



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Unha introdución ós grupos topolóxicos

David Vázquez Fernández

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Unha introdución ós grupos topolóxicos

David Vázquez Fernández

Xullo 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía</b>
<b>Título: Unha introdución ós grupos topolóxicos</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
Neste traballo preténdese continuar co estudo da topoloxía xeral realizada no terceiro curso do grao de Matemáticas, centrando a atención nos espazos topolóxicos que tamén teñen estrutura de grupo de maneira que as operacións no grupo (produto e inversión) sexan continuas, isto é, nos grupos topolóxicos. Estudaranse propiedades de separación, metrizableidade, conexión e compacidade dos grupos topolóxicos, e analizaranse exemplos destes espazos.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice xeral

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. Grupos topolóxicos</b>	<b>1</b>
1.1. Definicións e primeiras propiedades . . . . .	1
1.2. Subgrupos topolóxicos . . . . .	6
1.3. Cocientes . . . . .	10
1.4. Subgrupos e cocientes do grupo aditivo $\mathbb{R}$ . . . . .	15
1.5. Produtos . . . . .	19
1.6. Bases locais . . . . .	22
<b>2. Axiomas de separación e grupos metrizables</b>	<b>27</b>
2.1. Axiomas de separación . . . . .	27
2.2. Metrizableidade . . . . .	32
<b>3. Compacidade e conexión en grupos topolóxicos</b>	<b>43</b>
3.1. Compacidade . . . . .	43
3.2. Compacidade local . . . . .	46
3.3. Conexión . . . . .	50
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>



## Resumo

Un espazo topolóxico que tamén é un grupo tal que a multiplicación e a inversión son continuas é un grupo topolóxico. Neste traballo estudaremos propiedades da topoloxía xeral dos grupos topolóxicos, os homomorfismos entre eles, os seus subgrupos topolóxicos, os seus espazos cocientes e os seus produtos. Ademais trataremos os axiomas de separación, metrizableidade, compacidade, compacidade local e conexión no contexto dos grupos topolóxicos.

## Abstract

A topological space that is also a group such that the multiplication and the inversion are continuous is a topological group. In this work we study general topology properties of topological groups, the homomorphisms between them, their topological subgroups, their coset spaces and their products. We also consider the axioms of separation, metrizability, compactness, local compactness and connectedness in the context of topological groups.



# Introdución

A teoría xeral de grupos topolóxicos apareceu como un intento de unificar varios aspectos da teoría de grupos e da topoloxía. Un grupo topolóxico é un conxunto que ten estrutura de grupo e de espazo topolóxico de modo que a operación do grupo e a inversión son aplicacións continuas.

Foi o matemático alemán Otto Schreier [10] o primeiro en considerar, en 1925, grupos continuos, que na linguaxe actual poderían describirse como grupos topolóxicos Hausdorff, conexos e localmente euclidianos. Istos están inspirados na teoría de grupos continuos de transformacións (despois chamados "grupos de Lie") que aparecen no estudo de Sophus Lie de solucións de ecuacións diferenciais relacionadas coa xeometría diferencial. A noción xeral de grupo topolóxico foi introducida polo matemático polaco Fraciszek Leja [7] en 1927, que expresou a relación de compatibilidade entre a topoloxía e as operacións de grupo como se coñece actualmente. Un dos primeiros estudos sobre a teoría xeral de grupos topolóxicos apareceu no libro do matemático ruso Lev Prontrjagin [9] en 1938.

Neste traballo de introdución á teoría de grupos topolóxicos faise un estudo de propiedades de topoloxía xeral dos grupos topolóxicos, dos seus subgrupos, cocientes e produtos e das propiedades de separación, metrizable, compacidade, compacidade local e conexión en grupos topolóxicos, e vense exemplos das diversas propiedades.

No capítulo 1, tralas primeiras definicións e exemplos de grupos topolóxicos e as aplicacións naturais entre eles (os homomorfismos de grupos que tamén son aplicacións continuas) estúdanse propiedades relacionadas coa topoloxía que se derivan da estrutura alxébrica, como a homoxeneidade, que fai que un grupo topolóxico teña o mesmo aspecto en tódolos puntos, que a clausura dun subgrupo tamén sexa subgrupo e ademais conserve propieda-

des do subgrupo, como o carácter abeliano ou normal, e o feito de que os subgrupos abertos tamén sexan pechados. Dado un subgrupo  $H$  dun grupo topolóxico  $G$ , o conxunto de clases  $G/H$  convértese nun espazo topolóxico cociente de  $G$  (a proxección natural  $\pi: G \rightarrow G/H$ , que é unha identificación, é neste caso unha aplicación aberta). O espazo cociente  $G/H$  é ademais un grupo topolóxico se  $H$  é un subgrupo normal de  $G$  e, neste caso, os subgrupos topolóxicos de  $G/H$  son grupos cocientes da forma  $K/H$  onde  $K$  é un subgrupo de  $G$  que contén a  $H$ . Estúdanse en particular os teoremas de isomorfía en grupos topolóxicos, e ó analizar os subgrupos e cocientes do grupo aditivo dos números reais vese que non se verifica o correspondente ó terceiro teorema de isomorfía para grupos. Considérase o grupo topolóxico produto dunha familia de grupos topolóxicos, que permite construír novos exemplos de grupos topolóxicos a partir doutros xa coñecidos. Por outra parte, a propiedade de homoxeneidade nos grupos topolóxicos fai que as bases locais quedan definidas automaticamente ó coñecer unha base local nun punto. Estúdase como unha base local no elemento neutro do grupo está totalmente caracterizada por algunhas propiedades nas que aparecen as operacións do grupo. Como exemplos de topoloxías que dan lugar a grupos topolóxicos a partir das propiedades para unha base local de veciñanzas abertas do elemento neutro formada por subgrupos consideramos as topoloxías  $p$ -ádicas de  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  e unha topoloxía no anel de series de potencias  $R[x]$ .

Os axiomas de separación considéranse no capítulo 2, vese que todo grupo topolóxico e calquera espazo cociente dun grupo topolóxico por un subgrupo son necesariamente espazos topolóxicos regulares (cada punto do espazo ten unha base local de veciñanzas pechadas) e que os axiomas de separación  $T_0$ ,  $T_1$  e  $T_3$  nos grupos topolóxicos son equivalentes ó carácter Hausdorff ( $T_2$ ). Danse varias equivalencias desta propiedade de separación e a caracterización de cocientes  $G/H$  Hausdorff polo carácter pechado do subgrupo  $H$  de  $G$ . Neste capítulo tamén se consideran grupos métricos e estúdase a metrizabilidade en grupos topolóxicos, sendo o resultado máis importante o feito de que un grupo topolóxico  $G$  é metrizable se, e só se, é Hausdorff e primeiro numerable e que neste caso existe unha distancia invariante pola esquerda (e tamén unha invariante pola dereita) que define a topoloxía de  $G$ .

Estúdanse no capítulo 3 as principais propiedades relativas á compacidade e a conexión en grupos topolóxicos. Vese que se existe un subgrupo

compacto  $H$  dun grupo topolóxico  $G$  tal que o espazo cociente  $G/H$  é compacto entón  $G$  é compacto. A proba é sinxela e recorda a que se utiliza para probar que o produto finito de espazos compactos tamén o é. Faise tamén a demostración, moito máis complexa, do resultado análogo para a compacidade local. Vense propiedades relacionadas coas compoñentes conexas en grupos topolóxicos e tamén se proba que se para un subgrupo conexo  $H$  dun grupo topolóxico  $G$  o espazo cociente  $G/H$  é conexo entón  $G$  é conexo. Úsase este resultado para dar unha demostración de que o grupo linear xeral  $GL_n(\mathbb{R})$  e o grupo ortogonal  $O_n(\mathbb{R})$  teñen dúas compoñentes conexas.

Para a preparación deste traballo utilizamos o capítulo 2 do libro de Higgins [6], o capítulo 1 de Markley [8] e os capítulos 3 e 5 de Bourbaki [2, 3]. Outras referencias bibliográficas aparecen citadas no texto de maneira puntual.



# Capítulo 1

## Grupos topolóxicos

Un conxunto cunha estrutura de grupo e outra de espazo topolóxico que están vinculadas por unha relación natural de compatibilidade entre as dúas estruturas vai ser un grupo topolóxico.

### 1.1. Definicións e primeiras propiedades

**Definición 1.1.** Un *grupo topolóxico*  $G$  é un grupo e un espazo topolóxico tal que as dúas estruturas son compatibles no sentido de que a operación do grupo e a inversión

$$\begin{aligned} m_G: G \times G &\longrightarrow G & \text{inv}_G: G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy, & x &\longmapsto x^{-1}, \end{aligned}$$

son aplicacións continuas.

• **1.2.** A continuidade de ambas aplicacións é equivalente a:

(a) se  $x, y \in G$ , para toda veciñanza aberta  $W$  de  $xy$  existen veciñanzas abertas  $U, V$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tales que

$$UV = \{ab \mid a \in U, b \in V\} \subset W,$$

(b) se  $x \in G$ , para cada veciñanza aberta  $U$  de  $x^{-1}$  existe unha veciñanza aberta  $V$  de  $x$  tal que  $V^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in V\} \subset U$ .

En efecto, a condición (a) equivale a que a operación do grupo sexa continua porque a familia de conxuntos  $\{U \times V \mid U \text{ e } V \text{ son abertos en } G\}$

é unha base da topoloxía produto de  $G \times G$  e  $m_G(U \times V) = UV$ ; e a condición (b) equivale a que sexa continua a inversión porque  $inv(V) = V^{-1}$ .

**Exemplos 1.3.** (a) Calquera grupo  $G$  coa topoloxía discreta é un grupo topolóxico. En particular, o grupo aditivo  $\mathbb{Z}$  dos números enteiros coa topoloxía relativa como subespazo topolóxico de  $\mathbb{R}$  é un grupo topolóxico coa topoloxía discreta.

(b) Coa topoloxía indiscreta, calquera grupo  $G$  é un grupo topolóxico.

(c) O grupo aditivo  $\mathbb{R}$  coa topoloxía usual é un grupo topolóxico, xa que a operación do grupo e a inversión serían, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y & x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

que son aplicacións continuas.

(d) O grupo multiplicativo  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  coa súa topoloxía é un grupo topolóxico. A operación do grupo e a inversión,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* & \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (a + bi, c + di) &\longmapsto ac - bd + (bc + ad)i & a + bi &\longmapsto (a - bi)/(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

son aplicacións continuas.

(e) Os grupos multiplicativos  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  coa topoloxía usual son grupos topolóxicos.

(f) O grupo linear xeral  $GL_n(\mathbb{R})$  é o grupo das matrices reais non singulares e vai ser un subespazo topolóxico do espazo  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  de matrices reais  $n \times n$ . A topoloxía de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é a única que fai que calquera isomorfismo de espazos vectoriais  $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  sexa un homeomorfismo, en particular

$$\begin{aligned} M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n^2} \\ (a_{ij}) &\longmapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}). \end{aligned}$$

Así,  $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ , coa topoloxía relativa, é un subespazo topolóxico aberto de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , xa que a aplicación determinante

$$\begin{aligned} \det: M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) &\longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n}, \end{aligned}$$

(onde  $\mathfrak{S}_n$  é o grupos de permutacións de  $\{1, \dots, n\}$  e  $\varepsilon(\sigma)$  a signatura de  $\sigma$ ) é continua ó ser unha función polinomial das compoñentes das matrices.

Ademais, coa multiplicación de matrices, é un grupo topolóxico (o produto  $GL_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  é unha aplicación continua, porque cada compoñente do produto de matrices é unha función continua das compoñentes destas matrices, e a inversión  $A \in GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$  tamén o é porque as compoñentes da matriz inversa de  $A$  son funcións racionais das compoñentes de  $A$ ). En particular,  $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ .

(g) De xeito análogo, cambiando  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{C}$ , tense que o grupo linear xeral complexo  $GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$  é un grupo topolóxico homeomorfo a un subespazo aberto de  $\mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ , e, en particular  $GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$  é o grupo multiplicativo dos números complexos.

As condicións de compatibilidade entre a estrutura alxébrica e topolóxica poden resumirse pola condición dada na seguinte proposición:

**Proposición 1.4.** *Se  $G$  é un espazo topolóxico e un grupo entón é un grupo topolóxico se, e só se, é continua a aplicación*

$$\begin{aligned} \theta_G: G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto xy^{-1}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Da continuidade da operación do grupo e a inversión dedúcese que a composición  $(x, y) \in G \times G \mapsto (x, y^{-1}) \in G \times G \mapsto xy^{-1} \in G$  é continua. Recíprocamente, se  $\theta_G$  é continua entón é continua a inversión, que é a composición  $x \mapsto (e, x) \mapsto ex^{-1} = x^{-1}$ , e tamén a operación do grupo, que é a composición  $(x, y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto \theta_G(x, y^{-1}) = x(y^{-1})^{-1} = xy$ .  $\square$

**Observación 1.5.** Un grupo paratopolóxico é un grupo  $G$  cunha topoloxía tal que a operación do grupo  $(x, y) \in G \times G \mapsto xy \in G$  é continua ([1, p. 12]). Desta condición non se sigue en xeral que a inversión tamén sexa continua. Por exemplo, o grupo aditivo  $\mathbb{R}$  coa topoloxía de Sorgenfrey (unha base é a familia de todos os intervalos  $[a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) e o mesmo grupo coa topoloxía de Kolmogorff (os abertos son  $\mathbb{R}$ ,  $\emptyset$  e os intervalos  $(a, +\infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ) son grupos paratopolóxicos que non son grupos topolóxicos, xa que a operación  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto x + y \in \mathbb{R}$  é continua non dous casos pero a inversión non o é: a imaxe inversa de  $[a, b)$  é  $(-b, -a]$ , que non é aberto na

recta de Sorgenfrey, e a imaxe inversa de  $(a, +\infty)$  é  $(-\infty, -a)$ , que non é aberto na recta de Kolmogoroff.

**Proposición 1.6.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $a \in G$ . Entón:*

- (a) *A traslación pola esquerda  $l_a: x \in G \mapsto ax \in G$  é un homeomorfismo*
- (b) *A traslación pola dereita  $r_a: x \in G \mapsto xa \in G$  é un homeomorfismo.*
- (c) *A conxugación  $c_a: x \in G \mapsto axa^{-1} \in G$  é un homeomorfismo.*
- (d) *A inversión  $i_G: x \in G \mapsto x^{-1} \in G$  é un homeomorfismo.*

*Demostración.* (a) A traslación  $l_a$  é composición de aplicacións continuas  $x \rightarrow (a, x) \rightarrow ax$ , logo é continua, e a súa inversa é a traslación  $l_{a^{-1}}$ , que tamén é continua.

(b) Análogo ó apartado anterior.

(c) Como  $c_a = l_a \circ r_{a^{-1}}$  é composición de homeomorfismos, entón é homeomorfismo.

(d) Por ser  $G$  grupo topolóxico, a inversión é continua, e como a súa inversa é ela mesma, é un homeomorfismo.  $\square$

**Corolario 1.7.** *Un grupo topolóxico  $G$  é un espazo homoxéneo, isto é, dados  $a, b \in G$  existe un homeomorfismo  $G \rightarrow G$  tal que a imaxe de  $a$  é  $b$ .*

*Demostración.*  $l_{ba^{-1}}: G \rightarrow G$  é un homeomorfismo e  $l_{ba^{-1}}(a) = b$ .  $\square$

**Observación 1.8.** (a) Con este resultado sabemos que un grupo topolóxico é igual topoloxicamente en todo punto. Así, podemos empregar traslacións para transmitir información topolóxica dun punto a outro.

(b) Non todo espazo topolóxico é homoxéneo, entón non é sempre posible darlle unha estrutura de grupo a un espazo topolóxico tal que o converta nun grupo topolóxico.

*Notación 1.9.* Sexa  $G$  un grupo topolóxico,  $A, B \subset G$ ,  $g \in G$ .

- (a)  $gA := \{ga \mid a \in G\} = l_g(A)$ ,
- (b)  $Ag := \{ag \mid a \in G\} = r_g(A)$ ,
- (c)  $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} Ab = \bigcup_{a \in A} aB$ ,

$$(d) A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}.$$

**Proposición 1.10.** *Sexa  $G$  grupo topolóxico,  $A, B \subset G$ ,  $g \in G$ .*

- (a) *Se  $A$  é aberto entón  $gA$  e  $Ag$  son abertos.*
- (b) *Se  $A$  é pechado entón  $gA$  e  $Ag$  son pechados.*
- (c) *Se un dos dous conxuntos é aberto entón  $AB$  é aberto.*
- (d) *Se un dos dous conxuntos é pechado e o outro é finito entón  $AB$  é pechado.*

*Demostración.* (a) e (b) dedúcense de que  $l_g$  e  $r_g$  son homeomorfismos e polo tanto son aplicacións abertas e pechadas.

(c)  $AB = \bigcup_{a \in A} l_a(B) = \bigcup_{b \in B} r_b(A)$  é unha unión de abertos en  $G$ .

(d)  $AB = \bigcup_{a \in A} l_a(B) = \bigcup_{b \in B} r_b(A)$  é unha unión finita de pechados en  $G$ .

□

**Observación 1.11.** O produto de dous conxuntos pechados nun grupo topolóxico non é necesariamente pechado. Por exemplo, os conxunto  $A = \mathbb{N}$  e  $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$  son pechados no grupo multiplicativo  $\mathbb{R}^+$  dos números reais positivos pero o seu produto  $AB$ , que é o conxunto  $\mathbb{Q}^+$  dos números racionais positivos, non é pechado en  $\mathbb{R}^+$ .

**Definición 1.12.** Sexan  $G$  e  $G'$  grupos topolóxicos. Un *homomorfismo de grupos topolóxicos* é un homomorfismo de grupos  $f: G \rightarrow G'$  que tamén é unha aplicación continua. Se  $f$  ten inversa que tamén é un homomorfismo de grupos topolóxicos entón  $f$  é un *isomorfismo de grupos topolóxicos*; neste caso  $f$  é un isomorfismo de grupos e un homeomorfismo. Dise que os grupos topolóxicos  $G$  e  $G'$  son *grupos topolóxicos isomorfos* se existe un isomorfismo de grupos topolóxicos  $f: G \rightarrow G'$ .

**Observación 1.13.** Que un homomorfismo de grupos topolóxicos sexa inversible non implica que a súa inversa sexa homomorfismo de grupos topolóxicos. Por exemplo, se  $\mathbb{R}'$  é o grupo dos números reais coa suma usual e a topoloxía discreta e  $\mathbb{R}$  o grupo aditivo coa topoloxía usual,  $f: x \in \mathbb{R}' \mapsto x \in \mathbb{R}$  é continua xa que todo subconxunto de  $\mathbb{R}'$  é aberto, pero  $f^{-1}: x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}'$  é discontinua xa que  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ , que é aberto na topoloxía discreta mais non na usual.

**Exemplos 1.14.** (a) A aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$  dada por  $f(x) = e^x$  é un homomorfismo continuo do grupo aditivo  $\mathbb{R}$  no grupo multiplicativo  $\mathbb{R}^*$ , logo é un homomorfismo de grupos topolóxicos. Ademais,  $\mathbb{R}$  e o grupo multiplicativo  $\mathbb{R}^+$  dos números reais positivos son grupos topolóxicos isomorfos, xa que  $x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}^+$  é un isomorfismo de grupos topolóxicos (a súa inversa  $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tamén é continua).

(b) A aplicación determinante

$$\det: GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$$

$$A = (a_{ij}) \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n}$$

é continua e  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  para cada  $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ , logo é un homomorfismo de grupos topolóxicos. Tamén o é a aplicación determinante  $\det: GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

## 1.2. Subgrupos topolóxicos

Se  $G$  é un grupo topolóxico e  $H$  un subgrupo,  $H$  é un grupo topolóxico coa topoloxía relativa. Isto é debido a que

$$\begin{aligned} H \times H &\longrightarrow H & H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longmapsto xy, & x &\longmapsto x^{-1}, \end{aligned}$$

están ben definidas (ao ser  $H$  subgrupo) e son continuas xa que son as restricións en dominio e rango da operación do grupo e da inversión en  $G$ .

**Definición 1.15.** Sexa  $G$  un grupo topolóxico. Un *subgrupo topolóxico*  $H$  de  $G$  é un subgrupo e un subespazo topolóxico de  $G$ , é dicir,  $H$  é un grupo topolóxico coa mesma operación (restrinxida) que  $G$  e coa topoloxía relativa.

**Exemplos 1.16.** (a) Os conxuntos  $\mathbb{Z}$  dos números enteiros e  $\mathbb{Q}$  dos números racionais son subgrupos topolóxicos do grupo aditivo  $\mathbb{R}$ .

(b)  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  co produto de números complexos é un subgrupo topolóxico de  $\mathbb{C}^*$ .

(c) O subespazo de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  de tódalas matrices escalares non nulas

$$H = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}^*\},$$

onde  $I_n$  é a matriz identidade  $n \times n$ , é un subgrupo topolóxico de  $GL_n(\mathbb{R})$  isomorfo a  $\mathbb{R}^*$ . En efecto, a aplicación

$$\lambda \in \mathbb{R}^* \mapsto \lambda I_n \in H \subset GL_n(\mathbb{R})$$

é un homomorfismo continuo e a aplicación inversa

$$A = (a_{ij}) \in H \mapsto a_{11} \in \mathbb{R}^*$$

tamén é continua.

(d) O *grupo linear especial*

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

é un subgrupo topolóxico de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Analogamente,

$$SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$$

é un subgrupo topolóxico de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

(e) O *grupo ortogonal*

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$$

e o *grupo ortogonal especial*

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T, \det(A) = 1\}$$

son subgrupos topolóxicos de  $GL_n(\mathbb{R})$ . De xeito análogo pódense definir  $O_n(\mathbb{C})$  e  $SO_n(\mathbb{C})$  que son subgrupos topolóxicos de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

A partir de agora os subgrupos van ser considerados automaticamente subgrupos topolóxicos coa topoloxía relativa aínda que non se mencione, e moitas veces falaremos deles como subconxuntos (que tamén poden ser abertos ou pechados) e diremos que son discretos se a súa topoloxía relativa é discreta.

**Proposición 1.17.** *Sexa  $H$  un subgrupo dun grupo topolóxico  $G$ . Entón:*

(a) *Se existe un aberto  $U$  en  $G$  tal que  $U \cap H = \{e\}$ , entón  $H$  é un subgrupo discreto de  $G$ .*

(b) Cada subgrupo de  $G$  que contén unha veciñanza do elemento neutro é aberto en  $G$ .

(c) Se  $G$  é Hausdorff e  $H$  é un subgrupo discreto de  $G$  entón  $H$  é pechado en  $G$ .

*Demostración.* (a) Sexa  $U$  un aberto en  $G$  tal que  $U \cap H = \{e\}$ , e sexa  $a \in H$ . O conxunto  $Ua$  é aberto pola proposición 1.10 e  $a \in Ua$ . Dado  $x \in Ua \cap H$ , existe  $u \in U$  tal que  $x = ua$ . Como  $a, x \in H$  e  $H$  é un subgrupo,  $xa^{-1} = u \in U \cap H$ , así  $xa^{-1} = e$ . Concluimos que  $x = a$ ,  $Ua \cap H = \{a\}$ , e que  $H$  é discreto.

(b) Sexa  $H$  un subgrupo do grupo topolóxico  $G$  tal que existe unha veciñanza  $A$  de  $e$  tal que  $A \subset H$ . Entón existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $e$  tal que  $U \subset A \subset H$ . Para ver que  $H$  é aberto, imos ver que dado  $x \in H$  existe unha veciñanza aberta de  $x$  que está contida en  $H$ . Así, dado  $x \in H$ ,  $xU$  é aberto pola proposición 1.10 e  $x \in xU \subset H$ , xa que  $x = xe \in xU$  e dado  $y \in xU$  existe  $z \in U \subset H$  tal que  $y = xz \in H$ .

(c) Sexa  $H$  un subgrupo discreto de  $G$  e  $x \in G \setminus H$ . Existe un aberto  $U$  en  $G$  tal que  $e \in U$  e  $U \cap H = \{e\}$ , e outro aberto  $V$  en  $G$ , con  $e \in V$  tal que  $VV^{-1} \subset U$ . Isto é debido a que  $\theta_G: (x, y) \in G \times G \mapsto xy^{-1} \in G$  é continua e  $U$  é unha veciñanza de  $e = \theta_G(e, e)$ , logo existen veciñanzas abertas  $V_1$  e  $V_2$  de  $e$  tales que  $\theta_G(V_1 \times V_2) = V_1V_2^{-1} \subset U$ , e entón  $V$  podemos coller como  $V_1 \cap V_2$ . Supoñamos que existen dous puntos  $a, b \in Vx \cap H$ , así  $a = v_1x$  e  $b = v_2x$  para algúns  $v_1, v_2 \in V$ . Entón  $ab^{-1} = (v_1x)(v_2x)^{-1} = v_1v_2^{-1} \in VV^{-1} \subset U$ , logo  $ab^{-1} \in U \cap H = \{e\}$  e así  $a = b$ . Con isto concluimos que  $Vx \cap H$  ten 0 ou 1 elementos, e en ambos casos chegamos a que todo  $x \in G \setminus H$  é punto interior de  $G \setminus H$ , polo que  $G \setminus H$  é aberto e  $H$  pechado:

(i) Se  $Vx \cap H = \emptyset$ , entón  $Vx$  é un aberto en  $G$  tal que,  $x \in Vx \subset G \setminus H$ .

(ii) Se  $Vx \cap H = \{a\}$ ,  $a$  é distinto de  $x$  xa que  $x \notin H$ , e como  $G$  é Hausdorff tense que existe un aberto  $W$  tal que  $x \in W$ ,  $a \notin W$ , así  $(Vx \cap H) \cap W = (Vx \cap W) \cap H = \emptyset$ , polo que  $x \in Vx \cap W \subset G \setminus H$ .  $\square$

**Proposición 1.18.** *Se  $H$  é un subgrupo dun grupo topolóxico  $G$ ,  $\overline{H}$  é tamén un subgrupo de  $G$ . Ademais, se  $H$  é normal,  $\overline{H}$  tamén o é.*

*Demostración.* Sabemos que  $\overline{H}$  non é baleiro xa que  $\emptyset \neq H \subset \overline{H}$ . Así, dados  $a, b \in \overline{H}$  imos ver que  $ab^{-1} \in \overline{H}$ . Isto dedúcese inmediatamente da continuidade da aplicación  $\theta_G: (x, y) \in G \times G \mapsto xy^{-1} \in G$  (proposición 1.4), xa que de  $\theta_G(H \times H) \subset H$  séguese que  $\theta_G(\overline{H \times H}) \subset \overline{H}$ .

Supoñamos que o subgrupo  $H$  de  $G$  é normal e vexamos que  $\overline{H}$  tamén o é. Como  $c_a$  é un homeomorfismo para todo  $a \in G$  (proposición 1.6),  $c_a(\overline{H}) = a\overline{H}a^{-1}$  é un pechado que contén a  $H$  (xa que  $H = aHa^{-1} \subset a\overline{H}a^{-1}$ ) e polo tanto  $\overline{H} \subset a\overline{H}a^{-1}$ , logo  $a^{-1}\overline{H}a \subset \overline{H}$  para todo  $a \in G$ .  $\square$

**Proposición 1.19.** *Sexa  $H$  un subgrupo dun grupo topolóxico  $G$  e  $K$  un subgrupo normal de  $H$ . Entón a clausura  $\overline{K}$  de  $K$  en  $G$  é un subgrupo normal de  $\overline{H}$ .*

*Demostración.* A aplicación  $f: (a, x) \in G \times G \mapsto axa^{-1} \in G$  é continua por ser composición das aplicacións continuas  $(a, x) \mapsto (a, xa^{-1}) \mapsto axa^{-1}$ . Como  $K$  é un subgrupo normal de  $H$ ,  $f(H \times K) = K$ , e pola continuidade de  $f$ ,

$$f(\overline{H \times K}) = f(\overline{H \times K}) \subset \overline{K}.$$

Como  $e \in \overline{H}$  tense a outra inclusión e concluímos que  $\overline{K}$  é subgrupo normal de  $\overline{H}$ .  $\square$

**Proposición 1.20.** *Dado un grupo topolóxico Hausdorff  $G$ , se  $H$  é un subgrupo abeliano de  $G$  entón  $\overline{H}$  é un subgrupo abeliano de  $G$ .*

*Demostración.* Supoñamos por redución ó absurdo que existen  $a, b \in \overline{H}$  tales que  $ab \neq ba$ . Como  $G$  é Hausdorff existen  $U_1, U_2$  veciñanzas abertas de  $ab$  e  $ba$ , respectivamente, tales que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , e por 1.2 existen veciñanzas abertas  $V_1, V_2$  de  $a$  e  $W_1, W_2$  de  $b$  tales que  $V_1W_1 \subset U_1$ , e  $W_2V_2 \subset U_2$ . Definimos entón  $V = V_1 \cap V_2$  e  $W = W_1 \cap W_2$ , que son veciñanzas abertas de  $a$  e  $b$  respectivamente, e como  $a, b \in \overline{H}$  existen  $x \in V \cap H$  e  $y \in W \cap H$ . Así

$$xy \in (V \cap H)(W \cap H) \subset V_1W_1 \subset U_1,$$

$$yx \in (W \cap H)(V \cap H) \subset W_2V_2 \subset U_2,$$

e como  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ,  $xy \neq yx$ , polo que  $H$  non sería abeliano, e chegamos a unha contradición.  $\square$

**Proposición 1.21.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico Hausdorff e  $F$  un subconxunto de  $G$ . O conxunto*

$$\mathcal{Z}(F) = \{x \in G \mid xy = yx \ \forall y \in F\}$$

*é pechado. En particular, o centro de  $G$  é pechado.*

*Demostración.* Sexa  $y \in F$ . A diagonal  $\{(x, x) \in G \mid x \in G\}$  é pechada xa que  $G$  é Hausdorff, logo

$$\mathcal{Z}(\{y\}) = \{x \in G \mid r_y(x) = xy = yx = l_y(x)\}$$

é pechado por ser a imaxe inversa da diagonal pola aplicación continua (1.6)  $x \mapsto (r_y(x), l_y(x))$ . Dado que  $\mathcal{Z}(F) = \bigcap_{y \in F} \mathcal{Z}(\{y\})$ ,  $\mathcal{Z}(F)$  é pechado.  $\square$

**Proposición 1.22.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico.*

- (a) *Se  $H$  é un subgrupo aberto de  $G$  entón tamén é pechado.*
- (b) *Se  $H$  é un subgrupo pechado de  $G$  de índice finito entón é aberto.*

*Demostración.* Demostremos (a) e (b) conxuntamente. Como  $G = \bigcup_{a \in H} Ha$ , e  $Ha = H$  se, e só se,  $a \in H$ , tense

$$H = G \setminus \left( \bigcup_{a \notin H} Ha \right).$$

Así se  $H$  é aberto, cada  $Ha$  é aberto pola proposición 1.10 e temos que  $H$  é o complementario dunha unión arbitraria de abertos, polo que  $H$  é pechado.

Se  $H$  é pechado, por 1.10 cada  $Ha$  é pechado e como  $H$  é de índice finito (é dicir, hai un número finito de clases  $Ha$ ),  $H$  é o complementario dunha unión finita de pechados, entón  $H$  é aberto.  $\square$

### 1.3. Cocientes

Sexa  $G$  un grupo topolóxico. Se  $H$  é un subgrupo de  $G$  consideramos a relación de equivalencia en  $G$  definida por

$$a, b \in G, a \sim_H b \text{ se } ab^{-1} \in H,$$

que da lugar ao conxunto cociente de clases de  $H$  pola dereita

$$G/H = \{Ha \mid a \in G\},$$

e de modo similar podería considerarse o conxunto cociente de clases pola esquerda. A proxección natural  $\pi: G \rightarrow G/H$  está dada por  $\pi(a) = Ha$ , e é unha aplicación sobrexectiva que define a *topoloxía cociente* de  $G/H$ , de modo que un subconxunto  $W$  de  $G/H$  é aberto (respectivamente, pechado) en  $G/H$  se, e só se,  $\pi^{-1}(W)$  é aberto (resp., pechado) en  $G$ , así que  $\pi: G \rightarrow G/H$  é unha identificación (por ende continua). Coa topoloxía cociente,  $G/H$  chámase *espazo cociente de  $G$  por  $H$* .

Dado un grupo topolóxico  $G$  e un subgrupo topolóxico  $H$ , imos sempre supoñer que o cociente  $G/H$  ten a topoloxía cociente.

Imos ver primeiro algúns resultados para espazos cocientes  $G/H$  sen ter que ser  $H$  subgrupo topolóxico normal.

**Proposición 1.23.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico. Se  $H$  é un subgrupo de  $G$  entón  $G/H$  é discreto se, e só se,  $H$  é aberto en  $G$ .*

*Demostración.*  $G/H$  ten a topoloxía discreta se, e só se,  $\{Hx\}$  é aberto en  $G/H$  para todo  $x \in G$ . Isto último ocorre se, e só se, para todo  $x \in G$ ,  $\pi^{-1}(\{Hx\}) = Hx$  é aberto en  $G$ , xa que  $G/H$  ten a topoloxía cociente. Que  $Hx$  sexa aberto para todo  $x \in G$  equivale, pola proposición 1.10, a que  $H$  sexa aberto.  $\square$

**Proposición 1.24.** *Se  $H$  é un subgrupo dun grupo topolóxico  $G$  entón a proxección natural  $\pi: G \rightarrow G/H$  é aberta.*

*Demostración.* Se  $V \subset G$  entón

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = HV = \bigcup_{y \in H} yV = \bigcup_{y \in H} l_y(V).$$

Se  $V$  é aberto, como cada  $l_y$  é un homeomorfismo (proposición 1.6),  $l_y(V)$  é aberto en  $G$ , entón  $\pi^{-1}(\pi(V))$  é aberto. Pola definición de topoloxía cociente,  $\pi(V)$  é aberto en  $G/H$ .  $\square$

No caso de que o subgrupo  $H$  de  $G$  sexa normal entón  $G/H$  é un grupo, e tense a seguinte proposición.

**Proposición 1.25.** *Se  $G$  é un grupo topolóxico e  $H$  un subgrupo normal de  $G$  entón o espazo cociente  $G/H$ , coa súa estrutura de grupo cociente, é un grupo topolóxico (que se chama o grupo topolóxico cociente de  $G$  por  $H$ ). Neste caso a proxección  $\pi: G \rightarrow G/H$  é un homomorfismo de grupos topolóxicos aberto.*

*Demostración.* Para ver que  $G/H$  é un grupo topolóxico temos que ver que a operación do grupo cociente e a súa inversión son continuas.

$$\begin{aligned} m_{G/H}: G/H \times G/H &\longrightarrow G/H & inv_{G/H}: G/H &\longrightarrow G/H \\ (Hx, Hy) &\longmapsto Hxy, & Hx &\longmapsto Hx^{-1}. \end{aligned}$$

(a) Sexan  $Hx, Hy \in G/H$  e  $U$  unha veciñanza aberta de  $Hxy$ . Entón, como  $\pi$  é continua,  $\pi^{-1}(U)$  é unha veciñanza aberta de  $xy$  en  $G$ . Como o produto en  $G$  é continuo, por 1.2 existen veciñanzas abertas  $V, W$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, tales que  $VW \subset \pi^{-1}(U)$ . Como  $\pi$  é aberta,  $\pi(V)$  e  $\pi(W)$  son veciñanzas abertas en  $G/H$  de  $\pi(x) = Hx$  e  $\pi(y) = Hy$ , respectivamente. Se  $\pi(VW) = \pi(V)\pi(W)$  entón teríamos que  $\pi(V)\pi(W) \subset \pi(\pi^{-1}(U)) = U$ , por ser  $\pi$  sobrexectiva. Pois ben,  $\pi(VW) \subset \pi(V)\pi(W)$ , xa que se  $z \in \pi(VW)$  entón existen  $a \in V, b \in W$  tales que  $z = \pi(ab) = Hab = (Ha)(Hb) = \pi(a)\pi(b) \in \pi(U)\pi(V)$ ; a outra inclusión compróbase de xeito análogo.

(b) Da mesma maneira que no apartado (a), empregando a continuidade da inversión e que  $\pi$  é continua, aberta e sobrexectiva, chegamos a que dada unha veciñanza aberta  $U$  de  $Hx^{-1}$  existe unha veciñanza aberta  $V$  de  $Hx$  tal que  $V^{-1} \subset U$ .

Así empregando 1.2, tense que  $m_{G/H}$  e  $inv_{G/H}$  son continuas. □

**Proposición 1.26.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $H$  un subgrupo de  $G$ . Se  $K$  é un subgrupo de  $G$  que contén a  $H$ , en  $K/H$  a topoloxía como subespazo de  $G/H$  e como cociente de  $K$  por  $H$  coinciden.*

*Demostración.* Collemos a restrición no dominio e no rango da proxección canónica  $\pi: G \rightarrow G/K$ ,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}: K &\longrightarrow K/H = \pi(K) \\ x &\longmapsto Hx. \end{aligned}$$

Vexamos que  $\bar{\pi}$  é aberta como consecuencia de que  $\pi$  o é. Se  $U$  é un aberto en  $K$  entón existe un aberto  $V$  en  $G$  tal que  $U = V \cap K$ . Como  $K$  é unha unión de clases de  $H$  temos que

$$\begin{aligned}\pi(V) \cap \pi(K) &= \{Hv \mid v \in V\} \cap \{Hk \mid k \in K\} \\ &= \{Hv \mid Hv = Hk; v \in V, k \in K\} \\ &= \{Hv \mid v \in V \cap K\} = \pi(V \cap K),\end{aligned}$$

xa que se  $Hv = Hk$  entón  $v \in Hk \subset K$ . Así,  $\bar{\pi}(U) = \pi(V) \cap (K/H)$  é aberto en  $K/H$  como subespazo de  $G/H$ . Polo tanto,  $\bar{\pi}: K \rightarrow K/H \subset G/H$  é sobrexectiva, continua e aberta, así que é unha identificación, polo que a topoloxía que  $K/H$  ten como subespazo de  $G/H$  coincide coa topoloxía cociente definida por  $\bar{\pi}$ .  $\square$

**Corolario 1.27.** *Se  $H$  é un subgrupo normal dun grupo topolóxico  $G$  entón cada subgrupo topolóxico de  $G/H$  é un grupo topolóxico cociente  $K/H$ , onde  $H \subset K \subset G$ .*

*Demostración.* Se  $L$  é un subgrupo topolóxico de  $G/H$  entón  $K = \pi^{-1}(L)$  é un subgrupo de  $G$  que contén a  $H$  e o grupo cociente  $K/H$  é

$$K/H = \pi(K) = L. \quad \square$$

Agora imos ver se podemos estender os teoremas de isomorfía en grupos a grupos topolóxicos.

**Teorema 1.28** (Primeiro teorema de isomorfía de grupos topolóxicos). *Se  $f: G \rightarrow G'$  é un homomorfismo de grupos topolóxicos e  $K = \text{Ker}(f)$  entón*

$$\begin{aligned}g: G/K &\rightarrow \text{Im}(f) \\ Kx &\mapsto f(x)\end{aligned}$$

*é un homomorfismo de grupos topolóxicos, e se ademais  $f$  é aberta (ou pechada),  $g$  é un isomorfismo de grupos topolóxicos.*

*Demostración.* Consideramos o seguinte diagrama conmutativo de homomorfismos de grupos

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ \pi \downarrow & \searrow \bar{f} & \uparrow i \\ G/K & \xrightarrow{g} & \text{Im}(f) \end{array}$$

Polo primeiro teorema de isomorfía de grupos,  $g$  é un isomorfismo de grupos. A aplicación  $\bar{f}: G \rightarrow \text{Im}(f)$  é continua, porque  $f$  é continua e  $\text{Im}(f)$  é un subespazo topolóxico de  $G'$ ; e xa que  $g \circ \pi = \bar{f}$  e  $\pi: G \rightarrow G/K$  é unha identificación tense que  $g$  tamén é continua. Ademais, se  $A \subset G/K$  entón

$$g(A) = g(\pi(\pi^{-1}(A))) = (g \circ \pi)(\pi^{-1}(A)) = \bar{f}(\pi^{-1}(A)) = f(\pi^{-1}(A)).$$

Agora, por ser  $\pi$  continua,  $\pi^{-1}(A)$  é aberto (ou pechado) en  $G$  se  $A$  é aberto (ou pechado) en  $G/K$ , e se  $f$  é aberta (ou pechada) entón  $g(A) = f(\pi^{-1}(A))$  é aberto (ou pechado) en  $G'$  e polo tanto tamén o é no seu subespazo topolóxico  $\text{Im}(f)$ . Así, o isomorfismo de grupos  $g$  tamén é un homeomorfismo conque se conclúe que é un isomorfismo de grupos topolóxicos.  $\square$

**Teorema 1.29** (Segundo teorema de isomorfía de grupos topolóxicos.). *Sexan  $G$  un grupo topolóxico, e  $H$  e  $K$  dous subgrupos normais de  $G$  tales que  $K \subset H$ . Entón  $(G/K)/(H/K)$  e  $G/H$  son isomorfos como grupos topolóxicos.*

*Demostración.* A aplicación  $f: Ka \in G/K \mapsto Ha \in G/H$  é un homomorfismo de grupos sobrexectivo con  $\text{Ker}(f) = H/K$ . Entón basta ver que  $f$  é continua e aberta e aplicar o primeiro teorema de isomorfía de grupos topolóxicos. Sexan  $\pi_1$  e  $\pi_2$  as proxeccións canónicas de  $G$  en  $G/K$  e  $G/H$  respectivamente, que xa sabemos que son continuas e abertas.

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ G/K & \xrightarrow{f} & G/H \end{array}$$

Dado que  $f \circ \pi_1 = \pi_2$  é continua e  $\pi_1$  é unha identificación, tense que  $f$  é continua. Ademais,  $f$  é aberta xa que se  $V$  é aberto en  $G/K$  entón

$$\begin{aligned} f(V) &= \{Ha \in G/H \mid Ka \in V\} = \{Ha \in G/K \mid a \in \pi_1^{-1}(V)\} \\ &= \{\pi_2(a) \in G/H \mid a \in \pi_1^{-1}(V)\} = \pi_2(\pi_1^{-1}(V)), \end{aligned}$$

que é aberto en  $G/H$ .  $\square$

**Exemplos 1.30.** (a) A aplicación

$$\begin{aligned} f: \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z &\longmapsto |z| \end{aligned}$$

é un homomorfismo sobrexectivo de grupos topolóxicos. Tamén é unha aplicación aberta, xa que a imaxe por  $f$  de cada bóla aberta  $B_{\mathbb{C}^*}(z, r)$  é a intersección do intervalo aberto  $(|z| - r, |z| + r)$  con  $\mathbb{R}^+$ . O seu núcleo é  $\text{Ker}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  así que polo teorema 1.28 tense un isomorfismo de grupos topolóxicos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^*/\mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{S}^1 z &\longmapsto |z|. \end{aligned}$$

(b) Consideramos o subgrupo topolóxico  $H = \{tI_n \mid t \in \mathbb{R}^*\}$  de tódalas matrices escalares de  $GL_n(\mathbb{R})$ , que é isomorfo a  $\mathbb{R}^*$  (exemplo 1.16 (c)). Entón  $H$  é pechado en  $GL_n(\mathbb{R})$ , xa que  $\{tI_n \mid t \in \mathbb{R}\}$  é pechado en  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Por outra parte,  $H$  é un subgrupo normal de  $GL_n(\mathbb{R})$ , xa que para cada  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  tense que  $A(tI_n)A^{-1} = tAI_nA^{-1} = tI_n \in H$ . O espazo cociente é un grupo topolóxico que se chama o *grupo linear xeral proxectivo*  $PGL_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R})/H$ .

**Observación 1.31.** O teorema análogo ó terceiro teorema de isomorfía de grupos en grupos topolóxicos sería que se  $K$  e  $H$  son subgrupos dun grupo topolóxico  $G$  e  $H$  é un subgrupo normal de  $G$ , entón  $K/(K \cap H)$  e  $KH/H$  son isomorfos como grupos topolóxicos. Pero este enunciado é falso e imos ver un contraexemplo ó final da seguinte sección.

## 1.4. Subgrupos e cocientes do grupo aditivo $\mathbb{R}$

O primeiro resultado da seguinte proposición xa o vimos en 1.17 para tódolos grupos topolóxicos Hausdorff.

**Proposición 1.32.** *Sexa  $H$  un subgrupo de  $\mathbb{R}$ .*

- (a) *Se  $H$  é discreto entón  $H$  é pechado en  $\mathbb{R}$ .*
- (b) *Se  $H$  non é discreto entón  $H$  é denso en  $\mathbb{R}$ ,*

*Demostración.* Demostremos (b). Imos ver que todo intervalo de lonxitude  $\varepsilon > 0$  contén un elemento de  $H$ ; é suficiente velo para cada intervalo da forma

$(t, t + \varepsilon)$ , onde  $t \geq 0$  (xa que por ser  $H$  un subgrupo de  $\mathbb{R}$ , se  $x \in H$  entón  $-x \in H$ ). Como  $H$  non é denso, pola proposición 1.17 o 0 non é illado, así dado  $\varepsilon > 0$  existe  $x \in H \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $x \neq 0$ . Dado que se  $x \in H$  entón  $-x \in H$ , podemos supoñer que existe  $x \in H$ ,  $0 < x < \varepsilon$ , logo  $t/x \geq 0$ . Existe un enteiro positivo  $k$  tal que

$$t/x < k \leq t/x + 1 = (t + x)/x < (t + \varepsilon)/x.$$

Polo tanto  $t < kx < t + \varepsilon$ , conque  $(t, t + \varepsilon) \cap H \neq \emptyset$ .  $\square$

**Teorema 1.33.** *Se  $H$  é un subgrupo pechado de  $\mathbb{R}$  distinto de  $\mathbb{R}$  e do subgrupo trivial  $\{0\}$  entón*

$$H = \lambda\mathbb{Z} = \{\lambda m \mid m \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

así que  $H$  é un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}$  isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Como acabamos de ver que todo subgrupo de  $\mathbb{R}$  non discreto é denso en  $\mathbb{R}$ , entón o único subgrupo pechado non discreto de  $\mathbb{R}$  é  $\mathbb{R}$ . Así, vexamos que todo subgrupo discreto distinto do trivial é da forma  $\lambda\mathbb{Z}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ .

Se  $H \neq \{0\}$  é un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}$  entón  $H$  ten un elemento distinto do cero, e como  $H$  é subgrupo, contén ó seu inverso, polo que  $H$  ten elementos estritamente positivos. Sexa  $b \in H, b > 0$ ; entón  $[0, b] \cap H$  é compacto (xa que é acotado e intersección de dous pechados) e discreto (subespazo de  $H$ , que é discreto), así  $[0, b] \cap H$  é finito, xa que dado o recubrimento por abertos unitarios existe un subrecubrimento finito. Sexa  $\lambda = \text{mín}([0, b] \cap H)$ , e dado  $x \in H$ ,  $m = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x/\lambda\}$ , así  $x - \lambda m \in H$  e  $0 \leq x - \lambda m < \lambda$ . Como  $\lambda$  é o menor elemento estritamente positivo de  $H$ ,  $\lambda m = x$  e como  $x \in H$  é arbitrario,  $H \subset \lambda\mathbb{Z}$ . A inclusión inversa é evidente xa que se  $m \in \mathbb{Z}$  entón  $\lambda m \in H$  xa que  $\lambda \in H$  e  $H$  é un subgrupo de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Como consecuencia tense o seguinte resultado, que tamén ten unha demostración alxébrica sinxela usando o algoritmo de Euclides.

**Corolario 1.34.** *Se  $H$  é un subgrupo de  $\mathbb{Z}$  distinto de  $\mathbb{Z}$  e de  $\{0\}$ ,*

$$H = \lambda\mathbb{Z} = \{\lambda m \mid m \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{Z}, \lambda > 1.$$

*Demostración.* Sexa  $H$  subgrupo de  $\mathbb{Z}$  distinto de  $\mathbb{Z}$  e de  $\{0\}$ . Como  $\mathbb{Z}$  é discreto e  $\mathbb{Z}$  é subgrupo de  $\mathbb{R}$ ,  $H$  tamén herda ámbalas dúas propiedades e entón, pola proposición 1.32,  $H$  vai ser un subgrupo pechado de  $\mathbb{R}$ . Así pola proposición anterior,  $H = \lambda\mathbb{Z} = \{\lambda m \mid m \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}\}$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ .

Vexamos que  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda > 1$ : se  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ; e se  $\lambda \notin \mathbb{Z}$ ,  $\lambda\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{Z}$  xa que  $\lambda = \lambda 1 \in \lambda\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ . Como temos que  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda > 0$ , e  $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ , concluímos.  $\square$

**Proposición 1.35.** *Se  $H$  é un subgrupo pechado de  $\mathbb{R}$  distinto de  $\mathbb{R}$  e  $\{0\}$  entón o grupo cociente  $\mathbb{R}/H$  é isomorfo ó grupo multiplicativo  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ .*

*Demostración.* Polo teorema 1.33,  $H = \lambda\mathbb{Z}$  para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ . A aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto e^{2\pi i x/\lambda} \end{aligned}$$

é un homomorfismo de grupos topolóxicos, xa que é continua e, para cada  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) = e^{2\pi i x/\lambda} e^{2\pi i y/\lambda} = e^{2\pi i(x+y)/\lambda} = \varphi_\lambda(x+y),$$

e é aberta (é un homeomorfismo local). O seu núcleo é

$$\text{Ker}(\varphi_\lambda) = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{2\pi i x/\lambda} = 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x/\lambda \in \mathbb{Z}\} = \lambda\mathbb{Z} = H,$$

e  $\varphi_\lambda$  é sobrexectivo xa que dado  $e^{2\pi i x} \in \mathbb{S}^1$ ,  $\varphi_\lambda(\lambda x) = e^{2\pi i x}$ . Entón polo primeiro teorema de isomorfía,  $\mathbb{R}/H$  é isomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .  $\square$

**Teorema 1.36.** *Se  $K$  é un subgrupo pechado de  $\mathbb{S}^1$  distinto de  $\mathbb{S}^1$  entón*

$$K = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid z^n = 1\} \quad \text{para algún } n \in \mathbb{Z}, n > 0,$$

*así que  $K$  é un grupo cíclico finito e un subgrupo discreto de  $\mathbb{S}^1$ . Ademais o grupo topolóxico cociente  $\mathbb{S}^1/K$  é isomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .*

*Demostración.* Consideramos o homomorfismo de grupos  $\varphi_1$  definido na anterior proposición, así que  $\mathbb{Z} = \text{Ker}(\varphi_1)$ . Esta aplicación é continua, polo que  $K' = \varphi_1^{-1}(K)$  é pechado en  $\mathbb{R}$  ó selo  $K$  en  $\mathbb{S}^1$ . Como  $1 \in K$ , entón  $\mathbb{Z} = \text{Ker}(\varphi_1) \subset K'$  e  $K'$  non pode ser  $\{0\}$ . Tampouco pode ser  $\mathbb{R}$ , xa que

$K \neq \mathbb{S}^1$  e a aplicación  $\varphi_1$  é sobrexectiva (se  $K' = \mathbb{R}$ , entón  $K = \varphi_1(K') = \mathbb{S}^1$ ). Pola proposición 1.33,  $K' = \lambda\mathbb{Z}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$ . Entón

$$K = \varphi_1(\varphi_1^{-1}(K)) = \varphi_1(\lambda\mathbb{Z}) = \left\{ e^{2\pi i \lambda k} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Como  $\mathbb{Z} \subset K' = \lambda\mathbb{Z}$ , existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $1 = \lambda n$ , logo,  $\lambda = 1/n$ ; así,

$$\begin{aligned} K &= \left\{ e^{2\pi i k/n} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ (e^{2\pi i/n})^k \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ (e^{2\pi i/n})^k \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq n \right\} = \{z \in \mathbb{S}^1 \mid z^n = 1\}, \end{aligned}$$

que é un subgrupo finito cíclico, e como é finito nun espazo métrico, a súa topoloxía como subespazo é a discreta.

Por outra banda, a restrición de  $\varphi_1$  seguinte

$$\begin{aligned} f: K' &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto e^{2\pi i x} \end{aligned}$$

é un homomorfismo de grupos topolóxicos sobrexectivo e aberto e o seu núcleo é  $\mathbb{Z}$  (ó ser  $\mathbb{Z} = \text{Ker}(\varphi_1) \subset K'$ ). Entón polo primeiro teorema de isomorfía,  $K$  é isomorfo á  $K'/\mathbb{Z}$ . Ademais  $\mathbb{S}^1$  é isomorfo a  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  e así  $\mathbb{S}^1/K$  é isomorfo a  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})/(K'/\mathbb{Z})$ , e isto polo segundo teorema de isomorfía é isomorfo a  $(\mathbb{R}/K')$ , que é isomorfo a  $\mathbb{S}^1$ , pola proposición 1.35.  $\square$

**Observación 1.37.** O teorema análogo ó terceiro teorema de isomorfía de grupos en grupos topolóxicos sería que se  $K$  e  $H$  son subgrupos dun grupo topolóxico  $G$  e  $H$  é un subgrupo normal de  $G$ , entón  $K/(K \cap H)$  e  $KH/H$  son isomorfos como grupos topolóxicos. Pero este enunciado é falso, como imos ver cun exemplo. Collamos como  $G$  o grupo aditivo  $\mathbb{R}$  coa topoloxía usual,  $H = \mathbb{Z}$  e  $K = \lambda\mathbb{Z}$ , con  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Así  $K \cap H = \{0\}$ , e entón  $K/(K \cap H) = K$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  coa topoloxía discreta.

Pero  $K + H = \mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$  é denso en  $\mathbb{R}$ , como imos ver. Pola proposición 1.32 e o teorema 1.33, os subgrupos de  $\mathbb{R}$  ou son densos ou son da forma  $\lambda'\mathbb{Z}$  ou son o  $\{0\}$ . Como claramente  $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$  non é o cero, vexamos por redución ó absurdo que  $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z} \neq \lambda'\mathbb{Z}$  para todo  $\lambda' \in \mathbb{Z}$ . Supoñamos que existe  $\lambda'$  tal que  $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z} = \lambda'\mathbb{Z}$ ; entón, os elementos 1 e  $\lambda$  de  $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$  pertencerían a  $\lambda'\mathbb{Z}$ , logo  $1 = p\lambda'$  e  $\lambda = \lambda'q$  para algúns  $p, q \in \mathbb{Z}$ , e  $\lambda = q/p$  sería racional.

Así  $(K + H)/H = (\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$  é denso en  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  que é isomorfo como grupo topolóxico ó grupo multiplicativo  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$  (proposición 1.35) pero como este

grupo multiplicativo non ten a topoloxía discreta (xa que calquera aberto non baleiro de  $\mathbb{C}$  que interseca a  $\mathbb{S}^1$  o fai en infinitos elementos) non pode ser isomorfo a  $\mathbb{Z}$  como grupo topolóxico (o é como grupo).

## 1.5. Produtos

Sexa  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  unha familia de grupos topolóxicos. Podemos definir unha estrutura de grupo no conxunto produto cartesiano

$$G = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \mid x_\alpha \in G_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{A}\}$$

facendo a operación compoñente a compoñente, isto é,

$$m_G: G \times G \longrightarrow G$$

$$((x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, (y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}) \longmapsto (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}(y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} = (x_\alpha y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}},$$

así o elemento neutro é  $e = (e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , onde  $e_\alpha$  é o elemento neutro de  $G_\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , e a inversión é

$$inv_G: G \longrightarrow G$$

$$(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \longmapsto (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}^{-1} = (x_\alpha^{-1})_{\alpha \in \mathcal{A}}.$$

Por outra banda, en  $G$  consideramos a topoloxía produto, que está xerada pola base formada polos conxuntos  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$ , onde cada  $U_\alpha$  é aberto en  $G_\alpha$  e  $U_\alpha = G_\alpha$  para case todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Con esta topoloxía,  $G = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$  é o espazo topolóxico produto, e cúmprese:

- Cada proxección

$$p_\alpha: (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in G \longmapsto x_\alpha \in G_\alpha$$

é unha aplicación continua e aberta.

- A topoloxía produto de  $G$  é a máis pequena en  $G$  para a que tódalas proxeccións son continuas.
- Unha aplicación con valores en  $G$  é continua se, e só se, o é a súa composición con cada proxección  $p_\alpha$ .

Imos ver que que a estrutura alxébrica e a topolóxica son compatibles empregando algunhas das propiedades da topoloxía produto mencionadas antes.

**Proposición 1.38.** *Se  $\{G_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  é unha familia de grupos topolóxicos entón  $G = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ , coa operación  $m_G$  e coa topoloxía produto, é un grupo topolóxico, que se chama o grupo topolóxico produto da familia de grupos topolóxicos  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ .*

*Demostración.* A aplicación

$$\begin{aligned} \theta_G: G \times G &\longrightarrow G \\ ((x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, (y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}) &\longmapsto (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}(y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}^{-1} = (x_\alpha y_\alpha^{-1})_{\alpha \in \mathcal{A}} \end{aligned}$$

é continua xa que pola conmutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\theta_G} & G \\ p_\alpha \times p_\alpha \downarrow & & \downarrow p_\alpha \\ G_\alpha \times G_\alpha & \xrightarrow{\theta_{G_\alpha}} & G_\alpha \end{array}$$

tense que a composición de  $\theta_G$  con cada proxección

$$p_\alpha \circ \theta_G = \theta_{G_\alpha} \circ (p_\alpha \times p_\alpha): ((x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, (y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}) \mapsto x_\alpha y_\alpha^{-1} = \theta_{G_\alpha}(x_\alpha, y_\alpha)$$

é composición de aplicacións continuas.  $\square$

**Proposición 1.39.** *Se  $\{f_\alpha: G_\alpha \rightarrow G'_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  é unha familia de homomorfismos de grupos topolóxicos entón o seu produto cartesiano*

$$\begin{aligned} f = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha: G = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha &\longrightarrow G' = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G'_\alpha \\ (x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} &\longmapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{A}} \end{aligned}$$

*é un homomorfismo de grupos topolóxicos.*

*Demostración.* A aplicación  $f$  é trivialmente un homomorfismo de grupos e, pola conmutatividade do seguinte diagrama,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G' \\ p_\alpha \downarrow & & \downarrow p'_\alpha \\ G_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & G'_\alpha \end{array}$$

a continuidade séguese de que a composición de  $f$  con cada proxección  $p'_\alpha: G' \rightarrow G'_\alpha$  é a aplicación continua  $f_\alpha \circ p_\alpha$ .  $\square$

**Proposición 1.40.** *Se  $f$  é o produto cartesiano dunha familia de aplicacións abertas  $\{f_\alpha: G_\alpha \rightarrow G'_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  e  $f_\alpha$  é sobrexectiva para case todo  $\alpha \in \mathcal{A}$  entón  $f$  é aberta.*

*Demostración.* Se  $B = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  é un aberto básico da topoloxía produto de  $G$  entón

$$f(B) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(U_\alpha)$$

é aberto en  $G'$ , xa que  $f_\alpha(U_\alpha)$  é aberto en  $G'_\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$  por ser  $f_\alpha$  aberta e como  $U_\alpha = G_\alpha$  para case todo  $\alpha \in \mathcal{A}$  e case tódalas  $f_\alpha$  son sobrexectivas, tamén  $f_\alpha(U_\alpha) = G'_\alpha$  para case todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Polo tanto, a imaxe directa de cada aberto en  $G$  tamén é aberto en  $G'$ .  $\square$

**Observación 1.41.** Por outra parte, se  $f = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha$  é aberta entón  $f_\alpha$  é aberta para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , xa que se  $V$  é un aberto en  $G_\alpha$  e consideramos  $U = \prod_{\gamma \in \mathcal{A}} U_\gamma$ , onde

$$U_\gamma = \begin{cases} V & \text{se } \gamma = \alpha \\ G_\gamma & \text{se } \gamma \neq \alpha, \end{cases}$$

entón  $f_\alpha(V) = (p'_\alpha \circ f)(U)$  é aberto en  $G'_\alpha$ .

**Proposición 1.42.** *Sexa  $G = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$  un produto de grupos topolóxicos, e  $H = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} H_\alpha$  onde cada  $H_\alpha$  é un subgrupo de  $G_\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Entón  $H$  é un subgrupo de  $G$ . Ademais, se cada  $H_\alpha$  é un subgrupo normal entón  $H$  tamén é normal e  $G/H$  é isomorfo a  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (G_\alpha/H_\alpha)$ .*

*Demostración.* É evidente que  $H$  é un subgrupo de  $G$ , xa que  $H$  contén a  $e = (e_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$  pois  $e_\alpha \in H_\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , e se  $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}, (y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in H$ , entón  $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}^{-1} (y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} = (x_\alpha^{-1} y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in H$  xa que  $x_\alpha^{-1} y_\alpha \in H_\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Supoñamos agora que para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,  $H_\alpha$  é un subgrupo normal de  $G_\alpha$ , así que podemos considerar o grupo topolóxico produto da familia de grupos topolóxicos  $\{G_\alpha/H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  e a aplicación  $\pi$  produto da familia de proxeccións

$$\pi_\alpha: G_\alpha \rightarrow G_\alpha/H_\alpha, \alpha \in \mathcal{A},$$

$$\pi: G \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (G_\alpha/H_\alpha)$$

$$(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \longmapsto (H_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}},$$

que é unha aplicación sobrexectiva, un homomorfismo de grupos topolóxicos pola proposición 1.39, e aberta pola proposición 1.40. Ademais,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\pi) &= \{(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in G \mid (H_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} = (H_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}\} \\ &= \{(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in G \mid x_\alpha \in H_\alpha \forall \alpha \in \mathcal{A}\} = H, \end{aligned}$$

e polo primeiro teorema de isomorfía 1.28,  $\pi$  define un isomorfismo de grupos topolóxicos

$$G/H \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha/H_\alpha$$

$$H(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \longmapsto (H_\alpha x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}.$$

□

**Exemplos 1.43.** (a) O grupo topolóxico aditivo  $\mathbb{R}$  define o grupo topolóxico produto  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  e a súa topoloxía coincide coa topoloxía usual de  $\mathbb{R}^n$ . O subgrupo  $\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{R}$  da lugar ó grupo topolóxico produto  $\mathbb{Z}^n$ , que tamén é subgrupo topolóxico de  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Como  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$  é un grupo topolóxico abeliano co produto, tamén o é o  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ . Xa que  $\mathbb{S}^1$  é isomorfo a  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , pola proposición 1.42,  $\mathbb{T}^n$  é isomorfo a  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ .

(c) O cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  e os cilindros xeneralizados  $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  son grupos topolóxicos produtos.

(d) Dado un conxunto calquera  $\mathcal{A}$  e un grupo topolóxico  $G$ , o conxunto de tódalas aplicacións de  $\mathcal{A}$  en  $G$  ten unha estrutura de grupo topolóxico produto  $G^{\mathcal{A}} = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$ , ( $G_\alpha = G$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ ). A súa topoloxía produto chámase tamén “topoloxía da converxencia puntual”. Se  $\mathcal{A}$  é un espazo topolóxico, o conxunto  $\mathcal{C}(\mathcal{A}, G)$  das aplicacións continuas de  $\mathcal{A}$  en  $G$  é un subgrupo topolóxico de  $G^{\mathcal{A}}$ .

(e) En particular pódense considerar o grupo topolóxico  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  das funcións reais de variable real, o grupo das sucesión de números reais  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , o seu subgrupo  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ , e o grupo cociente  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ , que é isomorfo ó toro infinito  $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} \cong (\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$ .

## 1.6. Bases locais

Unha base local dun punto  $x$  nun espazo topolóxico é unha familia  $\mathcal{B}_x$  de veciñanzas de  $x$  tal que cada veciñanza de  $x$  contén algún  $B \in \mathcal{B}_x$ . Nos grupos topolóxicos as veciñanzas nun punto poden trasladarse (pola dereita ou pola esquerda) para dar lugar a veciñanzas noutro punto.

Por exemplo, se  $A$  é unha veciñanza nun grupo topolóxico  $G$  de  $x \in G$  entón para todo  $a \in G$ ,  $Aa$  é unha veciñanza de  $xa$ , e así se  $\mathcal{B}_x$  é unha base local de  $x \in G$  e  $a \in G$  entón  $\mathcal{B}_{xa} = \{Ba \mid B \in \mathcal{B}_x\}$  é unha base local de  $xa$ . Pola proposición 1.10, para todo  $a \in G$ , o conxunto  $Ua$  é aberto se, e só se,  $U$  o é, e así  $\mathcal{B}_{xa}$  é base local de abertos se, e so sé  $\mathcal{B}_x$  é base local de abertos. Todo isto é análogo para “trasladar pola esquerda” veciñanzas e veciñanzas básicas.

Empregando isto tense o seguinte resultado:

**Lema 1.44.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $\mathcal{B}_e$  unha base local de veciñanzas abertas do elemento neutro  $e \in G$ . Entón, para cada  $a \in G$ , a familia  $\mathcal{B}_a = \{Ba \mid B \in \mathcal{B}_e\}$  é unha base local de veciñanzas abertas de  $a$*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{a \in G} \mathcal{B}_a = \{Ba \mid B \in \mathcal{B}_e, a \in G\}$$

é unha base da topoloxía de  $G$ .

**Observación 1.45.** Como a aplicación inversión  $inv_G$  dun grupo topolóxico  $G$  é continua, dado un aberto  $U$ ,  $inv_G^{-1}(U) = U^{-1}$  é aberto. Así, se  $U$  é unha veciñanza aberta de  $e$ ,  $U^{-1}$  tamén o é. Logo  $W = U \cap U^{-1}$  é unha veciñanza aberta simétrica, é dicir,  $W = W^{-1}$ . Aparte, se  $U$  tamén é subgrupo,  $W = U = U^{-1}$ .

Agora imos ver como dado un grupo, pódese xerar un espazo topolóxico compatible a partires de subconxuntos de  $G$  que conteñen a  $e$ , o que vai dar lugar a unha base local de veciñanzas abertas de  $e$ .

**Proposición 1.46.** *Sexa  $G$  un grupo, e sexa  $\mathcal{B}_e \subset \mathcal{P}(X)$  tal que cumpre as seguintes condicións:*

- (a)  $\mathcal{B}_e \neq \emptyset$ .
- (b) Para todo  $B \in \mathcal{B}_e$ ,  $e \in B$ .

- (c) Para todo  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_e$  existe  $B_3 \in \mathcal{B}_e$  tal que  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .
- (d) Para todo  $B \in \mathcal{B}_e$  e para todo  $a \in B$  existe  $B' \in \mathcal{B}_e$  tal que  $B'a \subset B$ .
- (e) Para todo  $B \in \mathcal{B}_e$  existe  $B_o \in \mathcal{B}_e$  tal que  $B_o^{-1}B_o \subset B$ .
- (f) Para todo  $B \in \mathcal{B}_e$  e para todo  $a \in G$  existe  $B' \in \mathcal{B}_e$  tal que  $a^{-1}B'a \subset B$ .

Entón existe unha única topoloxía en  $G$  que fai a  $G$  grupo topolóxico tal que  $\mathcal{B}_e$  é unha base local de abertos en  $e$ .

*Demostración.* Dividimos a demostración en dúas partes. Primeiro imos ver que  $\mathcal{B} = \{Ba \mid B \in \mathcal{B}_e, a \in G\}$  xera unha topoloxía en  $G$  e despois que esa topoloxía é compatible coa estrutura de grupo. A unicidade séguese de que, para esa topoloxía,  $\mathcal{B}_e$  será unha base local de veciñanzas abertas de  $e$ , polo tanto, a familia  $\mathcal{B}$  así definida é necesariamente unha base da topoloxía.

Para o primeiro, basta comprobar que se cumpren as propiedades que fan que  $\mathcal{B}$  sexa unha base dunha topoloxía en  $G$ :

(i) Dado  $x \in G$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B$ : Se  $x \in G$  e  $B_e \in \mathcal{B}_e$  (podemos coller un elemento xa que  $\mathcal{B}_e \neq \emptyset$ ) entón, como  $e \in B_e$ ,  $x \in B_ex$  e  $B = B_ex \in \mathcal{B}$ .

(ii) Dados  $B_1a, B_2b \in \mathcal{B}$  e para todo  $x \in B_1a \cap B_2b$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset B_1a \cap B_2b$ : En efecto, existen  $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$  tales que  $b_1 = xa^{-1}$  e  $b_2 = xb^{-1}$ . Por (d) existen  $B'_1, B'_2 \in \mathcal{B}_e$  tales que  $B'_1b_1 \subset B_1$  e  $B'_2b_2 \subset B_2$  e así  $B'_1x \subset B_1a$  e  $B'_2x \subset B_2b$ ; e por (c) existe  $B_3 \in \mathcal{B}_e$  tal que  $B_3 \subset B'_1 \cap B'_2$ . Polo tanto,  $B = B_3x \in \mathcal{B}$  é tal que  $x \in B \subset B'_1x \cap B'_2x \subset B_1a \cap B_2b$ .

Para ver o segundo, chega con ver que a aplicación

$$f: (x, y) \in G \times G \mapsto x^{-1}y \in G$$

é continua. Como  $\mathcal{B}$  é base da topoloxía de  $G$ , basta demostrar que a imaxe inversa de cada elemento de  $\mathcal{B}$  é aberto en  $G \times G$ . Sexa  $Ba \in \mathcal{B}$ , onde  $B \in \mathcal{B}_e$ , e sexa  $(x, y) \in f^{-1}(Ba)$  e vexamos que  $(x, y)$  é un punto interior de  $f^{-1}(Ba)$ . Como  $f(x, y) = x^{-1}y \in Ba$ , existe  $b \in B$  tal que  $x^{-1}y = ba$ . Por (d) existe  $B' \in \mathcal{B}_e$  tal que  $B'b \subset B$  e por (f) existe  $B'' \in \mathcal{B}_e$  tal que  $x^{-1}B''x \subset B'$ . Así,  $x^{-1}B''ya^{-1} = x^{-1}B''xb \subset B'b \subset B$ ; agora, por (e) existe  $B_o \in \mathcal{B}_e$  tal que  $B_o^{-1}B_o \subset B''$ , e entón temos que  $x^{-1}B_o^{-1}B_oya^{-1} \subset B$ , logo  $(B_o x)^{-1}(B_o y) \subset Ba$ , e polo tanto  $(B_o x) \times (B_o y)$  é un aberto da topoloxía

produto de  $G \times G$  tal que

$$(x, y) \in (B_o x) \times (B_o y) \subset f^{-1}(Ba). \quad \square$$

**Corolario 1.47.** *Sexa  $G$  un grupo, e sexa  $\mathcal{B}_e \subset \mathcal{P}(X)$  tal que cumpre as seguintes condicións:*

- (a)  $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- (b) Cada  $B \in \mathcal{B}_e$  é un subgrupo de  $G$ .
- (c) Para todo  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_e$  existe  $B_3 \in \mathcal{B}_e$  tal que  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .
- (d) Para todo  $B \in \mathcal{B}_e$  e para todo  $a \in G$  existe  $B' \in \mathcal{B}_e$  tal que  $a^{-1}B'a \subset B$ .

*Entón existe unha única topoloxía en  $G$  que fai a  $G$  grupo topolóxico e na que  $\mathcal{B}_e$  é unha base local de veciñanzas abertas de  $e$ .*

*Demostración.* É inmediato que tamén se cumpren as propiedades (d) e (e) da proposición 1.46, xa que por ser  $B$  un subgrupo de  $G$  basta tomar  $B' = B$  en (d) e  $B_o = B$  en (e).  $\square$

Así se temos un grupo podémoslle dar estrutura de grupo topolóxico collendo como base local de veciñanzas abertas do elemento neutro unha colección de subgrupos que conteñan a tódolos seus conxugados e ás interseccións finitas .

**Exemplos 1.48.** (a) A base local  $\mathcal{B}_e = \{\{e\}\}$  do elemento neutro  $e$  dun grupo  $G$  define a topoloxía discreta de  $G$ .

(b) Para cada número primo  $p$  defínese unha topoloxía no grupo  $\mathbb{Z}$  que se chama a *topoloxía  $p$ -ádica* de  $\mathbb{Z}$ . Para esta topoloxía, a familia de subgrupos  $\mathcal{B}_0 = \{p^n \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$  é unha base local de veciñanzas abertas de 0. Forman unha cadea

$$\mathbb{Z} \supset p\mathbb{Z} \supset p^2\mathbb{Z} \supset \dots \supset p^n\mathbb{Z} \supset \dots,$$

así que os múltiplos enteiros de potencias elevadas de  $p$  están en veciñanzas pequenas de 0.

(c) Dado un número primo  $p$ , para cada  $k \in \mathbb{Z}$  o conxunto

$$U_k = \left\{ p^k \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \text{ non é múltiplo de } p \right\}$$

é un subgrupo de  $\mathbb{Q}$ . A familia  $\mathcal{B}_0 = \{U_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  forma unha cadea

$$\cdots \supset U_{-1} \supset U_0 \supset U_1 \supset \cdots$$

de subgrupos de  $\mathbb{Q}$ , e é unha base local de veciñanzas abertas do 0 para a *topoloxía p-ádica* de  $\mathbb{Q}$ .

(d) Sexa  $R$  un anel conmutativo e  $R[x]$  o anel das series de potencias

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}.$$

Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ ,  $B_n = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\} = R[x]x^n$  é un subgrupo aditivo do grupo  $R[x]$ , e tense que  $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ , e a familia  $\mathcal{B}_0 = \{B_n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$  é unha base local de veciñanzas abertas de 0 que xera unha estrutura de grupo topolóxico no grupo aditivo  $R[x]$ , xa que os conxugados dos  $B_n$  son os  $B_n$  e dados dous  $B_n, B_m \in \mathcal{B}_0$ ,  $B_n \cap B_m = B_{\max\{n,m\}} \in \mathcal{B}_0$ .

De feito, a estrutura de grupo topolóxico fai tamén continuo o produto de series xa que a imaxe recíproca dun elemento  $B_n$  de  $\mathcal{B}_e$  é

$$\bigcup_{i,j \in \mathbb{N}, i+j=n} B_i \times B_j$$

que é aberto na topoloxía produto. Bastounos considerar a imaxe recíproca das veciñanzas de 0 pola homoxenidade do grupo topolóxico  $R[x]$ . Así, como a topoloxía é compatible coas operacións do anel,  $R[x]$  sería un anel topolóxico.

## Capítulo 2

# Axiomas de separación e grupos metrizables

### 2.1. Axiomas de separación

Dise que un espazo topolóxico é

- $T_0$  (ou de Kolmogoroff) se para cada par de puntos distintos  $x, y$  hai un aberto  $U$  que contén a un dos dous puntos pero non ó outro:  $x \in U$ ,  $y \notin U$  ou  $y \in U$ ,  $x \notin U$ .
- $T_1$  (ou Fréchet) se para cada dous puntos distintos  $x, y$  existen veciñanzas  $U$  de  $x$  e  $V$  de  $y$  tales que  $y \notin U$  e  $x \notin V$ , (equivalentemente, se cada conxunto unitario  $\{x\}$  é pechado);
- $T_2$  (ou Hausdorff) se dados dous puntos distintos  $x, y$  teñen veciñanzas  $U$  e  $V$  disxuntas:  $x \in U$ ,  $y \in V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ .
- $T_3$  se é  $T_1$  e *regular* (para cada punto  $x$  e cada pechado  $F$ ,  $x \notin F$ , existen abertos  $U$  e  $V$  tales que  $x \in U$ ,  $F \subset V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ ; ou, equivalentemente para cada punto  $x$  existe unha base local de veciñanzas pechadas de  $x$ );
- $T_4$  se é  $T_1$  e *normal* (cada dous pechados disxuntos  $A, B$  están contidos en abertos  $U, V$  disxuntos:  $A \subset U$ ,  $B \subset V$ ,  $U \cap V = \emptyset$ ).

Entre estas propiedades de separación téñense as relacións

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0,$$

pero no caso dos grupos topolóxicos algunhas destas relacións van ser equivalentes.

**Proposición 2.1.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $\mathcal{B}$  unha base local de veciñanzas de  $e$ . Entón as seguintes afirmacións son equivalentes:*

- (a)  $G$  é Hausdorff.
- (b) A diagonal  $\delta: x \in G \mapsto (x, x) \in G \times G$  é unha aplicación pechada.
- (c) Dado un grupo topolóxico  $G'$  e un homomorfismo de grupos topolóxicos entre  $G'$  e  $G$ , o núcleo do homomorfismo é un subgrupo pechado de  $G'$ .
- (d)  $\{e\}$  é un pechado de  $G$ .
- (e)  $G$  é  $T_1$ .
- (f) A intersección dos elementos de  $\mathcal{B}$  é  $\{e\}$ .
- (g) A intersección de todas as veciñanzas de  $e$  é  $\{e\}$ .

*Demostración.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Cúmrese para todo espazo topolóxico. Sexa  $A$  un subconxunto pechado de  $G$  e  $(x, y) \in G \times G \setminus \delta(A)$ . Se  $x \neq y$  existen abertos  $U$  e  $V$  en  $G$  tales que  $(x, y) \in U \times V$  e  $U \cap V = \emptyset$ , logo  $(U \times V) \cap \delta(A) = \emptyset$ . Se  $x = y$ , basta tomar unha veciñanza aberta  $U$  de  $x$  tal que  $U \cap A = \emptyset$  e polo tanto  $(x, y) = (x, x) \in U \times U \subset G \times G \setminus \delta(A)$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c): Sexa  $f: G' \rightarrow G$  un homomorfismo de grupos topolóxicos. Como  $f$  é unha aplicación continua entón tamén o é a aplicación  $g: G' \rightarrow G \times G$  definida por  $g(x) = (f(x), e)$ . Agora ben,  $\delta(G)$  é pechado en  $G \times G$  pola hipótese, logo  $\text{Ker}(f) = g^{-1}(\delta(G))$  é pechado en  $G'$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d): Cúmrese xa que  $\{e\} = \text{Ker}(\text{id}_G)$ .

(d)  $\Rightarrow$  (e): Como  $\{e\}$  é un pechado, cada subconxunto unitario  $\{x\}$  de  $G$  é un pechado porque a traslación  $l_x: G \rightarrow G$  é un homeomorfismo e  $l_x(\{e\}) = \{x\}$ .

(e)  $\Rightarrow$  (f): Se  $x \in G \setminus \{e\}$ , como  $\{x\}$  é pechado e  $e \notin \{x\}$ , entón existe  $U \in \mathcal{B}$  tal que  $U \subset G \setminus \{x\}$ , isto é,  $U \cap \{x\} = \emptyset$ . Así  $x$  non pertence á intersección dos elementos de  $\mathcal{B}$ .

(f)  $\Rightarrow$  (g): É trivial xa que a intersección de veciñanzas de  $e$  está contida na intersección de todos os elementos de  $\mathcal{B}$ .

(g)  $\Rightarrow$  (a): Se  $x, y \in G$ ,  $x \neq y$ , entón  $xy^{-1} \neq e$ , e pola hipótese existe unha veciñanza  $A$  de  $e$  tal que  $xy^{-1} \notin A$ . Sexa  $U$  unha veciñanza aberta de

$e$  tal que  $U \subset A$ ; pola continuidade de  $\theta_G$  existe outra veciñanza aberta  $V$  de  $e$  tal que  $V^{-1}V \subset U$ . Así temos que  $xy^{-1} \notin V^{-1}V$  e entón  $Vx \cap Vy = \emptyset$ , xa que no caso contrario existirían  $v_1, v_2 \in V$  tales que  $v_1x = v_2y$  e entón  $xy^{-1} = v_1^{-1}v_2 \in V^{-1}V$  e chegamos a unha contradición. Así concluímos que  $Vx$  e  $Vy$  son dous abertos disxuntos que conteñen a  $x$  e  $y$ , respectivamente.  $\square$

**Proposición 2.2.** (a) *Calquera grupo topolóxico é regular.*

(b) *Se  $G$  é un grupo topolóxico e  $H$  un subgrupo de  $G$ , o espazo topolóxico  $G/H$  é regular.*

*Demostración.* (a) Se  $G$  é un grupo topolóxico, como as traslacións son homeomorfismos, basta comprobar que dado un pechado  $A$  tal que  $e \notin A$ , existen abertos  $U, V$  tales que  $U \cap V = \emptyset$ ,  $A \subset U$  e  $e \in V$ . Como  $G \setminus A$  é unha veciñanza aberta de  $e$ , pola continuidade de  $\theta_G$  existe unha veciñanza aberta  $V$  tal que  $VV^{-1} \subset G \setminus A$ , é dicir,  $VV^{-1} \cap A = \emptyset$ , entón  $AV \cap V = \emptyset$ . Así,  $AV$  é un aberto (pola proposición 1.10) que contén a  $A$  e é disxunto ca veciñanza aberta  $V$  de  $e$ .

(b) Sexan  $A$  un pechado en  $G/H$  e  $Hx$  un punto que non está en  $A$ . Como a proxección natural  $\pi: G \rightarrow G/H$  é continua  $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$  é un pechado en  $G$  e non contén a  $x$ . Así, como  $G$  é homoxéneo, actuando como en (a), existe unha veciñanza aberta  $V$  de  $e$  tal que  $xVV^{-1} \cap \tilde{A} = \emptyset$ , entón  $xV \cap \tilde{A}V = \emptyset$ . Como  $\tilde{A}V$  é unión de clases de equivalencia xa que  $\tilde{A} = \pi^{-1}(A)$  o é, entón  $H\tilde{A}V = \tilde{A}V$  e  $HxV \cap \tilde{A}V = \emptyset$ . Concluimos que  $\pi(HxV)$  e  $\pi(\tilde{A}V)$  son abertos (xa que  $\pi$  é aberta) disxuntos contendo a  $Hx$  e  $A$  respectivamente.  $\square$

**Proposición 2.3.** *Un grupo topolóxico  $T_0$  é  $T_1$ .*

*Demostración.* Basta ver que  $\{e\}$  é pechado en  $G$ . Sexa  $x \in G$ ,  $x \neq e$ . Entón existe un aberto  $U$  que soamente contén a un dos dous puntos. Se  $x \in U$  entón  $U \subset G \setminus \{e\}$ . Se  $e \in U$  entón  $V = U \cap U^{-1}$  é unha veciñanza aberta simétrica de  $e$  e  $xV$  é unha veciñanza aberta de  $x$  contida en  $G \setminus \{e\}$ , xa que se  $e \in xV$  entón existe un  $v \in V$  tal que  $x = v^{-1} \in V \subset U$ .  $\square$

Como corolario a estes dous resultados podemos resumir as equivalencias que temos en dos axiomas de separación en grupos topolóxicos.

**Corolario 2.4.** *Se  $G$  é un grupo topolóxico, as seguintes condicións son equivalentes:*

- (a)  $G$  é  $T_0$ .
- (b)  $G$  é  $T_1$ .
- (c)  $G$  é  $T_2$ .
- (d)  $G$  é  $T_3$ .

*Demostración.* Xa sabemos que

$$T_3 \Rightarrow T_2 \Leftrightarrow T_1 \Leftrightarrow T_0$$

e como calquera grupo topolóxico é regular, todo grupo topolóxico  $T_1$  é  $T_3$ .  $\square$

**Proposición 2.5.** *Sexan  $G$  un grupo topolóxico,  $H$  un subgrupo de  $G$  e  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  unha familia de grupos topolóxicos.*

- (a) *Se  $G$  é Hausdorff entón  $H$  tamén o é.*
- (b)  *$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$  é Hausdorff se, e só se,  $G_\alpha$  é Hausdorff para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .*
- (c)  *$G/H$  é Hausdorff se, e só se,  $H$  é pechado en  $G$ .*
- (d) *Se  $G/H$  e  $H$  son Hausdorff entón  $G$  é Hausdorff.*

*Demostración.* (a) séguese de que un subespazo dun espazo Hausdorff é Hausdorff. (b) é certo xa que se cumpre no caso xeral dos espazos topolóxicos.

(c) Se  $G/H$  é Hausdorff,  $\{H\}$  é pechado en  $G/H$  e entón  $\pi^{-1}(\{H\}) = H$  é pechado en  $G$ , pola continuidade da proxección natural  $\pi: G \rightarrow G/H$ . Reciprocamente, se  $H$  é pechado, sexan  $Ha, Hb \in G/H$ ,  $Ha \neq Hb$ . Entón  $Hab^{-1}$  é un pechado que non contén a  $e$  (xa que  $ab^{-1} \notin H$ ) e podemos atopar unha veciñanza aberta  $U$  de  $e$  tal que  $U \cap Hab^{-1} = \emptyset$ . Pola continuidade de  $\theta_G$  e da conxugación  $c_b$  (proposicións 1.4, 1.6) podemos atopar veciñanzas abertas de  $V$  e  $W$  de  $e$  tales que  $VV^{-1} \subset U$  e  $bWb^{-1} \subset V$ , así obtemos que  $bWW^{-1}b^{-1} \cap Hab^{-1} = \emptyset$ , logo  $bWW^{-1} \cap Ha = \emptyset$ , así  $HbWW^{-1} \cap Ha = \emptyset$  e polo tanto  $HbW \cap HaW = \emptyset$ . Como  $\pi$  é aberta e  $W$  é aberto,  $\pi(aW) = HaW$  e  $\pi(bW) = HbW$  son veciñanzas abertas disxuntas de  $Ha$  e  $Hb$ , respectivamente.

(d) Se  $G/H$  é Hausdorff, entón  $H$  é pechado en  $G$  (por (c)). Ademais, como  $H$  é Hausdorff,  $\{e\}$  é pechado en  $H$ . Así,  $\{e\}$  é pechado en  $G$  e, pola proposición 2.1,  $G$  é Hausdorff.  $\square$

**Observación 2.6.** As seguintes propiedades relevantes relacionadas co carácter Hausdorff foron consideradas no capítulo 1:

- todo subgrupo discreto dun grupo topolóxico Hausdorff  $G$  é pechado en  $G$  ((c) da proposición 1.17),
- a clausura dun subgrupo abeliano dun grupo topolóxico Hausdorff  $G$  tamén é un subgrupo abeliano de  $G$  (proposición 1.20),
- O centro dun grupo topolóxico Hausdorff é pechado (proposición 1.21).

**Exemplos 2.7.** (a) Calquera grupo topolóxico  $G$  con máis dun elemento coa topoloxía indiscreta non é Hausdorff xa que o subgrupo trivial  $H = \{e\}$  non é pechado en  $G$ . A clausura de  $H$  non é un grupo abeliano se  $G$  non o é ( $\overline{H} = G$ ).

(b) O produto topolóxico  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  do grupo  $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  coa topoloxía indiscreta e do grupo discreto  $\mathbb{Z}$  é un grupo topolóxico con infinitos abertos que non é Hausdorff.

(c) O grupo topolóxico  $\mathbb{R}$  é Hausdorff e por tanto todos os seus subgrupos tamén o son.

(d) Como  $\mathbb{Q}$  é un subgrupo normal non pechado de  $\mathbb{R}$ , o cociente  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  é un grupo topolóxico non Hausdorff, e por tanto nin é  $T_0$ . A topoloxía en  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  é a trivial.

(e) O subgrupo  $\mathbb{S}^1$  do grupo topolóxico Hausdorff  $\mathbb{C}^*$  tamén aparece como exemplo de grupo topolóxico cociente de  $\mathbb{R}$  polo subgrupo pechado  $\mathbb{Z}$ .

(f) O  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$  e o toro infinito  $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$  son grupos topolóxicos Hausdorff.

(g) Tanto  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Q}$  coas súas topoloxías  $p$ -ádicas son grupos topolóxicos Hausdorff, xa que as correspondentes interseccións de tódolos conxuntos en cada base local de veciñanzas abertas do elemento neutro 0 que definen a topoloxía son o subgrupo trivial.

(h)  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n^2}$ , entón é un espazo topolóxico Hausdorff. Así, os grupos topolóxicos  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$  e  $SO_n(\mathbb{R})$  son Hausdorff

ao seren subespazos de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . De xeito análogo,  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , entón os grupos topolóxicos  $GL_n(\mathbb{C})$ ,  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $O_n(\mathbb{C})$  e  $SO_n(\mathbb{C})$  son Hausdorff.

(i) Dado un grupo topolóxico  $G$ , se  $H$  é un subgrupo normal de  $G$  entón  $E = \overline{H}$  é un subgrupo normal (prop 1.18) pechado. Así, por (c) da proposición 2.5,  $G/E$  é un grupo topolóxico Hausdorff. Así, como o subgrupo trivial  $\{e\}$  é un subgrupo normal, a súa clausura  $\overline{\{e\}}$  é o menor subgrupo normal de  $G$  que fai que o cociente sexa un grupo topolóxico Hausdorff ao ser o menor subgrupo normal pechado. E como vimos na proposición 2.1 o grupo topolóxico  $G$  é Hausdorff se, e só se,  $\overline{\{e\}} = \{e\}$ .

**Observación 2.8.** As equivalencias entre os axiomas de separación no corolario 2.4 non se estenden ó axioma  $T_4$ . Por exemplo,  $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$  é un grupo topolóxico Hausdorff que non é un espazo topolóxico normal (Hewitt-Ross [5, p. 74]). Por outra parte, cúmprese que todo grupo topolóxico Hausdorff  $G$  é completamente regular (Pontrjagin [9, p. 119]), isto é, para cada subconxunto pechado  $A$  de  $G$  e cada  $x \notin A$  existe unha función continua  $f: G \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 0$  e  $f(A) = 1$ .

## 2.2. Metrizabilidade

Comezamos recordando algunhas nocións básicas relativas a espazos métricos.

Unha *distancia* (ou *métrica*) nun conxunto  $X$  é unha aplicación

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisfai as seguintes condicións:

- (a)  $d(x, y) = 0$  se, e só se,  $x = y$ ,
- (b)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$ ,
- (c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in X$ ,

e, como consecuencia,

- (d)  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in X$ , ( $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ ).

O par  $(X, d)$  é un *espazo métrico*, e a distancia  $d$  define unha topoloxía  $\mathcal{T}_d$  en  $X$  como aquela que admite como base a familia de conxuntos

$$\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in X, r > 0\},$$

onde  $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$  é a bóla aberta en  $(X, d)$  de centro  $x \in X$  e radio  $r$ . Dise tamén que  $\mathcal{T}_d$  é unha *topoloxía métrica* e, en particular, a topoloxía da métrica  $d$ . Dúas distancias  $d$  y  $d'$  nun conxunto  $X$  son *topolójicamente equivalentes* se definen a mesma topoloxía,  $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$ .

Por outra banda, un espazo topolójico  $X$  dise que é un *espazo metrizable* se a topoloxía de  $X$  é a topoloxía dunha distancia  $d$  en  $X$ .

**Observación 2.9.** Todo espazo metrizable  $X$  é Hausdorff (se  $d$  é unha métrica que define a topoloxía de  $X$ ,  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , entón  $r = d(x, y) > 0$ , e  $U = B(x, r/2)$  e  $V = B(y, r/2)$  son veciñanzas abertas disxuntas de  $x$  e  $y$ , respectivamente), e satisfai o primeiro axioma de numerabilidade (para cada  $x \in X$ ,  $\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$  é unha base local numerable de  $x$ ). En xeral estas dúas propiedades non son suficientes para que un espazo topolójico sexa metrizable. Non obstante, veremos que no caso de grupos topolójicos si que son condicións suficientes.

**Definición 2.10.** Un grupo topolójico  $G$  dise que é un *grupo metrizable* se existe unha distancia  $d$  en  $G$  cuxa topoloxía é a topoloxía de  $G$ . Entón  $(G, d)$  é un espazo métrico e dise que  $(G, d)$  é un *grupo métrico*.

Un grupo topolójico  $G$  é primeiro numerable se existe unha base local numerable do elemento neutro  $e \in G$ . No caso dos grupos métricos existen bases locais de  $e$  que reflexan a estrutura alxébrica e a estrutura métrica.

**Proposición 2.11.** *Se  $(G, d)$  é un grupo métrico entón existe unha base local  $\mathcal{B}_e = \{B_1, B_2, B_3, \dots\}$  de  $e \in G$  que verifica as seguintes propiedades:*

- (1)  $B_m$  é aberto en  $G$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,
- (2)  $B_m^{-1} = B_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,
- (3)  $B_m B_m B_m \subset B_{m-1}$  para todo  $m \geq 2$ , (en particular  $B_m \subset B_{m-1}$ ).

*Demostración.* Construiremos unha colección  $\mathcal{B}_e = \{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de veciñanzas abertas do elemento neutro que verifican as condicións (1), (2), (3) e que

$B_m \subset B(e, 1/m)$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . Posto que  $\{B(e, 1/m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  é unha base local de  $e$  tamén o será  $\mathcal{B}_e$ . Procederemos por indución para construír  $\mathcal{B}_e$ , e comenzamos poñendo  $B_1 = U_1 \cap U_1^{-1}$ , onde  $U_1 = B(e, 1)$ , de modo que  $B_1$  é unha veciñanza aberta de  $e$  e  $B_1 \subset B(e, 1/m)$  para  $m = 1$ . Supoñemos construídos  $B_1, \dots, B_m$  tales que satisfan as condicións (1), (2), (3) e ademais  $B_m \subset B(e, 1/m)$ . Se aplicamos o visto en 1.2 á veciñanza aberta  $B_m \cap B(e, 1/(m+1))$  de  $e$  dúas veces, obtemos que existe unha veciñanza aberta  $U_{m+1}$  de  $e$  tal que

$$U_{m+1}U_{m+1}U_{m+1}U_{m+1} \subset B_m \cap B(e, \frac{1}{m+1}),$$

e posto que  $e \in U_{m+1}$ ,

$$U_{m+1}U_{m+1}U_{m+1} \subset B_m, \quad U_{m+1} \subset B(e, \frac{1}{m+1}).$$

Se definimos  $B_{m+1} = U_{m+1} \cap U_{m+1}^{-1}$ , entón  $B_{m+1}$  satisfai (1) e (2), e posto que  $B_{m+1} \subset U_{m+1}$ , tamén satisfai (3) e ademais  $B_{m+1} \subset B(e, 1/(m+1))$ .  $\square$

**Definición 2.12.** Unha distancia  $d$  nun grupo  $G$  é *invariante* pola esquerda (respectivamente pola dereita) se verifica

$$d(ax, ay) = d(x, y) \quad [\text{resp. } d(xa, ya) = d(x, y)]$$

para todo  $x, y, a \in G$ .

Tódolos grupos metrizable posúen distancias invariantes, mais a demostración deste feito é delicada. Imos dar agora unha caracterización topolóxica do carácter metrizable dos grupos topolóxicos, que nos permitirá tamén probar a existencia de distancias invariantes.

**Teorema 2.13.** *Un grupo topolóxico  $G$  é metrizable se, e só se, é Hausdorff e satisfai o primeiro axioma de numerabilidade. Ademais todo grupo topolóxico metrizable posúe unha distancia invariante pola esquerda que define a súa topoloxía.*

*Demostración.* Todo espazo metrizable é Hausdorff e primeiro numerable. Probaremos a suficiencia, así que supoñeremos que  $G$  é Hausdorff e existe unha base local numerable  $\{\tilde{B}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de  $e$ , que podemos supoñer que é unha

familia contractiva, é dicir  $\tilde{B}_1 \supset \tilde{B}_2 \supset \tilde{B}_3 \supset \dots$ , substituíndo cada  $\tilde{B}_m$  con  $\bigcap_{k=1}^m \tilde{B}_k$ . Debido a que  $G$  é Hausdorff, pola proposición 2.1 verificase que

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \tilde{B}_m = \{e\}.$$

Se aplicamos a demostración da proposición 2.11 substituíndo  $\{B(e, 1/m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  por  $\{\tilde{B}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  obtemos unha base local numerable  $\mathcal{B}_e = \{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  que verifica as propiedades (1)-(3) da proposición 2.11. Poñemos ademais  $B_0 = G$ .

Definimos unha aplicación  $f: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^{-1}y \in B_m \quad \forall m \geq 0, \\ \frac{1}{2^m} & \text{se } x^{-1}y \in B_m \setminus B_{m+1}. \end{cases}$$

Para cada  $x, y \in G$  verifícanse as seguintes propiedades elementais:

- (I)  $0 \leq f(x, y) \leq 1$ ;
- (II)  $f(x, y) = f(y, x)$ , dado que  $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1}$  e  $B_m^{-1} = B_m$ ;
- (III)  $f(ax, ay) = f(x, y)$  para cada  $a \in G$ , dado que  $(ax)^{-1}ay = x^{-1}y$ ;
- (IV)  $f(x, y) = 0$  se  $x = y$ , dado que  $x^{-1}x = e \in B_m$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ ;
- (V)  $f(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ , dado que  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m = \{e\}$ ;
- (VI)  $f(x, y) \leq 1/2^m \Leftrightarrow x^{-1}y \in B_m$ , dado que  $\mathcal{B}_e$  é contractiva.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos unha aplicación

$$F_n: G \times \overset{(n+1)}{!} \times G \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}, x_i).$$

En particular,  $F_1(x_0, x_1) = f(x_0, x_1)$ , para cada  $x_0, x_1 \in G$ . Definimos agora a aplicación  $d: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$d(x, y) = \inf \{F_n(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 = x, x_n = y, x_1, \dots, x_{n-1} \in G; n \in \mathbb{N}\},$$

que verifica as seguintes propiedades, que se obtéñen de (I)-(IV):

- (i)  $0 \leq d(x, y) \leq f(x, y) \leq 1$ ;

(ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ , porque de  $f(x, y) = f(y, x)$  séguese que

$$F_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}, y) = F_n(y, x_{n-1}, \dots, x_1, x), \quad x_1, \dots, x_{n-1} \in G;$$

(iii)  $d(ax, ay) = d(x, y)$ , porque  $f(ax, ay) = f(x, y)$  e entón

$$F_n(ax, x_1, \dots, x_{n-1}, ay) = F_n(x, a^{-1}x_1, \dots, a^{-1}x_{n-1}, y);$$

(iv)  $d(x, x) = 0$ , porque  $f(x, x) = 0$ .

Ademais  $d$  verifica a desigualdade triangular; para demostralo basta probar que dados  $x, y, z \in G$ , para todo  $\varepsilon > 0$  verificase

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) + \varepsilon.$$

Agora ben, pola definición de  $d$  existen  $x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{m-1} \in G$  tales que

$$d(x, z) + \frac{\varepsilon}{2} \geq F_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}, z), \quad d(z, y) + \frac{\varepsilon}{2} \geq F_m(z, y_1, \dots, y_{m-1}, y),$$

e concluimos que

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq F_{n+m}(x, x_1, \dots, x_{n-1}, z, y_1, \dots, y_{m-1}, y) \\ &= F_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}, z) + F_m(z, y_1, \dots, y_{m-1}, y) \\ &\leq d(x, z) + d(z, y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Por (ii), (iv) e a desigualdade triangular, para probar que  $d$  é unha distancia falta soamente demostrar que  $d(x, y) > 0$  se  $x \neq y$ . Ademais, por (iii) xa se ten que  $d$  verifica a propiedade de invariancia requerida. Tamén debemos ver que a topoloxía métrica  $\mathcal{T}_d$  definida por  $d$  é a topoloxía de  $G$ . Para completar estes dous últimos pasos da demostración usarase o seguinte resultado, que logo probaremos como un lema:

$$(\star) \quad f(x, y) \leq 2F_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}, y) \quad \forall x, x_1, \dots, x_{n-1}, y \in G, \quad \forall n \geq 1.$$

En efecto, de  $(\star)$  e da definición de  $d(x, y)$  temos que

$$d(x, y) \geq \frac{1}{2}f(x, y),$$

e pola propiedade (v) antes reseñada, se  $x \neq y$  entón  $f(x, y) > 0$  e, por tanto,  $d(x, y) > 0$  e  $d$  é unha distancia en  $G$ .

Vexamos agora que  $\tau_d$  coincide coa topoloxía  $\tau$  de  $G$ . Debido a que  $\mathcal{B}_e = \{B_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  é unha base local de  $e \in G$  para  $\tau$ , para cada  $a \in G$  a colección de conxuntos  $\mathcal{B}_a = \{aB_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  é unha base local de  $a$  para  $\tau$ ; ademais  $\mathcal{B}'_a = \{B(a, 1/2^m)\}_{m \in \mathbb{N}}$  é unha base local de  $a$  para a topoloxía métrica  $\tau_d$ . Polo criterio de Hausdorff de comparación de topoloxías, para probar que  $\tau = \tau_d$  é suficiente ver que para cada  $m \in \mathbb{N}$  se verifica

$$B(a, 1/2^m) \subset aB_m \subset B(a, 1/2^{m-1}).$$

Como a distancia  $d$  é invariante pola esquerda é claro que  $B(a, r) = aB(e, r)$  para cada  $a \in G$  e  $r > 0$ , e entón, probar as inclusións anteriores redúcese a probar

$$B(e, 1/2^m) \subset B_m \subset B(e, 1/2^{m-1}).$$

Para demostrar a primeira inclusión, sexa  $x \in B(e, 1/2^m)$ ; por  $(\star)$ ,

$$\frac{1}{2}f(x, e) \leq d(x, e) < \frac{1}{2^m},$$

logo  $f(x, e) < 1/2^{m-1}$ . Dado que os valores non nulos de  $f$  son sempre da forma  $1/2^k$ , séguese que

$$f(e, x) = f(x, e) \leq \frac{1}{2^m},$$

e pola propiedade (v) de  $f$ ,  $x = e^{-1}x \in B_m$ .

Para a segunda inclusión, se  $x \in B_m$  entón (propiedade (vi))  $f(e, x) \leq 1/2^m < 1/2^{m-1}$  e polo tanto (propiedade (i)):

$$d(e, x) \leq f(e, x) < \frac{1}{2^{m-1}},$$

logo  $x \in B(e, 1/2^{m-1})$ . □

A demostración do anterior teorema complétase coa proba de  $(\star)$ :

**Lema 2.14.** *Para cada  $n \geq 1$ , se  $x_0, x_1, \dots, x_n \in G$ , tense que*

$$f(x_0, x_n) \leq 2F_n(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

*Demostración.* Podemos supoñer que cada dous elementos consecutivos na sucesión finita  $x_0, x_1, \dots, x_n$  son distintos. (Por exemplo, se  $x_1 = x_2$  entón  $F_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = F_{n-1}(x_0, x_2, \dots, x_n)$  e chegaría con probar que

$f(x_0, x_n) \leq 2F_{n-1}(x_0, x_2, \dots, x_n)$ .) Como consecuencia,  $f(x_{i-1}, x_i) > 0$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

O caso  $n = 1$  é trivial, xa que  $f(x_0, x_1) = F_1(x_0, x_1)$ . Para  $n = 2$ , sexa  $m$  o menor enteiro positivo tal que

$$\frac{1}{2^m} \leq F_2(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_1) + f(x_1, x_2).$$

Entón  $x_0x_1^{-1} \in B_m$ , xa que, en caso contrario, pola definición de  $f$  teríase  $F_2(x_0, x_1, x_2) \geq f(x_0, x_1) \geq 1/2^{m-1}$ , contradicindo a elección de  $m$ . De forma análoga  $x_1x_2^{-1} \in B_m$ , e entón  $x_0x_2^{-1} \in B_mB_m \subset B_{m-1}$  (pola propiedade (3) na proposición 2.11), e por tanto (pola propiedade (vi) no teorema 2.13 e a elección de  $m$ )

$$f(x_0, x_2) \leq \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{2}{2^m} \leq 2F_2(x_0, x_1, x_2).$$

Dun modo similar, usando agora  $B_mB_mB_m \subset B_{m-1}$ , obtense

$$f(x_0, x_3) \leq 2F_3(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Procederemos agora por indución para  $n \geq 4$ , supoñendo que se verifica o lema para tódolos enteiros de 1 a  $n$ , e debendo probar que é certo para  $n + 1$ , é dicir que  $f(x_0, x_{n+1}) \leq 2F_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ . Como a función  $f$  é simétrica,

$$F_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = F_{n+1}(x_{n+1}, x_n, \dots, x_1, x_0),$$

basta probar que  $f(x_0, x_{n+1}) \leq 2F_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  ou  $f(x_{n+1}, x_0) \leq 2F_{n+1}(x_{n+1}, x_n, \dots, x_1, x_0)$ . Por ser

$$F_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_0, x_1) + \dots + f(x_n, x_{n+1}),$$

os sumandos  $f(x_0, x_1)$  e  $f(x_n, x_{n+1})$  non poden ser ambos maiores que  $\frac{1}{2}F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1})$ , así que polas consideracións anteriores sobre a simetría podemos supoñer que

$$f(x_0, x_1) = F_1(x_0, x_1) \leq \frac{1}{2}F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

Existe un enteiro  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , tal que se verifican as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} F_k(x_0, \dots, x_k) &\leq \frac{1}{2}F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}), \\ F_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}) &\geq \frac{1}{2}F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}), \end{aligned}$$

Supoñamos en primeiro lugar que  $1 \leq k < n$ . Como

$$F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}) = F_{k+1}(x_0, \dots, x_{k+1}) + F_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_{n+1}),$$

temos

$$F_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

Pola hipótese de indución,

$$f(x_0, x_k) \leq 2F_k(x_0, \dots, x_k) \leq F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}),$$

$$f(x_{k+1}, x_{n+1}) \leq 2F_{n-k}(x_{k+1}, \dots, x_{n+1}) \leq F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

Estas dúas últimas desigualdades, xunto coa desigualdade trivial

$$f(x_k, x_{k+1}) \leq F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1})$$

van ser a clave da parte final da demostración. Se  $k = n$  temos soamente a primeira desigualdade e a terceira.

Sexa  $m$  o menor enteiro positivo tal que

$$\frac{1}{2^m} \leq F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

Verifícase que  $x_0^{-1}x_k \in B_m$ , xa que no caso contrario, pola propiedade (vi) no teorema 2.13, sería  $f(x_0, x_k) > 1/2^m$ , e a primeira das tres desigualdades clave implicaría

$$\frac{1}{2^{m-1}} \leq f(x_0, x_k) \leq F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}),$$

contradiciendo a escolla de  $m$ . De forma análoga, usando a segunda (soamente se  $k < n$ ) e a terceira desigualdade respectivamente, chégase a que  $x_{k+1}^{-1}x_{n+1} \in B_m$  e  $x_k^{-1}x_{k+1} \in B_m$ . Así, temos que

$$x_0^{-1}x_{n+1} = (x_0^{-1}x_k)(x_k^{-1}x_{k+1})(x_{k+1}^{-1}x_{n+1}) \in B_m B_m B_m \quad \text{se } k < n,$$

$$x_0^{-1}x_{n+1} = (x_0^{-1}x_k)(x_k^{-1}x_{n+1}) \in B_m B_m \quad \text{se } k = n,$$

e polo tanto,  $x_0^{-1}x_{n+1} \in B_{m-1}$  por (3) na proposición 2.11. Pola propiedade (vi) no teorema 2.13 e a escolla de  $m$ ,

$$f(x_0, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{2}{2^m} \leq 2F_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}),$$

concluindo a demostración do lema.  $\square$

Un espazo topolóxico  $X$  é *localmente euclidiano* de dimensión  $n$  se todo punto de  $X$  ten unha veciñanza aberta homeomorfa a un aberto de  $\mathbb{R}^n$ . É evidente que todo espazo localmente euclidiano satisfai o primeiro axioma de numerabilidade. Polo tanto, como consecuencia do teorema 2.13 temos este corolario:

**Corolario 2.15.** *Todo grupo topolóxico Hausdorff e localmente euclidiano é un grupo metrizable.*

**Observación 2.16.** Unha distancia invariante pola esquerda nun grupo metrizable non é necesariamente invariante pola dereita. Non obstante, todo grupo metrizable (ou, equivalentemente, todo grupo topolóxico Hausdorff e primeiro numerable) tamén posúe unha distancia invariante pola dereita. Para probalo basta cambiar na demostración do teorema 2.13: a aplicación  $f$  pola aplicación  $f' : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f'(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } xy^{-1} \in B_m \quad \forall m \geq 0, \\ \frac{1}{2^m} & \text{se } xy^{-1} \in B_m \setminus B_{m+1}, \end{cases}$$

a familia de aplicacións  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  por  $\{F'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , onde

$$F'_n : G \times \overset{(n+1)}{\dots} \times G \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n f'(x_{i-1}, x_i).$$

e a distancia  $d$  por  $d' : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$d'(x, y) = \inf \{F'_n(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 = x, x_n = y, x_1, \dots, x_{n-1} \in G; n \in \mathbb{N}\},$$

que tamén é unha distancia en  $G$ , que verifica

$$d'(xa, ya) = d'(x, y), \quad \forall x, y, a \in G,$$

e cuxa topoloxía métrica  $\tau_{d'}$  coincide coa topoloxía de  $G$ . En particular,  $\tau_d = \tau_{d'}$  e aínda que as distancias  $d$  e  $d'$  non son necesariamente iguais son topoloxicamente equivalentes.

**Observación 2.17.** Aínda que un grupo metrizable  $G$  sempre admite unha distancia invariante pola esquerda e unha invariante pola dereita, en xeral non admite unha que o sexa polos dous lados e defina a súa topoloxía (véxase [5, p. 78]). No caso de que  $G$  sexa compacto sempre existe unha distancia en  $G$  que é bi-invariante e define a topoloxía de  $G$  ([5, p. 71]).

**Exemplos 2.18.** (a) A distancia euclidiana en  $\mathbb{R}^n$ ,  $d(x, y) = \|x - y\|$ , satisfai que  $d(a+x, a+y) = d(x, y)$  para todo  $x, y, a \in \mathbb{R}^n$ , polo que é invariante pola esquerda (e pola dereita). A topoloxía inducida por esta métrica coincide coa topoloxía usual e polo tanto,  $\mathbb{R}^n$  coa suma e topoloxía usuais é un grupo metrizable.

(b)  $\mathbb{C}^*$  e o seu subgrupo  $\mathbb{S}^1$  son grupos metrizables.

(c) Como a métrica produto (suma das distancias entre compoñentes) induce a topoloxía produto das topoloxías métricas, o  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n$  e o cilindro xeneralizado  $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$  son grupos metrizables.

(d) Como  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$  non é Hausdorff, é un grupo topolóxico non metrizable. De xeito análogo, calquera grupo topolóxico  $G$  con máis dun elemento coa topoloxía indiscreta non é metrizable, nin  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  con  $\mathbb{Z}$  coa topoloxía discreta e  $\mathbb{Z}_2$  coa indiscreta.

(e) Como  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n^2}$ , é Hausdorff e primeiro numerable. Así os subespazos  $GL_n(\mathbb{R})$ ,  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$  e  $SO_n(\mathbb{R})$  de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  son grupos topolóxicos Hausdorff e primeiro numerables, polo tanto grupos metrizables. De xeito análogo, como  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , os subgrupos  $GL_n(\mathbb{C})$ ,  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $O_n(\mathbb{C})$  e  $SO_n(\mathbb{C})$  son grupos metrizables.

(f) Como vimos que  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  coa suma usual e a topoloxía  $p$ -ádica son grupos topolóxicos Hausdorff e primeiro numerables, son grupos metrizables.

Se para un número primo  $p$  asígnase a cada  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  o número enteiro

$$\nu_p(k) = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} \mid p^n \text{ divide a } k\}$$

e definimos

$$d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ p^{-\nu_p(x-y)} & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

entón  $d$  é unha distancia en  $\mathbb{Z}$  que define a topoloxía  $p$ -ádica de  $\mathbb{Z}$ . Como en 1.48 (b), da lugar a idea de que dous enteiros están máis próximos entre si se a súa diferenza é divisible por unha potencia máis alta de  $p$ .

As bólas abertas e as bólas pechadas centradas en  $0 \in \mathbb{Z}$  son da seguinte forma, para  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ ,

$$B\left(0, \frac{1}{p^{n-1}}\right) = B\left[0, \frac{1}{p^n}\right] = p^n \mathbb{Z}.$$

A base da topoloxía da métrica formada por tódalas bólas abertas é

$$\{B(x, r) \mid r \in \mathbb{R}^+\} = \{x + p^n \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

e tódolos conxuntos nesta base son abertos e pechados. A topoloxía da métrica coincide coa topoloxía  $p$ -ádica de  $\mathbb{Z}$ .

## Capítulo 3

# Compacidade e conexión en grupos topolóxicos

### 3.1. Compacidade

Un espazo topolóxico  $X$  dise que é *compacto* se para todo recubrimento por abertos de  $X$  existe un subrecubrimento finito. Un subconxunto dise compacto se o é como subespazo. Recordamos estes resultados para un espazo topolóxico  $X$ :

- Sexa  $Y$  un subespazo pechado de  $X$ . Se  $X$  é compacto entón  $Y$  é compacto.
- Se  $X$  é Hausdorff e  $Y$  un subconxunto compacto de  $X$  entón  $Y$  é pechado en  $X$ .
- Se  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua e  $X$  é compacto entón  $f(Y)$  tamén o é. Así, a compacidade é unha propiedade topolóxica e, como unha aplicación cociente é continua e sobrexectiva, o espazo cociente dun compacto é compacto.
- Sexa  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  unha familia de espazos topolóxicos non baleiros. Entón  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  é compacto, se, e só se,  $X_\alpha$  é compacto para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Imos ver agora algúns resultados particulares de compacidade no caso dos grupos topolóxicos. O seguinte resultado usarémolo para probar que unha condición suficiente para que un grupo topolóxico  $G$  sexa compacto é que

o sexa un subgrupo  $H$  e o seu espazo cociente  $G/H$ , e máis tarde tamén o usaremos no caso da compacidade local.

**Lema 3.1.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico,  $C$  un subconxunto compacto de  $G$  e  $U$  un aberto que contén a  $C$ . Entón existe unha veciñanza aberta  $V$  de  $e$  tal que  $CV \subset U$ .*

*Demostración.* Dado  $x \in C$ ,  $x$  é un punto de  $U$  e entón  $W_x = x^{-1}U$  é unha veciñanza aberta de  $e$  tal que  $xW_x \subset U$ , e pola continuidade de  $m_G$  existe outra veciñanza  $V_x$  de  $e$  tal que  $V_x V_x \subset W_x$ . E dado que  $\{xV_x\}_{x \in C}$  recubre  $C$ , pola compacidade existen  $x_1, \dots, x_n \in C$  tales que  $C \subset \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$ . Agora, se  $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$  temos que  $V_{x_i} V \subset V_{x_i} V_{x_i} \subset W_{x_i}$  e entón

$$CV \subset \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i} V \subset \bigcup_{i=1}^n x_i W_{x_i} \subset U. \quad \square$$

**Proposición 3.2.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $H$  un subgrupo de  $G$ . Se  $H$  e  $G/H$  son compactos entón  $G$  é compacto.*

*Demostración.* Sexa  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  un recubrimento aberto de  $G$ . Como  $H$  é compacto, pola proposición 1.6  $Hx$  é compacto para todo  $x \in G$ . Se  $x \in G$ , xa que  $Hx \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  tense que  $Hx$  está contido nunha unión finita de elementos do recubrimento, que chamaremos  $N_x$ .

Agora, polo lema previo existe unha veciñanza aberta  $V_x$  de  $e$  tal que  $(Hx)V_x \subset N_x$ . Como a proxección  $\pi: G \rightarrow G/H$  é aberta,  $\{\pi((Hx)V_x)\}_{x \in G}$  é un recubrimento aberto de  $G/H$  e, pola compacidade de  $G/H$ , existen  $x_1, \dots, x_n \in G$  tales que

$$G/H = \bigcup_{i=1}^n \pi((Hx_i)V_{x_i}).$$

Posto que cada  $(Hx)V_x$  é unión de clases,

$$G = \bigcup_{i=1}^n (Hx_i)V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^n N_{x_i},$$

e como cada  $N_{x_i}$  é unión de finita de elementos de  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ,  $G$  está contido nunha unión finita de elementos deste recubrimento.  $\square$

**Proposición 3.3.** *Se  $G$  é un grupo topolóxico compacto e  $H$  un subgrupo aberto de  $G$  entón  $H$  ten índice finito.*

*Demostración.* Como  $G = \bigcup_{x \in G} Hx$  e cada  $Hx$  é aberto en  $G$  por 1.10, e  $G$  é compacto, tense que  $G$  é unión dun número finito de clases. Como as clases forman unha partición, hai un número finito delas.  $\square$

**Exemplos 3.4.** (a) Calquera grupo  $G$  coa topoloxía indiscreta é compacto.

(b)  $\mathbb{C}^*$  non é compacto, pero o subgrupo  $\mathbb{S}^1$  si que o é ó ser a imaxe de  $[0, 1]$  pola aplicación continua  $\exp: x \mapsto e^{i2\pi x}$ .

(c)  $\mathbb{R}^n$  coa suma e a topoloxía usual non é compacto e o subgrupo  $\mathbb{Z}^n$  tampouco. Porén, o cociente  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}^n)/(\mathbb{Z}^n) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = (\mathbb{S}^1)^n$  e o toro infinito  $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$  si que o son xa que son produto de compactos.

(d) Un grupo topolóxico discreto é compacto se, e só se, é finito.

(e) O grupo linear xeral  $GL_n(\mathbb{R})$  non é compacto xa que é aberto en  $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ . De xeito análogo, o grupo  $GL_n(\mathbb{C})$ , aberto en  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , non é compacto.

(f) Se  $n \geq 2$ , o grupo linear especial  $SL_n(\mathbb{R})$  non é compacto, xa que é un subespazo de  $\mathbb{R}^{n^2}$  que non é acotado: dado calquera número natural  $k$ , a matriz diagonal  $A$  con compoñentes diagonais  $(k, 1/k, 1, \dots, 1)$  pertence a  $SL_n(\mathbb{R})$  pero  $\|A\| > k$ .  $SL_1(\mathbb{R}) = \{1\}$  é compacto.

(g) O grupo ortogonal  $O_n(\mathbb{R})$  é compacto: é pechado en  $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  xa que é a imaxe inversa de  $\{I_n\}$  pola aplicación continua

$$\begin{aligned} M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^T A, \end{aligned}$$

e é acotado, xa que cada vector columna dunha matriz ortogonal  $A = (a_{ij})$  ten norma 1, así que  $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2} = \sqrt{n}$  para cada  $A \in O(n)$ .

O grupo ortogonal especial  $SO_n(\mathbb{R})$  tamén é compacto, xa que é un subconxunto pechado do compacto  $O_n(\mathbb{R})$  pois é a imaxe inversa pola aplicación determinante  $\det: O_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  do pechado  $\{1\} \subset \mathbb{R}$ .

(h) O grupo  $SO_n(\mathbb{C})$  con  $n \geq 2$  non está acotado en  $M_{n \times n}(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{R}^{2n^2}$ . Basta considerar, para cada  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r \geq 1$ ,

$$A_r = \begin{pmatrix} r & i\sqrt{r^2-1} & 0 & \dots & 0 \\ -i\sqrt{r^2-1} & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in SO_n(\mathbb{C}),$$

así que dado  $r \geq 1$ , existe  $A_r \in SO_n(\mathbb{C})$  tal que  $\|A_r\| > r$ . Como  $O_n(\mathbb{C})$  e  $SL_n(\mathbb{C})$  conteñen a  $SO_n(\mathbb{C})$ , tampouco están acotados. Así, os subgrupos  $O_n(\mathbb{C})$ ,  $SL(\mathbb{C})$  e  $SO_n(\mathbb{C})$  de  $GL_n(\mathbb{C})$  non son compactos para  $n \geq 2$ . Tanto  $O_1(\mathbb{C}) = \{1, -1\}$  como  $SL_1(\mathbb{C}) = SO_1(\mathbb{C}) = \{1\}$  son compactos.

## 3.2. Compacidade local

Un espazo topolóxico  $X$  é *localmente compacto* se todo  $x \in X$  ten unha veciñanza compacta.

**Observación 3.5.** Ás veces defínese a compacidade local exixindo que cada punto teña unha base local de veciñanzas compactas. As dúas definicións son equivalentes se o espazo é regular: neste caso cada punto  $x$  ten unha base local de veciñanzas pechadas  $\{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , e se existe unha veciñanza compacta  $K$  de  $x$ ,  $\{\mathcal{B}_\alpha \cap K\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  é unha base local de veciñanzas compactas, xa que cada  $\mathcal{B}_\alpha \cap K$  é unha veciñanza pechada dentro do compacto  $K$ . Por tanto, por (a) da proposición 2.2, as dúas definicións son equivalentes no caso dos grupos topolóxicos.

Recordamos algúns resultados para un espazo topolóxico  $X$ :

- Se  $X$  é compacto, entón é localmente compacto.
- Sexa  $Y$  outro espazo topolóxico e  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua, aberta e sobrexectiva. Se  $X$  é localmente compacto entón  $Y$  tamén o é.
- Se  $X$  é localmente compacto e  $Y$  é un subespazo pechado de  $X$  entón  $Y$  é localmente compacto.

- Se  $X$  é Hausdorff e localmente compacto e  $Y$  é un subespazo aberto de  $X$  entón  $Y$  é localmente compacto.
- Sexa  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  unha familia de espazos topolóxicos non baleiros. Entón  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  é localmente compacto, se, e só se,  $X_\alpha$  é localmente compacto para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$  e compacto para case todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Resumimos os resultados particulares de compacidade local en grupos topolóxicos nesta proposición:

**Proposición 3.6.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $H$  un subgrupo de  $G$ .*

- (a)  *$G$  é localmente compacto se, e só se, existe unha veciñanza compacta de  $e$ .*
- (b) *Se  $G$  é localmente compacto e  $H$  é pechado en  $G$  entón  $H$  é localmente compacto.*
- (c) *Se  $G$  é localmente compacto entón  $G/H$  é localmente compacto.*
- (d) *Se  $H$  e  $G/H$  son localmente compactos entón  $G$  é localmente compacto.*

*Demostración.* (a) Se  $K$  é unha veciñanza compacta de  $e$  entón, pola proposición 1.6, para cada  $x \in G$  o conxunto  $Kx$  é unha veciñanza compacta de  $x$ .

(b) De maneira máis xeral, todo subespazo pechado dun espazo topolóxico localmente compacto tamén é localmente compacto.

(c) Séguese de que a aplicación cociente  $\pi: G \rightarrow G/H$  é continua, sobre-xectiva e aberta.

(d) Consideramos a proxección natural  $\pi: G \rightarrow G/H$ , supoñemos que  $H$  e  $G/H$  son localmente compactos e imos probar a compacidade local de  $G$  en varios pasos. Nos dous primeiros próbese a existencia de veciñanzas pechadas  $U$  e  $V$  do elemento neutro  $e$  de  $G$  con certas propiedades que permiten demostrar no terceiro paso que  $V$  é unha veciñanza compacta de  $e$ .

- (i) Existe unha veciñanza pechada  $U$  de  $e$  tal que  $U \cap Hx$  é compacto para todo  $x \in U$ :

Por ser  $H$  localmente compacto existe unha veciñanza compacta do elemento neutro  $e$  en  $H$ , que se pode escribir como unha intersección  $K \cap H$  onde

$K$  é unha veciñanza compacta de  $e$  en  $G$ . Dado que  $G$  é regular, existe unha veciñanza pechada  $D$  de  $e$  en  $G$  tal que  $D \subset K$ , logo o conxunto  $D \cap H = D \cap (K \cap H)$  é un pechado no compacto  $K \cap H$  e polo tanto  $D \cap H$  é compacto. Se  $U_0$  é unha veciñanza de  $e$  tal que  $U_0U_0^{-1} \subset D$  e  $U$  é unha veciñanza pechada de  $e$  contida en  $U_0$  (que existe outra vez por ser  $G$  regular) tense que  $UU^{-1} \subset D$ . Así, se  $x \in U$  entón  $Ux^{-1} \subset D$  e  $Ux^{-1}$  é un pechado contido en  $D$ , logo  $Ux^{-1} \cap H$  é un pechado contido no compacto  $D \cap H$ , logo  $U \cap Hx = (Ux^{-1} \cap H)x$  é compacto.

- (ii) Existe unha veciñanza pechada  $V$  de  $e$  tal que  $VV^{-1} \subset U$  e  $\pi(V)$  é un subconxunto compacto de  $G/H$ :

Collemos primeiro unha veciñanza pechada  $V_0$  de  $e$  en  $G$  tal que  $V_0V_0^{-1} \subset U$ . Como a proxección natural  $\pi$  é aberta o conxunto  $\pi(V_0)$  é unha veciñanza de  $H$  en  $G/H$ . Pola hipótese de compacidade local de  $G/H$  e utilizando que o espazo topolóxico cociente  $G/H$  tamén é regular (por (b) da proposición 2.2) existe unha veciñanza compacta e pechada  $C$  de  $H$  en  $G/H$  tal que  $C \subset \pi(V_0)$ . O conxunto  $V = V_0 \cap \pi^{-1}(C)$  é unha veciñanza pechada de  $e$  en  $G$  tal que  $VV^{-1} \subset V_0V_0^{-1} \subset U$  e ademais  $\pi(V) = C$  é compacto.

- (iii) A veciñanza  $V$  de  $e$  en  $G$  é un conxunto compacto:

Sexa  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  un recubrimento de  $V$  por abertos en  $G$ . A veciñanza pechada  $V$  de  $e$  en (ii) é tal que  $V \subset VV^{-1} \subset U$ , logo para cada  $x \in V$  o conxunto  $V \cap Hx$  (que é un pechado no compacto  $U \cap Hx$  e polo tanto compacto) está contido en  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$  e polo tanto tamén nunha unión finita  $A_x$  de membros do recubrimento. O conxunto  $E_x = A_x \cup (G \setminus V)$  é un aberto que contén ó compacto  $U \cap Hx$  (porque  $V \subset U$ ) e, polo lema 3.1 existe unha veciñanza aberta  $W_x$  de  $e$  tal que  $(U \cap Hx)W_x \subset E_x$ . Pódese escoller  $W_x$  contido en  $V$  sen máis que cambiar, se é necesario, a intersección do anterior  $W_x$  cunha veciñanza aberta de  $e$  contida en  $V$ . Imos ver que entón se ten a inclusión

$$V \cap HxW_x \subset A_x;$$

en efecto, dado  $v = hwx$  na intersección, con  $v \in V$ ,  $h \in H$ ,  $w \in W_x$ , tense que  $hx = vw^{-1} \in VW_x^{-1} \subset VV^{-1} \subset U$ , logo  $v = (hx)w \in UW_x$ , así que  $v \in (U \cap Hx)W_x \subset E_x$ , e por tanto  $v$  pertence a  $E_x \cap V = A_x$ . Agora, para

cada  $x \in V$ , o conxunto  $xW_x$  é un aberto en  $G$  que contén a  $x$ , e da lugar ó recubrimento

$$\{\pi(xW_x) \mid x \in V\}$$

de  $\pi(V)$  por abertos en  $G/H$  e, por ser compacto,  $\pi(V)$  está contido nunha unión finita destes abertos,

$$\pi(V) \subset \pi(x_1W_{x_1}) \cup \cdots \cup \pi(x_nW_{x_n}).$$

Como cada  $\pi(x_jW_{x_j})$  é unha unión de clases de  $H$ , tense que

$$V \subset V \cap ((Hx_1)W_{x_1} \cup \cdots \cup (Hx_n)W_{x_n}) \subset A_{x_1} \cup \cdots \cup A_{x_n},$$

que é unha unión finita de abertos no recubrimento  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , conque queda probado que  $V$  é compacto.  $\square$

**Exemplos 3.7.** (a) Calquera grupo coa topoloxía discreta é localmente compacto, xa que  $\{e\}$  é unha veciñanza compacta do elemento neutro  $e$  do grupo.

(b) Calquera grupo coa topoloxía indiscreta é localmente compacto ó ser compacto.

(c) O grupo aditivo  $\mathbb{R}^n$  é localmente compacto ó ser ás bolas pechadas veciñanzas compactas do seu centro. Porén, por exemplo, o grupo topolóxico das sucesións reais  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  non é localmente compacto xa que para que un produto dunha familia infinita de espazos topolóxicos localmente compactos tamén o sexa, case tódolos espazos deben ser compactos.

(d)  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{T}^n$  e o toro infinito  $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$  son grupos topolóxicos localmente compactos xa que son compactos.

(e)  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  é Hausdorff e localmente compacto ó ser homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Entón o subespazo aberto  $GL_n(\mathbb{R})$  é un grupo topolóxico localmente compacto e os subgrupos topolóxicos pechados de  $GL_n(\mathbb{R})$ , como  $SL_n(\mathbb{R})$ ,  $O_n(\mathbb{R})$  e  $SO_n(\mathbb{R})$ , tamén o son.

(f) De xeito análogo, como  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^{2n^2}$ , o subespazo aberto  $GL_n(\mathbb{C})$  e os seus subgrupos pechados  $SL_n(\mathbb{C})$ ,  $O_n(\mathbb{C})$  e  $SO_n(\mathbb{C})$  son localmente compactos.

### 3.3. Conexión

Nun espazo topolóxico non baleiro  $X$  unha *separación*  $U|V$  é un par de abertos disxuntos  $U$  e  $V$  tales que  $X = U \cup V$ .  $X$  é *conexo* se a única separación é a trivial ( $U = \emptyset$ ,  $V = X$  ou viceversa). Isto equivale a que os únicos abertos e pechados de  $X$  sexan  $X$  e o baleiro. Dado un espazo topolóxico  $X$  recordamos tamén estes resultados:

- Se  $U|V$  é unha separación de  $X$  e  $A \subset X$  un subespazo conexo entón  $A \subset U$  ou  $A \subset V$ .
- A unión de subespazos conexos de  $X$  con intersección non baleira é conexa.
- Sexa  $Y$  un espazo topolóxico e  $f: X \rightarrow Y$  unha aplicación continua. Se  $X$  é conexo entón  $f(X)$  é un subespazo conexo de  $Y$ . Logo, a conexidade é unha propiedade topolóxica e como unha aplicación cociente é continua e sobrexectiva, o cociente dun conexo é conexo.
- Sexa  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  unha familia de espazos topolóxicos. Entón,  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  é conexo se, e só se,  $X_\alpha$  é conexo para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Chámanse *compoñentes conexas* dun espazo topolóxico  $X$  ós subespazos de  $X$  que son conexos maximais con respecto á inclusión. Estas compoñentes son pechadas e forman unha partición de  $X$ . Un espazo topolóxico é *totalmente disconexo* se as súas compoñentes conexas son os conxuntos unitarios; o ser totalmente disconexo é unha propiedade topolóxica. Os espazos discretos son totalmente disconexos pero hai espazos totalmente disconexos (como o subespazo  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$  e a recta de Sorgenfrey) que non son discretos.

Dado un espazo topolóxico  $X$  téñense tamén estes resultados:

- Os subespazos conexos de  $X$  están contidos nunha compoñente conexa.
- Se  $X$  é totalmente disconexo entón os seus subespazos tamén o son.
- Sexa  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  unha familia de espazos topolóxicos. Entón,  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  é totalmente disconexo se, e só se,  $X_\alpha$  é totalmente disconexo para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Nesta proposición xuntamos as consecuencias de resultados anteriores en grupos topolóxicos.

**Proposición 3.8.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $H$  un subgrupo.*

- (a) *Se  $G$  é conexo entón non ten subgrupos abertos propios (distintos do total e do baleiro).*
- (b) *Se  $G$  é conexo entón  $G/H$  é conexo.*
- (c) *Se  $G/H$  e  $H$  son conexos entón  $G$  é conexo.*
- (d) *Se  $G/H$  e  $H$  son totalmente disconexos entón  $G$  é totalmente disconexo.*
- (e) *Se  $G$  é totalmente disconexo entón é Hausdorff.*

*Demostración.* (a) Séguese de que un subgrupo aberto de  $G$  é pechado (proposición 1.22).

(b) É consecuencia inmediata de que a proxección natural  $\pi: G \rightarrow G/H$  é continua e sobrexectiva.

(c) Supoñamos que  $G/H$  e  $H$  son conexos e vexamos que se existe unha separación non trivial  $U|V$  de  $G$  chegamos a unha contradición. Como  $H$  é conexo,  $Hx$  é conexo para todo  $x \in G$  (proposición 1.6), logo cada  $Hx$  está contido en  $U$  ou  $V$ . Como  $G = \bigcup_{x \in G} Hx$ , entón  $U$  e  $V$  son unións de clases. Así, se  $\pi$  é a proxección ó cociente  $G/H$ , temos que  $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$  e  $\pi(U) \cup \pi(V) = \pi(U \cup V) = G/H$ . E como  $\pi$  é aberta (proposición 1.24), entón  $\pi(U)|\pi(V)$  é unha separación non trivial de  $G/H$ , co que chegamos a unha contradición.

(d) Se  $A$  é un subconxunto conexo de  $G$ ,  $A \neq \emptyset$ , entón  $\pi(A)$  é un subconxunto conexo non baleiro de  $G/H$ . Por hipótese,  $\pi(A)$  é unitario, logo  $A$  está contido nunha clase  $Hx$ , que é totalmente disconexa ó ser homeomorfa a  $H$ . Así,  $A$  é unitario.

(e) Como  $G$  é totalmente disconexo,  $\{e\}$  é unha compoñente conexa, e por tanto pechada. Así, por 2.1,  $G$  é Hausdorff.

□

**Teorema 3.9.** *Sexa  $G$  un grupo topolóxico e  $C(e)$  a compoñente conexa de  $G$  que contén a  $e$ .*

- (a)  *$C(e)$  é un subgrupo normal pechado conexo de  $G$ .*

- (b) A compoñente conexa de  $G$  que contén a  $x$  é a clase  $C(e)x$ .
- (c) Tódolos subgrupos abertos de  $G$  conteñen a  $C(e)$ .
- (d)  $G/C(e)$  é un grupo topolóxico Hausdorff totalmente disconexo.

*Demostración.* (a)  $C(e)$  é pechado e conexo por ser compoñente conexa. Vexamos primeiro que é un subgrupo. Sabemos que  $e \in C(e)$ . Se  $a \in C(e)$ , como a traslación pola dereita  $r_{a^{-1}}$  é continua, tense que  $C(e)a^{-1}$  é conexo. Dado que  $a \in C(e)$ ,  $e \in C(e)a^{-1}$  e entón  $C(e)a^{-1} \subset C(e)$ . Como  $a \in C(e)$  é arbitrario,  $C(e)C(e)^{-1} \subset C(e)$  e concluímos que  $C(e)$  é un subgrupo de  $G$ .

Para ver que  $C(e)$  é normal, basta aplicar o mesmo razoamento de antes para ter que  $bC(e)b^{-1} = (l_b \circ r_b^{-1})(C(e)) \subset C(e)$  para todo  $b \in G$ .

(b) Se  $x \in G$ , como os homeomorfismos levan compoñentes conexas en compoñentes conexas, tense que  $C(e)x = r_x(C(e))$  é unha compoñente conexa e contén a  $x$ , así que  $C(x) = C(e)x$ .

(c) Sexa  $H$  un subgrupo aberto de  $G$ . Entón  $e \in H$  e pola proposición 1.22  $H$  é tamén pechado. Así,  $H \cap C(e)$  é un subconxunto aberto e pechado non baleiro de  $C(e)$ . Pola conexidade de  $C(e)$ ,  $H \cap C(e) = C(e)$ , logo  $C(e) \subset H$ .

(d) De (a) e de 2.5 (c) sabemos que  $G/C(e)$  é un grupo topolóxico Hausdorff.

Vexamos que o espazo cociente  $G/C(e)$  é totalmente disconexo. Se  $C$  é a compoñente conexa do elemento neutro  $C(e) \in G/C(e)$ , polo apartado (a) para o grupo  $G/C(e)$  tense que  $C$  é un subgrupo de  $G/C(e)$ , e polo corolario 1.27 existe un subgrupo  $K$  de  $G$  tal que  $C = K/C(e)$ . Por (c) da proposición 3.8, como  $C(e)$  e  $C$  son conexos tense que  $K$  é conexo, e contén a  $C(e)$ , logo  $K = C(e)$  e  $C = \{C(e)\}$  é unitario. Entón, por (b) tódalas compoñentes conexas son unitarias.  $\square$

**Exemplos 3.10.** (a) Calquera grupo coa topoloxía indiscreta é conexo.

(b) Calquera grupo coa topoloxía discreta é totalmente disconexo.

(c)  $\mathbb{R}$  coa suma é conexo, e por tanto,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  e  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  tamén. Porén, os subgrupos  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$  son totalmente disconexos.

(d)  $\mathbb{R}^*$  coa multiplicación ten dúas compoñentes conexas: o subgrupo multiplicativo  $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$  dos números reais positivos, que é a compoñente

conexa do elemento neutro  $1 \in \mathbb{R}^*$ , e  $-\mathbb{R}^+ = (-\infty, 0)$ . O grupo topolóxico cociente  $\mathbb{R}^*/C(1)$  é así un grupo discreto con dous elementos.

(e)  $\mathbb{C}^*$  e o seu subgrupo  $\mathbb{S}^1$  son grupos topolóxicos conexos. Tamén son conexos por ser produto de conexos o  $n$ -toro  $(\mathbb{S}^1)^n$  e o toro infinito  $(\mathbb{S}^1)^{\mathbb{N}}$ .

(f) O grupo topolóxico produto  $G = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$  dos grupos aditivos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q}$  ten infinitas compoñentes conexas. A compoñente conexa do elemento neutro  $e = (0, 0)$  é  $C(e) = \mathbb{R} \times \{0\}$  e o grupo topolóxico cociente  $G/C(e)$  é totalmente disconexo (isomorfo a  $\mathbb{Q}$ ).

(g)  $\mathbb{Z}$  coa topoloxía  $p$ -ádica é totalmente disconexo, xa que  $C(0) = \{0\}$ . En efecto, como temos unha cadea de subgrupos abertos

$$\mathbb{Z} \supset p\mathbb{Z} \supset p^2\mathbb{Z} \supset \dots \supset p^n\mathbb{Z} \supset \dots$$

entón, por (c) do teorema 3.9,  $C(0)$  ten que estar contida na intersección dos subgrupos, que é  $\{0\}$ . De xeito análogo,  $\mathbb{Q}$  coa topoloxía  $p$ -ádica é totalmente disconexo.

(h) As compoñentes conexas de  $GL_n(\mathbb{R})$  son os abertos:

$$\begin{aligned} GL_n^+(\mathbb{R}) &= \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}, \\ GL_n^-(\mathbb{R}) &= \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) < 0\}. \end{aligned}$$

Vexamos primeiro que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  é conexo por indución en  $n$ . No caso  $n = 1$ ,  $GL_1^+(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$  é conexo. Agora, supoñemos que  $GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$  é conexo. Consideramos a aplicación  $p: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asigna a cada matriz o vector da súa primeira columna. Identificando  $\mathbb{R}^n$  co subespazo de  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$  dos vectores coas compoñentes da primeira columna, podemos considerar o produto  $M_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times M_{n \times (n-1)}(\mathbb{R})$ , e  $p$  como a proxección ó primeiro factor do produto, polo que é continua e aberta, e a súa restrición ó aberto  $GL_n^+(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} p_+ : GL_n^+(\mathbb{R}) &\longrightarrow p(GL_n^+(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} &\longmapsto p_+(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tamén o é, logo  $p_+$  é unha identificación. Se  $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  entón o

conxunto  $H = p_+^{-1}(e_1)$  das matrices da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

onde  $(t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $C \in GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$ , é un subgrupo de  $GL_n^+(\mathbb{R})$  que é un espazo topolóxico homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n-1} \times GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$ , que é conexo pola hipótese de indución. Agora, se  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in GL_n^+(\mathbb{R})$  tense que

$$p_+(AB) = p_+\left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}b_{k1} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = Ap_+(B),$$

de onde se segue que  $p_+(A) = p_+(B)$  se, e só se,  $A^{-1}B \in H$ . En efecto, se  $p_+(A) = p_+(B)$  entón

$$p_+(A^{-1}B) = A^{-1}p_+(B) = A^{-1}p_+(A) = e_1,$$

así que  $A^{-1}B \in H$ ; e, reciprocamente, se  $A^{-1}B \in H$  entón  $p_+(A^{-1}B) = e_1$ , logo

$$p_+(B) = p_+(AA^{-1}B) = Ap_+(A^{-1}B) = Ae_1 = p_+(A).$$

Polo tanto, o espazo cociente (de clases á esquerda)  $GL_n^+(\mathbb{R})/H$  é homeomorfo ó espazo cociente de  $GL_n^+(\mathbb{R})$  pola relación de equivalencia definida pola identificación  $p_+ : GL_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , logo  $GL_n^+(\mathbb{R})/H$  é conexo pois é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con  $n \geq 2$ . Xa que  $H$  tamén é conexo, de (c) da proposición 3.8 séguese que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  é conexo.

$GL_n^+(\mathbb{R})|GL_n^-(\mathbb{R})$  é unha separación non trivial de  $GL_n(\mathbb{R})$ , polo que  $GL_n(\mathbb{R})$  non é conexo; ademais,  $GL_n^+(\mathbb{R})$  é a compoñente conexa da matriz  $I_n$  e  $GL_n^-(\mathbb{R})$  tamén é unha compoñente conexa, xa que é a imaxe de  $GL_n^+(\mathbb{R})$  polo homeomorfismo

$$A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto DA \in GL(n, \mathbb{R}),$$

onde  $D$  é a matriz diagonal con compoñentes diagonais  $(-1, 1, \dots, 1)$ .

(i) O grupo linear especial  $SL_n(\mathbb{R})$  é conexo. En efecto, basta ter en conta que  $GL_n^+(\mathbb{R})$  é conexo e que a aplicación

$$f: GL_n^+(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

$$A \longmapsto \frac{1}{\sqrt[n]{\det A}} A$$

é continua e a súa imaxe é  $SL(n, \mathbb{R})$ .

(j) As compoñentes conexas de  $O_n(\mathbb{R})$  son

$$SO_n(\mathbb{R}) \text{ e } \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = -1\}$$

Se  $A \in O_n(\mathbb{R})$  entón  $A^T A = I_n$  e séguese que  $|\det(O_n(\mathbb{R}))| = 1$ . Así, como a restrición da aplicación determinante ó grupo ortogonal é continua temos que  $SO_n(\mathbb{R}) \mid \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = -1\}$  é unha separación non trivial de  $O_n(\mathbb{R})$ .

Imos ver que que  $SO_n(\mathbb{R})$  é conexo por indución en  $n$ . No caso  $n = 1$ ,  $SO_1(\mathbb{R}) = \{1\}$  é conexo e supoñémolo certo para  $n - 1$ . Agora, se  $A^T A = I_n$  entón as normas dos vectores de  $\mathbb{R}^n$  definidos polas columnas de  $A$  (e polas filas) valen 1. Entón a aplicación  $p_+: GL_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  do exemplo (h) leva o subgrupo  $SO_n(\mathbb{R})$  de  $GL_n^+(\mathbb{R})$  na esfera unidade  $\mathbb{S}^{n-1}$  e a aplicación inducida

$$\rho: SO_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

é sobrexectiva (porque todo vector unitario de  $\mathbb{R}^n$  pode completarse a unha base ortonormal). Ademais  $\rho$  é continua e polo tanto tamén pechada (xa que vai dun espazo compacto a un espazo Hausdorff), logo  $\rho$  é unha identificación. Neste caso  $\rho^{-1}(e_1)$  é o conxunto  $H_0$  de matrices ortogonais da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & C & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad C \in SO_{n-1}(\mathbb{R}),$$

que é un subgrupo de  $SO_n(\mathbb{R})$  homeomorfo a  $SO_{n-1}(\mathbb{R})$ . Ademais, dadas  $A, B \in SO_n(\mathbb{R})$  tense que  $\rho(A) = \rho(B)$  se, e só se,  $A^{-1}B \in H_0$ , e así o espazo cociente  $SO_n(\mathbb{R})/H_0$  é homeomorfo ó espazo cociente de  $SO(n)$  pola relación de equivalencia definida por  $\rho$ , que polo tanto é conexo ó ser homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Como pola hipótese de indución  $H_0 \cong SO_{n-1}(\mathbb{R})$  tamén é conexo, o grupo ortogonal  $SO_n(\mathbb{R})$  é conexo, por (c) da proposición 3.8.

(k)  $GL_n(\mathbb{C})$  é un grupo topolóxico conexo, como se pode ver de xeito análogo ó caso de  $GL_n^+(\mathbb{R})$ . Ademais, a aplicación

$$f: GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{2n^2}$$
$$A \longmapsto \begin{pmatrix} \det(A)^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A$$

é continua e a súa imaxe é  $SL_n(\mathbb{C})$ , que polo tanto tamén é un grupo topolóxico conexo.

# Bibliografía

- [1] Arhangel'skii, A.; Tkachenko, M. *Topological Groups and Related Structures: An Introduction to Topological Algebra*, Atlantis Press, Paris, 2008.
- [2] Bourbaki, N. *Topologie générale, Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [3] Bourbaki, N. *Topologie générale, Chapitres 5 à 10*. Hermann, Paris, 1974.
- [4] Damaris Alvarado, C. *Grupos Topológicos*.  
<http://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/EA/32.GruposTopologicos-ClaudiaAlvarado.pdf>
- [5] Hewitt, E.; Ross, K.A. *Abstract Harmonic Analysis I*. Springer, Berlin, 1979.
- [6] Higgins P.J., *Introduction to Topological Groups*, Cambridge University Press, London, 1974.
- [7] Leja, F. *Sur la notion du groupe abstrait topologique*. Fund. Math. 9, 37–44, 1927.
- [8] Markley, N.G., *Topological Groups: An Introduction*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2010.
- [9] Pontrjagin, L.S. *Grupos continuos*. Editorial Mir, Moscú, 1978.
- [10] Schreier, O. *Abstrakte kontinuierliche Gruppen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4, 15–32, 1925.