



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

# Aplicaciones del Análisis Matemático en la Economía

Jesús Veiga Morandeira

2021/2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Grado**

# Aplicaciones del Análisis Matemático en la Economía

Jesús Veiga Morandeira

Julio 2022

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Conocimiento: Análisis Matemático</b>
<b>Título: Aplicaciones del Análisis Matemático en la Economía</b>
<b>Breve descripción del contenido</b>
<p>El objetivo de este trabajo será el estudio de algunas de las numerosas aplicaciones que tiene el Análisis Matemático en el campo de la Economía. El trabajo constará de dos partes diferenciadas.</p> <p>El objetivo de la primera parte será la realización de la prueba del teorema de Nash de teoría de juegos. Para eso, se estudiará la teoría de las aplicaciones multivaluadas para demostrar el teorema de punto fijo de Kakutani, a partir del cual se puede deducir el teorema de Nash.</p> <p>La segunda parte del trabajo consistirá en un estudio de modelos económicos expresados en términos de ecuaciones diferenciales o en diferencias, en la cual se analizará la importancia de los modelos propuestos y se estudiará de modo cualitativo el comportamiento de las soluciones de los mismos.</p>



# Índice general

<b>Resumen</b>	VII
<b>Introducción</b>	IX
<b>1. Teorema de Nash</b>	1
1.1. Introducción y objetivos	1
1.2. Definiciones y conceptos previos	1
1.3. Demostración del Teorema de Kakutani	4
1.4. Teorema de Nash	11
1.4.1. Introducción	11
1.4.2. Contexto y objetivos	11
1.4.3. Juegos no cooperativos en forma estratégica	12
1.4.4. Demostración del teorema de Nash	14
<b>2. Estudio de Modelos Económicos.</b>	19
2.1. Introducción y objetivos	19
2.2. Modelo de Solow	19
2.2.1. Supuestos del modelo	20
2.2.2. Estudio analítico del modelo	28
2.3. Modelo de crecimiento endógeno. Modelo AK	36
2.3.1. Introducción	36
2.3.2. Supuestos del modelo	36
2.3.3. Diferencias con el modelo de Solow	38
<b>Bibliografía</b>	41



## **Resumen**

En el primer capítulo de este trabajo se demostrará el teorema de Nash a partir del teorema de punto fijo de Kakutani, haciendo uso de resultados vistos en la materia de Teoría de Juegos. En el segundo capítulo se introducirá y estudiará analíticamente el modelo económico de Solow-Swan con la función de producción de Cobb-Douglas. Finalmente se introducirá el modelo AK de Sergio Rebelo y se analizarán las principales diferencias que tiene con respecto al de Solow-Swan.

## **Abstract**

In the first chapter of this work, the Nash theorem will be demonstrated from the Kakutani fixed point theorem, making use of results seen in the subject of Game Theory. In the second chapter, the Solow-Swan economic model with the Cobb-Douglas production function will be introduced and analytically studied. Finally, the Sergio Rebelo AK model will be introduced and the main differences it has with respect to the Solow-Swan will be analyzed.



# Introducción

Este trabajo se divide en dos partes diferenciadas cuyo denominador común es la aplicación del Análisis Matemático en el ámbito económico. El objetivo principal del primer capítulo será la demostración del teorema de Nash y el del capítulo 2 será el estudio analítico del modelo económico de Solow-Swan.

Históricamente, el primer precursor de la teoría de juegos fue Augustin Cournot con su estudio del duopolio en el año 1838. En ese análisis, Cournot introduce un concepto muy próximo a lo que se conoce como equilibrio de Nash. No fue hasta el año 1950, cuando John Forbes Nash publicó un artículo acerca de el concepto de equilibrio.

Veamos detalladamente lo que se trata en el capítulo 1 de este trabajo. En la primera sección se comienza introduciendo una notación referida a los conjuntos de partes de un conjunto, que serán una constante a lo largo de todo el capítulo porque se trabajará continuamente con funciones multivaluadas. A continuación, se define el concepto de función multivaluada y una serie de conceptos que caractericen estas funciones, entre los que destaca el de semicontinuidad superior, que será una condición pedida en varias de las hipótesis de los resultados tratados en el capítulo. La segunda sección del capítulo es la referida a demostrar el teorema de punto fijo de Kakutani a partir del teorema de Schauder y el teorema de Cellina. Al principio de la sección se introduce el teorema de Schauder, un teorema que bajo ciertas condiciones asegura la existencia de un punto fijo, de hecho es la versión del teorema de Kakutani para funciones univaluadas. Tras el teorema de Schauder, se introduce el teorema de Cellina, cuya idea radica en construir una sucesión de funciones univaluadas que aproximen la función multivaluada y, en consonancia con el teorema de Schauder, en el que se demuestra que cada una de las funciones univaluadas tiene un punto fijo, se llega a demostrar que la sucesión de puntos fijos converge a un punto fijo de la multivaluada; dejando así demostrado el teorema de Kakutani. Cabe destacar que la demostración que se hace en este trabajo no fue la demostración original del teorema, pues se hace uso del teorema de Cellina, que es bastante posterior a la demostración de Shizuo Kakutani. Para finalizar la sección se dan dos ejemplos de aplicaciones del teorema de Kakutani. En la última sección de este primer capítulo demostraremos el teorema de

Nash. Se introducen una serie de definiciones y conceptos básicos de Teoría de Juegos, seguidos de un par de ejemplos que los clarifican. Se define el concepto de equilibrio de Nash y se demuestra el teorema de Nash, que es un teorema que asegura que bajo ciertas condiciones, un juego en forma estratégica posee al menos un equilibrio de Nash. La prueba del teorema de Nash se fundamenta en el uso del teorema de punto fijo de Kakutani.

Por otro lado, en el capítulo 2 se tratará el modelo económico de Solow en profundidad y se comparará con el modelo AK de Rebelo, un modelo contrapuesto.

A pesar de que hay evidencias del uso de las matemáticas en el análisis económico en el siglo XVII, no fue hasta el siglo XIX cuando se comenzaron a ver los primeros modelos económicos formales. Los primeros modelos económicos capaces de explicar el comportamiento económico estuvieron impulsados por el uso del cálculo diferencial.

Analicemos detalladamente el contenido de este segundo capítulo. Comenzamos introduciendo los supuestos del modelo de Solow, que nos permitirán entender cómo funciona la producción en un país de una forma mucho más sencilla. Para hacer la formulación general del modelo, trataremos su ecuación fundamental y la función de producción asociada a ella, pero antes hablaremos de lo que es la renta y el capital de un país. Deduciremos la ecuación fundamental de Solow a partir de los supuestos del modelo, primero para una función de producción asociada general y después la particularizaremos a la función de producción Cobb-Douglas, que es la que se usará en este estudio. Una vez que se han detallado los conceptos fundamentales del modelo, pasaremos al estudio analítico del mismo. Comenzaremos centrándonos en las dos predicciones que se proponen, la ausencia de crecimiento económico a largo plazo (llegando a un estado estacionario) y la convergencia económica entre países. La primera de las predicciones se demuestra tanto gráfica como matemáticamente y se comprueba que la segunda no se ajusta a la realidad. Después se analiza la regla de oro de acumulación del capital, que básicamente determina cuál de los estados estacionarios es el mejor. Para finalizar el análisis, se estudia cómo el modelo explica el crecimiento económico a corto plazo y cómo es incapaz de explicar el crecimiento a largo plazo. Por último, se introduce el modelo AK de Rebelo y se estudia como explica el crecimiento económico. De dicho estudio se obtienen una serie de diferencias con el modelo de Solow que posteriormente se detallan.

# Capítulo 1

## Teorema de Nash

### 1.1. Introducción y objetivos

Dedicaremos la primera parte de este capítulo a introducir y posteriormente demostrar el teorema de Kakutani, un resultado que garantiza la existencia de puntos fijos de operadores multivaluados. La demostración del teorema de Kakutani se fundamentará en el uso de la sucesión de aproximaciones de Cellina y del teorema de punto fijo de Schauder, ambos resultados que se desarrollarán a lo largo del capítulo. En este trabajo se ha optado por demostrar el teorema de Kakutani siguiendo la demostración que hizo Cellina y que se puede consultar en la Sección 1.2 del Capítulo 1 de [3]. Cabe destacar que la demostración original que se hizo del teorema de Kakutani fue bastante anterior a que Cellina hiciera la suya, y se puede encontrar en [4]. Tras finalizar la demostración del teorema de Kakutani, usaremos dicho resultado para demostrar el teorema de Nash. Antes de demostrar Nash, se tratarán algunos conceptos y resultados necesarios para la demostración y relacionados con dicho teorema, y, posteriormente, también se darán unos ejemplos breves que ilustren estos resultados. Como complemento a [3], para la definición de ciertos conceptos y para alguna de las demostraciones de los resultados del capítulo también nos hemos apoyado en [2].

### 1.2. Definiciones y conceptos previos

Introduzcamos la notación que vamos a emplear a lo largo de este capítulo. Denotaremos por  $\mathcal{P}(E) = \{Y \subset E \text{ tal que } Y \neq \emptyset\}$  al conjunto de partes de  $E$ , siendo  $E$  un espacio topológico. Además, trabajaremos con los siguientes subconjuntos de  $\mathcal{P}(E)$ :

1.  $\mathcal{P}_{cl}(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y \text{ cerrado}\}$ ,

2.  $\mathcal{P}_{cv}(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y \text{ convexo}\}$ ,
3.  $\mathcal{P}_b(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y \text{ acotado}\}$ ,
4.  $\mathcal{P}_{cp}(E) = \{Y \in \mathcal{P}(E) : Y \text{ compacto}\}$ .

Expondremos a continuación ciertas definiciones y una serie de conceptos y teoremas previos que necesitaremos a posteriori para poder abordar la demostración del teorema de Kakutani.

En primer lugar, introduciremos el concepto de función multivaluada. De modo informal, se puede decir que si  $X$  e  $Y$  son dos espacios topológicos tales que a cada  $x \in X$  se le asocia un subconjunto no vacío  $\phi(x) \subset Y$ ; entonces  $\phi$  es una función multivaluada de  $X$  en  $Y$ . A continuación daremos una definición más formal de este concepto.

**Definición 1.1.** Se define una función multivaluada  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  como un subconjunto  $\varphi \subset X \times Y$  que satisface la siguiente condición:

$$\forall x \in X, \exists y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in \varphi.$$

**Ejemplo 1.2.** La raíz  $n$ -ésima de un número complejo es una función multivaluada, dado que tiene  $n$  valores distintos no periódicos.

**Ejemplo 1.3.** Otro ejemplo de función multivaluada es,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ [-1, 1] & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Definimos a continuación el concepto de semicontinuidad superior.

**Definición 1.4.** Se dirá que una función multivaluada  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  es semicontinua superiormente en un punto  $x_0 \in X$  cuando para cada subconjunto abierto  $V \subset Y$  con  $\varphi(x_0) \subset V$ , existe un entorno  $U$  de  $x_0$  tal que para todo  $x \in U$ ,  $\varphi(x) \subset V$ .

Nótese que esta definición es esencialmente la misma que la definición clásica de función, a la que nos referiremos en este trabajo como función univaluada, salvo por el hecho de que en la univaluada se pide que para cada  $x$  exista un único  $y \in Y$  tal que  $(x, y) \in \varphi$ .

En el caso de que  $f$  sea una función univaluada, la definición anterior se puede reescribir del siguiente modo:

**Definición 1.5.** Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  será semicontinua superiormente en un punto  $x_0$  si y solo si  $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$ .

La semicontinuidad es una propiedad de las funciones que no es tan fuerte como el concepto de continuidad, tal y como se puede ver en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.6** (Función univaluada). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Podemos observar que es semicontinua superiormente en  $x = 0$  dado que

$$\limsup_{x \rightarrow 0} f(x) \leq f(0) = 1,$$

mientras que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ y } \nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

por lo que no sería continua.

Aportemos ahora otro ejemplo de función semicontinua superiormente, pero en este caso, para una función multivaluada.

**Ejemplo 1.7** (Función multivaluada). Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0, \\ 3 & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Entonces, definamos  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  como:

$$\varphi(x) = [0, f(x)].$$

Siendo  $p \in \mathbb{R}$ , demostremos que  $\varphi$  será semicontinua superiormente en  $p$ .

Probémoslo por ejemplo para  $p < 0$ , siendo análogo para  $p > 0$  y  $p = 0$ . Si  $p < 0$ , entonces  $\varphi(p) = [0, 2]$  y, como estamos en  $\mathbb{R}$ , existirá un conjunto abierto  $V$  que contenga a  $\varphi(p)$ . Sea  $V$  un conjunto que cumple tal propiedad, tomemos por ejemplo, el conjunto abierto  $U = (3p, 0)$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $p \in (3p, 0)$  y  $\varphi = [0, 2] \subset V$  para todo  $x \in U$ .

**Definición 1.8.** Una función multivaluada  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  se dirá semicontinua superiormente si lo es para todo  $x \in X$ .

Una definición alternativa a la anterior sería:

**Definición 1.9.** Una función multivaluada  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  se dirá semicontinua superiormente si para todo abierto  $V \subset Y$ , se cumple que  $\varphi^{-1}(V)$  es un abierto en  $X$ .

Es apropiado introducir la siguiente definición dado que en adelante se usará en numerosas ocasiones en lugar de las que acabamos de dar.

**Definición 1.10.** Una función multivaluada  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  se dirá  $\varepsilon - \delta$  semicontinua superiormente en  $x_0$  si para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\varphi(B(x_0, \delta)) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(\varphi(x_0))$ .

**Proposición 1.11.** Sea  $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  una función semicontinua superiormente en  $x_0$ , entonces  $F$  es  $\varepsilon - \delta$  semicontinua superiormente en  $x_0$ .

En ocasiones, es conveniente caracterizar una función multivaluada por su grafo.

**Definición 1.12.** El grafo de una función multivaluada  $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , es el subconjunto de pares  $(x, y)$  donde  $y \in F(x)$ , es decir,

$$gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y \text{ tal que } y \in F(x)\}.$$

**Definición 1.13.** Una función multivaluada  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  se dice cerrada si su grafo es un subconjunto cerrado de  $X \times Y$ .

Las dos siguientes definiciones serán necesarias, dado que uno de los resultados clave en la demostración del teorema de Kakutani, como es el teorema de punto fijo de Schauder, trabajará en espacios de Banach.

**Definición 1.14.** Se dice que un espacio métrico  $(X, d)$  es completo si toda sucesión de Cauchy en  $X$  converge a un elemento de  $X$ .

**Definición 1.15.** Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo en la métrica definida por su norma.

**Ejemplo 1.16.** El espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$  con la norma euclidiana de  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  dada por  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ , es un espacio de Banach.

**Ejemplo 1.17.** Si consideramos el espacio vectorial de las funciones continuas de  $[a, b]$ ,  $\mathcal{C}([a, b])$ , entonces  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|)$  tiene estructura de espacio de Banach, donde  $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .

### 1.3. Demostración del Teorema de Kakutani

Existe una gran variedad de resultados en matemáticas que garantizan que, bajo ciertas condiciones, una función tenga al menos un punto fijo. Por completitud, introducimos a continuación la definición de punto fijo, tanto para aplicación univaluada como multivaluada.

**Definición 1.18.** Un punto  $x$  de un espacio  $X$  se dice punto fijo de una función univaluada  $f : X \rightarrow X$  si  $f(x) = x$ .

**Definición 1.19.** Un punto  $x$  de un espacio  $X$  se dice punto fijo de la función multivaluada  $F : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  si  $x \in F(x)$ .

Además una hipótesis frecuente en los teoremas de punto fijo es la compacidad de la aplicación.

**Definición 1.20.** Una aplicación entre dos espacios topológicos  $F : X \rightarrow Y$  es compacta si lleva conjuntos acotados de  $X$  en conjuntos precompactos de  $Y$  (que son aquellos cuya adherencia es un compacto).

A continuación se enuncia el teorema de Schauder, que es el primero de los dos teoremas clave para la demostración de Kakutani. De hecho, Kakutani es la versión multivaluada del teorema de punto fijo de Schauder.

**Teorema 1.21** (De punto fijo de Schauder). *Sea  $C \neq \emptyset$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach  $X$  y  $K : C \rightarrow C$  una aplicación compacta. Entonces  $K$  tiene un punto fijo.*

*Observación 1.22.* No se demostrará este teorema dado que no es el objetivo de este trabajo, no obstante se puede encontrar su prueba en [\[10\]](#).

Para estar en disposición de probar el siguiente teorema, el teorema de sucesión de aproximaciones de Cellina, necesitaremos definir unos cuantos conceptos previos y detallar la notación que va a ser usada en la prueba de dicho teorema.

**Definición 1.23.** Una función  $g : X \rightarrow Y$  entre dos espacios métricos  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  se dice Lipschitziana si existe una constante  $K > 0$  (constante de Lipschitz) tal que:

$$d_Y(g(x), g(y)) \leq K \cdot d_X(x, y), \text{ para todo } x, y \in X.$$

**Definición 1.24.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios métricos en las condiciones de la definición anterior. Diremos que la función  $g : X \rightarrow Y$  es localmente Lipschitziana si para todo punto de  $X$ , existe un entorno donde la función cumple la condición de Lipschitz.

Vamos a introducir a continuación el concepto de  $\varepsilon$ -aproximación que nos permitirá aproximar funciones multivaluadas por univaluadas.

**Definición 1.25.** Sea  $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cp}(Y)$  una función multivaluada,  $Z = X$  y  $\varepsilon > 0$ . Se dice que una función  $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$  es una  $\varepsilon$ -aproximación en el grafo de  $F$  si

$$g_r(f_\varepsilon) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(g_r(F)).$$

La condición  $g_r(f_\varepsilon) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(g_r(F))$ , significa que el grafo de  $f_\varepsilon$  se encuentra en el entorno de radio  $\varepsilon$  del grafo de la función  $F$ . Matemáticamente, esto significa que

$$\forall x \in X \exists y \in X, \exists z \in F(y) \text{ tal que } |x - y| < \varepsilon, |f_\varepsilon(x) - z| < \varepsilon.$$

Geométricamente esto se puede ver en la Figura 1.1, donde una  $\varepsilon$ -aproximación del grafo de  $F$  sería cualquier función univaluada  $f_\varepsilon$  cuyo grafo se encuentre entre las líneas de puntos.

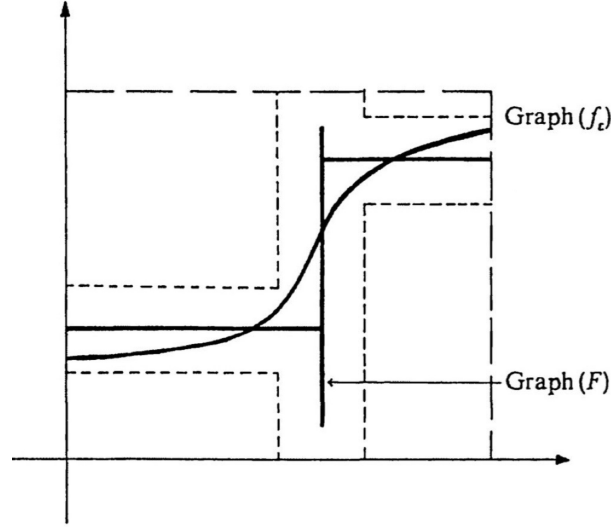


Figura 1.1: Interpretación geométrica de la  $\varepsilon$ -aproximación de una función multivaluada. Gráfico extraído de [2].

Si  $f$  es una  $\varepsilon$ -aproximación en el grafo de  $G$ , entonces usaremos la notación  $f \in a(G, \varepsilon)$ .

**Definición 1.26.** Un espacio  $X$  se dice paracompacto si todo recubrimiento abierto de  $X$  tiene un subrecubrimiento abierto localmente finito.

**Teorema 1.27** (De Stone). *Todo espacio métrico es paracompacto.*

Una de las características más importantes de los espacios paracompactos es que tienen particiones de la unidad asociadas a cualquier subrecubrimiento localmente finito. Se puede encontrar en el capítulo 6 de [12] la prueba de que todo espacio paracompacto admite particiones de la unidad asociadas al subrecubrimiento localmente finito. Definamos la partición de la unidad en este caso.

**Definición 1.28.** Sea  $X$  un espacio topológico paracompacto. Una partición de la unidad en  $X$  es una colección  $\phi$  de funciones continuas de  $X$  en  $\mathbb{R}^+$  tal que, para todo  $x \in X$ ,  $\varphi(x) \neq 0$  para un número finito  $\varphi \in \phi$  y  $\sum_{\varphi \in \phi} \varphi(x) = 1$ .  $\phi$  será localmente finita si para todo  $x \in X$  existe un entorno en el cual todos menos un número finito  $\varphi \in \phi$  se anulan.

Se dice que la partición de la unidad  $\phi$  está subordinada a un recubrimiento  $\gamma$  si y solo si cada  $\varphi \in \phi$  se anula fuera de algún  $U \in \gamma$ .

Se introduce el siguiente teorema previo al de Cellina, porque para la demostración del teorema de Cellina se usará una partición de la unidad subordinada a un subrecubrimiento localmente finito.

**Teorema 1.29.** *Sea  $X$  un espacio métrico. Se puede asociar una partición de la unidad localmente Lipschitziana subordinada a cualquier recubrimiento abierto localmente finito de  $X$ .*

Informalmente, el teorema de Cellina lo que hace es usar una sucesión de aproximaciones de funciones continuas univaluadas para aproximar una sucesión de puntos fijos, que a su vez se aproximen al punto fijo de la función multivaluada.

**Teorema 1.30** (sucesión de aproximaciones de Cellina). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico e  $Y$  un espacio normado. Entonces toda función multivaluada semicontinua superiormente  $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cv, cp}(Y)$  tiene una  $\varepsilon$ -aproximación  $f_\varepsilon \in a(F, \varepsilon)$ , para todo  $\varepsilon > 0$ .*

*Demostración.* Fijado  $\varepsilon > 0$ , sea  $x \in X$  y sea  $\delta = \delta(x)$ , tal que

$$F(\mathcal{B}(x, \delta(x))) \subset \mathcal{B}(F(x), \varepsilon).$$

La familia de las bolas  $\{\mathcal{B}(x, \eta(x))\}_{x \in X}$ , donde  $\eta(x) = \frac{1}{4} \delta(x)$ ; recubre  $X$ . Haciendo uso del teorema 1.27, este recubrimiento tendrá un subrecubrimiento local finito  $\{V_i\}_{i \in I}$  y  $\{\phi_i\}_{i \in I}$  será la correspondiente partición de la unidad. Podemos tomar para cada  $i \in I$  un punto arbitrario  $y_i \in F(V_i)$ . Definimos la función  $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$  como

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} \phi_i(x) \cdot y_i,$$

que es continua por construcción.

Fijamos  $x \in X$ . Por ser  $\{V_i\}_{i \in I}$  un recubrimiento localmente finito de  $X$ , entonces  $x$  pertenece a un número finito de elementos de la familia  $\{V_i\}_{i \in I}$ , que denotaremos por  $V_j$  con  $j = 1, \dots, n$ . Entonces, cada  $V_j$  está contenido en alguna bola  $\mathcal{B}(x_j, \eta(x_j))$  y, por lo tanto,  $x \in \bigcap_{j=1}^n \mathcal{B}(x_j, \eta(x_j))$ . Sea  $k \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\eta_k = \eta(x_k) = \max_{1 \leq j \leq n} \eta(x_j)$ . Tomemos  $x' = x_k$ , así que tendremos que, como  $x \in \bigcap_{j=1}^n \mathcal{B}(x_j, \eta(x_j))$ , entonces  $x \in \mathcal{B}(x', \eta_k)$ , lo cual implica que  $d(x, x_j) < \eta(x_j) \leq \eta_k$ ; de donde podemos deducir que

$$x_j \in \mathcal{B}(x, \eta_k)$$

para todo  $j = 1, \dots, n$ .

Por otro lado, fruto de la desigualdad triangular,

$$d(x_j, x') \leq d(x_j, x) + d(x, x') < \eta_k + \eta_k = 2\eta_k,$$

de donde llegamos a que  $x_j \in \mathcal{B}(x', 2\eta_k)$ .

Por lo tanto, consecuencia de las deducciones anteriores, tendremos

$$\mathcal{B}(x_j, \eta(x_j)) \subset \mathcal{B}(x', 4\eta_k), \quad j = 1, \dots, n.$$

Entonces,

$$y_j \in F(V_j) \subset F(\mathcal{B}(x_j, \eta(x_j))) \subset F(\mathcal{B}(x', 4\eta_k)) \subset \mathcal{B}(F(x'), \varepsilon), \quad j = 1, \dots, n.$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{B}(F(x'), \varepsilon)$  es convexo, entonces  $f_\varepsilon(x) \in \mathcal{B}(F(x'), \varepsilon)$ . Como  $x \in V_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , deducimos que

$$F(x) \subset \mathcal{B}(F(x'), \varepsilon).$$

□

Po tanto, haciendo uso de los teoremas y resultados enunciados y probados previamente, ya podemos demostrar el teorema de Kakutani, que es el paso previo a demostrar el teorema de Nash, el objetivo principal del capítulo.

**Teorema 1.31** (Kakutani). *Sea  $E$  un espacio lineal normado,  $X \in \mathcal{P}_{cv,cp}(E)$ , y  $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cv,cp}(X)$  una función multivaluada semicontinua superiormente. Entonces  $F$  tiene un punto fijo en  $X$ .*

*Demostración.* En virtud del teorema [1.30](#) podemos encontrar una sucesión de funciones continuas  $f_n : X \rightarrow X$  tal que  $f_n \in a(F, \varepsilon) \Leftrightarrow G_r(f_n) \subset \mathcal{O}_\varepsilon(G_r f)$ . Dado que  $X \in \mathcal{P}_{cv,cp}(E)$ ,  $X$  es compacto y convexo, entonces  $f_n : X \rightarrow X$  es compacta, ya que si  $C \subset X$  es acotado,  $\overline{f_n(C)} \subset X$  es un cerrado contenido en un compacto, por lo que  $\overline{f_n(C)}$  es compacto. Como  $f_n$  es compacta para todo  $n \in \mathbb{N}$ , podemos usar el teorema [1.21](#) para garantizar la existencia de  $x_n \in X$ , tal que  $x_n = f(x_n)$ . Por ser  $X$  compacto,  $(x_n)_n$  tiene ciertas subsucesiones convergentes, tales que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}) = x$ , por lo que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k}) = x.$$

Es decir,  $(x_n)_n$  tiene ciertas subsucesiones convergiendo al límite  $x \in F(x)$ . □

Algunos autores dan una formulación alternativa del teorema de Kakutani, que a efectos prácticos es completamente equivalente a la que acabamos de demostrar. Esta formulación es:

**Teorema 1.32.** Sea  $E$  un espacio lineal normado,  $X \in P_{cv,b}(E)$  y  $F : X \rightarrow P_{cv,cp}(X)$  es una función multivaluada semicontinua superiormente con  $F(X)$  compacto. Entonces  $F$  tiene un punto fijo en  $X$ .

*Observación 1.33.* Podemos encontrar la demostración de este resultado en [3].

Para finalizar esta sección, se detallarán un par de ejemplos de aplicaciones del teorema de Kakutani, uno de ellos donde sí se pueda aplicar el teorema de punto fijo y el otro ejemplo donde se omita alguna de las hipótesis del teorema, lo cual implicará que no podamos asegurar la existencia de puntos fijos para la función.

**Ejemplo 1.34.** La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ [0,1] & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

satisface todas las condiciones del teorema de Kakutani. Veamos que  $f : X \rightarrow P_{cv,cp}(X)$ , en efecto, sea  $x \in X$ , entonces:

1. Si  $0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \{\frac{2}{3}\}$ , que es compacto y convexo.
2. Si  $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = [0, 1]$ , que es compacto y convexo.
3. Si  $\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow f(x) = \{\frac{1}{3}\}$ , que es compacto y convexo.

Además se puede probar que  $F : X \rightarrow \mathcal{P}_{cv,cp}(X)$  es semicontinua superiormente haciendo uso de un argumento similar al usado en el ejemplo [1.7] y, por tanto, poseerá un punto fijo. De hecho, el punto fijo de la función será  $x = \frac{1}{2}$ .

Consideremos la función del ejemplo inmediatamente superior. Vamos a cambiarla ligeramente de tal forma que  $X \notin \mathcal{P}_{cv}(X)$  y veremos que no se puede aplicar el teorema.

**Ejemplo 1.35.** La función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\} & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

no tiene puntos fijos, pues a pesar de que cumple todas las demás hipótesis del teorema de Kakutani, no se cumple la convexidad.

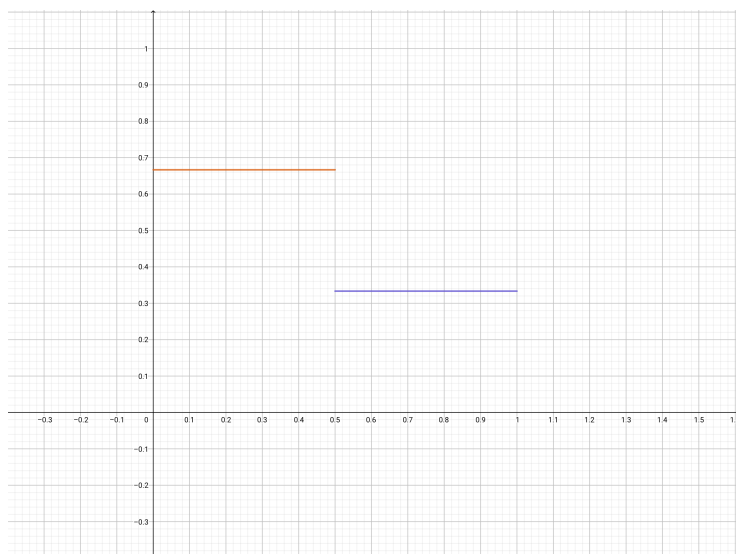


Figura 1.2: Grafo correspondiente a la función del ejemplo [1.35](#)

Podemos observar en la Figura [1.2](#) que  $f(x) \notin \mathcal{P}_{cv}(X)$ , pues por ejemplo,  $f(\frac{1}{2}) = \{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\}$  y en consecuencia tampoco convexa. Entonces, no podremos asegurar la existencia de puntos fijos.

Además, la Figura [1.35](#) nos muestra como la función  $f$  no se corta con la identidad en ningún punto, de donde deducimos que  $f$  no tiene puntos fijos.

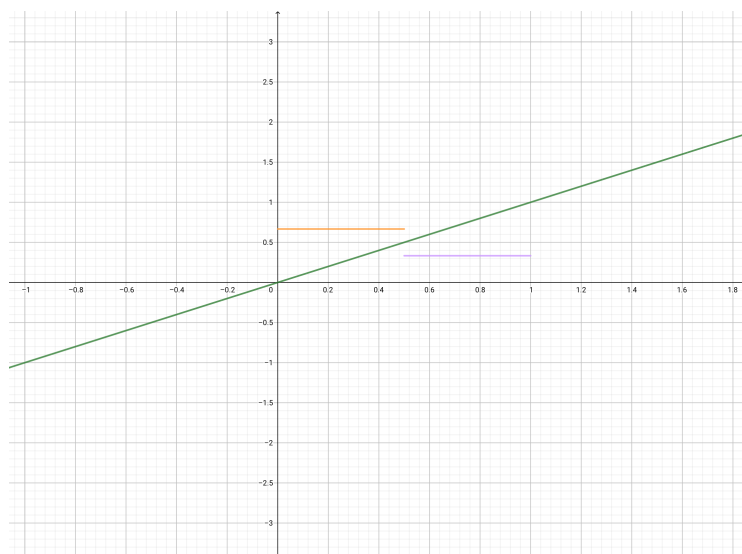


Figura 1.3: Representación gráfica de la no existencia de puntos de corte de la función  $f$  con la identidad.

## 1.4. Teorema de Nash

### 1.4.1. Introducción

En esta sección comenzaremos dando un contexto y un breve cuadro teórico que nos ayude a introducir la teoría de juegos y sus aplicaciones. En particular, nos centraremos en el concepto de juego no cooperativo. Definiremos equilibrio de un juego, un concepto que fue introducido por John Forbes Nash en 1950 y que popularmente se conoce como equilibrio de Nash. También daremos unas cuantas definiciones y conceptos necesarios previos a la prueba del teorema de Nash, que es el objetivo principal de esta sección.

### 1.4.2. Contexto y objetivos

La teoría de juegos es una rama relativamente moderna de las matemáticas que se ocupa de estudiar ciertas situaciones en las que un conjunto de agentes que tiene un conflicto donde los intereses de cada uno de ellos son contrapuestos o al menos distintos, deben tomar una serie de decisiones individuales que les afectarán mutuamente. La teoría de juegos tiene una serie de aplicaciones muy variadas en las ciencias sociales, como por ejemplo en administración, estrategia militar, política... Y también en la toma de decisiones de carácter económico, que es en lo que se centra este trabajo. Para desarrollar la gran mayoría de conceptos que se tratan en esta sección nos guiaremos por [1].

En esta sección se prestará atención exclusivamente a los juegos bipersonales (formados por dos jugadores) no cooperativos. Esto es porque la economía es una ciencia en esencia competitiva y solo nos centraremos en aquellos que sean bipersonales, dado que contienen todos los ingredientes importantes de la competitividad sin ser excesivamente complejos. De hecho, en economía la mayoría de conflictos acaban por tener dos protagonistas principales, lo cual ha hecho que los economistas tengan un gran interés por este tipo de juegos.

### 1.4.3. Juegos no cooperativos en forma estratégica

Un juego no cooperativo es el término que se refiere a aquellos juegos donde todos los elementos y todas las posibilidades estratégicas de los jugadores pueden describirse mediante un modelo matemático y en los cuales los jugadores toman decisiones independientemente, en pos de su beneficio personal. Es decir, el enfoque no cooperativo consistirá en, tras analizar el modelaje de nuestro problema, buscar para cada jugador sus mejores estrategias, siempre teniendo en cuenta que los demás también utilizarán sus mejores estrategias. En cambio, la teoría de juegos cooperativa supone de entrada que los jugadores se van a asociar de tal modo que el resultado de esa sociedad sea óptimo y se van a centrar en cómo repartirse los beneficios de su cooperación.

**Definición 1.36.** La estrategia de un jugador es un plan de acción que determina el comportamiento del jugador y establece la acción que realizará en cualquier momento del juego.

**Definición 1.37.** Una función de pago es la representación numérica de las preferencias de un jugador sobre las distintas combinaciones posibles de decisiones.

**Definición 1.38.** Un juego en forma estratégica  $G$  con un conjunto de jugadores  $N = \{1, \dots, n\}$  es una  $2n$ -tupla  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$ , donde  $X_i$  es el conjunto de estrategias del jugador  $i$ , para todo  $i \in N$ , y la función de pago de ese jugador  $i$  viene dada por  $H_i : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{R}$ , cuya misión es la de asignar a cada perfil de estrategias  $x \in X$  el pago que  $i$  obtendrá en el caso de que juegue de acuerdo a tal perfil.

Un ejemplo clásico de juego no cooperativo en forma estratégica es el del dilema del prisionero.

**Ejemplo 1.39.** Dos sospechosos de un crimen son arrestados y en la comisaría se les sitúa en dos celdas separadas sin comunicación alguna entre ellas. Se sabe de su culpabilidad, pero no hay pruebas de que hayan cometido el delito del que se les acusa. A los dos se les da la oportunidad de confesar. Entonces se contemplan tres escenarios: si ambos optan por confesar el delito, cada uno pasará 10 años en la cárcel; si solo uno de ellos confiesa,

servirá como testigo en la acusación contra el otro y se librá de ir a la cárcel, mientras que el otro irá 15 años; si ninguno confiesa, cada uno de ellos pasará 1 año en la cárcel. Nos referiremos a la confesión como “confesar” (C) y a la no confesión como “no confesar” (NC). Este juego se puede representar como un juego en forma estratégica  $(X_1, X_2, H_1, H_2)$  donde:

1.  $X_1 = X_2 = \{NC, C\}$ ;
2.  $H_1(NC, NC) = -1$ ,  $H_1(NC, C) = -15$ ,  $H_1(C, NC) = 0$  y  $H_1(C, C) = -10$ ;
3.  $H_2(NC, NC) = -1$ ,  $H_2(NC, C) = 0$ ,  $H_2(C, NC) = -15$  y  $H_2(C, C) = -10$ .

La forma más usual de representar juegos en forma estratégica bipersonales con conjuntos finitos de estrategias es mediante una tabla que recoja los pagos a cada jugador según la estrategia que adopte. En este caso, se representa el juego en la Tabla [1.1](#)

	NC	C
NC	-1,-1	-15,0
C	0,-15	-10,-10

Tabla 1.1: Dilema del prisionero.

Este es un buen ejemplo de juego en forma estratégica no cooperativo, pues es imposible que los jugadores lleguen a acuerdo alguno dado que no se pueden comunicar uno con el otro.

**Ejemplo 1.40.** Otro ejemplo de juego no cooperativo en forma estratégica, sería el clásico juego de piedra, papel, tijera. Se trata de un juego no cooperativo bipersonal,  $\varphi = (X_1, H_1), (X_2, H_2)$ , donde el conjunto de acciones será idéntico para los dos jugadores. Entonces,  $X_1 = X_2 = \{\text{piedra, papel, tijera}\}$  y las funciones de pago vendrán dadas por las reglas del juego, es decir, por ejemplo;

1.  $H_1(\text{piedra, papel}) = 0$ ,  $H_1(\text{papel, papel}) = 0$ ,  $H_1(\text{tijera, papel}) = 1, \dots$ ;
2.  $H_2(\text{piedra, papel}) = 1$ ,  $H_2(\text{papel, papel}) = 0$ ,  $H_2(\text{tijera, papel}) = 0, \dots$ ;

De igual modo, podríamos dar una tabla que modele los pagos de este juego [1.2](#)

J2/J1	piedra	papel	tijera
piedra	0,0	1,-1	-1,1
papel	-1,1	0,0	1,-1
tijera	1,-1	-1,1	0,0

Tabla 1.2: piedra, papel, tijera.

#### 1.4.4. Demostración del teorema de Nash

Tras este par de ejemplos, introduciremos dos definiciones necesarias previas a la demostración del teorema de Nash.

**Definición 1.41.** Sea  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$  un juego en forma estratégica. Un equilibrio de Nash de  $G$  es una situación en la cual los jugadores no tienen ningún incentivo a cambiar su estrategia tomando en cuenta las decisiones de sus oponentes. Es decir, el equilibrio de Nash de  $G$  es un perfil de estrategias  $x \in X$  donde se cumple que

$$H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i),$$

para todo  $x'_i \in X_i$  y todo  $i \in N$ , donde el perfil  $(x_{-i}, x'_i)$  es:

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

*Observación 1.42.* En los juegos en forma estratégica, cada jugador dispone de un conjunto de estrategias. Si uno de los jugadores elige una estrategia con probabilidad 1, entonces se dice que esa estrategia es pura.

Una estrategia mixta es cada una de las distribuciones de probabilidad sobre una estrategia pura.

*Observación 1.43.* Si volvemos al ejemplo del dilema de los prisioneros [1.39](#) podemos observar que, de acuerdo con la definición anterior, el equilibrio de Nash sería  $(C, C)$ . Como apunte, el resultado “cooperativo” sería  $(NC, NC)$ , con el cual los jugadores obtendrían ambos pagos mucho más altos que escogiendo  $(C, C)$ . No obstante, como están incomunicados entre sí, el comportamiento racional sería escoger  $C$ , pues conduce a un pago estrictamente mayor que  $NC$ , de ahí que el equilibrio de Nash sea  $(C, C)$ . En el ejemplo del piedra, papel, tijera [1.40](#) no encontramos equilibrios de Nash en estrategias puras, por lo que tendríamos la necesidad de acudir a las estrategias mixtas para buscarlos.

El concepto de equilibrio que hemos definido previamente fue introducido por John Forbes Nash en [6](#) en 1951. Nash fue un reconocido matemático y economista. Sus mayores contribuciones fueron en los campos de la teoría de juegos, ecuaciones en derivadas parciales

y geometría diferencial. En 1994 fue galardonado con el Premio Nobel de Economía por sus contribuciones en la teoría del equilibrio en juegos no cooperativos.

A partir del concepto de equilibrio y con ayuda del ya demostrado teorema de Kakutani, se demuestra el siguiente teorema, el cual es uno de los resultados más importantes en la Teoría de Juegos.

**Definición 1.44.** Una aplicación  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es cuasi-cóncava si se cumple que para todo  $r \in \mathbb{R}$ , el conjunto  $\{x \in X : f(x) \geq r\}$  es convexo, lo que es lo mismo, si para todo  $x, \tilde{x} \in X$  y para todo  $\alpha \in [0, 1]$  se cumple que  $f(\alpha x + (1 - \alpha)f(\tilde{x})) \geq \min\{f(x), f(\tilde{x})\}$ . Se puede observar que la cuasi-concavidad es consecuencia directa de la concavidad, dado que la concavidad requiere que  $f(\alpha x + (1 - \alpha)\tilde{x}) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(\tilde{x})$  y también que  $\alpha f(x) + (1 - \alpha)f(\tilde{x}) \geq \min\{f(x), f(\tilde{x})\}$ .

**Teorema 1.45** (De Nash). Sea  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$  un juego en forma estratégica que cumple las siguientes condiciones para todo  $i \in N$ :

1.  $X_i$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^{m_i}$  no vacío, convexo y compacto.
2.  $H_i$  es continua.
3. Para todo  $\bar{x}_{-i}$ , la función de  $x_i$  dada por  $H_i(\bar{x}_{-i}, x_i)$  es cuasi-cóncava en  $X_i$ .

Entonces,  $G$  tiene al menos un equilibrio de Nash.

*Demostración.* Consideremos la correspondencia  $B : X \rightarrow X$  dada por  $B(x) = \prod_{i \in N} B_i(x_{-i})$ , donde, para todo  $i \in N$ , se cumple que:

$$B_i(x_{-i}) = \{x'_i : H_i(x_{-i}, x'_i) \geq H_i(x_{-i}, \bar{x}_i), \text{ para todo } \bar{x}_i \in X_i\},$$

es decir, es el conjunto de mejores respuestas de  $i$  a  $x_{-i}$ . Entonces, solo nos quedará ver que para cada  $i \in N$ ,  $B_i$  cumple las hipótesis del teorema [1.31](#)

1. No vacía. Trivial, pues toda función continua definida en un compacto alcanza su máximo. (Teorema de Weierstass)
2. Para todo  $x \in X$ ,  $B_i(x) \in \mathcal{P}_{cp}(X)$ . Por definición, las funciones de pago son continuas y el conjunto de estrategias es compacto, entonces  $B_i(x) \in \mathcal{P}_{cl}(X)$ , y precisamente, como  $X$  es compacto entonces  $B_i(x) \in \mathcal{P}_{cp}(X)$  por ser un cerrado dentro de un compacto en un espacio Hausdorff.
3. Para todo  $x \in X$ ,  $B_i(x) \in \mathcal{P}_{cv}(X)$ . Sean  $x_{-i} \in X_{-i}$  y  $\bar{x}_i \in B_i(x_{-i})$ . Sea  $r = H_i(x_{-i}, \bar{x}_i)$ . Entonces se tiene que  $B_i(x_{-i}) = \{x_i \in X_i \text{ tal que } H_i(x_{-i}, x_i) \geq r\}$ . Aplicando la cuasi-concavidad de  $H_i$ , se tiene que  $B_i(x) \in \mathcal{P}_{cv}(X)$ .

4. Semicontinua superiormente. Probaremos que sí lo es aplicando una reducción al absurdo. Entonces, supongamos que  $B_i$  no es semicontinua superiormente y llegaremos a una contradicción.

Si  $B_i$  no es semicontinua superiormente, entonces existirá una sucesión  $\{x_{-i}^k\} \subset X_{-i}$ , la cual convergerá a  $x'_{-i} \in X_{-i}$  y un abierto  $B' \subset X_i$  con  $B_i(x'_{-i}) \subset B'$  y cumpliendo que para todo  $k_0 \in \mathbb{N}$  existe  $k \geq k_0$  tal que  $B_i(x_{-i}^k) \not\subset B'$ . Entonces podemos observar que existirá una sucesión  $\{\bar{x}_i^m\} \subset X_i$  tal que, para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{x}_i^m \in B_i(x_{-i}^m) \setminus B'$ . Dado que  $X_i$  es compacto,  $\{\bar{x}_i^m\}$  tendrá una subsucesión convergente. Supongamos que  $\{\bar{x}_i^m\}$  es convergente y que su límite es  $x_i^0 \in X_i$ . Como  $B'$  es un abierto, entonces tendremos que  $X_i \setminus B'$  es un cerrado y por tanto,  $x_i^0 \in X_i \setminus B'$ , con lo que  $x_i^0 \notin B_i(x'_{-i})$  (dado que  $B_i(x'_{-i}) \subset B'$ ). Por otro lado, para todo  $m \in \mathbb{N}$  y todo  $x_i \in X_i$ ,  $H_i(x_{-i}^m, \bar{x}_i^m) \geq H_i(x_{-i}^m, x_i)$ , dado que  $\bar{x}_i^m \in B_i(x_{-i}^m)$ . Usando la continuidad de  $H_i$  y tomando límites, para todo  $x_i \in X_i$ ,  $H_i(x'_{-i}, x_i^0) \geq H_i(x'_{-i}, x_i)$ . Entonces,  $x_i^0 \in B_i(x'_{-i})$ , con lo cual llegamos a una contradicción.

Por lo tanto se tiene que  $B$  satisface todas las hipótesis del teorema [1.31](#) y, en consecuencia, tendrá un punto fijo. Entonces, si  $x$  es un punto fijo de  $B$ ,  $x$  será un equilibrio de Nash del juego  $G$ .  $\square$

Para terminar este capítulo daremos un corolario del teorema de Nash, que es un resultado muy usado en la práctica en la Teoría de Juegos. De hecho fue el resultado demostrado por Nash en su artículo original. Previamente necesitamos definir el concepto de juego finito, que será el tipo de juego sobre el que podamos aplicar dicho corolario.

**Definición 1.46.** Un juego finito es un juego en forma estratégica

$$G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n),$$

donde los jugadores tienen conjuntos de estrategias finitos, es decir, tales que  $|X_i| = m_i$  para todo  $i \in N$  (siendo cada  $m_i$  un natural).

La cuestión es que el teorema de Nash no es aplicable a los juegos finitos puesto que los conjuntos de estrategias no son conjuntos convexos, que es una de las condiciones necesarias para poder aplicar dicho teorema. No obstante se puede extender de forma teórica el juego y garantizar así la existencia de equilibrios de Nash en la versión extendida de cualquier juego finito. Esta ‘idea’ consistirá en aumentar las posibilidades estratégicas de cada jugador y tratar algunas estrategias más que las iniciales del problema. A esta extensión del juego original se le llamará extensión mixta del juego; y a las estrategias de los jugadores en dicha extensión se les llamará estrategias mixtas.

**Teorema 1.47.** *La extensión mixta de un juego finito tiene siempre, al menos, un equilibrio de Nash.*



## Capítulo 2

# Estudio de Modelos Económicos.

### 2.1. Introducción y objetivos

Cuando hablamos de dinámica, no solo entendemos el movimiento de cuerpos y sistemas mecánicos, también cualquier cambio con respecto al tiempo de una o varias variables. Entonces, desde este punto de vista, se puede encontrar la dinámica en distintos campos de la ciencia, como por ejemplo podría ser los movimientos en bolsa y las variables económicas. Las diferentes interacciones entre las partes en una transacción económica constituyen una fuente de no linealidad y complejidad. En este capítulo se modelará y estudiará la evolución con respecto al tiempo de sistemas económicos dinámicos no lineales.

La parte principal de este capítulo será el estudio del modelo de Solow (o modelo de Solow-Swan). Se introducirán una serie de supuestos necesarios para entender la relación entre las variables del modelo y se especificará la función de producción con la que se va a trabajar. Después se hará un estudio analítico del modelo, donde se analizarán las predicciones económicas que hizo Solow y se tratará con cierto rigor el problema del crecimiento a largo plazo.

Por último, se introducirá el modelo AK de Sergio Rebelo y se analizarán las principales diferencias existentes entre uno y el otro.

### 2.2. Modelo de Solow

Este modelo es un cuadro teórico cuyo objetivo es dar una explicación de por qué existen diferencias de renta entre unos países y otros por medio del modelo de producción. Entre otras aportaciones, gracias principalmente a este modelo, Robert Menton Solow fue galardonado con el premio Nobel en Economía en el año 1987.

Para el estudio del modelo de Solow la bibliografía que se ha utilizado es [\[7\]](#) [\[8\]](#) [\[11\]](#) [\[13\]](#).

### 2.2.1. Supuestos del modelo

Se denotará por  $Y(t)$  la producción de bienes y servicios originados en un país en cierto instante  $t$ , es decir, el capital estatal. Se puede hacer una descomposición de la producción del siguiente modo:

$$Y(t) = C(t) + B(t) + I(t) + E(t), \quad (2.1)$$

todas variables respecto del tiempo; donde  $C(t)$  es el gasto de los consumidores,  $B(t)$  es el gasto del gobierno en bienes y servicios,  $I(t)$  es la inversión efectuada por las distintas empresas en las herramientas y personal necesario para poder efectuar la producción y  $E(t)$  representa la diferencia entre las exportaciones y las importaciones de un país.

Analizar globalmente la producción según esta descomposición es prácticamente imposible dado que hay muchos elementos en la expresión y sus distintos comportamientos son muy variables. Entonces, lo que trató de hacer Solow con su modelo fue identificar las variables más importantes de la expresión y simplificar la visión con el fin de obtener conclusiones lógicas y útiles. El modelo de Solow, considera una serie de supuestos que describiremos a continuación:

1. Se considera una economía cerrada, es decir, no hay un intercambio de bienes y servicios con otros países. Entonces,

$$N(t) = 0. \quad (2.2)$$

2. El ahorro es igual a inversión de las empresas:

$$I(t) = S(t). \quad (2.3)$$

3. La tasa de ahorro es constante, es decir, se ahorra una fracción constante del ingreso:

$$sY(t) = S(t), \quad (2.4)$$

donde  $s \in (0, 1)$  será el coeficiente de ahorro.

4. No se realiza gasto público alguno, por lo que  $B(t) = 0$ . Entonces, por esto y por (2.2), se podría simplificar (2.1) a:

$$Y(t) = C(t) + I(t). \quad (2.5)$$

5. Función de producción.

La función de producción es aquella que representa cómo la cantidad de capital y el trabajo o servicios empleados, generan la producción total. En otras palabras,

establece la relación entre los factores usados para la producción de bienes y servicios  $(K, L)$  y la cantidad obtenida de la producción de bienes y servicios  $(Y)$ . Por tanto, se denotará la función de producción como

$$Y = F(K, L),$$

donde  $K$  es el capital y  $L$  la mano de obra.

*Observación 2.1.* Cabe destacar que, a pesar de que nosotros hemos definido las variables  $Y, K, L$ , en la práctica no se suele trabajar tanto con ellas; si no que lo usual es trabajar con variables poblacionales. Con esto nos referimos principalmente a la función de producción per cápita (es decir, de producción por trabajador):

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K, L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right), \quad (2.6)$$

donde podemos denotar a  $y = \frac{Y}{L}$  como la producción per-cápita y a  $k = \frac{K}{L}$  como el capital per-cápita.

Con ello, se podría reescribir (2.6) y expresar la función de producción en forma intensiva:

$$y = f(k).$$

Se supondrá que hay rendimientos constantes de escala, es decir, que si multiplicamos todos los factores del modelo por una cierta cantidad  $t$ , entonces la producción se multiplicará por esa misma cantidad. Supuesto este tipo de rendimiento, se podrá expresar la función de producción en forma intensiva, es decir, que la producción por trabajador solo depende del capital por trabajador. Teniendo en cuenta la notación introducida en la observación 2.1 e interpretando lo que aparece en la Figura 2.1, se puede observar que moviéndonos hacia la derecha sobre la función de producción, la producción por trabajador aumenta a medida que lo hace la relación capital-trabajo. Es decir, son directamente proporcionales. No obstante, tal y como podemos observar en la Figura 2.1 el incremento de producción por trabajador disminuye a medida que el capital por trabajador aumenta, pues vemos como se va aplanando la curva de crecimiento. Esto quiere decir que a pesar de que más capital siempre implica mayor producción, lo hace a un ritmo decreciente.

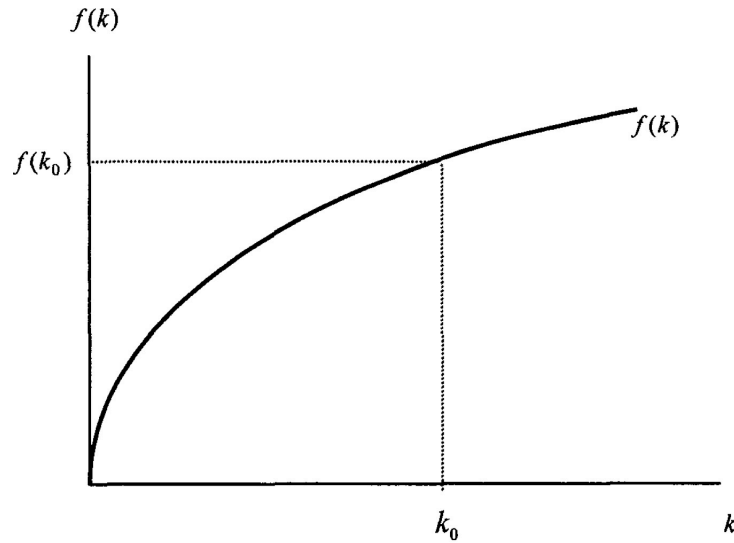


Figura 2.1: Forma intensiva de la función de producción. Gráfica extraída de [13].

6. La inversión neta del capital viene dada por la adquisición de equipo menos la depreciación del mismo:

$$K'(t) = I(t) - \delta K(t) \Leftrightarrow I(t) = K'(t) + \delta K(t). \quad (2.7)$$

*Observación 2.2.* La depreciación del capital es un término que se refiere a la disminución del valor de un bien perteneciente a una empresa con el paso del tiempo, usualmente debido al desgaste fruto de su uso.

7. La función de producción es Neoclásica, es decir; cumple que:

- a) Es homogénea de grado 1,

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \text{ para todo } \lambda > 0.$$

En términos económicos, se dice que hay rendimientos constantes a escala.

- b) Si no se usa capital o trabajo, no puede haber producción. Esto se conoce como esencialidad de los factores.
- c) Los productos marginales son positivos,

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial K} > 0,$$

lo que significa que un incremento en el trabajo o en el capital implicará un aumento en la producción.

d) Existen las derivadas parciales de segundo orden de  $F$  con respecto a  $K$  y  $N$ .

e) Se verifica la productividad marginal decreciente,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} > 0,$$

lo que significa que los incrementos en el trabajo o capital conllevarán aumentos en la producción cada vez menores.

f)  $F$  es estrictamente quasi-cóncava.

8. La población de la economía es igual a la fuerza laboral. Además se supone un crecimiento exponencial en el tiempo de la población total,

$$\frac{L'(t)}{L(t)} = n, \quad n > 0.$$

9. Se cumplen las condiciones de Inada:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial F}{\partial K} \right) = 0, \quad \lim_{K \rightarrow 0} \left( \frac{\partial F}{\partial K} \right) = \infty,$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial F}{\partial L} \right) = 0, \quad \lim_{L \rightarrow 0} \left( \frac{\partial F}{\partial L} \right) = \infty.$$

Una vez hemos detallado todos los supuestos del modelo de Solow, haremos su formulación general. Primero determinaremos cual será la ecuación fundamental de Solow y después trataremos su función de producción asociada. Por último se estudiará el modelo desde el punto de vista analítico.

**Definición 2.3.** La renta de un país es una medición que se usa para saber cuales son los ingresos económicos que reciben los factores de producción en un periodo de tiempo determinado. La renta per cápita es un indicador económico que se encarga de medir la relación existente entre la renta de un país y su población.

**Definición 2.4.** El capital de un país es el conjunto de bienes y recursos que se utilizan para producir riqueza. El capital per cápita es un indicador económico que se encarga de medir la relación existente entre el capital de un país y su población.

**Teorema 2.5.** La ecuación fundamental de Solow, siempre que se cumplan los citados supuestos, es:

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n + \delta)k(t), \quad (2.8)$$

donde  $s$  es el coeficiente de ahorro,  $s \in (0, 1)$ ,  $\delta$  es la tasa de depreciación del capital y  $n$  es la tasa de crecimiento de la población,  $n > 0$ .

*Demostración.* Partimos de los supuestos previamente citados. Sabemos por (2.5) que  $Y(t) = C(t) + I(t)$  (reparto del capital estatal) y sustituyendo (2.3) en (2.5), se obtiene que  $Y(t) = C(t) + S(t)$  (reparto de la renta estatal). Resolviendo el sistema de ecuaciones, llegamos a  $S(t) = I(t)$ . Sustituyendo de (2.4) y (2.7),

$$sY(t) = K'(t) + \delta K(t)$$

o, equivalentemente,

$$K'(t) = sY(t) - \delta K(t).$$

La ecuación obtenida, es la ley de acumulación del capital agregado y está determinada por la diferencia entre el valor agregado y la inversión necesaria para obtener ese capital agregado constante.

Para obtener la ecuación fundamental, dividimos la expresión anterior por la población (que como hemos supuesto, coincide con el trabajo), de forma que

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = s \frac{Y(t)}{L(t)} - \delta \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Tratemos cada término de la expresión anterior por separado.

1.  $\frac{K(t)}{L(t)} = k(t)$ , es decir, el capital-per cápita.
2.  $\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t)$ , es decir, la renta per-cápita.
3.  $\frac{K'(t)}{L(t)}$ .

Vamos a transformar esta última expresión partiendo del capital per-cápita y aplicando logaritmos, es decir,

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)},$$

que equivale a,

$$\log(k(t)) = \log(K(t)) - \log(L(t)).$$

Derivamos con respecto al tiempo y despejamos la variación del capital resultante,

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{K'(t)}{K(t)} - \frac{L'(t)}{L(t)},$$

que, despejando  $k(t)$ , es lo mismo que,

$$k'(t) = \left( \frac{K'(t)}{K(t)} - n \right) k(t),$$

lo que equivale a,

$$k'(t) = \frac{K(t)}{L(t)} \frac{K'(t)}{K(t)} - nk(t) = \frac{K'(t)}{L(t)} - nk(t).$$

Entonces, si sustituimos esto en  $\frac{K'(t)}{L(t)}$ , llegamos a

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = k'(t) + nk(t).$$

De esta última expresión y de  $\frac{K(t)}{L(t)} = k(t)$  y  $\frac{Y(t)}{L(t)} = y(t)$ , sin más que sustituir en la ecuación principal, obtenemos la ecuación fundamental de crecimiento del modelo de Solow expresada en términos genéricos,

$$k'(t) = sy(t) - (n + \delta)k(t)$$

o, lo que es lo mismo,

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n + \delta)k(t). \quad (2.9)$$

□

La ecuación fundamental de Solow puede tener asociadas muchas funciones de producción, en particular nos centraremos en estudiar la ecuación fundamental de Solow con la función de producción de Cobb-Douglas. El motivo de esta elección es que está probado que la función con un mejor ajuste al modelo de Solow es la función de producción de Cobb-Douglas con dos parámetros.

Para estar en condiciones de introducir correctamente este modelo, primero necesitamos saber lo que es la función de producción de Cobb-Douglas. Lo que hace esta función es estimar la función de producción de un país, lo cual permite ver su crecimiento económico esperado. Esta función representa una relación en la cual las proporciones de capital y trabajo son constantes respecto al producto total. La fórmula de Cobb-Douglas es:

$$F(t) = AK(t)^\alpha N(t)^\beta,$$

donde  $A$  es la productividad total de los factores (es un parámetro desconocido, que en cada caso viene dado por el modelo),  $K(t)$  es el stock de capital en el momento  $t$ ,  $N(t)$  la cantidad de trabajo en el momento  $t$  y  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros que representan el peso de los factores  $K$  y  $N$  en la renta.

Cuando la función de producción es la de Cobb-Douglas, el comportamiento y variación del capital per-cápita  $k(t)$  vendrá modelado por

$$k'(t) = sA(k(t))^\alpha - (n + \delta)k(t), \quad (2.10)$$

siendo  $s > 0$  el coeficiente de ahorro y  $\delta > 0$ ,  $\alpha < 1$  parámetros. Justificaremos a continuación la obtención de la ecuación previa.

Con el fin de obtener la ecuación (2.10), nos guiaremos por la demostración del teorema 2.5, pues el proceso es muy similar. En este caso, particularizamos la ecuación de producción general de ese teorema a la de Cobb-Douglas, entonces, si partimos de (2.8), tendremos

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = s \frac{A(K(t))^\alpha (L(t))^{1-\alpha}}{L(t)} - \delta \frac{K(t)}{L(t)}.$$

Desde aquí, el procedimiento es análogo al de la demostración del teorema 2.5, con una salvedad, sea

$$A \frac{(K(t))^\alpha (L(t))^{1-\alpha}}{(L(t))^\alpha (L(t))^{1-\alpha}} = A \frac{(K(t))^\alpha}{(L(t))^\alpha} = A(k(t))^\alpha,$$

entonces,

$$y(t) = f(x(t)) = A(k(t))^\alpha.$$

En conclusión, si sustituimos en (2.9),

$$k'(t) = sA(k(t))^\alpha - (n + \delta)k(t). \quad (2.11)$$

Hallemos la solución de la ecuación diferencial (2.11). Nos interesa la solución de la ecuación debido a que esta solución determinará la dinámica de transición de la ecuación fundamental de Solow (con la función de producción dada), concepto en el que nos pararemos un poco más adelante en el capítulo. Es una EDO no lineal en  $k$  de tipo Bernoulli. Para resolverla, comenzaremos trabajando con una ecuación general del tipo Bernoulli y después identificaremos términos con los de nuestra ecuación.

Sea  $x'(t) + Rx = Tx^m$  una ecuación diferencial ordinaria de tipo Bernoulli. Dividamos por  $x^m$  ambos miembros de la ecuación, quedando

$$\frac{1}{x^m} x'(t) + R \frac{x}{x^m} = T,$$

lo que equivale a,

$$\frac{1}{x^m} x'(t) + Rx^{1-m} = T. \quad (2.12)$$

Entonces, hacemos el cambio de variable  $z = x^{1-m}$ , de donde obtenemos, aplicando la regla de la cadena, que

$$z'(t) = (1 - m)x^{-m}x'(t),$$

lo cual implica,

$$z'(t) \frac{1}{1 - m} = x^{-m}x'(t).$$

Si sustituimos en (2.12), llegamos a la siguiente expresión

$$z'(t) \frac{1}{(1 - m)} + Rz = T.$$

Tras el cambio de variable, hemos obtenido una EDO completa lineal de primer orden con coeficientes constantes. Asociando parámetros con la ecuación principal (2.11), tendremos,  $R = (n + \delta)$ ,  $T = sA$ ,  $m = \alpha$ , de donde

$$z'(t) \frac{1}{(1 - \alpha)} + (n + \delta)z = sA. \quad (2.13)$$

Multiplicamos (2.13) por  $(1 - \alpha)$ ,

$$z'(t) + (1 - \alpha)(n + \delta)z = sA(1 - \alpha).$$

Hallaremos la solución de la EDO resultante, resolviendo por un lado la ecuación homogénea, que denotaremos por  $z_h$  y por el otro la particular,  $z_p$ .

La EDO homogénea será

$$z'(t) + (n + \delta)(1 - \alpha)z = 0,$$

entonces

$$z = Be^{\lambda t},$$

donde el parámetro  $\lambda$  se obtendrá de la ecuación característica  $\lambda + (n + \delta)(1 - \alpha) = 0$ , de donde  $\lambda = -(n + \delta)(1 - \alpha)$ . Por lo tanto,

$$z_h(t) = Be^{-(n+\delta)(1-\alpha)t}. \quad (2.14)$$

Por otro lado, la EDO particular será

$$z_p = C,$$

donde  $0 + (n + \delta)(1 - \alpha)C = sA(1 - \alpha)$ , lo cual implica que  $C = \frac{sA}{(n+\delta)}$ , entonces,

$$z_p = \frac{sA}{n + \delta}. \quad (2.15)$$

Por lo tanto, de (2.14) y (2.15),

$$z(t) = z_h(t) + z_p,$$

de donde,

$$z(t) = Be^{-(n+\delta)(1-\alpha)t} + \frac{sA}{n + \delta}.$$

Queda hallar el valor de  $B$  en función del valor inicial para llegar a la solución  $z(t)$ . Suponemos para  $t = 0$ ,  $z(0) = z_0$ , entonces,

$$z_0 = B + \frac{sA}{n + \delta},$$

por lo que,

$$B = z_0 - \frac{sA}{n + \delta}.$$

Hemos llegado a la solución en términos de  $z$ ,

$$z(t) = \left( z_0 - \frac{sA}{n + \delta} \right) e^{(\delta - n)(1 - \alpha)t} + \frac{sA}{n + \delta}.$$

Por último, deshacemos el cambio  $z = k^{(1 - \alpha)}$  y posteriormente despejamos  $k(t)$ , elevando la expresión resultante del cambio a  $\frac{1}{1 - \alpha}$ ,

$$(k(t))^{1 - \alpha} = \left( k_0^{1 - \alpha} - \frac{sA}{n + \delta} \right) e^{-(n + \delta)(1 - \alpha)t} + \frac{sA}{n + \delta},$$

de donde se concluye que,

$$k(t) = \left[ \left( k_0^{1 - \alpha} - \frac{sA}{n + \delta} \right) e^{-(n + \delta)(1 - \alpha)t} + \frac{sA}{n + \delta} \right]^{\frac{1}{1 - \alpha}}.$$

### 2.2.2. Estudio analítico del modelo

Dividiremos el estudio del modelo de Solow (o Solow-Swan) en dos partes. La primera de ellas se basa en el análisis de las predicciones del modelo donde se estudiará la dinámica de transición del modelo hasta su estado estacionario, primero observando como crece el capital per cápita y después estudiando el ritmo al que lo hace. Posteriormente se tratarán las dos predicciones originales del modelo.

Por otro lado, se introducirá y analizará la regla de oro de la acumulación del capital, donde se hallará matemáticamente el capital del estado estacionario que maximice el bienestar de la población.

#### Predicciones del modelo

Previo a abordar el estudio, es necesario definir los conceptos de estado estacionario y de tasa de crecimiento.

**Definición 2.6.** Una economía en estado estacionario consiste en la existencia de un capital constante y un tamaño de población constante.

**Definición 2.7.** La tasa de crecimiento,  $\gamma(t)$ , es el cambio positivo, en porcentaje, de una variable a lo largo del tiempo.

Comencemos haciendo la interpretación geométrica de la ecuación de Solow con función de producción de Cobb-Douglas.

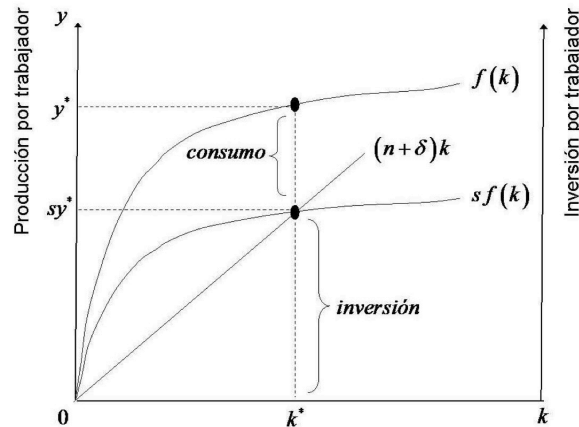


Figura 2.2: Dinámica de transición y estado estacionario. Gráfico extraído de [7].

La Figura 2.2 representa por  $f(k)$  la función de producción del modelo, que en este caso es la de Cobb Douglas, por lo que  $f(k) = A(k(t))^\alpha$ ; por  $sf(k)$ , la función de ahorro y por  $(n + \delta)k$  la función de depreciación (que como se ha visto en los supuestos del modelo, es aquella función que representa la disminución del valor de un bien con el paso del tiempo). En la gráfica se denota por  $k^*$  al capital per cápita en estado estacionario, no obstante, la situación que se representa serviría para cualquier  $k_0$  fijado. Tal y como se observa en la gráfica, se puede desglosar la producción en la suma de inversión y consumo. Para cualquier  $k_0 < k^*$ , se puede desglosar a su vez la inversión en el capital que se deprecia (que es lo que queda por debajo de la función de ahorro) y el crecimiento del capital (que sería la distancia entre la función de depreciación y la función de ahorro).

Si tomamos  $k_0 < k^*$ , en la situación que describe la gráfica crecerá el capital per cápita y consecuencia de ello la economía va a desplazarse hacia la derecha sobre el eje de abscisas, es decir, también crecerá. Al hacerlo, la función de producción recogerá crecimientos de la renta per cápita del país. De esta forma Solow y Swan fueron capaces de explicar el crecimiento económico.

*Observación 2.8.* Si volvemos a la Figura 2.2 vemos que en este caso el crecimiento de capital es nulo, y esto es debido a que en ese punto estamos en el estado estacionario.

Una vez hemos visto cual es el crecimiento de capital, vamos a ver a que ritmo crece ese capital. Lo haremos estudiando la tasa de crecimiento y dando una interpretación geométrica de como se comporta.

Partiremos de la ecuación fundamental de crecimiento del modelo, de donde obtendremos la expresión que representa la tasa de crecimiento del capital per cápita,  $\gamma(k)$ ,

dividiendo la ecuación fundamental por el capital per cápita,

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = sA \frac{(k(t))^\alpha}{k(t)} - (n + \delta) \frac{k(t)}{k(t)},$$

que equivale a

$$\gamma(k(t)) = \frac{k'(t)}{k(t)} = sA(k(t))^{\alpha-1} - (n + \delta).$$

Para entender la Figura 2.3, dividiremos esta última expresión en dos partes:

1.  $sA(k(t))^{\alpha-1}$ , que será una función de ahorro que denotaremos por CA.
2.  $(n + \delta)$ , que será una función de depreciación que denotaremos por CD.

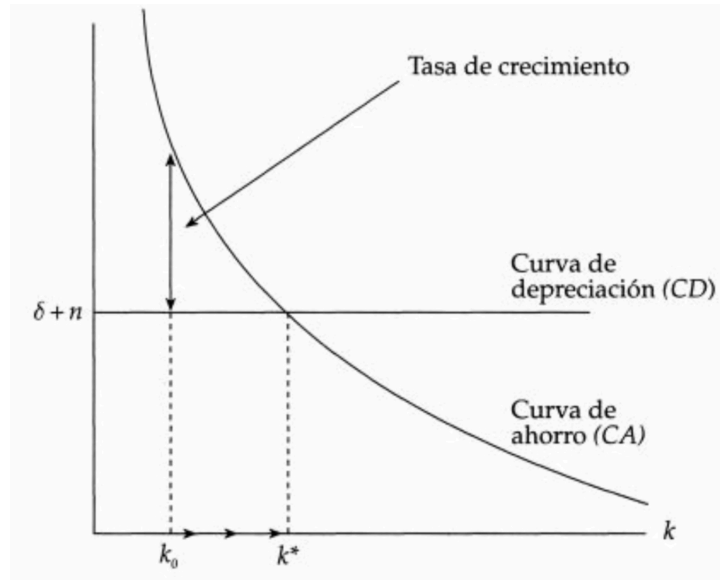


Figura 2.3: Curva de ahorro y función de depreciación.

De la Figura 2.3, podemos observar que el ritmo de crecimiento de capital será positivo siempre y cuando  $CA$  esté por encima de  $CD$ . Este ritmo de crecimiento de capital per cápita, determina todos los ritmos de crecimiento de la economía, pues si tomamos la expresión de la renta per cápita, le aplicamos logaritmos y la derivamos con respecto al tiempo, llegamos a

$$y(t) = A(k(t))^\alpha$$

o, equivalentemente,

$$\log(y(t)) = \log(A) + \alpha \log(k(t)),$$

lo que implica que

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{A'}{A} + \alpha \frac{k'(t)}{k(t)},$$

que será igual a

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha \frac{k'(t)}{k(t)},$$

dado que hemos considerado previamente que el ritmo de crecimiento de la tecnología es constante en todo el modelo. Entonces el crecimiento de la renta dependerá del ritmo de crecimiento del capital per cápita.

Por otro lado, haciendo un procedimiento análogo para el consumo, llegamos a que

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{(1-s)'}{(1-s)} + \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{y'(t)}{y(t)},$$

dado que también se ha considerado la tasa de ahorro constante. Entonces el crecimiento del consumo per cápita coincidirá con el crecimiento de la renta per cápita, que a su vez hemos visto que dependía del crecimiento del capital per cápita.

Por tanto se concluye que mediante el estudio de las Figuras 2.2 y 2.3, se puede explicar el crecimiento económico de un país.

Estamos en condiciones de analizar las dos principales predicciones que hace este modelo.

1. A largo plazo no hay crecimiento económico.
2. Existencia de convergencia entre distintos países.

Probaremos la primera de ellas primero matemáticamente y después haremos una interpretación geométrica sobre la Figura 2.3.

Consideremos la expresión que explica el crecimiento económico,

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{sA}{(k(t))^{1-\alpha}} - (n + \delta),$$

donde recordemos que  $\frac{sA}{(k(t))^{1-\alpha}}$  es la función de ahorro y  $(n + \delta)$  es la función de depreciación. Entonces, de la expresión se deduce que el crecimiento económico se va reduciendo a medida que aumenta el capital, porque la función de ahorro va disminuyendo, mientras que la función de depreciación se mantiene constante.

Si nos fijamos en la Figura 2.3, podemos ver que en  $k_0$ , el crecimiento de la economía es mayor que en  $k^*$ . De hecho, ese punto sería el capital de equilibrio de la economía, veamos por qué y como se llega a él. Si la economía deja de crecer, entonces

$$0 = \frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{sA}{(k(t))^{1-\alpha}} - (n + \delta)$$

o, equivalentemente,

$$(k(t))^{1-\alpha} = \frac{sA}{n + \delta},$$

lo cual implica que

$$\Rightarrow k^* = \left( \frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.16)$$

Por lo tanto, el modelo predice que a largo plazo no hay crecimiento económico y que la economía converge a ese nivel de capital  $k^*$ . En este punto, la economía se encuentra en su estado estacionario.

Abordemos la segunda de las predicciones del modelo. Se tratará de demostrar que existe convergencia entre distintos países, pero veremos que la realidad no es esa. La predicción en un principio es que los países con un mayor índice de pobreza van a experimentar un crecimiento mayor que los países más ricos, por lo que llegará un momento en el que la economía del país pobre crezca de tal forma que alcance a la del país rico. Si nos fijamos en la Figura 2.4, tenemos dos países, uno pobre y otro rico; donde  $k_a$  es el capital per cápita del primero y  $k_b$  el del segundo.

Según esta situación, el modelo de Solow predijo que se efectuaría una convergencia tal y como podemos observar que ocurre en la gráfica.

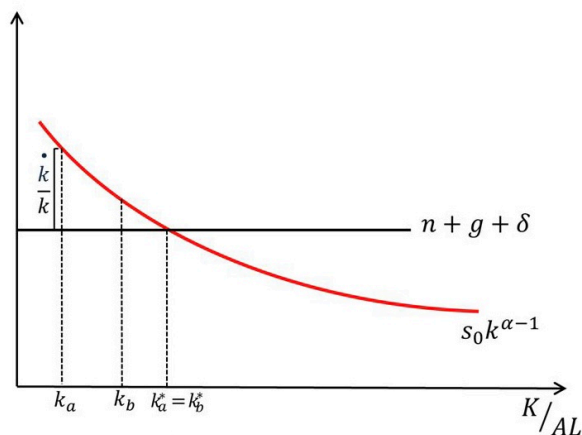


Figura 2.4: Convergencia absoluta. Mayor crecimiento del país pobre que del país rico.

No obstante, esto no ocurre en la realidad. La explicación a esto es que además de diferir en el capital, los países se diferencian en muchas otras cosas, como por ejemplo la tecnología, la tasa de ahorro, el ritmo al que crece la población... Entonces, consideremos otros dos países, uno rico y otro pobre; donde  $k_E$  es el capital per cápita del país rico y  $k_D$  el del pobre. En este caso también suponemos por ejemplo que la tasa de ahorro del país pobre es menor que la tasa de ahorro del país rico. Entonces la curva de ahorro del país rico, que viene denotada en la Figura 2.5 por  $S_D k^{\alpha-1}$ , será superior a la curva de ahorro del país pobre,  $S_E k^{\alpha-1}$ .

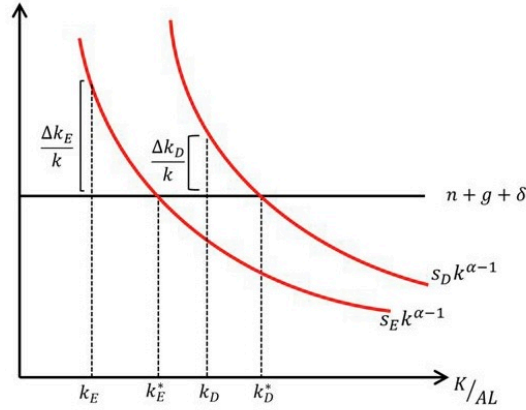


Figura 2.5: Convergencia relativa. La comparación del crecimiento económico entre dos países depende de otros factores además de la diferencia de capital.

### La regla de oro de acumulación del capital.

Hemos visto que en el modelo no hay crecimiento económico a largo plazo, la cuestión que nos planteamos ahora es cuál de los estados estacionarios es mejor. La regla de oro consiste en buscar el equilibrio donde se maximiza el bienestar, es decir, donde se maximice el consumo per cápita. Obtenemos matemáticamente el capital del estado estacionario asociado a la regla de oro. Partimos de la acumulación de capital per cápita, expresaremos el ahorro como la diferencia entre la renta y el consumo y además, como nos encontramos en un estado estacionario, asumiremos que no hay crecimiento, entonces

$$(k'(t))^* = sA(k^*(t))^\alpha - (n + \delta)k^*(t),$$

lo cual implica que

$$0 = (A(k^*(t))^\alpha - (c^*(t)) - (n + \delta)k(t),$$

de donde,

$$c^*(t) = A(k^*(t))^\alpha - (n + \delta)k^*(t).$$

Buscamos maximizar el consumo del estado estacionario, por lo que maximizamos  $c^*(t)$ ,

$$\frac{\partial(c^*(t))}{\partial(k^*(t))} = 0,$$

por lo que

$$\alpha A(k^*(t))^{\alpha-1} - (n + \delta) = 0,$$

llegando a

$$\alpha A(k^*(t))^{\alpha-1} = (n + \delta).$$

Entonces, despejando el capital per cápita de esta última expresión,

$$\frac{\alpha A}{(k^*(t))^{1-\alpha}} = (n + \delta),$$

lo cual implica que

$$(k^*(t))^{1-\alpha} = \frac{\alpha A}{n + \delta},$$

de donde concluimos que

$$k_{oro} = \left( \frac{\alpha A}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

que es la expresión del capital per cápita en el estado estacionario que maximiza el consumo.

*Observación 2.9.* Fijámonos en [\(2.16\)](#), el único elemento que se diferencia de la expresión del capital per cápita de la regla de oro es  $s$ , que es la tasa de ahorro, en lugar de  $\alpha$ , que es el peso del capital en la función de producción. Se dice que en el estado estacionario asociado a la regla de oro, la tasa de ahorro óptima será  $s = \alpha$  y se denominará  $s_{oro}$ .

### Crecimiento a corto y largo plazo

Uno de los grandes problemas del modelo de Solow es que una vez que una economía alcanza el estado estacionario, no es capaz de explicar el crecimiento a largo plazo.

Veamos como este modelo considera únicamente crecimientos a corto plazo, es decir crecimientos de tipo transitorio. Consideremos la situación descrita por la Figura [2.3](#). Nos encontramos en el estado estacionario. Una propuesta posible que permite experimentar crecimiento, sería que los individuos ahorrasen más, de modo que la curva de ahorro se situase por encima de la curva de depreciación, es decir, que

$$CA' > CD,$$

entonces,

$$\frac{k'(t)}{k(t)} > 0.$$

No obstante, se puede demostrar que, como consecuencia de la ley de rendimientos decrecientes de capital, aunque se siga teniendo una situación del tipo  $CA > CD$ , la distancia entre ambas curvas se irá acortando hasta llegar a un nuevo estado estacionario  $\frac{k'(t)}{k(t)} = \gamma(k(t)) = 0$ . Esto es porque si partimos de la tasa de crecimiento de capital,

$$\gamma(k(t)) = sA(k(t))^{-(1-\alpha)} - (n + \delta),$$

podemos observar que  $sA(k(t))^{-(1-\alpha)}$  es decreciente y además, en base a las condiciones de Inada, se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow 0} sA(k(t))^{-(1-\alpha)} = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} sA(k(t))^{-(1-\alpha)} = 0.$$

Es decir, la curva de ahorro toma valores en el infinito cuando  $k = 0$ , es monótona decreciente y se aproxima a cero infinitamente para valores grandes de  $k$ , entonces como podemos observar en la Figura 2.3,  $\gamma(k(t)) > 0$  puesto que  $k(t) < k^*$  y cuanto más se acerque  $k(t)$  a  $k^*$ , menor será  $\gamma(k(t))$ . Llegará un momento en el que se alcance un nuevo estado estacionario tras haber experimentado un crecimiento económico transitorio fruto de una variación en el ahorro, descenso de la natalidad... Por tanto el crecimiento es a corto plazo.

Hemos visto que aumentar la tasa de ahorro produce un crecimiento a corto plazo, nos podríamos plantear el por qué no la aumentamos indefinidamente y así conseguiríamos un crecimiento a largo plazo. Esto no es posible por una razón, y es que  $s$  es el coeficiente de ahorro y  $s \in (0, 1)$ , así que por mucho que la aumentáramos, llegaría un momento que no se podría hacer más.

Por otro lado, el único modo que encontró el modelo de Solow para tratar de explicar el crecimiento a largo plazo fue mediante el crecimiento exógeno, es decir, el modelo atribuyó el crecimiento a largo plazo al avance sistemático de la tecnología, que era un suceso ajeno al modelo.

**Definición 2.10.** El crecimiento exógeno establece que el crecimiento es impulsado únicamente por el progreso tecnológico, independientemente de las fuerzas económicas.

¿Por qué el modelo no es capaz de recoger el avance tecnológico? Porque, por como está definido el modelo, no existen fondos disponibles para financiar ese avance. Si los hubiera, entonces una parte del producto interior bruto  $Y$  iría a remunerar el trabajo, otra parte al capital y una última parte a remunerar las investigaciones que contribuyesen al avance tecnológico, pero esto no es posible, pues por los supuestos del modelo sabemos que las rentas del trabajo son  $wL$  y las rentas del capital  $sK$ . Dado que la producción es  $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ , entonces, la productividad marginal del trabajo será

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = (1 - \alpha)AK^\alpha L^{1-\alpha-1} = (1 - \alpha)AK^\alpha \frac{L^{1-\alpha}}{L},$$

y, sustituyendo la producción en esta expresión, se llega a que la productividad marginal del trabajo y por tanto el salario, es

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = w = (1 - \alpha)\frac{Y}{L},$$

por lo que las rentas del trabajo son

$$\left( (1 - \alpha)\frac{Y}{L} \right) L.$$

Haciendo un procedimiento análogo para el capital se llega a que las rentas de capital son

$$\left(\alpha \frac{Y}{K}\right) K.$$

Entonces, si sumamos las rentas del trabajo y las rentas del capital,

$$\left((1 - \alpha) \frac{Y}{L}\right) L + \left(\alpha \frac{Y}{K}\right) K = (1 - \alpha)Y + \alpha Y = Y.$$

Por lo tanto, la suma de las rentas del trabajo y las rentas del capital agotan íntegramente el PIB de la economía, lo cual demuestra la incapacidad del modelo para explicar el avance tecnológico.

## 2.3. Modelo de crecimiento endógeno. Modelo AK

### 2.3.1. Introducción

El principal problema del modelo de Solow era su incapacidad para explicar el crecimiento a largo plazo sin recurrir a explicarlo de forma exógena. Fue por ello que a finales de los años 60 se comenzó a poner en duda la validez del modelo. A mediados de los 80, Paul Romer explicó de forma endógena el crecimiento y unos años más tarde, Sergio Rebelo, creó el modelo AK de crecimiento endógeno, que es el que se estudiará en esta sección. Nos apoyaremos esencialmente en [9] y [5] para el desarrollo de esta sección.

**Definición 2.11.** La teoría de crecimiento endógeno sostiene que el crecimiento económico se genera dentro de un sistema como resultado de procesos internos.

### 2.3.2. Supuestos del modelo

En el modelo AK de crecimiento endógeno, debemos de abandonar algunos de los supuestos del modelo neoclásico de Solow. La principal diferencia es que en este caso sí que se introducen los avances tecnológicos dentro del modelo. Por otro lado, se deja de utilizar la función de producción neoclásica, en el modelo AK se supone que la función de producción es lineal en  $K(t)$ , es decir,  $Y(t) = AK(t)$ . Al definir la función de producción de este modo parece que nos estamos olvidando del trabajo, pero una de las características del modelo es que el trabajo se considera como otro tipo de capital, es decir se considera el capital humano (educación, formación de los trabajadores...). La función AK no cumple todas las condiciones función de producción neoclásica:

1. Hay rendimientos constantes a escala, pues  $A(\lambda K) = \lambda AK = \lambda Y$ .

2. Hay rendimientos positivos crecientes del capital (a diferencia del modelo de Solow que eran decrecientes). Es decir,

$$\frac{\partial Y(t)}{\partial K(t)} > 0, \quad \frac{\partial^2 Y(t)}{\partial^2 K(t)} < 0.$$

3. No satisface las condiciones de Inada.

### Estudio del modelo

Atendiendo a los supuestos del modelo y de forma completamente análoga a como se ha procedido en la demostración del teorema fundamental del modelo de Solow [2.5](#), pero considerando en este caso  $Y(t) = AK(t)$ , obtenemos la expresión de la ley de acumulación del capital agregado a partir de

$$K'(t) = sAK(t) - \delta K(t),$$

entonces,

$$\frac{K'(t)}{L(t)} = \frac{sAK(t)}{L(t)} - \frac{\delta K(t)}{L(t)}$$

o, equivalentemente,

$$k'(t) = sAk(t) - (n + \delta)k(t).$$

Llegamos a la ecuación fundamental del crecimiento en el modelo AK que, expresado en términos de tasas de variación,

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = sA - (n + \delta),$$

podemos observar que tanto  $sA$  como  $(n + \delta)$  son constantes, por lo que desaparece la ley de rendimientos decrecientes de capital, uno de los principales problemas por los que el modelo de Solow era incapaz de explicar el crecimiento económico a largo plazo.

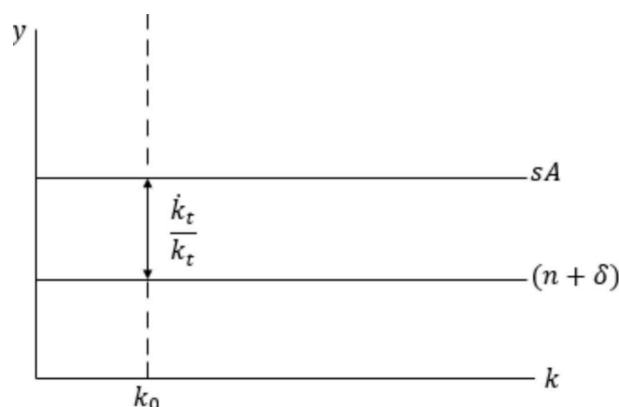


Figura 2.6: Crecimiento de la economía según el modelo AK. Gráfica extraída de [5](#).

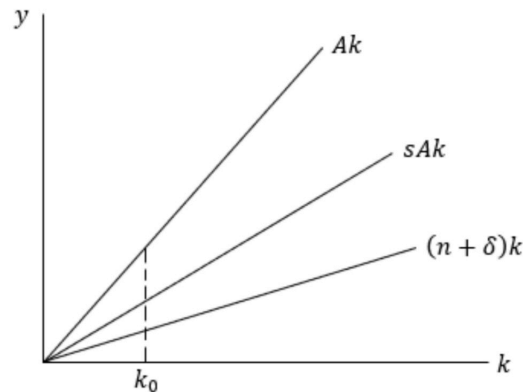


Figura 2.7: Crecimiento de la economía según el modelo AK. Gráfica extraída de [5].

La Figura [2.6] representa la expresión del ritmo de crecimiento. En la Figura [2.7] aparecen representadas la función de producción  $Ak(t)$ , la función de ahorro  $sAk(t)$  y la curva de depreciación,  $(n + \delta)k(t)$ .

La interpretación que se hace de la Figura superior es que, fijado un capital inicial  $k_0$ , el ritmo de crecimiento económico  $\frac{k'(t)}{k(t)}$  es constante independientemente de lo que crezca el capital. Esta es la gran diferencia con el modelo de Solow, en el que, en esta misma situación se experimentaba una convergencia a medida que crece el capital y se llegaba a un estado estacionario en el que la economía no experimentaba ningún tipo de crecimiento a no ser que fuese de forma exógena.

### 2.3.3. Diferencias con el modelo de Solow

Para finalizar la sección, se detallarán una serie de diferencias que podemos encontrar entre el modelo AK y el modelo de Solow previamente descrito.

1. El modelo AK es capaz de explicar el crecimiento económico a largo plazo con elementos internos del modelo, mientras que el modelo de Solow no.
2. En el modelo AK no hay convergencia. La economía de los países pobres y los ricos crece independientemente, no como ocurría en las predicciones de Solow, donde la economía de los países pobres tendían a crecer más rápido que la de los ricos.
3. En el modelo AK no hay dinámica de transición, pues como se puede observar en la Figura [2.6], se experimenta un estado estacionario continuado en el tiempo.
4. En el modelo AK, una catástrofe económica como podría ser una caída en el nivel del stock del capital tendría efectos permanentes, dado que como podemos ver en

la Figura [2.6](#), las curvas son constantes y si una de ellas experimenta una variación derivada de esta catástrofe, la diferencia entre ellas se acortará o aumentará para siempre. En el modelo de Solow en cambio, la catástrofe tendrá un efecto transitorio.



# Bibliografía

- [1] Casas Méndez, B., Fiestras Janeiro, M.G., García Jurado, I., González Díaz, J., *Introducción a la Teoría de Juegos*, Manuais Universitarios. Publicaciones de la Universidade de Santiago de Compostela, 2012.
- [2] Cellina, A., Aubin, J., *Differential inclusions: Set valued Maps and Viability Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidenberg New York Tokyo, 1984.
- [3] Djebali, S., Lech Górniewicz, A.O., *Solution Sets for Differential Equations and Inclusions*, Gruyter, 2013.
- [4] Kakutani, S., *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke mathematical Journal, 1941.
- [5] López, D., *Píldora de crecimiento económico: Modelos de crecimiento endógeno*, publicación de la Universidad de Valladolid, 2015.
- [6] Nash, J., *Non-cooperative Games*, Annals of mathematics, 1951.
- [7] Navarro E.M.M., *El modelo de crecimiento económico de Solow-Swan: implicaciones y limitaciones*, publicación de la Escuela Superior de Economía, México, 2010.
- [8] Raurich, X., Sala, H., *El modelo de Solow: análisis teórico, interpretación económica y contraste de hipótesis de convergencia*, revista d'innovació educativa, No.5, 2010.
- [9] Rebelo, S., *Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth*, Journal of political Economy, 1991.
- [10] Smart, D.R., *Fixed Points Theorems*, Cambridge University Press archive, 1980.
- [11] Solow, R., *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, Quarterly Journal of Economics, vol. 70, No.1, págs. 65-94, 1956.
- [12] Willard, S., *General Topology*, Addison Wesley Longman Publishing, 1970.

- [13] Zhang, W.B., *Differential Equations, Bifurcations and Chaos in Economics*, World Scientific Publishing Company, 2005.