



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# El universo constructible de Gödel

Pablo Saborido Fernández

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRADO DE MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Grado**

# El universo constructible de Gödel

Pablo Saborido Fernández

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento: Análisis Matemático</b>
<b>Título: El universo constructible de Gödel</b>
<b>Breve descripción del contenido</b>
El universo constructible de Gödel es una clase particular de conjuntos que pueden ser descritos completamente en términos de conjuntos más simples. Fue introducido por Kurt Gödel, que probó que el universo constructible es un modelo interno de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Este trabajo tiene por objetivo presentar la construcción del universo de Gödel, introduciendo las herramientas de la lógica formal necesarias y explorando sus consecuencias.



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Lógica formal</b>	<b>1</b>
1.1. Sintaxis: La lógica de primer orden . . . . .	1
1.2. Semántica: Teoría de Modelos . . . . .	4
1.3. Metalógica . . . . .	8
<b>2. Teoría de conjuntos</b>	<b>11</b>
2.1. Axiomas y definiciones . . . . .	11
2.2. Clases . . . . .	16
2.3. Ordinales . . . . .	16
2.4. Cardinales . . . . .	25
2.5. La jerarquía acumulativa . . . . .	30
<b>3. Introducción a las pruebas de consistencia</b>	<b>35</b>
3.1. Formalización de la teoría de modelos . . . . .	35
3.2. Fórmulas absolutas . . . . .	39
3.3. Consistencia del Axioma de Regularidad . . . . .	42
<b>4. El universo constructible</b>	<b>45</b>
4.1. El Principio de Reflexión . . . . .	45
4.2. Consistencia del Axioma de la Elección . . . . .	48
4.3. Consistencia de la Hipótesis del Continuo Generalizada . . . . .	51

I. Gödelización de la sintaxis	55
II. Explorando los ordinales	59
Bibliografía	63
Índice alfabético	65





## Resumen

La mayoría de teorías matemáticas pueden formalizarse en el sistema ZFC, que es una teoría de la lógica de primer orden. El Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel nos impide demostrar su consistencia en la propia ZFC, pero no impone restricciones a las pruebas de consistencia relativa. Esto significa que, asumiendo que una teoría formal es consistente, sí podemos demostrar la consistencia de otra. En nuestro caso, asumiremos la consistencia de un subconjunto de los axiomas de ZFC, e iremos demostrando la consistencia relativa de dicha teoría al añadirle los axiomas restantes. De hecho, también demostraremos la consistencia relativa de ZFC con la Hipótesis del Continuo Generalizada. La herramienta fundamental en la obtención de estos resultados es la teoría de modelos, que formaliza el concepto intuitivo de interpretación de un lenguaje. En este contexto, el universo constructible de Gödel es una interpretación posible de la teoría de conjuntos ZFC.

## Abstract

Most mathematical theories can be formalized within the ZFC system, which is a first-order logic theory. Gödel's Second Incompleteness Theorem prevents us from proving its consistency within ZFC itself, but it does not impose restrictions on relative consistency proofs. This means that, assuming a formal theory is consistent, we can prove the consistency of another. In our case, we will assume the consistency of a subset of ZFC axioms and proceed to prove the relative consistency of this theory with the remaining axioms. In fact, we will also demonstrate the relative consistency of ZFC with the Generalized Continuum Hypothesis. The fundamental tool in obtaining these results is model theory, which formalizes the intuitive concept of interpretation of a language. In this context, Gödel's constructible universe is a possible interpretation of ZFC set theory.



# Introducción

A lo largo de la historia de las matemáticas, la introducción de nuevos objetos de estudio ha venido en más de una ocasión acompañada por la aparición de problemas y paradojas. Un ejemplo de ello es la llamada paradoja de Arnauld, asociada a la introducción de los números negativos. Si entendemos estos números de forma que  $-1 < 1$ , entonces, usando que  $\frac{n}{m} < \frac{m}{n}$  se cumple cuando  $n$  es una cantidad menor que  $m$ , deducimos

$$-1 = \frac{-1}{1} < \frac{1}{-1} = -1.$$

Para solucionar esto es necesario examinar más en detalle el concepto de número negativo, de forma que eliminemos este tipo de contradicciones. De esta forma, si pensamos en  $-n$  como una cantidad *debida* o *en otra dirección*, en concreto, una cantidad de  $n$  cosas, vemos que el razonamiento usado ya no es válido.

La aparición del cálculo infinitesimal en el siglo XVII hizo que este tipo de problemas se multiplicasen, siendo sus soluciones mucho más complicadas que la que acabamos de ver. El uso de cantidades infinitesimales, menores que cualquier otra y distintas de cero, para el cálculo de derivadas e integrales era común, a pesar de las evidentes paradojas que estas entidades provocaban. Otros problemas también surgían al trabajar con series infinitas, al no estar todavía establecido un criterio de convergencia que descartase resultados paradójicos. No fue hasta el siglo XIX que se pudieron aclarar todas estas cuestiones, sobre todo gracias a la definición moderna de límite. Esto además permitió revisar, ahora ya con rigor, resultados que se asumían demostrados. El ejemplo más conocido es el descubrimiento de funciones continuas no diferenciables en ningún punto, cuya inexistencia se creía probada, y que hicieron evidente que una concepción del cálculo basada en la intuición espacial era insuficiente.

Algo similar ocurría con los espacios de puntos con los que se trabajaba. Si entendemos una línea continua como un conjunto de puntos, ¿cómo es posible que no haya huecos entre ellos, si entre cada par hay una distancia no nula? Esto desde luego desafía nuestra intuición espacial. Una clarificación sobre estos conceptos también era necesaria para completar la fundamentación del análisis, y esta vendría dada por la definición formal de los números reales. La forma de hacer esto sería mediante construcciones a partir de los números racionales. Ya fuese con sucesiones de Cauchy, o con cortes de Dedekind, era necesario trabajar con conjuntos infinitos de números. Esto, como veremos, encerraba más problemas.

Si en el estudio de los conjuntos de números destacó un nombre, este fue sin duda el de Georg Cantor. Estudiando lo que hoy llamaríamos puntos de acumulación, Cantor llegó a definir una familia de conjuntos indexada por unos números que generalizaban a los naturales, y que iban

más allá del infinito. Estos eran los números ordinales, que veremos más en detalle a lo largo de este trabajo. También desarrolló la teoría de los cardinales, demostrando que los números racionales y los algebraicos son numerables, pero que los reales no lo son. Esta nueva teoría de conjuntos parecía servir como el fundamento esperado para los números reales, pero para algunas personas todavía faltaba dar un paso más. Los números reales ahora podían definirse a partir de los racionales, y estos a su vez a partir de los naturales, así que solo faltaba conseguir una definición de estos últimos, que permitiese probar las verdades aritméticas. Esta búsqueda de rigor no era un mero capricho, sino que tenía fuertes motivaciones filosóficas. En el caso de Gottlob Frege, que desarrolló la teoría más completa y sistemática a este respecto, su intención era probar que la teoría de los números naturales era parte de la lógica. Así conseguiría demostrar que Kant, muy influyente en la época, se había equivocado al decir que las verdades aritméticas eran sintéticas y no analíticas, esto es, que no se podía llegar a ellas mediante el análisis del lenguaje y las definiciones.

Frege creó la que hoy podríamos considerar la primera lógica de predicados (que puede entenderse como una extensión de la lógica de proposiciones, en la que se analiza la estructura interna de cada proposición, separándola en sujeto y predicado), y esta le permitía hablar de conjuntos en términos puramente lógicos. La forma de hacerlo era entender los conjuntos como extensiones de una condición, es decir, como la colección de objetos que satisfacen esa condición, que en el lenguaje viene expresada por un predicado. Definiendo el número  $n$  como el conjunto de conjuntos de  $n$  elementos, se conseguía una concepción de los números naturales puramente lógica. Así, a finales del siglo XIX, la búsqueda de claridad y rigor parecía haberse completado.

Frege presentó su trabajo en dos volúmenes, y fue acabando el segundo, en 1902, poco antes de su publicación, que recibió una carta de Bertrand Russell. En ella se encontraba una contradicción que podía deducirse fácilmente de los axiomas del primer volumen, y que ponía en cuestión la validez del sistema. El problema surgía al considerar  $\mathbf{R}$ , el conjunto de los conjuntos que no se pertenecen a si mismos, es decir,  $\mathbf{R} = \{x : x \notin x\}$ . Si  $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ , debe cumplir la propiedad  $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$ , y si  $\mathbf{R} \notin \mathbf{R}$ , cumple la propiedad que hace que  $\mathbf{R} \in \mathbf{R}$ . Este problema surgía porque de los axiomas de Frege podía deducirse el Principio de Comprensión que, dada cualquier condición, aseguraba la existencia de un conjunto formado por los elementos para los que se cumple. Este mismo principio era usado por Cantor y, de hecho, él ya se había encontrado con paradojas similares algunos años antes. Para Cantor, que no estaba desarrollando un proyecto como el de Frege, la solución pasaba por no considerar a estas colecciones problemáticas conjuntos, llamándolas *multiplicidades absolutamente infinitas*. La solución de Frege no podía ser tan sencilla, y se vio obligado a modificar uno de sus axiomas para bloquear la paradoja de Russell. Ambas soluciones parecían *ad hoc* (sobre todo en el caso de Frege, aunque Cantor sí intentó dar alguna justificación filosófica), y de hecho el nuevo sistema no conseguía reemplazar satisfactoriamente al anterior. Ante esto, Frege acabó por abandonar su programa, asumiendo finalmente la postura kantiana.

Tal y como había ocurrido en el pasado con los números negativos y con el cálculo infinitesimal, parecía que era ahora el concepto de conjunto que necesitaba revisarse.

Russell recogió el testigo del proyecto logicista de Frege, proponiendo otra solución para las paradojas. Su idea se basaba en distinguir las entidades sobre las que habla la lógica en diferentes tipos. Los individuos serían entidades de tipo 0, los conjuntos de individuos de tipo 1, los conjuntos de conjuntos de individuos de tipo 2, etc. Esto bloqueaba las paradojas conjuntistas y además tenía cierta credibilidad ya que, en el lenguaje natural, también hacemos este tipo de distinciones, como al decir que “La letra ‘a’ pertenece al alfabeto griego” tiene sentido (aunque sea falsa) pero “El alfabeto latino pertenece al alfabeto griego” no lo tiene. Russell desarrolló junto a A.N.Whitehead un sistema basado en esta idea, que recogieron en el monumental *Principia Mathematica*. Sin embargo, algunos de los axiomas que se vieron obligados a usar no podían entenderse como verdades lógicas, y no eran coherentes con la concepción de conjunto como extensión de una condición, lo cual era necesario para el objetivo logicista. En particular, los problemáticos eran el Axioma de Reducibilidad, necesario para la formalización del análisis (Russell pretendía demostrar que todas las matemáticas eran parte de la lógica, no solo la aritmética), y los axiomas del infinito y la elección, conocidos en la teoría de conjuntos moderna.

El último proyecto de este tipo que mencionaremos, ya fuera del programa logicista (abandonando por tanto la concepción de conjunto como extensión de una condición), es la axiomatización de Ernst Zermelo. Lo novedoso de su propuesta consistía en sustituir el Principio de Comprensión por el Axioma de la Separación, que afirma que dada una condición  $F$  y un conjunto  $x$ , existe otro conjunto formado por los elementos de  $x$  que satisfacen  $F$ , como si  $F$  separase al conjunto  $x$  en dos partes. Así, Zermelo era capaz de evitar las paradojas, aunque no podía asegurar que otras contradicciones aún no descubiertas pudiesen deducirse de sus axiomas. Esto era una fuente de preocupación, especialmente porque no se tenía ningún concepto de conjunto que justificase los nuevos axiomas. Cabe mencionar también que al sistema de Zermelo, completado con la ayuda de A. Fraenkel, se le conoce como ZF, y si a este le añadimos el Axioma de la Elección (*choice*), se convierte en ZFC.

Si los axiomas no tenían una interpretación clara que justificase la confianza en ellos, esta tendría que venir dada por una prueba de consistencia. Este era en esencia el programa de Hilbert para la fundamentación de las matemáticas. La consistencia de los axiomas no era el único problema al que se enfrentaba, pues también estaba ganando popularidad el intuicionismo de Brouwer. Sus defensores ponían en duda algunos de los métodos conjuntistas, e incluso algunas leyes lógicas, argumentando que no podían existir entidades matemáticas fuera de la intuición, entidades que no fuesen construcciones de la mente. La respuesta de Hilbert fue el finitismo. Para Hilbert, un razonamiento finitista era aquel que involucra una cantidad finita de objetos concretos y es realizado en una cantidad finita de pasos bien definidos. Este es precisamente el tipo

de razonamiento que se lleva a cabo al manipular símbolos de acuerdo a unas normas establecidas. Por ejemplo, para Hilbert la suma  $2 + 3 = 5$  se puede realizar de forma finitista representando los números como una sucesión (finita) de líneas verticales y la suma como la concatenación de sucesiones. Así, si unimos  $||$  y  $|||$  obtenemos el símbolo del 5. Las conclusiones alcanzadas por estos métodos tenían la seguridad que los intuicionistas demandaban. Además, este tipo de manipulaciones serían las realizadas en sistemas como el de Zermelo que estuviesen debidamente formalizados, especificando reglas de inferencia, símbolos permitidos y normas sintácticas.

Inicialmente, Hilbert estaba solo interesado en probar de forma finitista la consistencia de estos sistemas, pero esto planteaba varias preguntas: ¿son realmente las matemáticas juegos de símbolos?, ¿por qué debería ser un sistema preferible a otro? Finalmente, Hilbert decidió que la parte de las matemáticas que era representable de forma finitista, tal y como hicimos con los números naturales y las sucesiones de líneas, eran *proposiciones reales*, con valores de verdad definidos. Por el contrario, las *proposiciones ideales* serían todas las demás, incluyendo cualquiera que hiciese referencia a objetos infinitos, números irracionales, etc. Estas proposiciones, carentes de significado real y valor de verdad, debían entenderse como meros instrumentos para deducir proposiciones reales. Ahora, el objetivo del programa de Hilbert sería demostrar que el sistema axiomático en cuestión es conservador con respecto a estas últimas, es decir, que no puede deducirse ninguna falsedad finitista. Notemos que si pudiese deducirse tal falsedad, como el sistema axiomático debía formalizar las matemáticas, en concreto su parte finitista, tendríamos que la negación de la falsedad también es deducible, es decir, que el sistema es inconsistente. Así mismo, si el sistema es inconsistente, entonces puede demostrarse fácilmente (bajo las leyes de la lógica clásica) que cualquier proposición es deducible y, por tanto, cualquier falsedad finitista también. Es decir, el nuevo objetivo es equivalente al anterior, aunque partiendo de una postura filosófica distinta.

El lector interesado puede consultar [5], que ha sido la referencia principal en la redacción de esta introducción, donde se puede encontrar una exposición más detallada, así como información sobre las posturas modernas en torno a estas cuestiones. También han sido útiles [4] y [31], en especial para ciertos detalles relativos al pensamiento de Hilbert.

A lo largo de este trabajo nos encontraremos con resultados obtenidos en el contexto histórico que acabamos de exponer y, en particular, algunos relacionados con el programa de Hilbert. Sin embargo, el objetivo principal será la exposición de un concepto de conjunto compatible con el sistema ZFC. Recordemos que la idea de conjuntos como extensiones de condiciones se había abandonado y por ahora no teníamos un concepto claro de conjunto que motivase los axiomas. Resulta que el estudio de estos conceptos, o interpretaciones de los axiomas, puede formalizarse mediante la teoría de modelos. Así, haremos una presentación del universo constructible de Gödel, un modelo de ZFC, y veremos sus principales aplicaciones.

Comenzaremos haciendo una introducción a la lógica formal, donde presentaremos el marco teórico en el que se encontrará el resto del trabajo. Luego nos centraremos en la teoría de conjuntos ZFC, que será una instancia de las teorías formales presentadas en el capítulo anterior. Presentaremos sus axiomas y las principales construcciones que se llevan a cabo en ella. Una vez hecho todo esto, ya tendremos todo lo necesario para, en el Capítulo 3, abordar cuestiones de consistencia relativa, realizando una demostración de consistencia sencilla. Finalmente, en el último capítulo definiremos el universo constructible de Gödel, y lo usaremos en dos resultados de consistencia relativa con los que pondremos fin a este trabajo. Debido al gran número de nuevos conceptos y definiciones que introduciremos, se ha añadido un índice alfabético que puede encontrarse en las últimas páginas. La bibliografía principal, además de [5], ha constado de [7], [9], [14] y [15].



# Capítulo 1

## Lógica formal

El estudio del lenguaje, entendido como un sistema de símbolos, recibe el nombre de *semiótica* [3]. Dentro de este encontramos la *semántica* y la *sintaxis*. La primera se ocupa de las relaciones entre los signos y aquello a lo que se refieren, esto es, su significado. La segunda estudia las relaciones entre los signos y las normas que rigen la construcción de secuencias de signos (o **frases**), ignorando cualquier consideración semántica. Los lenguajes naturales como el español, el inglés o el bantú son susceptibles de estos análisis, pero lo que nos interesará a nosotros será el estudio de los lenguajes formales. Estos últimos tienen la ventaja de estar libres de cualquier tipo de ambigüedad, ya que su sintaxis se ha construido de forma artificial. En ellos se ha especificado de forma precisa un alfabeto y unas reglas de formación que fijan las combinaciones de signos válidas.

En general, el propósito de nuestro lenguaje formal será servir de marco para una teoría, como puede ser la de grupos, la de conjuntos, o la de los razonamientos válidos. Por lo tanto, a la caracterización de lenguaje formal dado al inicio de esta sección le hace falta algún sistema de deducción que nos permita distinguir las frases verdaderas de las que no lo son. Pero la noción de *veracidad* pertenece a la semántica, depende la interpretación de los signos. Si lo que queremos es trabajar sintácticamente, nos interesarán las frases demostrables en el sistema, que serán aquellas que, o bien son axiomas, o bien pueden deducirse a partir de ellos mediante reglas de inferencia. Tanto los axiomas como las reglas de inferencia deben especificarse previamente.

### 1.1. Sintaxis: La lógica de primer orden

El sistema formal que nos interesará será la llamada lógica de primer orden o de predicados, y para su presentación seguiremos principalmente [7]. Como ya adelantamos, este sistema lógico intenta dar un paso más allá que la lógica proposicional (o de orden cero), analizando la estructura sintáctica interna que comparten todas las proposiciones. Esta se compone de un nombre, que hace referencia a un individuo, y de una propiedad que se le asocia al mismo, indicada por un predicado. Concretamente, nuestro alfabeto se compondrá de:

- **Variables:**  $x, y, z, x_1, x_2 \dots$

- **Operadores lógicos:**  $\neg$  (negación),  $\wedge$  (conjunción),  $\vee$  (disyunción),  $\rightarrow$  (implicación).
- **Cuantificadores:**  $\forall$  (para todo),  $\exists$  (existe).
- **Constantes:**  $c_1, c_2 \dots$
- **Símbolos de funciones:**  $f(\cdot), g(\cdot) \dots h(\cdot, \cdot), j(\cdot, \cdot) \dots$
- **Símbolos de predicados:**  $A(\cdot), B(\cdot) \dots C(\cdot, \cdot), D(\cdot, \cdot) \dots$
- **Símbolo de igualdad:**  $=$  (es realmente un predicado binario).

Las variables, operadores lógicos, cuantificadores y el símbolo de igualdad son los llamados **símbolos lógicos**. Por otro lado, las constantes, funciones y predicados dependerán de la teoría que queramos formalizar, y forman la **signatura** o **lenguaje** ( $\mathcal{L}$ ) de la teoría. Además de los símbolos indicados, usaremos paréntesis y corchetes con el fin de facilitar la lectura. También será común escribir  $x = y$  en vez de  $=(x, y)$ , y lo mismo con otros predicados como  $\in$ .

**Definición 1.1.** Se dice que una frase es un **término** si es una variable, una constante, o es de la forma  $f(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n)$  donde  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$  son términos y  $f$  una función  $n$ -aria.

**Definición 1.2.** Una **frase bien formulada** o **fórmula** (lo que al inicio hemos llamado “combinación de símbolos válida”) es una frase que cumple una de las siguientes condiciones:

- (I) Es de la forma  $A(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n)$  con  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$  términos y  $A$  un predicado  $n$ -ario.
- (II) Es de la forma  $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$  o  $\varphi \rightarrow \psi$  con  $\varphi$  y  $\psi$  fórmulas.
- (III) Es de la forma  $\forall x\varphi$  o  $\exists x\varphi$  con  $\varphi$  una fórmula y  $x$  una variable. En ese caso,  $\varphi$  es el **ámbito** del cuantificador en cuestión.

**Definición 1.3.** Dada una fórmula  $\varphi$ , una **subfórmula** de  $\varphi$  es un subconjunto de símbolos consecutivos de  $\varphi$  que forman una fórmula.

Para indicar el lenguaje al que pertenece una fórmula usaremos la expresión  $\mathcal{L}$ -fórmula.

Si en una fórmula encontramos la expresión  $\forall x\varphi$  o  $\exists x\varphi$  con  $\varphi$  otra fórmula, decimos que las instancias de  $x$  en  $\varphi$  están **ligadas** por el cuantificador. Si, por el contrario, la variable no se encuentra en el ámbito de ningún cuantificador (referido a la propia variable), se dice que está **libre**. Una fórmula que no contenga variables libres es una fórmula **cerrada**. La fórmula obtenida al hacer  $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi$ , donde  $x_1, x_2 \dots x_n$  son las variables libres de  $\varphi$ , se llama **clausura** de  $\varphi$  (denotado por  $\overline{\varphi}$ ). Siendo  $\varphi$  una fórmula, será común escribir  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  para indicar que  $x_1, \dots, x_n$  son variables libres en  $\varphi$ .

Si  $\varphi$  es una fórmula,  $\tau$  un término y  $x$  una variable, se denota por  $\varphi(x/\tau)$  a la fórmula que resulta de sustituir todas las instancias libres de  $x$  por  $\tau$ . Una **sustitución** de este tipo se dice **admisibile** si ninguna instancia libre de  $x$  en  $\varphi$  ocurre en el ámbito de un cuantificador para alguna variable de  $\tau$ .

Ahora pasaremos a dar una lista de axiomas de la lógica de primer orden. Estos son los axiomas que compartirán todas las teorías, pues en ellos están codificadas las formas válidas de razonamiento. Sean  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \psi$  fórmulas,  $\tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n$  términos,  $x$  una variable,  $F$  una función  $n$ -aria y  $R$  un predicado  $n$ -ario. Supongamos además que  $x$  no es una variable libre de  $\psi$  y que la sustitución  $\varphi(x/\tau)$  es admisible.

- $\mathcal{A}_0: \varphi \vee \neg\varphi$
- $\mathcal{A}_1: \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- $\mathcal{A}_2: (\psi \rightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)) \rightarrow ((\psi \rightarrow \varphi_1) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi_2))$
- $\mathcal{A}_3: (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- $\mathcal{A}_4: (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- $\mathcal{A}_5: \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi))$
- $\mathcal{A}_6: \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- $\mathcal{A}_7: \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- $\mathcal{A}_8: (\varphi_1 \rightarrow \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_2 \rightarrow \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow \varphi_3))$
- $\mathcal{A}_9: \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- $\mathcal{A}_{10}: \forall x\varphi(x) \rightarrow \varphi(\tau)$
- $\mathcal{A}_{11}: \varphi(\tau) \rightarrow \exists x\varphi(x)$
- $\mathcal{A}_{12}: \forall x(\psi \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x\varphi(x))$
- $\mathcal{A}_{13}: \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi(x) \rightarrow \psi)$
- $\mathcal{A}_{14}: \tau = \tau$
- $\mathcal{A}_{15}: (\tau_1 = \tau'_1 \wedge \dots \wedge \tau_n = \tau'_n) \rightarrow (R(\tau_1 \dots \tau_n) \rightarrow R(\tau'_1 \dots \tau'_n))$
- $\mathcal{A}_{16}: (\tau_1 = \tau'_1 \wedge \dots \wedge \tau_n = \tau'_n) \rightarrow (F(\tau_1 \dots \tau_n) = F(\tau'_1 \dots \tau'_n))$

Realmente cada una de las expresiones anteriores no es un único axioma, ya que cada instancia de sus componentes generará uno distinto. Por ejemplo, si nuestro lenguaje tiene infinitas constantes, algunos de los axiomas recogidos en  $\mathcal{A}_{14}$  son  $c_1 = c_1, c_2 = c_2$ , etc. Por esto, los anteriores se llaman realmente **esquemas axiomáticos**, aunque en general los llamaremos axiomas si no causa confusión. Por otro lado, las reglas de inferencia permitidas serán:

- **Modus ponens (MP)**: Si tenemos las fórmulas  $\varphi$  y  $\varphi \rightarrow \psi$ , podemos deducir  $\psi$ .
- **Generalización (G)**: Si tenemos la fórmula  $\varphi$ , podemos deducir  $\forall x\varphi$  para cualquier variable  $x$ .

**Definición 1.4.** Sea  $\Phi$  un conjunto (posiblemente vacío) de  $\mathcal{L}$ -fórmulas, se dice que una  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\psi$  es **demostrable** a partir de  $\Phi$  (denotado  $\Phi \vdash \psi$ ), o que  $\psi$  es un **teorema** de  $\Phi$ , si existe

una sucesión finita de  $\mathcal{L}$ -fórmulas  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$  tal que  $\varphi_n$  es  $\psi$  y para todo  $i \in \{0, 1, 2 \dots n\}$  se cumple una de las siguientes condiciones:

- (I)  $\varphi_i$  es un axioma.
- (II)  $\varphi_i$  está en  $\Phi$ .
- (III)  $\varphi_i$  es la consecuencia de fórmulas previas en la sucesión mediante **MP** o **G**.

Además, dicha secuencia de fórmulas es una **demostración**.

En el caso en el que, en las condiciones anteriores,  $\Phi$  sea el conjunto vacío, escribiremos simplemente  $\vdash \psi$ . También usaremos  $\Phi \not\vdash \psi$  cuando  $\psi$  no sea demostrable a partir de  $\Phi$ .

El proceso de formalización de una teoría consistirá en, una vez establecido el lenguaje apropiado, seleccionar un conjunto de fórmulas que sirvan como axiomas de la teoría ( $\Phi$  en la definición anterior). Por ello, como muchas definiciones y resultados se centran en los conjuntos de fórmulas, definiremos lo siguiente.

**Definición 1.5.** Una **teoría**  $T$  (o  $\mathcal{L}$ -teoría si queremos especificar el lenguaje) es un conjunto de  $\mathcal{L}$ -fórmulas.

**Ejemplo 1.6.** Para la teoría de los conjuntos totalmente ordenados tenemos un lenguaje que cuenta con un único predicado binario,  $\mathcal{L}_{TO} = \{<\}$ , y las fórmulas que seleccionamos como axiomas (no son únicos) son:

- $TO_1: \forall x \neg (x < x)$
- $TO_2: \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$
- $TO_3: \forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$

Este ejemplo pertenece a [24], donde pueden encontrarse una gran variedad de ellos.

## 1.2. Semántica: Teoría de Modelos

Ahora pasaremos al estudio de las interpretaciones de los lenguajes formales. Para ello es necesario poder hablar de conjuntos de entidades, sobre los que las variables podrán tomar valores, dotados de algunas estructuras adicionales como funciones y relaciones que permitan interpretar el resto de símbolos del lenguaje. Asumiremos además que en dichas interpretaciones las leyes de la lógica clásica se cumplen, es decir, son ciertas  $\varphi \vee \neg \varphi$ , las leyes de De Morgan, etc.

Notemos también que ahora será necesario el uso de varios conceptos conjuntistas, y podríamos pensar que la elección de una u otra teoría formal de conjuntos afectase a la existencia o las propiedades de dichas interpretaciones. En general trabajaremos con una teoría de conjuntos informal, pues estamos hablando de la semántica desde el lenguaje natural, pero más adelante serán relevantes dichas consideraciones. La mayor parte de esta sección consta de definiciones de [7] adaptadas a [9] y [14], ya que estas serán las referencias principales más adelante. Algunas definiciones se han extraído directamente de [9] y [14].

**Definición 1.7.** Dado un lenguaje  $\mathcal{L}$ , una  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathcal{M}$  viene dada por:

- (I) Un conjunto no vacío  $M$  llamado **universo** de  $\mathcal{M}$ .
- (II) Una función  $f^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M$  para cada función  $n$ -aria  $f$  de  $\mathcal{L}$ .
- (III) Un subconjunto  $A^{\mathcal{M}} \subset M^n$  para cada predicado  $n$ -ario  $A$  de  $\mathcal{L}$ .
- (IV) Un elemento  $c^{\mathcal{M}} \in M$  para cada constante  $c$  de  $\mathcal{L}$ .

Así, lo único que nos queda para determinar la interpretación de una fórmula cualquiera  $\varphi$ , es el valor de sus variables. Por eso es necesaria la siguiente definición.

**Definición 1.8.** Sea  $\varphi$  una fórmula o un término en  $\mathcal{L}$ , una función  $\sigma$  es una **asignación** para  $\varphi$  en  $M$  si su dominio es un conjunto finito de variables entre las que se encuentran las variables libres de  $\varphi$ , y toma valores en  $M$ . El par  $\mathcal{I} = (\mathcal{M}, \sigma)$  es una  $\mathcal{L}$ -**interpretación** de  $\varphi$ .

En ocasiones, resultará útil poder especificar el valor que queremos que tome una variable en particular. Por ello, escribiremos  $\sigma \frac{a}{y}$  para referirnos a lo siguiente:

$$\sigma \frac{a}{y}(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = y, \\ \sigma(x) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además,  $\sigma \frac{a_1}{y_1} \frac{a_2}{y_2}$  será  $(\sigma \frac{a_1}{y_1}) \frac{a_2}{y_2}$ . Comenzamos viendo cómo se definen las interpretaciones para los términos.

**Definición 1.9.** Sea  $\tau$  un término en  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{I} = (\mathcal{M}, \sigma)$  una  $\mathcal{L}$ -interpretación de  $\tau$ , definimos  $\mathcal{I}(\tau) \in M$  de forma recursiva usando:

- (I) Para cada variable  $x$  en el dominio de  $\sigma$ ,  $\mathcal{I}(x) = \sigma(x)$ .
- (II) Para cada constante  $c$ ,  $\mathcal{I}(c) = c^{\mathcal{M}}$ .
- (III) Para cada función  $n$ -aria  $f$  y  $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$  términos,

$$\mathcal{I}(f(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n)) = f^{\mathcal{M}}(\mathcal{I}(\tau_1), \mathcal{I}(\tau_2) \dots \mathcal{I}(\tau_n)).$$

Una fórmula será verdadera en  $\mathcal{M}$  cuando su interpretación en la estructura lo sea. Por ejemplo, siendo  $A(\cdot)$  un predicado y  $c$  una constante,  $A(c)$  será verdad cuando  $c^{\mathcal{M}} \in A^{\mathcal{M}}$ . Siguiendo esta idea, decimos que una fórmula es verdadera en una interpretación de acuerdo a las siguientes reglas.

**Definición 1.10.** Sea  $\varphi$  una  $\mathcal{L}$ -fórmula, se dice que  $\varphi$  es **verdadera** (o **cierta**) en una  $\mathcal{L}$ -interpretación  $\mathcal{I} = (\mathcal{M}, \sigma)$  de  $\varphi$ , denotado  $\mathcal{I} \models \varphi$ , cuando alcanzamos  $\mathcal{I} \models \varphi$  mediante recursión usando lo siguiente:

- (I) Siendo  $\tau_1$  y  $\tau_2$  términos,  $\mathcal{I} \models \tau_1 = \tau_2$  cuando  $\mathcal{I}(\tau_1)$  es igual que  $\mathcal{I}(\tau_2)$ .
- (II) Siendo  $A$  un predicado  $n$ -ario,  $\mathcal{I} \models A(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n)$  cuando  $(\mathcal{I}(\tau_1), \mathcal{I}(\tau_2) \dots \mathcal{I}(\tau_n)) \in A^{\mathcal{M}}$ .
- (III) Siendo  $\psi$  una fórmula,  $\mathcal{I} \models \neg\psi$  cuando no es cierto que  $\mathcal{I} \models \psi$ .
- (IV) Siendo  $\psi_1$  y  $\psi_2$  fórmulas,  $\mathcal{I} \models \psi_1 \rightarrow \psi_2$  cuando, si  $\mathcal{I} \models \psi_1$  entonces  $\mathcal{I} \models \psi_2$ .
- (V) Siendo  $x$  una variable libre de una fórmula  $\psi$ ,  $\mathcal{I} \models \forall x\psi$  cuando, para todo  $a \in M$ ,  $(\mathcal{M}, \sigma \frac{a}{x}) \models \psi$ .

Las reglas para el resto de operadores lógicos y cuantificadores pueden deducirse de los expuestos. Además, si  $\varphi$  es una fórmula cerrada, es evidente que los valores concretos que tome  $\sigma$  no serán relevantes (habrá que aplicar la regla (V) para todas las variables), por lo que escribiremos  $\mathcal{M} \models \varphi$  en vez de  $(\mathcal{M}, \emptyset) \models \varphi$ . También tomaremos como convención que, si  $\varphi$  tiene variables libres,  $\mathcal{M} \models \varphi$  significa  $\mathcal{M} \models \bar{\varphi}$ .

Así, vemos que una fórmula con variables libres se considerará verdadera en  $\mathcal{M}$  cuando lo sea independientemente de cómo se interprete dicha variable. Al hacer esta generalización estamos tomando la misma decisión que en [27] o [8], lo que nos permite trabajar, casi siempre, con fórmulas (en vez de fórmulas cerradas), alejándonos a este respecto de la presentación en [7]. Sin embargo, en algunas situaciones nos interesará saber si una fórmula con variables libres es cierta para un conjunto concreto de valores en  $M$ .

**Definición 1.11.** Sea  $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$  una  $\mathcal{L}$ -fórmula y  $\mathcal{M}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura, se dice que  $\varphi$  es **verdadera para**  $a_1, \dots, a_n \in M$ , denotado  $\mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ , cuando  $(\mathcal{M}, \emptyset \frac{a_1}{x_1} \dots \frac{a_n}{x_n}) \models \varphi$ .

El concepto central de la teoría de modelos es el siguiente.

**Definición 1.12.** Sea  $T$  una  $\mathcal{L}$ -teoría. Una  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathcal{M}$  es un **modelo** de  $T$ , denotado por  $\mathcal{M} \models T$  si todas la fórmulas de  $T$  son verdaderas en  $\mathcal{M}$ , i.e., para toda  $\varphi \in T$ ,  $\mathcal{M} \models \varphi$ .

Definiremos también el concepto de *subestructura*, que generaliza las nociones algebraicas de subgrupo, subanillo, etc.

**Definición 1.13.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$   $\mathcal{L}$ -estructuras. Diremos que  $\mathcal{M}$  es una **subestructura** de  $\mathcal{N}$ , denotado por  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ , cuando se cumplan:

- (I) El universo de  $\mathcal{M}$  es un subconjunto del de  $\mathcal{N}$ ,  $M \subset N$ .
- (II) Para cada función  $n$ -aria  $f$  de  $\mathcal{L}$ , se tiene que  $f^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{N}}|_{M^n}$ .
- (III) Para cada predicado  $n$ -ario  $A$  de  $\mathcal{L}$ , se tiene que  $A^{\mathcal{M}} = A^{\mathcal{N}} \cap M^n$ .
- (IV) Para cada constante  $c$  de  $\mathcal{L}$ , se tiene que  $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$ .

**Definición 1.14.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$   $\mathcal{L}$ -estructuras cumpliendo  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ . Dada una fórmula  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$ , escribiremos  $\mathcal{M} \preceq_{\varphi} \mathcal{N}$  cuando, para cualquier asignación  $\sigma$  para  $\varphi$  en  $\mathcal{M}$ ,  $(\mathcal{M}, \sigma) \models \varphi$  si y solo si  $(\mathcal{N}, \sigma) \models \varphi$ . Si  $\mathcal{M} \preceq_{\varphi} \mathcal{N}$  para todas las fórmulas  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$ , decimos que  $\mathcal{M}$  es una **subestructura elemental** de  $\mathcal{N}$ , que indicamos por  $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ .

**Ejemplo 1.15.** Sea  $\mathcal{L}_G = \{+, 0\}$  el lenguaje de la teoría de grupos, y sean  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{N}$  las  $\mathcal{L}_G$ -estructuras en las que los símbolos se interpretan de la forma usual. Es evidente que  $\mathbb{N}$  es una subestructura de  $\mathbb{Z}$ , sin embargo, como solo  $\mathbb{Z}$  cumple los axiomas de la teoría de grupos,  $\mathbb{N}$  no es una subestructura elemental. En particular,  $\mathbb{Z} \models \forall x \exists y (x + y = 0)$ , pero no es cierto para  $\mathbb{N}$ .

Acabaremos esta sección con una definición que será fundamental en la construcción del universo constructible de Gödel.

**Definición 1.16.** Sea  $\mathcal{M}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura, se dice que un conjunto  $N \subset M$  es **definible** sobre  $\mathcal{M}$  si existen  $a_1, \dots, a_n \in M$  (los parámetros) y una  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi$  tal que:

$$N = \{x \in M : \mathcal{M} \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}.$$

Si  $a_1, \dots, a_n \in A \subset M$ , decimos también que  $N$  es **A-definible**. Además, al conjunto de todos los subconjuntos definibles lo denotaremos por  $\text{def}(\mathcal{M}) = \{N \subset M : N \text{ es definible sobre } \mathcal{M}\}$ .

**Ejemplo 1.17.** Consideremos el lenguaje de anillos  $\mathcal{L}_A = \{+, -, \times, 0, 1\}$ , y la  $\mathcal{L}_A$ -estructura dada por  $\mathbb{R}$ , donde los símbolos de la signatura se interpretan de la forma usual. Sea  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio cualquiera, el conjunto  $N = \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}$  es definible. Siendo  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , no hay más que considerar la fórmula

$$w_n \times \overbrace{x \times \cdots \times x}^{n \text{ veces}} + \cdots + w_1 \times x + w_0 = 0.$$

Llamándola  $\varphi(x, w_0, \dots, w_n)$ , vemos que  $\varphi(x, a_0, \dots, a_n)$  define  $N$ . De hecho,  $N$  es  $A$ -definible para todo  $A$  cumpliendo  $\{a_0, \dots, a_n\} \subset A \subset \mathbb{R}$ . Este ejemplo se ha extraído de [18], donde se recogen algunos más.

### 1.3. Metalógica

Siempre que hablemos sobre un lenguaje, necesitaremos otro lenguaje para hablar sobre él. El primero recibe el nombre de *lenguaje objeto*, mientras que el segundo es el *metalenguaje*. En nuestro caso, por ejemplo, el metalenguaje ha sido el español. Es importante aclarar que, en esta sección, todos los resultados pertenecen al metalenguaje y, por tanto, sus demostraciones no son demostraciones en el lenguaje formal del que hablan.

En vista de lo expuesto hasta ahora, podríamos preguntarnos: ¿si una fórmula  $\varphi$  es demostrable a partir de una teoría  $T$ ,  $\varphi$  es cierta en en cada modelo  $\mathcal{M}$  de  $T$ ?, ¿si una fórmula  $\varphi$  es cierta en en cada modelo  $\mathcal{M}$  de  $T$ ,  $\varphi$  es demostrable a partir de  $T$ ?

La respuesta a la primera pregunta viene dada por el siguiente teorema.

**Teorema 1.18** (de Solidez [7, Teorema 3.8]). *Sea  $T$  una  $\mathcal{L}$ -teoría y  $\mathcal{M}$  un modelo de  $T$ . Para cada  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi$  tenemos que, si  $T \vdash \varphi$ , entonces  $\mathcal{M} \models \varphi$ .*

Notemos que, como consecuencia, si podemos demostrar una contradicción, también tendremos una contradicción en  $\mathcal{M}$ , pero habíamos dicho que las  $\mathcal{L}$ -estructuras respetaban las leyes de la lógica clásica, en particular, el principio de no contradicción.

**Definición 1.19.** Decimos que una  $\mathcal{L}$ -teoría  $T$  es **consistente** si no existe  $\mathcal{L}$ -fórmula  $\varphi$  tal que  $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ . Lo denotamos por  $\text{Con}(T)$ . En caso contrario escribimos  $\neg\text{Con}(T)$ .

**Corolario 1.20.** *Si una  $\mathcal{L}$ -teoría  $T$  tiene un modelo, entonces  $T$  es consistente.*

Una herramienta muy útil para probar resultados de consistencia es el siguiente teorema.

**Teorema 1.21** (de Compacidad). *Sea  $T$  una  $\mathcal{L}$ -teoría,  $T$  es consistente si y solo si cada subconjunto finito  $T'$  de  $T$  es consistente.*

*Demostración.* Es evidente que si  $T$  es consistente, entonces  $T'$  también lo es. Por otro lado, si  $T$  es inconsistente, entonces existe  $\varphi$  tal que  $T \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$ , pero, por la definición de demostración, esta involucra una cantidad finita de axiomas y fórmulas de  $T$ . Tomando como  $T'$  dicho conjunto finito, tenemos que  $T'$  es inconsistente.  $\square$

Volviendo a las preguntas iniciales, la respuesta a la segunda se deduce del siguiente teorema.

**Teorema 1.22** (de Completitud, primera forma [27, Teorema 4.3.12]). *Sea  $T$  una  $\mathcal{L}$ -teoría consistente, entonces  $T$  tiene un modelo.*

**Corolario 1.23.** *Una  $\mathcal{L}$ -teoría  $T$  es consistente si y solo si tiene un modelo.*

El Teorema de Completitud tiene una formulación alternativa que presentamos a continuación. Demostrar la equivalencia entre ambas no es complicado, pero no lo haremos aquí ya que requeriría un desarrollo algo más extenso de la sintaxis de la lógica de primer orden. La demostración puede encontrarse en [27].

**Teorema 1.24** (de Completitud, segunda forma [27, Teorema 4.3.11]). *Sea  $T$  una  $\mathcal{L}$ -teoría y  $\varphi$  una  $\mathcal{L}$ -fórmula,  $T \vdash \varphi$  si y solo si, para todo modelo  $\mathcal{M}$  de  $T$ ,  $\mathcal{M} \models \varphi$ .*

Nótese que una de las implicaciones es la proporcionada por el Teorema de Solidez, así que la realmente relevante es la opuesta. Esta equivalencia nos permite prescindir de realizar de forma explícita muchas demostraciones formales, ya que si algo se cumple en todos los modelos sabemos que será un teorema. Por ejemplo, cualquier tautología de la lógica proposicional, como  $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ , debe ser un teorema para todas las teorías. A partir del Teorema 1.22 también podemos deducir otro resultado interesante, y es que el modelo que se construye en su demostración tiene la peculiaridad de ser numerable.

**Teorema 1.25** (Descendiente de Löwenheim-Skolem [8, Teorema 4.20]). *Sea  $T$  una  $\mathcal{L}$ -teoría consistente, entonces  $T$  tiene un modelo numerable.*

Con lo visto hasta ahora también estamos en posición de presentar los teoremas de incompletitud de Gödel. Comencemos con la siguiente definición.

**Definición 1.26.** Se dice que una  $\mathcal{L}$ -teoría  $T$  es **completa** si, para cualquier  $\mathcal{L}$ -fórmula cerrada  $\varphi$ , o bien  $T \vdash \varphi$ , o bien  $T \not\vdash \varphi$ .

Recordemos que el objetivo principal del programa de Hilbert era demostrar, mediante métodos finitistas, la consistencia de los sistemas formales como ZFC. Estos métodos finitistas en particular incluyen parte de la aritmética, aunque no todos los métodos de la teoría aritmética canónica se incluyen. Gödel se dio cuenta de que podía hablar de los símbolos de los lenguajes formales y de sus propiedades sintácticas usando solo la aritmética finitista, es decir, usándola como metalenguaje. Para ello se lleva a cabo un proceso de *aritmización* o *gödelización* de la sintaxis, que consiste en asignar a cada expresión en el lenguaje un número natural (algo que no debería resultar sorprendente ya que el número de frases y demostraciones posibles es numerable), y a cada propiedad formal, como puede ser “ser una demostración de”, un predicado aritmético. Más detalles sobre este proceso pueden encontrarse en el Anexo I, aunque no se recomienda su lectura hasta finalizar esta sección.

Siguiendo el consenso, supongamos que la aritmética finitista puede formalizarse en el sistema de la Aritmética Primitiva Recursiva (PRA). Sin entrar en detalles, dada una teoría que contenga PRA (es decir, que en ella puedan demostrarse los axiomas de PRA), existe una frase autorreferencial usando la propia teoría como metalenguaje, que permite demostrar lo siguiente.

**Teorema 1.27** (Primer Teorema de Incompletitud de Gödel [2, Proposición 6.2.5]). *Cualquier teoría consistente que contenga PRA es incompleta.*

Usando ideas similares se llega al segundo teorema.

**Teorema 1.28** (Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel [2, Proposición 6.4.6]). *Dada una teoría  $T$  consistente que contenga PRA, la frase en el lenguaje de  $T$  que expresa  $\text{Con}(T)$  no es demostrable a partir de  $T$ .*

Evidentemente, si la teoría  $T$  no es capaz de demostrar  $\text{Con}(T)$ , PRA, que puede deducirse de  $T$ , tampoco puede. En particular, la Aritmética de Peano (PA), que es la formalización estándar de la aritmética, y ZFC son incompletos, y PRA no puede demostrar su consistencia. De hecho, es posible que sistemas más débiles que PRA sean suficientes para probar estos teoremas [22, Sección 1.2.1]. En [5] se discute de forma extensa las consecuencias que tienen estos teoremas sobre el programa de Hilbert.

Sin embargo, nada nos impide razonar de la siguiente forma: Los números naturales son un modelo de PA, y por el Corolario 1.20 tenemos  $\text{Con}(PA)$  ¿No contradice esto el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel?

Para responder a esta pregunta conviene hacer una aclaración. Los conceptos de *conjunto* o *relación* son básicos en el lenguaje informal, y no podemos evitar usarlos al formalizar, por ejemplo, la sintaxis de las teorías de primer orden, en las que hablamos sobre conjuntos de símbolos y fórmulas. En vista de lo ocurrido con sistemas como el de Frege, podrían surgirnos dudas sobre la fiabilidad de estos conceptos primitivos. Sin embargo, sería posible trabajar solo con conjuntos finitos (trabajando así en un metalenguaje finitista y evitando cualquier duda sobre la consistencia), restringiéndonos a signaturas finitas y seguir presentando todas las teorías mencionadas en este trabajo.

En cambio, la teoría de modelos, al menos para poder aplicarla a los sistemas que nos interesan, sí requiere trabajar con conjuntos infinitos. Por ejemplo, un modelo de PA siempre requerirá tener una cantidad infinita de elementos [11]. Por lo tanto, ahora será necesario especificar una teoría que formalice los conjuntos infinitos, para que nos sirva como fundamento, aunque habremos perdido parte de la confianza en su consistencia. Así, la demostración anterior, que usa las herramientas de la teoría de modelos, es realmente una demostración de  $\text{Con}(PA)$  en, por ejemplo, ZF, pero esto solo sería relevante si pudiésemos probar  $\text{Con}(ZF)$ . Es decir, lo único que podemos saber sobre la consistencia es

$$\text{Con}(ZF) \rightarrow \text{Con}(PA).$$

Más adelante formalizaremos estas ideas.

## Capítulo 2

# Teoría de conjuntos

Pasamos ahora a la presentación de la teoría de conjuntos entendida como teoría formal de la lógica de primer orden. En concreto, presentaremos la teoría ZFC. El lenguaje que usaremos cuenta solo con un predicado binario,  $\mathcal{L}_{TC} = \{\in\}$ .

### 2.1. Axiomas y definiciones

Comenzamos presentando los axiomas uno a uno, al mismo tiempo que vemos cómo formalizar algunas de las expresiones y métodos usados en la teoría de conjuntos informal. Sobre esto último conviene aclarar una cosa. En esta sección introduciremos nuevas constantes, funciones y predicados (como  $\emptyset, \subset \dots$ ) que actuarán simplemente como abreviaturas para expresiones, en general bastante más largas, escritas en el lenguaje  $\mathcal{L}_{TC}$ . Sin embargo, esto también podría hacerse de manera más formal, añadiendo los nuevos símbolos al lenguaje y estableciendo sus equivalencias con las expresiones de  $\mathcal{L}_{TC}$  mediante axiomas. Para una explicación más detallada sobre cómo podría hacerse esto, ver [15, Capítulo I, Apéndice 2]. Los primeros símbolos que introduciremos serán los siguientes.

**Definición 2.1.** Los siguientes símbolos deben interpretarse de la manera indicada:

- Escribiremos  $\varphi \leftrightarrow \psi$  para abreviar  $\varphi \rightarrow \psi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ .
- Escribiremos  $x \neq y$  para abreviar  $\neg(x = y)$ . Además,  $\notin$  y  $\nexists$  se interpretan de forma similar.
- Escribiremos  $x \subset y$  para abreviar  $\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$ .
- Escribiremos  $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in y \varphi$  para abreviar  $\forall x_1 \dots \forall x_n ((x_1 \in y \wedge \dots \wedge x_n \in y) \rightarrow \varphi)$ .
- Escribiremos  $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in y \varphi$  para abreviar  $\exists x_1 \dots \exists x_n (x_1 \in y \wedge \dots \wedge x_n \in y \wedge \varphi)$ .
- Escribiremos  $\exists^\circ x \varphi(x)$  para abreviar  $\exists x \forall y (\varphi(y) \leftrightarrow x = y)$ .

Algo que también conviene aclarar es el hecho de que algunos de los siguientes axiomas empezarán por expresiones de la forma  $\forall x_1 \forall x_2 \dots$ , donde  $x_1, x_2 \dots$  son variables libres de alguna fórmula  $\phi$ . Estas variables deben entenderse como parámetros para la fórmula, y el tomar la clausura nos asegura que el axioma es válido para cualquier valor de esos parámetros.

El orden de presentación de los axiomas será similar al de [5], en donde se encuentran muchas de las explicaciones y apuntes históricos aquí mencionados. Por otro lado, las expresiones formales de los axiomas y las definiciones derivadas se han extraído de [9] y [15]. La diferencia principal con estas referencias es que aquí se han introducido las definiciones antes de sus axiomas correspondientes, con el fin de agilizar la lectura, y se han dejado las definiciones más elaboradas para el final.

**Axioma 1** (de Extensionalidad). *Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales:*

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Notemos que el recíproco es una consecuencia inmediata del axioma  $\mathcal{A}_{15}$ . Este primer axioma captura la idea, anterior a Zermelo, de conjunto como definido únicamente por sus elementos.

**Definición 2.2.** Dada una fórmula  $\phi$  en la que  $x$  no es una variable libre, escribiremos  $x = \{z \in y : \phi\}$  para abreviar  $\forall z (z \in x \leftrightarrow (z \in y \wedge \phi))$ .

**Axioma 2** (de Separación). *Para cada fórmula  $\phi$  cuyas variables libres estén entre  $z, y, w_1, \dots, w_n$ , la siguiente fórmula es un axioma:*

$$\forall y \forall w_1 \dots \forall w_n \exists x (x = \{z \in y : \phi\})$$

Como ya explicamos, este axioma es la alternativa propuesta por Zermelo para el, más general, Principio de Comprensión, que era el responsable de las paradojas.

Ahora ya tenemos un método para obtener nuevos conjuntos a partir de otros, pero, ¿qué nos asegura la existencia de algún conjunto inicial? Zermelo resolvía esto mediante su Axioma de los Conjuntos Elementales, que incluye un axioma de existencia de conjuntos y el Axioma de los Pares. Durante el desarrollo temprano de la teoría de conjuntos era común usar entidades, como podían ser los números naturales, que sirviesen como punto de partida para la construcción de conjuntos. Estas entidades reciben el nombre de *átomos* o *urelementos*. El axioma original de Zermelo aseguraba que, dado un átomo  $a$ , existía el conjunto  $\{a\}$ . Así, suponiendo la existencia de al menos un átomo (y por tanto un conjunto), podemos usar el Axioma de Separación con la fórmula  $x \neq x$  y obtener un conjunto sin elementos, el conjunto vacío  $\emptyset$ . Además, la unicidad de este conjunto está garantizada por el Axioma de Extensionalidad.

Sin embargo, nuestro formalismo no nos permite distinguir átomos de conjuntos (en otros sí es posible, por ejemplo, añadiendo otro predicado [30]), y si los átomos no tienen elementos, deben ser todos trivialmente  $\emptyset$ . Como el conjunto vacío está presente siempre que asumamos la existencia de un conjunto, parece lo más natural postular únicamente la existencia de  $\emptyset$ . Esto nos permite hablar únicamente de conjuntos y, además, en la actualidad se suele considerar superfluo el uso de átomos.

**Definición 2.3.** Se define la expresión formal del **conjunto vacío** de la siguiente manera: escribiremos  $x = \emptyset$  para abreviar  $\forall z (z \notin x)$ .

**Axioma 3** (de Existencia del Conjunto Vacío). *Existe un conjunto sin elementos:*

$$\exists x (x = \emptyset)$$

**Definición 2.4.** Se define la función binaria  $\{\cdot, \cdot\}$  de la siguiente manera: escribiremos  $x = \{y, z\}$  para abreviar  $y \in x \wedge z \in x \wedge \forall w (w \in x \leftrightarrow (w = y \vee w = z))$ .

**Axioma 4** (de los Pares). *Para cada par de conjuntos  $X$  e  $Y$ , existe otro,  $Z$ , formado exactamente por  $X$  e  $Y$ ,  $Z = \{X, Y\}$ :*

$$\forall x \forall y \exists z (z = \{x, y\})$$

El Axioma de Separación nos permite obtener nuevos conjuntos a partir de otros ya existentes, pero excluye algunos métodos de construcción de conjuntos que nos interesaría preservar. Este es el motivo por el que añadimos los tres siguientes axiomas.

**Definición 2.5.** Se define la función **unión**  $\bigcup(\cdot)$  de la siguiente manera: escribiremos  $x = \bigcup y$  para abreviar  $\forall z (z \in x \leftrightarrow \exists w (w \in y \wedge z \in w))$ .

**Axioma 5** (de la Unión). *Para todo conjunto  $X$ , existe otro conjunto  $Y$  formado por la unión de sus elementos,  $Y = \bigcup X$ :*

$$\forall x \exists y (y = \bigcup x)$$

Usando el Axioma de los Pares, podemos definir también lo siguiente:

**Definición 2.6.** Se define la función **unión de dos conjuntos** de la siguiente manera: escribiremos  $x = y \cup z$  para abreviar  $x = \bigcup\{y, z\}$ .

**Definición 2.7.** Definimos las **partes de un conjunto** de la siguiente manera: escribiremos  $x = P(y)$  para abreviar  $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \subset y)$ .

**Axioma 6** (de las Partes). *Para todo conjunto  $X$ , existe otro conjunto  $Y$  formado por todos sus subconjuntos,  $Y = P(X)$ :*

$$\forall x \exists y (y = P(x))$$

**Axioma 7** (de la Elección). *Dada una familia de conjuntos  $X$ , disjuntos dos a dos, a la que no pertenece el conjunto vacío, existe otro conjunto  $Y$  al que pertenece un elemento de cada conjunto de  $X$ :*

$$\forall x [(\forall y, w \in x (y \neq \emptyset \wedge \nexists t (t \in y \wedge t \in w))) \rightarrow \exists c \forall y \in x \exists z (z \in y \wedge z \in c)]$$

Hasta ahora hemos postulado la existencia de, al menos, un conjunto, así como una serie de métodos para obtener conjuntos nuevos. Sin embargo, todavía nos falta asegurar la existencia de un tipo de conjuntos que no pueden obtenerse de los axiomas previos. Estos son los conjuntos infinitos.

**Axioma 8** (del Infinito). *Existe un conjunto con infinitos elementos:*

$$\exists s (\emptyset \in s \wedge \forall x \in s (x \cup \{x\} \in s))$$

Solo faltan por presentar dos axiomas, cuya motivación explicaremos más adelante, a medida que desarrollemos la teoría.

**Axioma 9** (de la Sustitución). *Para cada fórmula  $\phi$  cuyas variables libres estén entre  $x, y, z, w_1, \dots, w_n$ , la siguiente fórmula es un axioma:*

$$\forall z \forall w_1 \dots \forall w_n (\forall x \in z \exists^\circ y \phi \rightarrow \exists v \forall x \in z \exists y \in v \phi)$$

Podemos entender este axioma, de manera informal, como diciendo que para cada función  $\phi$  (nótese que se le exige que cada  $x$  tenga un único  $y$  asociado), si su dominio es un conjunto, la imagen del dominio también lo es.

**Axioma 10** (de Regularidad). *Cada conjunto no vacío tiene un elemento  $\in$ -minimal:*

$$\forall x [x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \nexists z (z \in x \wedge z \in y))]$$

Es decir, el axioma nos asegura que existe un miembro de  $x$  que no comparte con él ningún elemento. Un estudio más extenso de este axioma se hará en la Sección 2.5, donde justificaremos el haber usado la expresión  $\in$ -minimal. Ahora que ya contamos con todos los axiomas, veremos cómo se definen las relaciones, las funciones, y algunas operaciones que se suelen usar al trabajar con conjuntos.

**Definición 2.8.** Definimos la **intersección de dos conjuntos** de la siguiente manera: escribiremos  $x = y \cap z$  para abreviar  $x = \{v \in y : v \in z\}$ .

De forma más compacta podemos escribir  $y \cap z := \{v \in y : v \in z\}$ . Usaremos a partir de ahora esta notación, teniendo siempre en cuenta la forma en la que debe interpretarse.

**Definición 2.9.** Definimos la **intersección** de la siguiente manera:

$$\bigcap x := \{y \in \bigcup x : \forall z \in x (y \in z)\}$$

**Definición 2.10.** Definimos la **diferencia conjuntista** de la siguiente manera:

$$x \setminus y := \{z \in x : z \notin y\}$$

Aunque, por el Axioma de Extensionalidad,  $\{a, b\} = \{b, a\}$ , podemos hablar de conjuntos ordenados tomando la siguiente convención.

**Definición 2.11.** Definimos el **par ordenado**  $(\cdot, \cdot)$  de la siguiente manera:

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Notemos que ahora  $(y, z) \neq (z, y)$ . Además, esta definición puede generalizarse fácilmente a las  $n$ -tuplas ordenadas, anidando funciones *par ordenado*. Así,  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  no es más que  $((x_1, x_2, \dots, x_n), x_{n+1})$ . Esta nueva función también nos permite definir el producto cartesiano, que será el punto de partida del resto de definiciones.

La idea será definir  $x \times y := \{(v, w) : v \in x \wedge w \in y\}$ , pero la expresión dentro de las llaves no tiene la forma requerida por el Axioma de Separación para garantizar su existencia. Un primer paso para solucionarlo es definir  $\{(x, y) : \varphi\} := \{z : z = (x, y) \wedge \varphi\}$ , pero ahora nos falta encontrar un conjunto sobre el que tomar los  $z$ . Vemos fácilmente que los  $(v, w)$  del inicio, realmente  $\{v, \{v, w\}\}$ , son elementos de  $P(P(x \cup y))$ . Por esto, la definición es de la siguiente forma.

**Definición 2.12.** Definimos el **producto cartesiano** de la siguiente manera:

$$x \times y := \{z \in P(P(x \cup y)) : \exists v \exists w (z = (v, w) \wedge v \in x \wedge w \in y)\}$$

O, de forma más abreviada,  $x \times y := \{(v, w) : v \in x \wedge w \in y\}$ .

Al igual que como hicimos con los pares ordenados, podemos generalizar el producto cartesiano de dos conjuntos definiendo  $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{n+1} := (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) \times x_{n+1}$ . También definimos  $x^n$  como el producto cartesiano de  $x$  consigo mismo  $n$  veces.

**Definición 2.13.** Una **relación**  $n$ -aria  $R$  sobre un conjunto  $x$  es un subconjunto de  $x^n$ ,  $R \subset x^n$ .

Será común escribir  $R(x_1, \dots, x_n)$  en vez de  $(x_1, \dots, x_n) \in R$ , y  $xRy$  cuando se trate de una relación binaria. Sea  $R$  una relación binaria sobre  $x$ , llamamos **dominio** de  $R$  a  $\text{dom}(R) := \{y \in x : \exists z (yRz)\}$ , y **rango** de  $R$  a  $\text{ran}(R) := \{z \in x : \exists y (yRz)\}$ .

**Definición 2.14.** Una **función**  $f$  es una relación binaria en la que,  $(x, y) \in f$  y  $(x, z) \in f$  implica que  $y = z$ .

Usaremos la notación  $f(x) = y$  o  $f : x \mapsto y$  para indicar  $(x, y) \in f$ . Además, dados dos conjuntos  $X$  e  $Y$ , diremos que  $f$  es una función de  $X$  en  $Y$  si  $\text{dom}(f) = X$  y  $\text{ran}(f) \subset Y$ . Lo denotaremos por  $f : X \rightarrow Y$ . En este caso,  $Y$  recibe el nombre de **codominio**. El resto de propiedades de las relaciones y las funciones, como la transitividad, reflexividad, sobreyectividad, inyectividad, etc., pueden definirse fácilmente a partir de lo ya presentado.

Nos referiremos al conjunto de todos los axiomas anteriores por ZFC. A la teoría que resulta de eliminar el Axioma de la Elección la llamaremos ZF, y si en esta última eliminamos el Axioma de Regularidad, obtendremos  $ZF^-$ . En cambio, si consideramos ZF sin el Axioma de la Sustitución, tendremos Z.

## 2.2. Clases

El haber sustituido el Principio de Comprensión por el Axioma de Separación hace que no todas las expresiones de la forma  $\{x : \phi(x)\}$  sean conjuntos. Estas expresiones se denominan informalmente **clases**, y las clases que no son conjuntos son **clases propias**. Ya vimos una de estas últimas, la clase  $\mathbf{R} = \{x : x \notin x\}$ . Otro ejemplo, incluso más sencillo, es la clase de todos los conjuntos,  $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$ .

**Teorema 2.15** (Paradoja de Cantor). *No existe el conjunto de todos los conjuntos.*

*Demostración.* Si fuese un conjunto, podríamos usar el Axioma de Separación para obtener  $\{x \in \mathbf{V} : x \notin x\}$ , pero entonces  $\mathbf{R}$  sería un conjunto, provocando una contradicción (la demostración original de Cantor, recogida en una carta a Dedekind de 1899 [5], usa el Teorema 2.40 aplicado a  $\mathbf{V}$ ).  $\square$

A pesar de no formar parte de nuestro sistema formal, sigue siendo muy útil usar clases en nuestros razonamientos, siempre y cuando tengamos en cuenta sus limitaciones. Expresiones de la forma  $z \in \mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{V}$  o  $\mathbf{R} \cap y$  deben entenderse como abreviaturas para  $z \notin z$ ,  $\forall x (x \notin x \leftrightarrow x = x)$  y  $\{x \in y : x \notin x\}$  respectivamente. Así, una clase es esencialmente una fórmula, y debería ser sencillo poder traducir expresiones que involucren clases a sus correspondientes formales.

Una de las ventajas de hablar de clases es la generalidad con la que nos permite expresar algunos resultados. En concreto, un teorema en el que se afirme algo sobre una clase  $C$  que cumpla una condición, es realmente una familia de teoremas formales, en el que cada fórmula que cumpla dicha condición tiene un teorema correspondiente. Es decir, un teorema que involucre clases no es más que un esquema de teoremas (análogo a los esquemas axiomáticos). Más adelante veremos algunos ejemplos.

## 2.3. Ordinales

Podemos entender los números naturales como asociados a dos conceptos distintos: cantidades, e índices en un conjunto ordenado. Esta distinción resulta tener importantes consecuencias cuando intentamos extender los números más allá del infinito. En esta sección nos centraremos

en el concepto de número como índice en un orden, presentando un sistema de numeración que tiene su origen en el trabajo de Cantor. Para las demostraciones se han seguido a partes iguales [9] y [15], y es que en muchos libros introductorios a la teoría de conjuntos se omiten bastantes detalles, por lo que ha sido necesario completar las demostraciones de una referencia usando la otra y viceversa. Comenzaremos con un tratamiento informal, para luego definirlo en el lenguaje de ZFC. Empecemos recordando algunas definiciones.

**Definición 2.16.** Una relación binaria  $<$  sobre un conjunto  $P$  es un **orden total** si verifica:

- (I) Irreflexividad:  $\forall x \in P (\neg (x < x))$ .
- (II) Transitividad:  $\forall x, y, z \in P ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$ .
- (III) Tricotomía:  $\forall x, y \in P (x = y \vee x < y \vee y < x)$ .

Denotaremos al conjunto ordenado como el par  $(P, <)$  cuando queramos especificar la relación, o simplemente por el nombre del conjunto  $P$  cuando no haya confusión. Usaremos también los símbolos  $\leq$  y  $>$  al ser su interpretación evidente. Notemos también que dado un conjunto  $A$  totalmente ordenado por  $<_A$ , y un subconjunto  $B \subset A$ , se induce de forma natural un orden total  $<_B$  sobre  $B$  cumpliendo que, dados  $x, y \in B$ ,  $x <_B y$  si y solo si  $x <_A y$ .

**Definición 2.17.** Dados  $(P, <_P)$  y  $(Q, <_Q)$  conjuntos totalmente ordenados, se dice que una función  $f : P \rightarrow Q$  **preserva el orden** (o es **estrictamente creciente**) si, dados  $x, y \in P$ ,  $x <_P y$  implica que  $f(x) <_Q f(y)$ . Si además  $f$  tiene inversa, se dice que  $f$  es un **isomorfismo**, y en tal caso  $(P, <_P)$  y  $(Q, <_Q)$  son **isomorfos**.

**Definición 2.18.** Un orden total  $<$  sobre un conjunto  $A$  es un **buen orden** si todo subconjunto  $B \subset A$  no vacío tiene un elemento **mínimo**, es decir,  $b \in B$  y  $\forall x \in B (b \leq x)$ . Nos referiremos al par  $(A, <)$  como un **conjunto bien ordenado**.

El elemento **máximo** se define de forma análoga al mínimo, pero con  $b \geq x$ . Los siguientes resultados serán relevantes más adelante.

**Lema 2.19.** Si  $(P, <)$  es un conjunto bien ordenado y  $f : P \rightarrow P$  es una función que preserva el orden, entonces  $x \leq f(x)$  para todo  $x \in P$ .

*Demostración.* Supongamos que el conjunto  $\{x \in P : f(x) < x\}$  es no vacío, y tomemos su elemento mínimo  $z$ . Así,  $f(z) < z$ , y llamando  $q = f(z)$ , tendríamos, al aplicar la función  $f$  a ambos lados,  $f(q) < q$ . Por tanto  $q$  está en el conjunto anterior y es menor que  $z$ , una contradicción.  $\square$

**Definición 2.20.** Llamamos **segmento inicial** de un conjunto  $P$  dotado de una relación  $R$  a todo conjunto de la forma  $\{x \in P : xRy\}$  para algún  $y \in P$ . Lo denotaremos por  $\text{pred}_R(P, y)$ .

Cuando la relación se sobreentienda, como al hablar de conjuntos bien ordenados, escribiremos simplemente  $\text{pred}(P, y)$ . En algunos casos escribiremos solo  $\text{pred}(y)$ .

**Lema 2.21.** *Ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a uno de sus segmentos iniciales.*

*Demostración.* Dado un conjunto bien ordenado  $P$ , si es isomorfo a uno de sus segmentos iniciales entonces existe  $u \in P$  y un isomorfismo  $f$  con  $\text{ran}(f) = \{x \in P : x < u\}$ , por lo que  $f(u) < u$ , contradiciendo el Lema 2.19.  $\square$

**Teorema 2.22.** *Si  $P$  y  $Q$  son conjuntos bien ordenados, entonces exactamente uno de los siguientes se cumple:*

(I)  $P$  y  $Q$  son isomorfos.

(II)  $P$  es isomorfo a un segmento inicial de  $Q$ .

(III)  $Q$  es isomorfo a un segmento inicial de  $P$ .

*Demostración.* Consideremos la función definida por

$$f = \{(x, y) \in P \times Q : \text{pred}(P, x) \text{ es isomorfo a } \text{pred}(Q, y)\},$$

entendida sin exigir que  $P$  sea el dominio o  $Q$  el codominio, sino estando estos formados por los  $x$  y  $y$  que cumplan la condición. La función es sobreyectiva por definición. Además, es inyectiva ya que, si existiesen  $x$  y  $x'$ , cumpliendo (sin pérdida de generalidad)  $x < x'$ , con la misma imagen, entonces, por transitividad,  $\text{pred}(P, x)$  sería isomorfo a  $\text{pred}(P, x')$ , pero esto contradiría el Lema 2.21 al considerar el orden inducido en  $\text{pred}(P, x')$ . Por otro lado, si  $x' < x$  y  $h$  es un isomorfismo entre  $\text{pred}(P, x)$  y  $\text{pred}(Q, y)$ , se comprueba fácilmente que  $\text{pred}(P, x')$  y  $\text{pred}(P, h(x'))$  también son isomorfos, con lo que comprobamos que  $f$  preserva el orden. Como  $f$  es biyectiva, tenemos que  $f$  es un isomorfismo.

Si  $\text{dom}(f) = P$  y  $\text{ran}(f) = Q$ , tenemos el caso (I).

Si  $y_1 < y_2$  y  $y_2 \in \text{ran}(f)$ , entonces  $y_1 \in \text{ran}(f)$ . Así, en el caso de que  $\text{ran}(f) \neq Q$ , tenemos que  $\text{ran}(f) = \text{pred}(Q, y_0)$  donde  $y_0$  es el mínimo de  $Q \setminus \text{ran}(f)$ . Además,  $\text{dom}(f) = P$  ya que en caso contrario tendríamos que  $(x_0, y_0) \in f$  con  $x_0$  el mínimo de  $P \setminus \text{dom}(f)$ . Este es el caso (II).

Si  $\text{dom}(f) \neq P$ , razonando como en el caso (II), tenemos (III).

Finalmente, por el Lema 2.21, solo uno de los tres casos puede darse. Es evidente que (I) no puede ocurrir con (II) o (III). Si se diesen (II) y (III), existiría un isomorfismo entre  $Q$  y un cierto  $\text{pred}(P, x)$ , que, dado un  $y \in Q$ , induce otro isomorfismo entre  $\text{pred}(Q, y)$  y otro  $\text{pred}(P, x')$ . Pero podemos tomar como ese  $y$  el que, por (II), es isomorfo a  $P$ , provocando una contradicción.  $\square$

Centrándonos en este último tipo de relación, podemos estudiar los diferentes tipos de (buen) orden que pueden existir para conjuntos salvo isomorfismo, esto es, fijándonos solo en la relación de orden entre sus elementos. Cada uno de estos tipos de orden será un ordinal. Así, es evidente que dado un conjunto con uno, dos, o cualquier cantidad finita de elementos, solo existe un ordinal asociado. Sin embargo, esto no es cierto para conjuntos infinitos. En el caso de los conjuntos numerables, seguramente el tipo de orden más simple sea el de los números naturales, pero no es el único. Representando posiciones por líneas verticales, ordenadas de izquierda a derecha, en la Figura 2.1 podemos ver algunos ejemplos además del ya mencionado.

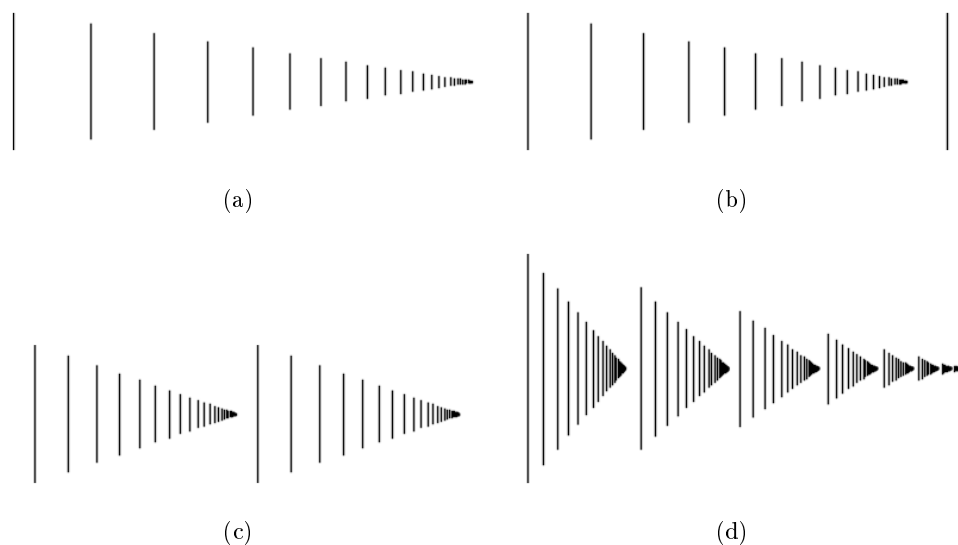


Figura 2.1: Algunos tipos de orden para conjuntos numerables.

Si queremos formalizar esta idea en nuestra teoría, una primera opción podría ser tomar clases de equivalencia entre los conjuntos bien ordenados, relacionándolos mediante isomorfismos. Sin embargo, resulta que, al menos en ZFC, la colección de conjuntos bien ordenados isomorfos entre sí no es un conjunto. Otra opción, que es la que presentaremos a continuación, es escoger un representante de cada una de las clases de equivalencia anteriores. Estos son los ordinales de Von Neumann. Usando las letras iniciales del alfabeto griego ( $\alpha, \beta, \gamma \dots$ ) para designar números ordinales, su propuesta es definirlos de forma que:

$$\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\} \quad \text{donde} \quad \alpha < \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha \in \beta.$$

Veamos cómo formalizar esta idea.

**Definición 2.23.** Se dice que un conjunto  $T$  es **transitivo** si todo elemento de  $T$  es también un subconjunto de  $T$  (es decir,  $T \subset P(T)$ ).

**Definición 2.24.** Un conjunto es un **ordinal** si es transitivo y está bien ordenado por  $\in$ . Además, dados dos ordinales  $\alpha$  y  $\beta$ , escribiremos  $\alpha < \beta$  si  $\alpha \in \beta$ .

Veamos ahora que esta definición es apropiada, esto es, que sigue la idea informal de Von Neumann, y que todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

**Lema 2.25.**

- (I)  $\emptyset$  es un ordinal, y cualquier ordinal no vacío lo contiene.
- (II) Si  $\alpha \neq \beta$  son ordinales y  $\alpha \subset \beta$ , entonces  $\alpha \in \beta$ .
- (III) Si  $\alpha$  y  $\beta$  son ordinales, entonces  $\alpha \subset \beta$  o  $\beta \subset \alpha$ .

*Demostración.*

- (I) La primera afirmación es trivial. Para la segunda, si  $\alpha \neq \emptyset$  es un ordinal, entonces tiene un elemento  $\in$ -mínimo  $a$ . Si existiese  $b \in a$ , por transitividad también estaría en  $\alpha$  y sería menor que  $a$ , contradiciendo que  $a$  sea mínimo. Por lo tanto,  $a = \emptyset$ .
- (II) Llamemos  $\gamma$  al elemento mínimo de  $\beta \setminus \alpha$ . Si  $x \in \beta$  cumple  $x < \gamma$ , entonces es evidente que  $x \in \alpha$ . Por otro lado, si  $x \in \alpha$  y  $\gamma < x$ , por la transitividad de  $\alpha$  tendríamos  $\gamma \in \alpha$ , una contradicción. Así,  $\alpha = \text{pred}(\beta, \gamma) = \{x \in \beta : x \in \gamma\}$ , pero por la transitividad de  $\beta$ , esto es  $\{x : x \in \gamma\} = \gamma \in \beta$ .
- (III) Se comprueba fácilmente que  $\gamma = \alpha \cap \beta$  es un ordinal. Tenemos que  $\gamma = \alpha$  o  $\gamma = \beta$ , ya que en caso contrario, por (II),  $\gamma \in \alpha$  y  $\gamma \in \beta$ , pero entonces  $\gamma \in \gamma$ , contradiciendo el hecho de que  $\in$  es un buen orden.  $\square$

**Teorema 2.26.**

- (I) Si  $\alpha$  es un ordinal y  $\beta \in \alpha$ , entonces  $\beta$  es un ordinal.
- (II) Si  $\alpha$  y  $\beta$  son ordinales, entonces exactamente uno de los siguientes se cumple:  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $\beta < \alpha$ .
- (III) Sean  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  ordinales, si  $\alpha < \beta$  y  $\beta < \gamma$ , entonces  $\alpha < \gamma$ .
- (IV) Si  $C$  es un conjunto (o una clase) no vacío de ordinales, entonces  $\exists x \in C \forall y \in C (x \leq y)$ .

*Demostración.*

- (I) Al ser  $\alpha$  transitivo, se tiene que  $\beta \subset \alpha$ , por lo que  $\in$  induce un buen orden en  $\beta$ . Para probar que  $\beta$  es transitivo hay que ver que dado  $\gamma \in \beta$  y  $\delta \in \gamma$ ,  $\delta \in \beta$ . Usando la transitividad de  $\alpha$  vemos que  $\gamma \in \alpha$ , y usándola de nuevo,  $\delta \in \alpha$ . Como  $\delta, \gamma, \beta \in \alpha$  y  $\delta \in \gamma \in \beta$ , la transitividad de la relación  $\in$  en  $\alpha$  nos asegura  $\delta \in \beta$ .
- (II) Que al menos uno de los casos se cumple se deduce de los apartados (II) y (III) del Lema 2.25. Que solo uno puede cumplirse es consecuencia de que  $\alpha \in \alpha$  contradiría el hecho de que  $\in$  es un buen orden.

(III) Consecuencia de la transitividad de  $\gamma$ .

(IV) La expresión del enunciado, por (II), es equivalente a  $\exists x \in C \forall y \in C (y \notin x)$ , o, lo que es lo mismo,  $\exists x \in C (x \cap C = \emptyset)$ . Tomando un  $x \in C$  arbitrario, si  $x \cap C \neq \emptyset$ , entonces, por ser  $\in$  un buen orden en  $x$ , existe un elemento mínimo  $x' \in x \cap C$ . Finalmente tenemos  $x' \cap C = \emptyset$ , pues si existiese  $x'' \in x' \cap C$ , sería menor que  $x'$  y estaría en  $x \cap C$ .  $\square$

Usando (I) del anterior teorema vemos que la caracterización informal  $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$  está justificada. Si  $\beta < \alpha$  se cumple que  $\beta \in \alpha$  por definición. Por otro lado, si  $x \in \alpha$  el teorema nos dice que  $x$  es un ordinal que, en particular, cumple  $x < \alpha$ . Los últimos apartados del teorema nos aseguran que la relación  $<$  entre ordinales tiene las propiedades de un buen orden, pero no podemos decir formalmente que sea uno a causa del siguiente teorema.

**Teorema 2.27** (Paradoja de Burali-Forti). *No existe el conjunto de todos los ordinales.*

*Demostración.* Consideremos la clase  $\mathbf{Ord} = \{x : x \text{ es un ordinal}\}$ . Si fuese un conjunto, sería transitivo por el apartado (I) del Teorema 2.26, y  $\in$  sería un buen orden por los restantes apartados. Por lo tanto,  $\mathbf{Ord} \in \mathbf{Ord}$ , algo que violaría la relación de orden total.  $\square$

Admitir a  $\mathbf{Ord}$  como conjunto, algo que se haría de aceptar el Principio de Comprensión, resultaría en una contradicción con el anterior teorema conocida como Paradoja de Burali-Forti. Esta es una paradoja conjuntista más que motiva la restricción del anterior principio.

**Teorema 2.28.** *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

*Demostración.* Sea  $W$  un conjunto bien ordenado, definimos  $F : W \rightarrow \mathbf{Ord}$  como  $F(x) = \alpha$  con  $\alpha$  isomorfo a  $\text{pred}(W, x)$ . *A priori*, como  $F$  toma valores en  $\mathbf{Ord}$ , no tendría por qué existir. Para justificar su uso vemos que, de existir tal  $\alpha$ , debe ser único por el Lema 2.21, y empleamos el Axioma de la Sustitución. Así,  $F(W)$  es un conjunto y  $F$  una función. Supongamos ahora que todo  $x$  tiene un  $\alpha$  asociado, entonces podemos ver que  $F(W)$  es un ordinal y que  $F$  es un isomorfismo.

$F(W)$  es un conjunto de ordinales, y ya vimos que por el Teorema 2.26 la relación  $\in$  es un buen orden. Falta comprobar la transitividad, es decir, si  $\beta \in \alpha \in F(W)$  implica  $\beta \in F(W)$ . Pero esto es consecuencia de que, si  $\varphi$  es el isomorfismo entre  $\alpha$  y  $x \in W$ , la restricción al subconjunto  $\beta \subset \alpha$  induce otro isomorfismo.

Como  $W$  y  $F(W)$  son conjuntos bien ordenados, por el Teorema 2.22 solo hay dos posibilidades si no son isomorfos. O bien  $W$  es isomorfo a un segmento inicial del ordinal  $F(W)$ , que será otro ordinal  $\beta \in F(W)$ , que por tanto será la imagen de algún  $x \in W$ , haciendo que  $W$  sea isomorfo a uno de sus segmentos iniciales, una contradicción. O bien  $F(W)$  es isomorfo a

un segmento inicial de  $W$ , en cuyo caso existe  $\beta \in F(W)$  isomorfo a  $F(W)$ , otra contradicción. Solo queda que  $W$  y  $F(W)$  sean isomorfos.

Si no fuese cierto que todo  $x \in W$  tuviese un  $\alpha$ , existiría uno mínimo que no lo cumpliera,  $x'$ , y podríamos considerar  $\text{pred}(W, x')$  en vez de  $W$  en el razonamiento anterior, llegando a una contradicción. La unicidad del ordinal obtenido también es consecuencia del Lema 2.21.  $\square$

El uso del Axioma de la Sustitución en el anterior teorema resulta ser esencial, y es de hecho uno de los principales motivos de su inclusión en la teoría. La importancia de este teorema se hace más evidente al tener en cuenta la siguiente formulación del Axioma de la Elección.

**Teorema 2.29** ([10, Teorema 2.1]). *El Axioma de la Elección es equivalente a*

$$\forall x \exists R (R \text{ es un buen orden de } x)$$

Vemos así que, usando el Teorema 2.28, el Axioma de la Elección nos asegura que todo conjunto puede *contarse* usando ordinales. Esto resulta ser muy útil a la hora de definir el concepto de cardinalidad.

Con esto finalizamos la justificación de la definición de los ordinales de Von Neumann. Pasemos ahora a estudiar su estructura. Ya hemos visto que  $\emptyset$  es un ordinal, y es sencillo comprobar que dado un ordinal  $\alpha$ ,  $\alpha \cup \{\alpha\}$  también lo es. A este ordinal le llamaremos  $S(\alpha)$  (**sucesor** de  $\alpha$ ), y es precisamente el menor cumpliendo  $\alpha < S(\alpha)$ . Otra operación útil es el **supremo** de un conjunto  $X$  de ordinales, definido por  $\sup X = \bigcup X$ . También puede comprobarse que devuelve el menor ordinal mayor o igual que todos los elementos de  $X$ .

**Definición 2.30.** Un ordinal  $\alpha$  es un **ordinal sucesor** si existe otro ordinal  $\beta$  con  $S(\beta) = \alpha$ . En cambio, si  $\alpha \neq \emptyset$  y  $\alpha = \sup \alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$ , es un **ordinal límite**.

Todos los  $\alpha > 0$  deben ser de uno de los dos tipos anteriores, ya que, o bien  $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$  tiene un máximo,  $\gamma$ , en cuyo caso  $\alpha = S(\gamma)$ , o no lo tiene, y entonces  $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\}$ . La existencia de ordinales límite es consecuencia del Axioma del Infinito. Mediante el Axioma de Separación podemos obtener de él el conjunto que usaremos para definir los números naturales.

**Definición 2.31.** Definiremos los **números naturales** de la siguiente manera:

$$0 = \emptyset, 1 = S(0), 2 = S(1), \dots, n = S(n-1)$$

Que forman el conjunto  $\omega$ . Los elementos de  $\omega$  son los **ordinales finitos**, y se considerará a un conjunto  $X$  **finito** cuando exista alguna biyección con algún elemento de  $\omega$ . En caso contrario, tanto para ordinales como conjuntos, se llamarán **infinitos**.

Es evidente que  $\omega$  es un ordinal en vista del Teorema 2.26. A partir de  $\omega$  podemos obtener más ordinales, por ejemplo  $S(\omega)$ , que correspondería al tipo de orden (b) de la Figura 2.1. Sin embargo, las operaciones sobre ordinales pueden estudiarse de forma más sistemática generalizando las ya conocidas en números naturales, formulando así una aritmética ordinal. Para hacerlo necesitaremos los siguientes teoremas.

**Teorema 2.32** (de Inducción Transfinita). *Sea  $C$  una clase, si  $C \subset \mathbf{Ord}$  y  $C \neq \emptyset$ , entonces  $C$  tiene un elemento mínimo.*

*Demostración.* Podemos aplicar un razonamiento muy similar al del apartado (IV) del Teorema 2.26. Fijemos un  $\alpha \in C$ , si  $\alpha$  es el mínimo ya acabamos. Si no lo es,  $\alpha \cap C$  sí tiene un mínimo,  $\beta$ . Si existiese un  $\gamma \in C$  menor que  $\beta$ , por transitividad estaría en  $\alpha$ , y  $\beta$  no podría ser el mínimo de  $\alpha \cap C$ . Así,  $\beta$  es el mínimo de  $C$ .  $\square$

Este teorema (y el siguiente también) es una instancia de los teoremas formulados en términos de clases de los que hablamos en la sección previa. Veamos a modo de ejemplo cómo expresar el teorema informal anterior como un esquema de teoremas formales. Si la clase  $C$  viene definida por  $C = \{x : \varphi(x, z_1, \dots, z_n)\}$  con  $z_1, \dots, z_n$  parámetros, el teorema nos dice: *Para cada fórmula  $\varphi(x, z_1, \dots, z_n)$ , lo siguiente es un teorema*

$$\forall z_1 \dots \forall z_n [(\forall x (\varphi \rightarrow x \text{ es un ordinal}) \wedge \exists x \varphi) \rightarrow (\exists x (\varphi \wedge \forall y (\varphi(y, z_1, \dots, z_n) \rightarrow x \leq y)))]$$

Para el siguiente teorema debemos aclarar que la notación usada para la restricción de una función  $f$  a un subconjunto  $X$  de su dominio es  $f|_X$ . Además, las funciones del teorema no lo son en el sentido formal, sino que son realmente clases.

**Teorema 2.33** (de Recursión Transfinita [15, Teorema 9.3]). *Sea  $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  una función, existe una única función  $G : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{V}$  cumpliendo*

$$G(\alpha) = F(G|_\alpha)$$

para todo  $\alpha \in \mathbf{Ord}$ .

Notemos que  $G|_\alpha$  sí es un conjunto por el Axioma de la Sustitución, por lo que su imagen por  $F$  está bien definida. La relación de este teorema con las definiciones recursivas puede no resultar evidente, por lo que a continuación damos una breve explicación. Por un lado tenemos la función  $G$ , que es la que queremos definir, y por otro  $F$ , que nos permite extender una definición dada *un paso* más allá. Supongamos que hemos definido  $G(\beta)$  para todo  $\beta < \alpha$ , es decir, tenemos la función  $G : \alpha \rightarrow \mathbf{V}$ , y nos interesa conseguir el posible valor de  $G(\alpha)$ . Evidentemente  $F(G|_\alpha)$  está definido y, por lo tanto, usando el teorema, ya tenemos el valor de  $G(\alpha)$ . Así, definiendo  $F$  de la forma apropiada, podemos obtener la  $G$  que nos interesa.

Más explícitamente, veamos cómo construir  $G$  desde el principio. Inicialmente no tenemos  $G$  definida para ningún valor, pero sabemos que  $G|_{\emptyset} = \emptyset$  sea quien sea  $G$  (no hemos definido formalmente la restricción de una función, pero es razonable pensar que esto es cierto una vez realizada dicha formalización), así que el valor inicial será  $G(0) \equiv G(\emptyset) = F(\emptyset)$ . Para calcular  $G(1)$ , solo hay que fijarse en que  $G|_1 = (0, F(\emptyset))$ , por lo que también tenemos el valor  $G(1) = F((0, F(\emptyset)))$ . El proceso seguiría para todos los ordinales siguientes, tanto sucesores como límites.

Ahora podemos definir, de forma recursiva, las siguientes operaciones aritméticas:

**Definición 2.34.** Se define la **suma de ordinales** de la siguiente manera. Dado un ordinal cualquiera  $\alpha$ :

- (I)  $\alpha + 0 = \alpha$ ,
- (II)  $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$  para cualquier ordinal  $\beta$ ,
- (III)  $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \delta : \delta < \beta\}$  para cualquier ordinal límite  $\beta$ .

El conjunto  $\{\alpha + \delta : \delta < \beta\}$  en (III) existe por el Axioma de la Sustitución. No hay más que considerar el rango de la función  $H : \beta \rightarrow \mathbf{Ord}$  definida por  $\delta \mapsto \alpha + \delta$  para cada  $\delta \in \beta$ .

Fijémonos en que  $S(\alpha) = \alpha + 1$ . Para justificar algo más esta definición, veamos de qué forma estamos aplicando el Teorema de Recursión Transfinita. Realmente estamos fijando  $\alpha$  y aplicando la recursión en  $\beta$ , definiendo una función que, para cada  $\beta$ , devuelva el resultado de la suma. Es decir, para cada ordinal  $\alpha$ , estamos definiendo una función  $G$ . De esta forma,

- $G(0) = \alpha$ ,
- $G(\beta + 1) = G(\beta) + 1$  y
- $G(\beta) = \sup\{G(\delta) : \delta < \beta\}$  si  $\beta$  es un ordinal límite.

Puede comprobarse que una función  $F$  que nos sirve para definir una función  $G$  cumpliendo las anteriores condiciones es (adaptado de [15]):

$$F(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = \emptyset \text{ o no es una función con } \text{dom}(x) \in \mathbf{Ord}, \\ \sup \text{ran}(x) + 1 & \text{si } \text{dom}(x) \text{ es un ordinal sucesor,} \\ \sup \text{ran}(x) & \text{si } \text{dom}(x) \text{ es un ordinal límite.} \end{cases}$$

A modo de ejemplo podemos ver que  $G(1) = F((0, G(0))) = F((0, \alpha))$ , y como  $\text{dom}((0, \alpha)) = \{0\} = 1$  y  $\text{ran}((0, \alpha)) = \{\alpha\}$ ,  $G(1) = \sup\{\alpha\} + 1 = \alpha + 1$ , tal y como debía ser. Para las definiciones siguientes pueden encontrarse funciones similares.

**Definición 2.35.** Se define el **producto de ordinales** de la siguiente manera. Dado un ordinal cualquiera  $\alpha$ :

- (I)  $\alpha \cdot 0 = 0$ ,
- (II)  $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$  para cualquier ordinal  $\beta$ ,
- (III)  $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \beta\}$  para cualquier ordinal límite  $\beta$ .

**Definición 2.36.** Se define la **exponenciación de ordinales** de la siguiente manera. Dado un ordinal cualquiera  $\alpha$ :

- (I)  $\alpha^0 = 1$ ,
- (II)  $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$  para cualquier ordinal  $\beta$ ,
- (III)  $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\delta : \delta < \beta\}$  para cualquier ordinal límite  $\beta$ .

Así, es sencillo obtener otros ordinales como  $\omega \cdot 2$ , que es el tipo de orden (c) en la Figura 2.1, o  $\omega^2$ , que corresponde a (d). Para una explicación más detallada sobre la construcción de ordinales incluso mayores, véase el Anexo II, aunque se recomienda su lectura una vez finalizado el capítulo. Nótese también que, aunque estas operaciones coinciden con las ya conocidas para los números naturales, tienen propiedades distintas cuando las usamos con ordinales infinitos. Por ejemplo, es inmediato ver que ni la suma ni el producto de ordinales son conmutativos (ver Figura 2.2):

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1, \quad 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot 2.$$

## 2.4. Cardinales

Pasamos ahora a estudiar el otro concepto que podemos asociar a un sistema de numeración, las cantidades. A las referencias de la última sección, ahora hay que añadir [14]. Comenzamos recordando la ya conocida forma de comparar la cantidad de elementos de dos conjuntos.

**Definición 2.37.** Dados dos conjuntos  $X$  e  $Y$ , escribiremos  $|X| = |Y|$  si existe una biyección entre ambos conjuntos, y  $|X| \leq |Y|$  si existe una función  $f : X \rightarrow Y$  inyectiva. También escribiremos  $|X| < |Y|$  cuando  $|X| \leq |Y|$  pero no tengamos  $|X| = |Y|$ .

El usar la notación anterior viene justificada por el Teorema de Schröder-Bernstein, que demostramos a continuación.

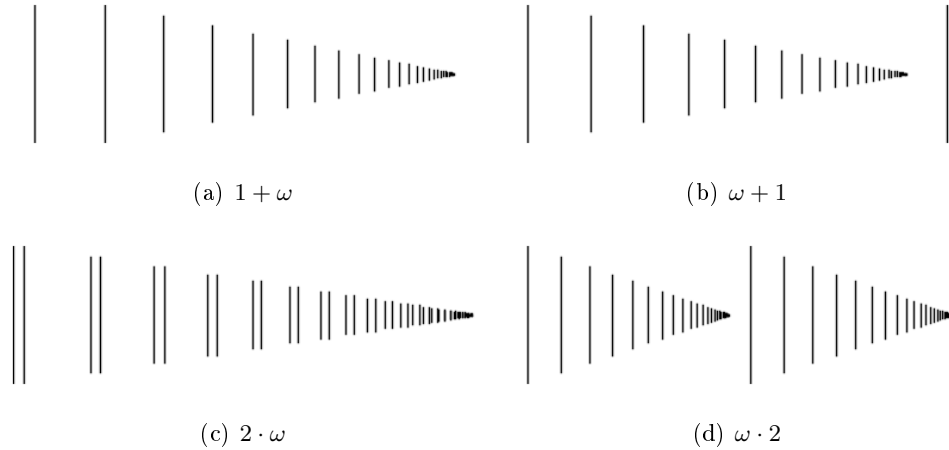


Figura 2.2: Ejemplos de operaciones aritméticas con ordinales. Como podemos ver,  $1 + \omega$  y  $2 \cdot \omega$  son, como tipos de orden, isomorfos a  $\omega$ ; mientras que  $\omega + 1$  y  $\omega \cdot 2$  no.

**Lema 2.38.** Sean dos conjuntos  $Y \subset X$ , para los que existe una función inyectiva  $f : X \rightarrow Y$ . Se tiene que  $|X| = |Y|$ .

*Demostración.* Comencemos introduciendo la notación  $f^n$ , para indicar que estamos aplicando  $f$   $n$  veces. Así,  $f^0$  será la identidad, y  $f^{n+1} = f \circ f^n$ , con  $n \in \omega$ . Ahora, como  $Y \subset X$ , está claro que  $f^n(Y) \subset f^n(X)$  para todo  $n$ . En consecuencia, también será cierto que  $f^{n+1}(X) = f^n(f(X)) \subset f^n(Y)$ , ya que  $f(X) \subset Y$ . Es decir, tenemos la cadena

$$f^0(X) \supset f^0(Y) \supset f^1(X) \supset f^1(Y) \supset f^2(X) \supset \dots$$

Definamos ahora  $H_n = f^n(X) \setminus f^n(Y)$  y  $K_n = f^n(Y) \setminus f^{n+1}(X)$ . Como  $f$  es inyectiva, y dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  se cumple siempre que  $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$ , tenemos que  $f$  es una biyección entre  $H_n$  y  $H_{n+1}$ , y entre  $K_n$  y  $K_{n+1}$ , para todo  $n$ . Llamando  $M = \bigcap_{n \in \omega} f^n(X) = \bigcap_{n \in \omega} f^n(Y)$ , que son iguales por la cadena anterior, tenemos que

$$X = M \cup H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots$$

$$Y = M \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup \dots$$

Notemos que  $M$ ,  $H_n$  y  $K_m$  son disjuntos dos a dos para cualquier  $n, m \in \omega$ . Finalmente, podemos definir

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \bigcup_{n \in \omega} H_n, \\ x & \text{si } x \in M \cup \bigcup_{n \in \omega} K_n. \end{cases}$$

Que es una biyección entre  $X$  e  $Y$ . □

**Teorema 2.39** (de Schröder-Bernstein). Si  $|X| \leq |Y|$  y  $|Y| \leq |X|$ , entonces  $|X| = |Y|$ .

*Demostración.* Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  funciones inyectivas, y sea  $Y' = g(Y)$ . Como  $g : Y \rightarrow Y'$  es sobreyectiva,  $|Y| = |Y'|$ . Ahora, usando el Lema 2.38 con la función inyectiva  $g \circ f : X \rightarrow Y'$ , tenemos  $|X| = |Y'|$ , lo que completa la demostración.  $\square$

Un resultado importante, debido a Cantor, es el siguiente.

**Teorema 2.40** (de Cantor). *Dado un conjunto cualquiera  $X$ , se tiene que  $|X| < |P(X)|$ .*

*Demostración.* La función  $g : x \mapsto \{x\}$  es una función inyectiva de  $X$  en  $P(X)$ , por lo que  $|X| \leq |P(X)|$ . Veamos que no puede existir una biyección. Sea  $f : X \rightarrow P(X)$ , consideremos el conjunto  $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ . Si  $Y$  fuese la imagen de algún  $y \in X$ , entonces  $y \in Y$  si y solo si  $y \notin Y$ , una contradicción. Por lo tanto  $f$  no puede ser sobreyectiva y  $|X| < |P(X)|$ .  $\square$

Para el caso de los conjuntos bien ordenados, ya tenemos una herramienta que nos permitirá estudiar las cantidades de una manera más sistemática, los ordinales. Dado un conjunto bien ordenado  $X$  finito, es evidente que solo habrá un ordinal cumpliendo  $|\alpha| = |X|$ , pero para conjuntos infinitos habrá que tener más cuidado con la definición ( $|\omega| = |\omega + 1|$ ). Una manera de escoger un único representante de la clase de equivalencia formada por los ordinales cumpliendo  $|\alpha| = |X|$  es usando el Teorema 2.26.

**Definición 2.41.** Si  $X$  es un conjunto bien ordenado, la **cardinalidad** de  $X$  es el menor ordinal cumpliendo  $|X| = |\alpha|$ .

Ahora vemos la gran utilidad del Teorema 2.29, que nos permite extender la definición anterior a todos los conjuntos. De hecho, a partir de ahora escribiremos  $|X| = \alpha$  cuando  $\alpha$  sea la cardinalidad de  $X$ . Es trivial comprobar que usar esta notación es compatible con la Definición 2.37. También es evidente que los únicos ordinales  $\alpha$  que se usarán como posibles cardinalidades de conjuntos serán aquellos que cumplan que, para todo  $\beta < \alpha$ ,  $|\alpha| \neq |\beta|$ . Llamaremos a los ordinales que satisfagan esta condición **cardinales**. Usaremos las letras griegas  $\kappa, \lambda, \mu \dots$  para denotarlos.

**Teorema 2.42.**

(I) *Para todo ordinal  $\alpha$ , existe un cardinal  $\kappa$  con  $\alpha < \kappa$ .*

(II) *Dado un conjunto de cardinales  $X$ ,  $\sup X$  es un cardinal.*

*Demostración.* (I) es consecuencia del Teorema de Cantor. Para demostrar (II), supongamos que existe una biyección  $f$  entre  $\sup X$  y un cierto  $\alpha < \sup X$ , y sea  $\kappa \in X$  un cardinal cumpliendo  $\alpha < \kappa < \sup X$ . Entonces, se induce una biyección entre  $\kappa$  y  $\{f(\beta) : \beta < \kappa\}$ , pero esto es una contradicción. Así,  $\sup X$  cumple la condición para ser un cardinal.  $\square$

Este teorema nos permite realizar la siguiente definición recursiva, que nos permite entender los cardinales como una clase ordenada similar a los ordinales. Usaremos la notación  $\kappa^+$  para referirnos al menor cardinal mayor que  $\kappa$ .

**Definición 2.43.** Se define por recursión el **sistema de álefs**:

- (I)  $\aleph_0 = \omega$ ,
- (II)  $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ ,
- (III)  $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\delta : \delta < \alpha\}$  para cualquier ordinal límite  $\alpha$ .

Los conjuntos de cardinalidad  $\aleph_0$  se llamarán **numerables**, en caso contrario, y si no son finitos, serán **no numerables**. Veamos ahora cómo se definen las operaciones aritméticas para los ordinales.

**Definición 2.44.** Denotaremos por  ${}^Y X$  al conjunto de todas las funciones  $f : Y \rightarrow X$ .

**Definición 2.45.** Sean  $\kappa$  y  $\lambda$  dos cardinales:

- (I) Se define la **suma de cardinales** como  $\kappa \oplus \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$ .
- (II) Se define el **producto de cardinales** como  $\kappa \otimes \lambda = |\kappa \times \lambda|$ .
- (III) Se define la **exponenciación de cardinales** como  $\kappa^\lambda = |{}^\lambda \kappa|$ .

Estas operaciones no deben confundirse con las correspondientes a los ordinales (a pesar de que hayamos definido los cardinales como un subconjunto de **Ord**), ya que en general no actúan de la misma manera. Por ejemplo,  $\omega \oplus 1 = \omega \neq \omega + 1$ . A falta de una alternativa cómoda en la notación para diferenciar la exponenciación de cardinales de la de ordinales, tomaremos la convención de que siempre la interpretaremos como la correspondiente a cardinales, a no ser que se indique lo contrario. Algunos resultados aritméticos que nos serán útiles más adelante son los siguientes.

**Lema 2.46.** *Todos los cardinales infinitos son ordinales límite.*

*Demostración.* Supongamos que el cardinal  $\kappa \geq \omega$  cumple  $\kappa = \alpha + 1$ . Podemos definir una biyección  $f : \kappa \rightarrow \alpha$  que sea de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = \alpha, \\ x + 1 & \text{si } x \in \omega, \\ x & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Contradiciendo así la definición de cardinal. □

**Lema 2.47.** *Sea  $\kappa$  un cardinal,  $(X, R)$  un conjunto bien ordenado y  $\alpha$  el ordinal al que es isomorfo  $(X, R)$  (Teorema 2.28). Se tiene que  $\alpha \leq \kappa$  si y solo si, para todo  $x \in X$ ,  $|\text{pred}_R(X, x)| < \kappa$ .*

*Demostración.* Sea  $f$  el isomorfismo entre  $(X, R)$  y  $\alpha$ . Para la primera implicación, si  $\alpha < \kappa$ , se tiene el resultado trivialmente. Veamos lo que ocurre si  $\alpha = \kappa$ . La imagen de  $\text{pred}_R(X, x)$  debe ser un ordinal menor que  $\kappa$ , si no  $(X, R)$  sería isomorfo a uno de sus segmentos iniciales, así que  $|\text{pred}_R(X, x)| < \kappa$ , ya que  $\kappa$  es por definición el menor ordinal de cardinalidad  $\kappa$ .

Para la otra implicación, supongamos que  $\alpha > \kappa$ , y veamos que no se cumple  $|\text{pred}_R(X, x)| < \kappa$  para todo  $x$ . Si  $\kappa \in \alpha$ , existirá un  $x \in X$  tal que  $f^{-1}(\kappa) = \text{pred}_R(X, x)$ , pero entonces  $|\text{pred}_R(X, x)| = \kappa$ .  $\square$

**Teorema 2.48.** *Se cumple que  $\aleph_\alpha \otimes \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$  para cualquier  $\alpha$ .*

*Demostración.* Comencemos definiendo un buen orden  $\triangleleft$  en la clase  $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}$ . Diremos que  $(\alpha, \beta) \triangleleft (\gamma, \delta)$  si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$ ;
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$  y  $\alpha < \gamma$ ;
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ ,  $\alpha = \gamma$  y  $\beta < \delta$ .

Además, como cada par  $(\alpha, \beta)$  es un conjunto bien ordenado por  $\triangleleft$ , por el Teorema 2.28 podemos definir una aplicación  $\Gamma : \mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$  que asocie a  $(\alpha, \beta)$  el único ordinal al que es isomorfo. Por lo tanto, lo que tenemos que probar es que  $\Gamma(\aleph_\alpha, \aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$ , ya que implicaría que  $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$  es biyectivo con  $\aleph_\alpha$ . De hecho, como es evidente que  $\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ , nos basta probar  $\aleph_\alpha \geq \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ , para lo que aplicaremos inducción en  $\alpha$ .

Demostrar que el resultado se cumple para  $\aleph_0$  es sencillo (puede usarse una biyección similar a las usuales entre  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Q}$ ). Supongamos ahora que se cumple para todos los  $\aleph_\beta$  con  $\beta < \alpha$ . Veamos, usando el Lema 2.47, que, para cualquier par  $(\gamma, \delta) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ , es cierto que  $|\text{pred}(\gamma, \delta)| < \aleph_\alpha$ . Comenzamos fijándonos en que  $\text{pred}(\gamma, \delta) \subset \epsilon \times \epsilon$  con  $\epsilon = \max\{\gamma, \delta\} + 1$ . Si  $\epsilon$  es finito, es evidente que  $|\text{pred}(\gamma, \delta)| \leq |\epsilon \times \epsilon| < \aleph_\alpha$ . Si es infinito, tenemos que  $|\text{pred}(\gamma, \delta)| \leq |\epsilon \times \epsilon| = |\epsilon| \otimes |\epsilon| = |\epsilon|$  por la hipótesis de inducción. Finalmente, como  $\gamma, \delta < \aleph_\alpha$ , y todos los álefs son ordinales límite (Lema 2.46),  $\epsilon < \aleph_\alpha$  y  $|\epsilon| < \aleph_\alpha$ .  $\square$

**Corolario 2.49.** *Dados dos cardinales infinitos  $\kappa$  y  $\lambda$ ,  $\kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda)$ .*

*Demostración.* Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que  $\kappa > \lambda$ , no hay más que considerar una aplicación inyectiva  $f : \kappa \times \lambda \rightarrow \kappa \times \kappa$ . Ya tenemos que  $\kappa \otimes \lambda \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa$ . La desigualdad inversa es trivial.  $\square$

**Teorema 2.50.** *Sea  $X$  un conjunto de cardinalidad  $\kappa$ ,  $|P(X)| = 2^\kappa$ .*

*Demostración.* Para cada conjunto  $Y \subset X$ , podemos considerar su función característica:

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Y, \\ 0 & \text{si } x \notin Y. \end{cases}$$

Como  $\chi_Y : X \rightarrow 2$  y  $2 = \{0, 1\}$ , tenemos  $|P(X)| = |{}^X 2|$ . Ahora, siendo  $f$  una biyección entre  $X$  y  $\kappa$ , para cada función  $g : \kappa \rightarrow 2$  tenemos otra dada por  $g \circ f : X \rightarrow 2$ . Además, para obtener la inversa de esta asignación solo hay que hacer la composición  $h \circ f^{-1}$  siendo  $h : X \rightarrow 2$ , así que es una biyección, y  $|{}^\kappa 2| = |{}^X 2|$ .  $\square$

En vista de lo presentado hasta ahora, tenemos dos construcciones distintas de cardinales (infinitos) de tamaños crecientes. Por un lado tenemos el sistema de álefs, que nos permite ordenar todos los cardinales, pero no nos dice nada sobre quién es cada uno. Por otro lado, podríamos empezar, por ejemplo, por  $\aleph_0$ , y aplicar de forma recursiva la operación  $P(\cdot)$ , que devolverá siempre cardinales mayores, pero no nos asegura cubrirlos de forma exhaustiva. Surge, por tanto, de forma natural, la pregunta: ¿son realmente estas dos construcciones distintas?, es decir, ¿dado un cardinal  $\kappa$ , la cardinalidad de  $P(\kappa)$  es la que le sigue inmediatamente?

El primero en plantearse esta pregunta, o más bien su versión reducida a la instancia  $\kappa = \aleph_0$ , fue Cantor [20]. Usando el Teorema 2.50, lo podemos escribir como  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , que recibe el nombre de Hipótesis del Continuo (HC). Cantor fue incapaz de proporcionar una demostración y el problema persistió, alcanzando una importancia tal que Hilbert lo colocó el primero en la lista de veintitrés problemas que presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos en el año 1900. Sorprendentemente, la versión generalizada  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ , que es la correspondiente a la pregunta que nos hemos planteado inicialmente, llamada Hipótesis del Continuo Generalizada (HCG), no aparecería hasta 1905. La falta de progreso en la obtención de una prueba o una refutación en esta época quedará explicada al final de este trabajo.

## 2.5. La jerarquía acumulativa

Trabajando en  $ZF^-$ , nada impide que existan conjuntos cumpliendo  $x \in x$  o pertenecientes a una cadena infinita descendiente  $\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0$ . Sin embargo, este tipo de conjuntos resultan ser irrelevantes en la construcción de los objetos matemáticos de interés. Así que de la misma forma que en nuestra teoría nos hemos restringido al estudio de conjuntos, que son las únicas entidades que necesitamos, restringiremos también el universo de conjuntos mediante el Axioma de Regularidad.

**Teorema 2.51.** *En ZF podemos probar que no existe  $x$  cumpliendo  $x \in x$ , ni una cadena infinita descendiente  $\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0$ .*

*Demostración.* Para la primera afirmación, supongamos que existe  $x$  cumpliendo  $x \in x$ , y consideremos el conjunto no vacío  $\{x\}$ . Su único elemento es  $x$  y además,  $x \in x$  y  $x \in \{x\}$ , contradiciendo el Axioma de Regularidad.

Para la segunda afirmación, podemos entender la cadena como definida por una función  $f$  con  $\text{dom}(f) = \omega$  y  $f(n+1) \in f(n)$  para todo  $n \in \omega$ . Por el Axioma de Sustitución,  $\text{ran}(f)$  es un conjunto. Tomemos uno cualquiera de sus elementos, que será de la forma  $f(n)$ . Tenemos que  $f(n+1) \in f(n)$  y  $f(n+1) \in \text{ran}(f)$ , que contradice también el Axioma de Regularidad.  $\square$

De hecho, prescindiendo del Axioma de Regularidad podemos desarrollar igualmente todas las matemáticas ordinarias, y adoptarlo es algo que en general se hace por mera conveniencia. Para entender el universo de conjuntos que resulta de adoptar dicho axioma, la siguiente construcción es muy útil. En esta sección, y solo aquí, trabajaremos en  $\text{ZF}^-$ .

**Definición 2.52.** Se define por recursión:

- (I)  $V_0 = \emptyset$ ,
- (II)  $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ ,
- (III)  $V_\alpha = \sup\{V_\beta : \beta < \alpha\}$  si  $\alpha$  es un ordinal límite.

Y finalmente  $\mathbf{WF} = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathbf{Ord}\}$ . Los elementos de  $\mathbf{WF}$  son los **conjuntos bien fundamentados**, y  $\mathbf{WF}$  es la **jerarquía acumulativa** o **universo de Von Neumann**.

Veremos ahora algunas propiedades de la jerarquía acumulativa que serán importantes más adelante, y acabaremos comprobando que el Axioma de Regularidad es equivalente a afirmar  $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ .

**Lema 2.53.** *Dado un ordinal  $\alpha$ ,  $V_\alpha$  es transitivo y, para todo  $\beta \leq \alpha$ ,  $V_\beta \subset V_\alpha$ .*

*Demostración.* Lo probaremos por inducción transfinita en  $\alpha$ . El caso  $\alpha = 0$  es trivial. Para  $\alpha = \beta + 1$ , si  $x \in y \in P(V_\beta)$ , es evidente que  $x \in V_\beta$ , y por ser este conjunto transitivo,  $x \subset V_\beta$ , por lo que  $x \in P(V_\beta)$ , y así hemos probado que  $V_\alpha$  es transitivo y  $V_\beta \subset V_\alpha$ . Si  $\alpha$  es un ordinal límite, dados  $x \in y \in \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\}$ , existirá un  $\gamma < \alpha$  tal que  $y \in V_\gamma$  y, aplicando la transitividad de  $V_\gamma$ , llegamos a que  $x \in V_\alpha$ . Que  $V_\beta \subset V_\alpha$  para todo  $\beta \leq \alpha$  es trivial.  $\square$

**Definición 2.54.** Dado un  $x \in \mathbf{WF}$ , se define su **rango**, denotado  $\text{rango}(x)$ , como el menor  $\alpha$  cumpliendo  $x \in V_{\alpha+1}$ .

**Lema 2.55.**  $x \in \mathbf{WF}$  si y solo si  $x \subset \mathbf{WF}$ .

*Demostración.* Como cada etapa  $V_\alpha$  es transitiva, la unión  $\mathbf{WF}$  también lo será. Esto nos asegura la implicación  $x \in \mathbf{WF} \rightarrow x \subset \mathbf{WF}$ . Para ver el recíproco, podemos tomar  $\alpha = \sup\{\text{rango}(y)+1 : y \in x\}$ . Entonces, cada elemento  $y \in x$  cumple  $y \in V_{\text{rango}(y)+1} \subset V_\alpha$ , donde la inclusión se tiene por el Lema 2.53, por lo que  $x \subset V_\alpha$  y  $x \in V_{\alpha+1} \subset \mathbf{WF}$ .  $\square$

**Lema 2.56.** Todos los ordinales están en  $\mathbf{WF}$ , i.e.  $\mathbf{Ord} \subset \mathbf{WF}$ .

*Demostración.* Por inducción transfinita, si para todo  $\beta < \alpha$ ,  $\beta \in \mathbf{WF}$ , entonces  $\alpha = \{\beta \in \mathbf{Ord} : \beta < \alpha\} \subset \mathbf{WF}$ , que por el Lema 2.55 nos asegura que  $\alpha \in \mathbf{WF}$ .  $\square$

**Corolario 2.57.**  $\mathbf{WF}$  es una clase propia.

*Demostración.* Si no lo fuese, solo habría que considerar el conjunto  $\{x \in \mathbf{WF} : x \in \mathbf{Ord}\}$ , que, por el Lema 2.56, es el propio  $\mathbf{Ord}$ , y usando el Teorema 2.27 tendríamos una contradicción.  $\square$

**Definición 2.58.** Sea  $R$  una relación en una clase  $A$ . Se dice que  $R$  está **bien fundamentada** si todo subconjunto no vacío  $B \subset A$  tiene un elemento  $R$ -**minimal**  $b$ , es decir,  $b \in B$  y  $\nexists x \in B (xRb)$ . Esta definición de elemento minimal coincide con la anterior de mínimo cuando  $R$  es una relación de orden total.

**Lema 2.59.** El Axioma de Regularidad es equivalente a decir que la relación  $\in$  está bien fundamentada en  $\mathbf{V}$ .

*Demostración.* Sea  $x$  un subconjunto de  $\mathbf{V}$  no vacío, es decir, un conjunto  $x$  no vacío cualquiera, que exista un elemento  $\in$ -minimal  $y$  quiere decir que  $\nexists z (z \in x \wedge z \in y)$ , pero esto es precisamente

$$\forall x [\exists y (y \in x) \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \nexists z (z \in x \wedge z \in y))],$$

que es exactamente nuestra formulación para el Axioma de Regularidad.  $\square$

**Lema 2.60.** Si  $X \in \mathbf{WF}$ , entonces  $\in$  está bien fundamentada en  $X$ .

*Demostración.* Sea  $Y$  un subconjunto no vacío de  $X$ . Llamemos  $\alpha$  al mínimo del conjunto de ordinales  $\{\text{rango}(y) : y \in Y\}$ , que existe por el Teorema 2.26. Entonces el  $y \in Y$  cumpliendo  $\text{rango}(y) = \alpha$  es el  $\in$ -minimal de  $Y$ . Si existiese  $z \in y$  con  $z \in Y$ , como  $y \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ , entonces  $z \in V_\alpha$  (y por tanto  $\alpha \neq 0$ ), que por definición implica  $\text{rango}(z) < \alpha$ , contradiciendo que  $\alpha$  sea el mínimo.  $\square$

Introducimos ahora el concepto de *clausura transitiva* de un conjunto  $x$ , que es el menor conjunto transitivo que contiene a  $x$ .

**Definición 2.61.** Dado un conjunto  $X$ , se define por recursión:

$$(I) \bigcup^0 X = X,$$

$$(II) \bigcup^{n+1} X = \bigcup(\bigcup^n X).$$

Y finalmente, la **clausura transitiva** de  $X$  es  $\text{cltr}(X) = \bigcup\{\bigcup^n X : n \in \omega\}$ .

**Ejemplo 2.62.** Sea  $X = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ , su clausura transitiva es  $\text{cltr}(X) = \left(\bigcup^0 X\right) \cup \left(\bigcup^1 X\right) \cup \left(\bigcup^2 X\right) \cup \dots$ . Como  $\bigcup^1 X = \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $\bigcup^2 X = \{\emptyset\}$ , y a partir de  $\bigcup^3 X$  serán todas las etapas  $\emptyset$ , finalmente,  $\text{cltr}(X) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ , que es un conjunto transitivo.

**Lema 2.63.** *Dado un conjunto  $X$ ,  $\text{cltr}(X)$  es transitiva y para cualquier  $T$  transitivo con  $X \subset T$ ,  $\text{cltr}(X) \subset T$ .*

*Demostración.* La transitividad se cumple porque, si  $y \in \bigcup^n X$ , entonces  $y \subset \bigcup^{n+1} X$ . Además, por inducción, si  $\bigcup^n X \subset T$ , la transitividad de  $T$  nos asegura que  $\bigcup(\bigcup^n X) \subset T$ . Como  $\bigcup^0 X \subset T$ , todas las etapas en la construcción de la clausura transitiva están en  $T$  y, en consecuencia,  $\text{cltr}(X)$  también.  $\square$

**Lema 2.64.** *Si  $X$  es transitivo y  $\in$  está bien fundamentado en  $X$ , entonces  $X \in \mathbf{WF}$ .*

*Demostración.* Usando el Lema 2.55 veamos que  $X \subset \mathbf{WF}$ . Si fuese cierto que  $Y := X \setminus \mathbf{WF} \neq \emptyset$ , podemos tomar el elemento  $\in$ -mínimo  $y \in Y$ . Si  $z \in y$ , entonces  $z \notin Y$ , y  $z \in X$  por transitividad, pero entonces tiene que ser  $z \in \mathbf{WF}$ . Por lo tanto,  $y \subset \mathbf{WF}$  y, por el Lema 2.55,  $y \in \mathbf{WF}$ , una contradicción.  $\square$

Finalmente, ya tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema que nos interesaba.

**Teorema 2.65.** *El Axioma de Regularidad es equivalente a  $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ .*

*Demostración.* Usando el Lema 2.59 vemos que, para cualquier conjunto  $X$ , la relación  $\in$  está bien fundamentada en  $\text{cltr}(X)$ . Por el Lema 2.64,  $\text{cltr}(X) \in \mathbf{WF}$ , y por el Lema 2.55,  $X \subset \text{cltr}(X) \subset \mathbf{WF}$ , así que  $X \in \mathbf{WF}$ . Veamos ahora el recíproco. Para todo  $X \in \mathbf{WF}$ , por el Lema 2.60,  $\in$  está bien fundamentada. Así, dado un subconjunto  $Y \subset \mathbf{V} = \mathbf{WF}$ ,  $Y$  tendrá un elemento  $\in$ -mínimo (ya que, en particular,  $Y \in \mathbf{V} = \mathbf{WF}$ ), y  $\mathbf{V}$  está bien fundamentada. Solo hay que volver a aplicar el Lema 2.59.  $\square$

En vista de este teorema, el Axioma de Regularidad nos permite entender el universo de conjuntos como construido en etapas, cada una conteniendo a todas las anteriores (Lema 2.53). Ahora nuestra teoría ya no es una mera restricción *ad hoc* de la teoría original de Frege, sino que tenemos un concepto nuevo de conjunto que justifica los axiomas. Uno de tipo *iterativo* (para una presentación más extensa, ver [1]). Es interesante ver que la jerarquía acumulativa comparte

algunas características con el sistema de tipos de Russell, ya que, de la misma forma que cada entidad tiene un tipo, en **WF** cada conjunto tiene un rango (sin embargo hay importantes diferencias, ver [5, Parte VI, Capítulo 1]). Por el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel, la clase **WF** no es un modelo válido para probar la consistencia de la teoría en la que se ha construido, pero aún así será de mucha utilidad.

A continuación, presentamos una generalización del Teorema de Recursión Transfinita, que nos permitirá usarlo con otras clases y relaciones que no sean  $(\mathbf{Ord}, <)$ .

**Definición 2.66.** Sea  $R$  una relación en una clase  $A$ . Se dice que  $R$  es de **tipo conjunto** en  $A$  si  $\text{pred}_R(A, y)$  es un conjunto para todo  $y \in A$ .

**Lema 2.67.** Sea  $R$  una relación en una clase  $A$ , y supongamos que existe una función  $\Phi : A \rightarrow \mathbf{Ord}$  de forma que  $xRy \rightarrow \Phi(x) < \Phi(y)$  para todo  $x, y \in A$ . Entonces  $R$  está bien fundamentada.

*Demostración.* Si  $B \subset A$ , entonces cualquier  $b \in B$  con  $\Phi(b) = \min\{\Phi(x) : x \in B\}$  es  $R$ -minimal en  $B$ .  $\square$

**Teorema 2.68** (Recursión Transfinita en Relaciones Bien Fundamentadas [14, Teorema I.9.11]). Sea  $R$  una relación bien fundamentada y de tipo conjunto en una clase  $A$ , y  $\forall x \forall s \exists^\circ y \varphi(x, s, y)$ . Definamos  $G(x, s)$  como el único  $y$  cumpliendo  $\varphi(x, s, y)$ . Entonces podemos escribir una fórmula  $\psi$  que cumple lo siguiente:

- $\forall x \exists^\circ y \psi(x, y)$ , de forma que  $\psi$  define una función  $F$ , para la que  $F(x)$  es el único  $y$  tal que  $\psi(x, y)$ .
- $\forall a \in A [F(a) = G(a, F|_{\text{pred}_R(A, a)})]$ .

Como vemos, si  $A = \mathbf{Ord}$  y  $R$  es la relación  $\in$ , dado un ordinal  $\alpha$ ,  $\text{pred}(\mathbf{Ord}, \alpha) = \{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$ , por lo que podemos escribir  $G$  como una función de una única variable. Así, tenemos  $F(\alpha) = G(F|_\alpha)$ , recuperando el Teorema de Recursión Transfinita en ordinales. Un ejemplo de definición en el que se usa este teorema es el siguiente.

**Definición 2.69.** Dada una clase  $A$  con una relación bien fundamentada de tipo conjunto  $R$ , podemos definir por recursión la función

$$\pi(x) = \{\pi(z) : z \in \text{pred}(x)\}$$

con  $x \in A$ , que recibe el nombre de **función colapso transitivo**. Para hacerlo, no hay más que tomar  $G(x, s) = \text{ran}(s)$ , por lo que  $F(a) = G(a, F|_{\text{pred}_R(A, a)}) = \{F(z) : z \in \text{pred}(a)\}$ . La clase  $\pi(A)$  es el **colapso transitivo** de  $A$ .

## Capítulo 3

# Introducción a las pruebas de consistencia

Por el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel, si tenemos una teoría de conjuntos  $\Gamma$ , no podemos probar su consistencia usando únicamente la propia  $\Gamma$ . Lo que sí podemos hacer es, asumiendo que otra teoría  $\Lambda$  sí lo es, probar en el metalenguaje  $\text{Con}(\Gamma)$ . Además, nada impide que la teoría con menos axiomas sea  $\Lambda$ , es decir, que esta esté contenida en  $\Gamma$ .

Esto nos permite, mediante pruebas de consistencia de este tipo, obtener resultados de independencia. Por ejemplo, si probamos  $\text{Con}(\text{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC})$  y  $\text{Con}(\text{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZF-C})$ , donde ZF-C es la teoría ZF con la negación del Axioma de la Elección, habremos probado que (si ZF es consistente) este axioma es independiente de ZF, esto es, que no puede probarse en esa teoría. La referencia principal en este capítulo será [14].

### 3.1. Formalización de la teoría de modelos

Para estudiar modelos de la teoría de conjuntos, como vimos en la exposición inicial sobre lógica formal, es necesario especificar el lenguaje en el que estamos formalizando la teoría de modelos, ya que de ello dependerán las conclusiones que podamos sacar. Así, en esta sección realmente estaremos trabajando con tres lenguajes diferentes. Por un lado estará el lenguaje que queramos estudiar, que en nuestro caso serán teorías de conjuntos, pero podrían ser de otro tipo; por otro lado tendremos la teoría de conjuntos que actúe como semántica, es decir, aquella con la que construyamos los modelos; y finalmente tendremos, como siempre, un metalenguaje que nos permita hablar sobre todo ello, en nuestro caso el español. Sin embargo, en el metalenguaje nos restringiremos a razonamientos finitistas, entendidos como involucrando únicamente conjuntos de entidades y procesos finitos, y respetando las leyes de la lógica clásica. Haremos esto con el fin de ser, filosóficamente, lo más neutrales posible, y para no tener que renunciar a las herramientas que hacen la exposición mucho más sencilla. Para la redacción de esta sección, probablemente la más complicada conceptualmente, han sido fundamentales [14, Sección I.15] y las secciones relacionadas, así como los tres apéndices en [15, Capítulo IV].

Supongamos entonces que la primera teoría viene dada por el conjunto de axiomas  $\Gamma$ , y está escrita en el lenguaje  $\mathcal{L}$ , y que la teoría de conjuntos con la que formalizamos los modelos es  $\Lambda$  (escrita en  $\mathcal{L}_{TC}$ ). Para algunos resultados necesitaremos que dicha teoría de conjuntos sea lo suficientemente potente, aunque con  $\text{ZF}^-$  (o cualquier teoría que la contenga) nos bastará, y esta será la teoría de conjuntos más simple que usemos en las siguientes secciones. Por tanto, siempre que hablemos de  $\Lambda$ , podemos suponer que se trata de  $\text{ZF}^-$ .

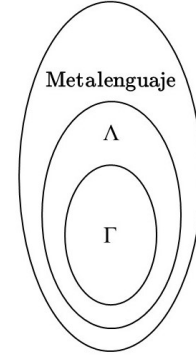


Figura 3.1: Diagrama de los tres lenguajes que usaremos en las pruebas de consistencia.

Siguiendo la idea que motivó la Definición 1.10, podemos asociar a la expresión “ $\varphi$  es verdadera en  $\mathcal{M}$ ”, cuando  $\varphi$  pertenece a  $\Gamma$  y  $\mathcal{M}$  se ha construido en  $\Lambda$ , un significado muy intuitivo. No hay más que interpretar los símbolos no lógicos como nos indica  $\mathcal{M}$ , y restringir los cuantificadores a su universo. Por ejemplo, si nos interesa la fórmula  $\forall x \exists y (x = y \cdot y)$  de  $\Gamma$ , la interpretamos como  $\forall x \in M \exists y \in M (x = y \cdot^{\mathcal{M}} y)$  en  $\mathcal{M}$ , que es una fórmula en  $\mathcal{L}_{TC}$ . También podríamos, como en la Definición 1.10, tomar la convención de considerar la clausura de  $\varphi$  para poder hablar de fórmulas con variables libres, pero en este caso no nos convendrá hacerlo.

**Definición 3.1.** Sea  $\mathcal{M}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura, dada una fórmula  $\varphi$  en un lenguaje  $\mathcal{L}$ , se obtiene su **relativización** a  $\mathcal{M}$ ,  $\varphi^{\mathcal{M}}$ , sustituyendo todos los símbolos no lógicos ( $f, A(\cdot), c \dots$ ) de  $\mathcal{L}$  por sus interpretaciones en  $\mathcal{M}$  ( $f^{\mathcal{M}}, A^{\mathcal{M}}(\cdot), c^{\mathcal{M}} \dots$ ), y todas las expresiones de la forma  $\forall x \dots$  o  $\exists x \dots$  por  $\forall x \in M \dots$  y  $\exists x \in M \dots$  respectivamente. Escribiremos  $\varphi^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n)$  cuando queramos especificar sus variables libres.

Desde el metalenguaje, podemos definir  $\mathcal{M} \models \varphi$  de esta forma, e incluso tiene sentido cuando  $M$  es una clase. Por ejemplo, si  $M = \mathbf{Ord}$  y  $\cdot^{\mathcal{M}} = \cap$ , podemos comprobar si  $\forall x \in \mathbf{Ord} \exists y \in \mathbf{Ord} (x = y \cap y)$  (que, en efecto, se cumple). Podríamos preguntarnos: ¿Esta definición puede formalizarse en  $\Lambda$ ? Si se pudiese, habríamos formalizado exitosamente la teoría de modelos, y podríamos aplicar los teoremas conocidos. En ese caso, tendríamos que, para cada axioma  $\varphi$  de ZFC,  $\mathbf{V} \models \varphi$ , y por el Teorema de Solidez (formalizado en  $\Lambda$ ) llegaríamos a que  $\text{ZFC} \vdash \text{Con}(\text{ZFC})$ , contradiciendo el Segundo Teorema de Incompletitud.

El problema con la formalización de  $\mathcal{M} \models \varphi$  surge cuando consideramos modelos que son clases propias, mientras que, si trabajamos con conjuntos, puede probarse fácilmente que  $(\mathcal{M} \models \varphi) \leftrightarrow \bar{\varphi}^{\mathcal{M}}$ , donde hemos tomado la clausura por la convención que usamos en  $\models$  y no en la relativización. La raíz del problema se encuentra en el uso de la recursión en las Definiciones 1.9 y 1.10. Veamos esto un poco más en detalle, en concreto cómo formalizar la Definición 1.10.

Dada una  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathcal{M}$ , podemos pensar la relación  $(\mathcal{M}, \sigma) \models \varphi$  como una función  $\text{val}_{\mathcal{M}}(\varphi, \sigma)$  que tome el valor 1 cuando  $\varphi$  sea verdad y 0 en caso contrario. Llamando  $K$  a la colección de todos los pares  $(\varphi, \sigma)$ , la función  $\text{val}_{\mathcal{M}}$  va de  $K$  en  $\{0, 1\}$ . Entendiendo la relación  $\models$  de esta forma, ahora podemos aplicar el Teorema 2.68 para confirmar que  $\text{val}_{\mathcal{M}}$  existe. La relación  $R$  en este caso será “ser una subfórmula”, es decir,  $(\varphi', \sigma') R (\varphi, \sigma)$  si y solo si  $\varphi'$  es una subfórmula de  $\varphi$ . Está bien fundamentada por el Lema 2.67, donde podemos tomar como  $\Phi$  la longitud de  $\varphi$ . Además, si  $M$  es un conjunto, como el número de subfórmulas es finito y los posibles  $\sigma$  forman un conjunto,  $R$  es de tipo conjunto. Sin embargo, si  $M$  es una clase propia, existe también una clase propia de posibles  $\sigma$ , y no se satisfacen las hipótesis del teorema.

Probar que no existe ninguna otra forma de definir en  $\Lambda$  la relación  $\models$  para clases, requeriría demostrar la versión general del Teorema de la Indefinibilidad de la Verdad de Tarski. Aquí nos limitamos a presentar la versión de este teorema recogida en [9], que solo se ocupa del caso concreto en el que el modelo es  $\mathbf{V}$ .

La relativización  $\varphi^{\mathbf{V}}$  es  $\varphi$ , por lo que  $\mathbf{V} \models \varphi$  si y solo si  $\bar{\varphi}$ . Además, podemos usar el Axioma  $\mathcal{A}_{10}$  con  $\tau = x$  y  $\mathbf{G}$  para ver que demostrar  $\bar{\varphi}$  es equivalente a demostrar  $\varphi$ , es decir,  $\varphi \leftrightarrow \mathbf{V} \models \varphi$ . Por otro lado, si  $\models$  es una relación binaria formal, necesitamos alguna forma de poder asignarle a cada fórmula de  $\Gamma$  un conjunto de  $\Lambda$ , es decir, una forma de hablar de una teoría en la otra. Esto no es más que un proceso de gödelización, y recordemos que era posible gödelizar las teorías de primer orden en PRA, así que hacerlo en una teoría de conjuntos debería ser sencillo. Así, empleando la convención de Quine, llamaremos  $\ulcorner \varphi \urcorner$  al conjunto en  $\Lambda$  (que será un número natural en  $\omega$ ) que representa a la fórmula  $\varphi$  de  $\Gamma$ . Al subconjunto de  $\omega$  formado por todos los  $\ulcorner \varphi \urcorner$  lo llamaremos Fml (fórmulas). Así,  $\mathcal{M} \models \varphi$  debe entenderse como  $\mathcal{M} \models \ulcorner \varphi \urcorner$ . Por último, como hemos fijado el modelo  $\mathbf{V}$ , en vez de escribir  $\mathbf{V} \models \ulcorner \varphi \urcorner$ , escribiremos simplemente  $\text{Ver}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ . Vemos, por tanto, que  $\text{Ver}(x)$  es realmente una definición formal en  $\Lambda$  de la relación sintáctica “ser demostrable en  $\Lambda$ ” (ya que  $\text{Ver}(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \varphi$ ), es decir, es una definición del concepto de “verdad en  $\Lambda$ ”. Reuniéndolo todo, diremos que la definición debe satisfacer las condiciones de **definición de verdad**:

- $\forall x (\text{Ver}(x) \rightarrow x \in \omega)$ ,
- si  $\varphi$  es una fórmula, entonces  $\varphi \leftrightarrow \text{Ver}(\ulcorner \varphi \urcorner)$ .

**Teorema 3.2** (Indefinibilidad de la Verdad de Tarski). *No existe una definición de verdad.*

*Demostración.* Supongamos que existe una definición de verdad  $\text{Ver}(x)$ . Sea  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$  una enumeración de todas las fórmulas con una única variable libre, consideremos la siguiente fórmula:

$$\psi(x) := x \in \omega \wedge \neg \text{Ver}(\ulcorner \varphi_x(x) \urcorner)$$

Hay un número natural  $k$  tal que  $\varphi_k$  es  $\psi$ . Sea  $\sigma$  la fórmula  $\psi(k)$ , tenemos que:

$$\sigma \leftrightarrow \psi(k) \leftrightarrow \neg \text{Ver}(\ulcorner \varphi_k(k) \urcorner) \leftrightarrow \neg \text{Ver}(\ulcorner \sigma \urcorner)$$

Contradiciendo el hecho de que  $\text{Ver}(x)$  sea una definición de verdad.  $\square$

Aún así, usar clases como modelos sigue teniendo una gran utilidad, y de hecho todos los resultados de consistencia que presentaremos en este trabajo los usan. Por el teorema anterior (concretamente su versión generalizada para clases propias), no nos será posible obtener una prueba formal en  $\Lambda$  de la consistencia de  $\Gamma$  usando clases, pero en el metalenguaje sí podremos decir “si  $\text{Con}(\Lambda)$ , entonces  $\text{Con}(\Gamma)$ ”.

**Lema 3.3** ([14, Lema I.16.13]). *Sea  $\mathcal{M}$  una clase en  $\Lambda$ . Sean  $\psi$  y  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  fórmulas cerradas en  $\mathcal{L}$ . Si  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \vdash \psi$ , entonces  $\Lambda \vdash (\varphi_1^{\mathcal{M}} \wedge \dots \wedge \varphi_k^{\mathcal{M}}) \rightarrow \psi^{\mathcal{M}}$ .*

El conjunto de fórmulas en el anterior lema deben entenderse como formando una teoría. Como ya se explicó, por el Axioma  $\mathcal{A}_{10}$  y  $\mathbf{G}$ , exigir que sean fórmulas cerradas no supone ninguna pérdida de generalidad, pues una fórmula y su clausura demostrarán lo mismo.

**Corolario 3.4.** *Sea  $\mathcal{M}$  una clase en  $\Lambda$  que sea además una  $\mathcal{L}$ -estructura. Sea  $\Gamma$  una teoría de  $\mathcal{L}$  y supongamos que, para cada axioma  $\varphi \in \Gamma$ , tenemos que  $\Lambda \vdash \varphi^{\mathcal{M}}$ . Entonces, en el metalenguaje, podemos concluir  $\text{Con}(\Lambda) \rightarrow \text{Con}(\Gamma)$ .*

*Demostración.* Razonando en el metalenguaje, supongamos que tenemos una contradicción en  $\Gamma$ , entonces (recordemos la demostración del Teorema de Compacidad) existe un conjunto finito de axiomas  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  en  $\Gamma$  tal que  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$ . Por el Lema 3.3 tenemos que  $\Lambda \vdash (\psi \wedge \neg\psi)^{\mathcal{M}}$ , que es precisamente  $\Lambda \vdash (\psi^{\mathcal{M}} \wedge \neg\psi^{\mathcal{M}})$ , una contradicción en  $\Lambda$ .  $\square$

El Lema 3.3 conceptualmente es muy similar al Teorema de Solidez, solo que generalizado al caso en el que  $\mathcal{M}$  puede ser una clase propia. Lo que nos está diciendo es que, si  $\psi$  se deduce *sintácticamente* de una teoría finita  $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ , entonces  $\psi$  se deduce *semánticamente* en  $\Lambda$ , es decir, se cumple en cualquier modelo de  $\Gamma$  construido en  $\Lambda$ . Por ejemplo, si hemos comprobado que los axiomas de las relaciones de buen orden se cumplen para  $(\mathbf{Ord}, <)$ , entonces cualquier propiedad que hayamos deducido para este tipo de relación también es cierta en  $(\mathbf{Ord}, <)$ . Nótese también que en el corolario no exigimos que  $\Gamma$  sea finita.

Como vemos, ahora podemos llegar a dos tipos de conclusiones. O bien a una prueba formal de  $\text{Con}(\Gamma)$ , o bien a una relación en el metalenguaje entre las consistencias de  $\Gamma$  y  $\Lambda$ .

**Definición 3.5.** Si tenemos una prueba formal en  $\Lambda$  de la consistencia de  $\Gamma$ , es decir, si  $\Lambda \vdash \text{Con}(\Gamma)$ , escribiremos  $\Gamma \triangleleft \Lambda$ , y diremos que  $\Lambda$  tiene **más poder de demostración** (del inglés *stronger proof-theoretically*) que  $\Gamma$ . Por otro lado, si tenemos una demostración finitista de  $\text{Con}(\Lambda) \rightarrow \text{Con}(\Gamma)$ , dicha demostración establece una relación de **consistencia relativa**, y lo denotamos por  $\Gamma \leq \Lambda$ .

En vista de esta definición, tenemos que  $\Gamma \triangleleft \Lambda \rightarrow \Gamma \leq \Lambda$ . Para comprobarlo vemos que, si de forma finitista hubiésemos obtenido una contradicción en  $\Gamma$ , podríamos formalizarla en  $\Lambda$  obteniendo  $\Lambda \vdash \neg \text{Con}(\Gamma)$ , que junto a  $\Gamma \triangleleft \Lambda$  daría una contradicción en  $\Lambda$ . Además, cuando  $\Gamma \leq \Lambda$  y  $\Lambda \leq \Gamma$ , escribimos  $\Gamma \sim \Lambda$ , y decimos que ambas teorías tienen el mismo poder de demostración. Esta definición tiene sentido porque, si una tuviese más poder que la otra, se contradiría el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. Se comprueba fácilmente que la relación  $\sim$  es una relación de equivalencia.

Por lo expuesto anteriormente, de aquí en adelante, y a no ser que se indique lo contrario, trataremos de la misma forma a las  $\mathcal{L}$ -estructuras que son clases propias y las que son conjuntos. Demostrando que los axiomas de  $\Gamma$  son ciertos en ella, diremos que se trata de un modelo de  $\Gamma$ , y deduciremos  $\text{Con}(\Lambda) \rightarrow \text{Con}(\Gamma)$ .

## 3.2. Fórmulas absolutas

Centrémonos ahora en el caso  $\mathcal{L} = \{\in\}$ , que será el que nos interesará al estar estudiando teorías de conjuntos. Además, y a no ser que se indique lo contrario, siempre asumiremos que, dada una  $\{\in\}$ -estructura  $\mathcal{M}$ ,  $\in^{\mathcal{M}} = \{(a, b) \in M \times M : a \in b\}$ . Por ello, en ocasiones identificaremos  $\mathcal{M}$  con su universo,  $M$ , al no haber confusión sobre la interpretación de los símbolos.

Encontrar ejemplos no triviales de modelos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  para teorías de conjuntos que cumplan  $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$  resulta ser bastante complicado. Algo mucho más asequible es estudiar fórmulas específicas, o conjuntos de ellas, para las que se cumple  $\mathcal{M} \preceq_{\varphi} \mathcal{N}$ . Como nos interesará considerar también clases propias como modelos, en vez de trabajar con la relación  $\mathcal{M} \preceq_{\varphi} \mathcal{N}$ , usaremos la generalización  $\forall x_1, \dots, x_n \in M [\varphi^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{N}}(x_1, \dots, x_n)]$ . Es decir, hemos sustituido  $(\mathcal{M}, \sigma) \models \varphi$  en la Definición 1.14, que podríamos haber escrito (usando la notación de la Definición 1.11) como  $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_1, \dots, x_n$  los elementos de  $M$  que selecciona la asignación  $\sigma$ , por  $\varphi^{\mathcal{M}}(x_1, \dots, x_n)$ .

**Definición 3.6.** Una fórmula  $\varphi$  es **absoluta entre**  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  si, siendo  $x_1, \dots, x_n$  sus variables libres,  $\forall x_1, \dots, x_n \in M (\varphi^{\mathcal{M}} \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{N}})$ . Informalmente,  $\mathcal{M} \preceq_{\varphi} \mathcal{N}$ .

**Definición 3.7.** Una fórmula  $\varphi$  es **absoluta para**  $\mathcal{M}$  si, siendo  $x_1, \dots, x_n$  sus variables libres,  $\forall x_1, \dots, x_n \in M (\varphi^{\mathcal{M}} \leftrightarrow \varphi)$ . Informalmente,  $\mathcal{M} \preceq_{\varphi} \mathbf{V}$ .

En particular, el siguiente es un tipo de fórmulas absolutas muy relevante para los **modelos transitivos** (esto es, modelos cuyos universos son transitivos), que serán con los que trabajaremos.

**Definición 3.8.** Una fórmula de  $\mathcal{L}_{TC}$  es  $\Delta_0$  si cumple una de las siguientes condiciones:

- (I) No tiene cuantificadores.
- (II) Es de la forma  $\varphi \wedge \psi$ ,  $\varphi \vee \psi$ ,  $\neg\varphi$ ,  $\varphi \rightarrow \psi$  o  $\varphi \leftrightarrow \psi$ , donde  $\varphi$  y  $\psi$  son fórmulas  $\Delta_0$ .
- (III) Es de la forma  $\forall x \in y \varphi$  o  $\exists x \in y \varphi$  donde  $\varphi$  es una fórmula  $\Delta_0$ .

**Lema 3.9.** *Las fórmulas  $\Delta_0$  son absolutas para modelos transitivos.*

*Demostración.* Queremos comprobar que, dada una clase transitiva  $M$  y una fórmula  $\Delta_0$   $\varphi$ , cuyas variables libres sean  $x_1, \dots, x_n$ , se cumple  $\forall x_1, \dots, x_n \in M (\varphi^M \leftrightarrow \varphi)$ .

Evidentemente, por la Definición 3.1,  $(x = y)^M \leftrightarrow x = y$  y, como estamos asumiendo que  $\in^M$  es la relación  $\in$ ,  $(x \in y)^M \leftrightarrow x \in y$ . Si no hay cuantificadores, la fórmula  $\varphi$  se ha construido a partir de las anteriores expresiones usando operadores lógicos, y usando de nuevo la Definición 3.1, vemos que  $\varphi \leftrightarrow \varphi^M$ . Esto nos sirve para comprobar el lema para (I) y (II) en la Definición 3.8.

Veamos ahora que es cierto cuando  $\varphi$  es  $\exists x \in y \psi$ , y  $\psi$  ya cumple la condición. La demostración para  $\forall x \in y \psi$  es análoga.  $\psi$  tendrá como variables libres  $x_1, \dots, x_n$ , pudiendo estar entre ellas  $x$ , y estando seguro  $y$ . Si tenemos  $\varphi^M$ , por definición esto es  $(\exists x (x \in y \wedge \psi))^M$ , que a su vez es  $\exists x \in M (x \in y \wedge \psi^M)$ . Sin embargo, como  $y$  es una de las variables  $x_1, \dots, x_n \in M$ , por la transitividad de  $M$  podemos escribir simplemente  $\exists x (x \in y \wedge \psi^M)$ . Usando la hipótesis, esto es equivalente a  $\exists x (x \in y \wedge \psi)$ , y finalizamos la demostración.  $\square$

El interés en las fórmulas  $\Delta_0$  se debe a que muchas de las funciones y constantes que usamos en la teoría de conjuntos están definidas por este tipo de fórmulas, por lo que no pierden su significado en los modelos transitivos.

**Lema 3.10.** *Las siguientes expresiones pueden escribirse como fórmulas  $\Delta_0$  y, por tanto, son absolutas para todos los modelos transitivos:*

- (I)  $x = \emptyset$ ;
- (II)  $x \subset y$ ;
- (III)  $x = y \cap z$ ;
- (IV)  $x = y \cup \{y\}$ ;
- (V)  $x$  es transitivo, denotado  $\text{transitivo}(x)$ ;
- (VI)  $x$  está totalmente ordenado por  $\in$ , denotado  $\text{TO}(x)$ .

*Demostración.* (I) es equivalente a  $\forall z \in x (z \neq z)$ , (II) a  $\forall z \in x (z \in y)$ , (III) a  $x \subset y \wedge x \subset z \wedge \forall v \in y (v \in z \rightarrow v \in x)$ , (IV) a  $y \in x \wedge y \subset x \wedge \forall z \in x (z = y \vee z \in y)$ , (V) a  $\forall z \in x (z \subset x)$  y (VI) a  $[\forall u \in x \forall v \in x (u \in v \vee v \in u \vee u = v)] \wedge [\forall u \in x \forall v \in x \forall w \in x ((u \in v \wedge v \in w) \rightarrow u \in w)]$ .  $\square$

Además, si la teoría  $\Gamma$  cumple el Axioma de Regularidad (es ZF, por ejemplo), otras expresiones importantes también se vuelven absolutas.

**Lema 3.11.** *Si se cumple el Axioma de Regularidad,  $x$  es un ordinal si y solo si  $x$  es transitivo y  $\in$  es un orden total en  $x$ .*

*Demostración.*  $\in$  está bien fundamentada en  $\mathbf{V}$  (Lema 2.59), así que en  $x$  también.  $\square$

**Lema 3.12.** *En una teoría de conjuntos con el Axioma de Regularidad, las siguientes expresiones también se pueden escribir como fórmulas  $\Delta_0$ :*

(I)  $x$  es un ordinal, denotado  $\text{ordinal}(x)$ ;

(II)  $x$  es un ordinal límite, denotado  $\text{límite}(x)$ ;

(III)  $x = \omega$ .

*Demostración.* Para (I), por el Lema 3.11, nos basta con ver que  $\text{transitivo}(x) \wedge \text{TO}(x)$  es  $\Delta_0$ , para lo que usamos el Lema 3.10. (II) es equivalente a  $\text{ordinal}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \forall y \in x \exists z \in z (y \in z)$  y (III) a  $\text{límite}(x) \wedge \forall y \in x (\neg \text{límite}(y))$ .  $\square$

Realmente, muchas de las otras definiciones que hemos usado también pueden formalizarse con fórmulas  $\Delta_0$ , pero solo usaremos unas pocas en demostraciones posteriores. En particular, uno de los conceptos que nos interesa estudiar es el de los conjuntos definibles, aunque en este caso probar que es absoluto es algo más complicado.

Comencemos notando que la teoría  $\Lambda$  puede, en particular, formalizar su propia sintaxis, de forma que funciones como “el número de variables libres en  $\varphi$ ” y nociones como “ser una fórmula en  $\Lambda$ ” pueden expresarse en la propia  $\Lambda$ . En concreto, como  $\mathcal{L}_{TC}$ , los símbolos lógicos, fórmulas, demostraciones, etc., son todos finitos o numerables, toda la formalización de la sintaxis puede realizarse en  $\omega$ , tal y como ocurría en PRA (o en PA, ver Anexo I). Así, las relaciones entre elementos de la sintaxis son siempre *aritméticas* en el siguiente sentido.

**Definición 3.13.** Una relación  $n$ -aria  $R$  es **aritmética** si  $R(x_1, \dots, x_n)$  es cierta solo para  $x_1, \dots, x_n \in \omega$  y todos los cuantificadores en la definición de  $R$  están relativizados a  $\omega$ .

En concreto, los distintos pasos usados en la recursión de las Definiciones 1.9 y 1.10 son relaciones sintácticas en  $\Lambda$ , así que también son aritméticas. Si probamos que todas las relaciones aritméticas son absolutas, y además que el ser absoluto se conserva en la recursión, habremos probado que expresiones como  $\mathcal{M} \models \varphi$  también lo son. Pero probar que las relaciones aritméticas son absolutas es inmediato en vista de la definición y usando que, por el Lema 3.12,  $\omega$  es absoluta para modelos transitivos de teorías que contengan el Axioma de Regularidad.

**Teorema 3.14.** Sean  $R$  una relación binaria,  $G$  una función binaria y  $A$  una clase. Supongamos que  $R$  está bien fundamentada y es de tipo conjunto en  $A$ , y llamemos  $F$  a la función obtenida por el Teorema 2.68, de forma que  $\forall a \in A [F(a) = G(a, F|_{\text{pred}_R(A,a)})]$ . Fijemos también  $F(a) = \emptyset$  para los  $a \notin A$ .

Sea  $M$  un modelo transitivo para, al menos,  $ZF^-$ , y supongamos que  $R, A, G$  son absolutas para  $M$ , que  $(R$  es de tipo conjunto en  $A)^M$ , y que  $\text{pred}_R(A, a) \subset M$  para todo  $a \in A$ . Entonces  $F^M(a)$  está definida para  $a \in M$ , y  $F$  es absoluta para  $M$ .

*Demostración.* Tenemos que  $(R$  está bien fundamentada en  $A)^M$ , ya que un conjunto  $X \in M$  que cumpla  $X \subset A$  y que no tenga un elemento  $R$ -minimal contradiría que  $R$  está bien fundamentado en  $\mathbf{V}$ . Además, la función  $a \mapsto \text{pred}_R(A, a)$  es absoluta para  $M$ , ya que  $A$  es absoluta y  $\text{pred}_R(A, a) \subset M$ .

El Teorema 2.68 también es cierto en  $M$  (es un modelo para  $ZF^-$ ), así que  $F^M$  está bien definida. Además, por ser  $G$  absoluta, si  $F|_{\text{pred}_R(A,a)} = F^M|_{\text{pred}_R(A,a)}$ , entonces  $F(a) = F^M(a)$ . Finalmente, si  $F$  no fuese absoluta, entonces existiría un elemento  $R$ -minimal de  $\{a \in M : F(a) \neq F^M(a)\}$ , lo cual sería contradictorio.  $\square$

**Corolario 3.15.** Las fórmulas que expresan “ $\varphi$  es una fórmula de  $\mathcal{L}$ ” y “ $\mathcal{I} \models \varphi$ ” son absolutas para modelos transitivos de  $ZF$ .

**Corolario 3.16.** La función  $\text{def}(\mathcal{M})$  es absoluta para modelos transitivos de  $ZF$ .

### 3.3. Consistencia del Axioma de Regularidad

Ya tenemos todo lo necesario para demostrar un primer teorema de consistencia, el del Axioma de Regularidad. Además, el lema en el que se apoya la demostración nos será muy útil también a la hora de probar la consistencia del Axioma de la Elección. De hecho, se ha diseñado usando varios lemas de [14] y [15] precisamente para poder referenciarlo en ambas demostraciones.

**Lema 3.17.** Dada una clase  $M$  transitiva:

- (I) El Axioma de Extensionalidad se cumple en  $M$ .
- (II) Si  $M \subset \mathbf{WF}$ , entonces el Axioma de Regularidad se cumple en  $M$ .
- (III) Si  $\forall z \in M \forall y \subset z (y \in M)$ , entonces el Axioma de Separación se cumple en  $M$ .
- (IV) Si  $\forall x, y \in M (\{x, y\} \in M)$ , entonces se cumple el Axioma de los Pares en  $M$ .
- (V) Si  $\forall x \in M (\bigcup x \in M)$ , entonces el Axioma de la Unión se cumple en  $M$ .

(VI) Si para todas las funciones con  $\text{dom}(f) \in M$  y  $\text{ran}(f) \subset M$  se tiene que  $\text{ran}(f) \in M$ , entonces se cumple el Axioma de la Sustitución en  $M$ .

(VII) Si  $\forall x \in M ((P(x) \cap M) \in M)$ , entonces se cumple el Axioma de las Partes en  $M$ .

*Demostración.*

(I) El Axioma de Extensionalidad relativizado a  $M$  es

$$\forall x, y \in M (\forall z \in M (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y).$$

O lo que es lo mismo, si  $x \neq y$ , entonces  $\{z \in M : z \in x\} \neq \{z \in M : z \in y\}$ . Pero notemos que si  $x \in M$ , como  $M$  es transitivo, se tiene que  $x = \{z \in M : z \in x\}$ . Así que si  $\{z \in M : z \in x\} = \{z \in M : z \in y\}$ ,  $x = y$ .

(II) La relativización a  $M$  del Axioma de Regularidad es

$$\forall x \in M [\exists y \in M (y \in x) \rightarrow \exists y \in M (y \in x \wedge \nexists z \in M (z \in x \wedge z \in y))].$$

Dado un conjunto  $x \neq \emptyset$  en  $M \subset \mathbf{WF}$ , por el Lema 2.60, existe un elemento  $\in$ -minimal  $y$  en  $x$ . Esto significa que  $y \cap x = \emptyset$ , y como esta fórmula es  $\Delta_0$  y  $M$  transitivo, se cumple el axioma.

(III) Tenemos que verificar que, dada una fórmula  $\phi$  con variables libres entre  $x, z, w_1, \dots, w_n$ , se cumple:

$$\forall z, w_1, \dots, w_n \in M \exists y \in M \forall x \in M (x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge \phi^M).$$

Solo hay que considerar  $y = \{x \in z : \phi^M\}$ . Como  $y \subset z$  y  $z \in M$ ,  $y \in M$  por hipótesis.

(IV) La relativización a  $M$  del Axioma de los Pares es

$$\forall x, y \in M \exists z \in M [y \in x \wedge z \in x \wedge \forall w \in M (w \in x \leftrightarrow (w = y \vee w = z))],$$

que se cumple tomando  $z = \{x, y\}$ , válido por la hipótesis.

(V) El Axioma de la Unión relativizado a  $M$  es

$$\forall x \in M \exists y \in M [\forall z \in M (z \in y \leftrightarrow \exists w \in M (w \in x \wedge z \in w))].$$

De nuevo, no hay más que tomar  $y = \bigcup x$ .

(VI) Dada una fórmula  $\phi$  con variables libres entre  $x, y, z, w_1, \dots, w_n$ , queremos encontrar el conjunto  $v$  tal que:

$$\forall z, w_1, \dots, w_n \in M (\forall x \in z \exists y \phi^M \rightarrow \exists v \in M \forall x \in z \exists y \in v \phi^M).$$

Nótese que no hay problemas al relativizar expresiones como  $\forall x \in z$  porque  $M$  es transitivo. Sea  $f$  la función con  $\text{dom}(f) = z$  tal que  $f(x)$  es el único  $y \in M$  cumpliendo  $\phi^M$ . Sabemos que  $f$  existe por el Axioma de la Sustitución, y solo hay que considerar la fórmula  $\phi^M \wedge y \in M$  en lugar de la  $f$  anterior para obtener  $v = \text{ran}(f)$ .

(VII) La fórmula que define  $\subset$  es  $\Delta_0$ , así que el Axioma de las Partes relativizado a  $M$  es

$$\forall x \in M \exists y \in M \forall z \in M (z \in x \leftrightarrow z \subset y).$$

Solo hay que considerar  $y = P(x) \cap M$ .

□

Demstrar que el Axioma del Infinito se cumple en una clase  $M$  suele ser algo más laborioso, por lo que escribimos para él un lema separado. Sin embargo, este también lo usaremos en las dos demostraciones de consistencia. Además, nos permite deducir trivialmente el Axioma de Existencia del Conjunto Vacío.

**Lema 3.18.** *Sea  $M$  una clase transitiva, si  $\omega \in M$ , entonces se cumplen el Axioma del Infinito y el Axioma de Existencia del Conjunto Vacío.*

*Demostración.* Para probar que se cumple el Axioma del Infinito vemos que, usando el Lema 3.10, la expresión  $\emptyset \in s \wedge \forall x \in s (x \cup \{x\} \in s)$  es absoluta para  $M$ . Así, el axioma relativizado es:

$$\exists s \in M (\emptyset \in s \wedge \forall x \in s (x \cup \{x\} \in s)),$$

que se cumple para  $s = \omega$ . Además, como  $\emptyset \in \omega \in M$  y  $M$  es transitiva,  $\emptyset \in M$ .

□

Ahora, trabajando en  $\Lambda = \text{ZF}^-$ , es decir, usando  $\text{ZF}^-$  como la teoría en la que formalizar los modelos y estudiar las propiedades de otras teorías formales, veremos que **WF** es un modelo de  $\Gamma = \text{ZF}$ . Recordemos que, como **WF** es una clase propia, no será un modelo en el sentido formal, sino que lo será en el metalenguaje, y el resultado de consistencia nos lo dará el Corolario 3.4.

**Teorema 3.19.** **WF** es un modelo de  $\text{ZF}$ .

*Demostración.* Comenzaremos aplicando el Lema 3.17. **WF** es transitivo por el Lema 2.55. Además,  $\forall z \in \mathbf{WF} \forall y \subset z (y \in \mathbf{WF})$ , ya que, por el mismo lema,  $z \subset \mathbf{WF}$ , por lo que  $y \subset \mathbf{WF}$  y, finalmente,  $y \in \mathbf{WF}$ . Esto también nos sirve para comprobar que, dado un  $x \in \mathbf{WF}$ ,  $P(x) \subset \mathbf{WF}$ , y por el lema de antes,  $P(x) \cap \mathbf{WF} = P(x) \in \mathbf{WF}$ . De la misma forma, para cualquier función  $f$  con  $\text{ran}(f) \subset \mathbf{WF}$ ,  $\text{ran}(f) \in \mathbf{WF}$ . El Lema 2.55 también nos permite comprobar fácilmente que  $\forall x, y \in \mathbf{WF} (\{x, y\} \in \mathbf{WF})$  y  $\forall x \in \mathbf{WF} (\bigcup x \in \mathbf{WF})$ .

Para probar que se cumple el Axioma del Infinito (y el de Existencia del Conjunto Vacío) solo hay que ver, por el Lema 3.18, que  $\omega \in \mathbf{WF}$ , pero esto nos lo asegura el Lema 2.56. □

**Corolario 3.20.**  $\text{Con}(\text{ZF}^-) \rightarrow \text{Con}(\text{ZF})$ .

## Capítulo 4

# El universo constructible

En 1938 Gödel introdujo la definición de conjunto constructible en su presentación de un nuevo modelo para ZFC, el universo constructible  $\mathbf{L}$ . Usando este modelo, fue capaz de demostrar tanto la consistencia del Axioma de la Elección como la de la Hipótesis del Continuo Generalizada [6].

**Definición 4.1.** Se define por recursión:

- (I)  $L_0 = \emptyset$ ,
- (II)  $L_{\alpha+1} = \text{def } (L_\alpha)$ ,
- (III)  $L_\alpha = \sup\{L_\beta : \beta < \alpha\}$  si  $\alpha$  es un ordinal límite.

Y, finalmente,  $\mathbf{L} = \bigcup\{L_\alpha : \alpha \in \mathbf{Ord}\}$ . Los elementos de  $\mathbf{L}$  son los **conjuntos constructibles**, y  $\mathbf{L}$  es el **universo constructible**.

Comenzamos dedicando una sección a un teorema que necesitaremos para probar que en  $\mathbf{L}$  se cumplen los axiomas de ZF. Una vez hecho esto, realizaremos la demostración de la consistencia del Axioma de la Elección. La última sección tratará sobre la consistencia de la Hipótesis del Continuo Generalizada, que no demostraremos en su totalidad por requerir resultados que escapan al alcance de este trabajo. Lo que se hará, en cambio, es citar dichos resultados, pudiendo realizar así el esquema de la demostración. Para las demostraciones de este capítulo se han usado todas las referencias principales, i.e. [7], [9], [14] y [15].

### 4.1. El Principio de Reflexión

En la Sección 3.1 ya vimos que expresar  $\mathbf{V} \models \text{ZFC}$  en el propio lenguaje ZFC es imposible por los problemas que surgen al formalizar la teoría de modelos para clases propias. No solo eso, sino que, aunque trabajásemos con conjuntos, encontrar un modelo para ZFC es imposible por el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. Sin embargo, algo que sí podemos hacer es encontrar estructuras en las que se satisfagan axiomas individuales de ZFC, o conjuntos finitos de los mismos. Esto es, precisamente, lo que expresa el Principio de Reflexión.

Existen varias formas de motivar el Principio de Reflexión [17], pero la idea central es la siguiente: el universo de conjuntos  $\mathbf{V}$  es por naturaleza absolutamente infinito y, por tanto, cualquier propiedad con la que intentemos caracterizarlo fallará, cumpliéndose para alguna etapa inferior (recordemos que el Axioma de Regularidad es  $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$ )  $V_\alpha$  [12]. En palabras de Gödel “el universo de conjuntos es estructuralmente indefinible” [29, p. 189]. Otra forma de entenderlo es la siguiente: como el universo  $\mathbf{V}$  es tan grande que nunca puede comprenderse totalmente, dado el conjunto de propiedades que identifiquemos con  $\mathbf{V}$ , siempre estaremos en posición de ampliar nuestro concepto de conjunto, dándonos cuenta de que lo que creíamos era el universo completo, era realmente un elemento de un universo mayor [16].

Podría parecer que la propiedad “contener todos los conjuntos” escapa a este principio, y nos permite caracterizar  $\mathbf{V}$ , pero notemos que esta afirmación carece de contenido, pues lo que nos está diciendo realmente es “el conjunto de todos los conjuntos contiene a todos los conjuntos”. Usando la terminología de Gödel, las propiedades a las que hace referencia el principio son las propiedades estructurales. En nuestro formalismo, esto se traduce en que, para cualquier fórmula  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ , existe una etapa  $V_\alpha$  tal que, para todo  $a_1, \dots, a_n \in V_\alpha$ ,

$$V_\alpha \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \text{ si y solo si } V \models \varphi(a_1, \dots, a_n);$$

o lo que es lo mismo, existe un  $\alpha$  tal que  $\varphi$  es absoluta para  $V_\alpha$ . De esta forma,  $\varphi$  se *refleja* desde  $\mathbf{V}$  en  $V_\alpha$ .

Por lo tanto, las etapas  $V_\alpha$  son buenos candidatos para ser *aproximaciones* de un modelo de ZFC, en el sentido de que satisfagan la mayoría de axiomas. De hecho, no es difícil demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 4.2** ([26, Teorema 4.1]). *Sea  $\alpha$  un ordinal límite que cumpla  $\omega \cdot 2 \leq \alpha$ ,  $V_\alpha \models Z$  es un teorema de ZF.*

Nótese que, como el Axioma de la Sustitución es necesario en la construcción de  $\omega \cdot 2$  (y ordinales mayores),  $V_\alpha \models Z$  no es un teorema de Z. Así tenemos que, a una etapa  $V_\alpha$  en las condiciones anteriores, solo le falta cumplir un axioma (realmente un esquema axiomático, es decir, infinitos) para ser un modelo de ZF, pero como esto no puede ocurrir, debe necesariamente fallar.

Podríamos preguntarnos si, para cualquier conjunto finito de axiomas que seleccionemos, podemos encontrar un modelo que los cumpla, pero la respuesta nos la da precisamente el Principio de Reflexión. De hecho, podemos formalizar esta idea en un teorema, que es el que demostraremos en esta sección.

**Definición 4.3.** Un conjunto ordenado de fórmulas  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  se dice **cerrado en subfórmulas** si ninguna de ellas usa el cuantificador  $\forall$ , y todas las subfórmulas de cada  $\varphi_i$  están también en el conjunto.

Antes de dar los siguientes resultados, conviene hacer una aclaración. En vista de lo expuesto en el capítulo anterior, podría parecer que expresiones como  $\mathbf{V} \models \varphi$  no pueden formalizarse en ZFC, pero esto debe matizarse. El argumento presentado en la Sección 3.1 impide que exista una relación  $\models$  que pueda aplicarse a cualquier fórmula, pero, para una concreta, podríamos intentar modificar la relación  $R$  y conseguir expresar formalmente  $\mathbf{V} \models \varphi$  [14]. De hecho, siempre y cuando consideremos un conjunto finito de fórmulas, dicha relación  $\models$  puede definirse. Por lo tanto, tiene sentido escribir  $A \preceq_{\varphi} B$  (entendida formalmente, y no solo en el sentido de las Definiciones 3.6 y 3.7) cuando  $A$  y  $B$  son clases propias.

**Lema 4.4.** *Dado un conjunto ordenado de  $\mathcal{L}_{TC}$ -fórmulas  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  que sea cerrado en subfórmulas, y sean  $A$  y  $B$  clases con  $A \neq \emptyset$  y  $A \subset B$ . Son equivalentes:*

$$(I) \quad A \preceq_{\varphi_1} B \wedge A \preceq_{\varphi_2} B \wedge \dots \wedge A \preceq_{\varphi_n} B.$$

(II) *Para todas las fórmulas existenciales  $\varphi_i(x_1, \dots, x_r)$ , es decir, de la forma  $\exists y \tilde{\varphi}_i(x_1, \dots, x_r, y)$ , se tiene que*

$$\forall a_1, \dots, a_r \in A \left[ \varphi_i^B(a_1, \dots, a_r) \rightarrow \exists b \in A \tilde{\varphi}_i^B(a_1, \dots, a_r, b) \right].$$

*Demostración.* Partiendo de (I), podemos usar que  $A \preceq_{\varphi_i} B$  y  $A \preceq_{\tilde{\varphi}_i} B$  para escribir

$$\varphi_i^B(a_1, \dots, a_r) \rightarrow \varphi_i^A(a_1, \dots, a_r) \rightarrow \exists b \in A \tilde{\varphi}_i^A(a_1, \dots, a_r, b) \rightarrow \exists b \in A \tilde{\varphi}_i^B(a_1, \dots, a_r, b),$$

donde la implicación intermedia viene dada por el significado de  $\varphi_i^A$ .

Para la otra implicación, demostraremos que  $A \preceq_{\varphi_i} B$  por inducción en la longitud de  $\varphi_i$ . El único caso no trivial sucede cuando, siendo  $\varphi_j$  más corta que  $\varphi_i$ , y habiendo demostrado  $A \preceq_{\varphi_j} B$ , tenemos que  $\varphi_i(x_1, \dots, x_r)$  es existencial con  $\tilde{\varphi}_i$  igual a  $\varphi_j$ . Fijando  $a_1, \dots, a_r \in A$ , podemos hacer

$$\varphi_i^B(a_1, \dots, a_r) \leftrightarrow \exists b \in A \varphi_j^B(a_1, \dots, a_r, b) \leftrightarrow \exists b \in A \varphi_j^A(a_1, \dots, a_r, b) \leftrightarrow \varphi_i^A(a_1, \dots, a_r).$$

La implicación  $\leftarrow$  en la primera equivalencia viene dada por el significado de  $\varphi_i^B$ , y la implicación  $\rightarrow$  por (II).  $\square$

**Teorema 4.5** (de Reflexión). *Sean  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  fórmulas en  $\mathcal{L}_{TC}$ ,  $B$  una clase no vacía y  $A(\alpha)$  un conjunto para cada  $\alpha \in \mathbf{Ord}$ . Supongamos que se cumplen:*

$$(I) \quad \text{Si } \beta < \alpha, \text{ entonces } A(\beta) \subset A(\alpha);$$

$$(II) \quad \text{Para cada ordinal límite } \alpha, \quad A(\alpha) = \bigcup_{\beta < \alpha} A(\beta);$$

$$(III) \quad B = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{Ord}} A(\alpha).$$

Entonces,  $\forall \beta \exists \alpha > \beta [A(\alpha) \neq \emptyset \wedge A(\alpha) \preceq_{\varphi_1} B \wedge \cdots \wedge A(\alpha) \preceq_{\varphi_n} B]$ .

*Demostración.* Podemos suponer que  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  es cerrado en subfórmulas. En caso contrario podríamos sustituir cualquier instancia del cuantificador  $\forall$  por  $\neg \exists \neg$ , que es equivalente, y añadir al conjunto de fórmulas todas las subfórmulas necesarias.

Para cada  $\varphi_i(x_1, \dots, x_r)$  existencial (de la forma  $\exists y \tilde{\varphi}_i(x_1, \dots, x_r, y)$ ) podemos definir  $f_i : B^r \rightarrow \mathbf{Ord}$ , de forma que cumpla:

- Si se tiene  $\varphi_i^B(a_1, \dots, a_r)$ , entonces  $f_i(a_1, \dots, a_r)$  es el menor  $\gamma$  cumpliendo  $\exists b \in A(\gamma) \tilde{\varphi}_i^B(a_1, \dots, a_r, b)$ . Recordemos que este  $\gamma$  existe por el Teorema 2.26.
- Si se tiene  $\neg \varphi_i^B(a_1, \dots, a_r)$ , entonces  $f_i(a_1, \dots, a_r) = 0$ .

Definamos también  $g_i : \mathbf{Ord} \rightarrow \mathbf{Ord}$  como  $g_i(\gamma) = 0$  si  $\varphi_i$  no es existencial, y, si lo es,  $g_i(\gamma) = \sup\{f_i(a_1, \dots, a_r) : a_1, \dots, a_r \in A(\gamma)\}$ . Llamemos también  $K(\gamma)$  al máximo entre  $\gamma + 1$  y  $\max\{g_i(\gamma) : i < n\}$ .

Probemos ahora que se cumple la fórmula del teorema. Comenzamos fijando un  $\beta$ , y nos basta con obtener un  $\alpha > \beta$  que cumpla  $A(\alpha) \neq \emptyset$  y se cumpla el apartado (II) del Lema 4.4. Sea  $\gamma_0$  el menor  $\gamma > \beta$  cumpliendo  $A(\gamma) \neq \emptyset$ , y sean  $\gamma_{n+1} = K(\gamma_n)$  definidos por recursión para  $n \in \omega$ . Solo hay que tomar  $\alpha = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$ .  $\square$

Podemos aplicar este teorema al caso particular que mencionamos al inicio de esta sección, es decir,  $B = \mathbf{V}$  y  $A(\alpha) = V_\alpha$ , y seleccionar como fórmulas  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un conjunto finito de axiomas. Las tres hipótesis del teorema se cumplen por el Lema 2.53, la definición de las etapas  $V_\alpha$ , y el Teorema 2.65. De esta forma, llegamos a que existirá una etapa  $V_\alpha$  para la que se cumpla dicho conjunto de axiomas.

## 4.2. Consistencia del Axioma de la Elección

Antes de demostrar que  $\mathbf{L}$  es un modelo de ZFC, necesitamos algunos resultados previos.

**Lema 4.6.** *Para cada  $\alpha \in \mathbf{Ord}$ ,  $L_\alpha$  es transitivo. Además, dado un  $\beta \geq \alpha$ , se cumple que  $L_\alpha \subset L_\beta$ .*

*Demostración.* Comencemos por la primera afirmación, para la que usaremos inducción en  $\alpha$ .  $L_0$  es transitivo trivialmente, y suponiendo que  $L_\gamma$  es transitivo para todo  $\gamma < \alpha$ , es evidente que  $L_\alpha$  es transitivo cuando  $\alpha$  es un ordinal límite. Asumamos entonces que  $L_\gamma$  es transitivo, y veamos que también lo es  $L_{\gamma+1}$ . Para cada  $a \in L_\gamma$ , tenemos que  $a = \{x \in L_\gamma : x \in a\}$ , por lo que  $a$  es un subconjunto definible de  $L_\gamma$ . Más concretamente, en la Definición 1.16 estamos tomando

$\varphi(x, y) \equiv x \in y$ , y luego usando el parámetro  $a$  para obtener  $\{x \in L_\gamma : L_\gamma \models \varphi(x, a)\}$ , que resulta ser  $a$  por la transitividad de  $L_\gamma$ . En consecuencia,  $L_\gamma \subset L_{\gamma+1}$ . Además,  $L_{\gamma+1} \subset P(L_\gamma)$ . Así que si  $x \in L_{\gamma+1}$ , entonces  $x \subset L_\gamma$  y, finalmente,  $x \subset L_{\gamma+1}$ .

Para probar la segunda afirmación usamos inducción en  $\beta$ . Los casos en los que  $\beta = \alpha$  y  $\beta$  es un ordinal límite son triviales, pero si  $\beta$  es un sucesor, como acabamos de probar que  $L_\gamma \subset L_{\gamma+1}$ , ya tenemos el resultado aplicando la hipótesis de inducción.  $\square$

**Lema 4.7.** *Para todo ordinal  $\alpha$ ,  $L_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$  y, en consecuencia,  $\alpha \subset L_\alpha$ .*

*Demostración.* Veamos por inducción que  $L_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$ . El caso para el 0 y los ordinales límite son triviales. Para todo  $\alpha \in \mathbf{Ord}$ , es evidente que  $L_\alpha \subset V_\alpha$ . Entonces  $L_\alpha \cap \mathbf{Ord} \subset V_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$ . Para la inclusión inversa, veamos que  $\alpha + 1 \subset L_{\alpha+1}$  sabiendo que  $L_\alpha \cap \mathbf{Ord} = \alpha$ . Como cada etapa  $L_\alpha$  es transitiva, nos llega con ver que  $\alpha \in L_{\alpha+1}$ . Para eso usamos que la fórmula ordinal  $(x)$  es absoluta y, por tanto,

$$\alpha = \{x \in L_\alpha : \text{ordinal}(x)\} = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \text{ordinal}(x)\} \in \text{def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1}.$$

$\square$

**Definición 4.8.** Para cada  $x \in \mathbf{L}$  se define su  $L$ -rango,  $\rho(x)$ , como el menor  $\alpha \in \mathbf{Ord}$  tal que  $x \in L_{\alpha+1}$ .

Trabajando en ZF ( $\Lambda$  en el lenguaje del capítulo anterior), comenzaremos viendo que  $\mathbf{L}$  es un modelo para el propio ZF ( $\Gamma$ ). Para finalizar demostraremos que en él se cumple el Axioma de la Elección.

**Teorema 4.9.**  *$\mathbf{L}$  es un modelo de ZF.*

*Demostración.* Dado un axioma  $\varphi$  de ZF, tenemos que ver que  $\varphi^{\mathbf{L}}$  es cierto. Comencemos viendo que se cumple el Axioma de Separación.

Sea  $\varphi$  una fórmula con variables libres entre  $x, z, w_1, \dots, w_n$ , queremos comprobar que se cumple

$$\forall z, w_1, \dots, w_n \in \mathbf{L} \exists y \in \mathbf{L} \forall x \in \mathbf{L} (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi^{\mathbf{L}})).$$

Fijados  $z, w_1, \dots, w_n \in \mathbf{L}$ , tomaremos  $y = \{x \in z : \varphi^{\mathbf{L}}\}$  y tendremos que comprobar que  $y \in \mathbf{L}$ . Comencemos fijando un  $\beta$  tal que  $z, w_1, \dots, w_n \in L_\beta$ . Por el Teorema de Reflexión (con  $B = \mathbf{L}$  y  $A(\alpha) = L_\alpha$ ), hay un  $\alpha > \beta$  cumpliendo  $L_\alpha \prec_\varphi \mathbf{L}$ . Por lo tanto, siendo  $\psi$  la fórmula  $\varphi \wedge x \in z$ ,  $y = \{x \in L_\alpha : \psi^{L_\alpha}\} = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \psi\} \in \text{def}(L_\alpha) = L_{\alpha+1} \subset \mathbf{L}$ .

Pasemos ahora al resto de axiomas. Como cada etapa  $L_\alpha$  es transitiva (Lema 4.6),  $\mathbf{L}$  también lo será. Además, dado un  $x \subset \mathbf{L}$ , hay un  $y \in \mathbf{L}$  cumpliendo  $x \subset y$ . Esto es cierto ya que podemos tomar  $y = L_\alpha$  con  $\alpha = \sup\{\rho(z) + 1 : z \in x\}$ . Esto nos permite probar que el resto de hipótesis

del Lema 3.17 también se cumplen (menos el apartado del Axioma de Separación). Por ejemplo, en el caso del apartado (V), dado un  $x \in \mathbf{L}$ , tenemos que  $\bigcup x \subset y$  para un cierto  $y \in \mathbf{L}$ , y podemos usar el Axioma de Separación en  $\mathbf{L}$  para obtener  $\bigcup x \in \mathbf{L}$ .

Solo nos queda probar el Axioma del Infinito y el Axioma de Existencia del Conjunto Vacío. Usando el Lema 3.18, lo único que hay que demostrar es  $\omega \in \mathbf{L}$ . Pero esto ya lo tenemos por el Lema 4.7, ya que  $\omega \in L_{\omega+1} \subset \mathbf{L}$ .  $\square$

El Axioma de Constructibilidad es  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ , esto es,  $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$ . Que este axioma se cumple en  $\mathbf{L}$  no es trivial, ya que, a pesar de que es evidente que  $\forall x \in \mathbf{L} \exists \alpha (x \in L_\alpha)$ , hay que probar  $\forall x \in \mathbf{L} \exists \alpha \in \mathbf{L} (x \in L_\alpha)$ .

**Teorema 4.10.**  $\mathbf{L}$  *satisface el Axioma de Constructibilidad, i.e.  $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ .*

*Demostración.* Comencemos viendo que la función  $\alpha \mapsto L_\alpha$  es absoluta. Para ello usamos que la fórmula ordinal  $(x)$  es absoluta, y  $\text{def}(x)$  también. Así, por inducción se prueba fácilmente que  $\alpha \mapsto L_\alpha$  es absoluta. Además, por la demostración del Teorema 4.9, sabemos que  $\mathbf{Ord} \subset \mathbf{L}$ , y evidentemente  $\forall x \in \mathbf{L} \exists \alpha \in \mathbf{Ord} (x \in L_\alpha)$ .  $\square$

**Teorema 4.11.** *Existe un buen orden para la clase  $\mathbf{L}$ .*

*Demostración.* Construiremos primero, por inducción, un buen orden  $<_\alpha$  para cada etapa  $L_\alpha$ . Además lo haremos de tal forma que, si  $\alpha < \beta$ ,  $<_\beta$  sea una extensión final de  $<_\alpha$ , esto es, que cumpla:

- Si  $x <_\alpha y$ , entonces  $x <_\beta y$ .
- Si  $x \in L_\alpha$  e  $y \in L_\beta \setminus L_\alpha$ , entonces  $x <_\beta y$ .

Comencemos viendo el caso en el que  $\alpha$  es un ordinal límite, y supongamos que para todo  $\beta < \alpha$  ya hemos construido  $<_\beta$ , que cumplen ser extensiones finales de las relaciones de orden anteriores. Solo hay que definir  $<_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} <_\beta$ , es decir, dados  $x, y \in L_\alpha$  tendremos que  $x <_\alpha y$  cuando  $\exists \beta < \alpha (x <_\beta y)$ . Que cumple las condiciones de ser extensión final de las relaciones anteriores es inmediato.

Veamos entonces cómo definir  $<_{\alpha+1}$ , habiendo definido ya  $<_\alpha$ . Como  $L_{\alpha+1} = \text{def}(L_\alpha)$ , cada elemento  $x \in L_{\alpha+1}$  es de la forma  $x = D(\alpha, f, p_1, \dots, p_n)$ , siendo  $D(\alpha, f, p_1, \dots, p_n) := \{y \in L_\alpha : L_\alpha \models f(y, p_1, \dots, p_n)\}$ . Así que, para ordenar los  $x \in L_{\alpha+1}$ , nos basta con ordenar las  $(n+2)$ -tuplas  $(\alpha, f, p_1, \dots, p_n)$ , pero teniendo en cuenta que dos distintas pueden definir el mismo  $x$ . El incluir a  $\alpha$  en la tupla es necesario para cumplir la condición de extensión final. Así, definiremos el orden  $<_\alpha^{\text{tup}}$  en las  $(n+2)$ -tuplas  $(\beta, f, p_1, \dots, p_n)$  con  $\beta < \alpha$ ,  $f \in \text{Fml}$  y  $p_i \in L_\alpha$ . Aplicaremos la inducción tanto para  $<_\alpha$  como para  $<_\alpha^{\text{tup}}$ . Para definir  $<_{\alpha+1}^{\text{tup}}$  a partir de  $<_\alpha^{\text{tup}}$  debemos tener

en cuenta que  $\text{Fml} \subset \omega$ , por lo que existe un buen orden  $<^{\text{Fml}}$  de  $\text{Fml}$ . Por lo tanto, dado un  $<_\alpha$ , definiremos  $<_{\alpha+1}^{\text{tup}}$ , y luego  $<_{\alpha+1}$ .

Sean  $\beta, \gamma < \alpha$ ;  $f, g \in \text{Fml}$ ;  $p_i \in L_\alpha$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y  $q_i \in L_\alpha$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Definimos  $(\beta, f, p_1, \dots, p_n) <_{\alpha+1}^{\text{tup}} (\gamma, g, q_1, \dots, q_m)$  si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (I)  $\beta < \gamma$ ,
- (II)  $\beta = \gamma \wedge f <^{\text{Fml}} g$ ,
- (III)  $\beta = \gamma \wedge f = g \wedge n < m$ ,
- (IV)  $\beta = \gamma \wedge f = g \wedge n = m \wedge \exists i \in \omega (i = \min\{j < n : p_j \neq q_j\} \wedge p_i <_\alpha q_i)$ .

Finalmente, dados  $x, y \in L_{\alpha+1}$ , definimos  $x <_{\alpha+1} y$  si y solo si  $(\beta, f, p_1, \dots, p_n) <_{\alpha+1}^{\text{tup}} (\gamma, g, q_1, \dots, q_m)$ , donde  $(\beta, f, p_1, \dots, p_n)$  y  $(\gamma, g, q_1, \dots, q_m)$  son las tuplas  $<_{\alpha+1}^{\text{tup}}$ -mínimas cumpliendo  $x = D(\beta, f, p_1, \dots, p_n)$  y  $y = D(\gamma, g, q_1, \dots, q_n)$ .

Ahora, dados  $x, y \in \mathbf{L}$ , para definir la relación de buen orden  $<_{\mathbf{L}}$  en  $\mathbf{L}$ , solo hay que hacer:

$$x <_{\mathbf{L}} y \quad \text{si y solo si} \quad x <_\alpha y \quad \text{para algún } \alpha.$$

□

Como vemos, si en un modelo se cumple  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ , no solo hemos probado que existe una relación de buen orden para cualquier conjunto, sino que esta relación es global, es decir, la relación definida en la demostración del teorema puede aplicarse a cualquier conjunto. Ahora, usando los Teoremas 4.10 y 4.11, tenemos que, usando el modelo  $\mathbf{L}$ , existe un buen orden para cualquier conjunto, es decir, (Axioma de la Elección) $^{\mathbf{L}}$ .

**Corolario 4.12.**  $\mathbf{L}$  es un modelo de ZFC.

Como podemos construir  $\mathbf{L}$  en ZF, por el Corolario 3.4, tenemos lo siguiente.

**Corolario 4.13.**  $\text{Con}(\text{ZF}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC})$ .

### 4.3. Consistencia de la Hipótesis del Continuo Generalizada

Lo primero que necesitaremos para realizar la demostración de la consistencia de la Hipótesis del Continuo Generalizada serán algunos lemas relacionados con la cardinalidad de las etapas del universo constructible.

**Lema 4.14.** *Dado un conjunto infinito  $A$ ,  $|\text{def}(A)| = |A|$ .*

*Demostración.* Para ver que  $|A| \leq |\text{def}(A)|$ , solo tenemos que darnos cuenta de que, para todo  $a \in A$ ,  $\{a\} \in \text{def}(A)$ . Para ello, consideramos la fórmula  $\varphi(x, y) \equiv x = y$  en la Definición 1.16, y vemos que  $A \models \varphi(x, a)$  precisamente cuando  $x$  es  $a$ . Por otro lado, que  $|\text{def}(A)| \leq |A|$  se cumple es consecuencia de que solo hay una cantidad  $\aleph_0$  de posibles fórmulas, y para cada una solo hay una cantidad  $|A|$  de posibles parámetros. Veamos esto un poco más en detalle.

Como  $A$  es infinito,  $\aleph_0 \leq |A|$ . Además, cada fórmula tiene una cantidad  $n \in \omega$  de variables libres en las que sustituir los parámetros, así que todas las posibles combinaciones de parámetros son  ${}^n A$ . Así, cada posible definición viene caracterizada por una fórmula (de las que hay  $\aleph_0$ ), y una función en  $\bigcup_{n \in \omega} {}^n A$ . Tendremos que la cantidad de posibles definiciones es menor o igual que  $\aleph_0 \otimes |\bigcup_{n \in \omega} {}^n A|$ . Veamos que  $|\bigcup_{n \in \omega} {}^n A| = |A|$ . Usando el Teorema 2.48, podemos definir funciones biyectivas  $f_n : A^n \rightarrow A$ , con las que construir otra aplicación biyectiva  $f : \bigcup_{n \in \omega} A^n \rightarrow \omega \times A$ . Ahora,  $|\bigcup_{n \in \omega} {}^n A| = |\bigcup_{n \in \omega} A^n|$  ya que, para cada  $n$ ,  $|{}^n A| = |A^n|$ . No hay más que asociar con cada posible  $f : n \rightarrow A$  el elemento  $(f(0), \dots, f(n-1))$ . Tenemos finalmente que  $|\bigcup_{n \in \omega} {}^n A| = |\omega \times A| = |A|$ , donde la última igualdad es el Corolario 2.49. Usando de nuevo este corolario,  $\aleph_0 \otimes |\bigcup_{n \in \omega} {}^n A| = |A|$ .  $\square$

**Lema 4.15.** *Si  $\kappa \geq \aleph_0$  y  $|X_\alpha| \leq \kappa$  para todo  $\alpha < \kappa$ , se tiene que  $|\bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha| \leq \kappa$ .*

*Demostración.* Para cada  $\alpha$  podemos escoger (usando el Axioma de la Elección) una función inyectiva  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow \kappa$ . Con ellas, podemos construir otra función inyectiva  $g : \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha \rightarrow \kappa \times \kappa$  de forma que, si  $x \in X_\alpha$ ,  $g(x) = \alpha \times f_\alpha(x)$ . Así que  $|\bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha| \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa$ , donde la última igualdad se tiene por el Teorema 2.48.  $\square$

**Lema 4.16.** *Dado un ordinal  $\alpha \geq \omega$ ,  $|L_\alpha| = |\alpha|$ .*

*Demostración.* Como  $\alpha \subset L_\alpha$  (Lema 4.7), ya tenemos  $|\alpha| \leq |L_\alpha|$ . Probemos  $|L_\alpha| \leq |\alpha|$  por inducción en  $\alpha$ . Supongamos, por tanto, que, para todo  $\beta < \alpha$  cumpliendo  $\beta \geq \aleph_0$ , es cierto que  $|L_\beta| \leq |\beta|$ . Esto implica que  $|L_\beta| \leq |\alpha|$ , incluso cuando  $\beta < \aleph_0$  (ya que  $L_\beta \subset V_\beta$  y  $V_\beta$  es finito para  $\beta < \aleph_0$ ). En el caso de que  $\alpha$  sea un ordinal límite,  $L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta$ , que es una unión de  $|\alpha|$  conjuntos de cardinalidad menor o igual que  $|\alpha|$ , así que por el Lema 4.15,  $|L_\alpha| \leq |\alpha|$ . Por otro lado, si  $\alpha = \beta + 1$ , entonces  $|L_\beta| = |\beta| = |\alpha|$ . Usando el Lema 4.14 y que  $L_\alpha = \text{def}(L_\beta)$ , llegamos a que  $|L_\alpha| = |\alpha|$ .  $\square$

Veamos ahora un resultado relacionado con la función colapso transitivo.

**Definición 4.17.** Una relación  $R$  se dice **extensional** en una clase  $A$  si la estructura  $(A, R)$  satisface el Axioma de Extensionalidad, es decir, si se cumple

$$\forall x, y \in A (\text{pred}_R(A, x) = \text{pred}_R(A, y) \rightarrow x = y).$$

**Lema 4.18.** *Sea la relación  $\in$  bien fundamentada y extensional en una clase  $A$ , y sea  $T \subset A$  transitiva. Entonces la función colapso transitivo es la identidad en  $T$ , i.e.  $\pi(x) = x$  para todo  $x \in T$ .*

*Demostración.* Supongamos que el conjunto  $\{x \in T : \pi(x) \neq x\}$  es no vacío, de forma que podamos tomar su elemento  $\in$ -minimal  $a$  (usando el Axioma de Regularidad). Pero entonces  $\pi(a) = \{\pi(x) : x \in A \wedge x \in a\}$ , que por transitividad es igual a  $\{\pi(x) : x \in a\}$ , que no es más que el propio  $a$ , así que  $\pi(a) = a$ , una contradicción.  $\square$

Los siguientes son los dos resultados que no demostraremos y usaremos en la demostración.

**Teorema 4.19** (Descendiente de Löwenheim-Skolem, formalizado en ZFC [14, Teorema I.15.10]). *Sea  $\mathcal{L}$  una signatura y  $\mathcal{M}$  una  $\mathcal{L}$ -estructura. Fijemos un cardinal  $\kappa$  tal que  $\max\{|\mathcal{L}|, \aleph_0\} \leq \kappa \leq |\mathcal{M}|$ , y fijemos un  $S \subset M$  con  $|S| \leq \kappa$ . Entonces, existe un  $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ , con universo  $N$ , tal que  $S \subset N$  y  $|N| = \kappa$ .*

Como vemos, si consideramos una signatura finita o numerable, y fijamos  $\kappa = \aleph_0$  y  $S = \emptyset$ , recuperamos el Teorema 1.25. Por lo tanto, este nuevo teorema, además de ser una versión formalizada en ZFC, es mucho más potente. No solo no requiere que  $\mathcal{M}$  sea un modelo, sino que también nos permite escoger la cardinalidad  $\kappa$  de la subestructura elemental  $\mathcal{N}$ , y fijar un conjunto  $S$  que nos interesa que contenga.

**Lema 4.20** (de Condensación de Gödel [9, Lema 13.17]). *Sea  $M$  un conjunto (pensado como  $\mathcal{L}_{TC}$ -estructura). Para cada ordinal límite  $\alpha$ , si  $M \preceq L_\alpha$ , entonces el colapso transitivo de  $M$  (donde la relación  $R$  es  $\in$ ) es  $L_\beta$  para algún  $\beta \leq \alpha$ .*

Ya estamos en posición, finalmente, de demostrar que en  $\mathbf{L}$  se cumple  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ .

**Teorema 4.21.** *Si se cumple  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ , entonces  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$  para todo ordinal  $\alpha$ .*

*Demostración.* Como  $\aleph_{\alpha+1}$  es el primer cardinal más grande que  $\aleph_\alpha$ , está claro que  $\aleph_{\alpha+1} \leq |P(\aleph_\alpha)| = 2^{\aleph_\alpha}$ . Tendremos que probar que, asumiendo  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ ,  $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+1}$ . Para ello, veamos que dado un subconjunto  $X$  de  $\aleph_\alpha$ , existe un  $\beta < \aleph_{\alpha+1}$  cumpliendo  $X \in L_\beta$ . Eso implicaría que  $P(\aleph_\alpha) \subset L_{\aleph_{\alpha+1}}$  (Lema 4.6). Ahora, como por el Lema 4.16  $|L_{\aleph_{\alpha+1}}| = \aleph_{\alpha+1}$ , habríamos llegado a que  $|P(\aleph_\alpha)| \leq \aleph_{\alpha+1}$ .

Tomemos, por tanto, un  $X \subset \aleph_\alpha$ . Como  $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ ,  $X \in L_\delta$  para un cierto  $\delta$ , y usando el Lema 4.6 podemos suponer que dicho  $\delta$  es límite y mayor que  $\aleph_\alpha$ . Ahora podemos usar el Teorema 4.19 con  $\mathcal{L} = \{\in\}$ ,  $\mathcal{M} = L_\delta$ ,  $\kappa = \aleph_0$  y  $S = \aleph_\alpha \cup \{X\}$ . Es fácil comprobar que todas las hipótesis se cumplen, así que existirá una subestructura elemental  $M \preceq L_\delta$ , con  $|M| = \aleph_\alpha$ , cumpliendo  $\aleph_\alpha \subset M$  y  $X \in M$ . Apliquemos ahora el Lema 4.20 a  $M$ , que cumple las hipótesis por ser  $\delta$  un ordinal límite. El colapso transitivo de  $M$  será  $L_\beta$  para algún  $\beta \leq \delta$ . Además, como

$\pi$  es una biyección entre  $M$  y  $L_\beta$ , ambos tendrán la misma cardinalidad,  $\aleph_\alpha$ , así que, por el Lema 4.16,  $|\beta| = \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$  y  $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ . Solo nos falta ver que  $X \in L_\beta$ , pero como  $X \subset \aleph_\alpha$ , y la función colapso transitivo es la identidad en los conjuntos transitivos (como el ordinal  $\aleph_\alpha$ ) por el Lema 4.18,  $\pi(x) = x$  para todo  $x \in X$ . Ahora, como  $\pi(X) = \{\pi(x) : x \in X\}$ , resulta que también es cierto que  $\pi(X) = X$ , por lo que  $X \in \pi(M) = L_\beta$ .  $\square$

**Corolario 4.22.** *L es un modelo de ZFC+HCG, esto es, los axiomas de ZFC con el axioma adicional  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ .*

**Corolario 4.23.**  $\text{Con}(\text{ZFC}) \rightarrow \text{Con}(\text{ZFC}+\text{HCG})$ .

Para finalizar este trabajo, podemos reunir en una misma expresión todos los resultados de consistencia obtenidos, es decir, los Corolarios 3.20, 4.13 y 4.23. Además, como es evidente que, si una teoría con axiomas adicionales es consistente, entonces la misma sin esos axiomas también lo es, podemos escribir:

$$\text{Con}(\text{ZF}^-) \leftrightarrow \text{Con}(\text{ZF}) \leftrightarrow \text{Con}(\text{ZFC}) \leftrightarrow \text{Con}(\text{ZFC}+\text{HCG}).$$

O, usando la notación de la Definición 3.5:

$$\text{Con}(\text{ZF}^-) \sim \text{Con}(\text{ZF}) \sim \text{Con}(\text{ZFC}) \sim \text{Con}(\text{ZFC}+\text{HCG}).$$

# Anexo I

## Gödelización de la sintaxis

Veamos algo más en detalle cómo se realiza el proceso de aritmetización de la sintaxis de un lenguaje formal. En concreto, lo haremos para la Aritmética de Peano, que resulta ser mucho más cómoda que PRA, y cuya signatura es  $\mathcal{L}_{PA} = \{0, s, +, \times\}$ , donde  $s$  es un predicado unario. En la interpretación prevista para estos símbolos,  $s(x)$  devuelve el sucesor de  $x$  (es decir,  $x + 1$ ), y los otros tres se interpretan de la forma usual.

Como ya se adelantó en la Sección 1.3, lo primero es asignar a cada expresión formal un número natural, que recibe el nombre de *número de Gödel*. Esto no solo lo haremos para las fórmulas, sino también para cualquier frase. Comenzamos, por tanto, realizando la asignación del Cuadro I.1, adaptada de [19].

Símbolo	Número de Gödel
$\neg$	1
$\vee$	3
$\wedge$	5
$\rightarrow$	7
$\exists$	9
$\forall$	11
$=$	13
0	15
$s$	17
$+$	19
$\times$	21
(	23
)	25
$x_n$	$25 + 2n$ con $n = 1, 2, 3 \dots$

Cuadro I.1: Asignación de números de Gödel a los símbolos sintácticos.

En la notación de Quine introducida en la Sección 3.1, tendríamos  $\ulcorner \neg \urcorner = 1$ ,  $\ulcorner \vee \urcorner = 3$ , etc. El

siguiente paso será hacer lo mismo con frases de más de un símbolo. Tomemos, por tanto, una frase  $b_1 b_2 \cdots b_n$  con  $n > 1$ , y donde cada  $b_i$  es un símbolo. Para asignarle un número, denotemos por  $g(b)$  al número de Gödel del símbolo  $b$ , y por  $p_n$  al  $n$ -ésimo número primo. Así, el número  $2^{g(b_1)} 3^{g(b_2)} \cdots p_n^{g(b_n)}$  cumple lo exigido.

Como vemos, dado un número que sea el número de Gödel de alguna frase, podemos deducir de qué frase se trata. Si es impar, claramente es uno de los símbolos en la lista del Cuadro I.1. Si es par, entonces es una frase de varios símbolos, y para saber cuáles intervienen y en qué orden solo hay que hacer su factorización en primos.

La gran utilidad de haber hecho esto es que ahora, cualquier propiedad sintáctica sobre una expresión formal, podrá formularse como una propiedad aritmética de su número de Gödel. Veamos esto con un ejemplo sencillo. Consideremos la fórmula  $\neg(0 = 0)$ , y la propiedad sintáctica de que su primer símbolo es la negación  $\neg$ . El número de Gödel asociado es  $2^1 3^{23} 5^{15} 7^{13} 11^{15} 13^{25}$ , al que, de forma más breve, llamaremos  $a$ . La propiedad de que su primer símbolo sea  $\neg$ , se traduce como que el exponente del menor primo (es decir, 2) en su factorización en primos sea 1. Ahora que ya hemos hecho la traducción a una propiedad aritmética, no es difícil formularla en el propio lenguaje  $\mathcal{L}_{PA}$ . En concreto, la propiedad anterior es equivalente a que  $a$  sea divisible entre 2, pero no entre  $2^2 = 4$ , pero ser divisible significa que existe un número  $b$  tal que  $a = 2 \times b$  y no existe ningún otro  $c$  cumpliendo  $a = 4 \times c$ . Así, en PA podemos escribir:

$$\exists x \left( \overbrace{s(\cdots s(0)\cdots)}^{a \text{ veces}} = s(s(0)) \times x \right) \wedge \nexists x \left( \underbrace{s(\cdots s(0)\cdots)}_{a \text{ veces}} = s(s(s(s(0)))) \times x \right).$$

Llegados a este punto, podríamos preguntarnos si existe algún límite en la aritmetización de las propiedades sintácticas, es decir, ¿otras propiedades más complejas como “ser una fórmula”, “ser un teorema” o “ser una demostración de” también pueden expresarse en  $\mathcal{L}_{PA}$ ?, y si pueden, ¿son demostrables en PA? En el artículo de 1931 en el que Gödel presenta sus teoremas de incompletitud, se demuestra el siguiente resultado (adaptado al lenguaje actual).

**Lema I.1** (de Correspondencia [21, p. 73]). *Cualquier verdad primitiva recursiva, codificada como una frase formal, es un teorema en PM.*

Las verdades primitivas recursivas a las que hace referencia el lema son un subconjunto de las afirmaciones verdaderas sobre el lenguaje formal que realizamos desde el metalenguaje. En concreto, son aquellas cuya función característica (que devuelve un valor si la afirmación es verdadera y otro si es falsa) es primitiva recursiva. Las funciones primitivas recursivas son las que se han definido por recursión o composición, aplicadas una cantidad finita de veces, y partiendo de funciones básicas (o primitivas) como el producto o la suma. Para una definición más precisa ver [25]. Por otro lado, la Aritmética de Peano es algo más débil que la teoría PM (siglas de

---

*Principia Mathematica*) con la que trabajaba Gödel pero, aun así, el resultado sigue siendo cierto para PA [25, p. 116]. De hecho, en PA pueden expresarse todas las funciones primitivas recursivas, y PRA puede entenderse como una restricción de PA a estas funciones.

Veamos entonces lo que ocurre con la propiedad “se una demostración de”. Necesitamos ahora una forma de codificar conjuntos ordenados de frases, asignándoles un número de Gödel, de forma que la relación anterior sea binaria. Para ello, podemos volver a usar la fórmula  $2^{g(c_1)}3^{g(c_2)}\dots p_n^{g(c_n)}$ , donde cada  $c_i$  es la frase que se encuentra en la posición  $i$ . Vemos que no habrá confusión, pues siempre que en la descomposición en primos de un número los exponentes sean pares, estará representando un conjunto de frases, y si son impares, será una única frase. Para comprobar si un conjunto de fórmulas es una demostración de otra, en vista de la Definición 1.4, parece razonable pensar que puede usarse una función primitiva recursiva, y de hecho es así, aunque no lo probaremos aquí. La demostración puede encontrarse, de nuevo, en [25], donde también se comprueba que otras propiedades como “ser un término” o “ser una fórmula” pueden entenderse como funciones primitivas recursivas. Finalmente, tenemos que “ser una demostración de” puede codificarse como una relación aritmética, que, por el Lema de Correspondencia, es demostrable cuando es cierta. Esta relación es, de hecho, central en la demostración del Primer Teorema de Incompletitud de Gödel.



## Anexo II

# Explorando los ordinales

En la Sección 2.3 hemos definido algunas operaciones aritméticas que nos permiten construir sin dificultad ordinales muy grandes (en el sentido de la relación de orden  $\in$ ). Sin embargo, el usar estas operaciones no nos permite ver, de forma explícita, cómo los axiomas intervienen en su construcción. Aquí, siguiendo el espíritu de las exposiciones en [23] y [28], veremos explícitamente cómo obtener ordinales cada vez mayores, intentando dar una idea de la inmensidad de la clase **Ord**.

Si nos fijamos en las Definiciones 2.34, 2.35 y 2.36, vemos que la exponenciación realmente se define a partir del producto, y este a partir de la suma, y es que solo necesitamos las herramientas usadas en la suma de ordinales para avanzar en **Ord**. Estas son las operaciones sucesor y supremo, esta última combinada con el Axioma de la Sustitución. Es evidente que los axiomas justifican la existencia del sucesor de un ordinal, por lo que, partiendo del cero, es sencillo obtener los ordinales finitos. Para alcanzar  $\omega$  es necesario el Axioma del Infinito, ya que ningún número finito de uniones finitas devuelve un conjunto infinito. Aplicando, de nuevo, la operación sucesor, podemos alcanzar cualquier ordinal de la forma  $\omega + n$  con  $n$  un número natural. Ahora bien, para llegar a  $\omega \cdot 2$  necesitamos un nuevo método que, como ya se indicó en la Definición 2.34, consiste en usar el Axioma de la Sustitución con la función  $H(\delta) = \omega + \delta$  siendo  $\delta \in \omega$ , que asegura la existencia del conjunto  $\{\omega + \delta : \delta \in \omega\}$ , para luego tomar su supremo (unión). Este proceso puede repetirse para construir cualquier  $\omega \cdot n$  con  $n$  natural. De hecho, el Axioma de la Sustitución nos permite ir mucho más allá, ya que otra función que podemos considerar es  $G(\delta) = \omega \cdot \delta$  con  $\delta \in \omega$ , obteniendo así el conjunto  $\{\omega \cdot \delta : \delta \in \omega\}$ , cuya unión es  $\omega^2$ . Haciendo algo similar con todos los  $\omega^n$ , llegamos al ordinal  $\omega^\omega$ , y esto no acaba aquí. Podemos considerar también (usando una función algo más complicada) el conjunto  $\{\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega} \dots\}$ , cuyo límite podríamos escribir como

$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}$

aunque es común denotarlo por  $\epsilon_0$ . Por supuesto, podríamos continuar con el proceso, tomando sucesores y usando el Axioma de la Sustitución para alcanzar ordinales límite. De hecho, podríamos definir nuevas operaciones, como la tetración, teniendo así acceso a notación que nos permitiese representar ordinales incluso mayores. Sin embargo, como siempre es posible ir más allá, no parece que realmente consigamos algo haciendo esto.

Aunque parezca que hemos avanzado mucho en **Ord**, realmente, hasta este punto, solo hemos hablado de ordinales numerables (excluyendo los finitos). En cada uno de los pasos que hemos dado, o hemos obtenido un conjunto con cardinalidad igual que otro ya construido (al usar el Axioma de la Sustitución), es decir, numerable, o hemos tomado la unión de una cantidad finita (operación sucesor) o numerable (operación supremo) de conjuntos numerables. De hecho, para cada uno de los ordinales anteriores, podemos encontrar un subconjunto de  $\mathbb{Q}$  tal que, con el orden usual, le sea isomorfo. No hay más que aplicar el proceso inductivo de la siguiente demostración.

**Teorema II.1.** *Todo ordinal numerable (o finito) es isomorfo a algún subconjunto de  $\mathbb{Q}$ .*

*Demostración.* Usaremos inducción transfinita, aunque restringida a los ordinales numerables. En concreto, demostraremos que cada ordinal numerable  $\alpha$  es isomorfo a algún subconjunto de  $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Para el caso  $\alpha = \omega$ , no hay más que coger el subconjunto  $\{1 - \frac{1}{n} : n = 2, 3, 4, \dots\}$ . Además, este isomorfismo induce también otros para los ordinales finitos. Supongamos ahora que  $\alpha = \beta + 1$ , y se tiene un isomorfismo entre  $\beta$  y  $S \subset (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Entonces, el siguiente subconjunto es isomorfo a  $\alpha$ :

$$\frac{1}{2}S \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

Donde, como puede suponerse, siendo  $X \subset \mathbb{Q}$  y  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,  $a + bX = \{a + bx : x \in X\}$ .

Veamos ahora el caso en el que  $\alpha$  es un ordinal límite y, para todo  $\beta < \alpha$ , existe un isomorfismo con algún subconjunto de  $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ . Como  $\alpha$  es numerable, podemos escribir  $\alpha$  como una sucesión creciente de ordinales de la forma  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots\}$ , donde  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots$ . Llamaremos  $S_1$  al subconjunto al que es isomorfo  $\beta_1$ ,  $S_2$  al correspondiente a  $\beta_2 \setminus \beta_1$ ,  $S_3$  al correspondiente a  $\beta_3 \setminus \beta_2$ , y así para cada  $S_i$ . Ahora, un subconjunto de  $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$  isomorfo a  $\alpha$  es

$$\frac{1}{2}S_1 \cup \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4}S_2 \right) \cup \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{8}S_3 \right) \cup \left( \frac{7}{8} + \frac{1}{16}S_4 \right) \cup \dots$$

Como vemos, lo que hemos hecho es dividir  $\alpha$  en subconjuntos disjuntos dos a dos (los  $S_i$ ), y luego les hemos asociado los intervalos  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ , etc.  $\square$

Sin embargo, tenemos otro método para obtener ordinales incluso mayores que los que hemos construido. Mayores que cualquier límite de cualquier conjunto que pudiésemos construir con los métodos presentados. Recordando el Teorema 2.42 (donde usamos el Axioma de las Partes), sabemos que existe un ordinal de cardinalidad mayor que cualquier ordinal numerable,  $\aleph_1$ . De hecho, con este teorema ahora podemos dar saltos mucho más grandes, cambiando a cardinalidades mayores en cada paso. De esta forma, y como ya hicimos con los ordinales, podemos ir avanzando por el sistema de álefs.

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots, \aleph_{\omega \cdot 2}, \dots, \aleph_{\omega^\omega}, \dots, \aleph_{\epsilon_0}, \dots, \aleph_{\aleph_1}, \dots$$

Otra vez, nos encontramos en la misma situación, y es que los únicos límites a los ordinales que podamos escribir los pone la notación. Aun así, ¿no existe ninguna forma de concebir ordinales incluso mayores?

Pensemos en lo que ocurriría con una teoría de conjuntos sin el Axioma del Infinito. Existirían, por supuesto, los ordinales finitos, y  $V_\omega$  estaría cerrado bajo todos los axiomas considerados (partes, sustitución, unión, etc.). De hecho,  $V_\omega$ , construido en otra teoría más fuerte, sería un modelo de esta teoría de conjuntos.

**Teorema II.2** ([14, Teorema II.2.14]).  *$V_\omega$  es un modelo de ZFC sin el Axioma del Infinito.*

No es hasta la introducción de  $\omega$  mediante un axioma, esto es, la introducción de un nuevo método de construcción de ordinales, que podemos avanzar más allá en **Ord**. Algo similar puede ocurrir con los axiomas de ZFC. Podríamos establecer, usando un nuevo axioma, la existencia de un ordinal superior a todos los ordinales construidos usando las herramientas de ZFC. Un ordinal de este tipo recibe el nombre de *cardinal inaccesible*, ya que no puede alcanzarse sin postular su existencia (y debe ser evidentemente un cardinal). Además, tal y como ocurría con  $V_\omega$ , se tiene lo siguiente.

**Teorema II.3** ([9, Lema 12.13]). *Sea  $\theta$  un cardinal inaccesible,  $V_\theta$  es un modelo de ZFC.*

La existencia de tales cardinales no puede demostrarse en ZFC, ya que entonces el anterior teorema contradiría el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. Dejando atrás los cardinales inaccesibles, existe toda una serie de axiomas de grandes cardinales, ampliando cada vez más la clase **Ord** (para una buena introducción informal, ver [23, *Excursion I, Large Cardinals*]). Al ampliar la teoría de conjuntos cada vez con axiomas más potentes, aumenta el número de fórmulas que podemos demostrar. Tanto es así que existe un tipo de cardinales, llamados cardinales de Reinhardt, que al afirmar su existencia estamos alcanzando el poder máximo de demostración, es decir, podemos demostrar cualquier fórmula, ya que este axioma es inconsistente con ZFC, tal y como probó Kunen en [13].



# Bibliografía

- [1] Boolos, G. (1971). The iterative conception of set. *Journal of Philosophy*, 68(8):215–231.
- [2] Cellucci, C. (2022). *The Theory of Gödel*. Synthese Library. Springer International Publishing.
- [3] Deaño, A. (2001). *Introducción a la lógica formal*. Alianza Manuales. Alianza.
- [4] Ferreirós, J. (2023). The Early Development of Set Theory. In Zalta, E. N. and Nodelman, U., editors, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Summer 2023 edition.
- [5] Giaquinto, M. (2004). *The Search for Certainty: A Philosophical Account of Foundations of Mathematics*. Clarendon Press.
- [6] Gödel, K. (1938). The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 24 12:556–7.
- [7] Halbeisen, L. and Krapf, R. (2020). *Gödel’s Theorems and Zermelo’s Axioms: A Firm Foundation of Mathematics*. Springer International Publishing.
- [8] Ivorra Castillo, C. (2020). *Lógica Matemática*. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/LM.pdf>.
- [9] Jech, T. (2007). *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg.
- [10] Jech, T. (2008). *The Axiom of Choice*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications.
- [11] Kaye, R. (1991). *Models of Peano Arithmetic*. Oxford logic guides. Clarendon Press.
- [12] Koellner, P. (2009). On reflection principles. *Annals of Pure and Applied Logic*, 157(2):206–219. Kurt Gödel Centenary Research Prize Fellowships.
- [13] Kunen, K. (1971). Elementary embeddings and infinitary combinatorics. *Journal of Symbolic Logic*, 36(3):407–413.
- [14] Kunen, K. (2011). *Set Theory*. Studies in logic. College Publications.
- [15] Kunen, K. (2014). *Set Theory An Introduction To Independence Proofs*. Elsevier Science.
- [16] Lear, J. (1977). Sets and semantics. *Journal of Philosophy*, 74(2):86–102.

- 
- [17] Maddy, P. (1988). Believing the axioms. *The Journal of Symbolic Logic*, 53(2):481–511.
- [18] Marker, D. (2006). *Model Theory : An Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.
- [19] Mendelson, E. (2015). *Introduction to Mathematical Logic, Sixth Edition*. Discrete Mathematics and Its Applications. Taylor & Francis.
- [20] Moore, G. H. (2011). Early history of the generalized continuum hypothesis: 1878-1938. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 17(4):489–532.
- [21] Nagel, E. and Newman, J. (1989). *Gödel's Proof*. Routledge Classics Series. Routledge.
- [22] Raatikainen, P. (2022). Gödel's Incompleteness Theorems. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Spring 2022 edition.
- [23] Rucker, R. (2019). *Infinity and the Mind: The Science and Philosophy of the Infinite*. Princeton Science Library. Princeton University Press.
- [24] Sarbadhikari, H. and Srivastava, S. (2017). *A Course on Basic Model Theory*. Springer Singapore.
- [25] Smith, P. (2013). *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge Introductions to Philosophy. Cambridge University Press, 2 edition.
- [26] Smullyan, R. and Fitting, M. (2010). *Set Theory and the Continuum Problem*. Dover books on mathematics. Dover Publications.
- [27] Srivastava, S. (2013). *A Course on Mathematical Logic*. Universitext. Springer New York.
- [28] Stillwell, J. (2010). *Roads to Infinity: The Mathematics of Truth and Proof*. AK Peters/CRC Recreational Mathematics Series. CRC Press.
- [29] Wang, H. (2016). *From Mathematics to Philosophy (Routledge Revivals)*. Taylor & Francis.
- [30] Yao, B. (2023). *Set Theory with Urelements*. PhD thesis, University of Notre Dame.
- [31] Zach, R. (2023). Hilbert's Program. In Zalta, E. N. and Nodelman, U., editors, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2023 edition.

# Índice alfabético

<b>A</b>	
admisible .....	3
ámbito .....	2
aritmetización .....	9
asignación .....	5
axioma	
<i>Axioma de Constructibilidad</i> .....	50
<i>Axioma de Existencia del Conjunto</i>	
<i>Vacío</i> .....	13
<i>Axioma de Extensionalidad</i> .....	12
<i>Axioma de la Elección</i> .....	14
<i>Axioma de la Sustitución</i> .....	14
<i>Axioma de la Unión</i> .....	13
<i>Axioma de las Partes</i> .....	13
<i>Axioma de los Pares</i> .....	13
<i>Axioma de Regularidad</i> .....	14
<i>Axioma de Separación</i> .....	12
<i>Axioma del Infinito</i> .....	14
<b>B</b>	
buen orden .....	17
<b>C</b>	
cardinal .....	27
cardinalidad .....	27
cerrado en subfórmulas .....	46
clase .....	16
<b>L</b> .....	45
<b>Ord</b> .....	21
<i>propia</i> .....	16
<b>R</b> .....	16
<b>V</b> .....	16

<b>WF</b> .....	31
clausura	
<i>de una fórmula</i> .....	2
<i>transitiva</i> .....	33
codominio .....	16
colapso transitivo .....	34
conjunto	
<i>bien fundamentado</i> .....	31
<i>bien ordenado</i> .....	17
<i>constructible</i> .....	45
<i>finito</i> .....	23
<i>infinito</i> .....	23
<i>transitivo</i> .....	20
<i>vacío</i> .....	13
consistencia relativa .....	38

## D

definible .....	7
<i>A-definible</i> .....	7
definición de verdad .....	37
demostración .....	4
diferencia conjuntista .....	15
dominio .....	15

## E

elemento	
<i>minimal</i> .....	32
<i>mínimo</i> .....	17
esquemas axiomáticos .....	3
exponenciación	
<i>de cardinales</i> .....	28
<i>de ordinales</i> .....	25

## F

fórmula.....2	jerarquía acumulativa ..... 31
$\Delta_0$ ..... 39	
<i>absoluta entre</i> ..... 39	<b>L</b>
<i>absoluta para</i> ..... 39	lenguaje .....2
<i>cerrada</i> ..... 2	$\mathcal{L}_A$ ..... 7
<i>cierta</i> ..... 6	$\mathcal{L}_G$ ..... 7
<i>demostrable</i> ..... 3	$\mathcal{L}_{OT}$ ..... 4
<i>existencial</i> ..... 47	$\mathcal{L}_{TC}$ ..... 11
<i>verdadera</i> ..... 6	$\mathcal{L}$ -estructura ..... 5
frase .....1	$\mathcal{L}$ -interpretación ..... 5
<i>bien formulada</i> ..... 2	
función ..... 16	<b>M</b>
<i>colapso transitivo</i> ..... 34	modelo ..... 6
<i>estrictamente creciente</i> ..... 17	modus ponens ( <b>MP</b> ) ..... 3
<i>que preserva el orden</i> ..... 17	
<i>rango</i>	<b>N</b>
<i>de un elemento de <math>\mathbf{WF}</math></i> ..... 31	no numerable..... 28
<i>L-rango</i> ..... 49	numerable ..... 28
<i>sucesor</i> ..... 22	números naturales ..... 23
<i>supremo</i> ..... 22	
	<b>O</b>
<b>G</b>	orden total ..... 17
generalización ( <b>G</b> )..... 3	ordinal ..... 20
gödelización ..... 9	<i>infinito</i> ..... 23
	<i>límite</i> ..... 22
<b>H</b>	<i>sucesor</i> ..... 22
hipótesis	ordinales
<i>Hipótesis del Continuo (HC)</i> ..... 30	<i>de Von Neumann</i> ..... 19
<i>Hipótesis del Continuo Generalizada</i>	<i>finitos</i> ..... 23
<i>(HCG)</i> ..... 30	
	<b>P</b>
<b>I</b>	par ordenado ..... 15
intersección..... 15	parámetros de una definición ..... 7
<i>de dos conjuntos</i> ..... 14	partes de un conjunto ..... 13
isomorfismo ..... 17	poder de demostración ..... 38
isomorfo ..... 17	producto
	<i>cartesiano, <math>\times</math></i> ..... 15
<b>J</b>	<i>de cardinales, <math>\otimes</math></i> ..... 28

de ordinales,  $\cdot$  ..... 25

**R**

rango de una función ..... 15  
 relación ..... 15  
     *aritmética* ..... 41  
     *bien fundamentada* ..... 32  
     *de tipo conjunto* ..... 34  
     *extensional* ..... 52  
 relativización ..... 36

**S**

segmento inicial ..... 18  
 semántica ..... 1  
 semiótica ..... 1  
 signatura ..... 2  
 símbolos lógicos ..... 2  
 sintaxis ..... 1  
 sistema de álefs ..... 28  
 subestructura ..... 7  
     *elemental* ..... 7  
 subfórmula ..... 2  
 suma  
     *de cardinales*,  $\oplus$  ..... 28  
     *de ordinales*,  $+$  ..... 24  
 sustitución ..... 3

**T**

teorema ..... 3  
     *Paradoja de Burali-Forti* ..... 21  
     *Paradoja de Cantor* ..... 16  
     *Primer Teorema de Incompletitud de Gödel* ..... 10  
     *Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel* ..... 10  
     *Teorema de Cantor* ..... 27  
     *Teorema de Compacidad* ..... 8

*Teorema de Completitud, 1ª forma* ... 8  
*Teorema de Completitud, 2ª forma* ... 9  
*Teorema de Condensación de Gödel* . 53  
*Teorema de Indefinibilidad de la Verdad de Tarski* ..... 37  
*Teorema de Inducción Transfinita* ... 23  
*Teorema de Recursión Transfinita* ... 23  
*Teorema de Recursión Transfinita en Relaciones Bien Fundamentadas* . 34  
*Teorema de Reflexión* ..... 47  
*Teorema de Schröder-Bernstein* ..... 26  
*Teorema de Solidez* ..... 8  
*Teorema Descendiente de Löwenheim-Skolem* ..... 9  
*Teorema Descendiente de Löwenheim-Skolem, formalizado en ZFC* ..... 53  
 teoría ..... 4  
     *completa* ..... 9  
     *consistente* ..... 8  
 término ..... 2  
 tipo de (buen) orden ..... 19

**U**

unión ..... 13  
     *de dos conjuntos* ..... 13  
 universo ..... 5  
     *constructible* ..... 45  
     *de Von Neumann* ..... 31

**V**

variable  
     *libre* ..... 2  
     *ligada* ..... 2

**Z**

Z ..... 16

ZF<sup>-</sup> .....16

ZF ..... 16

ZFC .....16