetivo principal de esta sección es el estudio de campos de vectores y 1-formas a lo largo de la proyección $\pi_{1,0}$, y desarrollar el cálculo de sus prolongaciones o derivaciones, véase [96] para el caso de la proyección $\mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R} \times M$.

Por un lado, introduciremos las prolongaciones verticales y horizontales de campos de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$ a campos de vectores en $J^1\pi$, estas prolongaciones serán construidas por linealidad a partir de las definiciones de levantamientos vertical y horizontal de campos de vectores en E.

Por otro lado, para el caso de las 1-formas a lo largo de $\pi_{1,0}$, se definirán las derivaciones vertical y horizontal en $\Lambda(\pi_{1,0})$, los levantamientos horizontal y vertical a $\Lambda(J^1\pi)$, así como su levantamiento a 1-formas a lo largo de la proyección $\pi_{2,1}$.

Finalmente, se define la derivada covariante ∇_α de 1-formas a lo largo de $\pi_{1,0}$ para cada $\alpha \in \{1,\dots,k\}$, para la cual es necesario considerar un SOPDE $\mathbf{\Gamma}$.

9.2.1. Prolongaciones verticales de campos de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$

A continuación introduciremos los levantamientos verticales X^{V_α} de campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$.

Si X es un campo de vectores básico, es decir $X = Y \circ \pi_{1,0}$ con $Y \in \mathfrak{X}(E)$, se define su levantamiento vertical como

$$(Y \circ \pi_{1,0})^{V_\alpha}(j_t^1\phi) = S^\alpha(j_t^1\phi)(Y^1(j_t^1\phi)) .$$

Esta definición se extiende por linealidad a todo campo de vectores de $\mathfrak{X}(\pi_{1,0})$.

Si $X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ tiene expresión local

$$X = X^\alpha(t,q,u)\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \circ \pi_{1,0} + X^A(t,q,u)\frac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{1,0} \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$$

el levantamiento α-ésimo $X^{V_\alpha} \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ es

$$X^{V_\alpha} = (X^A - u^A_\beta X^\beta)\frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} . \tag{9.6}$$

Observemos que se verifica

$$(T^{(0)}_\alpha)^{V_\beta} = 0 , \quad \left(\frac{\partial}{\partial t^\beta}\right)^{V_\alpha} = -u^A_\beta \frac{\partial}{\partial q^A}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial q^A}\right)^{V_\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha}.$$

Denotaremos por $\bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0})$ las clases de equivalencia de campos de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$, módulo $T^{(0)}_\alpha$, esto es

$$\bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0}) = \{\bar{X} \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0}) \, : \, i_{\bar{X}} dt^\alpha = 0\} .$$

Por lo tanto, si $\bar{X} \in \bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0})$ entonces su expresión local es

$$\bar{X} = X^A(t,q,u)\frac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{1,0} .$$

Observación 9.1 *Todo campo de vectores vertical en $J^1\pi$ se corresponde con una k-tupla de elementos de $\bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0})$. En efecto, si $Z \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ es un campo de vectores vertical en $J^1\pi$ entonces tiene expresión local*

$$Z = Z^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha},$$

si definimos $\bar{Y}_\alpha = Z^A_\alpha \dfrac{\partial}{\partial q^A} \circ \pi_{1,0}$ *para todo* $\alpha \in 1, \ldots, k$, *entonces* $\bar{Y}_\alpha \in \bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0})$ *y además*

$$\sum_{\alpha=1}^{k} (\bar{Y}_\alpha)^{V_\alpha} = (Z^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^a} \circ \pi_{1,0})^{V_\alpha} = Z^A_\alpha \frac{\partial}{\partial u^A_\alpha} = Z\,.$$

9.2.2. Derivaciones verticales en $\Lambda(\pi_{1,0})$

Toda derivación está completamente determinada por su acción en funciones y 1-formas básicas, véase [96] para el caso $k = 1$.

Definición 9.2 *Para cada* $\alpha = 1, \ldots, k$, *se define la derivación*

$$d^{V_\alpha} \colon \Lambda(\pi_{1,0}) \to \Lambda(\pi_{1,0})$$

del siguiente modo:

i) Si $F \in C^\infty(J^1\pi)$ *se definen las 1-formas* $d^{V_\alpha} F$ *a lo largo de* $\pi_{1,0}$

$$\begin{tikzcd} & T^*E \arrow[d, "\pi_E"] \\ J^1\pi \arrow[ur, "d^{V_\alpha} F"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"'] & E \end{tikzcd}$$

por

$$d^{V_\alpha} F(j^1_x\phi)(X(j^1_x\phi)) = X^{V_\alpha}(j^1_x\phi)(F), \tag{9.7}$$

donde $X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$.

ii) La derivación d^{V_α} *se anula en 1-formas básicas, es decir*

$$d^{V_\alpha}(dt^\alpha \circ \pi_{1,0}) = d^{V_\alpha}(dq^A \circ \pi_{1,0}) = 0\,.$$

Utilizando la base local $\{dt^\alpha \circ \pi_{1,0},\ \delta q^A \circ \pi_{1,0}\}$ de las formas a lo largo de $\pi_{1,0}$, se obtienen las siguientes expresiones locales

$$d^{V_\alpha} F = \frac{\partial F}{\partial u^A_\alpha} \delta q^A \circ \pi_{1,0}\,, \quad d^{V_\alpha}(dt^\beta) = 0\,, \quad d^{V_\alpha}(\delta q^A) = (dt^\alpha \wedge \delta q^A) \circ \pi_{1,0} \tag{9.8}$$

donde estamos usando la notación

$$\delta q^A \circ \pi_{1,0} = dq^A \circ \pi_{1,0} - u^A_\beta\, dt^\beta \circ \pi_{1,0}\,.$$

9.2.3. Prolongaciones horizontales de campos de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$

En esta sección introduciremos el concepto de prolongación horizontal de un campo de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$ extendiendo la definición de prolongación horizontal de un campo de vectores en E, el cual se define mediante la aplicación horizontal de una conexión como veremos a continuación.

Dado un campo de vectores X en E con expresión local

$$X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial t^\alpha} + X^A \frac{\partial}{\partial q^A}\,,$$

el *levantamiento horizontal* de X es el campo de vectores X^H en $J^1\pi$, definido por

$$X^H(j^1_t\phi) = \gamma\left(j^1_t\phi, X_{\phi(t)}\right)$$

y su expresión local es (9.1).

Por lo tanto, se deduce que los levantamientos horizontales de los campos de vectores coordenados están dados por

$$H_\alpha = (\frac{\partial}{\partial t^\alpha})^H = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} - N^B_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^B_\beta} \quad , \quad H_A = (\frac{\partial}{\partial q^A})^H = \frac{\partial}{\partial q^A} - N^B_{A\beta}\frac{\partial}{\partial u^B_\beta} \tag{9.9}$$

La construcción del levantamiento horizontal se extiende trivialmente a $\mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ por linealidad. Dado un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ se define su levantamiento horizontal $X^H \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ como

$$X^H(j^1_t\phi) = \gamma\left(j^1_t\phi, X^\alpha(j^1_t\phi)\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{\phi(t)} + X^A(j^1_t\phi)\frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{\phi(t)}\right)\,,$$

y de (9.1) se deduce que su expresión local es

$$X^H(j^1_t\phi) = X^\alpha(j^1_t\phi)\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + X^A(j^1_t\phi)\frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} - (X^\alpha(j^1_t\phi)N^B_{\alpha\beta} + X^A(j^1_t\phi)N^B_{A\beta})\frac{\partial}{\partial u^B_\beta}\Big|_{j^1_t\phi}$$

donde $X = X^\alpha \dfrac{\partial}{\partial t^\alpha}\circ\pi_{1,0} + X^A\dfrac{\partial}{\partial q^A}\circ\pi_{1,0}$.

Para el campo de vectores

$$T^{(0)}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\circ\pi_{1,0} + u^A_\alpha\frac{\partial}{\partial q^A}\circ\pi_{1,0}$$

obtenemos que su prolongación horizontal es la siguiente

$$(T_\alpha^{(0)})^H = \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big|_{j^1_t\phi} + u^A_\alpha \frac{\partial}{\partial q^A}\Big|_{j^1_t\phi} - (N^B_{\alpha\beta} + u^A_\alpha\, N^B_{A\beta})\frac{\partial}{\partial u^B_\beta}\Big|_{j^1_t\phi}. \tag{9.10}$$

Observemos además que las prolongaciones horizontales de los campos de vectores coordenados son:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\circ\pi_{1,0}\right)^H = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} - N^A_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^A_\beta}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial q^A}\circ\pi_{1,0}\right)^H = \frac{\partial}{\partial t^A} - N^B_{A\beta}\frac{\partial}{\partial u^B_\beta}. \tag{9.11}$$

Observación 9.3 La prolongación horizontal de campos de vectores en $\mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ a campos de vectores en $\mathfrak{X}(J^1\pi)$ junto con los levantamientos verticales (9.6) de campos de vectores a lo largo de $\pi_{1,0}$ nos permite establecer una descomposición de campos de vectores en $J^1\pi$. Cada $Z \in \mathfrak{X}(J^1\pi)$ puede ser escrito como

$$Z = X^H + (\bar{Y}_\alpha)^{V_\alpha} \tag{9.12}$$

donde $X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0})$ y $\bar{Y}_\alpha \in \bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0})$ para todo $\alpha = 1,\dots,k$.

9.2.4. Derivada exterior horizontal en $\Lambda(\pi_{1,0})$

A continuación definimos la derivada exterior horizontal d^H en $\Lambda(\pi_{1,0})$, asociada a una conexión dada.

Definición 9.4 *La derivación*

$$d^H\colon \Lambda(\pi_{1,0}) \to \Lambda(\pi_{1,0})$$

se define como:

i) Si $F \in C^\infty(J^1\pi)$ entonces la 1-forma $d^H F$ a lo largo de $\pi_{1,0}$

$$\begin{tikzcd} & T^*E \arrow[d, "\pi_E"] \\ J^1\pi \arrow[ur, "d^H F"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"'] & E \end{tikzcd}$$

se define como

$$d^H F(X) = X^H(F)\,, \quad X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0}) \tag{9.13}$$

ii) En las 1-formas básicas la derivada d^H coincide con la derivada exterior ordinaria.

Haciendo un cálculo en coordenadas, de (9.9), (9.11) y (9.13) deducimos que

$$\begin{aligned} d^H F &= H_\alpha(F)dt^\alpha \circ \pi_{1,0} + H_A(F)dq^A \circ \pi_{1,0} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t^\alpha} - N^B_{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial u^B_\beta}\right) dt^\alpha \circ \pi_{1,0} + \left(\frac{\partial F}{\partial q^A} - N^B_{A\beta}\frac{\partial F}{\partial u^B_\beta}\right) dq^A \circ \pi_{1,0} \end{aligned}$$

Si utilizamos la base local $\{dt^\alpha \circ \pi_{1,0}, \delta q^A \circ \pi_{1,0}\}$, para describir formas a lo largo de $\pi_{1,0}$ entonces d^H está determinado completamente por

$$\begin{aligned} d^H F &= H_A(F)\delta q^A \circ \pi_{1,0} + (T^{(0)}_\alpha)^H(F)dt^\alpha \circ \pi_{1,0},, \\ d^H(dt^\alpha \circ \pi_{1,0}) &= 0, \\ d^H(\delta q^A \circ \pi_{1,0}) &= \big(N^A_{B\alpha}\delta q^B \circ \pi_{1,0} + (N^A_{\beta\alpha} + u^B_\beta N^A_{B\alpha})dt^\beta \circ \pi_{1,0}\big) \wedge dt^\alpha \circ \pi_{1,0}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

9.2.5. Levantamientos vertical y horizontal de 1-formas en $\Lambda^1(\pi_{1,0})$ a $\Lambda^1(J^1\pi)$

Teniendo en cuenta la descomposición (9.12), podemos introducir dos tipos de levantamientos de 1-formas en $\Lambda^1(\pi_{1,0})$ a $\Lambda^1(J^1\pi)$ como sigue:

Definición 9.5 *i) Para cada $\alpha = 1, \ldots, k$ definimos el levantamiento vertical α-ésimo ω^{V_α} de una 1-forma ω a lo largo de $\pi_{1,0}$*

$$\begin{aligned} \Lambda^1(\pi_{1,0}) &\to \Lambda^1(J^1\pi) \\ \omega &\mapsto \omega^{V_\alpha} \end{aligned}$$

como la 1-forma en $J^1\pi$ caracterizada por:

$$\begin{aligned} \omega^{V_\alpha}(X^H) &= 0\,, & \forall \alpha \in \{1,\ldots,k\}\,, X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0}) \\ \omega^{V_\alpha}(\bar{X}^{V_\beta}) &= \delta^\alpha_\beta \omega(\bar{X})\,, & \forall \alpha,\beta \in \{1,\ldots,k\}\,, \bar{X} \in \bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0}) \end{aligned}$$

ii) Del mismo modo, definimos el levantamiento horizontal ω^H

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1(\pi_{1,0}) & \to & \Lambda^1(J^1\pi) \\ \omega & \mapsto & \omega^H \end{array}$$

de ω *como la* 1*-forma en* $J^1\pi$ *que satisface:*

$$\begin{array}{rcl} \omega^H(X^H) & = & \omega(X)\,, \quad X \in \mathfrak{X}(\pi_{1,0}) \\ \omega^H(\bar{X}^{V_\alpha}) & = & 0\,, \qquad \forall \alpha \in \{1,\dots,k\}\,, \bar{X} \in \bar{\mathfrak{X}}(\pi_{1,0}) \end{array}$$

Por un cálculo directo obtenemos las expresiones locales del α-ésimo levantamiento vertical de ω

$$\omega^{V_\alpha} = N^B_{\beta\alpha}\omega^B dt^\beta + N^B_{A\alpha}\omega^B dq^A + \omega^A du^A_\alpha\,, \tag{9.15}$$

y del levantamiento horizontal ω^H:

$$\omega^H(t,q,u) = \omega_\alpha(t,q,u)dt^\alpha + \omega_A(t,q,u)dq^A\,. \tag{9.16}$$

Observación 9.6 Observemos que

$$\omega^H \circ S^\alpha = 0, \quad \omega^{V_\beta} \circ S^\alpha = \delta^\alpha_\beta \omega_A \delta q^A$$

para todo $\alpha = 1,\dots,k$.

Usando las Definiciones 9.2 y 9.4 de las derivaciones d^{V_α} y d^H en funciones y los levantamientos horizontal y vertical de 1-formas (9.15) y (9.16) obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} (d^H F)^H & = & H_\alpha(F)dx^\alpha + H_A(F)dq^A\,, \\ (d^{V_\alpha} F)^{V_\beta} & = & N^B_{\gamma\beta}\dfrac{\partial F}{\partial u^B_\alpha}dt^\gamma + N^B_{A\beta}\dfrac{\partial F}{\partial u^B_\alpha}dq^A + \dfrac{\partial F}{\partial u^B_\alpha}du^B_\beta\,. \end{array}$$

Entonces, para $F \in C^\infty(J^1\pi)$ es sencillo comprobar que

$$dF = (d^H F)^H + (d^{V_\alpha} F)^{V_\alpha}\,. \tag{9.17}$$

9.2.6. Levantamientos de 1-formas de $\Lambda^1(\pi_{1,0})$ a $\Lambda^1(\pi_{2,1})$

A continuación definiremos, para cada $\alpha = 1, \ldots, k$, las prolongaciones naturales $\omega^{(\alpha)} \in \Lambda^1(\pi_{2,1})$ de formas $\omega \in \Lambda^1(\pi_{1,0})$,

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1(\pi_{1,0}) & \to & \Lambda^1(\pi_{2,1}) \\ \omega & \mapsto & \omega^{(\alpha)} \end{array}$$

Sea $\omega \in \Lambda^1(\pi_{1,0})$ una 1-forma a lo largo de $\pi_{1,0}$, con expresión local

$$\omega = \omega_\alpha dt^\alpha \circ \pi_{1,0} + \omega^A dq^A \circ \pi_{1,0}\,,$$

la función $\widehat{\omega}_\alpha = i_{T_\alpha^{(0)}}\omega \in C^\infty(J^1\pi)$ tiene la siguiente expresión local

$$\widehat{\omega}_\alpha = \omega_\alpha + u_\alpha^A \omega^A\,. \tag{9.18}$$

Se define la 1-forma $\widetilde{\omega} \in \Lambda^1(\pi_{1,0})$ como sigue

$$\widetilde{\omega} = \omega - i_{T_\alpha^{(0)}}\omega(\pi_1^*(dt^\alpha) \circ \pi_{1,0}) = \omega - i_{T_\alpha^{(0)}}\omega(dt^\alpha \circ \pi_{1,0})$$

cuya expresión local es

$$\widetilde{\omega} = \omega^A(\delta q^A \circ \pi_{1,0})\,. \tag{9.19}$$

Por lo tanto, para una 1-forma $\omega \in \Lambda^1(\pi_{1,0})$ obtenemos la siguiente descomposición

$$\omega = \widetilde{\omega} + \widehat{\omega}_\alpha dt^\alpha \circ \pi_{1,0}\,. \tag{9.20}$$

Observación 9.7 Se verifican las siguientes identidades

$$i_{T_\alpha^{(0)}}\widetilde{\omega} = 0$$

y

$$\omega^{V_\beta} \circ S^\alpha = \delta_\beta^\alpha \omega_A \delta q^A = \delta_\beta^\alpha \tilde{\omega}^H$$

para todo $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, k\}$. Estas igualdades se utilizarán para la demostración de la Proposición 9.10.

Definimos el levantamiento α-ésimo $\omega^{(\alpha)}$ como la 1-forma, a lo largo de $\pi_{2,1}$,

$$\begin{tikzcd} & T^*(J^1\pi) \arrow[d, "\pi_{J^1\pi}"] & T^*E \arrow[d, "\pi_E"] \\ J^2\pi \arrow[ur, "\omega^{(\alpha)}"] \arrow[r, "\pi_{2,1}"'] & J^1\pi \arrow[ur, "\omega"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"'] & E \end{tikzcd},$$

caracterizada por

$$\begin{aligned} \omega^{(\alpha)}(X^{(1)}) &= (\omega(X))^{\alpha} - (i_X dt^{\beta})^{(\alpha)}(\pi_{2,1})^*(\hat{\omega}_{\beta}) \\ \omega^{(\alpha)}(X^{V_{\beta}}) &= \delta^{\alpha}_{\beta}(\pi_{2,1})^*\widetilde{\omega}(X) \end{aligned} \tag{9.21}$$

entonces de las expresiones locales (6.14), (9.6), (9.18), y (9.19) de $X^{(1)}$, $X^{V_{\beta}}$, $\widehat{\omega}_{\beta}$ y $\widetilde{\omega}$ respectivamente y de (9.21) deducimos que la expresión local de $\omega^{(\alpha)} \in \Lambda(\pi_{2,1})$ es

$$\omega^{(\alpha)} = T^{(1)}_{\alpha}(\omega_{\beta})dt^{\beta} \circ \pi_{2,1} + T^{(1)}_{\alpha}(\omega_A)\delta q^A \circ \pi_{2,1} + (\pi^*_{2,1}\omega_A)(du^A_{\alpha} \circ \pi_{2,1} - u^A_{\alpha\beta}dt^{\beta} \circ \pi_{2,1})\,. \tag{9.22}$$

9.2.7. La derivada covariante ∇_{α}

Considerando un SOPDE Γ como una sección γ de un fibrado $\pi_{2,1}$ podemos definir para cada α

$$\begin{array}{rccc} I_{\Gamma_{\alpha}} & : & \Lambda^1(\pi_{1,0}) & \to & \Lambda^1(J^1\pi) \\ & & \omega & \to & \omega^{(\alpha)} \circ \gamma \end{array}$$

Si escribimos localmente

$$\omega = \omega_{\alpha}dt^{\alpha} \circ \pi_{1,0} + \omega_A \delta q^A \circ \pi_{1,0},$$

utilizando la expresión local (9.22) del levantamiento α-ésimo de una 1-forma ω a lo largo de $\pi_{1,0}$, tenemos

$$I_{\Gamma_{\alpha}}\omega = \Gamma_{\alpha}(\omega_{\beta})dt^{\beta} + \Gamma_{\alpha}(\omega_A)\delta q^A + \omega_A(du^A_{\alpha} - \Gamma^A_{\alpha\beta}dt^{\beta})\,. \tag{9.23}$$

Definición 9.8 *Para una 1-forma $\omega \in \Lambda^1(\pi_{1,0})$, la derivada covariante $\nabla_{\alpha}\omega \in \Lambda^1(\pi_{1,0})$*

$$\begin{tikzcd} & T^*E \arrow[d, "\pi_E"] \\ J^1\pi \arrow[ur, "\nabla_{\alpha}\omega"] \arrow[r, "\pi_{1,0}"'] & E \end{tikzcd}$$

se define como la 1-forma que verifica

$$I_{\Gamma_{\alpha}}\omega = (\nabla_{\alpha}\omega)^H + \omega^{V_{\alpha}}\,.$$

De la expresión (9.23) de $I_{\Gamma_\alpha}\omega$ y de las expresiones locales (9.15) y (9.16) de ω^{V_α} y ω^H respectivamente, se obtiene

$$(\nabla_\alpha\omega)^H = I_{\Gamma_\alpha}\omega - \omega^{V_\alpha} = \big(\Gamma_\alpha(\omega_\beta) - N^B_{\beta\alpha}\omega_B\big)\, dt^\beta + \big(\Gamma_\alpha(\omega_A) - N^B_{A\alpha}\omega_B\big)\, dq^A$$

entonces, de la definición de levantamiento horizontal de 1-formas a lo largo de $\pi_{1,0}$, obtenemos que la expresión local de $\nabla_\alpha\omega$ es

$$\nabla_\alpha\omega = \big(\Gamma_\alpha(\omega_\beta) - N^B_{\beta\alpha}\omega_B\big)\, dt^\beta \circ \pi_{1,0} + \big(\Gamma_\alpha(\omega_A) - N^B_{A\alpha}\omega_B\big)\, dq^A \circ \pi_{1,0}\,. \tag{9.24}$$

Se pueden probar directamente las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \frac{\partial}{\partial t^\beta} &= N^A_{\beta\alpha}\frac{\partial}{\partial q^A}\circ\pi_{1,0}\,,\\
\nabla_\alpha dt^\beta &= 0\,,\\
\nabla_\alpha \delta q^A &= u^A_\alpha N^B_{A\beta} dt^\beta \circ \pi_{1,0} - N^B_{A\alpha} dq^A \circ \pi_{1,0}\,,\\
\nabla dq^A &= -N^A_{\beta\alpha} dt^\beta \circ \pi_{1,0} - N^A_{B\alpha} dq^B \circ \pi_{1,0}\,.
\end{aligned}$$

Utilizando (9.15), (9.16) y (9.24), obtenemos que

$$L_{\Gamma_\alpha}\omega^H = \omega^{V_\alpha} + (\nabla_\alpha\omega)^H\,, \tag{9.25}$$

para todo $\omega \in \bigwedge^1(\pi_{1,0})$.

9.3. Problema inverso

Sea Γ un SOPDE integrable y consideremos el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{X}^*_\Gamma = \{\phi \in \Lambda^1(J^1\pi)\ :\ L_{\Gamma_\alpha}(\phi\circ S^\alpha) = \phi - \phi(\Gamma_\alpha)dt^\alpha\}\,.$$

Sea ϕ una 1-forma en $J^1\pi$ con expresión local

$$\phi = \phi_\alpha dt^\alpha + \phi^A dq^A + \phi^\alpha_A du^A_\alpha\,,$$

si $\phi \in \mathfrak{X}^*_\Gamma$, es decir, ϕ verifica $L_{\Gamma_\alpha}(\phi\circ S^\alpha) = \phi - \phi(\Gamma_\alpha)dt^\alpha$ entonces por un cálculo directo en coordenadas locales se obtiene que

$$\phi^A = \Gamma_\alpha(\phi^\alpha_A)\,. \tag{9.26}$$

En el caso $k = 1$, se verifica que $I_\Gamma(\Lambda^1(\pi_{1,0}) = \mathfrak{X}^*_\Gamma$, véase [96]. Para $k > 1$ este no será el caso, pero si obtenemos la siguiente inclusión:

$$I_{\Gamma_\alpha}(\Lambda^1(\pi_{1,0})) \subset \mathfrak{X}^*_\Gamma\,,$$

en efecto, sea ω una 1-forma a lo largo de $\pi_{1,0}$ entonces, teniendo en cuenta la expresión en coordenadas lo cales (9.23) de $I_{\Gamma_\alpha}\omega$ y la condición (9.26), se deduce que $I_{\Gamma_\alpha}\omega \in \mathfrak{X}^*_\Gamma$.

A continuación, utilizando el conjunto $\mathfrak{X}^*_\Gamma$ y la derivada covariante ∇_α de 1-formas a lo largo de $\pi_{1,0}$, estableceremos el problema inverso lagrangiano como sigue:

Teorema 9.9 *Sea Γ un* SOPDE *integrable. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) El SOPDE *Γ es lagrangiano (localmente).*

ii) Existen 1-formas semibásicas $\theta^\alpha \in \Lambda^1(J^1\pi)$ tal que las 1-formas $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha$ es (cerrada) exacta.

iii) Existe una 1-forma (cerrada) exacta $\phi \in \mathfrak{X}^*_\Gamma$.

Demostración:

$\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Esta implicación es directa por definición, ya que si Γ es un SOPDE lagrangiano se sigue que existe una función lagrangiana L tal que $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha = dL$, donde $\theta^\alpha = \Theta^\alpha_L$ son las 1-formas de Poincaré-Cartan.

$\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ Recíprocamente , supongamos que para un SOPDE integrable, existe una 1-forma semibásica $\theta^\alpha \in \Lambda^1(J^1\pi)$ y una función (definida localmente) L en $J^1\pi$ tal que $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha = dL$. Como θ^α son 1-formas semibásicas, estarán dadas por

$$\theta^\alpha = \theta^\alpha_\beta dt^\beta + \theta^\alpha_A \delta q^A.$$

Expresamos ambos lados de la igualdad $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha = dL$ con respecto a la base $\Gamma_\alpha, \delta q^A, du^A_\alpha$, lo que significa que

$$\Gamma_\alpha\left(\theta^\alpha_\beta\right)dt^\beta + \Gamma_\alpha\left(\theta^\alpha_A\right)\delta q^A + \theta^\alpha_A du^A_\alpha = \Gamma_\beta(L)dt^\beta + \frac{\partial L}{\partial q^A}\delta q^A + \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}du^A_\alpha.$$

La ecuación anterior es equivalente a las siguientes

$$\theta^\alpha_A = \frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}, \quad \Gamma_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial u^A_\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^A}, \quad \Gamma_\alpha\left(\theta^\alpha_\beta\right) = \Gamma_\alpha\left(L\delta^\alpha_\beta\right). \tag{9.27}$$

Entonces tenemos que

$$\theta^\alpha = \Theta^\alpha_L + \left(\theta^\alpha_\beta - L\delta^\alpha_\beta\right) dt^\beta, \tag{9.28}$$

y entonces $dL = \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha = \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L$, lo que muestra que Γ es un SOPDE lagrangiano.

$\boxed{i) \Rightarrow iii)}$ Sea Γ SOPDE lagrangiano, entonces existe una función $L \in C^\infty(J^1\pi)$ tal que $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\theta^\alpha_L = dL$.

Tomamos

$$\phi = dL \ , \tag{9.29}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(\phi \circ S^\alpha) - \phi - \phi(\Gamma_\beta)dt^\beta &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(dL \circ S^\alpha) - dL + \Gamma_\beta(L)dt^\beta \\ &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(\Theta^\alpha_L - Ldt^\alpha) - dL + \Gamma_\beta(L)dt^\beta \\ &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L - dL = 0 \end{aligned}$$

así que $\phi = dL \in \mathfrak{X}^*_\Gamma$ la cual es una 1-forma exacta.

$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ Recíprocamente, si $\phi \in \mathfrak{X}^*_\Gamma$ tal que ϕ es una 1-forma exacta, entonces existe L tal que

$$\phi = dL$$

y entonces $\phi \circ S^\beta = dL \circ S^\beta$. Como $\phi = L_{\Gamma_\alpha}(\phi \circ S^\alpha) + \phi(\Gamma_\beta)dt^\beta$, porque $\phi \in \mathfrak{X}^*_\Gamma$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(\phi \circ S^\alpha) - \phi + \phi(\Gamma_\beta)dt^\beta = \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(dL \circ S^\alpha) - dL + dL(\Gamma_\beta)dt^\beta \\ &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(dL \circ S^\alpha + Ldt^\alpha) - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(Ldt^\alpha) - dL + dL(\Gamma_\beta)dt^\beta \\ &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L - \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}(Ldt^\alpha) - dL + \Gamma_\beta(L)dt^\beta \\ &= \mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L - dL\,. \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{L}_{\Gamma_\alpha}\Theta^\alpha_L = dL$, así que Γ es un SOPDE lagrangiano.

□

Proposición 9.10 *Sea L una función regular en $C^\infty(J^1\pi)$. La función L es un lagrangiano para Γ si y sólo si*

$$\nabla_\alpha(\Theta^\alpha_L)^V = d^H L$$

donde $(\Theta_L^\alpha)^V$ *es la* 1*-forma a lo largo de* $\pi_{1,0}$ *asociado las* 1*-formas* $\pi_{1,0}$*-semi-básicas* Θ_L^α *dado por* (8.5)

$$(\Theta_L^\alpha)^V = (L\delta_\beta^\alpha - \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A} u_\beta^A)\, dt^\beta \circ \pi_{1,0} + \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A}\, dq^A \circ \pi_{1,0}\,.$$

Demostración:

Del Teorema 9.9, L es un lagrangiano para Γ si y sólo si

$$L_{\Gamma_\alpha}(dL \circ S^\alpha) = dL - \Gamma_\alpha(L) dt^\alpha\,.$$

Ahora, usando la descomposición (9.17) de una función en $J^1\pi$, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= L_{\Gamma_\alpha}((d^H L)^H \circ S^\alpha) + L_{\Gamma_\alpha}((d^{V_\beta} L)^{V_\beta} \circ S^\alpha) - (d^H L)^H - (d^{V_\beta} L)^{V_\beta} + \Gamma_\alpha(L) dt^\alpha \\ &= L_{\Gamma_\alpha}(\delta_\beta^\alpha (\widetilde{d^{V_\beta} L})^H) - (d^H L)^H - (d^{V_\beta} L)^{V_\beta} + \Gamma_\alpha(L) dt^\alpha \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $S^\alpha(\omega^H) = 0$ y $S^\alpha(\omega^{V_\beta}) = \delta_\beta^\alpha \widetilde{\omega}^H$, aquí $\widetilde{\omega}$ viene de la descomposición (9.20) de una 1-forma arbitraria ω a lo largo de $\pi_{1,0}$.

Para la 1-forma particular $d^{V_\beta} L$ es fácil probar que $d^{V_\beta} L = \widetilde{d^{V_\beta} L}$. Usando esto con la propiedad (9.25) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= L_{\Gamma_\alpha}((d^{V_\alpha} L)^H) - (d^H L)^H - (d^{V_\beta} L)^{V_\beta} + \Gamma_\alpha(L) dt^\alpha \\ &= (d^{V_\alpha} L)^{V_\alpha} + (\nabla_\alpha (d^{V_\alpha} L))^H - (d^H L)^H - (d^{V_\beta} L)^{V_\beta} + \Gamma_\alpha(L) dt^\alpha \\ &= (\nabla_\alpha (d^{V_\alpha} L))^H - (d^H L)^H + \Gamma_\alpha(L) dt^\alpha \\ &= (\nabla_\alpha (d^{V_\alpha} L + L dt^\alpha \circ \pi_{1,0}))^H - (d^H L)^H \end{aligned}$$

donde en la última identidad hemos usado que $\Gamma_\alpha(L) dt^\alpha = (\nabla_\alpha (L dt^\alpha \circ \pi_{1,0}))^H$.

Finalmente, por un cálculo directo en coordenadas locales obtenemos que

$$d^{V_\alpha} L + L dt^\alpha \circ \pi_{1,0} = \frac{\partial L}{\partial u_\alpha^A} (dq^A \circ \pi_{1,0} + u_\beta^A dt^\beta \circ \pi_{1,0}) + L dt^\alpha \circ \pi_{1,0} = (\Theta_L^\alpha)^V\,,$$

entonces

$$(\nabla_\alpha (\Theta_L^\alpha)^V - d^H L)^H = 0$$

lo que concluye la prueba.

$\square$

Conclusiones

El objetivo fundamental de esta memoria ha sido desarrollar y estudiar diversos aspectos del formalismo lagrangiano en Teoría Clásica de Campos de primer orden.

Entre los resultados aportados en esta tesis se pueden resaltar los siguientes:

- En el entorno del formalismo lagrangiano k-simpléctico, en el Capítulo 2 se ha ampliado el estudio de simetrías y leyes de conservación, proporcionando una demostración global del Teorema de Noether y estableciendo una condición bajo la cual se cumple el recíproco de este teorema.

- En los Capítulos 3, 4 y 5 se estudia el proceso de reducción en el formalismo lagrangiano k-simpléctico cuando la función lagrangiana es invariante con respecto a un grupo de simetrías, y se establecen las ecuaciones en derivadas parciales reducidas resultantes, llamadas ecuaciones de campo de Lagrange-Poincaré.

  Para reconstruir una solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de una solución de las ecuaciones reducidas, se introduce la k-conexión mecánica.

- El formalismo lagrangiano desarrollado en el Capítulo 7, utilizando jets de fibrados sobre un espacio euclídeo y el concepto de campos de k-vectores, se caracteriza por su sencillez, como los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctico; extiende la formulación lagrangiana de la Mecánica dependiente del tiempo de un modo más directo que como lo hace el formalismo lagrangiano k-cosimpléctico, y está íntimamente relacionado con los formalismos k-cosimpléctico y multisimpléctico.

- En el Capítulo 8 se ha realizado el estudio de simetrías y leyes de conservación. Se han caracterizado las leyes de conservación en términos de SOPDEs lagrangianos y se han introducido las simetrías generalizadas, componentes suficientes para establecer el Teorema de Noether en este contexto.

En vista de estos resultados, resultaría interesante trabajar en el futuro en las tres siguientes direcciones, que esán directamente relacionadas con la investigación llevada a cabo en esta memoria:

- Contrapartida hamiltoniana de la formulación lagrangiana desarrollada en el Capítulo 7.
- Establecer un formalismo, basado en el que hemos desarrollado en el Capítulo 7, para sistemas lagrangianos noholónomos.
- Ampliar los resultados del Capítulo 9 para avanzar en el problema inverso.

Bibliografía

[1] Abraham, R.A., Marsden,J.E.(1978) *Foundations of Mechanics*, (Second Edition), Benjamin-Cummings Publishing Company, New York.

[2] Arnold,V.I.(1978) *Mathematical methods of classical mechanics*, *Graduate Texts in Mathematics* **60**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg.

[3] Awane, A.(1992) *k-symplectic structures*, *J. Math. Phys.* **33** , 4046-4052.

[4] Awane, A. (1994) *G-spaces k-symplectic homogènes*, *J. Geom. Phys.* **13**, 139-157.

[5] Awane, A., Goze, M.(2000) *Pfaffian systems, k-symplectic systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[6] Búa, L., Bucataru, I., de León, M., Salgado, M., Vilariño, S. (2015). *Symmetries in Lagrangian Field Theory*, *Reports on Mathematical Physics*, **75**, No. 3 333-357.

[7] Búa, L., Bucataru, I., Salgado, M.(2012) *Symmetries, Newtonoid vector fields and conservation laws on the Lagrangian k-symplectic formalism*, *Reviews in Mathematical Physics* **24**(10), 1250030.

[8] Búa, L., Mestdag, T., Salgado, M.(2015) *Symmetry reduction, integrability and reconstruction in k-symplectic field theory*, *Journal of Geometric Mechanics* **74**(4), 395–429.

[9] Bucataru, I., Constantinescu, O.A., Dahl,M.F.(2011) *A geometric setting for systems of ordinary differential equations*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **8** (6), 1292–1327.

[10] Bucataru, I., Dahl, M.F.(2010) *A complete lift for semisprays*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **7**(2), 267–287.

[11] Cantrijn, F., Ibort, A., de León, M.(1996) *Hamiltonian structures on multisymplectic manifolds*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, **54**, 225-236.

[12] Cantrijn, F., Ibort, A., de León, M.(1999) *On the geometry of multisymplectic manifolds*, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **66**, 303-330.

[13] Cantrijn, F., de León, M., Lacomba, E.A.(1992) *Gradient vector fields on cosymplectic manifolds*, *J. Phys. A*, **25**, 175–188.

[14] Cariñena, J. F., Crampin, M., Ibort, L. A. (1991). *On the multisymplectic formalism for first order field theories*, Differential Geometry and its Applications, **1**, 345–37.

[15] Cariñena, J.F., Fernández-Núñez,J., Martínez, E.(1991) *A geometric approach to Cartan's Second Theorem in time-dependent Lagrangian Mechanics*, *Lett. Math. Phys.*, **23**, 51.

[16] Cariñena, J.F., Fernández-Núñez, J., Martínez, E.(1992) *Noether's theorem in time-dependent Lagrangian Mechanics*, *Reports in Mathamatical Physics*, **31**, 189–203.

[17] Cariñena, J.F., Fernández-Núñez, J.(1993) *Geometric Theory of Time-Dependent Singular Lagrangians*, *Fortschr. Phys.*, **41**, 517–552.

[18] Cariñena, J.F., López, C., Martínez, E.(1989) *A new approach to the converse of Cartan's theorem*, *J. Phys A: Math. Gen.*, **22**, 4777–4786.

[19] Castrillón, M., Ratiu, T.S., Shkoller, S.(2000) *Reduction in principal fibre bundles: Covariant Euler-Poincaré equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128**, 2155–2164.

[20] Castrillón, M., García, P.L., Rodrigo, C.,(2013) *Euler-Poincaré reduction in principal bundles by a subgroup of the structure group*, J. Geom. Phys. **74**, 352–369.

[21] Cendra, H., Marsden, J.E., Ratiu, T.S.(2001) *Lagrangian reduction by stages*, Mem. Amer. Math. Soc. **152**, no. 722.

[22] Crampin, M., Mestdag,T.(2009) *Reduction and reconstruction aspects of second-order dynamical systems with symmetry*, Acta Appl. Math. **105** 241–266.

[23] CRAMPIN,M., PIRANI, F.A.E.(1986) *Applicable differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **59**. Cambridge University Press, Cambridge.

[24] CURTIS, W.D., MILLER, F. R (1985). *Differential manifolds and theoretical physics*, Pure and Applied Mathematics ; **116**. Burlington, MA : Elsevier.

[25] ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, A., MUÑOZ-LECANDA, M.C., ROMÁN-ROY, M.C.(1991) *Geometrical setting of time-dependent regular systems: Alternative models*, *Rev. Math. Phys.*, **3**, 301–330.

[26] ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, A., MUÑOZ-LECANDA, M.C., ROMÁN-ROY, M.C.(1996) *Geometry of Lagrangian first-order classical field theories*, Forts. Phys. 44, 235–280.

[27] ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, A., MUÑOZ-LECANDA, M.C., ROMÁN-ROY, M.C.(1999) *Multivector Field Formulation of Hamiltonian Field Theories: Equations and Symmetries*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**(48) 8461-8484.

[28] ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, A., MUÑOZ-LECANDA, M.C., ROMÁN-ROY, M.C.(2000) *Geometry of Multisymplectic Hamiltonian First-order Field Theories*, *J. Math. Phys.*, **41**, 7402–744.

[29] ELLIS, D.C.P., GAY-BALMAZ, F., HOLM, D.D., PUTKARADZE, V., RATIU, T.S.(2010) *Symmetry Reduced Dynamics of Charged Molecular Strands*, Arch. Ration. Mech. Anal. **197**, 811–902.

[30] ELLIS, D.C.P., GAY-BALMAZ, F., HOLM, D.D., RATIU, T.S.(2011) *Lagrange-Poincaré field equations*, J. Geom. Phys. **61**, 2120–2146.

[31] GARCÍA, P.L., PÉREZ-RENDÓN, A.(1969) *Symplectic approach to the theory of quantized fields, I*, *Comm. Math. Phys.* **13** 24-44.

[32] GARCÍA, P.L., PÉREZ-RENDÓN, A.(1971) *Symplectic approach to the theory of quantized fields, II*, *Arch. Ratio. Mech. Anal.* **43**, 101-124.

[33] GHANAM, R., THOMPSON, G., MILLER, E.J.(2004) *Variationality of four-dimensional Lie group Connections*, Journal of Lie Theory **14**, 395–425.

[34] GIACHETTA, G., MANGIAROTTI, L., SARDANASHVILY, G. (1997) *New Lagrangian and Hamiltonian Methods in Field Theory*, World Scientific Pub. Co., Singapore.

[35] Giachetta, G., Mangiarotti, L., Sardanashvily, G. (1999). *Covariant Hamilton equations for field theory*, J. Phys. A **32**(32) 6629–6642.

[36] Goldschmidt, H., Sternberg,S.(1973) *The Hamilton-Cartan formalism in the calculus of variations*, *Ann. Inst. Fourier* **23**, 203-267.

[37] Gotay, M.J.(1991) *An exterior differential systems approach to the Cartan form*, *Symplectic geometry and mathematical physics. (Aix-en-Provence, 1990).* Progr. Math., **99**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp. 160-188.

[38] Gotay, M.J.(1991) *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations, I. Covariant Hamiltonian formalism*, *Mechanics, analysis and geometry: 200 years after Lagrange*.North-Holland Delta Ser., North-Holland, Amsterdam, pp. 203-235.

[39] Gotay, M.J.(1991) *A multisymplectic framework for classical field theory and the calculus of variations, II. Space + time decomposition*, *Differential Geom. App.* **1**, 375-390.

[40] Gotay, M. J., Isenberg, J., Marsden, J. E., Montgomery,R. (2004). *Momentum Maps and Classical Relativistic Fields. Part I: Covariant Field Theory*, arXiv:physics/9801019v2.

[41] Gotay, M. J., Isenberg, J., Marsden, J. E. (2004). *Momentun maps and classical relativistic fields, Part II: Canonical analysis of field theories*, arXiv:math-ph/0411032v1.

[42] Gracia, X., Pons, J.M.(1989) *On an evolution operator connecting lagrangian and hamiltonian formalisms*, *Lett. Math. Phys.*, **17**, 175–180.

[43] Günter, C. (1987). *The polysymplectic Hamiltonian formalism in field theory and caculus of variations I: The local case*, J. Differential Geom. **25** 23–53.

[44] Hélein, F., Wood,J.C.(2008) *Harmonic maps, In: D. Krupka and D.J. Saunders*, Handbook of Global Analysis, Elsevier.

[45] José, J.V., Saletan, E.J.(1988) *Classical Dynamics, A Contemporary Approach*, Cambridge University Press, Cambridge.

[46] Kanatchikov, I. V.(1998) *Canonical structure of classical field theory in the polymomentum phase space*, *Rep. Math. Phys.* **41**(1) 49–90.

[47] Kijowski, J.(1973) *A finite-dimensional canonical formalism in the classical field theory*, *Comm. Math. Phys.* **30**, 99-128.

[48] Kijowski, J., Szczyrba, W.(1974) *Multisymplectic manifolds and the geometrical construction of the Poisson brackets in the classical field theory*, *Géométrie symplectique et physique mathématique* (Colloq. International C.N.R.S., Aix-en-Provence, 1974) 347-349.

[49] Kijowski, J., Tulczyjew, W. M. (1979). *A symplectic framework for field theories*, Lecture Notes in Physics, **107**. Springer-Verlag, New York.

[50] Kobayashi, S., Nomizu, K.(1963) *Foundations of Differential Geometry, Vols 1,2*, Wiley.

[51] Kolar, I., Michor,P., Slovak,J. (1993). *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin.

[52] Kosambi, D.D.(1935) *Systems of Differential Equations of the Second Order*, *Quart. J. Math.*, **6**, 1–12.

[53] Kosambi, D.D.(1948) *Systems of partial differential equations of the second order*, *Quart. J. Math.*, **19**, 204–219.

[54] Krupka, D.(1971) *Lagrange theory in fibered manifolds*, Rep. Math. Phys. **2**, 121–133.

[55] Krupková, O.(1997) *The geometry of ordinary variational equations*, Springer-Verlag, Berlin.

[56] de León, M., Lacomba, E. A., Rodrigues, P. R. (1991). *Special presymplectic manifolds, Lagrangian submanifolds and the Lagrangian-Hamiltonian systems on jet bundles*, Procs. First "Dr. Antonio A. R. Monteiro" Congress on Mathematics, 103–122, Univ. Nac. del Sur, Bahía Blanca.

[57] de León, M., Martín de Diego, D.(1996) *Symmetries and Constant of the Motion for Singular Lagrangian Systems*, *Int. J. Theor. Phys.* **35**(5) 975-1011.

[58] de León, M., Martín de Diego, D., Salgado, M., Vilariño, S.(2008) *Nonholonomic constraints in k-symplectic Classical Field Theories*, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **5**(5) 799-830.

[59] de León, M., Martín de Diego, D., Salgado, M., Vilariño, S.(2009) *k-symplectic formalism on Lie algebroids*, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 385209 (31 pp).

[60] DE LEÓN, M., MARTÍN DE DIEGO, D., SANTAMARÍA, A. (2003). *Tulczyjew triples and lagrangian submanifolds in classical field theories*, Applied Differential Geometry and Mechanics, 21–47.

[61] DE LEÓN, M., MARTÍN DE DIEGO, D., SANTAMARÍA-MERINO, A.(2004) *Symmetries in classical field theories*, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **1**(5) 651-710.

[62] DE LEÓN, M., MÉNDEZ, I., SALGADO, M.(1988) *p-almost tangent structures*, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, Serie II **XXXVII**, 282-294.

[63] DE LEÓN, M., MÉNDEZ, I., SALGADO, M.(1991) *Integrable p–almost tangent structures and tangent bundles of p^1-velocities*, *Acta Math. Hungar.* **58**(1-2), 45-54.

[64] DE LEÓN, M., MERINO, E., OUBIÑA, J. A., RODRIGUES, P., SALGADO, M. (1998). *Hamiltonian systems on k-cosymplectic manifolds*, J. Math. Phys. **39**(2) 876–893.

[65] DE LEÓN, M., MERINO, E., SALGADO, M. (2001). *k-cosymplectic manifolds and Lagrangian field theories*, J. Math. Phys. **42**(5) 2092–2104.

[66] DE LEÓN, M., RODRIGUES, P. R. (1989). *Methods of differential geometry in analytical mechanics.* North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[67] DE LEÓN, M., SALGADO, M., VILARIÑO, S.(2015) *Methods of Differential Geometry in Classical Field Theories: k-Symplectic and k-Cosymplectic Approaches.* World Scientific, Singapur.

[68] MARAÑÓN, H.(2008) *Simetries d'equacions diferencials. Aplicació als sistemes k-simplèctics*, Treball Fi de Master Matematica Aplicada. Department of Applied Mathematics IV. Technical University of Catalonia (UPC).

[69] MARMO, G., MUKUNDA, N.(1986) *Symmetries and constants of the motion in the Lagrangian formalism on TQ: beyond point transformations*, *Nuovo Cim. B*, **92** 1–12.

[70] MARRERO, J.C. ,ROMÁN-ROY, N., SALGADO, M., VILARINO, S.(2011) *On a kind of Noether symmetries and conservation laws in k-cosymplectic Field Theory*, *Journal of Mathematical Physics* **52**, 022901, 20 pp.

[71] Marrero, J.C. ,Román-Roy, N., Salgado, M., Vilarino, S.(2015) *Reduction of polysymplectic manifolds*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** 055206 (43pp).

[72] Marsden, J. E., Ratiu, T. S. (1999). *Introduction to Mechanics and Symmetry*, second edition. First edition (1994). Texts in Applied Mathematics, Vol **17**. Springer-Verlag.

[73] Martínez, E., Cariñena, J.F., Sarlet, W. (1992). *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection.* Diff. Geometry and its Applications **2**, 17–43.

[74] Martínez, E., Cariñena, J.F., Sarlet, W. (1993). *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection. Part II.* Diff. Geometry and its Applications **3**, 1–29.

[75] McLean, M., Norris, L. K. (2000). *Covariant field theory on frame bundles of fibered manifolds*, J. Math. Phys. **41**(10) 6808–6823.

[76] Merino, E. (1997) Geometría k-simpléctica y k-cosimpléctia. Aplicaciones a las teorías clásicas de campos, Publicaciones del Dpt. de Geometría y Topología, **87**, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

[77] Mestdag, T.(2005) *A Lie algebroid approach to Lagrangian systems with symmetry*, In: J. Bures et al (eds.), Differential Geometry and its Applications, Proc. Conf., Prague (Czech Republic), 523–535.

[78] Mestdag, T., Crampin, M.(2008) *Invariant Lagrangians, mechanical connections and the Lagrange-Poincaré equations*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** 344015 (20pp).

[79] Morimoto, A.(1970) *Liftings of some types of tensor fields and connections to tangent p^r-velocities*, Nagoya Qath. J. **40** 13-31.

[80] Munteanu, F., Rey, A. M., Salgado, M.(2004) *The Günther's formalism in classical field theory: momentum map and reduction, J. Math. Phys.* **45**(5) 1730–1751.

[81] Muñoz-Lecanda, M.C., Salgado, M., Vilariño, S. (2010). *k-symplectic and k-cosymplectic Lagrangian field theories: some interesting examples and applications*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. **7**(4) 669–692.

[82] Norris, L.K. (1993). *Generalized symplectic geometry on the frame bundle of a manifold*, Proc. Symp. Pure Math. **54**, Part 2 (Amer. Math. Soc., Providence RI), 435–465.

[83] Norris, L.K.(1994) *Symplectic geometry on T^*M derived from n-symplectic geometry on LM*, *J. Geom. Phys.* **13** 51-78.

[84] Norris, L.K.(1997) *Schouten-Nijenhuis Brackets*, *J. Math. Phys.* **38** 2694-2709.

[85] Norris, L.K.(2001) *n-symplectic algebra of observables in covariant Lagrangian field theory*, *J. Math. Phys.* **42**(10) 4827–4845.

[86] Olver, P. J. (1986). *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics **107**. Springer-Verlag, New York.

[87] Ortega, J. P., Ratiu, T. S. (2004). *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*, Progress in Mathematics, Vol **222**. Birkhäuser Basel.

[88] Pidello, G., Tulczyjew,W. M. (1987). *Derivations of differential forms on jet bundles*, Annali di Mat. Pura ed Apl. (4) **147**, 249–265.

[89] Poor, W.A.(1981) *Differential Geometric structures*, Mc-Graw-Hill.

[90] Rey, A.M., Román-Roy, N., Salgado, M., Vilariño, S.(2011) *On the k-symplectic, k-cosymplectic and multisymplectic formalism of classical field theories*, *J. Geom. Mechanics*, **3**, 113–137.

[91] Rey, A.M., Román-Roy, N., Salgado, M., Vilariño, S. (2012) *k-Cosymplectic Classical Field Theories: Tulczyjew and Skinner-Rusk Formulations*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry Vol. **15**.

[92] Román-Roy, N., Salgado, M., Vilariño, S.(2007) *Symmetries and Conservation Laws in Günter k-symplectic formalism of Field Theory*, *Reviews in Mathematical Physics*, **19** (10), 1117–1147.

[93] Román-Roy, N., Salgado, M., Vilariño, S.(2011) *SOPDEs and nonlinear connections*, Publ. Math. (Debrecen) **78**, 297–316.

[94] Roux, A. (1970). *Jets et connexions*, Publ. Math. Univ. Lyon, t. **7**, p. 1–42.

[95] Sardanashvily, G. (1995). *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. Constraint Systems*, I World Scientific, Singapore.

[96] Sarlet, W., Vandecasteele, A., Cantrijn, F., Martínez, E. (1995). *Derivations of forms along a map: the framework for time-dependent second-order equations*, Differential Geometry ant its Applications **5**, 171-203.

[97] Saunders, D. J.(1987) *The Cartan Form in Lagrangian field theories*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **20**, 339–349.

[98] Saunders, D. J.(1989). *The Geometry of Jet Bundles*, volume 142 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press.

[99] Sniatycki, J.(1970) *On the geometric structure of classical field theory in Lagrangian formulation*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **68** 475-484.

[100] Steenrod, N.(1951) *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press.

[101] Tulczyjew, W. M.(1974) *Hamiltonian systems, Lagrangian systems and the Legendre transformation*, Symposia Mathematica **16** 247–258.

[102] Tulczyjew, W. M. (1976), *Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique lagrangienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **283**(8) Av, A675–A678.

[103] Tulczyjew, W. M. (1976). *Les sous-variétés lagrangiennes et la dynamique hamiltonienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B**283**(1) Ai, A15–A18.

[104] Vankerschaver, J.(2007) *Euler-Poincaré reduction for discrete field theories*, J. Math. Phys. **48**, 032902.

[105] Vilariño, S. (2009) Nuevas aportaciones al estudio de los formalismos k-simpléctico y k-cosimpléctio, Publicaciones del Dpt. de Geometría y Topología, **114**, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

[106] Yano, K., Ishihara, S.(1973) *Tangent and cotangent bundles*, *Marcel Dekker*, Inc.