Topología de los Espacios Euclidianos

Enrique Macías Virgós

Notas de clase
Curso 2025-26

Bibliografía

1. José Antonio Oubiña Galiñanes e María Elena Vázquez Abal, *Unha introdución á Topoloxía dos espazos euclidianos*, Universidade de Santiago de Compostela en 2022. `https://hdl.handle.net/10347/25150`

2. Díaz Ramos, J. C., *Topología de los espacios euclidianos*. Minerva, USC, 2021. `http://hdl.handle.net/10347/25150`.

3. Masa Vázquez, X. M., *Curso de Topoloxía: dos números reais ao grupo Poincaré*. USC Editora. Manuales. USC, 2020.

Índice general

Preliminares: imagen directa e imagen recíproca

En este capítulo recopilamos las propiedades básicas de la imagen directa y de la imagen recíproca asociadas a una aplicación entre conjuntos. Estos resultados, de carácter elemental, desempeñan un papel central tanto en la definición de continuidad como en el estudio de propiedades globales de las aplicaciones.

Definiciones

Sean X, Y dos conjuntos y sea $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación.
Sea $A \subset X$. La **imagen directa** de A por f es el subconjunto de Y definido por

$$f(A) := \{\, y \in Y \mid \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y \,\}.$$

Sea $B \subset Y$. La **imagen recíproca** o **imagen inversa** de B por f es el subconjunto de X definido por

$$f^{-1}(B) := \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\}.$$

Obsérvese que la notación $f^{-1}(B)$ no presupone que f sea invertible: se trata simplemente de una notación para una operación sobre subconjuntos.

La imagen directa y la imagen recíproca también pueden denotarse, respectivamente, por

$$f_*(A) := f(A), \qquad f^*(B) := f^{-1}(B),$$

para $A \subset X$ y $B \subset Y$.

Propiedades de la imagen recíproca

La imagen recíproca presenta un comportamiento especialmente regular con respecto a las operaciones básicas entre conjuntos.

Sean $B, B_1, B_2 \subset Y$. Entonces:

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \qquad f^{-1}(Y) = X.$
2. Si $B_1 \subset B_2$, entonces $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
4. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

5. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

Demostración. Todas las igualdades se deducen directamente de la definición. Por ejemplo, para (3), se tiene

$$x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \iff f(x) \in B_1 \text{ o } f(x) \in B_2,$$

lo que equivale a $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Las demás propiedades se prueban de forma análoga. □

Propiedades de la imagen directa

El comportamiento de la imagen directa es, en general, menos regular.
Sean $A, A_1, A_2 \subset X$. Entonces:

1. $f(\varnothing) = \varnothing$.

2. Si $A_1 \subset A_2$, entonces $f(A_1) \subset f(A_2)$.

3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

4. En general, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Demostración. Las tres primeras propiedades son inmediatas. Para (4), si $y \in f(A_1 \cap A_2)$, existe $x \in A_1 \cap A_2$ tal que $f(x) = y$. Entonces $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. La inclusión inversa no es cierta en general. □

Ejemplo 0.0.1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A_1 = (-\infty, 0]$ y $A_2 = [0, \infty)$. Entonces

$$f(A_1) = f(A_2) = [0, \infty), \qquad A_1 \cap A_2 = \{0\},$$

y por tanto

$$f(A_1 \cap A_2) = \{0\} \subsetneq [0, \infty) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

1.4. Relaciones entre imagen directa e imagen recíproca

Sea $A \subset X$ y $B \subset Y$. Entonces:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$, con igualdad si f es inyectiva.

2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$, con igualdad si f es sobreyectiva.

Demostración. (1) Si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A)$, y por tanto $x \in f^{-1}(f(A))$. Si f es inyectiva, la inclusión inversa es inmediata.

(2) Si $y \in f(f^{-1}(B))$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y $f(x) \in B$, luego $y \in B$. Si f es sobreyectiva, toda $y \in B$ es imagen de algún $x \in f^{-1}(B)$. □

Composición de aplicaciones

Las imágenes directas y recíprocas se comportan bien respecto a la composición. Sean $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Entonces, para todo $A \subset X$ y $C \subset Z$, se tiene:

$$(g \circ f)(A) = g(f(A)), \qquad (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

Demostración. Se sigue directamente de las definiciones, desarrollando la condición de pertenencia a cada conjunto. Intenta hacerlas porque es una manera excelente de aprender las definiciones. □

Nota (Algunos consejos).

1. Las matemáticas se aprenden *haciendo problemas*, y muy especialmente aquellos que no salen a la primera. La dificultad no es un obstáculo, sino parte esencial del aprendizaje.

2. Dejar pasar el tiempo mientras se piensa en un problema no es tiempo perdido. Muchas ideas necesitan madurar en silencio antes de que aparezca, casi de repente, el momento del *"ajá"*.

3. Ver a otros resolver problemas puede ser útil, pero no basta. Aprender matemáticas solo mirando cómo trabajan otros es como intentar aprender a conducir observando pasar coches: tarde o temprano hay que sentarse al volante y chocar alguna vez.

Tema 1

Espacios métricos y euclidianos.
(4 horas expositivas)

1.1. Los espacios euclidianos

1.1 Notación

Recordamos las notaciones para los conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \text{ de los números naturales,} \qquad \mathbb{Z} \text{ de los números enteros,}$$

$$\mathbb{Q} \text{ de los números racionales,} \qquad \mathbb{R} \text{ de los números reales.}$$

1.2 El espacio euclidiano n-dimensional

El espacio euclidiano de dimensión n es el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times \overset{n)}{\cdots} \times\mathbb{R} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con las operaciones de suma de vectores y producto por escalares:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad (\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Se cumplen las propiedades habituales (asociativa, conmutativa, distributiva y elemento neutro):

1. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
2. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
3. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$,
4. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$,
5. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$,
6. $\mathbf{o} = (0, \ldots, 0)$, es el elemento neutro de la suma,
7. $-\mathbf{x} = (-x_1, \ldots, -x_n)$ es el opuesto de $\mathbf{x}$,

8. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$,

donde

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \qquad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n), \qquad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.1.1 (Producto escalar euclidiano)**.** El producto escalar euclidiano en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Proposición 1.1.2 (Propiedades del producto escalar)**.** *Si* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

1. *Bilineal:*

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle, \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle,$$
$$\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle.$$

2. *Simétrico:* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.

3. *Definido positivo:* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ *y* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

En particular,

$$\langle x, x \rangle > 0 \text{ si } x \neq 0.$$

Teorema 1.1.3 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz)**.** *Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*:*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \, \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

En coordenadas,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

Demostración. Si $\mathbf{x} = 0$ o $\mathbf{y} = 0$, la desigualdad es trivial. Supongamos $\mathbf{x} \neq 0$ e $\mathbf{y} \neq 0$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 \leq \langle \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}, \, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \lambda^2 \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle.$$

Tomando $\lambda = -\dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$ obtenemos

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.$$

Multiplicando por $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > 0$ se tiene $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \, \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$. □

Definición 1.1.4 (Norma euclidiana)**.** La norma euclidiana en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Entonces la desigualdad de Cauchy–Schwarz puede escribirse como

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|.$$

Proposición 1.1.5 (Propiedades de la norma)**.** *Si* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ *y* $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$*,*
2. $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$*,*
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *(desigualdad de Minkowski).*

Demostración. (1) y (2) son inmediatas a partir de las propiedades del producto escalar. Para (3), tenemos, usando Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.\end{aligned}$$

Tomando la raíz cuadrada, se sigue $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. □

Definición 1.1.6 (Distancia euclidiana)**.** La distancia euclidiana en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Esta definición está inspirada en el teorema de Pitágoras.

Nota 1.1.7. El signo $\sqrt{\ }$ significa *raíz cuadrada no negativa*, por tanto $\sqrt{4} = 2$. Para escribir las dos raíces cuadradas de 4 escribiremos $\pm\sqrt{4} = \pm 2$.
Por el mismo motivo, se tiene $\sqrt{t^2} = |t|$.

Proposición 1.1.8 (Propiedades de la distancia)**.** *Para* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$*:*

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ *y* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$*,*
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$*,*
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ *(desigualdad triangular).*

Demostración. Se deducen de las propiedades de la norma. Por ejemplo,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|-(\mathbf{y} - \mathbf{x})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$ □

1.2. Espacio vectorial con producto interior

Definición 1.2.1. Sea V un espacio vectorial real. Un *producto interior* en V es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

que verifica:

1. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ y $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$.
2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
3. $\langle u, u\rangle \geq 0$ y $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

para cualesquiera $u, v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
El par $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se llama *espacio vectorial con producto interior*.

Ejemplo 1.2.2. En $\mathbb{R}^2$ definimos el producto interior

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

Este producto interior no coincide con el euclidiano usual, pero verifica las propiedades de bilinealidad, simetría y definido positivo.

Ejemplo 1.2.3. Sea V_n el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que n. Definimos

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt.$$

Entonces $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interior.

1.3. Espacios normados

Definición 1.3.1. Sea V un espacio vectorial real. Una *norma* en V es una aplicación

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$$

que verifica:

1. $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$,
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$,

para cualesquiera $v, w \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.
El par $(V, \| \cdot \|)$ se llama *espacio normado*.

Ejemplo 1.3.2. Sea V_n el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que n. Definimos, para $p \in V$,

$$\|p\| = \left(\int_0^1 |p(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Entonces $(V, \| \cdot \|)$ es un espacio normado.

Teorema 1.3.3. *Sea V un espacio vectorial real.*

1. *Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interior en V entonces*

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

define una norma en V;

2. *en ese caso, se tiene:*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2 \right),$$

para cualesquiera $u, v \in V$.

Teorema 1.3.4. *Una norma $\|\cdot\|$ en V procede de un producto interior si y solo si verifica, para todos $u, v \in V$, la identidad del paralelogramo*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

En ese caso, el producto interior viene dado por

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big).$$

Demostración. Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interior y $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, entonces

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2,$$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

Sumando ambas igualdades se obtiene la identidad del paralelogramo.

Recíprocamente, supongamos que la norma $\|\cdot\|$ verifica la identidad del paralelogramo. Definimos, para $u, v \in V$,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\big).$$

Usando la identidad del paralelogramo se comprueba directamente que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es simétrico y bilineal. Además,

$$\langle u, u\rangle = \frac{1}{4}\big(\|2u\|^2 - 0\big) = \|u\|^2,$$

luego es definido positivo. Por tanto, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interior y la norma asociada coincide con $\|\cdot\|$. □

Ejemplo 1.3.5. En $\mathbb{R}^n$ consideramos el producto escalar habitual

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n),\ \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

La norma asociada es

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ejemplo 1.3.6. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la norma del máximo

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|\}, \qquad \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Esta norma no procede de ningún producto interior, ya que no verifica la identidad del paralelogramo. En efecto, tomando

$$\mathbf{x} = (1, 0), \qquad \mathbf{y} = (0, 1),$$

se tiene

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

mientras que

$$2\|\mathbf{x}\|_\infty^2 + 2\|\mathbf{y}\|_\infty^2 = 2 + 2 = 4.$$

1.4. Espacios métricos

Definición 1.4.1. Un *espacio métrico* es un conjunto X dotado de una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada *distancia*, que cumple, para todo $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$,
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplo 1.4.2. En $\mathbb{R}^n$ definimos la distancia euclidiana $d = d_2$

$$d\big(\mathbf{x}, \mathbf{y}\big) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Entonces $(\mathbb{R}^n, d_2)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.4.3. En $\mathbb{R}^n$ definimos la distancia $d = d_\infty$

$$d\big(\mathbf{x}, \mathbf{y}\big) = \text{máx}\{|x_1 - y_1|, \ldots |x_n - y_n|\}.$$

Entonces $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.4.4 (Métrica discreta). Sea X un conjunto cualquiera. Definimos

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y, \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Entonces (X, d) es un espacio métrico, llamado espacio métrico *discreto*.

Proposición 1.4.5. *Sea* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. La aplicación*

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

define una distancia en V*, llamada* distancia inducida por la norma.

Ejercicio 1.4.6. *Demuestra la Prop. anterior.*

Ejemplo 1.4.7. En $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),$$

la distancia inducida es

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Ejemplo 1.4.8. Sea $X = \mathbb{R}$ y definamos

$$d(x, y) = \text{mín}\{1,\ |x - y|\}.$$

Entonces $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico.

Esta distancia verifica las propiedades de una métrica, pero no proviene de ninguna norma, ya que es acotada:

$$d(x, y) \leq 1 \qquad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R},$$

mientras que la distancia inducida por una norma nunca es acotada en un espacio vectorial no trivial (multiplicar el vector por un escalar arbitrraio).

1.5. Bolas abiertas y cerradas

Definición 1.5.1. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vector y sea $r > 0$ un número real *positivo*. La *bola abierta* en $\mathbb{R}^n$ de centro $\mathbf{x}$ y radio r es

$$B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}.$$

La *bola cerrada* en $\mathbb{R}^n$ de centro $\mathbf{x}$ y radio r es

$$\overline{B}(\mathbf{x}, r) = B[\mathbf{x}, r] = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}.$$

Nota 1.5.2.

- Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{o})$.
- Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $0 < r < s$, entonces

$$B(\mathbf{x}, r) \subset B[\mathbf{x}, r] \subset B(\mathbf{x}, s) \subset B[\mathbf{x}, s].$$

- Caso $n = 1$:

  1. si $x \in \mathbb{R}$, entonces $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$ es el valor absoluto, y para $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos $d(x, y) = |x - y|$.
  2. Si $x \in \mathbb{R}$ y r 0, entonces

  $$B(x, r) = (x - r, x + r), \qquad B[x, r] = [x - r, x + r]$$

  son intervalos.
  3. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces los intervalos (a, b) y $[a, b]$ pueden escribirse como

  $$(a, b) = \big(x - r, x + r\big), \qquad [a, b] = [x - r, x + r],$$

  donde

  $$x = \frac{a + b}{2}, \qquad r = \frac{b - a}{2}.$$

1.6. Distancia entre conjuntos. Conjuntos acotados. Diámetro.

Definición 1.6.1 (Conjunto acotado)**.** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que A es un conjunto *acotado* si está contenido en alguna bola abierta, es decir, si existen $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r_0 > 0$ tales que

$$A \subset B(\mathbf{x}_0, r_0).$$

Proposición 1.6.2. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es acotado.*
2. *Existe $r > 0$ tal que $A \subset B(\mathbf{o}, r)$.*
3. *Existe $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in A$.*

Demostración. 1. ⇒2. Sea $A \subset B(\mathbf{x}_0, r_0)$. Si $\mathbf{x} \in A$, por la desigualdad triangular,

$$d(\mathbf{x}, 0) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, 0) < r_0 + \|\mathbf{x}_0\|.$$

Por lo tanto $A \subset B(0, r)$ con $r = r_0 + \|\mathbf{x}_0\|$.

2.⇒3. Si $A \subset B(0, r)$, entonces para $\mathbf{x} \in A$:

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, 0) < r.$$

Basta tomar $M = r$.

3.⇒1. Si $\|\mathbf{x}\| \leq M$ para todo $x \in A$, entonces $A \subset B(0, M + 1)$, luego A es acotado. □

Nota 1.6.3. El conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto acotado, pues está contenido en cualquier bola.

Nota 1.6.4. Las definiciones de bola abierta, bola cerrada, conjunto acotado y diámetro de un conjunto son válidas en cualquier espacio métrico.

Definición 1.6.5 (Diámetro de un conjunto)**.** Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado no vacío, $A \neq \emptyset$, el *diámetro* de A es

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A\}.$$

Ejemplo 1.6.6. Sea $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$. Se tiene $\operatorname{diam}[a, b] = b - a$.

Si $x, y \in [a, b]$, entonces

$$|x - y| \leq b - a.$$

Por otra parte, tomando $x = a$ e $y = b$, se obtiene

$$|x - y| = b - a.$$

En este caso el diámetro es un máximo.

Ejemplo 1.6.7. Sea $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$, con $a < b$. Se tiene $\operatorname{diam}(a, b) = b - a$, aunque este valor no se alcanza.

Si $x, y \in (a, b)$, entonces

$$|x - y| < b - a.$$

Por tanto, $b - a$ es una cota superior del conjunto $\{|x - y| \mid x, y \in A\}$.

Además, para todo $\varepsilon > 0$ existen puntos $x = a + \varepsilon$ e $y = b - \varepsilon$ en (a, b) tales que

$$|x - y| = b - a - 2\varepsilon.$$

Esto muestra que los valores de $|x - y|$ pueden acercarse arbitrariamente a $b - a$.

Nota 1.6.8. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Decimos que un número real M es el **supremo** de A, y escribimos $M = \sup A$, si se cumplen las dos propiedades siguientes:

1. M es una cota superior de A, es decir, $x \leq M \quad$ para todo $x \in A$.

2. M es la menor de las cotas superiores de A; equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $M - \varepsilon < x$ (es decir ningún $M - \varepsilon$ es cota superior).

Definición 1.6.9 (Distancia entre conjuntos)**.** Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$, con $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, la *distancia entre los conjuntos* A y B es

$$d(A, B) = \operatorname{ínf}\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}.$$

Ejemplo 1.6.10. Sean $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $B = \{1\} \subset \mathbb{R}$.

En este caso, para $x \in (0, 1)$ e $y = 1$ se tiene

$$|x - y| = |x - 1| = 1 - x > 0.$$

Por tanto, 0 es una cota inferior del conjunto $\{|x - y| \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Además, dado $\varepsilon > 0$, tomando $x = 1 - \varepsilon \in (0, 1)$ se obtiene

$$|x - 1| = \varepsilon,$$

lo que muestra que los valores de $|x - y|$ pueden hacerse arbitrariamente pequeños.

En consecuencia,

$$d(A, B) = 0,$$

pero no existen $x \in A$ e $y \in B$ tales que $|x - y| = 0$.

Ejercicio 1.6.11 (Dos ramas hiperbólicas con distancia 0)**.** *En* $\mathbb{R}^2$ *(con la distancia euclídea), considérense los conjuntos*

$$A = \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}, \qquad B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}.$$

1. *Probar que* $A \cap B = \emptyset$.

2. *Demostrar que* $d(A, B) = 0$.

3. *Probar que no existen* $\mathbf{x}_0 \in A$, $\mathbf{y}_0 \in B$ *tales que* $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = d(A, B)$.

Nota 1.6.12. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado inferiormente. Decimos que un número real m es el **ínfimo** de A, y escribimos $m = \text{ínf}\, A$, si se cumplen las dos propiedades siguientes:

1. m es una cota inferior de A, es decir, $m \leq x \quad \text{para todo } x \in A.$

2. m es la mayor de las cotas inferiores de A; equivalentemente, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in A$ tal que $x < m + \varepsilon$ (es decir ningún $m + \epsilon$ es cota inferior).

Ejercicio 1.6.13 (Distancia de un punto a un conjunto)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. *Defínase*

$$d(\mathbf{x}, A) := \text{ínf}\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \mid \mathbf{y} \in A\}.$$

Probar que

$$\mathbf{x} \in \overline{A} \iff d(\mathbf{x}, A) = 0.$$

Nota 1.6.14 (Nota histórica).

1. Los espacios vectoriales con producto interior se conocen hoy como *espacios de Hilbert*, en honor a D. Hilbert, quien los introdujo en torno a 1907 en el estudio de ecuaciones integrales.

2. Los espacios normados fueron sistematizados por S. Banach en la década de 1920; su obra *Théorie des opérations linéaires* (1922) dio origen a la teoría moderna de los espacios de Banach (Un *espacio de Banach* es un espacio normado $(V, \|\cdot\|)$ que es *completo*, es decir, toda sucesión de Cauchy en V converge a un elemento de V).

3. El concepto general de espacio métrico fue introducido por M. Fréchet en su tesis doctoral (1906), donde estableció el marco abstracto que hoy se conoce como espacios métricos.

Tema 2

La topología de los espacios métricos y euclídeos.
(4 horas expositivas)

2.1. Conjuntos abiertos

Definición 2.1.1 (Conjunto abierto)**.** Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que U es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ si cada punto de U es el centro de alguna bola abierta contenida en U, es decir, si

$$\forall \mathbf{x} \in U \; \exists r > 0 \text{ tal que } B(\mathbf{x}, r) \subset U.$$

Si el contexto está claro, diremos que el subconjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es *abierto*, en vez de *abierto en* $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.1.2. *Toda bola abierta de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r_0 > 0$. Para ver que $U = B(\mathbf{x}_0, r_0)$ es abierto, tomamos $\mathbf{x} \in U$, de modo que $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < r_0$. Si $r = r_0 - d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) > 0$, entonces $B(\mathbf{x}, r) \subset U$. En efecto, si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r$ y, por la desigualdad triangular,

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) + r_0 - d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = r_0,$$

por lo que $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_0, r_0) = U$. □

Corolario 2.1.3. *Cualquier intervalo abierto acotado $(a, b) \subset \mathbb{R}$ es abierto en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.1.4. El intervalo $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

En efecto, en el punto $1 \in A$, para todo $r > 0$ se tiene $(1 - r, 1 + r) \not\subset (0, 1]$. Por tanto, A no es abierto en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.5. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Entonces A es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Ese conjunto es la bola abierta $B_{\mathbb{R}^2}(\mathbf{o}, 1)$, por tanto es un abierto. Hagamos una demostración directa. Sea $(x_0, y_0) \in A$. Se tiene $x_0^2 + y_0^2 < 1$. Definimos

$$r := 1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0.$$

Si $(x, y) \in B\big((x_0, y_0), r\big)$, entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + r = 1,$$

y por tanto $(x, y) \in A$.

Esto prueba que A es abierto en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.1.6. Sean $a < b$ y $c < d$ números reales. El conjunto $U = (a, b) \times (c, d) \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto.

En efecto, para cualquier $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in U$ existen $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$(x_1 - r_1, x_1 + r_1) \subset (a, b), \qquad (x_2 - r_2, x_2 + r_2) \subset (c, d).$$

Tomando $r = \text{mín}\{r_1, r_2\} > 0$, se tiene

$$B(\mathbf{x}, r) \subset (a, b) \times (c, d) = U,$$

y por tanto U es abierto.

Para demostrar el contenido, sea $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in B(\mathbf{x}, r)$. Entonces

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} < r,$$

y en particular

$$|y_1 - x_1| < r, \qquad |y_2 - x_2| < r.$$

(si alguno fuese $\geq r$ llegaríamos a que la raíz también es $\geq r$).

Como $r \leq r_1$ y $r \leq r_2$, se obtiene

$$|y_1 - x_1| < r_1, \qquad |y_2 - x_2| < r_2.$$

Por la definición de r_1 y r_2,

$$x_1 - r_1 \geq a, \qquad x_1 + r_1 \leq b, \qquad x_2 - r_2 \geq c, \qquad x_2 + r_2 \leq d,$$

y por tanto $\mathbf{y} \in (a, b) \times (c, d)$.

Teorema 2.1.7 (Propiedades de los conjuntos abiertos)**.**

1. *$\mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*
2. *El conjunto vacío $\varnothing$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.*
3. *La unión arbitraria de abiertos es un abierto.*
4. *La intersección* finita *de abiertos es un abierto.*

Demostración.

1. Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tenemos $B(\mathbf{x}, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Por tanto, $\mathbb{R}^n$ es abierto.
2. No existe ningún $\mathbf{x} \in \varnothing$ que contradiga la definición. Por tanto, el conjunto vacío $\varnothing$ se considera abierto.
3. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos y sea $U = \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$.

   Para cada $\mathbf{x} \in U$ existe $j \in I$ tal que $\mathbf{x} \in U_j$. Como U_j es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset U_j \subset U$. Por tanto, U es abierto.
4. Basta probarlo para dos abiertos y proceder por inducción. Sean U, V abiertos y sea $\mathbf{x} \in U \cap V$. Entonces existen $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ y $s > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, s) \subset V$. Sea $t = \text{mín}\{r, s\} > 0$. Entonces $B(\mathbf{x}, t) \subset U \cap V$ y concluimos que $U \cap V$ es abierto. □

Nota 2.1.8. La intersección de una familia arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto. Por ejemplo, $\{(-1/n,\ 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de abiertos en $\mathbb{R}$, pero

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-1/n,\ 1/n) = \{0\}$$

no es un abierto en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.9. Los intervalos abiertos no acotados son abiertos en $\mathbb{R}$, ya que pueden escribirse como uniones de bolas abiertas y, por tanto, como uniones de abiertos. En efecto,

$$(0,+\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-1/n,\ n), \qquad (-\infty,0) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-n,\ 1/n),$$

y más generalmente,

$$(a,+\infty) = \{x\in\mathbb{R} \mid a < x\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a,\ a+n),$$

$$(-\infty,b) = \{x\in\mathbb{R} \mid x < b\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(b-n,\ b).$$

Proposición 2.1.10. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$U \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \iff U \text{ es unión de bolas abiertas en } \mathbb{R}^n.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que U es abierto. Entonces

$$\forall\, \mathbf{x}\in U\ \exists\, r_{\mathbf{x}} > 0 \text{ tal que } B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset U.$$

Probaremos que

$$\bigcup_{\mathbf{x}\in U} B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) = U.$$

Un contenido es obvio, pues $B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset U$ para todo $\mathbf{x}\in U$. Recíprocamente, si $\mathbf{y}\in U$, entonces $\mathbf{y}\in B(\mathbf{y}, r_{\mathbf{y}}) \subset \bigcup_{\mathbf{x}\in U} B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})$, luego

$$U \subset \bigcup_{\mathbf{x}\in U} B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}).$$

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que U es unión de bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$. Como las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos y la unión arbitraria de abiertos es un abierto, se concluye que U es abierto. □

2.2. Topologías

Definición 2.2.1. Sea X un conjunto y $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos de X. Se dice que τ es una topología en X si:

1. $X \in \tau$.
2. $\varnothing \in \tau$.
3. La unión arbitraria de elementos de τ pertenece a τ.
4. La intersección finita de elementos de τ pertenece a τ.

El par (X, τ) se llama espacio topológico.

Ejemplo 2.2.2. Los abiertos de $\mathbb{R}^n$ forman una topología, llamada la topología euclidiana usual.

Ejemplo 2.2.3. En un conjunto X, la *topología discreta* es la formada por todos los subconjuntos posibles de X. Equivalentemente, los puntos son abiertos (todo otro subconjunto es unión de puntos).

Nota 2.2.4. En la asignatura "Topología general" se estudiarán espacios topológicos en general, muchos de los cuales ni siquiera proceden de una distancia.

Ejemplo 2.2.5. En el conjunto $X = \{a, b, c\}$ consideramos la colección

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Cumple los axiomas de topología (este ejemplo aparece en robótica y análisis de datos).

2.3. Cerrados

Definición 2.3.1 (Conjunto cerrado)**.** Sea $F \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que F es cerrado en $\mathbb{R}^n$ si su complementario $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Nota 2.3.2. Cuidado: cerrado *no* significa que no sea abierto. Puede ser ambas cosas a la vez.

Teorema 2.3.3 (Propiedades de los conjuntos cerrados)**.**

1. *$\varnothing$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.*
2. *$\mathbb{R}^n$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.*
3. *La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.*
4. *La unión finita de cerrados es cerrada.*

Demostración.

1. El conjunto vacío $\varnothing$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ porque su complementario $\mathbb{R}^n \setminus \varnothing = \mathbb{R}^n$ es abierto.
2. El conjunto $\mathbb{R}^n$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ porque su complementario $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \varnothing$ es abierto.
3. Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$. Por las leyes de De Morgan,
$$\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{R}^n \setminus F_i).$$
Como cada $\mathbb{R}^n \setminus F_i$ es abierto y la unión arbitraria de abiertos es abierta, se deduce que $\mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{i\in I} F_i$ es abierto. Por tanto, $\bigcap_{i\in I} F_i$ es cerrado.
4. Sean $F_1, \dots, F_k$ conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$. Entonces
$$\mathbb{R}^n \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k) = (\mathbb{R}^n \setminus F_1) \cap \cdots \cap (\mathbb{R}^n \setminus F_k).$$
Como la intersección finita de abiertos es abierta, se concluye que $\mathbb{R}^n \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k)$ es abierto, y por tanto $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ es cerrado. $\square$

Proposición 2.3.4. *Toda bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_0 > 0$, y consideremos la bola cerrada

$$F = B[\mathbf{x}_0, r_0].$$

Debemos comprobar que $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto. Tomamos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F$ y vamos a ver que es el centro de una bola abierta contenida en $\mathbb{R}^n \setminus F$.

Como $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus F$, se tiene $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) > r_0$. Definimos

$$r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - r_0 > 0.$$

Entonces $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$. En efecto, si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r$ y, por la desigualdad triangular,

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) + r,$$

de donde

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) > d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) - r = r_0,$$

y por tanto $\mathbf{y} \notin B[\mathbf{x}_0, r_0]$, es decir, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus F$. □

Ejemplo 2.3.5. Cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$. Los intervalos $[a, +\infty)$ y $(-\infty, b]$ también son cerrados en $\mathbb{R}$.

Nota 2.3.6. La unión de una familia arbitraria de cerrados puede no ser un cerrado. Por ejemplo, $\{[a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}^+}$ es una familia de cerrados en $\mathbb{R}$, pero su unión

$$\bigcup_{a \in \mathbb{R}^+} [a, +\infty) = (0, +\infty)$$

no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

2.4. Topología relativa

Cuando trabajamos con un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, no siempre nos interesa la topología del espacio ambiente, sino la estructura topológica interna de X. La topología relativa permite estudiar continuidad de aplicaciones, convergencia de sucesiones y conjuntos abiertos dentro de X.

Definición 2.4.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. La *bola abierta de* X (o *bola abierta relativa a* X) de centro $\mathbf{x} \in X$ y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B_X(\mathbf{x}, r) := \{\mathbf{y} \in X : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\} = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \cap X.$$

Definición 2.4.2 (Abierto relativo)**.** Sea $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que U es abierto en X (o *abierto relativo de* X) si

$$\forall\, \mathbf{x} \in U \;\exists\, r > 0 \text{ tal que } B_X(\mathbf{x}, r) \subset U.$$

Proposición 2.4.3. *Sea $U \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$U \text{ es abierto en } X \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, V \subset \mathbb{R}^n, \text{ abierto en } \mathbb{R}^n \text{ tal que } U = V \cap X.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que U es abierto en X. Entonces

$$\forall\, \mathbf{x} \in U\ \exists\, r_{\mathbf{x}} > 0 \text{ tal que } B_X(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \subset U.$$

Para cada $\mathbf{x} \in U$, consideramos la bola abierta $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})$, que es un abierto en $\mathbb{R}^n$, y definimos

$$V = \bigcup_{\mathbf{x}\in U} B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}).$$

Entonces V es abierto en $\mathbb{R}^n$ y se tiene

$$V \cap X = \bigcup_{\mathbf{x}\in U} \big(B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \cap X\big) = \bigcup_{\mathbf{x}\in U} B_X(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) = U.$$

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que existe un abierto V de $\mathbb{R}^n$ tal que $U = V \cap X$. Sea $\mathbf{x} \in U$. Entonces $\mathbf{x} \in V$ y, como V es abierto en $\mathbb{R}^n$, existe $r > 0$ tal que

$$B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \subset V.$$

Al intersectar con X se obtiene

$$B_X(\mathbf{x}, r) = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, r) \cap X \subset V \cap X = U.$$

Por tanto, $\forall\, \mathbf{x} \in U\ \exists\, r > 0$ tal que $B_X(\mathbf{x}, r) \subset U$, y se concluye que U es abierto en X. □

Definición 2.4.4 (Cerrado relativo)**.** Sea $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que F es cerrado en X (o *cerrado relativo de* X) si $X \setminus F$ es abierto en X.

Proposición 2.4.5. *Sea $F \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$F \text{ es cerrado en } X \iff \exists\, G \text{ cerrado en } \mathbb{R}^n \text{ tal que } F = G \cap X.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que F es cerrado en X. Entonces $X \setminus F$ es abierto en X, y por tanto existe un abierto V de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$X \setminus F = V \cap X.$$

Por tanto,

$$F = X \setminus (V \cap X) = (\mathbb{R}^n \setminus V) \cap X.$$

Sea $G = \mathbb{R}^n \setminus V$. Entonces G es cerrado en $\mathbb{R}^n$ y $F = G \cap X$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $F = G \cap X$, donde G es cerrado en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$X \setminus F = X \setminus (G \cap X) = (\mathbb{R}^n \setminus G) \cap X.$$

Como $\mathbb{R}^n \setminus G$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, se deduce que $X \setminus F$ es abierto en X. Por tanto, F es cerrado en X. □

Nota 2.4.6. La familia de abiertos relativos de un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es una topología en X, la *topología relativa de* X.

Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ con la topología relativa se llama subespacio topológico.

Ejercicio 2.4.7. *Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es* discreto *si la topología relativa de X es la topología discreta. Estudiar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son conjuntos discretos:*

$$\{1, 2\}, \qquad \mathbb{N}, \qquad \mathbb{Z}, \qquad \mathbb{Q}, \qquad \{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}, \qquad \{1/n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

2.5. Interior, clausura y frontera

Definición 2.5.1. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un *punto interior* de A si $\exists\, r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subset A$.
Denotamos
$$\mathrm{Int}(A) = A^\circ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ es punto interior de } A\},$$
el *interior* de A.

Ejemplo 2.5.2. Sea $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$. Calculamos su interior A°.

Si $x \in (0, 1)$, existe $r > 0$ tal que $(x-r, x+r) \subset (0, 1]$, por ejemplo tomando $r < \text{mín}\{x, 1-x\}$. Luego x es punto interior de A.

Por el contrario, el punto $1 \in A$ no es interior, ya que para todo $r > 0$ se tiene $(1-r, 1+r) \not\subset (0, 1]$.

En consecuencia, $A^\circ = (0, 1)$.

Proposición 2.5.3 (Propiedades del interior)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. El interior de A es el mayor abierto de $\mathbb{R}^n$ contenido en A, es decir:*

1. $A^\circ \subset A$.
2. *A° es abierto en $\mathbb{R}^n$.*
3. *Si U es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $U \subset A$, entonces $U \subset A^\circ$.*

Además,
$$A \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n \iff A = A^\circ.$$

Demostración. 1. Por definición, si $x \in A^\circ$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. En particular, $x \in A$, luego $A^\circ \subset A$.

2. Veamos que A° es abierto en $\mathbb{R}^n$. Sea $x \in A^\circ$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Para todo $y \in B(x, r)$, se tiene $B(y, r - \|x - y\|) \subset B(x, r) \subset A$, luego $y \in A^\circ$. Por tanto, $B(x, r) \subset A^\circ$, y esto prueba que A° es abierto.

3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $U \subset A$, y sea $x \in U$. Como U es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U \subset A$. Por definición, $x \in A^\circ$. Luego $U \subset A^\circ$.

Finalmente, si A es abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$, y por tanto $A \subset A^\circ$. Como siempre se cumple $A^\circ \subset A$, resulta $A = A^\circ$.

Recíprocamente, si $A = A^\circ$, entonces A coincide con un abierto y, por tanto, es abierto en $\mathbb{R}^n$. □

Ejercicio 2.5.4. *Demuestra que si $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ entonces* $\mathrm{Int}\, A \subset \mathrm{Int}\, B$.

Ejemplo 2.5.5. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es abierto en $\mathbb{R}$. Es más, $\mathrm{Int}\, \mathbb{Q} = \emptyset$.

En efecto, sea $x \in \mathbb{Q}$. Para todo $r > 0$, el intervalo $(x - r, x + r)$ contiene números irracionales, luego
$$(x - r, x + r) \not\subset \mathbb{Q}.$$
Por tanto, x no es punto interior de $\mathbb{Q}$ y se concluye que $\mathbb{Q}$ no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Definición 2.5.6. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{x} \text{ es punto adherente) de } A \iff \forall\, r > 0,\ B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Denotamos

$$\mathrm{Cl}(A) = \overline{A} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ es punto adherente de } A\}.$$

la *adherencia* o *clausura* de A.

Ejemplo 2.5.7. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Calculamos la clausura $\overline{A}$.

SOL: Vamos a probar que $\overline{A} = F: = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

"$\supset$" Sea $(x_0, y_0) \in F$, es decir, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0^2 + y_0^2 \leq 1$. Dado $r > 0$, tomamos

$$(x, y) = (1 - \varepsilon)(x_0, y_0), \qquad \varepsilon > 0 \text{ suficientemente pequeño.}$$

Entonces $x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon)^2(x_0^2 + y_0^2) < 1$, luego $(x, y) \in A$. Además, eligiendo ε tal que

$$\varepsilon \sqrt{x_0^2 + y_0^2} < r,$$

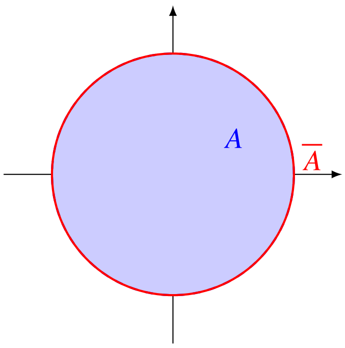
se tiene

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \varepsilon\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < r.$$

Por tanto,

$$B\big((x_0, y_0), r\big) \cap A \neq \emptyset,$$

y se concluye que $(x_0, y_0) \in \overline{A}$.



"$\subset$" En realidad probaremos que $\mathbb{R}^2 \setminus F \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{A}$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0^2 + y_0^2 > 1$. Definimos

$$r := \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 1}{2} > 0.$$

Si $(x, y) \in B\big((x_0, y_0), r\big)$, entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - \|(x, y) - (x_0, y_0)\| > \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - r = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + 1}{2} > 1,$$

y por tanto $(x, y) \notin A$. Luego $B\big((x_0, y_0), r\big) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$, es decir,

$$B\big((x_0, y_0), r\big) \cap A = \emptyset,$$

y se obtiene $(x_0, y_0) \notin \overline{A}$.

Ejercicio 2.5.8. *Demuestra que* $Cl(A \cup B) = \mathrm{Cl}(A) \cup \mathrm{Cl}(B)$.

Lema 2.5.9. *Para* $A \subset \mathbb{R}^n$ *se tiene:*

$$\mathbb{R}^n \setminus \overline{A} = \left(\mathbb{R}^n \setminus A\right)^{\circ}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A} \iff \mathbf{x} \notin \overline{A}$$

$$\iff \exists\, r > 0 \text{ tal que } B(\mathbf{x}, r) \cap A = \varnothing$$

$$\iff \exists\, r > 0 \text{ tal que } B(\mathbf{x}, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

$$\iff \mathbf{x} \in \left(\mathbb{R}^n \setminus A\right)^{\circ}.$$ □

Proposición 2.5.10 (Propiedades de la clausura)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$*. La clausura de* A *es el menor cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *que contiene a* A*, es decir:*

1. $A \subset \overline{A}$.
2. $\overline{A}$ *es cerrado en* $\mathbb{R}^n$.
3. *Si* F *es cerrado en* $\mathbb{R}^n$ *y* $A \subset F$*, entonces* $\overline{A} \subset F$.

Además,

$$A \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n \iff A = \overline{A}.$$

La demostración consiste en aplicar las leyes de De Morgan y el Lema anterior a las propiedades del interior. También puede hacerse una demostración directa con las definiciones.

Definición 2.5.11. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{x} \text{ es punto frontera de } A \iff \forall\, r > 0,\ B(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \varnothing \ \text{ y } \ B(\mathbf{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \varnothing.$$

La *frontera* de A se define como

$$\mathrm{Fr}(A) = \partial A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ es punto frontera de } A\}.$$

Proposición 2.5.12 (Caracterización de la frontera)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$*. Se tiene:*

$$\partial A \;=\; \overline{A} \setminus A^{\circ}.$$

Además,

$$\overline{A} \;=\; A^{\circ} \sqcup \partial A, \qquad \textit{(unión disjunta)}.$$

Demostración. Trata de escribir la demostración, es un ejercicio excelente para practicar las definiciones. □

2.6. Puntos de acumulación y puntos aislados

Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}, r > 0$. La *bola perforada* de centro $\mathbf{x}$ y radio r es

$$B^*(\mathbf{x}, r) := B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}.$$

Definición 2.6.1. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{x} \text{ es punto de acumulación de } A \iff \forall\, r > 0,\ B^*(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset.$$

El *conjunto derivado* de A se define como

$$A' := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \text{ es punto de acumulación de } A\}.$$

Definición 2.6.2. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{x} \text{ es punto aislado de } A \iff \exists\, r > 0 \text{ tal que } B(\mathbf{x}, r) \cap A = \{\mathbf{x}\}.$$

Ejercicio 2.6.3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto*

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. *Determinar el conjunto derivado A'.*
2. *Decidir qué puntos de A son aislados.*
3. *Calcular $\overline{A}$ y ∂A.*

Ejercicio 2.6.4. *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de A, entonces toda bola abierta de $\mathbb{R}^n$ con centro $\mathbf{x}$ contiene infinitos puntos de A.*

Nota 2.6.5 (Nota histórica). La noción de *punto de acumulación* aparece de manera natural en los trabajos de *Georg Cantor* (1845–1918) sobre conjuntos infinitos y teoría de conjuntos, especialmente en su estudio de subconjuntos del espacio real definidos por propiedades de aproximación y convergencia.

Estas ideas fueron sistematizadas y axiomatizadas por *Felix Hausdorff* (1868–1942) en su libro fundamental *Grundzüge der Mengenlehre* (1914), donde se introduce el enfoque axiomático de la topología general. En particular, Hausdorff formalizó la noción de espacio topológico mediante sistemas de abiertos que satisfacen ciertos axiomas, y estableció de manera rigurosa conceptos como interior, clausura, frontera y punto de acumulación en un marco abstracto.

Tema 3

Convergencia y completitud (4 horas expositivas)

3.1. Sucesiones

Una sucesión en un conjunto X es una aplicación

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow X, \qquad k \longmapsto x(k) = x_k.$$

Se dice que x_k es el término k-ésimo de la sucesión. La sucesión x se denotará por $\{x_k\}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Ejemplo 3.1.1. $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$ y $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $\mathbb{R}$.

El conjunto imagen de la sucesión $x : \mathbb{N} \to X$ es

$$\{x_k \colon k \in \mathbb{N}\},$$

Ejemplo 3.1.2. Los conjuntos de términos de las dos sucesiones anteriores son $\{0, 1\}$ y $\{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$.

3.2. Convergencia

Definición 3.2.1. Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión en $X \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ converge a $\mathbf{x}_0$ si

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \ \forall k \geq N,$$

equivalentemente, si

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \ \forall k \geq N.$$

Es decir, *casi todos* (todos menos un número finito) los términos de la sucesión están a distancia menor que ε de x_0. En tal caso se escribe $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$ o

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0.$$

Si una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ en X converge a un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, se dice que $\{\mathbf{x}_k\}$ es una sucesión convergente y que $\mathbf{x}_0$ es el límite de la sucesión. Si además $\mathbf{x}_0 \in X$, diremos también que $\{\mathbf{x}_k\}$ es convergente en X o que converge en X.

Ejemplo 3.2.2. La sucesión $\{1/n\}$ converge a 0 en $\mathbb{R}$, pero no es convergente en $(0, +\infty)$.

Proposición 3.2.3. *Si una sucesión es convergente, entonces tiene un único límite.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión en $X \subset \mathbb{R}^n$ y supongamos que existen $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ que son límites de $\{\mathbf{x}_k\}$. Si $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{y}_0$, entonces $r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) > 0$. Tomamos $\varepsilon = \dfrac{r}{2} > 0$. Como $\{\mathbf{x}_k\} \longrightarrow \mathbf{x}_0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \qquad \forall k \geq N_1,$$

y como $\{\mathbf{x}_k\} \longrightarrow \mathbf{y}_0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \qquad \forall k \geq N_2.$$

Por tanto, si $k \geq \max\{N_1, N_2\}$, usando la desigualdad triangular se tiene

$$r = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_k) + d(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_0) < \varepsilon + \varepsilon = r,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, debe ser $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$. □

En la definición de convergencia pueden reemplazarse bolas por abiertos.

Proposición 3.2.4. *Sea* $\{\mathbf{x}_k\}$ *una sucesión en* $X \subset \mathbb{R}^n$ *y sea* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$*. Entonces,*

$$\{\mathbf{x}_k\} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \iff \forall U \text{ abierto en } \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x}_0 \in U,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathbf{x}_k \in U\ \forall k \geq N.$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Sea U un abierto en $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}_0, r) \subset U$. Como $\{\mathbf{x}_k\} \longrightarrow \mathbf{x}_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, r) \qquad \forall k \geq N,$$

y por tanto $\mathbf{x}_k \in U$ para todo $k \geq N$.

($\Longleftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos el abierto $U = B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{x}_k \in U = B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \qquad \forall k \geq N,$$

lo cual significa precisamente que $\{\mathbf{x}_k\} \longrightarrow \mathbf{x}_0$. □ □

Nota 3.2.5 (Propiedad de Hausdorff). La unicidad del límite de una sucesión convergente se sigue de la propiedad de separación de Hausdorff:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y},\ \exists U, V \text{ abiertos tales que } \mathbf{x} \in U,\ \mathbf{y} \in V,\ U \cap V = \varnothing.$$

Por ello decimos que el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hausdorff.

En efecto, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces $r = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$, y tomando $\varepsilon = \dfrac{r}{2} > 0$ se tiene que

$$U = B(\mathbf{x}, \varepsilon), \qquad V = B(\mathbf{y}, \varepsilon)$$

son abiertos en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Esta propiedad la cumplen todos los espacios métricos.

Nota 3.2.6. La convergencia de una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ en $X \subset$ a un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse en términos de la convergencia a 0 de la sucesión de números reales $\{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\}$:

$$\{\mathbf{x}_k\} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon\ \forall k \geq N \iff \{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\} \longrightarrow 0.$$

Ejemplo 3.2.7. La sucesión $\{(1/n, 1/n)\}$ converge a $\mathbf{o}$ en $\mathbb{R}^2$ porque

$$\{d(\mathbf{x}_n, \mathbf{o})\} = \{\sqrt{2}/n\} \to 0 \text{ en } \mathbb{R}.$$

Por otra parte, veremos que la convergencia de una sucesión en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ está determinada por la convergencia de sus coordenadas, es decir por la convergencia de n sucesiones de números reales.

Lema 3.2.8. *Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\max_{i=1,\dots,n} |x_i| \;\le\; \|\mathbf{x}\| \;\le\; \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

Por tanto, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$|x_i - y_i| \;\le\; \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \;=\; d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \;\le\; \sqrt{n}\, \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}.$$

Demostración. La primera desigualdad es inmediata: para cada i,

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \;\le\; \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2} = \|\mathbf{x}\|.$$

Para probar la segunda desigualdad, sea $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = |x_j|.$$

Entonces $|x_k| \le |x_j|$ para todo k, y por tanto

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le x_j^2 + \cdots + x_j^2 \ (n \text{ veces}) = n x_j^2.$$

De aquí se deduce que

$$\|\mathbf{x}\| \;\le\; \sqrt{n}\, |x_j| = \sqrt{n}\, \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Aplicando esto a $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ se obtiene la segunda cadena de desigualdades. □

Teorema 3.2.9. *Sea $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$ una sucesión en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ un punto de $\mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{a} \iff \{x_{ki}\} \to a_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Demostración. "$\Rightarrow$" Por el lema previo,

$$|x_{ki} - a_i| \le \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| = d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \qquad \forall\, i = 1, \dots, n,$$

luego

$$\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{a} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon\ \forall\, k \ge N$$

implica

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ |x_{ki} - a_i| \le d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) < \varepsilon\ \forall\, k \ge N.$$

es decir $\{x_{ki}\} \to a_i$.

"$\Leftarrow$" Sea $\{x_{ki}\} \to a_i$. Dado $\varepsilon > 0$, consideramos $\varepsilon/\sqrt{n} > 0$ y usamos la hipótesis: para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\{x_{ki}\} \to a_i \implies \exists\, N_i \in \mathbb{N}\ \ |x_{ki} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\ \forall\, k \ge N_i.$$

Tomando $N = \max\{N_1, \dots, N_n\}$, se tiene

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \le \sqrt{n}\, \max\{|x_{k1} - a_1|, \dots, |x_{kn} - a_n|\} < \sqrt{n}\, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \varepsilon,$$

y por tanto $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{a}$. □

3.3. Convergencia y topología

3.4. Subsucesiones

Definición 3.4.1. Sea $\{x_k\}$ una sucesión en un conjunto X, definida por

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow X.$$

Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente, consideramos la composición

$$x \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X, \qquad k \longmapsto x_{\varphi(k)},$$

y se dice que $\{x_{\varphi(k)}\}$ es una *subsucesión* de $\{x_k\}$ (o que $x \circ \varphi$ es una subsucesión de x).

Ejemplo 3.4.2. La sucesión $\{1, 1/3, 1/5, \dots\}$ es una subsucesión de $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$. >Cuál es la aplicación φ?

Proposición 3.4.3. *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, entonces*

$$\varphi(k) \geq k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. En efecto, por inducción: $\varphi(1) \geq 1$, y si suponemos que $\varphi(k-1) \geq k-1$, entonces

$$k > k-1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(k) > \varphi(k-1) \geq k-1,$$

de donde se deduce que

$$\varphi(k) > k-1 \quad \Longrightarrow \quad \varphi(k) \geq k.$$

□

Proposición 3.4.4. *Si una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ en $X \subset \mathbb{R}^n$ converge a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces cualquier subsucesión $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ de $\{\mathbf{x}_k\}$ también converge a $\mathbf{x}_0$.*

Demostración.

$$\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0 \implies \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\;\; \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)\; \forall\, k \geq N.$$

Como $\varphi(k) \geq k$, se tiene $\varphi(k) \geq k \geq N$, y por tanto

$$\mathbf{x}_{\varphi(k)} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \qquad \forall\, k \geq N.$$

Luego $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \to \mathbf{x}_0$. □

Lema 3.4.5 (3.12 (Construcción de sucesiones convergentes))**.** *Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, 1/k)$. Entonces la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ converge a $\mathbf{x}_0$.*

Demostración.

$$0 \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{1}{k} \implies \exists \lim_{k\to\infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \;\text{ y }\; 0 \leq \lim_{k\to\infty} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Por tanto,

$$\{d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0)\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0.$$

□

3.5. Clausura y sucesiones

Proposición 3.5.1 (Caracterización de la clausura por sucesiones)**.** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$\mathbf{x}_0 \in \overline{A} \iff \exists\,\{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A \text{ tal que } \{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0.$$

Demostración. "$\Rightarrow$" Supongamos $\mathbf{x}_0 \in \overline{A}$. Entonces,

$$\forall\, r > 0, \quad B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset.$$

En particular, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$B(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A \neq \emptyset.$$

Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, 1/k) \cap A$. Por el Lema 3.12, la sucesión $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ verifica $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$.

"$\Leftarrow$" Para comprobar que $\mathbf{x}_0 \in \overline{A}$ basta ver que

$$\forall\, r > 0, \quad B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ una sucesión tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$. Dado $\varepsilon = r > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \qquad \forall\, k \geq N.$$

En particular, $\mathbf{x}_N \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \cap A$, luego $B(\mathbf{x}_0, r) \cap A \neq \emptyset$, y por tanto $\mathbf{x}_0 \in \overline{A}$. □

Corolario 3.5.2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces,*

$$A \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n \iff \forall\,\{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } A,\ \big(\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_0 \in A\big).$$

Demostración. "$\Rightarrow$" Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión en A tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Como A es cerrado, se tiene $\mathbf{x}_0 \in \overline{A} = A$.

"$\Leftarrow$" Basta ver que $\overline{A} = A$, es decir, que $\overline{A} \subset A$. En efecto, si $\mathbf{x}_0 \in \overline{A}$, por la Proposición 3.5.1 existe una sucesión $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$. Por hipótesis, se deduce que $\mathbf{x}_0 \in A$. □

Nota 3.5.3.
1. La proposición anterior se usa en la práctica como sigue: si queremos probar que un punto $\mathbf{x}_0$ está en la clausura de A, buscamos una sucesión $\{\mathbf{x}_k\} \subset A$ que converja a $\mathbf{x}_0$.
2. Si queremos probar que un punto $\mathbf{x}_0$ no está en el interior de A, debemos encontrar una sucesión en el complementario de A que converja a $\mathbf{x}_0$.

3.6. Sucesiones de Cauchy

Definición 3.6.1. (Sucesión de Cauchy)] Una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ en $X \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es una *sucesión de Cauchy* si

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \qquad \forall\, k, l \geq N.$$

Ser de Cauchy es una propiedad intrínseca de la sucesión, es decir, no depende del conjunto X. En cambio, la convergencia sí puede depender de X.

Ejercicio 3.6.2. *El conjunto de puntos de cualquier sucesión de Cauchy es un conjunto acotado.*

SOL: Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión de Cauchy. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < 1 \qquad \forall\, k, l \geq N.$$

En particular,

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_N) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N\| < 1 \qquad \forall\, k \geq N.$$

Entonces, para todo $k \geq N$,

$$\|\mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N + \mathbf{x}_N\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_N\| + \|\mathbf{x}_N\| < 1 + \|\mathbf{x}_N\|.$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{x}_k\| \leq \text{máx}\{\|\mathbf{x}_1\|, \ldots, \|\mathbf{x}_{N-1}\|,\ 1 + \|\mathbf{x}_N\|\} = M \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$\{\mathbf{x}_k \colon k \in \mathbb{N}\} \subset B_{\mathbb{R}^n}(0, M+1).$$

Proposición 3.6.3. *Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión en $X \subset \mathbb{R}^n$ que converge a un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, y fijemos $\varepsilon > 0$. Como $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall\, k \geq N.$$

Entonces, para cualesquiera $k, l \geq N$,

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto, $\{\mathbf{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy. □

Ejercicio 3.6.4. *Probar que el conjunto de términos de una sucesión convergente es cerrado y acotado.*

Proposición 3.6.5. *Toda subsucesión de una sucesión de Cauchy es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión de Cauchy y sea $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ una subsucesión de $\{\mathbf{x}_k\}$, donde $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente. Como $\{\mathbf{x}_k\}$ es de Cauchy,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon \qquad \forall\, k, l \geq N.$$

Y como $\varphi(k) \geq k$, si $k, l \geq N$ entonces $\varphi(k) \geq N$ y $\varphi(l) \geq N$, luego

$$d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_{\varphi(l)}) < \varepsilon \qquad \forall\, k, l \geq N.$$

Por tanto, $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ es una sucesión de Cauchy. □

Proposición 3.6.6. *Si $\{\mathbf{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy y alguna subsucesión $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ converge a un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\{\mathbf{x}_k\}$ también converge a $\mathbf{x}_0$.*

Demostración. Tenemos que demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \;\; d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \qquad \forall k \geq N.$$

Fijamos $\varepsilon > 0$.

Como $\{\mathbf{x}_k\}$ es sucesión de Cauchy, dado $2\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < 2\varepsilon \qquad \forall k, l \geq N_1.$$

Y como $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \to \mathbf{x}_0$, dado $2\varepsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_0) < 2\varepsilon \qquad \forall k \geq N_2.$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ y sea $k \geq N$. Entonces $\varphi(k) \geq k \geq \max\{N_1, N_2\}$, y por tanto

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{\varphi(k)}) + d(\mathbf{x}_{\varphi(k)}, \mathbf{x}_0) < 2\varepsilon + 2\varepsilon = \varepsilon.$$

Luego $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$. □

3.7. Completitud

Importancia de la completitud. Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy converge en él; es decir, si toda sucesión cuyos términos se van aproximando entre sí tiene un límite dentro del propio espacio.

La noción de completitud es fundamental en Análisis y Topología, ya que muchos métodos matemáticos (construcción de soluciones de ecuaciones, métodos iterativos, aproximaciones numéricas, etc.) generan sucesiones de Cauchy. Si el espacio no es completo, dichos procesos pueden no converger dentro del espacio,

Un ejemplo clásico es el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$. Existen sucesiones de racionales que son de Cauchy pero no convergen en $\mathbb{Q}$ (por ejemplo, sucesiones que convergen a $\sqrt{2}$). Esto muestra que $\mathbb{Q}$ no es completo y que resulta insuficiente como marco para ciertos problemas analíticos.

La completitud no es solo una propiedad técnica, sino una condición esencial que permite trabajar con seguridad en procesos de límite, continuidad y convergencia.

Definición 3.7.1. Se dice que un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Ejemplo 3.7.2.

1. $\mathbb{Q}$ no es completo. La sucesión de aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$ es de Cauchy, pero no es convergente en $\mathbb{Q}$.
2. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es completo. La sucesión de irracionales $\sqrt{5}/n$ converge a 0, que es racional.
3. $(0, +\infty)$ no es completo. La sucesión $1/n$ converge a 0, por tanto es de Cauchy, pero no es convergente en $(0, +\infty)$.
4. $\mathbb{R}$ es completo. Lo damos por sabido de Análisis.

Ejemplo 3.7.3. El conjunto (disco abierto)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 1\}$$

no es completo.

En efecto, la sucesión

$$\mathbf{x}_k = \left(1 - \frac{1}{k}, 0\right) \in D$$

es una sucesión de Cauchy que converge a $(1, 0) \notin D$. Por tanto, D no es completo.

3.8. Completitud del espacio euclidiano.

Teorema 3.8.1. *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es completo.*

Demostración. Consideramos una sucesión de Cauchy $\{\mathbf{x}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$, y vamos a comprobar que existe $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{a}$, para lo que utilizaremos el carácter completo de $\mathbb{R}$.

Escribimos $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \ldots, x_{kn})\}$, y tenemos las sucesiones $\{x_{ki}\}$ de números reales, $1 \leq i \leq n$. Por el Lema 3.2.8 se tiene

$$|x_{ki} - x_{li}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\| = d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) \qquad \forall\, k, l \in \mathbb{N},\ \forall\, i = 1, \ldots, n, \tag{$\star$}$$

y por el Teorema 3.2.9,

$$\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \iff \{x_{ki}\} \to a_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{$\star\star$}$$

Por tanto,

$$\{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy } \implies \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l) < \varepsilon\ \forall\, k, l \geq N$$

y, usando $(\star)$,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \ |x_{ki} - x_{li}| < \varepsilon\ \forall\, k, l \geq N, \qquad \forall\, i. \tag{$*$}$$

Luego, para cada i, la sucesión $\{x_{ki}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, existe $a_i \in \mathbb{R}$ tal que $\{x_{ki}\} \to a_i$ para todo i. Finalmente, por $(\star\star)$, se deduce que

$$\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \ldots, x_{kn})\} \to (a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{a}. \qquad \square$$

Proposición 3.8.2. *Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$X \text{ es completo} \iff X \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la caracterización (Corolario 3.5.2) de un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^n$ como aquel que contiene el límite de cada sucesión convergente de puntos del conjunto, y de que $\mathbb{R}^n$ es completo:

Si $X \subset \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
X \text{ es cerrado en } \mathbb{R}^n &\iff \forall\, \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X,\ \big(\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in X\big) \\
&\iff \forall\, \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X,\ \big(\{\mathbf{x}_k\} \text{ convergente} \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\} \text{ converge en } X\big) \qquad (\mathbb{R}^n \text{ completo}) \\
&\iff \forall\, \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X,\ \big(\{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión de Cauchy} \Rightarrow \{\mathbf{x}_k\} \text{ converge en } X\big) \\
&\iff X \text{ es completo.}
\end{aligned} \qquad \square$$

Nota 3.8.3. Las definiciones de sucesión de Cauchy y espacio completo son válidas para los espacios métricos. Sin embargo hay espacios métricos que no son completos.

Tema 4

Continuidad
(8 horas expositivas)

4.1. Aplicaciones continuas

Definición 4.1.1 (Aplicación continua en un punto)**.** Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $f : X \to Y$ una aplicación y $\mathbf{x}_0 \in X$. Se dice que $f : X \to Y$ es *continua en* $\mathbf{x}_0$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } \mathbf{x} \in X,\ d_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \ \Rightarrow\ d_{\mathbb{R}^m}\big(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)\big) < \varepsilon.$$

Equivalentemente, si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big).$$

Ejemplo. La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

no es continua en $x = 0$.

En efecto, $f(0) = 1$ y existe $\epsilon = 1/2$ tal que, sea cual sea el $\delta > 0$, la imagen del intervalo $(-\delta, +\delta)$ no está contenida en $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon) = (1/2, 3/2)$, ya que los puntos $x \in (-\delta, 0)$ van en $f(x) = 0$.

Nota 4.1.2 (El codominio no es esencial). La continuidad de una aplicación $f \colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ no depende del codominio de f, con tal de que esté bien definida.

Si en vez de $f \colon X \to Y \subset \mathbb{R}^n$ consideramos la aplicación

$$\tilde{f} : X \to \mathbb{R}^m, \qquad \mathbf{x} \longmapsto \tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

y $\mathbf{x}_0 \in X$, se tiene que f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solo si $\tilde{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$, ya que, puesto que $f(X) \subset Y$,

$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big) \iff f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset B_{\mathbb{R}^m}\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big).$$

Si, además, $f(X) \subset Z \subset \mathbb{R}^m$, también tiene sentido considerar la aplicación

$$\bar{f} : X \to Z, \qquad f_s(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

y se verifica igualmente que

$$f \text{ es continua en } \mathbf{x}_0 \iff \tilde{f} \text{ es continua en } \mathbf{x}_0 \iff \bar{f} \text{ es continua en } \mathbf{x}_0,$$

ya que

$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0),\varepsilon\big) \iff f\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big) \subset B_Z\big(f(\mathbf{x}_0),\varepsilon\big).$$

4.2. Continuidad global

Definición 4.2.1 (Aplicación globalmente continua)**.** Una aplicación $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ se dice *continua* si f es continua en $\mathbf{x}_0$ para todo punto $\mathbf{x}_0 \in X$.

Ejemplo 4.2.2. Son aplicaciones continuas:

1. Si $X \subset \mathbb{R}^n$, la aplicación identidad en X,

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X, \qquad \mathbf{x} \longmapsto \mathrm{id}_X(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

2. Si $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$, la inclusión de X en Y,

$$i\colon X \hookrightarrow Y, \qquad \mathbf{x} \longmapsto i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

   En particular, la inclusión de X en $\mathbb{R}^n$, $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

3. Las aplicaciones constantes: si $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$, para cualquier punto $\mathbf{y}_0 \in Y$, la aplicación constante

$$\mathrm{cte.}_{\mathbf{y}_0}\colon X \to Y, \qquad \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{y}_0.$$

Proposición 4.2.3. *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $Z \subset \mathbb{R}^l$, y consideremos las aplicaciones $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Si f es continua en $\mathbf{x}_0 \in X$ y g es continua en $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in Y$, entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es continua en $\mathbf{x}_0$.*

Demostración. Tenemos que probar que

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \;\; (g \circ f)\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big) \subset B_Z\big((g \circ f)(\mathbf{x}_0),\varepsilon\big).$$

Para ello tomamos $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $\mathbf{y}_0$, existe $\eta > 0$ tal que

$$g\big(B_Y(\mathbf{y}_0,\eta)\big) \subset B_Z\big(g(\mathbf{y}_0),\varepsilon\big). \tag{$*$}$$

Y como f es continua en $\mathbf{x}_0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0),\eta\big). \tag{$**$}$$

Por tanto,

$$(g \circ f)\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big) = g\Big(f\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big)\Big) \subset g\big(B_Y(f(\mathbf{x}_0),\eta)\big) \subset B_Z\big(g(f(\mathbf{x}_0)),\varepsilon\big),$$

y queda probado que $g \circ f$ es continua en $\mathbf{x}_0$. $\square$

Teorema 4.2.4 (Caracterización de la continuidad global)**.** *Sea $f: X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *La aplicación $f: X \to Y$ es continua (en todos los puntos).*
2. *La imagen inversa $f^{-1}(V)$ de todo abierto V en Y es un abierto en X.*
3. *La imagen inversa $f^{-1}(F)$ de todo cerrado F en Y es un cerrado en X.*

Demostración. (1)⇒(2) Sea V un abierto en Y y vamos a comprobar que $f^{-1}(V)$ es abierto en X, es decir, que todo punto $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V)$ es centro de una bola abierta relativa a X contenida en $f^{-1}(V)$.

Si $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V)$, entonces $f(\mathbf{x}_0) \in V$. Como V es abierto en Y, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big) \subset V.$$

Por (1), existe $\delta > 0$ tal que

$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big) \subset V.$$

Por tanto,

$$B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(V),$$

y queda probado que $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

(2)⇒(1) Sea $\mathbf{x}_0 \in X$ y dado $\varepsilon > 0$ vamos a comprobar que existe $\delta > 0$ tal que

$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big).$$

Tomamos

$$V = B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big),$$

que es un abierto en Y y satisface $f(\mathbf{x}_0) \in V$. Por (2), $f^{-1}(V)$ es abierto en X, y como $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(V)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(V).$$

Aplicando f, se obtiene

$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset f\big(f^{-1}(V)\big) \subset V = B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big),$$

y por tanto f es continua en $\mathbf{x}_0$. Como $\mathbf{x}_0$ era arbitrario, f es continua.

(2)⇔(3) Se sigue de que, para todo $C \subset Y$,

$$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C),$$

y de que los subconjuntos cerrados de Y (y de X) son los complementarios de los abiertos en Y (y en X, respectivamente). □

Nota 4.2.5. En la práctica usaremos este teorema para comprobar si un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es abierto o cerrado.

Por ejemplo, sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 < y\}$ el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ por encima del eje OX y por debajo de la parábola $y = x^2$. Si consideramos las aplicaciones auxiliares

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2,$$

y
$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x) = y - x^2$$
tendremos que
$$U = f^{-1}(0,+\infty) \cap g^{-1}(0,+\infty),$$
es intersección de dos abiertos, por ser f, g continuas (daremos por sabido que las funciones elementales en sus dominios naturales de definición son continuas).

Corolario 4.2.6. *Si $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ y $g\colon Y \subset \mathbb{R}^m \to Z \subset \mathbb{R}^l$ son aplicaciones continuas, entonces la composición $g \circ f\colon X \to Z$ también es continua.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Prop. 4.2.3. Tabién podemos demostrarla usando el Teorema anterior: Sea V un abierto en Z. Como g es continua, $g^{-1}(V)$ es un abierto en Y. Como f es continua, $f^{-1}\big(g^{-1}(V)\big)$ es un abierto en X. Pero
$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}\big(g^{-1}(V)\big),$$
luego $(g \circ f)^{-1}(V)$ es un abierto en X. Por la caracterización de la continuidad mediante preimágenes de abiertos, $g \circ f$ es continua. □

4.3. Continuidad secuencial

Definición 4.3.1. Sea $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación. Decimos que f es secuencialmente continua en $\mathbf{x}_0$, si la imagen de toda sucesión convergente en X con límite x_0 es una sucesión convergente en Y con límite $f(x_0)$,
$$\forall \{\mathbf{x}_k\} \text{ sucesión en } X, \ \big(\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0 \ \Rightarrow \ \{f(\mathbf{x}_k)\} \to f(\mathbf{x}_0)\big).$$

Teorema 4.3.2 (4.8 (Caracterización secuencial de la continuidad))**.** *Sea $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación y sea $\mathbf{x}_0 \in X$. Entonces, f es continua en $\mathbf{x}_0$ si, y solo si, f es secuencialmente continua en $\mathbf{x}_0$.*

Demostración. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es continua en $\mathbf{x}_0$. Consideramos una sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ en X que converge a $\mathbf{x}_0$ y vamos a comprobar que la sucesión $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ en Y converge a $f(\mathbf{x}_0)$. Para ello tomamos $\varepsilon > 0$ y tenemos que encontrar un número natural N tal que, a partir de él, todos los términos de la sucesión $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ están en $B_Y\big(f(\mathbf{x}_0),\varepsilon\big)$:

Como f es continua en $\mathbf{x}_0$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0),\varepsilon\big).$$
Como $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ y $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$, dado $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0,\delta) \qquad \forall\, k \geq N.$$
Por tanto,
$$f(\mathbf{x}_k) \in f\big(B_X(\mathbf{x}_0,\delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0),\varepsilon\big) \qquad \forall\, k \geq N,$$
y se concluye que $\{f(\mathbf{x}_k)\} \to f(\mathbf{x}_0)$.

Para probar la implicación recíproca, supongamos que f no es continua en $\mathbf{x}_0$ y vamos a ver que en ese caso f no es secuencialmente continua en $\mathbf{x}_0$. Usaremos la construcción de sucesiones convergentes para obtener una sucesión en X que converge a $\mathbf{x}_0$ pero tal que la sucesión de las imágenes no converge a $f(\mathbf{x}_0)$:

Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, entonces

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \forall\, \delta > 0, \qquad f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \not\subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big).$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomando $\delta_k = \frac{1}{k}$, existe $\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, \delta_k)$ tal que

$$f(\mathbf{x}_k) \notin B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big), \qquad \text{es decir,} \qquad d\big(f(\mathbf{x}_k), f(\mathbf{x}_0)\big) \geq \varepsilon \quad \forall\, k.$$

Como $\mathbf{x}_k \in B_X(\mathbf{x}_0, 1/k)$ para todo k, se tiene $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$, pero

$$\{f(\mathbf{x}_k)\} \not\to f(\mathbf{x}_0).$$

Por tanto, f no es secuencialmente continua en $\mathbf{x}_0$. □

4.4. Componentes

Para cada $i = 1, \dots, n$, la proyección i-ésima de $\mathbb{R}^n$ es la aplicación

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \pi_i(\mathbf{x}) = x_i.$$

Proposición 4.4.1. *Cada proyección $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua.*

Demostración. Para probar que cada π_i es continua utilizamos la caracterización secuencial de la continuidad. Sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y sea $\{\mathbf{x}_k\} = \{(x_{k1}, \dots, x_{kn})\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ que converge a $\mathbf{a}$. Por el Teorema 3.2.9,

$$\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{a} \iff \{x_{ki}\} \to a_i \qquad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

En particular, para cada i se tiene

$$\{\pi_i(\mathbf{x}_k)\} = \{x_{ki}\} \to a_i = \pi_i(\mathbf{a}).$$

Por tanto, π_i es secuencialmente continua en todo punto de $\mathbb{R}^n$, y en consecuencia, π_i es continua. □

Definición 4.4.2 (Componentes de una aplicación)**.** Sea $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación. Para cada $j = 1, \dots, m$, la componente j-ésima de f es la composición

$$f_j = \pi_j \circ f.$$

Por tanto,

$$f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\big),$$

y se denota $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Proposición 4.4.3. *Sea $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{x}_0 \in X$. Entonces, f es continua en $\mathbf{x}_0$ si, y solo si, lo es cada una de sus componentes:*

$$f = (f_1, \dots, f_m) \text{ es continua en } \mathbf{x}_0 \iff f_j = \pi_j \circ f \text{ es continua en } \mathbf{x}_0 \quad \forall\, j = 1, \dots, m.$$

Demostración. $\Rightarrow$ Si $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\mathbf{x}_0 \in X$, y dado que cada proyección $\pi_j\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es continua en $f(\mathbf{x}_0)$ (Proposición 4.10), la composición $f_j = \pi_j \circ f$ es continua en $\mathbf{x}_0$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que cada componente f_j es continua en $\mathbf{x}_0$ $(j = 1, \ldots, m)$ y vamos a probar que f es continua en $\mathbf{x}_0$ comprobando que es secuencialmente continua.

Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión en X tal que $\{\mathbf{x}_k\} \to \mathbf{x}_0$. Como cada f_j es continua en $\mathbf{x}_0$, se tiene

$$\{f_j(\mathbf{x}_k)\} \to f_j(\mathbf{x}_0) \qquad \forall\, j = 1, \ldots, m.$$

Por tanto,

$$\{f(\mathbf{x}_k)\} = \big\{(f_1(\mathbf{x}_k), \ldots, f_m(\mathbf{x}_k))\big\} \to (f_1(\mathbf{x}_0), \ldots, f_m(\mathbf{x}_0)) = f(\mathbf{x}_0),$$

usando el Teorema 3.2.9. Luego f es secuencialmente continua en $\mathbf{x}_0$, y por consiguiente f es continua en $\mathbf{x}_0$. □

Corolario 4.4.4. *Una aplicación $f = (f_1, \ldots, f_m)\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es (globalmente) continua si, y solo si, lo es cada una de sus componentes*

$$f_j\colon X \to \mathbb{R}, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

4.5. Restricción

Proposición 4.5.1. *Si $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ es una aplicación continua y $A \subset X$, entonces la restricción de f a A,*

$$f|_A\colon A \to Y,$$

también es continua.

Demostración. Sea $i\colon A \hookrightarrow X$ la aplicación inclusión, que es continua. Como f es continua, la composición

$$f|_A = f \circ i$$

es composición de dos aplicaciones continuas. Por tanto, $f|_A$ es continua. □

Nota 4.5.2. Puede suceder que una aplicación $f\colon X \to Y$ sea tal que su restricción $f|_A\colon A \to Y$ sea continua, para algún subconjunto A de X, pero que f no sea continua en puntos de A.

Esto ocurre porque la continuidad de la restricción $f|_A$ solo tiene en cuenta el comportamiento de f sobre puntos de A, y no cómo se comporta f en puntos de X cercanos a A pero que no pertenecen a A.

Ejemplo 4.5.3. La función

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \le 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

cumple que la restricción a $(-\infty, 0]$ es continua (es constante) pero f no es continua en 0.

Esto no puede ocurrir si el punto $\mathbf{x}_0$ está en el interior de A. En ese caso, todo punto de X suficientemente cercano a $\mathbf{x}_0$ pertenece ya a A, y por tanto no hay puntos exteriores a A que puedan interferir en el comportamiento de la función alrededor de $\mathbf{x}_0$.

En resumen, el problema descrito anteriormente solo puede aparecer en puntos de A que están en la frontera de A.

Proposición 4.5.4. *Sea $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación. Si U es abierto en X y la restricción $f|_U\colon U \to Y$ es continua, entonces f es continua en todos los puntos de U.*

Demostración. Sea $\mathbf{x}_0 \in U$ y veamos que f es continua en $\mathbf{x}_0$, es decir, que

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \ f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big).$$

Por ser $f|_U\colon U \to Y$ continua en $\mathbf{x}_0$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$f|_U(B_U(\mathbf{x}_0, \delta')) \subset B_Y(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Como U es abierto en X, existe $\delta'' > 0$ tal que

$$B_X(\mathbf{x}_0, \delta'') \subset U,$$

y tomando $\delta = \text{mín}\{\delta', \delta''\}$ tenemos

$$B_X(\mathbf{x}_0, \delta) = B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap X \subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta') \quad \text{porque } \delta \leq \delta',$$

y

$$B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset B_X(\mathbf{x}_0, \delta'') \subset U \quad \text{porque } \delta \leq \delta''.$$

Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$B_X(\mathbf{x}_0, \delta) \subset B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta') \cap U = B_U(\mathbf{x}_0, \delta').$$

Aplicando f, se obtiene

$$f\big(B_X(\mathbf{x}_0, \delta)\big) \subset f\big(B_U(\mathbf{x}_0, \delta')\big) = f|_U\big(B_U(\mathbf{x}_0, \delta')\big) \subset B_Y\big(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon\big),$$

(porque $f = f|_U$ en $B_U \subset U$)lo que prueba que f es continua en $\mathbf{x}_0$. □

Ejercicio 4.5.5. *Consideramos la aplicación $f\colon X = \mathbb{R}^2 \to Y = \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{si } xy > 0, \\ 0, & \text{si } xy \leq 0. \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en todos los puntos del dominio.

SOL: a) Sean

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}, \qquad V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}.$$

Estos dos conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}^2$; un modo de comprobarlo consiste en mostrar que se pueden escribir como imágenes inversas de abiertos, en este caso en $\mathbb{R}$, por alguna aplicación continua. Si consideramos la aplicación

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{dada por} \qquad h(x, y) = xy,$$

entonces h es continua, y

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) > 0\} = h^{-1}\big((0, +\infty)\big),$$

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h(x, y) < 0\} = h^{-1}\big((-\infty, 0)\big).$$

Ahora, $f|_U = (\pi_1)|_U$ es continua ya que es la restricción de la proyección π_1 a U, y puesto que U es abierto en $\mathbb{R}^2$, f es continua en todos los puntos de U por la Prop. 4.5.4.

Además, $f|_V$ es la aplicación constante 0, luego es continua y, puesto que V es abierto en $\mathbb{R}^2$, f también es continua en todos los puntos de V.

Se concluye que f es continua al menos en cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $xy \neq 0$.

b) Ahora vamos a estudiar la continuidad en los puntos donde $xy = 0$, por continuidad secuencial.

Fijemos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0y_0 = 0$. Sea $\{(x_k, y_k)\}$ una sucesión tal que

$$\{(x_k, y_k)\} \to (x_0, y_0).$$

Esto significa que $\{x_k\} \to x_0$ y que $\{y_k\} \to y_0$. Además sabemos que $f(x_0y_0) = 0$.

Discusión: Tenemos dos tipos de puntos: aquellos en los que $x_ky_k > 0$, para los que $f(x_k, y_k) = x_k$, y aquellos en los que $x_ky_k \leq 0$, para los que $f(x_k, y_k) = 0$.

Se ve que si hay un número infinito de los del primer tipo, hay una subsucesión de imágenes $\{x_{\varphi(k)}\} \to x_0$, por lo que la sucesión $\{f(x_k, y_k)\}$, o bien no converge, o tiene que converger a x_0 por el teorema 3.4.4. Si solo hay un número finito, el límite de las imágenes será el de la subsucesión $\{0, 0, 0, \dots\} \to 0$.

Por tanto, podemos dar la solución: sea (x_0, y_0) con $x_0y_0 = 0$.

Caso 1: si $x_0 > 0$ (por tanto $y_0 = 0$) tenemos la sucesión $\{(x_0, 1/k)\} \to (x_0, 0)$, y como $x_0(1/k) > 0$ la sucesión $\{f(x_k, y_k) = x_k\} \to x_0 \neq 0 = f(x_0, 0)$. La función no es continua en ese punto.

Caso 2: si $x_0 < 0$, hacemos el mismo razonamiento con la sucesión $(x_0, -1/k)$. La función tampoco es continua en $(x_0, 0)$.

Caso 3: si $x_0 = 0$, la sucesión de imágenes está formada por x_k's o or 0's y en ambos casos converge a $0 = f(0, y_0)$. La función es continua. Este caso puede hacerse también con la definición de continuidad: sea $(0, y_0)$, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que conseguir $|f(x_k, y_k)| < \varepsilon$ usando que $|(x_k, y_k) - (0, y_0)| < \delta$. Tenemos $x_k^2 + (y_k - y_0)^2) < \delta^2$, luego $x_k^2 < \delta^2$, es decir $|x_k| < \delta$ y como $f(x_k, y_k) = x_k$ ó 0, basta tomar $0 < \delta < \epsilon$.

En resumen, la función es continua excepto en los puntos de la forma $(x_0, 0)$, con $x_0 \neq 0$.

Nota 4.5.6. Para estudiar la continuidad de una función definida a trozos, primero tomamos las restricciones a grandes subdominios abiertos. Después, para los demás puntos, encontramos una sucesión que falle para la continuidad secuencial, o bien probamos que es continua,con la continuidad secuencial si es posible, o directamente con la definición de continuidad.

4.6. Aplicaciones combinadas

Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, y supongamos que A y B son subconjuntos de X tales que $A \cup B = X$. Sean $g\colon A \to Y$ y $h\colon B \to Y$ aplicaciones tales que $g|_{A\cap B} = h|_{A\cap B}$. Entonces está bien definida la aplicación $f\colon X \to Y$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in A, \\ h(x), & \text{si } x \in B, \end{cases}$$

y se dice que f es la aplicación combinada de g y h.

Proposición 4.6.1. *Sea $f\colon X = A \cup B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ la aplicación combinada de $g\colon A \longrightarrow Y$ y $h\colon B \longrightarrow Y$, y supongamos que g y h son continuas. Si A y B son cerrados en X, entonces f es continua.*

Demostración. Sea F un cerrado en Y y veamos que su imagen inversa por f es un cerrado en X. Por definición de f,

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{x \in X = A \cup B \mid f(x) \in F\} \\ &= \{x \in A \mid g(x) \in F\} \ \cup\ \{x \in B \mid h(x) \in F\} \\ &= g^{-1}(F) \ \cup\ h^{-1}(F). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $g\colon A \longrightarrow Y$ y $h\colon B \longrightarrow Y$ son continuas y F es cerrado en Y, se tiene que $g^{-1}(F)$ es cerrado en A y $h^{-1}(F)$ es cerrado en B. Dado que A y B son cerrados en X, se concluye que $g^{-1}(F)$ y $h^{-1}(F)$ son cerrados en X.

Por tanto, al ser unión de dos cerrados en X,

$$f^{-1}(F) = g^{-1}(F) \cup h^{-1}(F)$$

es un cerrado en X. Luego f es continua. □

Nota 4.6.2. El teorema anterior también sería cierto si A y B fueran abiertos en X, y la demostración sería esencialmente la misma, sustituyendo conjuntos cerrados por conjuntos abiertos. Sin embargo, este caso es menos usual en la práctica.

Ejemplo 4.6.3. (Función de Dirichlet) Sea $X = \mathbb{R}$ y consideremos los subconjuntos

$$A = \mathbb{Q}, \qquad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

de modo que $A \cup B = \mathbb{R}$. Nótese que $A \cap B = \emptyset$. Definimos

$$g\colon A \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 0, \qquad h\colon B \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 1.$$

Ambas aplicaciones g y h son continuas (son constantes). La función combinada

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Este ejemplo muestra que una aplicación combinada de funciones continuas puede no ser continua si los subconjuntos A y B no son cerrados (ni abiertos) en X.

4.7. Continuidad uniforme

Definición 4.7.1. Una aplicación $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ es uniformemente continua si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x, y \in X, d_{\mathbb{R}^n}(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_{\mathbb{R}^m}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

La diferencia con la continuidad usual es que δ no depende de x. Obviamente toda aplicación continua es uniformemente continua.

Ejercicio 4.7.2. *Si $f: X \to Y$ es unha aplicación uniformemente continua y $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f(xk)\}$ es unha sucesión de Cauchy.*

Ejemplo 4.7.3. Sea $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $\quad Y = \mathbb{R}$, y consideremos la aplicación

$$f: X \to Y, \qquad f(x) = \frac{1}{x}.$$

La función f es continua en X.

Sea ahora la sucesión $\{x_k\}$ en X definida por $x_k = \frac{1}{k}$. Esta sucesión es de Cauchy en X (como sucesión de $\mathbb{R}$), ya que

$$\frac{1}{k} \to 0 \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Sin embargo, $f(x_k) = k$, y la sucesión $\{f(x_k)\}$ no es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Este ejemplo muestra que una aplicación continua no tiene por qué enviar sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy; para ello es necesaria una hipótesis más fuerte, como la continuidad uniforme.

4.8. Aplicaciones abiertas y cerradas

Definición 4.8.1 (4.28 (Aplicaciones abiertas y cerradas))**.** Sea $f: X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación.

- Se dice que f es una *aplicación abierta* si

$$\forall\, U \text{ abierto en } X \implies f(U) \text{ es abierto en } Y.$$

- Se dice que f es una *aplicación cerrada* si

$$\forall\, F \text{ cerrado en } X \implies f(F) \text{ es cerrado en } Y.$$

Nota 4.8.2. Si la aplicación $f: X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ es **bixectiva**, entonces f es abierta si, e solo si, f es cerrada. Esto es consecuencia de que

$$f(X \setminus A) = Y \setminus f(A), \forall A \subset X.$$

para una aplicación biyectiva.

Ejemplo 4.8.3. Sea $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$ e $i: A \hookrightarrow X$ la aplicación inclusión. Si A es abierto en X, entonces la inclusión i es una aplicación abierta.

Nota 4.8.4. Si una aplicación $f: X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ es continua, entonces la imagen inversa de cualquier abierto (o cerrado) de Y es un abierto (o cerrado) de X. Sin embargo, la imagen directa de un abierto o de un cerrado de X mediante una aplicación continua puede no ser ni abierta ni cerrada en Y.

Ejemplo 4.8.5.

- La aplicación $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es continua y $A = (-1, 1)$ es abierto en $\mathbb{R}$, pero $f(A) = [0, 1)$ no es abierto en $\mathbb{R}$.
- La aplicación $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es continua y $B = (-\infty, 0]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, pero $f(B) = (0, 1]$ no es cerrado en $\mathbb{R}$.

4.9. Homeomorfismos.

Definición 4.9.1. Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Una aplicación $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa $f^{-1}1\colon Y \to X$ también es continua.

En otras palabras es una transformación biunívoca; no "separa" ni "rasga" (por la continuidad, puntos próximos tienen imágenes próximas), y tampoco "pega" (la inversa es continua).

Proposición 4.9.2. *Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación biyectiva. Entonces son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo.*
2. *f es continua y abierta.*
3. *f es continua y cerrada.*

Demostración. (1)⇒(2) y (3). Si f es un homeomorfismo, entonces f y f^{-1} son continuas. La continuidad de f^{-1} implica que la imagen por f de un abierto (resp. cerrado) de X es un abierto (resp. cerrado) de Y, porque

$$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A).$$

Por tanto, f es continua y abierta, y también continua y cerrada.

(2)⇒(1). Si f es biyectiva, continua y abierta, entonces para todo abierto $U \subset X$ se tiene $f(U)$ abierto en Y. Como $f^{-1}(f(U)) = U$, se deduce que f^{-1} es continua. Luego f es un homeomorfismo.

(3)⇒(1). Si f es biyectiva, continua y cerrada, entonces para todo cerrado $F \subset X$ se tiene $f(F)$ cerrado en Y. Como $f^{-1}(f(F)) = F$, se concluye que f^{-1} es continua. Por tanto, f es un homeomorfismo. □

Definición 4.9.3 (4.33 (Espacios homeomorfos))**.** Si existe un homeomorfismo $f\colon X \to Y$, se dice que los espacios topológicos X e Y son *homeomorfos* y se escribe $X \cong Y$.

Un "subespacio" de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto con la topología relativa.

Proposición 4.9.4. *La relación $\cong$ ("ser homeomorfos") es una relación de equivalencia en la familia de todos los subespacios de los espacios euclidianos. Es decir, si X, Y y Z son subespacios de espacios euclidianos (de cualquier dimensión), se verifica:*

1. *$X \cong X$;*
2. *$X \cong Y \implies Y \cong X$;*
3. *$X \cong Y$, $Y \cong Z \implies X \cong Z$.*

Demostración. 1. La aplicación identidad $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ es un homeomorfismo, luego $X \cong X$.

2. Si $X \cong Y$, existe un homeomorfismo $f\colon X \to Y$. Entonces f es biyectiva y su inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ es continua, por lo que f^{-1} es también un homeomorfismo. En consecuencia, $Y \cong X$.

3. Si $X \cong Y$ y $Y \cong Z$, existen homeomorfismos $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$. La composición $g \circ f\colon X \to Z$ es biyectiva y continua, y su inversa viene dada por

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1},$$

que es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Por tanto, $g \circ f$ es un homeomorfismo y se concluye que $X \cong Z$. □

Ejemplo 4.9.5. Todos los intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ son homeomorfos entre sí.

Como la relación $\cong$ es una relación de equivalencia, basta comprobar que cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ con $a < b$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Consideremos la aplicación

$$f\colon [0,1] \to [a,b], \qquad f(x) = a + (b-a)x.$$

Esta aplicación es biyectiva y continua. Además, su inversa viene dada por

$$g\colon [a,b] \to [0,1], \qquad g(y) = \frac{y-a}{b-a},$$

que también es continua. Por tanto, f es un homeomorfismo y se tiene

$$[0,1] \cong [a,b].$$

Ejemplo 4.9.6. Todos los intervalos abiertos de números reales son homeomorfos entre si y homeomorfos a $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Para un intervalo $(a,,b)$ tomamos

$$f\colon (0,1) \to (a,b), \quad f(t) = a + t(b-a)$$

con inversa

$$f^{-1}\colon (a,b) \to (0,1), \quad f^{-1}(t) = \frac{t-a}{b-a}.$$

Ahora, para $(-1, 1)$ en particular, tomamos

$$h\colon \mathbb{R} \to (-1,+1), \quad h(x) = \frac{x}{1+|x|},$$

con inversa

$$h^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad h^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}.$$

Para los intervalos abiertos no acotados podemos tomar

$$F\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty), \quad F(x) = e^x$$

con inversa el logaritmo neperiano; y finalmente

$$(-\infty,0) \cong (0,+\infty), \quad x \mapsto -x.$$

Ejercicio 4.9.7. *Usando los homeomorfismos anteriores, encuentra un homeomorfismo explícito* $(0, 2) \cong (2, +\infty)$.

Ejemplo 4.9.8. Todos los intervalos de la forma $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$ y $[-infty, b)$ son homeomorfos entre si.

Ejemplo 4.9.9. Los intervalos $(0, 1]$ y $[1, +\infty)$ son homeomorfos, con $h(x) = 1/x$.

Ejemplo 4.9.10. Son homeomorfismos:

- Para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, la traslación (con respecto a $\mathbf{v}$)

  $$T_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad T_{\mathbf{v}}(x) = \mathbf{x} + \mathbf{v},$$

  cuya inversa es $T_{\mathbf{v}}^{-1} = T_{-\mathbf{v}}$.

- Para todo $\lambda \neq 0$, la homotecia (de razón λ)

$$H_\lambda \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad H_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x},$$

  cuya inversa es $H_\lambda^{-1} = H_{1/\lambda}$.

Ejemplo 4.9.11. Todas las bolas abiertas en $\mathbb{R}^n$ son homeomorfas entre sí y homeomorfas a $\mathbb{R}^n$.

- La aplicación

$$f \colon B_{\mathbb{R}^n}(0,1) \longrightarrow B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{a}, r), \qquad f(\mathbf{x}) = r\,\mathbf{x} + \mathbf{a},$$

  es un homeomorfismo, cuyo inverso es

$$f^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{1}{r}\,(\mathbf{y} - \mathbf{a}).$$

- La aplicación

$$g \colon B_{\mathbb{R}^n}(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad g(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{1 - \|\mathbf{x}\|},$$

  es un homeomorfismo, cuyo inverso es

$$g^{-1}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{1 + \|\mathbf{y}\|}.$$

Ejercicio 4.9.12. *Todas las bolas cerradas en $\mathbb{R}^n$ son homeomorfas entre sí (en el tema de "Compacidad" veremos por qué no son homeomorfas a $\mathbb{R}^n$).*

Ejemplo 4.9.13. $\mathbb{R}^2$ y el paraboloide

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$$

son homeomorfos. En efecto, la aplicación

$$f \colon P \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x, y)$$

es biyectiva. La aplicación

$$g \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow P, \qquad (x, y) \longmapsto g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

satisface $g \circ f = \mathrm{id}_P$ y $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$; por tanto, $g = f^{-1}$. Además, tanto f como f^{-1} son continuas (al serlo sus componentes). Luego f es un homeomorfismo (y también f^{-1}), y por tanto $P \cong \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 4.9.14. *Sea $p = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ el polo norte de la esfera S^n. Se define una aplicación*

$$h : S^n \setminus \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

llamada proyección estereográfica*, como sigue: si $x \in S^n \setminus \{p\}$, entonces $h(x)$ es el punto de intersección de la recta determinada por p y x con $\mathbb{R}^n$ (considerado como el subconjunto $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$). Construya h y pruebe que es un homeomorfismo.*

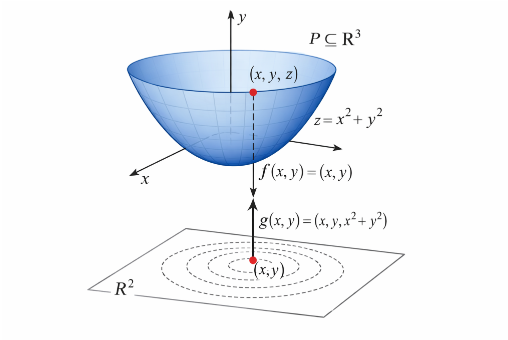


Figura 4.1: Paraboloide

SOL: Identificamos $\mathbb{R}^n$ con el hiperplano $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y escribimos un punto de $\mathbb{R}^{n+1}$ como $(\mathbf{x}, t)$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$S^n = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ \|\mathbf{x}\|^2 + t^2 = 1\}, \qquad p = (\mathbf{o}, 1),$$

donde $\mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ es el vector nulo.

Sea $(\mathbf{x}, t) \in S^n \setminus \{p\}$, es decir, $t \neq 1$. La recta que pasa por p y $(\mathbf{x}, t)$ viene dada por

$$\ell(\lambda) = p + \lambda\big((\mathbf{x}, t) - p\big) = (\mathbf{o}, 1) + \lambda(\mathbf{x}, t - 1) = (\lambda\mathbf{x},\ 1 + \lambda(t - 1)).$$

Su intersección con $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ se obtiene imponiendo

$$1 + \lambda(t - 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{1 - t}.$$

Por tanto,

$$h(\mathbf{x}, t) = \lambda\mathbf{x} = \frac{1}{1 - t}\mathbf{x}.$$

En consecuencia,

$$\boxed{h(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{1 - t}\mathbf{x}}, \qquad (\mathbf{x}, t) \in S^n \setminus \{p\}.$$

Cálculo de la inversa. Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Buscamos $(\mathbf{x}, t) \in S^n \setminus \{p\}$ tal que

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{x}}{1 - t}.$$

Esto equivale a $\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{y}$. Como además $(\mathbf{x}, t) \in S^n$, debe cumplirse

$$\|\mathbf{x}\|^2 + t^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|(1 - t)\mathbf{y}\|^2 + t^2 = 1.$$

Resolviendo para t se obtiene

$$t = \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}, \qquad 1 - t = \frac{2}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1},$$

y por tanto

$$\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{y} = \frac{2\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}.$$

Luego

$$\boxed{h^{-1}(\mathbf{y}) = \left(\frac{2\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}, \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{\|\mathbf{y}\|^2 + 1}\right)}.$$

Biyectividad. Por sustitución directa se comprueba que para todo $(\mathbf{x}, t) \in S^n \setminus \{p\}$ se tiene $h^{-1}(h(\mathbf{x}, t)) = (\mathbf{x}, t)$, y para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene $h(h^{-1}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$. En consecuencia, h es biyectiva y h^{-1} es su inversa.

Continuidad. La aplicación $h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}/(1 - t)$ tiene componentes racionales (cocientes de polinomios) y el denominador $1 - t$ no se anula en $S^n \setminus \{p\}$, luego h es continua. De igual modo, $h^{-1}(\mathbf{y})$ tiene componentes racionales con denominador $\|\mathbf{y}\|^2 + 1 > 0$, luego h^{-1} es continua.

Conclusión.

Vemos entonces que los puntos de $\mathbb{R}^n$ con $\|y\| < 1$ (interior del disco) van en puntos de la esfera con $t < 0$ negativo (hemisferio sur); los puntos de módulo 1 van en el ecuador, y lo exteriores van al hemisferio norte.

Como h es biyectiva, continua, y su inversa h^{-1} es continua, concluimos que hay un homeomorfismo entre $S^n \setminus \{p\}$ (esfera menos un punto)y $\mathbb{R}^n$.

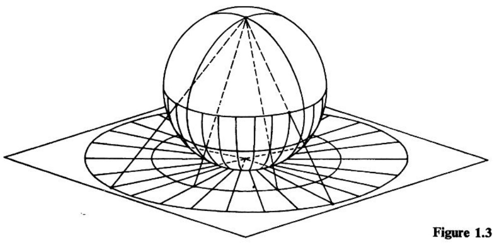


Figura 4.2: Proyección estereográfica tomado de Tom Apostol, Fig. 1.3 in: Mathematical Analysis 1973

Ejercicio 4.9.15. *Encuentra las fórmulas y haz un dibujo para el caso $n = 1$.*

4.10. Propiedades topológicas

La topología general es el estudio de las *propiedades topológicas*.

Una propiedad P se dice que es una *propiedad topológica* si es invariante por homeomorfismos; es decir, si se cumple que

$$X \text{ satisface } P,\ X \cong Y \implies Y \text{ satisface } P.$$

Ejemplo 4.10.1.

- *Ser finito* y *ser numerable* son propiedades topológicas, ya que si existe una aplicación biyectiva entre dos conjuntos, entonces ambos tienen el mismo cardinal.
- *Ser acotado* no es una propiedad topológica. Por ejemplo,

$$\mathbb{R} \cong (-1, 1),$$

pero $(-1, 1)$ es acotado y $\mathbb{R}$ no es acotado.

- *Ser completo* no es una propiedad topológica. Por ejemplo,

$$\mathbb{R} \cong (-1, 1),$$

pero $\mathbb{R}$ es completo y $(-1, 1)$ no es completo (ya que no es cerrado en $\mathbb{R}$).

- *Ser discreto* es una propiedad topológica. Es decir, si $X \cong Y$ y X es discreto, entonces Y también es discreto. En efecto, si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, en particular f es biyectiva, y todo punto de Y es imagen por f de aun punto de X, que es abierto en X; como f es abierta, todo punto de Y es abierto en Y.

En los próximos temas veremos dos propiedades topológicas muy importantes: la "conexión" y la "compacidad".

Tema 5

Conexidad (4 horas expositivas)

5.1. Espacios conexos

Intuitivamente, un espacio es conexo si no puede separarse en dos partes disjuntas. Como siempre es posible tener una partición si tomamos un subconjunto y su complementario, pediremos que las dos partes sean *abiertas* e X.

Definición 5.1.1. Una *separación* de un subespacio $X \subset \mathbb{R}^n$ es un par (no ordenado) U, V de subconjuntos de X tales que $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ y U, V son abiertos en X. La representaremos como $U \mid V$.

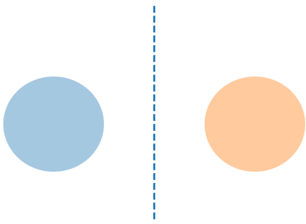


Figura 5.1: Una separación no trivial.

Nota 5.1.2. El nombre *separación* no es muy afortunado, porque no tiene relación con las *propiedades de separación* (como ser Haudorff, etc.) pero se ha consolidado. Deberíamos mejor decir *desconexión*.

Ejemplo 5.1.3. Todo espacio admite la *separación trivial* formada por X y $\emptyset$.

Ejemplo 5.1.4. En la Figura 5.1 está representado el espacio $X = A \cup B$ donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

son dos círculos de radio 1 centrados en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ respectivamente. Se cumple $A \cap B = \emptyset$.

La línea vertical de puntos representa los dos abiertos U, V de $\mathbb{R}^n$ dados por las ecuaciones $x < 0$, $x > 0$, que, al intersecarlos con X, prueban que A, B son abiertos en X.

Por tanto $A|B$ es una separación no trivial de X.

Definición 5.1.5. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que X es conexo si la única separación que admite es la separación trivial.

Proposición 5.1.6. *Un subespacio $X \subset \mathbb{R}^n$ es conexo si, y solo si, X y $\varnothing$ son los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados en X.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es conexo y sea $U \subset X$ un subconjunto que es a la vez abierto y cerrado en X. Entonces $X \setminus U$ es también abierto y cerrado en X, y $U \mid X \setminus U$ es una separación de X. Como, por hipótesis, X es conexo, dicha separación es trivial, luego $U = \emptyset$ o $X \setminus U = \emptyset$, es decir, $U = \emptyset$ o $U = X$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que los únicos subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados en X son $\emptyset$ y X, y sea $U \mid V$ una separación de X. Entonces U y V son abiertos en X y, al ser complementarios, también son cerrados en X. Por hipótesis, se sigue que $U = \emptyset$ o $U = X$, es decir, la separación es trivial. Por tanto, X es conexo. $\square$

Nota 5.1.7. En los ejercicios, para probar que un X dado no es conexo, bastará con dar alguna separación no trivial. En cambio, para probar que es conexo, partiremos de una separación $U|V$ con $U \neq \emptyset$ y deberemos demostrar que $U = X$.

Ejemplo 5.1.8.

1. $\emptyset$ es conexo.
2. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, el conjunto unitario $\{x\}$ es conexo.
3. Todo subconjunto discreto $X \subset \mathbb{R}^n$ con más de un punto no es conexo: si $p \in X$, entonces $\{p\} \mid X \setminus \{p\}$ es una separación no trivial de X. En particular, todo subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ con más de un punto no es conexo; $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ tampoco son conexos.
4. $\mathbb{Q}$ no es conexo: por ejemplo, $(-\infty, 2) \cap \mathbb{Q} \mid (2, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ es una separación no trivial de $\mathbb{Q}$.
5. Los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos unitarios. En efecto, si $X \subset \mathbb{Q}$ no es unitario, existen $a, b \in X$ con $a < b$. Como siempre existe un irracional $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$, entonces
$$(-\infty, r) \cap X \mid (r, +\infty) \cap X$$
es una separación no trivial de X, y por tanto X no es conexo.

Ejercicio 5.1.9. *Un espacio X es conexo si y sólo si los únicos subespacios de X con frontera vacía son X y $\emptyset$.*

SOL: Si X no es conexo hay un subespacio $U \neq \emptyset$ que es abierto y cerrado a la vez. Por tanto $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus \operatorname{Int} U = U \setminus U = \emptyset$.

Recíprocamente, sea $U \neq \emptyset$ un subespacio con frontera vacía, es decir $\overline{U} = \operatorname{Int} U$. Como $\operatorname{Int} U \subset U \subset \overline{U}$ se sigue que los tres son iguales, y por tanto U es abierto y cerrado a la vez. En consecuencia X no es conexo, de nuevo por la Prop. 5.1.6.

Teorema 5.1.10. *El intervalo cerrado $I = [0, 1]$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que $U \mid V$ es una separación no trivial de $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y lleguemos a una contradicción. Como $I = U \cup V$, se tiene $1 \in U$ o $1 \in V$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $1 \in V$.

Entonces, com V es abierto e I, existe $r > 0$ tal que
$$B_I(1, r) = (1 - r, 1 + r) \cap I = (1 - r, 1] \subset V.$$

Por tanto, los complementarios cumplen $U \subset [0, 1-r]$. Como $U \neq \emptyset$ y está acotado superiormente, existe $a = \sup U$. Además, se tiene $a \leq 1 - r < 1$. Observemos también que $a > 0$, ya que si $a = 0$, entonces $U = \{0\}$, que no es abierto en $[0, 1]$.

En consecuencia, $0 < a < 1$ y $a \in I = U \cup V$. Se presentan dos casos:

Caso 1: $a \in U$. Como U es abierto en I, $a > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_I(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U.$$

Pero entonces $a + \varepsilon/2 \in U$ y $a + \varepsilon/2 > a$, lo cual contradice que $a = \sup U$.

Caso 2: $a \in V$. Como V es abierto en I, $a < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_I(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V.$$

Por tanto en $(a - \varepsilon, a)$ no hay puntos de U. Entonces $a - \varepsilon/2$ es una cota superior de U menor que a, lo que contradice nuevamente que $a = \sup U$.

En ambos casos se obtiene una contradicción. Por tanto, la separación $U \mid V$ de $[0, 1]$ debe ser trivial, y el intervalo cerrado $[0, 1]$ es conexo. □

Nota 5.1.11. En muchos libros se llama *conexión* en vez de *conexidad* a la propiedad de ser conexo.

5.2. Nuevos conjuntos conexos a partir de otros

Lema 5.2.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ y sea $C \subset X$. Si $U \mid V$ es una separación de X, entonces*

$$(U \cap C) \mid (V \cap C)$$

es una separación de C (la separación inducida por $U \mid V$).

Demostración. Si $U \mid V$ es una separación de X, entonces U y V son abiertos en X, $U \cup V = X$ y $U \cap V = \emptyset$. Por tanto, $U \cap C$ y $V \cap C$ son abiertos en C. Además,

$$(U \cap C) \cup (V \cap C) = (U \cup V) \cap C = X \cap C = C$$

y

$$(U \cap C) \cap (V \cap C) = (U \cap V) \cap C = \emptyset \cap C = \emptyset.$$

Luego $(U \cap C) \mid (V \cap C)$ es una separación de C. □

Nota 5.2.2. Cuidado: la separación inducida puede ser trivial aunque la original no lo sea. Piensa un ejemplo.

Proposición 5.2.3. *Sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ y sea $E_0 \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto conexo tal que $E_0 \cap E_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$. Entonces el conjunto*

$$X = E_0 \cup \bigcup_{i \in I} E_i$$

es conexo (ver Fig. 5.2).

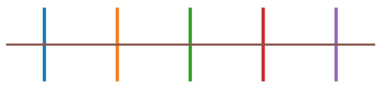


Figura 5.2: Conexos cortados por un conexo.

Demostración. Vamos a probar que la única separación que admite X es la trivial. Sea $U \mid V$ una separación de X.

Por el lema de separación inducida, $(U \cap E_0) \mid (V \cap E_0)$ es una separación de E_0. Como E_0 es conexo, dicha separación ha de ser trivial, luego $U \cap E_0 = E_0$ o $V \cap E_0 = E_0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $U \cap E_0 = E_0$. Entonces $E_0 \subset U$.

Sea ahora $i \in I$. De nuevo por el lema, $(U \cap E_i) \mid (V \cap E_i)$ es una separación de E_i. Como E_i es conexo, se tiene $U \cap E_i = E_i$ o $V \cap E_i = E_i$. Pero $E_0 \cap E_i \neq \emptyset$ y $E_0 \subset U$, luego $U \cap E_i \neq \emptyset$. Por tanto, no puede ocurrir $U \cap E_i = \emptyset$, así que necesariamente $U \cap E_i = E_i$, es decir, $E_i \subset U$.

Concluimos que $E_0 \subset U$ y $E_i \subset U$ para todo $i \in I$, y por tanto

$$X = E_0 \cup \bigcup_{i \in I} E_i \subset U.$$

Como $U \subset X$, se obtiene $U = X$ y, en consecuencia, $V = \emptyset$. Luego $U \mid V$ es la separación trivial y X es conexo. □

Corolario 5.2.4. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ subconjuntos conexos. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.*

Demostración. En el teorema anterior tomamos $E_0 = A$ y $E_1 = B$. □

Nota 5.2.5. Intenta demostrar directamente el Corolario anterior.

Corolario 5.2.6. *Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ tal que $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup_{i \in I} X_i$ es conexo.*

Demostración. En el Teorema 5.2.3 tomemos $E_i = X_i$ y E_0 uno de ellos. □

Proposición 5.2.7. *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto conexo. Si X es un conjunto tal que $C \subset X \subset \overline{C}$, entonces X es conexo. En particular, la clausura de un conjunto conexo es conexa.*

Demostración. Consideremos una separación $U \mid V$ de X y veamos que ha de ser trivial. Por el lema de separación inducida, $(U \cap C) \mid (V \cap C)$ es una separación de C. Como C es conexo, dicha separación es trivial; por tanto, $U \cap C = \emptyset$ o bien $V \cap C = \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supongamos $U \cap C = \emptyset$. Veremos que entonces $U = \emptyset$.

Si existiera $x \in U$, como U es abierto en X existiría $r > 0$ tal que $B_X(x, r) \subset U$, donde $B_X(x, r) = B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap X$. Pero $x \in U \subset X \subset \overline{C}$, y por definición de clausura se cumple que para todo $r > 0$,

$$B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap C \neq \emptyset.$$

Como además $C \subset X$, tenemos

$$B_{\mathbb{R}^n}(x, r) \cap X \cap C = B_X(x, r) \cap C \neq \emptyset.$$

Y como $B_X(x,r) \subset U$, se deduce $B_X(x,r) \cap C \subset U \cap C$, lo cual implica $U \cap C \neq \emptyset$, contradicción.

Por tanto, $U = \emptyset$ y la separación $U \mid V$ es trivial. Luego X es conexo.

En particular, tomando $X = \overline{C}$ se concluye que $\overline{C}$ es conexo. □

5.3. Conexidad y continuidad

Teorema 5.3.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio conexo y sea $f : X \to Y \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación continua. Entonces el subconjunto $f(X) \subset \mathbb{R}^m$ es conexo.*

Demostración. Consideremos una separación $U \mid V$ de $f(X)$, supongamos por ejemplo que $U \neq \emptyset$, y veamos que es trivial.

Como la continuidad no depende del codominio, la aplicación $f : X \to f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ es continua y, además, es sobreyectiva.

Dado que U y V son abiertos en $f(X)$, por continuidad se tiene que $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son abiertos en X. Además,

$$f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(f(X)) = X,$$

y

$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

Por tanto, $f^{-1}(U) \mid f^{-1}(V)$ es una separación de X. Como X es conexo, dicha separación ha de ser trivial, y como $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ por ser $U \neq \emptyset$ y f sobre, tiene que ser $f^{-1}(V) = \emptyset$.

Usando que $f : X \to f(X)$ es sobreyectiva, se deduce que $V = f\big(f^{-1}(V)\big) = \emptyset$. Luego $U \mid V$ es la separación trivial de $f(X)$, y por tanto $f(X)$ es conexo. □

Proposición 5.3.2. *La conexidad es una propiedad topológica.*

Demostración. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ y $Y \subset \mathbb{R}^n$, y supongamos que X es conexo y que $X \cong Y$, es decir, que existe un homeomorfismo $f : X \to Y$. Como f es un homeomorfismo, en particular es continua y sobreyectiva. Por tanto, $Y = f(X)$ es conexo por el teorema anterior. □

Corolario 5.3.3. *Todo intervalo cerrado $[a,b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, es conexo.*

Demostración. El intervalo $[0,1]$ es conexo. Como $[0,1] \cong [a,b]$ son homeomorfos, al ser la conexidad una propiedad topológica, se sigue que $[a,b]$ es conexo. □

Definición 5.3.4. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. El segmento de extremos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el conjunto (notación vectorial),

$$L[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in [0,1]\}.$$

Nota 5.3.5. Nótese que si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, el segmento es un punto.

Corolario 5.3.6. *$L[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ es conexo.*

Demostración. Basta ver que $L[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ es la imagen de la aplicación continua

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad t \longmapsto \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Como $[0,1]$ es conexo se sigue el resultado. □

5.4. Componentes conexas

Proposición 5.4.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$X \text{ es conexo} \iff \forall x, y \in X, \exists C \subset X \text{ conexo tal que } x, y \in C.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Es inmediato: si X es conexo, basta tomar $C = X$.

($\Leftarrow$) Probamos el contrarrecíproco. Supongamos que X no es conexo. Entonces existe una separación no trivial $U \mid V$ de X, es decir, $U \mid V$ es una separación de X con $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$. Tomamos $x \in U$ e $y \in V$.

Veamos que no puede existir un subconjunto conexo $C \subset X$ tal que $x, y \in C$. En efecto, por el lema anterior,

$$(U \cap C) \mid (V \cap C)$$

es una separación de C. Además, como $x \in U \cap C$ e $y \in V \cap C$, se tiene $U \cap C \neq \emptyset$ y $V \cap C \neq \emptyset$, luego dicha separación es no trivial. Por tanto, C no es conexo. □

Nota 5.4.2. El *contrarrecíproco* de una implicación $P \Rightarrow Q$ es no$Q \Rightarrow$ no$P$. Es equivalente a la implicación original porque expresan la misma relación lógica: si P ocurriera y Q no, se produciría una contradicción con $P \Rightarrow Q$; por tanto, la negación de Q fuerza la negación de P. Esta equivalencia justifica que, cuando resulta más cómodo, se demuestre el contrarrecíproco en lugar de la implicación directa. Demostrar el contrarrecíproco puede resultar más cómodo porque permite trabajar directamente con una situación concreta de fallo de la conclusión.

De acuerdo con la proposición anterior, definimos en X la siguiente relación: dados $x, y \in X$, decimos que

$$x \sim y \quad \iff \quad \text{existe un subconjunto conexo } C \subset X \text{ tal que } x, y \in C.$$

Esta relación es de equivalencia. En efecto:

- Es reflexiva, ya que $\{x\}$ es conexo y contiene a x.
- Es simétrica por la propia definición.
- Es transitiva: si $x, y \in C_1$ e $y, z \in C_2$, con C_1, C_2 conexos, entonces $C_1 \cup C_2$ es conexo (porque $z \in C_1 \cap C_2) \neq \emptyset$) y contiene a x, z.

Las clases de equivalencia asociadas a esta relación se llaman *componentes conexas* de X.

Proposición 5.4.3. *Cada componente conexa de X es un subconjunto conexo maximal de X; es decir, si $C \subset F \subset X$ y F es conexo, entonces $C = F$.*

Demostración. Sea C una componente conexa de X y supongamos que $C \subset F \subset X$, donde F es un subconjunto conexo. Como $C \neq \emptyset$, se tiene también $F \neq \emptyset$.

Fijemos $x \in C$. Sea $y \in F$. Dado que F es conexo y contiene a x e y, por la Proposición 5.4.1 x e y pertenecen a la misma componente conexa de X. En particular, $y \in C$.

Como y era arbitrario en F, se deduce que $F \subset C$. Por tanto, concluimos que $F = C$. □

Proposición 5.4.4. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Toda componente conexa de X es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. Sea C una componente conexa de X. Por la Prop. 5.2.7 (la clausura de un conexo es conexa), $\overline{C}$ es conexo. Como C, es un conexo maximal y $C \subset \overline{C}$, se deduce $\overline{C} = C$, es decir C es cerrado en X. □

5.5. Conexidad del espacio euclidiano

Proposición 5.5.1. *El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es conexo.*

Demostración. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$). Ambos puntos pertenecen al segmento $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de extremos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, que es conexo. Por la Proposición 5.4.1, se concluye que $\mathbb{R}^n$ es conexo. □

Definición 5.5.2. En la recta real $\mathbb{R}$, un intervalo generalizado es un conjunto $J \subset \mathbb{R}$ que cumple

$$x, y \in J, x < y \Longrightarrow [x, y] \subset J.$$

Proposición 5.5.3. *Los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ son exactamente los intervalos generalizados.*

Demostración. Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo generalizado. Dados $x, y \in J$ se tiene $[x, y] \subset J$ por derfinición de intervalo generalizado. Como $[x, y]$ es conexo, por la Prop. 5.4.1 se deduce que J es conexo.

Recíprocamente, supongamos que $J \subset \mathbb{R}$ es conexo y que no es un intervalo generalizado. Entonces existen $x, y \in J$ con $x < y$ tales que $[x, y] \not\subset J$. En particular, existe $z \in \mathbb{R}$ con $x < z < y$ y $z \notin J$.

Consideremos entonces

$$(-\infty, z) \cap J \mid (z, +\infty) \cap J.$$

Ambos conjuntos son abiertos en J, disjuntos, no vacíos (pues contienen a x e y, respectivamente) y su unión es J. Por tanto, constituyen una separación no trivial de J, lo cual contradice que J sea conexo.

Esta contradicción prueba que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo generalizado. □

Proposición 5.5.4. *Los intervalos generalizados, son exactamente los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de una de las siguientes formas:*

$$\emptyset,\ \{a\},\ (a, b),\ [a, b),\ (a, b],\ [a, b],\ (a, +\infty),\ (-\infty, b),\ [a, +\infty),\ (-\infty, b],\ (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Demostración. Observemos en primer lugar que todos los conjuntos enumerados cumplen la Definición 5.5.2 y por tanto son intervalos generalizados.

Recíprocamente, sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo generalizado, es decir, un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Definimos

$$a = \text{ínf}\, J \quad (\text{con } a = -\infty \text{ si } J \text{ no está acotado inferiormente}),$$

$$b = \sup J \quad (\text{con } b = +\infty \text{ si } J \text{ no está acotado superiormente}).$$

Supondremos las convenciones habituales: si $a = b$, entonces $(a, b) = [a, b) = (a, b] = \emptyset$ y $[a, b] = \{a\}$; además, un corchete junto a $-\infty$ o $+\infty$ se interpreta como un paréntesis.

Veamos que

$$(a, b) \subset J \subset [a, b].$$

Sea $t \in (a, b)$. Entonces $a < t < b$. Por la definición de $a = \text{ínf}\, J$, existe $x \in J$ tal que $x < t$; análogamente, por la definición de $b = \sup J$, existe $y \in J$ tal que $t < y$. Como J es conexo y $x < y$, por la propiedad característica de los intervalos generalizados se tiene $[x, y] \subset J$, y en particular $t \in J$. Esto prueba que $(a, b) \subset J$.

La inclusión $J \subset [a, b]$ es inmediata por la definición de a y b. Por tanto, J es uno de los conjuntos de la lista anterior. □

5.6. Teorema de Bolzano

Teorema 5.6.1 (Teorema de los valores intermedios). *Sea X un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$ y $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$, $y \in \mathbb{R}$ tales que $f(\mathbf{a}) < y < f(\mathbf{b})$. Entonces existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $f(\mathbf{x}) = y$.*

Demostración. Dado que X es conexo y f es continua, $f(X)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$; por tanto, es un intervalo generalizado J. Como $f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b}) \in f(X)$,

$$f(\mathbf{a}) < y < f(\mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad y \in [f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})] \subset J = f(X).$$

Por consiguiente, existe $\mathbf{x} \in X$ tal que $f(\mathbf{x}) = y$. □

Ejercicio 5.6.2. *Prueba que si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y los signos de $f(a)$ y $f(b)$ son opuestos (es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe al menos un punto c dentro del intervalo (a, b) tal que $f(c) = 0$.*

5.7. Productos

Teorema 5.7.1. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ y $Y \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos conexos, entonces su producto cartesiano $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es conexo.*

Demostración. Sean $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in X \times Y$ dos puntos. Vamos a ver que ambos puntos pertenecen a un mismo subconjunto conexo $C \subset X \times Y$; entonces bastará aplicar la Proposición 5.4.1 (ver Figura 5.3).

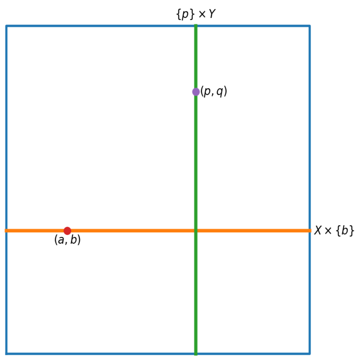


Figura 5.3:

Fijado $\mathbf{b} \in Y$, la aplicación $f : X \longrightarrow X \times Y, \quad x \longmapsto (x, \mathbf{b})$ es continua. Como X es conexo, se deduce que

$$f(X) = X \times \{\mathbf{b}\}$$

es un subconjunto conexo de $X \times Y$.

Fijado $\mathbf{p} \in X$, la aplicación $g : Y \longrightarrow X \times Y, \quad y \longmapsto (\mathbf{p}, y)$ es continua. Como Y es conexo, se deduce que

$$g(Y) = \{\mathbf{p}\} \times Y$$

es un subconjunto conexo de $X \times Y$.

La intersección de estos dos conjuntos no es vacía, pues

$$(\mathbf{p}, \mathbf{b}) \in (X \times \{\mathbf{b}\}) \cap (\{\mathbf{p}\} \times Y).$$

Por el corolario de la unión de conexos con intersección no vacía,

$$C = (X \times \{\mathbf{b}\}) \cup (\{\mathbf{p}\} \times Y)$$

es conexo. Además, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in X \times \{\mathbf{b}\} \subset C$ y $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \{\mathbf{p}\} \times Y \subset C$.

Por tanto, dados cualesquiera $(\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in X \times Y$, existe un subconjunto conexo C de $X \times Y$ que los contiene; por la Proposición 5.4.1, $X \times Y$ es conexo. □

5.8. Conexidad por caminos

Definición 5.8.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Un camino en X es una aplicación continua

$$\alpha : I = [0, 1] \longrightarrow X.$$

Si $\alpha(0) = \mathbf{x}$ y $\alpha(1) = \mathbf{y}$, se dice que α es un camino en X que une $\mathbf{x}$ con $\mathbf{y}$.

El **camino inverso** de α es la aplicación $\overline{\alpha}\colon I \to X$ definida por $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$, que es continua por ser composición de aplicaciones continuas:

$$t \in I \longmapsto 1 - t \in I \longmapsto \alpha(1 - t) \in X.$$

Además, $\overline{\alpha}(0) = \alpha(1) = \mathbf{y}$ y $\overline{\alpha}(1) = \alpha(0) = \mathbf{x}$.

Dados caminos $\alpha, \beta\colon I \to X$ con $\alpha(0) = \mathbf{x}$, $\alpha(1) = \mathbf{y} = \beta(0)$ y $\beta(1) = \mathbf{z}$, el **camino producto** de α y β es la aplicación $\alpha \star \beta : I \to X$ definida por

$$(\alpha \star \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida y es continua, por ser la aplicación combinada de dos aplicaciones continuas definidas en cerrados de $[0, 1]$. Además, $(\alpha \star \beta)(0) = \alpha(0) = \mathbf{x}$ y $(\alpha \star \beta)(1) = \beta(1) = \mathbf{z}$,

Proposición 5.8.2. *La relación "estar conectados por caminos en X" es una relación de equivalencia.*

Demostración. Definimos $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists\, \alpha : I \to X$ continua tal que $\alpha(0) = \mathbf{x}$ y $\alpha(1) = \mathbf{y}$.

Reflexiva. Para todo $\mathbf{x} \in X$, la aplicación $\alpha : I \to X$ dada por $t \mapsto \alpha(t) = \mathbf{x}$ es continua (camino constante) y verifica $\alpha(0) = \mathbf{x} = \alpha(1)$, luego $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$.

Simétrica. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ tales que $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. Existe un camino $\alpha\colon I \to X$ con $\alpha(0) = \mathbf{x}$ y $\alpha(1) = \mathbf{y}$. Tomado el camino inverso $\overline{\alpha}$ tenemos $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$.

Transitiva. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ tales que $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$. Por tanto existen caminos α conectando $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, y β conectando $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$. Si tomamos el camino producto $\alpha \star \beta$ tendremos $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$. □

Las clases de equivalencia de esta relación se llaman *componentes conexas por caminos*.

Definición 5.8.3 (Conjunto conexo por caminos). Se dice que un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es conexo por caminos si, para cada par de puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, existe un camino en X que une $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Ejemplo 5.8.4. Cualquier intervalo generalizado $J \subset \mathbb{R}$ es conexo por caminos.

En efecto, sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in J$. Vamos a ver que existe un camino que une $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Lla aplicación $\alpha\colon I = [0, 1] \longrightarrow J \subset \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha(t) = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

es continua y verifica $\alpha(I) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset J$, puesto que J es un intervalo generalizado. Además, $\alpha(0) = \mathbf{x}$ y $\alpha(1) = \mathbf{y}$. Luego J es conexo por caminos.

Nota 5.8.5. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. El conjunto X es conexo por caminos si, y solo si, existe una única clase de equivalencia para la relación “estar conectados por caminos en X”.

Así, fijado un punto $\mathbf{x}_0 \in X$, el conjunto X es conexo por caminos si, y solo si, para cada punto $\mathbf{x} \in X$ existe un camino en X que une $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$.

Proposición 5.8.6. *Si $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ es una aplicación continua y X es un conjunto conexo por caminos, entonces el subconjunto $f(X)$ de $\mathbb{R}^m$ es conexo por caminos.*

Demostración. Sean $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in f(X)$ y veamos que existe un camino en $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$ que une $\mathbf{y}_0$ y $\mathbf{y}_1$.

Sean $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X$ tales que $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$ y $\mathbf{y}_1 = f(\mathbf{x}_1)$. Como X es conexo por caminos, existe un camino $\alpha : I \longrightarrow X$ con $\alpha(0) = \mathbf{x}_0$ y $\alpha(1) = \mathbf{x}_1$. La composición

$$f \circ \alpha : I \longrightarrow f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}^m$$

es una aplicación continua, por ser composición de aplicaciones continuas, y tiene imagen contenida en $f(X)$; por tanto, es un camino en $f(X)$ (el codominio no es esencial para la continuidad). Además,

$$(f \circ \alpha)(0) = f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0, \qquad (f \circ \alpha)(1) = f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}_1.$$

Por lo tanto, $f(X)$ es conexo por caminos. □

Ejemplo 5.8.7. Cualquier bola (abierta o cerrada) en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo por caminos.

Lo vemos en el caso de las bolas abiertas (y de la misma manera se hace para las bolas cerradas). Dado que la conexión por caminos es una propiedad topológica y todas las bolas abiertas son homeomorfas entre sí, basta ver que la bola abierta $B = B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ es conexa por caminos.

Como la relación “estar conectados por caminos” es de equivalencia, basta ver que $0 \sim \mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x} \in B$, es decir, basta comprobar que existe un camino en B que une 0 y $\mathbf{x}$. En efecto, fijado $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B$, se define

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n, \qquad t \mapsto \alpha(t) = t\mathbf{x} = (tx_1, \ldots, tx_n).$$

Esta aplicación está bien definida, ya que toma valores en B, puesto que si $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$\|\mathbf{x}\| < 1 \quad \Rightarrow \quad \|\alpha(t)\| = \|t\mathbf{x}\| = |t|\,\|\mathbf{x}\| < 1, \qquad |t| \leq 1.$$

Además, α es continua (lo es cada componente $t \in [0, 1] \mapsto tx_j \in \mathbb{R}$), y une 0 y $\mathbf{x}$, ya que $\alpha(0) = 0 \cdot \mathbf{x} = 0$ y $\alpha(1) = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Teorema 5.8.8. *Todo conjunto conexo por caminos es conexo.*

Demostración. Supongamos que X es un subconjunto conexo por caminos de $\mathbb{R}^n$. De acuerdo con una proposición anterior (Prop. 5.4.1), para ver que X es conexo basta comprobar que dados dos puntos cualesquiera, los dos pertenecen a algún subconjunto conexo C de X.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Como X es conexo por caminos, existe un camino $\alpha \colon I \to X$ tal que $\alpha(0) = \mathbf{x}$ y $\alpha(1) = \mathbf{y}$.

El intervalo $I = [0,1]$ es conexo y la aplicación $\alpha \colon I \to X$ es continua, luego $C = \alpha(I)$ es un conjunto conexo. Si denotamos $C = \alpha(I)$, entonces $C \subset X$ es conexo y $\mathbf{x} = \alpha(0) \in C$, $\mathbf{y} = \alpha(1) \in C$.

Por lo tanto, X es conexo. $\square$

Ejemplo 5.8.9. [1] Vamos a estudiar un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que es conexo pero no conexo por caminos.

Consideremos el conjunto

$$X = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\tfrac{1}{n}\} \times [0,1] \right) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0,1)\}$$

con la topología subespacio de $\mathbb{R}^2$.

La parte con las púas sobre $1/n$ y el tramo horizontal suele llamarse de broma "el peine del topólogo", y el punto $p = (0,1)$ es un "piojo" (ver Fig. 5.4).

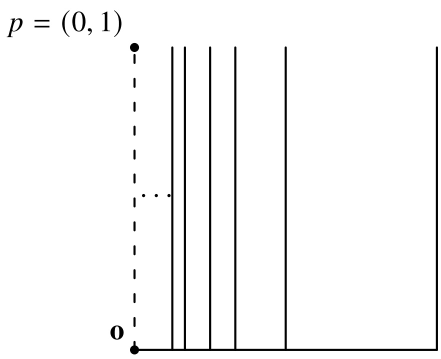


Figura 5.4: El peine del topólogo, con piojo

Conexidad. Cada uno de los subconjuntos

$$E_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1],$$

es conexo (de hecho conexo por caminos). Además, todos ellos intersecan al segmento horizontal $E_0 = [0,1] \times \{0\}$, que es conexo. Por tanto, el peine $E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \cdots$ es conexo, por la Prop. 5.2.3. Se deduce que X es conexo, pues el piojo p está en la adherencia del anterior (Prop. 5.2.7).

No conexión por caminos.[1]

Veamos que no existe ningún camino en X que una el punto $p = (0,1)$ con el origen $\mathbf{o} = (0,0) \in E_0$. Supongamos por contradicción que existe un camino

$$\alpha \colon [0,1] \to X$$

[1] Las secciones marcadas con asterisco no son materia de examen

[1] Las secciones marcadas con asterisco no son materia de examen

tal que $\alpha(0) = (0,1)$ y $\alpha(1) = (0,0) = \mathbf{o}$. Consideremos el conjunto $\alpha^{-1}(p) \subset I$. Desde luego es cerrado, porque α es continua y $\{p\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Además es no vacío porque $0 \in \alpha^{-1}(\mathbf{o})$.

Veamos que también es abierto. Fijemos un entorno V en $\mathbb{R}^2$ alrededor de p, que no corte al eje OX, por ejemplo $V = B(p, 1/2)$ (Fig. 5.5). Sea $t \in \alpha^{-1}(p) \subset \alpha^{-1}(V)$. Entonces, como $\alpha^{-1}(V)$ es abierto en $I = [0,1]$, hay un abierto básico U tal que $t \in U \subset \alpha^{-1}(V)$. Vamos a probar después en ($\star$) que $\alpha(U) = \{p\}$, con lo que $t \in U \subset \alpha^{-1}(p)$. Esto prueba que $\alpha^{-1}(p)$ es abierto en I, pues todos sus puntos son interiores.

Pero I es conexo, por lo que un subconjunto no vacío $\alpha^{-1}(p)$ que es abierto y cerrado a la vez tiene que ser el espacio total, $\alpha^{-1}(p) = I$. Entonces α sería un camino constante, lo que es una contradicción, pues $\alpha(1) = \mathbf{o} \neq p$.

($\star$) Veamos la comprobación que falta (es decir, que $\alpha(U) = \{p\}$): el abierto básico U es conexo (pues es del tipo (a,b), o bien $[0,b)$ o bien $(a,1]$). Entonces $\alpha(U)$ es conexo. Si contiene algún punto distinto de p, tiene que ser de la forma $(1/n, y)$ para algún $0 < y \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Tomando $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n},$$

y como $\alpha(U)$ no corta al eje, los conjuntos

$$(-\infty, r) \times \mathbb{R}, \quad (r, +\infty) \times \mathbb{R}$$

nos darán una separación no trivial de $\alpha(U)$, lo que es imposible (de manera intuitiva, no se puede pasar del piojo a las púas sin dar un salto).

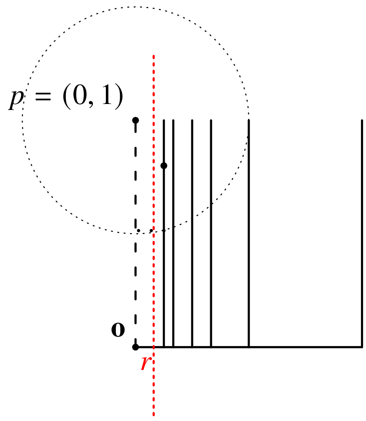


Figura 5.5:

Por tanto, no existe el camino α y X no es conexo por caminos.

Tema 6

Compacidad (4 horas expositivas)

6.1. Recubrimientos

Definición 6.1.1. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Un *recubrimiento abierto* de X es una familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos de X tal que
$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Si $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ es una subfamilia y $\mathcal{U}'$ es un recubrimiento de X, es decir,
$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U,$$
se dice que $\mathcal{U}'$ es un *subrecubrimiento* de $\mathcal{U}$.

Un subrecubrimiento $\mathcal{U}'$ de X se dice que es un *subrecubrimiento finito* si $\mathcal{U}'$ es una familia finita de conjuntos.

Nota 6.1.2. Se puede escribir $X = \bigcup \mathcal{U}$. Si la familia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ tiene un conjunto de índices $\mathcal{I}$, también solemos escribir
$$X = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i.$$

El conjunto de índices puede ser finito, numerable o completamente arbitrario.

Ejemplo 6.1.3.

1. Un *recubrimiento abierto* de $\mathbb{R}$ es, por ejemplo, $\mathcal{U} = \{(n-1, n+1)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, ya que todos los conjuntos son abiertos en $\mathbb{R}$ y
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n-1, n+1).$$

2. Un *recubrimiento de* $\mathbb{R}^2$ *que no es abierto* es $\mathcal{V} = \{\overline{B}((m,n),1)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$, donde $\overline{B}((m,n),1)$ denota la bola cerrada de centro (m,n) y radio 1. Se tiene
$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \overline{B}((m,n),1),$$
pero ninguno de los conjuntos es abierto en $\mathbb{R}^2$.

3. Un *recubrimiento finito* de $\mathbb{R}$ es $\mathcal{W} = \{(-\infty, 0], (0, +\infty)\}$, ya que $\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$. Pero no es un recubrimiento abierto, ya que uno de los elementos de la familia no es abierto.

Nota 6.1.4. Un conjunto es una colección de elementos, que a su vez pueden ser conjuntos. No se permiten repeticiones. Por ejemplo,

$$\{(-n, +n) \subset \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$$

es un conjunto de intervalos.
Una *familia* es una aplicación que asigna a cada índice $i \in \mathcal{I}$ un conjunto J_i; de este modo puede haber repeticiones. Por ejemplo,

$$\mathcal{U} = \{J_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

donde $J_{2k} = [0, 1]$ y $J_{2k+1} = [2, 3]$. Es una familia indexada por $\mathcal{I} = \mathbb{N}$.
Para la unión de una familia, lo que cuenta es el conjunto subyacente, que en este caso solo tiene dos elementos.

6.2. Conjuntos compactos

Definición 6.2.1. Un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es *compacto* si todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito.

Nota 6.2.2. La propiedad que define a un conjunto compacto suele llamarse *propiedad de Heine–Borel*, y es un concepto difícil de aprehender.

La compacidad es ua propiedad *intrínseca de* X, por eso **no** se dice "*compacto en*". Esto quiere decir que si X es subespacio de un $\mathbb{R}^n$, aparecerá como compacto aunque usemos abiertos del espacio ambiente. Fíjate que debemos cambiar ligeramente la noción de recubrimiento.

Definición 6.2.3 (Recubrimiento por abiertos del ambiente). Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Un *recubrimiento de* X *por abiertos de* $\mathbb{R}^n$ es una familia $\mathcal{V}$ de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

(un contenido en vez de una igualdad).
Si $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ es tal que $X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}'} V$, se dice que $\mathcal{V}'$ es un *subrecubrimiento* de $\mathcal{V}$.

Proposición 6.2.4. *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. X *es compacto;*
2. *Para todo recubrimiento* $\mathcal{V}$ *de* X *por abiertos de* $\mathbb{R}^n$ *existe un subrecubrimiento finito, es decir, un número finito de conjuntos* $V_1, \dots, V_m \in \mathcal{V}$ *tales que* $X \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m$.

Este resultado suele ser muy útil para hacer ejercicios.

Demostración. (1)⇒(2)
Suponemos (1) y consideramos un recubrimiento $\mathcal{V}$ de X por abiertos en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$X \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V, \qquad \Longrightarrow X = (\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V) \cap X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (V \cap X) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

donde llamamos $\mathcal{U} = \{U \subset X : U = V \cap X, V \in \mathcal{V}\}$, que es un recubrimiento abierto de X. Por compacidad, existen $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{U}$ tales que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_m \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m$. Por tanto se cumple (2).

(2)⇒(1) Suponemos que se cumple (2) y consideramos un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, $X = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Como U abierto en X, existe V abierto en $\mathbb{R}^n$ con $U = V \cap X$.

Entonces $\mathcal{V} = \{V \subset X : V \cap X = U \in \mathcal{U}\}$ es un recubrimiento de X por abiertos en $\mathbb{R}^n$, es decir, $X \subset \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$ y podemos aplicar (2); por tanto

$$X = (V_1 \cup \cdots \cup V_m) \cap X = (V_1 \cap X) \cup \cdots \cup (V_m \cap X) = U_1 \cup \cdots \cup U_m,$$

donde $U_i = V_i \cap X \in \mathcal{U}$, $\forall i = 1, \ldots, m$. □

Ejemplo 6.2.5. El vacío es compacto. En efecto, aunque hay familias no vacías que recubren al vacío, están formadas solo por el vacío (único abierto). Por ejemplo $\mathcal{U} = \{\emptyset, \emptyset, \ldots\}$ es un recubrimiento abierto de $\emptyset$. Podemos quedarnos con el subrecubrimiento finito $\{\emptyset\}$ (un elemento).

Ejemplo 6.2.6. Todo subconjunto finito X de $\mathbb{R}^n$ es compacto.

Si $X = \emptyset$, está visto. Si $X \neq \emptyset$, supongamos que $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ y sea $\mathcal{V}$ un recubrimiento de X por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Entonces, cada x_i está en algún $V_i \in \mathcal{V}$, y

$$X = \{x_1, \ldots, x_m\} = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_m\} \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m.$$

Ejemplo 6.2.7. Un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es finito. Si X es discreto, entonces

$$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$$

es un recubrimiento abierto de X, ya que

$$X = \bigcup_{x\in X} \{x\}.$$

Si X fuese compacto, existirían

$$\{x_1\}, \ldots, \{x_m\} \in \mathcal{U} \quad \text{tales que} \quad X = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_m\} = \{x_1, \ldots, x_m\},$$

lo cual implica que X es finito. Es decir, todo subconjunto compacto discreto de $\mathbb{R}^n$ es necesariamente finito. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son compactos.

Ejemplo 6.2.8. El intervalo abierto $X = (0, 1)$ de $\mathbb{R}$ no es compacto. En efecto, de la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ se sigue que

$$(0, 1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}, n\geq 2} \left(\tfrac{1}{n}, 1\right),$$

así que

$$\mathcal{U} = \left\{\left(\tfrac{1}{n}, 1\right) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\right\}$$

es un recubrimiento abierto de X. Si existiese un subrecubrimiento finito

$$\mathcal{U}' = \left\{\left(\tfrac{1}{n_i}, 1\right) \mid i = 1, \ldots, m\right\},$$

entonces

$$\left(\tfrac{1}{n_1}, 1\right) \cup \cdots \cup \left(\tfrac{1}{n_m}, 1\right) = \left(\tfrac{1}{N}, 1\right) \neq (0, 1), \quad N = \text{máx}\{n_1, \ldots, n_m\}.$$

6.3. Compacidad y continuidad

Teorema 6.3.1. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto y sea $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to Y \subset \mathbb{R}^m$ una aplicación continua. Entonces la imagen $f(X) \subset \mathbb{R}^m$ es compacto.*

Demostración. Como el codominio no es esencial para la continuidad, podemos suponer que $f\colon X \to f(X)$ es continua y sobreyectiva.

Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto de $f(X)$, es decir, $\mathcal{U}$ es una familia de conjuntos abiertos de $f(X)$ tal que

$$f(X) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Debemos ver que $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito.

Para cada $U \in \mathcal{U}$, el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en X, pues U es abierto en $f(X)$ y f es continua. Además,

$$X = f^{-1}(f(X)) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U),$$

de modo que $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ es un recubrimiento abierto de X.

Como X es compacto, existen $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ tales que

$$X = f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_k).$$

Aplicando f y usando que $f(f^{-1}(U_i)) \subset U_i$, se obtiene

$$f(X) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_k.$$

Por tanto, $\mathcal{U}$ admite un subrecubrimiento finito, y $f(X)$ es compacto. □

Corolario 6.3.2. *La compacidad es una propiedad topológica.*

Teorema 6.3.3. *El intervalo cerrado $I = [0, 1]$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto del intervalo cerrado $I = [0, 1]$, es decir,

$$I = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

y debemos ver que I está contenido en una unión finita de miembros de $\mathcal{U}$.

Para esto, consideramos el conjunto

$$E = \{x \in I \mid [0, x] \text{ está contenido en una unión finita de miembros de } \mathcal{U}\},$$

y debemos ver que $1 \in E$, es decir, que $E = I$. Para ello probaremos que E es un conjunto no vacío que es abierto y cerrado en I; puesto que I es conexo será $E = I$.

En primer lugar, <u>E es no vacío</u>, ya que $0 \in E$ porque

$$0 \in I \Longrightarrow \exists\, U \in \mathcal{U} \mid 0 \in U \Longrightarrow [0, 0] \subset U.$$

De hecho 0 está en el interior de E porque

$$0 \in U \Longrightarrow \exists r > 0 \,|\, B_I(0, r) = [0, r) \subset U \Longrightarrow [0, x] \subset U \;\; \forall x \in [0, r) \Longrightarrow [0, r) \subset E.$$

<u>E es abierto en I</u>: Probemos que todos sus puntos son interiores. Sea $x \in E$. Si $x = 0$, hemos visto que es interior; si $x = 1$ sería $E = I$, abierto en I; finalmente, si $0 < x < 1$ tenemos

$$x \in E \subset I \Longrightarrow \exists\, U_0 \in \mathcal{U} \,|\, x \in U_0 \Longrightarrow \exists\, r > 0 \,|\, B_I(x,r) = (x-r, x+r) \subset U_0$$

Además, por ser $x \in E$, $\exists\, U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}$ tal que $[0,x] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m$.

Juntando ambas cosas,

$$[0,y] \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m \cup U_0, \quad \forall\, y \in B_I(x,r),$$

Se sigue que $B_I(x,r) \subset E$.

<u>E es cerrado en I</u>: Probaremos que el complementario es abierto. Si $x \in I \setminus E \subset I$ entonces $\exists V_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x \in V_0$ ($\mathcal{U}$ es recubrimiento), luego $\exists\, s > 0$ con $B_I(x,s) = (x-s, x+s) \cap I \subset V_0$. (pues V_0 es abierto en I). Pero entonces $B_I(x,s) \subset I \setminus E$, ya que si existiese $y \in B_I(x,s) \cap E$, entonces

$$\exists\, V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U} \quad \text{tales que} \quad [0,y] \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n,$$

y como $x \in V_0$ se tendría

$$[0,x] \subset V_1 \cup \cdots \cup V_n \cup V_0,$$

lo que implica $x \in E$, contradicción. □

Corolario 6.3.4. *Cualquier intervalo cerrado* $[a,b]$ *(*$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$*) es compacto (por ser homeomorfo a* $[0,1]$. *Veremos que éste es compacto en la siguiente sección.*

6.4. Propiedades

Proposición 6.4.1. *Todo subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^n$ *es acotado.*

Demostración. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Se tiene $X \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(\mathbf{o}, k)$ ya que, como consecuencia de la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$:

$$x \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow ||x|| \geq 0 \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, ||x|| < k \Longrightarrow x \in B(\mathbf{o}, k).$$

Si X es compacto, habrá un subrecubrimiento finito,

$$X \subset B(\mathbf{o}, k_1) \cup B(\mathbf{o}, k_m) = B(\mathbf{o}, m)$$

con $m = \max\{k_1, \ldots .k_n\}$. Por tanto X es acotado. □

Ejemplo 6.4.2. $\mathbb{R}$ no es compacto.

Lema 6.4.3. *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$ *compacto, y sea* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$*,* $y \notin X$. *Existen abiertos* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *tales que* $X \subset U$*,* $y \in V$*,* $U \cap V = \emptyset$.

Demostración. Para cada $\mathbf{x} \in X$, como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff y $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existen abiertos $U_\mathbf{x}, V_\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^n$ tales que

$$\mathbf{x} \in U_\mathbf{x}, \qquad \mathbf{y} \in V_\mathbf{x}, \qquad U_\mathbf{x} \cap V_\mathbf{x} = \emptyset.$$

(Recordemos que basta tomar $U_\mathbf{x} = B(\mathbf{x}, r/2)$, $V = B(\mathbf{y}, r/2)$ con $r = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$).

La familia $\{U_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x}\in X}$ es un recubrimiento de X por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Como X es compacto, admite un subrecubrimiento finito: existen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \in X$ tales que

$$X \subset U_{\mathbf{x}_1} \cup \cdots \cup U_{\mathbf{x}_m}.$$

Definimos

$$U := U_{\mathbf{x}_1} \cup \cdots \cup U_{\mathbf{x}_m}, \qquad V := V_{\mathbf{x}_1} \cap \cdots \cap V_{\mathbf{x}_m}.$$

Entonces $X \subset U$ e $\mathbf{y} \in V$. Además $U \cap V = \emptyset$. En efecto,

$$U \cap V = \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{\mathbf{x}_i}\right) \cap V = \bigcup_{i=1}^{m} (U_{\mathbf{x}_i} \cap V) \subset \bigcup_{i=1}^{m} (U_{\mathbf{x}_i} \cap V_{\mathbf{x}_i}) = \emptyset.$$

Luego existen abiertos disjuntos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $X \subset U$ e $\mathbf{y} \in V$. □

Proposición 6.4.4. *Todo subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Por lo anterior, para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$ existe un abierto V con $y \in V \subset \mathbb{R}^n \setminus X$. En particular, existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset V \subset \mathbb{R}^n \setminus X$. Esto prueba que $\mathbb{R}^n \setminus X$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, es decir, que X es cerrado en $\mathbb{R}^n$. □

6.5. Productos

Proposición 6.5.1. *1. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, entonces*

$$B_{\mathbb{R}^n}\left(\mathbf{x}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \times B_{\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{y}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subset B_{\mathbb{R}^{n+m}}\big((\mathbf{x}, \mathbf{y}), r\big).$$

2. Si W es un abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W$, entonces existe un abierto U en $\mathbb{R}^n$ y un abierto V en $\mathbb{R}^m$ tales que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U \times V \subset W.$$

Ejercicio 6.5.2. *Demuestra la prop. anterior.*

Lema 6.5.3 (Lema del tubo). *Sean $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, Y compacto. Sea N un abierto en $\mathbb{R}^{n+m}$ tal que $\{\mathbf{x}_0\} \times Y \subset N$. Entonces existe un abierto W en $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\mathbf{x}_0$ tal que*

$$\{\mathbf{x}\} \times Y \subset W \times Y \subset N.$$

Demostración. (ver Fig. 6.1). Para cada $\mathbf{y} \in Y$, como $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \in N$ y N es abierto, existen abiertos $U_{\mathbf{y}} \subset \mathbb{R}^n$ y $V_{\mathbf{y}} \subset \mathbb{R}^m$ tales que

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \in U_{\mathbf{y}} \times V_{\mathbf{y}} \subset N.$$

La familia $\{V_{\mathbf{y}}\}_{\mathbf{y}\in Y}$ es un recubrimiento de Y por abiertos de $\mathbb{R}^m$. Como Y es compacto, existen $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k \in Y$ tales que

$$Y \subset V_{\mathbf{y}_1} \cup \cdots \cup V_{\mathbf{y}_k}.$$

Si definimos

$$W = U_{\mathbf{y}_1} \cap \cdots \cap U_{\mathbf{y}_k},$$

entonces W es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x}_0 \in W$. Además,

$$\begin{aligned}&\{\mathbf{x}_0\} \times Y \subset W \times Y \subset W \times \left(V_{\mathbf{y}_1} \cup \cdots \cup V_{\mathbf{y}_k}\right)\\ &= (W \times V_{\mathbf{y}_1}) \cup \cdots \cup (W \times V_{\mathbf{y}_k}) \subset (U_{\mathbf{y}_1} \times V_{\mathbf{y}_1}) \cup \cdots \cup (U_{\mathbf{y}_k} \times V_{\mathbf{y}_k}) \subset N.\end{aligned}$$

□

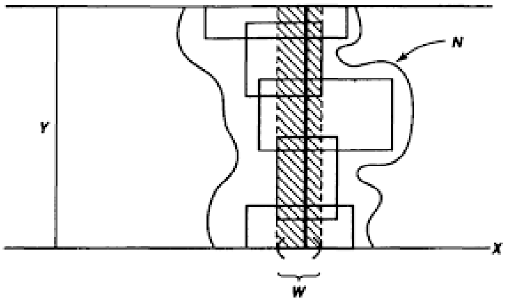


Figura 6.1: Lema del tubo Tomada de https://gurunanakcollege.edu.in

Teorema 6.5.4. *El producto cartesiano de conjuntos compactos es un conjunto compacto. Es decir, si $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos compactos, entonces $X \times Y$ es un subconjunto compacto de R^{n+m}.*

Demostración. Sea $\mathcal{W}$ un recubrimiento de $X \times Y$ por abiertos de $\mathbb{R}^{n+m}$.

Dado $\mathbf{x} \in X$, se tiene que $\{\mathbf{x}\} \times Y \cong Y$. Por tanto, $\{\mathbf{x}\} \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es compacto. Como $\mathcal{W}$ recubre $X \times Y$, también recubre $\{\mathbf{x}\} \times Y$. Por ello, existe una subfamilia finita

$$W_{\mathbf{x},1}, \dots, W_{\mathbf{x},l_{\mathbf{x}}} \in \mathcal{W}$$

tal que

$$\{\mathbf{x}\} \times Y \subset W_{\mathbf{x},1} \cup \cdots \cup W_{\mathbf{x},l_{\mathbf{x}}} =: W_{\mathbf{x}}.$$

El conjunto $W_{\mathbf{x}}$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$ que contiene a $\{\mathbf{x}\} \times Y$. Por el lema del tubo, existe un abierto $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathbf{x} \in U_{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad \{\mathbf{x}\} \times Y \subset U_{\mathbf{x}} \times Y \subset W_{\mathbf{x}}.$$

La familia $\{U_{\mathbf{x}}\}_{\mathbf{x} \in X}$ es un recubrimiento de X por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Como X es compacto, existen puntos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in X$ tales que

$$X \subset U_{\mathbf{x}_1} \cup \cdots \cup U_{\mathbf{x}_r}.$$

Por tanto,

$$X \times Y \subset (U_{\mathbf{x}_1} \times Y) \cup \cdots \cup (U_{\mathbf{x}_r} \times Y) \subset W_{\mathbf{x}_1} \cup \cdots \cup W_{\mathbf{x}_r}.$$

Cada $W_{\mathbf{x}_i}$ es unión finita de elementos de $\mathcal{W}$. En consecuencia, $\mathcal{W}$ admite un subrecubrimiento finito de $X \times Y$. Luego $X \times Y$ es compacto. □

Corolario 6.5.5. *Si $X_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}, \dots, X_k \subset \mathbb{R}^{n_k}$ son conjuntos compactos, entonces*

$$X_1 \times \cdots \times X_k$$

es compacto.

Demostración. Por inducción. Para $k = 2$ es el Teorema anterior. Suponemos que se verifica para k y probamos que se verifica para $k + 1$. En efecto,

$$X_1 \times \cdots \times X_{k+1} \cong (X_1 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1}.$$

Por la hipótesis de inducción, $X_1 \times \cdots \times X_k$ es compacto. Por tanto, $(X_1 \times \cdots \times X_k) \times X_{k+1}$ es compacto, pues es el producto de dos compactos. Así que $X_1 \times \cdots \times X_{k+1}$ es compacto. □

Nota 6.5.6. En el método matemático de inducción, el razonamiento es:
– la propiedad es cierta para un primer valor.
– Inducción: cada caso implica el siguiente.
– Conclusión: la propiedad es cierta para todos los casos.
Puede entenderse con la imagen de esas filas de fichas tipo dominó colocadas una detrás de otra: al caer la primera ficha, caerá la segunda, que hará caer la tercera, y así sucesivamente. Es decir, la propiedad queda demostrada para todos los valores.

Corolario 6.5.7. *Para cada* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$*,* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$*, donde* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$*,* $a_i < b_i$*,* $i = 1, \ldots, n$*, el rectángulo cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *de extremos* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$*, definido por*

$$R[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

es compacto.

Demostración. Obsérvese que

$$R[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

Cada intervalo cerrado $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ es compacto. Por el resultado sobre el producto finito de compactos, se sigue que $R[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ es compacto. □

Proposición 6.5.8. *Todo subconjunto cerrado de un compacto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto.*

Demostración. Sea $F \subset X$, con X compacto y F cerrado en $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente, cerrado en X, ya que X es cerrado en $\mathbb{R}^n$). Consideremos un recubrimiento $\mathcal{V}$ de F por abiertos de $\mathbb{R}^n$:

$$F \subset \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Entonces

$$X \subset F \cup (\mathbb{R}^n \setminus F) \subset \left(\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \right) \cup (\mathbb{R}^n \setminus F).$$

Por tanto, la familia

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \{\mathbb{R}^n \setminus F\}$$

es un recubrimiento de X por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Como X es compacto, existen $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{V}$ tales que

$$X \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m \cup (\mathbb{R}^n \setminus F).$$

En consecuencia,

$$F \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m$$

ya que F no tiene puntos de su complementario. Por tanto $\mathcal{V}$ admite un subrecubrimiento finito, luego F es compacto. □

6.6. El teorema de Heine-Borel

El origen del teorema se remonta al matemático alemán Karl Heine (1821–1881), discípulo de Weierstrass. Heine trabajaba en teoría de funciones reales y series trigonométricas. En 1872 demostró que en un intervalo cerrado y acotado de la recta real, toda función continua es uniformemente continua. El paso decisivo lo dio el matemático francés Émile Borel (1871–1956), que probó en 1895 que todo recubrimiento abierto de un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ admite un subrecubrimiento finito (nuestro Teorema 6.3.3).

El trabajo de Borel fue uno de los pilares del nacimiento de la teoría moderna de la medida y de la topología general, porque permite formular muchos resultados sobre máximos y mínimos, convergencia, continuidad uniforme y existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Teorema 6.6.1 (Heine-Borel). *Un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y solo si, es cerrado en $\mathbb{R}^n$ y acotado.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X es compacto. Entonces X es acotado (Prop. 6.4.1). Además, X es cerrado en $\mathbb{R}^n$ (Prop. 6.4.4).

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que X es cerrado y acotado. Al ser acotado, existe una bola abierta $X \subset B(\mathbf{o}, r)$ que está contenida en el rectángulo rectángulo cerrado

$$R = [-r, r] \times \cdots \times [-r, r] \subset \mathbb{R}^n$$

tal que $X \subset R$. Por el Corolario 6.5.7, R es compacto (producto de compactos). Como X es cerrado en $\mathbb{R}^n$, en particular es cerrado en R. Por el Lema 6.5.8 (todo cerrado de un compacto es compacto), se deduce que X es compacto. □

Nota 6.6.2. Este teorema es válido en $\mathbb{R}^n$, pero no en un espacio métrico arbitrario.

Teorema 6.6.3 (Weierstrass). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no vacío. Entonces toda función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ alcanza su máximo y su mínimo.*

Demostración. Dado que X es compacto, $X \neq \emptyset$, y $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua, el subconjunto $f(X)$ de $\mathbb{R}$ es compacto. Luego es un subconjunto no vacío, acotado y cerrado en $\mathbb{R}$.

Existe

$$M = \sup f(X).$$

Como $f(X)$ es cerrado en $\mathbb{R}$, se tiene $M \in f(X)$. En efecto, si $M \notin f(X)$, al ser $f(X)$ cerrado en $\mathbb{R}$, existe $r > 0$ tal que

$$(M - r, M + r) \subset \mathbb{R} \setminus f(X),$$

lo cual contradice la definición de supremo, pues $M - \frac{r}{2}$ sería una cota superior de $f(X)$ menor que M. Por tanto, $M \in f(X)$.

Análogamente, si

$$m = \inf f(X),$$

se obtiene que $m \in f(X)$. □

Teorema 6.6.4 (Caracterizaciones de la compacidad). *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) X es compacto (X tiene la propiedad de Heine–Borel).

(b) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X (propiedad de Bolzano–Weierstrass).

(c) Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente en X (X es secuencialmente compacto).

(d) X es cerrado en $\mathbb{R}^n$ y acotado.

Demostración. (1)⇒(2) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$, X compacto, y supongamos que A es un subconjunto de X que no tiene ningún punto de acumulación en X. Veremos que es finito. En efecto,

$$\forall \mathbf{x} \in X, \quad \mathbf{x} \notin A' \quad \Rightarrow \quad \exists r_{\mathbf{x}} > 0 \text{ tal que } B^*(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}) \cap A = \emptyset,$$

es decir, $B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}})$ contiene como mucho un punto de A (el punto $\mathbf{x}$, si $\mathbf{x} \in A$). Ahora,

$$X \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in X} B(\mathbf{x}, r_{\mathbf{x}}).$$

Como X es compacto, existen $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in X$ tales que

$$X \subset B(\mathbf{x}_1, r_{\mathbf{x}_1}) \cup \cdots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{\mathbf{x}_m}).$$

Luego

$$A \subset X \subset B(\mathbf{x}_1, r_{\mathbf{x}_1}) \cup \cdots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{\mathbf{x}_m}),$$

y por tanto

$$A = A \cap \big(B(\mathbf{x}_1, r_{\mathbf{x}_1}) \cup \cdots \cup B(\mathbf{x}_m, r_{\mathbf{x}_m})\big) \subset \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}.$$

Así, A es finito. Luego X satisface la propiedad de Bolzano–Weierstrass.

(2)⇒(3) Supongamos que X satisface la propiedad de Bolzano–Weierstrass y sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una sucesión en X. Consideremos el conjunto de términos

$$A = \{\mathbf{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset X.$$

Si A es finito, al menos un término de la sucesión se repite infinitamente, y por tanto $\{\mathbf{x}_k\}$ tiene una subsucesión constante, que es convergente en X.

Si A es infinito, por hipótesis existe $\mathbf{x} \in X$ punto de acumulación de A. y construimos una una subsucesión convergente a $\mathbf{x}$. Como $\mathbf{x} \in A'$, cada bola abierta de centro $\mathbf{x}$ contiene infinitos puntos de A. En particular,

$$B(\mathbf{x}, 1/k) \cap A \text{ es infinito para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Para $k = 1$, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_{m_1} \in B(\mathbf{x}, 1)$, y ponemos $\varphi(1) = m_1$.

Procediendo por inducción, si $\varphi(1), \dots, \varphi(k-1)$ están definidos, existe $m_k > \varphi(k-1)$ tal que

$$\mathbf{x}_{m_k} \in B(\mathbf{x}, 1/k),$$

y ponemos $\varphi(k) = m_k$.

Entonces $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ es una subsucesión de $\{\mathbf{x}_k\}$ y, como $\mathbf{x}_{\varphi(k)} \in B(\mathbf{x}, 1/k)$, se sigue que $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\} \to \mathbf{x}$. Luego X es secuencialmente compacto.

(3)⇒(4) Supongamos que X es secuencialmente compacto. Probamos primero que X es acotado.

Si X no fuese acotado, para todo $k \in \mathbb{N}$ existiría $\mathbf{x}_k \in X$ tal que $\|\mathbf{x}_k\| \geq k$. Entonces $\{\mathbf{x}_k\}$ es una sucesión en X que no puede tener ninguna subsucesión convergente, lo que contradice la compacidad secuencial. Luego X es acotado.

Para ver que X es cerrado en $\mathbb{R}^n$, utilizamos la caracterización secuencial de los cerrados: X es cerrado si toda sucesión $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ convergente en $\mathbb{R}^n$ tiene su límite en X.

Sea $\{\mathbf{x}_k\} \subset X$ tal que $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Como X es secuencialmente compacto, existe una subsucesión $\{\mathbf{x}_{\varphi(k)}\}$ que converge a $\mathbf{y}_0 \in X$. Pero toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite, luego $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 \in X$. Por tanto, X es cerrado.

(4)⇒(1) Es una de las implicaciones del teorema de Heine–Borel. □

Corolario 6.6.5. *Todo subconjunto infinito acotado A de $\mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación (en $\mathbb{R}^n$).*

Demostración. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, entonces su clausura $X = \overline{A}$ es cerrada en $\mathbb{R}^n$ y acotada, luego compacta. Por tanto, el subconjunto infinito $A \subset X$ tiene algún punto de acumulación en $X \subset \mathbb{R}^n$. □

Se agradecen todos los comentarios y sugerencias.
En caso de encontrar algún error o errata, por favor avisa a quique.macias@usc.es.