



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Os problemas de bancarrota

Hugo García Souto

Curso 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Os problemas de bancarrota

Hugo García Souto

Xuño, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento:</b> Estatística e investigación operativa
<b>Título:</b> Os problemas de bancarrota
<b>Breve descrición do contido</b>
Un problema de bancarrota (O'Neill, 1982) modela unha situación multi-axente na que estes reclaman porcións dun ben que non permite satisfacer completamente todas as súas demandas. Este problema foi amplamente estudado na literatura desde o punto da teoría de xogos (cf. Thomson, 2015), centrándose na análise de propiedades e no repartimento de bens según as demandas dos axentes involucrados (ver, por exemplo, Aumann e Maschler, 1985). Neste traballo propónse realizar unha revisión bibliográfica dos problemas de bancarrota e das súas aplicacións.
<b>Recomendacións</b>
Realizar unha revisión bibliográfica estruturada aplicando os coñecementos a un exemplo de interese práctico
<b>Outras observacións</b>
Breve planificación: conceptuar o tema, búsqueda de información, avaliar e organizar a información, tratar a información, organizar e redactar o traballo.



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>9</b>
<b>Motivación</b>	<b>11</b>
<b>1. Os problemas de repartimento: regras e axiomas</b>	<b>1</b>
1.1. Os problemas de bancarrota . . . . .	1
1.2. Regras de repartimento para problemas de bancarrota . . . . .	2
1.2.1. Familia de regras básicas ou directas . . . . .	3
1.2.2. Regra do Talmud . . . . .	4
1.2.3. Familia de prioridade ou asignación estocástica . . . . .	7
1.2.4. Familia paramétrica . . . . .	8
1.2.5. Familia xeométrica . . . . .	12
1.3. Axiomas . . . . .	15
1.3.1. Dualidade e consistencia . . . . .	15
1.3.2. Propiedades de preservación da orde . . . . .	17
1.3.3. Cotas de asignacións . . . . .	19
1.3.4. Propiedades de monotonicidade . . . . .	23
1.3.5. Propiedades de invariancia . . . . .	24
<b>2. Xogos de Bancarrota</b>	<b>27</b>
2.1. Xogos estratéxicos . . . . .	27

---

2.1.1.	Xogo estratéxico de bancarrota . . . . .	29
2.2.	Xogos de negociación . . . . .	30
2.2.1.	A Solución de Nash . . . . .	30
2.2.2.	A Solución de Kalai-Smorodinsky . . . . .	31
2.2.3.	Xogo de negociación de bancarrota . . . . .	32
2.2.4.	Xogos de negociación como estratéxicos . . . . .	34
2.3.	Xogos con utilidade transferible (TU) . . . . .	35
2.3.1.	Núcleo . . . . .	36
2.3.2.	O valor de Shapley . . . . .	37
2.3.3.	Xogo TU de bancarrota . . . . .	38
<b>3.</b>	<b>Aplicación: escaseza de máscaras na pandemia</b>	<b>43</b>
3.1.	Familia básica . . . . .	46
3.1.1.	CEA . . . . .	46
3.1.2.	Proporcional . . . . .	46
3.2.	Familia do Talmud . . . . .	47
3.3.	Familia de prioridade . . . . .	47
3.3.1.	Chegadas aleatorias ou valor de Shapley . . . . .	47
3.3.2.	Prioridade secuencial . . . . .	48
3.4.	Familia paramétrica . . . . .	49
3.5.	Familia xeométrica . . . . .	49
3.6.	Comparativa e análise . . . . .	50
<b>4.</b>	<b>Conclusións</b>	<b>55</b>
<b>A.</b>	<b>Cálculo das regras con R</b>	<b>57</b>
A.0.1.	Proporcional . . . . .	57
A.0.2.	CEA . . . . .	58

## ÍNDICE

---

A.0.3. Talmud . . . . .	61
A.0.4. Prioridade secuencial . . . . .	63
A.0.5. Chegadas aleatorias ou valor de Shapley . . . . .	65
A.0.6. Paramétrica (CEL) . . . . .	67
<b>B. Estatística con R</b>	<b>69</b>
B.1. Matriz de correlación . . . . .	69
B.2. Gráfico de barras . . . . .	72
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>



## Resumo

A motivación deste traballo baséase nun problema concreto e moi importante que houbo que resolver uns anos atrás e deixou ao mundo paralizado: a crise da COVID. A distribución inicial das máscaras é fundamental para limitar a expansión do virus, polo que os diferentes estados tiveron que afrontar un problema de repartimento polo seu territorio dun ben escaso.

Neste traballo estúdase o problema de bancarrota, un modelo clásico que pode estudarse por si mesmo ou dentro da teoría de xogos, e que representa situacións nas que un conxunto de axentes reclama máis do que hai dispoñible dun recurso limitado. Este tipo de problemas xorde en numerosos contextos sociais e económicos, onde é necesario repartir un ben escaso entre diferentes partes interesadas, como xeopolítica, economía de empresa, xestión de bens públicos...

O obxectivo principal do traballo é realizar unha revisión bibliográfica das distintas solucións propostas para este tipo de situacións, estudando as súas propiedades matemáticas, a súa xustificación conceptual e as súas aplicacións potenciais, xa sexa empregando os modelos de teoría de xogos existentes ou creando modelos específicos.

Analízanse regras como a división proporcional, a solución do Talmud, o valor de Shapley, as regras de prioridade ou as regras xeométricas, entre outras, comparando os seus comportamentos en termos de equidade, consistencia e eficiencia, e todo iso aplicado ao caso práctico.

## Abstract

The motivation stems from a concrete and highly significant problem that had to be resolved years ago and left the world paralyzed: the COVID crisis. The initial distribution of masks was crucial in limiting the virus's spread, forcing different states to face an allocation problem of a scarce resource across their territories.

---

This work examines the bankruptcy problem, a classic model in game theory that can also be approached axiomatically, representing situations in which a group of agents claims more than what is available from a limited resource. This type of problem arises in numerous social and economic contexts where it is necessary to distribute a scarce good among different interested parties, such as geopolitics, business economics, or public asset management.

The main objective of this work is to conduct a bibliographic review of the different proposed solutions for these situations, studying their mathematical properties, conceptual justifications and potential applications, whether using existing game theory models or developing specific ones.

Various rules are analyzed, such as proportional division, the Talmud solution, the Shapley value, priority rules, and geometric rules, among others, comparing their behavior in terms of fairness, consistency, and efficiency, all applied to the practical case.

# Motivación

Ao longo da historia, os problemas de distribución xusta en situacións de escaseza apareceron en múltiples contextos: dende repartimentos de terras en sociedades antigas ata a asignación de recursos financeiros en empresas en quebra, pasando pola distribución de axuda humanitaria en situacións de emerxencia. Un conxunto de individuos reclaman cantidades dun recurso limitado, de modo que a suma das súas demandas supera o total dispoñible. A pregunta fundamental é: como repartir ese recurso de maneira xusta? Estes escenarios teñen un elemento común: a demanda supera con creces os recursos dispoñibles, polo que é necesario establecer criterios que permitan repartir de forma xusta, transparente e xustificable. Esta problemática estudouse formalmente dentro da teoría dos problemas de bancarrota, que ofrece ferramentas matemáticas para abordar este tipo de decisións distributivas.

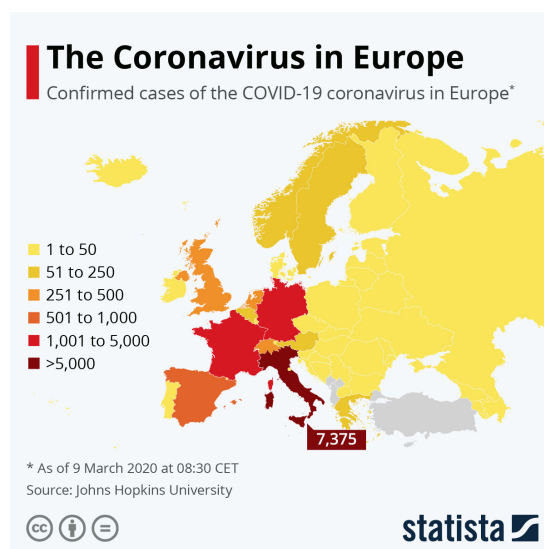
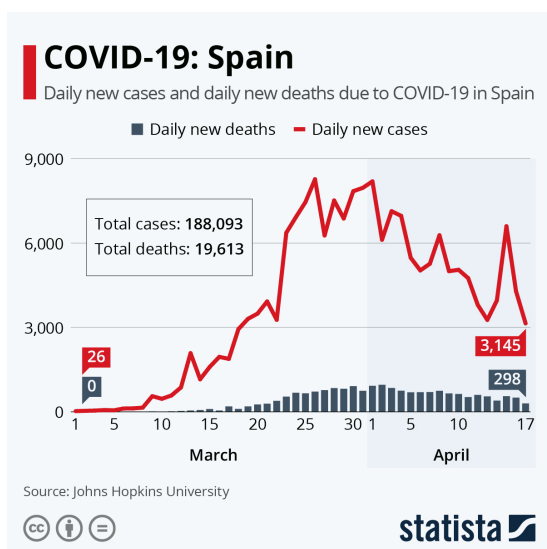


Figura 1: Evolución do COVID-19 en marzo de 2020: á esquerda, casos diarios en España, [37]; á dereita, mapa europeo dos casos, [36].

Un exemplo recente especialmente ilustrativo é o que motiva este traballo: a crise sanitaria

provocada pola pandemia da COVID-19, que afectou a todo o mundo a comezos de 2020. A rapidez da propagación do virus puxo a proba os sistemas sanitarios de todos os países, obrigándoo a tomar decisións urxentes baixo unha gran incerteza. En particular, en España, durante as primeiras semanas tras a declaración do estado de alarma o 14 de marzo de 2020, produciuse unha severa escaseza de materiais sanitarios fundamentais, entre eles as máscaras. Este recurso, de vital importancia para protexer tanto ao persoal sanitario como á poboación en xeral, converteuse nun ben moi demandado e moi escaso.

Cadro 1: Repartimento de máscaras por comunidade autónoma, [15]

<b>Comunidade Autónoma</b>	<b>Máscaras repartidas</b>
Andalucía	846.474
Aragón	163.174
Asturias	115.773
Baleares	113.496
Canarias	208.629
Cantabria	55.367
Castela-A Mancha	416.598
Castela e León	589.573
Cataluña	957.633
Estremadura	129.953
Galicia	243.973
A Ríoxa	118.602
Madrid	2.207.468
Murcia	143.232
Navarra	169.208
País Vasco	406.155
Comunidade Valenciana	517.753
Ceuta	39.198
Melilla	31.448
<b>Total</b>	<b>7.473.708</b>

Neste contexto, o Estado atopouse na obriga de repartir as máscaras dispoñibles entre as distintas comunidades autónomas, cada unha delas cunha demanda urxente. Isto constitúe un problema de bancarrota: existe un estado (o número total de máscaras dispoñibles) e varias demandas (as necesidades de cada comunidade, que poden ser representadas pola poboación),

pero a suma destas demandas supera con creces a cantidade dispoñible.

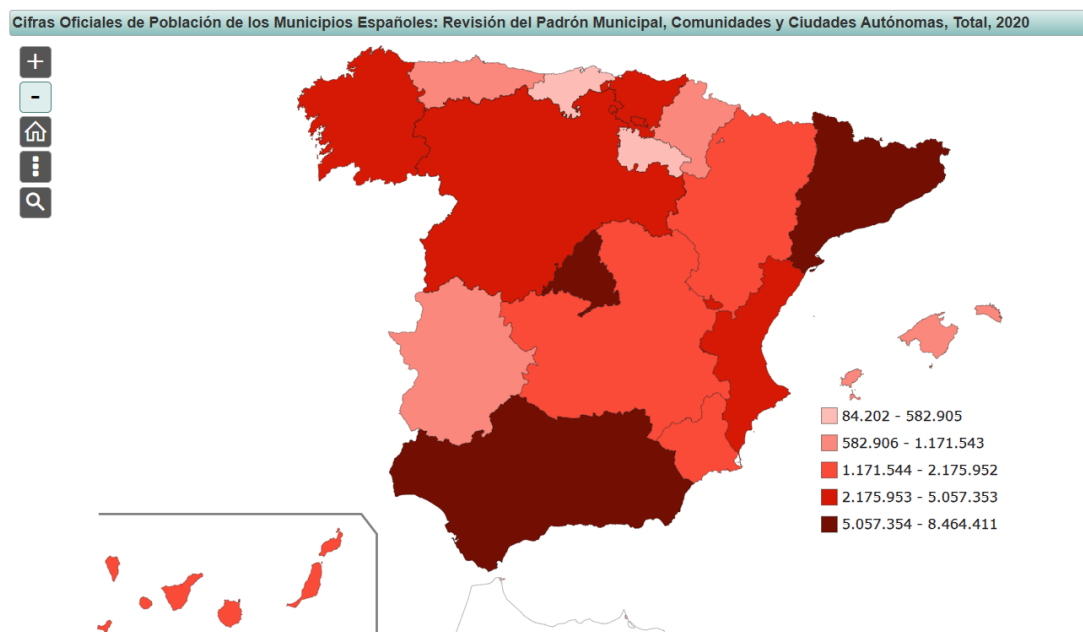


Figura 2: Poboación nacional por comunidades a 1 de xaneiro de 2020, [17]

Este traballo céntrase en modelar matematicamente esta situación de repartición, empregando as ferramentas dos problemas de bancarrota, e aplicando o modelo ao caso español durante as dúas primeiras semanas tras o estalido da pandemia. O obxectivo é estudar como distintos métodos de repartimento poderían ter asignado as máscaras, e analizar se certos criterios (como equidade, eficiencia ou proporcionalidade) se cumpren nestes modelos, o que pode ter aplicacións prácticas para futuras situacións de crise.

Os problemas de escaseza aparecen xa na Antigüidade e foron tratados desde perspectivas normativas e relixiosas (como no Talmud babilónico ou nos escritos de Ibn Ezra no século XII, revisados por O'Neill en [33]). O seu estudo formal moderno comezou con grandes figuras como Von Neumann e Morgenstern, continuando con importantes traballos dentro dos que podemos destacar o de Barry O'Neill en [33]. Estes autores propuxeron unha modelización matemática do problema e introduciron criterios baseados na teoría de xogos e na interpretación dos dereitos en conflito. O'Neill puxo o foco na distinción entre arbitraje de dereitos (normas superpostas sobre un recurso común) e arbitraje de intereses (onde non hai regras previas e o repartimento baséase en nocións de equidade ou poder relativo).

A partir destes traballos, xurdiu unha ampla literatura que desenvolveu distintos métodos para abordar o problema, especialmente desde enfoques axiomáticos ou empregando teoría de xogos. Unha referencia chave nesta evolución foi dada por Thomson en [39] e [41], onde se

recollen os avances teóricos e as extensións do modelo inicial, incluíndo variantes cooperativas, estratéxicas e experimentais, así como interpretacións alternativas, como o financiamento de proxectos públicos ou problemas de tributación.

O interese destes modelos radica non só na súa claridade conceptual e elegancia formal, senón tamén na súa capacidade de aplicar criterios xustificables para resolver conflitos distributivos. Algunhas regras clásicas, como a división proporcional, ou solucións derivadas do valor de Shapley, permiten capturar distintas intuicións de xustiza e equilibrio.

Polo tanto, realízase unha revisión bibliográfica estruturada dos problemas de bancarrota, as súas motivacións históricas e os principais enfoques formais que foron desenvolvidos na literatura, isto aplicado á situación de España durante as primeiras semanas da pandemia, analizando as regras máis representativas, as súas propiedades e as implicacións que teñen desde o punto de vista da eficiencia e da consistencia.

- No primeiro capítulo trátase a formalización de O'Neill en [33] dos problemas de bancarrota, estudando as regras de repartimento principais clasificadas por familias e os axiomas ou propiedades que serven para caracterizalas.
- No segundo capítulo explícase como se aborda o problema de bancarrota empregando teoría de xogos, é dicir, de maneira que os axentes que interveñen no repartimento tomen decisións. Para isto, introdúcese brevemente como se formalizan os principais problemas de xogos.
- No terceiro aplícanse os principais resultados teóricos obtidos nos dous primeiros capítulos á situación da pandemia explicada anteriormente.
- Na conclusión analízanse e interprétanse os resultados obtidos durante o traballo.
- No apéndice expóñense os programas de R empregados para aplicar a teoría á práctica de forma rápida e eficiente.

# Capítulo 1

## Os problemas de repartimento: regras e axiomas

Neste capítulo introducíranse os problemas de bancarrota seguindo o traballo de Thomson en [42], que se fundamentan no repartimento dun certo ben, insuficiente para cubrir as demandas dos axentes involucrados. Neste contexto, presentaranse diferentes regras de repartimento e unha serie de axiomas que deberían cumprir as regras.

O capítulo estrutúrase como segue: a sección 1.1 introduce o problema, a sección 1.2 trata as regras de repartimento ordeadas por familias e, finalmente, a sección 1.3 expón os axiomas ou propiedades que poden ou non cumprir estas regras.

### 1.1. Os problemas de bancarrota

O problema de bancarrota é un tipo de problema de repartimento no que varios demandantes reclaman máis do que existe, o que xera unha situación de escaseza de recursos. Neste capítulo, preséntase o modelo proposto por O'Neill en [33]. Así, aínda que estes problemas estiveron presentes ao longo da historia con outras formulacións similares e notacións, este modelo base serve de referencia para as discusións e xeneralizacións que se fan neste documento, pois é o máis empregado na literatura deste campo.

**Definición 1.1** (O'Neill, [33].). Sexa  $N = \{1, \dots, n\}$  o conxunto de demandantes, con cada demandante  $i \in N$  que ten unha demanda  $c_i \in \mathbb{R}_+$  sobre un estado  $E \in \mathbb{R}^+$ . O **modelo base de O'Neill** descríbese como un par  $(c, E) \in \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_+$  tal que:

$$\sum_{i=1}^n c_i \geq E$$

Denomínase  $C^N$  ao conxunto de todos os problemas posibles con  $N$  como conxunto de demandantes. Tamén pode denotarse  $C^n$ , sendo  $N = \{1, \dots, n\}$ , como se mencionou.

Para solucionar este problema, creáronse regras que permiten distribuír a cantidade total de diferentes formas, satisfacendo así diferentes nocións de xustiza, igualdade ou equidade.

**Definición 1.2.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , unha **regra**  $S$  é unha función que asigna un vector  $x \in \mathbb{R}^N$  aos demandantes, cumprindo as seguintes condicións:

- **Non negatividade:** ningún demandante debe ser solicitado a pagar, isto é,  $x_i \geq 0$ .
- **Limitación das demandas:** ningún demandante debe recibir máis do que reclama, isto é,  $x_i \leq c_i$ .
- **Balance:** a suma dos premios debe ser igual á dotación, isto é,  $\sum_{i=1}^n x_i = E$ .

Así, aínda que as regras ofrecen solucións exactas na teoría, en ocasións hai que aproximar os resultados dada a natureza indivisible dalgunhas dotacións. Cabe destacar unha definición importante á hora de analizar e caracterizar como se comportan as distintas regras variando o estado total:

**Definición 1.3.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , un **camiño** de premios dunha regra para un vector de demandas  $c$  describe as eleccións que fai a medida que o estado varía de 0 a  $\sum_{i=1}^n c_i$ .

Na primeira sección deste capítulo explícanse as regras principais de repartimento que se coñecen hoxe en día, dende a súa orixe ata a súa formalización. Porén, as regras non son suficientes para solucionar o conflito, pois cómpre saber cal convén empregar en cada caso. Para isto, enúncianse na terceira sección uns axiomas que axudan a formalizar as nocións mencionadas anteriormente, de maneira que as regras poden cumprir uns e outros non.

## 1.2. Regras de repartimento para problemas de bancarrota

Nesta sección preséntanse as principais regras de repartimento para problemas de bancarrota. Co fin de facilitar a súa exposición, mostraranse organizadas en relación coa súa natureza.

### 1.2.1. Familia de regras básicas ou directas

Nesta familia recóllense as regras que distribúen o estado fundamentalmente en función das demandas de xeito directo e elemental, seguindo principalmente as tratadas por Thomson en [42].

#### Regra proporcional, $P$

A regra proporcional parece a máis intuitiva (incluso algúns filósofos clásicos como Aristóteles mencionan esta idea intuitiva de repartimento). Asigna a cada demandante unha cantidade proporcional á súa demanda, de modo que todos reciben en proporción á súa participación no total das reclamacións. Esta asignación resulta especialmente natural, pois mantén a equidade relativa entre os demandantes.

Para o problema  $(c, E) \in C^N$ , para cada  $i \in N$ , o premio do demandante  $i$  determínase como

$$x_i = \lambda c_i, \quad (1.1)$$

onde o factor de proporcionalidade  $\lambda$  escóllese de tal xeito que a suma dos premios sexa exactamente igual á dotación total  $E$ . Isto implica que

$$\lambda = \frac{E}{\sum_{i=1}^n c_i}. \quad (1.2)$$

#### Regra de premios iguais restrinxidos, $CEA$

Para o problema de bancarrota  $(c, E) \in C^N$ , a regra de premios iguais restrinxidos, coñecida como **CEA** (do inglés *Constrained Equal Awards*), busca asignar a cantidade máis equitativa posible a todos os demandantes ata o límite das súas propias demandas, asegurando que ningún reciba máis do que reclamou. Atopámonos referencias a sistemas similares nos escritos de Maimónides do século XII.

Así, o premio do demandante  $i$  en  $(c, E) \in C^N$  é dado por

$$x_i = \min\{c_i, \lambda\}. \quad (1.3)$$

Con  $\lambda$  obtida polo seguinte proceso:

- O estado  $E$  distribúese inicialmente en partes iguais entre todos os demandantes, ata que cada un alcance a súa demanda mínima.
- O demandante coa menor demanda deixa de recibir premio porque xa acadou  $c_i$ , e a distribución dos incrementos restantes faise equitativamente entre os demais.

- Este proceso repítese iterativamente, excluindo sucesivamente aos demandantes que alcanzan as súas demandas, ata esgotar completamente o estado  $E$ .

### Regra de perdas iguais restrinxidas, $CEL$

Aparece tamén nos escritos de Maimónides en contraposición á regra CEA. A regra de perdas iguais restrinxidas, coñecida como **CEL** (do inglés *Constrained Equal Losses*), reparte as perdas de forma equitativa entre os demandantes, até que as demandas máis pequenas queden completamente cubertas e quen teña menor demanda non reciba nada.

Formalmente, para  $(c, E) \in C^N$ , o premio do demandante  $i$  é

$$x_i = \max\{c_i - \lambda, 0\}. \quad (1.4)$$

Con  $\lambda$  obtida polo seguinte proceso:

- Impóñense perdas iguais a todos os demandantes ata que a perda común alcance a menor demanda.
- O demandante coa menor demanda recibe 0 e queda excluído da distribución.
- As perdas iguais mantense entre os restantes demandantes, excluindo sucesivamente aos que alcanzan perdas equivalentes ás súas demandas.
- Este proceso continúa iterativamente ata que se esgote completamente o recurso.

### 1.2.2. Regra do Talmud

Nesta familia inclúense aquelas regras que se xeran a partir de CEA e CEL segundo criterios lóxicos ou mixtos ou están orixinadas no estudo do Talmud e tratadas formalmente en diversos estudos recentes por importantes autores como O'Neill, Aumann, Thomson e Chun en [33], [3], [42] e [6], respectivamente.

### Regra de concesión e división, $CD$

A regra de concesión e división, creada inicialmente para dous reclamantes, combina dous principios: primeiro, concédese ao axente  $i$  aquilo que o estado permite despois de satisfacer completamente ao outro axente  $j$ , é dicir,  $E - c_j$ ; e despois, divídese equitativamente o que queda. Esta regra reflicte un criterio de xustiza que equilibra a prioridade co repartimento igualitario.

Formalmente, estudada por Aumann en [3] para  $(c, E) \in C^N$  con  $n = 2$  (dous axentes), dado un estado  $E \leq c_1 + c_2$  e un vector de demandas  $c = (c_1, c_2)$ , a regra defínese como:

$$CD_i(c, E) = \text{máx}\{0, E - c_j\} + \frac{1}{2} \left( E - \text{máx}\{0, E - c_1\} - \text{máx}\{0, E - c_2\} \right), \quad i \in \{1, 2\}, j \neq i. \quad (1.5)$$

Esta regra pode estenderse a un número arbitrario de xogadores na teoría, porén, canto máis alto é o valor de  $n$  menor uso potencial ten, pois é pouco probable que para algún  $i \in N$ :

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} c_j < E.$$

### Regra de concesión e división inversa, $CD^{-1}$

Esta regra pode interpretarse como unha versión dual da regra  $CD$ . Neste caso, o foco está en repartir a perda, máis que o premio, facendo unha interpretación da situación mediante a transformación do estado e das demandas.

Defínese, para  $(c, E) \in C^N$  con  $n = 2$ , do seguinte xeito:

$$CD^{-1}(c, E) = c - CD(c, c_1 + c_2 - E). \quad (1.6)$$

Analogamente, pode estenderse a un conxunto arbitrario de xogadores.

### Regra do Talmud, $T$

Inspirada na tradición xudía e formalizada por Aumann en [3], a regra do Talmud aplica dúas regras básicas: a regra  $CEA$  e a regra  $CEL$ , segundo o nivel do estado en relación á metade do total reclamado. Para un problema de bancarrota  $(c, E) \in C^N$ , esta regra representa un compromiso entre a equidade na asignación ( $CEA$ ) e na perda ( $CEL$ ).

$$T(c, E) = \begin{cases} CEA\left(\frac{c}{2}, E\right), & \text{se } E \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i, \\ \frac{c}{2} + CEL\left(\frac{c}{2}, E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i\right), & \text{noutro caso.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Para o caso de dous axentes ( $|N| = 2$ ), a regra do Talmud coincide exactamente coa regra de concesión e división.

**Regra do Talmud inverso,  $T^{-1}$** 

A regra do Talmud inverso mantén o espírito da regra do Talmud, pero con troco nos criterios: cando o estado é amplo, aplícase primeiro a regra CEL; cando é escaso, comeza pola regra CEA. Esta versión alternativa, formalizada por Chun en [6], está definida para problemas de bancarrota  $(c, E) \in C^N$ , e pode interpretarse como un enfoque complementario para a xustiza no repartimento.

$$T(c, E) = \begin{cases} CEL\left(\frac{c}{2}, E\right), & \text{se } E \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i, \\ \frac{c}{2} + CEA\left(\frac{c}{2}, E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i\right), & \text{noutro caso.} \end{cases} \quad (1.8)$$

Para  $|N| = 2$ , coincide coa regra de concesión e división inversa.

**Regra igualitaria restrinxida,  $RIE$** 

Esta regra é unha extensión progresiva da regra do Talmud. Comeza aplicando CEA á metade das demandas, e a medida que aumenta o estado, vai completando os premios dos axentes máis pequenos, respectando sempre un criterio de xustiza progresiva.

O proceso defínese para  $(c, E) \in C^N$ , tamén por Chun en [6], da seguinte maneira:

$$RIE(c, E) = \begin{cases} CEA\left(\frac{c}{2}, E\right), & \text{se } E \leq \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2} \\ \frac{c}{2} + y, & \text{se } E > \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2} \end{cases}$$

onde  $y$  é un vector de asignacións adicionais que se distribúe do seguinte xeito:

- Asignar unidades adicionais ao axente máis pequeno ata que alcance

$$\text{mín}\left(c_1, \frac{c_2}{2}\right)$$

- A continuación, repartir equitativamente entre os dous axentes máis pequenos ata que o primeiro alcance  $c_1$

- Despois, asignar só ao segundo ata que alcance

$$\text{mín}\left(c_2, \frac{c_3}{2}\right)$$

- Continuar este proceso engadindo axentes ao grupo de reparto e aplicando os límites correspondentes:

$$\text{mín}\left(c_k, \frac{c_{k+1}}{2}\right) \quad \text{para cada } k = 1, \dots, n-1$$

- Detense cando a dotación se esgota ou todos os axentes alcanzan as súas reclamacións.

## Regra de Piniles, Pin

A Regra de Piniles, formulada tamén para problemas de bancarrota  $(N, c)$ , segue unha lóxica semellante á do Talmud, pero aplicada dúas veces sobre a metade das demandas. Emprégase a regra CEA tanto no primeiro tramo do estado como no segundo, proporcionando unha interpretación simétrica e gradual do repartimento. Para  $(c, E) \in C^N$ :

$$\text{Pin}(c, E) = \begin{cases} \text{CEA}(\frac{c}{2}, E), & \text{se } E \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i, \\ \frac{c}{2} + \text{CEA}(\frac{c}{2}, E - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i), & \text{noutro caso.} \end{cases} \quad (1.9)$$

### 1.2.3. Familia de prioridade ou asignación estocástica

Nesta familia inclúense aquelas regras que se basean nunha orde estrita ou nunha permutación aleatoria dos axentes para decidir a quen asignar primeiro. Foron tratadas por O'Neill e Thomson nas súas obras [33] e [42], respectivamente.

#### Regra de prioridades secuencial, $SP_{\prec}$

Esta regra parte dunha orde preestablecida entre os axentes segundo a cal se distribúe o estado de forma secuencial. Cada axente recibe o máximo posible dentro da súa demanda, respectando a orde dada, ata que se esgote o recurso. Esta regra reflicte un principio de prioridade ou dereito adquirido segundo a posición na orde.

Sexa  $N = \{1, \dots, n\}$ , o vector de demandas  $c = (c_1, \dots, c_n)$ ,  $E$  o estado total e  $(c, E) \in C^N$ . Para unha orde estrita  $i_1 \prec i_2 \prec \dots \prec i_n$ , a asignación  $SP_{\prec}(c, E) = (x_1, \dots, x_n)$  calcúlase do seguinte xeito:

$$\begin{aligned} E_0 &= E, \\ x_{i_k} &= \min\{c_{i_k}, E_{k-1}\}, \quad k = 1, \dots, n, \\ E_k &= E_{k-1} - x_{i_k}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

#### Algoritmo para calcular $SP_{\prec}(c, E)$ :

- Ordenar os axentes segundo a orde de prioridade dada  $\prec$ :  $i_1 \prec i_2 \prec \dots \prec i_n$ .
- Inicializar a dotación restante como  $R := E$ .
- Para cada axente  $i_k$  segundo a orde:
  - Asignar a  $i_k$  a cantidade  $x_{i_k} := \min\{c_{i_k}, R\}$ .

- Actualizar a dotación restante:  $R := R - x_{i_k}$ .
- Repetir o proceso ata que se procesen todos os axentes ou se esgote a dotación.

### Regra de chegadas aleatorias, $RA$

Para evitar o sesgo dunha orde fixa, O'Neill en [33] con esta regra propón aplicar SP para todas as permutacións posibles da orde dos axentes, e tomar a media das asignacións resultantes. Así, para un problema de bancarrota  $(c, E)$ , a regra  $RA$  garante unha solución simétrica e libre de discriminación por orde.

Para o problema  $(c, E) \in C^N$ , sexa  $\Pi(N)$  o conxunto de todas as permutacións do conxunto de axentes  $N$ . A regra defínese como:

$$RA(c, E) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} SP_{\pi}(c, E). \quad (1.11)$$

### Regra de solapamento mínimo, $MO$

Neste enfoque, o problema de bancarrota  $(c, E) \in C^N$  interprétase como unha situación continua na que se reparte o estado  $E$  en unidades infinitesimais. O obxectivo é minimizar o solapamento entre os axentes, é dicir, tentar que cada unidade do estado sexa reclamada polo menor número posible de axentes. Primeiro priorízanse as unidades que só interesan a un demandante, logo as que son compartidas por dous, e así sucesivamente.

Cada unidade  $u \in [0, E]$  asóciase cun subconxunto  $A_u \subseteq N$  de demandantes que a reclaman. A regra  $MO$  selecciona a colección de subconxuntos  $\{A_u\}_{u \in [0, E]}$  cumprindo:

- En primeiro lugar, maximízase o número de unidades reclamadas por un único axente.
- Entre as asignacións que cumpren o anterior, maximízase o número de unidades reclamadas por exactamente dous axentes, e así sucesivamente.

Finalmente, cada unidade  $u$  repártese a partes iguais entre os axentes que a reclaman. O premio do axente  $i \in N$  é:

$$MO_i(c, E) = \int_0^E \frac{1}{|A_u|} 1_{\{i \in A_u\}} du. \quad (1.12)$$

#### 1.2.4. Familia paramétrica

Aquí inclúense conxuntos de regras definidas mediante parámetros ou secuencias de funcións. Moitas delas poden dar lugar a regras presentadas anteriormente, empregando os parámetros

adecuados. Síguese principalmente o traballo de Young, Thomson e Moreno-Ternero e Villar en [44], [42] e [25].

### Regras paramétricas básicas, $\mathcal{F}$

Este conxunto de regras teñen unha formulación común, de forma que contén regras coñecidas, como a proporcional, *CEA*, *CEL*, Talmud ou Piniles, mediante unha función que depende dun único parámetro. A motivación principal é unificar criterios distintos baixo unha estrutura continua e flexible.

Para  $(c, E) \in C^N$ , Young considera en [44] o conxunto de funcións

$$\mathcal{F} = \{ f : \mathbb{R}_+ \times [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f \text{ continua, crecente en } \lambda, f(c, \underline{\lambda}) = 0, f(c, \bar{\lambda}) = c \}.$$

Para cada función  $f \in \mathcal{F}$ , defínese unha regra  $S^f$  do seguinte xeito: dado un problema de bancarrota  $(c, E) \in C^N$ , existe un valor  $\lambda$  tal que, para cada axente  $i \in N$ ,

$$x_i = f(c_i, \lambda), \tag{1.13}$$

onde  $\lambda$  se escolle de forma que se cumpra  $\sum_{i=1}^n x_i = E$ .

Este esquema abrangue regras como a proporcional (cunha función lineal en  $\lambda$ ), a *CEA* (cunha función tipo max), a *CEL* (cunha función tipo min), e tamén as regras do Talmud ou de Piniles, segundo se escolla a forma de  $f$ .

### Regras ICI (Increasing–Constant–Increasing)

Thomson xeneraliza a regra do Talmud empregando fases de repartimento que combinan etapas de reparto igualitario con fases nas que algúns axentes quedan temporalmente excluídos ou son reincorporados progresivamente. A motivación é tratar de forma xusta os axentes con demandas pequenas e grandes en diferentes etapas do proceso.

Para un problema de bancarrota  $(c, E) \in C^N$ , defínense dúas sucesións de funcións:

$$F = (F_k)_{k=1}^{n-1}, \quad G = (G_k)_{k=1}^{n-1}, \tag{1.14}$$

sometidas ás condicións:

$$F_k(c) \leq F_{k'}(c) \quad \text{e} \quad G_{k'}(c) \leq G_k(c) \quad \text{para } k < k', \tag{1.15}$$

onde a desigualdade se entende compoñente a compoñente.

O proceso de reparto é o seguinte:

- O estado inicial distribúese de forma igualitaria ata alcanzar  $F_1(c)$ ; o axente de menor demanda queda excluído.
- Continúase do mesmo xeito ata  $F_2(c)$ , excluindo progresivamente os seguintes axentes con menor demanda.
- A partir de  $F_{n-1}(c)$ , reincorpóranse os axentes un a un en orde inversa (comezando polos últimos excluídos), cun reparto igualitario ata  $G_{n-1}(c)$ , e así sucesivamente ata  $G_1(c)$ .
- Finalmente, o reparto continúa igualitariamente ata cubrir a totalidade das demandas.

As funcións  $F_k$  e  $G_k$  deben satisfacer as denominadas *relacións ICI*, que garanten que cada axente reciba exactamente a súa demanda:

$$\sum_{k=1}^n x_i(E_k) \cdot (E_k - E_{k-1}) = c_i, \quad \forall i \in N, \quad (1.16)$$

onde  $x_i(E_k)$  representa a asignación ao axente  $i$  no nivel de dotación  $E_k$ , e  $\{E_k\}_{k=0}^n$  é unha sucesión crecente de dotacións.

Esta familia inclúe como casos particulares as regras *CEA*, *CEL*, a regra do Talmud e tamén a regra de solapamento mínimo (*MO*).

### Regras CIC (Constant–Increasing–Constant)

Esta familia adopta un enfoque oposto ás ICI. A motivación principal é reflectir principios como “perdas iguais” nunha fase inicial, seguidos dun repartimento compensatorio. Así, os axentes con demandas maiores son os primeiros en asumir perdas, que logo son revertidas gradualmente.

Tamén se empregan, para  $(c, E) \in C^N$ , dúas sucesións de funcións:

$$F = (F_k)_{k=1}^{n-1}, \quad G = (G_k)_{k=1}^{n-1}, \quad (1.17)$$

agora coas propiedades opostas:

$$F_k(c) \geq F_{k'}(c), \quad G_k(c) \leq G_{k'}(c), \quad \text{para } k < k'. \quad (1.18)$$

O proceso é o seguinte:

- Comezamos con todo o estado  $E = \sum c_i$ , e aplicamos perdas iguais ata alcanzar  $G_1(c)$ . Os axentes con maior demanda van quedando fóra segundo os valores  $G_k(c)$ .
- Entre cada dous valores  $G_k(c)$ , o estado restante repártese igualitariamente entre os que permanecen.

- Cando se chega a  $F_{n-1}(c)$ , só queda o axente de menor demanda, que asume o resto das perdas ata  $F_1(c)$ .
- A partir de aí, os axentes reincorpóranse de un en un e repártese de novo o estado adicional igualitariamente.

As funcións deben satisfacer as chamadas *relacións CIC*, que aseguran que cada axente reciba o valor exacto da súa demanda.

### Regras TAL, $T^\theta$

Esta subfamilia parametriza regras do tipo ICI a través dun único parámetro  $\theta \in [0, 1]$ , que permite interpolar entre as regras CEA ( $\theta = 1$ ) e CEL ( $\theta = 0$ ). A motivación é introducir flexibilidade e adaptar o repartimento segundo o grao de prioridade que se queira dar a premios ou perdas iguais.

Para un problema de bancarrota  $(c, E) \in C^N$ , Moreno-Ternero e Villar na súa obra [25] expoñen a regra  $T^\theta$  definida como

$$T^\theta(c, E) = \begin{cases} CEA(\frac{\theta c}{2}, E), & \text{se } E \leq \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n c_i, \\ \theta c + CEL((1 - \theta)c, E - \theta \sum_{i=1}^n c_i), & \text{noutro caso.} \end{cases} \quad (1.19)$$

Esta familia contén as regras CEA, CEL e Talmud como casos particulares, mais non inclúe a regra MO.

### Outras regras

Ademais das parametrizacións anteriores, existen outras liñas de investigación que propoñen novas regras baseadas en funcións parametrizadas ou combinacións de principios xa coñecidos. A motivación destas propostas é ampliar a variedade de solucións posibles e conectar regras clásicas mediante camiños intermedios.

- Moreno-Ternero en [26] propuxo unha familia máis ampla que contén todas as regras TAL, pero non está incluída na estrutura xeral de ICI.
- Thomson en [42] introduciu familias que conectan a regra proporcional con CEA ou CEL mediante funcións específicas que permiten transitar entre ambas solucións de forma continua.

### 1.2.5. Familia xeométrica

Neste grupo inclúense aquelas regras que se fundamentan na xeometría do conxunto factible de repartos, como presentan Miras et al. en [24]

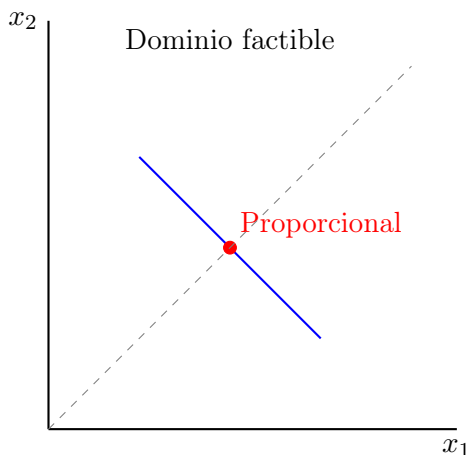


Figura 1.1: Ilustración da regra proporcional nun problema con dous axentes.

Vemos que o dominio factible no caso de dimensión 2 é un segmento, pois o vector de premios ten que sumar sempre  $E$ . Pode estenderse isto a 3 dimensións e incluso a 4. Para ilustrar as 4 dimensións emprégase un gráfico 3D de maneira que  $x_i \leq c_i$  e  $\sum_{i \in N} x_i = E$  e, ao ter  $N + 1$  ecuacións, pode suprimirse unha dimensión á hora de representar aplicando as relacións entre as variables que dan lugar a novas restricións no espazo tridimensional, que se traducen nun volume no espazo. De forma análoga, tamén os modelos de tres axentes poden verse no plano como un área; así, neste documento só se verán algúns casos sinxelos en  $2D$ .

### Regra do punto medio

Busca unha asignación intermedia entre a demanda e a asignación mínima (normalmente 0, e no caso do modelo de O'Neill sempre), situándose no punto medio do segmento que conecta o orixe coas demandas e despois normalizando para que a suma sexa  $E$ .

Para dous axentes ( $n = 2$ ) e  $(c, E) \in C^N$ , defínese:

$$x_1 = \frac{1}{2}c_1, \quad x_2 = \frac{1}{2}c_2, \quad \text{e logo normalízase para que } x_1 + x_2 = E. \quad (1.20)$$

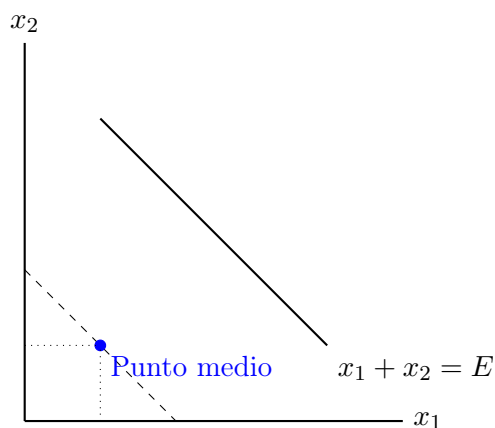


Figura 1.2: Repartimento segundo a regra do punto medio

### Regra da proxección ortogonal

Busca prioridade respecto da proximidade euclidiana ó vector de demandas. Elíxese o punto do simplex factible máis próximo a  $c$ .

Formalmente, o conxunto factible do problema  $(c, E) \in C^N$  para dous axentes é  $\{x \in \mathbb{R}_+^2 : x_1 + x_2 = E\}$ . A asignación  $x$  é a proxección ortogonal de  $c = (c_1, c_2)$  sobre esa recta.

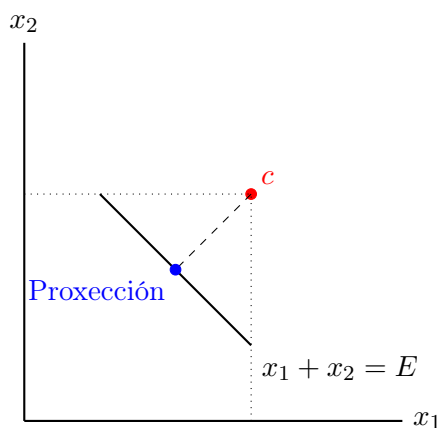


Figura 1.3: Proxección ortogonal sobre o simplex factible

### Centro do círculo inscrito (incenter)

Para tres axentes, é dicir:  $(c, E) \in C^N$  con  $n = 3$ , constrúese o triángulo definido polos vértices extremos das asignacións posibles e entón elíxese o centro do círculo inscrito, pois está equidistante das fronteiras do conxunto factible.

Para o problema  $(c, E) \in C^N$ , no plano, o triángulo vén dado polos puntos  $(c_1, 0, 0)$ ,  $(0, c_2, 0)$  e  $(0, 0, c_3)$ , e o “incenter” é a intersección das bisectrices internas.

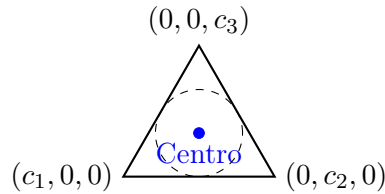


Figura 1.4: Centro do círculo inscrito nun problema con tres axentes

### Repartimento equidistante

Busca minimizar a máxima desviación absoluta entre a asignación  $(x_i)$  e as demandas  $(c_i)$ , elixindo o punto do conxunto factible máis “equidistante” de  $(c_1, \dots, c_n)$  para  $(c, E) \in C^N$  con  $n = 3$ .

$$x = \arg \min_{x \in F(c, E)} \max_i |x_i - c_i|,$$

onde

$$F(c, E) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : x_i \leq c_i \forall i, \sum_{i=1}^n x_i = E \right\}.$$

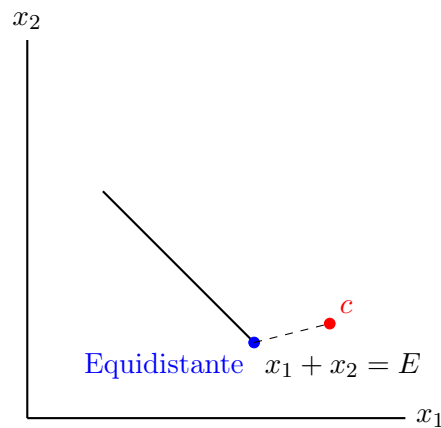


Figura 1.5: Asignación equidistante ás demandas

Como se observa, as familias xeométricas non coinciden exactamente coas regras alxébricas clásicas, pero permiten visualizar e seleccionar puntos clave no espazo de asignacións factibles.

## 1.3. Axiomas

Nesta sección analízanse as principais propiedades que poden cumprir as regras e permiten clasificalas. Trátase dunha axiomatización porque estas propiedades poden indicar diferentes nocións de xustiza, igualdade, equidade, imparcialidade e consistencia de forma matemática, pero como non existe unha maneira perfecta de traducir estes conceptos á formalización, débense crear estes axiomas (afirmacións que se dan por verdadeiras). Séguese principalmente a liña marcada polos traballos de Thomson en [42].

### 1.3.1. Dualidade e consistencia

Nesta sección introdúcense dúas propiedades centrais na teoría das regras de repartimento: a *dualidade*, que permite establecer simetrías entre problemas complementarios, e a *consistencia*, que garante coherencia entre decisións tomadas en diferentes subgrupos da poboación de demandantes.

#### Dualidade

A dualidade establece unha relación entre problemas que, mantendo as mesmas demandas, difiren nas dotacións dispoñibles de forma complementaria.

**Definición 1.4.** Dous problemas  $(c, E)$  e  $(c', E') \in C^N$  considéranse **duais** se teñen o mesmo vector de demandas, isto é,  $c = c'$ , e as dotacións cumpren  $E = \sum c_i - E'$ . Noutras palabras, o estado dun é exactamente o que lle falta ao outro para cubrir todas as demandas.

Pódese estender esta análise ás regras, de maneira que tamén nos atopamos coa existencia de **regras duais**.

**Definición 1.5.** Dúas regras  $S$  e  $S'$  son **duais** se, para cada problema  $(c, E) \in C^N$ , o repartimento que realiza unha coincide co que deixa de repartir a outra no problema dual. Formalmente:

$$S(c, E) = c - S'(c, \sum c_i - E).$$

Esta idea esténdese tamén a propiedades e operadores:

**Definición 1.6.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , dúas propiedades son **duais** se, sempre que unha regra satisfaga unha delas, a súa regra dual satisfai a outra.

**Definición 1.7.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , dous operadores considéranse **duais** se, cando se aplican a regras duais, producen tamén regras duais.

**Definición 1.8.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , un obxecto (xa sexa un problema, unha regra, unha propiedade ou un operador) dise **autodual** cando coincide coa súa dual.

Algunhas regras coñecidas presentan esta propiedade. Por exemplo, as regras proporcional, talmúdica (así como a regra de *concesión e división*) e a de chegada aleatoria son autoduais. En cambio, as regras de igualación restrinxida de ganancias e de perdas constitúen un par dual. Algunhas familias de regras, como as familias secuencial, paramétrica, ICI, CIC e TAL, son estruturalmente pechadas respecto da dualidade.

A dualidade tamén se aplica a teoremas e caracterizacións: a dual dun resultado obtense substituindo cada axioma pola súa versión dual e cada regra pola correspondente dual. En moitos casos, só se presenta un dos resultados e déixase ao lector a tarefa de obter a súa contraparte dual. Un exemplo característico disto é que toda caracterización da regra de igualación restrinxida de ganancias ten unha versión dual para a regra de igualación restrinxida de perdas.

### Consistencia

A consistencia asegura que o comportamento dunha regra sexa coherente ao considerar subgrupos de axentes. Intuitivamente, se certos axentes abandonan o problema levando as súas asignacións, a regra debe comportarse cos que permanecen como o faría se o problema fose só entre eles e co recurso restante.

Unha regra satisfai a **consistencia** se, para todo subconxunto de axentes que se manteñan no problema, a restrición da asignación global coincide coa asignación que obterían se resolvésemos o subproblema con eles e co estado que queda tras asignar os recursos aos que marchan.

**Definición 1.9.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , e  $N' \subset N$ , a regra  $S$  é consistente se se verifica que a restrición de  $S(c, E)$  a  $\mathbb{R}^{N'}$  coincide con:

$$S \left( c_{N'}, \sum_{i \in N'} S_i(c, E) \right),$$

onde  $\sum_{i \in N'} S_i(c, E)$  representa o recurso residual dispoñible para o subproblema.

### Variantes de consistencia:

- **Consistencia bilateral:** refírese ao caso particular no que só dous axentes permanecen no problema.

- **Consistencia con demandas nulas:** versión máis débil da consistencia, que se aplica unicamente cando os axentes que abandonan teñen demanda cero.
- **Consistencia inversa:** se un vector de asignacións coincide coa regra aplicada a cada par de axentes, axustando o estado en función das asignacións aos demais, entón ese vector debe ser o resultado da regra no problema completo.

De forma precisa, se  $x$  é unha asignación para  $(c, E)$  tal que, para todo  $N' \subset N$  con  $|N'| = 2$ , se verifica:

$$x_{N'} = S \left( c_{N'}, E - \sum_{i \in N \setminus N'} x_i \right),$$

entón necesariamente:

$$x = S(c, E).$$

Véxase un resultado importante que permite estender caracterizacións dende o caso binario ao caso xeral: o lema do ascensor:

**Lema 1.10** (Thomson, [40] e [41]). *Se unha regra  $S$  é bilateralmente consistente, e outra regra  $S'$  satisfai a consistencia inversa, e ambas coinciden no caso de dous demandantes, entón coinciden tamén en calquera problema con número arbitrario de axentes.*

### 1.3.2. Propiedades de preservación da orde

Nun contexto de repartimento equitativo de recursos escasos, un principio ético fundamental é o da *igualdade de trato*, que esixe que os axentes con situacións idénticas sexan tratados de igual forma. Concretamente, en calquera problema  $(c, E) \in C^N$ , se dous axentes teñen demandas iguais, deberían recibir a mesma asignación.

Porén, a realidade mostra que as demandas poden ser distintas, e é natural preguntarse se tamén nese caso se pode garantir algún tipo de trato equitativo. As propiedades que se presentan a continuación constitúen unha xeneralización dese principio básico, estendendo a noción de equidade á comparación entre axentes con diferentes demandas.

A primeira propiedade garante que quen demanda máis debe, como mínimo, recibir unha cantidade igual ou maior que quen demanda menos.

**Definición 1.11.** Unha regra satisfai a **preservación da orde nas asignacións** se, en todo problema  $(c, E) \in C^N$ , sempre que dous axentes  $i, j \in N$  cumpran  $c_i \geq c_j$ , tamén se verifica que  $S_i(c, E) \geq S_j(c, E)$ . É dicir, as asignacións deben respectar a orde das demandas.

Un enfoque complementario consiste en observar as *perdas* dos axentes, é dicir, a parte da súa demanda que non reciben. A seguinte propiedade garante que quen máis demanda non sexa quen perda proporcionalmente máis.

**Definición 1.12.** Unha regra satisfai a **preservación da orde nas perdas** se, para todo problema  $(c, E) \in C^N$ , a relación  $c_i - S_i(c, E) \leq c_j - S_j(c, E)$  se mantén sempre que  $c_i \geq c_j$ . É dicir, quen demanda máis non debe ter unha perda relativa maior.

Ambas visións (en termos de asignación ou de perda) son compatibles e complementarias, e a súa combinación leva á propiedade global que sintetiza este criterio de xustiza relativa:

**Definición 1.13.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , dicimos que unha regra satisfai a **preservación da orde** cando cumpre simultaneamente as dúas propiedades anteriores: a preservación da orde nas asignacións e nas perdas.

Estas condicións poden estenderse para capturar como debería comportarse unha regra cando se producen cambios no problema: ben sexa porque varía a dotación, as demandas ou mesmo o conxunto de axentes participantes. Vexamos agora diferentes formas dinámicas de preservar a orde.

### Preservación da orde baixo variación do estado

Dagan planteou con [9] que cando aumenta a dotación dispoñible, é razoable esperar que os incrementos nas asignacións tamén respecten a orde das demandas iniciais. Dada unha regra  $S$ , considéranse dous problemas sobre a mesma poboación  $N$  e co mesmo vector de demandas  $c$ , pero con dotacións distintas  $E < E'$ . Para todo par de axentes  $i, j \in N$  con  $c_i \geq c_j$ , debe cumprirse que o incremento na asignación de  $i$  é polo menos tan grande como o de  $j$ :

$$S_i(c, E') - S_i(c, E) \geq S_j(c, E') - S_j(c, E).$$

### Preservación da orde baixo variación das demandas

Thomson en [40] observa que se varía a demanda dun axente, é desexable que o impacto sobre os demais tamén respecte a orde inicial das súas demandas. Se se consideran dous problemas cos mesmos axentes  $N$ , o mesmo estado  $E$ , pero con vectores de demanda  $c$  e  $c'$  que só difiren en que a demanda dun axente  $k$  aumenta, entón, para  $i, j \in N$  con  $c_i \geq c_j$ , debe verificarse que o

cambio na asignación de  $i$  é polo menos tan grande como o de  $j$ :

$$S_i(c', E) - S_i(c, E) \geq S_j(c', E) - S_j(c, E).$$

### Preservación da orde baixo variación da poboación

Na liña do anterior, tamén Thomson en [40] plantea que se algúns axentes abandonan o problema, a regra debería garantir que o efecto nas asignacións dos restantes siga respectando a orde relativa das súas demandas. Se, partindo dun problema  $(c, E) \in C^N$ , algúns axentes abandonan a situación, consideramos o problema restrinxido aos axentes restantes  $N' \subset N$ . Para todo par  $i, j \in N'$  con  $c_i \geq c_j$ , debe cumprirse:

$$S_i(c_{N'}, E') - S_i(c, E) \geq S_j(c_{N'}, E') - S_j(c, E),$$

onde  $E'$  é a nova dotación e  $S(c_{N'}, E')$  é a nova asignación.

### Preservación da orde baixo operación de redución

Esta versión tamén tratada por Thomson en [40] considera que os axentes que abandonan levan as súas asignacións, e o problema se redefine sobre os restantes. Neste contexto tamén é razoable manter a orde de preferencias nas asignacións resultantes. Nun problema  $(c, E) \in C^N$ , supóñase que un subconxunto de axentes  $N \setminus N'$  abandona o problema levando as súas asignacións  $S(c, E)$ . O problema residual, definido en  $N'$ , ten dotación  $E' = E - \sum_{k \in N \setminus N'} S_k(c, E)$ . Entón, para  $i, j \in N'$  con  $c_i \geq c_j$ , debe cumprirse:

$$S_i(c_{N'}, E') - S_i(c, E) \geq S_j(c_{N'}, E') - S_j(c, E).$$

Estas condicións constitúen formas robustas de equidade relativa: garanten que quen se atopa en mellor posición no problema inicial non se vexa penalizado en comparación con quen está nunha posición máis débil, ao producirse variacións no contexto. O seu cumprimento ofrece unha forma intuitiva e aceptable de interpretar a xustiza distributiva, polo que moitas regras de asignación amplamente estudadas satisfán estas propiedades.

### 1.3.3. Cotas de asignacións

Un aspecto fundamental na análise dos problemas de bancarrota é garantir que as asignacións sexan razoables dende o punto de vista da equidade. Unha das ferramentas máis habituais para acadar este obxectivo é o uso de *cotas*, é dicir, límites inferiores ou superiores que marcan o que un axente debería recibir (ou perder) como mínimo ou como máximo, en función da súa situación no problema.

Estas cotas permiten introducir garantías normativas básicas, como evitar que un axente quede cunha cantidade insignificante a pesar de ter unha demanda elevada, ou que outro reciba unha asignación excesiva con respecto ao que lle correspondería razoablemente. Neste sentido, o marco dos problemas de bancarrota admite a formulación de múltiples tipos de cotas, especialmente as inferiores, que revisamos a continuación.

### Definición de cotas inferiores e algunhas propiedades

En primeiro lugar, presentamos varias definicións de cotas inferiores que tratan de asegurar que cada demandante reciba unha asignación mínima razoable.

A máis básica delas é o chamado *dereito mínimo*, que garante ao demandante a parte do recurso que lle quedaría se os demais recibisen a totalidade das súas reclamacións, sempre que iso sexa posible.

**Definición 1.14.** O **dereito mínimo** do demandante  $i$  en  $(c, E) \in C^N$  é:

$$\text{máx} \left\{ E - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} c_j, 0 \right\}.$$

Representa o que queda despois de compensar completamente os demais axentes, ou 0 se iso non é posible.

Deste xeito, definimos unha propiedade que recolle esta idea como un criterio que debería cumprir calquera regra considerada xusta.

**Definición 1.15.** Unha regra satisfai a **cota de dereitos mínimos** se, en todo problema  $(c, E) \in C^N$ , asigna a cada demandante polo menos o seu dereito mínimo.

Outras cotas basean o límite inferior en principios de igualdade condicionada. A seguinte definición asume que, como mínimo, debería asegurarse a cada axente unha proporción equitativa da súa propia demanda, ou do recurso total dispoñible.

**Definición 1.16.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a **cota inferior de demandas truncadas a  $\frac{1}{|N|}$**  para o demandante  $i$  é:

$$\frac{1}{|N|} \text{mín}\{c_i, E\}.$$

**Definición 1.17.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a **cota inferior de división igual condicional** é:

$$\text{mín} \left\{ c_i, \frac{E}{|N|} \right\}.$$

Estas cotas aseguran que ningún axente quede por baixo do mínimo que lle correspondería se se repartira o recurso igualmente, tendo en conta os seus límites individuais.

Cómpre sinalar que non todas as regras satisfán estas condicións. A regra proporcional ou a de perdas iguais restrinxidas, por exemplo, poden violar estas cotas en determinadas situacións.

Outras formulacións están baseadas na idea de repartir as perdas proporcionalmente, o que dá lugar a límites máis sofisticados como os seguintes:

**Definición 1.18.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , unha regra de repartimento satisfai a propiedade de **cota inferior de demanda baixa** se define para cada demandante  $i \in N$  unha cota inferior tal que:

$$x_i \geq \max\{0, c_i - (T - E)\},$$

onde  $T = \sum_{j \in N} c_j$  é o total das demandas. É dicir, ningún demandante recibe menos do que lle correspondería se as perdas se repartisen proporcionalmente aos excesos das súas demandas sobre a dotación dispoñible.

A seguinte propiedade considera que se a demanda dun axente é moi elevada (incluso maior que o recurso dispoñible), debe recibir polo menos unha parte proporcional do total, garantindo así un mínimo de equidade mesmo para casos extremos.

**Definición 1.19.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a **cota inferior de demanda alta** di que, se  $c_i \geq E$ , entón debe recibir polo menos unha fracción  $\frac{1}{|N|}$  do recurso:

$$S_i(c, E) \geq \frac{E}{|N|}.$$

A teoría tamén contempla formulacións duais baseadas en perdas. É dicir, en lugar de fixarse en canto se asigna a cada axente, analízase canto perde respecto da súa demanda.

**Definición 1.20.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a **cota inferior de perdas de mínimo entre demanda e déficit** para o axente  $i$  é:

$$\frac{1}{|N|} \min \left\{ c_i, \sum_{j \in N} c_j - E \right\}.$$

Finalmente, existen propiedades máis cualitativas que avalían o comportamento da regra en función de certos escenarios posibles. A seguinte, por exemplo, establece que se as demandas dos demais axentes son tales que permiten compensar plenamente a un axente concreto, entón ese axente debería recibir a súa demanda completa.

**Definición 1.21.** Unha regra satisfai **compensación plena condicional** se, para cada problema  $(c, E) \in C^N$ , se substituíndo  $c_i$  polas demandas dos demais axentes con demanda maior se pode compensar a todos, entón o axente  $i$  debe recibir  $c_i$ .

De xeito dual, a seguinte propiedade indica que, se a demanda dun axente é moi pequena en relación coa dotación total, pode chegar a xustificarse que reciba asignación nula.

**Definición 1.22.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a propiedade dual, chamada **compensación nula condicional**, afirma que se a demanda  $c_i$  é suficientemente pequena en relación co estado  $E$ , o axente  $i$  pode recibir asignación nula.

Versións parametrizadas destas propiedades foron propostas por van den Brink en [43]. No caso particular de dous axentes ( $|N| = 2$ ), existe un par dual de propiedades máis forte compatible coa preservación da orde baixo variación do recurso. Neste contexto, só unha regra satisfai todas as condicións formuladas: a chamada **regra de concesión e división inversa**.

### Aplicacións recursivas das cotas inferiores

Se as cotas inferiores se interpretan como cantidades garantidas, pódense aplicar recursivamente: asígnanse inicialmente, redúcense as demandas e o estado, e calcúlanse novas cotas sobre o problema actualizado. Isto repítese ata que:

- As cotas pasan a ser todas nulas nun paso (como ocorre co dereito mínimo).
- O estado se esgota nalgún paso ou no límite, definíndose así unha regra.

Este último caso ocorre, por exemplo, coa cota truncada a  $\frac{1}{|N|}$ , como estudan Domínguez e Thomson na **regra recursiva** en [10].

**Teorema 1.23** (Domínguez, 2013). *Sexa  $(c, E) \in C^N$ , considérese unha función de cota inferior continua que, para cada vector de demandas non nulo e dotación positiva, especifique unha cota positiva para polo menos un demandante. A súa aplicación recursiva esgota o recurso total no límite, definindo unha regra.*

Hougaard et al. xeneralizan en [16] este concepto coa **función de referencia** (*baseline function*), que asocia a cada problema un vector interpretado como cota inferior (se a suma é menor ca  $E$ ) ou superior (se é maior). Se esta función é continua e ten polo menos unha coordenada positiva e outra inferior á correspondente demanda, a súa aplicación recursiva tamén define unha regra.

### Derivación de cotas inferiores mediante un conxunto de regras

Un enfoque alternativo consiste en considerar un conxunto de regras  $F$ , sen elixir unha concreta. Para cada problema, defínese a cota inferior dun demandante como a mínima cantidade

que recibe segundo algunha regra de  $F$ . Esta cantidade asígnase, redúcense as demandas e o estado, e repítase o proceso.

Se a sucesión de problemas residuais converge (o estado restante tende a cero), a regra queda definida no límite.

Este método foi introducido por Giménez-Gómez e Marco en e denomínase **proceso GGM**. Para describir os seus resultados, introdúcense dúas propiedades adicionais das regras:

- **Monotonicidade do estado:** se o estado aumenta, cada demandante debe recibir polo menos o mesmo.
- **Propiedade do punto medio:** se  $E = \frac{1}{2} \sum_i c_i$ , cada axente debe recibir a metade da súa demanda.

**Teorema 1.24** (Giménez-Gómez e Marco, [14]). *Dado un conxunto  $F$  de regras:*

- (a) *Se todas satisfán só a preservación da orde, o estado residual tende a cero e a regra límite é a das perdas iguais restrinxidas.*
- (b) *Se  $|N| = 2$  e as regras cumpren tamén monotonicidade e punto medio, a regra límite é a dual da igualitaria restrinxida.*
- (c) *Para  $|N| > 2$ , o proceso tamén define unha regra, aínda que non necesariamente satisfai a monotonicidade.*

Un estudo posterior aplica cotas inferiores e superiores para acoutar os vectores de asignación en cada paso.

Finalmente, Luttens en [22] e [23] propón axiomas que relacionan directamente as asignacións coas cotas e a súa evolución ante variacións do estado, permitindo deducir a regra das **asignacións iguais restrinxidas**.

### 1.3.4. Propiedades de monotonicidade

Un requisito central en diversas literaturas é que, a medida que aumenta o recurso dispoñible, cada axente debería quedar polo menos tan ben como estaba inicialmente. Obtense así a **monotonicidade do estado**, que xa se tratou na anterior subsección.

**Definición 1.25** (Thomson, [39]). Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a **monotonicidade respecto das demandas** establece que, se a demanda dun axente aumenta, a súa asignación non debe diminuír.

Pódese dicir máis sobre o que debería acontecer cando a demanda dun axente  $i$  aumenta. En primeiro lugar, pódese considerar o impacto dese aumento sobre os demais:

**Definición 1.26** (Thomson, [39]). Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a **monotonicidade respecto das demandas orientada aos demais** é o requisito segundo o cal as asignacións dos demais demandantes non deberían aumentar.

Tamén se pode impoñer unha cota superior ao incremento na asignación do demandante  $i$ . A máis natural é a cantidade en que aumenta a súa demanda (denotada por  $\delta$ ). Un límite razoable sobre a posible diminución nas asignacións dos demais demandantes tamén é  $\delta$ .

Por último, pódense formular versións destas propiedades que se refiran a aumentos simultáneos nas demandas de varios axentes.

Kasajima e Thomson en [21] propoñen estas e outras propiedades deste tipo. Identifican as súas propiedades duais (as hipóteses destas propiedades duais adoitan implicar cambios simultáneos pero relacionados en varias compoñentes do problema). Estudan tamén se estas propiedades se preservan mediante operadores, e se se conservan mediante consistencia.

### 1.3.5. Propiedades de invariancia

As propiedades de invariancia permiten identificar regras de asignación que se comportan de maneira coherente ante cambios estruturais nos problemas de bancarrota. Estas propiedades son especialmente relevantes porque garanten que a regra escollida non reaccione de forma arbitraria ante transformacións lexítimas do problema, e aparecen frecuentemente como criterios desexables na literatura especializada.

A primeira delas aborda a cuestión de que as demandas non deberían superar nunca o recurso dispoñible. Neste sentido, é razoable asumir que truncar as demandas a ese límite non debería alterar o resultado do repartimento:

**Definición 1.27** (Dagan e Volij, [8]). Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a **invarianza respecto da truncación das demandas** establece que truncar as demandas no recurso non debería afectar ó vector de asignacións que a regra elixe.

Esta propiedade pode reinterpretarse desde unha perspectiva dual. En vez de truncar as demandas directamente, pode pensarse que cada axente ten un *dereito mínimo* que se lle pode asignar antes de reconsiderar o problema restante:

**Definición 1.28** (Curiel, [7]). Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a propiedade dual, chamada **mínimos dereitos primeiro**, di que debería poder calcular o vector de asignacións dunha regra dun dos dous xeitos seguintes:

- (i) Directamente.
- (ii) Asignando primeiro os dereitos mínimos a cada axente e, nun segundo paso, despois de revisar as demandas reducindoas nesas cantidades, aplicando a regra ao problema residual para repartir o recurso restante.

Este tipo de propiedades aseguran que diferentes formas razoables de interpretar ou descompoñer o problema non alteren o resultado final. Este mesmo principio pode aplicarse tamén a cambios no estado do problema, isto é, no recurso dispoñible.

Cando a dotación total do recurso se reduce, por exemplo, poderíamos calcular as novas asignacións directamente ou reconsiderar as asignacións previas como novas demandas. A seguinte propiedade garante a coherencia entre ambas opcións:

**Definición 1.29.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , Moulin coa **composición descendente** de [27] establece que, se o estado diminúe, deberíase poder calcular o vector de asignacións que escolle a regra para o recurso menor dun dos dous xeitos seguintes:

- (i) Directamente, ignorando o vector de asignacións que a regra escolle para o recurso inicial.
- (ii) Considerando ese vector de asignacións como novo vector de demandas.

De maneira análoga, a seguinte propiedade trata da situación contraria: cando a dotación aumenta, tamén hai dúas formas lexítimas de calcular as novas asignacións, e a regra debería ser consistente entre elas:

**Definición 1.30.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , a dual de composición descendente, chamada **composición ascendente** por Young en [45], refírese a aumentos no recurso. Di que deberíase poder calcular o vector de asignacións para o estado maior dun dos dous xeitos seguintes:

- (i) Directamente.
- (ii) En dúas etapas: asignando primeiro as cantidades resultantes de aplicar a regra ao recurso inicial e, posteriormente, aplicando de novo a regra para repartir o incremento da dotación.

Outra propiedade importante é a homoxeneidade. Esta establece que a regra debería comportarse de forma consistente fronte a cambios de escala no problema: se se multiplican proporcionalmente todas as demandas e o recurso, as asignacións tamén deberían escalarse na mesma proporción.

**Definición 1.31.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , unha regra é **homoxénea** se, ao multiplicar as demandas e o recurso por un escalar  $\lambda > 0$ , resulta nun novo problema no que o vector de asignacións obtense multiplicando por  $\lambda$  o vector de asignacións do problema inicial.

Así, un problema con pequena escala económica debería percibirse como esencialmente equivalente a outro de gran magnitude. Esta propiedade foi mal interpretada en ocasións como unha cuestión de unidades de medida (dólares fronte a euros), cando en realidade é unha condición substantiva sobre a proporcionalidade estrutural da regra. Esta falacia foi discutida criticamente por Thomson en [40].

Finalmente, a teoría tamén se enriquece coa análise do comportamento inverso das regras. Isto é, estudando para que vectores de demandas un determinado vector de asignacións é o resultado da regra. Este enfoque, que ten vínculos coa teoría da negociación, dá lugar ao concepto de *conxunto inverso*:

**Definición 1.32.** Sexa  $(c, E) \in C^N$ , dado un punto  $x \in \mathbb{R}_+^N$ , tamén se poden formular axiomas sobre a forma do conxunto de vectores de demandas  $c \in \mathbb{R}^N$  para os que se cumpre  $x = S(c, \sum x_i)$ : o **conxunto inverso** de  $S$  para  $x$ . Este concepto resultou útil na teoría da negociación, onde se propuxeron diversas formulacións deste tipo.

Existen distintas propiedades que se poden esixir a estes conxuntos inversos, como as que se mencionan a continuación. Que sexan *convexos*: se dous vectores de demandas conducen ao mesmo vector de asignacións, tamén debería facelo calquera combinación convexa deles. Que teñan forma de *estrela* con centro en  $x$ . Que sexan *conos* con vértice en  $x$ . Que teñan estrutura de *vasoira* respecto de  $x$ : isto é, se un punto  $c$  pertence ao conxunto, entón tamén pertence calquera outro punto  $c'$  tal que  $c$  é unha combinación convexa de  $x$  e  $c'$ .

Estas propiedades permiten caracterizar regras desde un punto de vista xeométrico, proporcionando novas formas de interpretar a coherencia, estabilidade e xustiza das asignacións resultantes.

## Capítulo 2

# Xogos de Bancarrota

As regras e axiomas presentados anteriormente teñen un gran potencial de uso nos diferentes contextos debido á súa capacidade para formalizar nocións abstractas, porén, teñen unha importante debilidade: non teñen en conta as interaccións entre os axentes que participan no repartimento. Para resolver isto, un dos enfoques desenvolvidos por O'Neill en [33] consiste en aplicar ao noso problema de repartimento o seguinte proceso:

- Convertelo nun xogo (coa formulación de teoría de xogos), ben sexa un xogo cooperativo ou un xogo estratéxico.
- Resolvelo aplicando algunha solución definida na clase correspondente de xogos.
- Escoller o vector de pagos resultante como o vector de asignacións do problema.

Preséntanse nas seccións deste capítulo as formalizacións de cada un dos xogos cos que podemos abordar os problemas de bancarrota, tratando as principais definicións e resultados, e indicando en cada sección como adaptar o noso problema a cada un dos modelos.

Así, na sección 2.1 trátanse os xogos estratéxicos (os axentes deciden individualmente o que reclamar), na 2.2 os xogos cooperativos de negociación (acordan un repartimento segundo solucións negociadas) e na 2.3 os xogos cooperativos tipo TU (os axentes forman coalicións que reciben valores garantidos e analízanse solucións como o nucléolo).

### 2.1. Xogos estratéxicos

Os xogos estratéxicos (ou xogos en forma normal) constitúen un modelo fundamental na teoría de xogos. Representan situacións nas que varios axentes toman decisións simultaneamente, e o

resultado depende das eleccións de todos. A literatura destes xogos é inmensa, polo que aquí preséntase un resumo do mínimo suficiente para poder comprender a adaptación dos xogos de bancarrota a este formato, presentando só algúns conceptos básicos que nos permiten comprender o concepto fundamental destes xogos: **o equilibrio de Nash**.

**Definición 2.1** (Xogo estratéxico). Un **xogo estratéxico** (ou en forma normal) defínese como un triplete  $(N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ , onde:

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$  é o conxunto finito de xogadores;
- Para cada xogador  $i \in N$ ,  $A_i$  é o conxunto de estratexias dispoñibles para el;
- Para cada xogador  $i \in N$ ,  $u_i : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow \mathbb{R}$  é a función de utilidade ou función de pago do xogador  $i$ .

Cada xogador escolle unha estratexia  $a_i \in A_i$ , e o perfil de estratexias  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  determina o pagamento  $u_i(\mathbf{a})$  para cada xogador. Cabe preguntarse, entón, que tipo de estratexias tenden a tomar os xogadores. Asímeso, naturalmente, a premisa de que os xogadores buscan o máximo beneficio persoal, e isto lévanos ao seguinte concepto:

**Definición 2.2.** Unha estratexia  $a_i \in A_i$  é **estratexia estritamente dominante** se, independentemente do que fagan os demais xogadores, sempre proporciona a mellor utilidade a  $i$ .

Para analizar como os xogadores cambian de estratexia para obter a mellor é importante comprender a **mellora unilateral**:

**Definición 2.3** (Mellora unilateral). Proceso polo cal un xogador cambia a súa estratexia para aumentar o seu pago, asumindo que os demais xogadores manteñen as súas eleccións fixas.

De maneira non formal (pois non empregárase nas posteriores definicións pero é útil para comprender estes problemas): unha **estratexia mixta** dáse cando un xogador pode empregar unha distribución de probabilidade sobre as súas estratexias puras. Un equilibrio de Nash pode existir en estratexias mixtas incluso cando non existe en estratexias puras.

O concepto central na análise de xogos estratéxicos é o equilibrio de Nash, presentado por este autor en [30], que representa unha situación estable onde ningún xogador ten incentivos para cambiar unilateralmente a súa estratexia.

**Definición 2.4** (Equilibrio de Nash, [30] e [31]). Un perfil de estratexias  $\mathbf{a}^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$  é un **equilibrio de Nash** se para todo xogador  $i \in N$  e toda estratexia alternativa  $a_i \in A_i$ , se cumpre:

$$u_i(a_i^*, \mathbf{a}_{-i}^*) \geq u_i(a_i, \mathbf{a}_{-i}^*),$$

onde  $\mathbf{a}_{-i}^*$  representa as estratexias dos xogadores distintos de  $i$ .

**Proposición 2.5** (Existencia de equilibrio de Nash). *Todo xogo estratéxico finito (é dicir, con conxuntos de estratexias  $A_i$  finitos para todos os xogadores  $i$ ) admite polo menos un equilibrio de Nash en estratexias mixtas (incluíndo dentro destas ás estratexias puras).*

### 2.1.1. Xogo estratéxico de bancarrota

Modelar as situacións de bancarrota como xogos non cooperativos, nos que os axentes elixen estratexias co obxectivo de maximizar o seu beneficio, proporciona unha perspectiva alternativa, máis próxima ao comportamento individual en contextos reais.

No modelo de O'Neill de [33] considérase un problema de bancarrota no que o recurso  $E$  está formado por **unidades fisicamente distinguibles**. Cada axente  $i$  reclama  $d_i$ , e escolle un subconxunto de unidades de  $E$  de tamaño  $d_i$ ; esta escolla define a súa estratexia. Cada unidade repártese proporcionalmente entre todos os reclamantes que a escollen. O pagamento final de  $i$  é a suma das fraccións obtidas (onde  $n_e$  é o número de axentes que escollen a unidade  $e$ ):

$$x_i = \sum_{e \in E} \frac{1}{n_e} \cdot 1_{\{i \text{ escolle } e\}},$$

Se temos **demandas non acoutadas**, é dicir, se se permite  $d_i > |E|$ , cada axente pode reclamar varias veces a mesma unidade. Neste caso, a repartición require regras adicionais, como a división proporcional (tratada por Atlamaz en [2]) ou outras variantes propostas por Peters en [34]. O comportamento asintótico cando  $n \rightarrow \infty$  tamén foi analizado. Giménez-Gómez e Marco en [14] caracterizan os equilibrios de Nash asociados a este xogo.

Dado un vector de asignacións  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , preguntámonos se existe un xogo estratéxico tal que  $x$  sexa **equilibrio único**. García-Jurado et al. en [13] e Chang e Hu en [5] estudan esta cuestión en xogos en forma normal e extensa, respectivamente. As súas respostas son afirmativas baixo hipóteses amplas.

A propiedade de **resistencia á fusión** (merging-proofness) garante que ningún subconxunto de axentes se beneficie por agrupar as súas demandas e actuar como un único axente. A versión máis xeral, denominada *resistencia á fusión multilateral*, abrangue situacións nas que un conxunto de axentes reorganiza internamente as súas demandas entre membros doutro grupo antes de abandonar o proceso. A condición esixida é que o grupo receptor non mellore o seu resultado total. Cando esta propiedade se combina coa *consistencia*, obtense a *resistencia á división (splitting-proofness)*, que impide que un axente obteña vantaxe ao fraccionar a súa demanda en múltiples identidades, como mostran Moreno-Tertero e Ju en [18]. Importa sinalar que merging-proofness e consistencia, consideradas por separado, non implican splitting-proofness: por exemplo, a regra de asignación igualitaria restrinxida satisfai as dúas primeiras, pero non a última.

Un caso particular é a **resistencia á fusión multilateral con uniformidade**, na que os axentes implicados teñen demandas iguais antes e despois da fusión. Neste contexto, unha regra paramétrica cualifícase como **progresiva** se cumpre simultaneamente a propiedade de merging-proofness e mantén a uniformidade das demandas tras a fusión. Este enfoque permite caracterizar normas de repartición que son robustas fronte a manipulacións colectivas mantendo a equidade entre axentes inicialmente equivalentes.

## 2.2. Xogos de negociación

Estúdase un modelo cooperativo para analizar problemas de **negociación simple**, onde un grupo de xogadores procura repartir os beneficios da cooperación de forma que se require o acordo unánime para adoptar calquera repartimento. Tamén verase na seguinte sección a teoría sobre xogos nos que non é necesaria a unanimidade. Estas análises encádranse dentro da **teoría de xogos cooperativa**, diferenciándose do enfoque da teoría non cooperativa.

**Definición 2.6.** Un *xogo de negociación* con un conxunto finito de xogadores  $N$  defínese como o par  $(S, d)$  onde:

- $S \subseteq \mathbb{R}^N$  é non baleiro, pechado, convexo e comprensivo.
- $d \in S$  e existe  $x \in S$  tal que  $x > d$ .
- $S_d = \{x \in S : x \geq d\}$  é un conxunto compacto.

Aquí, o conxunto  $S$  representa o conxunto factible de utilidades dos xogadores asociadas a posibles acordos, e  $d$  é o punto de desacordo que reflicte as utilidades se non se alcanza acordo.

As propiedades de  $S$  e  $d$  aseguran a adecuación matemática e naturalidade do modelo, como a convexidade (relacionada coas funcións de utilidade de von Neumann-Morgenstern e a posibilidade de elección de loterías), e a comprensividade, que permite aos xogadores aceptar utilidades inferiores voluntariamente.

### 2.2.1. A Solución de Nash

A solución de Nash procura unha aplicación  $f$  que asigne a cada xogo de negociación  $(S, d)$  un vector  $f(S, d) \in S_d$  que represente un repartimento aceptable para todos.

**Proposición 2.7.** *Sexa  $(S, d) \in \mathcal{B}^N$ . Entón existe un único  $z \in S$  que maximiza a función*

$$g(x) = \prod_{i \in N} (x_i - d_i) \quad \text{sobre o conxunto } S_d.$$

*Demostración.* Como  $g$  é continua e  $S_d$  é compacto,  $g$  acada un máximo en  $S_d$ .

Supoñamos que existen  $z, z' \in S_d$ , con  $z \neq z'$ , tales que

$$\max_{x \in S_d} g(x) = g(z) = g(z').$$

Claramente,  $z > d$  e  $z' > d$ . Como  $S_d$  é convexo, entón  $\bar{z} = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z' \in S_d$ .

Probaremos que  $g(\bar{z}) > g(z)$ , o que leva a unha contradicción. Nótese que:

$$\ln(g(\bar{z})) = \sum_{i \in N} \ln(\bar{z}_i - d_i) = \sum_{i \in N} \ln\left(\frac{1}{2}(z_i - d_i) + \frac{1}{2}(z'_i - d_i)\right).$$

Como a función logaritmo é estritamente cóncava, témolo que:

$$\ln(g(\bar{z})) > \sum_{i \in N} \left[ \frac{1}{2} \ln(z_i - d_i) + \frac{1}{2} \ln(z'_i - d_i) \right] = \ln(g(z)).$$

En consecuencia,  $g(\bar{z}) > g(z)$ , contradicindo a maximalidade de  $z$ .  $\square$

**Definición 2.8.** A *solución de Nash* é a aplicación que asigna a cada  $(S, d) \in \mathcal{B}^N$  o único punto  $\text{NA}(S, d) \in S_d$  que maximiza

$$g(x) = \prod_{i \in N} (x_i - d_i) \quad \text{sobre } S_d.$$

Esta solución asigna a cada xogo de negociación o punto do conxunto factible que maximiza o produto das diferenzas entre o acadado por cada xogador e a súa utilidade no punto de desacordo. Xeometricamente, corresponde á intersección de  $S_d$  coa única hipérbola da familia  $\{\prod_{i \in N} (x_i - d_i) = c : c \in \mathbb{R}\}$  que é tanxente a  $S_d$ .

### 2.2.2. A Solución de Kalai-Smorodinsky

A solución de Nash pode desconsiderar as máximas aspiracións dos xogadores, polo que buscando unha solución que teña en conta este factor, Kalai e Smorodinsky propoñen esta solución alternativa. Para elo teñen moita importancia os seguintes conceptos:

**Definición 2.9.** Defínese o *punto de utopía* dun xogo de negociación  $(S, d)$  como

$$u(S, d) = (u_i(S, d))_{i \in N}, \quad u_i(S, d) = \max\{a \in \mathbb{R} : \exists x \in S_d, x_i = a\}.$$

**Definición 2.10** (Fronteira de Pareto). Sexa  $T \subset \mathbb{R}^N$ . A *fronteira de Pareto* de  $T$  defínese como:

$$P(T) = \{x \in T : \nexists y \in T \text{ tal que } y \geq x \text{ e } y \neq x\}.$$

Xeometricamente, esta solución é o punto de intersección entre a fronteira de Pareto do conxunto factible e a recta que une o punto de desacordo co punto de utopía, reflectindo mellor as aspiracións máximas dos xogadores:

**Definición 2.11.** A solución de Kalai-Smorodinsky asigna o punto

$$KS(S, d) = d + t_0(u(S, d) - d),$$

onde

$$t_0 = \max\{t \in \mathbb{R} : d + t(u(S, d) - d) \in S_d\}.$$

### 2.2.3. Xogo de negociación de bancarrota

Esta perspectiva, ademais de proporcionar unha nova vía conceptual, permite aplicar ferramentas da teoría dos xogos cooperativos e non cooperativos para derivar solucións consistentes coas propostas clásicas de xustiza e equidade.

**Reformulación como xogo de negociación.** Considérese un problema de bancarrota definido por un par  $(E, \mathbf{c})$ , onde  $E > 0$  é o recurso (a cantidade total dispoñible para repartir) e  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$  é o vector de demandas, coas condicións estándar:  $c_i \geq 0$  para todo  $i$ , e  $\sum_i c_i > E$ . O obxectivo é determinar unha regra de repartimento que asigne a cada axente unha cantidade  $x_i$  tal que  $0 \leq x_i \leq c_i$  e  $\sum_i x_i = E$ .

Este problema pódese reinterpretar como un xogo de negociación da seguinte maneira:

- O conxunto de acordos posibles  $\mathcal{S}$  identifícase coa envolvente convexa dos vectores de asignación viables, é dicir:

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq c_i, \sum_{i=1}^n x_i \leq E \right\}.$$

- O punto de desacordo  $d$  é tomado como a orixe, isto é,  $d = \mathbf{0}$ , o que representa a situación na que non se acada acordo e ninguén recibe nada.

Esta formulación permite aplicar solucións coñecidas da teoría da negociación, como a solución de Nash e a de Kalai-Smorodinsky, para obter regras de repartimento que satisfagan propiedades desexables.

**Aplicación da solución de Nash.** Recordando que a solución de negociación de Nash busca maximizar o produto dos incrementos de utilidade respecto ao punto de desacordo, no noso caso consiste en resolver:

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^n (x_i - 0) = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \prod_{i=1}^n x_i.$$

A solución óptima a este problema proporciona unha regra de repartimento que distribúe o recurso  $E$  de forma que o produto das asignacións sexa máximo, baixo as restricións impostas polas demandas individuais. Esta solución é particularmente atractiva porque satisfai axiomas como simetría, eficiencia e independencia de transformacións lineais positivas da utilidade.

**Aplicación da solución de Kalai-Smorodinsky.** Alternativamente, podemos empregar a solución de Kalai-Smorodinsky, que preserva as proporcións máximas alcanzables por cada axente desde o punto de desacordo ata o seu punto de utopía. Neste contexto, o punto de utopía para o axente  $i$  é  $u_i = \min\{c_i, E\}$ , é dicir, o máximo que podería recibir en ausencia dos demais.

A solución de Kalai-Smorodinsky é o único punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  que satisfai:

$$\frac{x_i}{u_i} = \frac{x_j}{u_j}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

e que ademais pertence á fronteira de Pareto de  $\mathcal{S}$ . Esta solución adoita interpretarse como máis equitativa en contextos nos que os axentes teñen dereitos similares ou cando se desexa preservar proporcionalidade nas capacidades máximas de cada parte.

**Resultados adicionais e implicacións.** Dagan e Volij en [8] demostraron que calquera problema de bancarrota pode ser representado como un xogo de negociación de Nash, o que permite derivar regras de repartimento mediante solucións de negociación ben establecidas. Ademais, a modelización como xogo de negociación abre a posibilidade de estudar os efectos de cambios nos parámetros do problema (como aumentos no recurso ou modificacións nas demandas) sobre a asignación final, utilizando propiedades como continuidade, monotonicidade ou consistencia. Tamén permite analizar posibles incentivos estratéxicos (como se ve na seguinte subsección), e explorar implementacións en xogos non cooperativos nos que o equilibrio de Nash reproduce a solución desexada.

### 2.2.4. Xogos de negociación como estratéxicos

Un enfoque central na teoría dos xogos é a implementación de solucións cooperativas mediante xogos non cooperativos. A idea é construír un xogo no cal os equilibrios de Nash coincidan cos resultados propostos por unha determinada solución cooperativa. Polo tanto, os problemas de demandas poden verse como xogos de negociación simple como se explicou anteriormente, e posteriormente transformarse en xogos estratéxicos, como se presenta a continuación.

**Implementación da solución de Nash** Considérese un xogo de negociación bipersonal  $(S, d)$ . Defínese o seguinte xogo de demandas non cooperativo:

- Cada xogador  $i \in \{1, 2\}$  escolle unha demanda  $x_i \in [d_i, \infty)$ , simultánea e independentemente.
- Se  $x = (x_1, x_2) \in S$ , os xogadores reciben as súas demandas. En caso contrario, reciben o desacordo  $d = (d_1, d_2)$ .

O xogo en forma estratéxica defínese como:

$$G^{NA} = ([d_1, \infty), [d_2, \infty), H_1, H_2),$$

coas funcións de pago dadas por:

$$H_i(x) = \begin{cases} x_i & \text{se } x \in S, \\ d_i & \text{se } x \notin S. \end{cases}$$

A continuación preséntase un importante resultado que nos indica a forma do conxunto de equilibrios de Nash, séguese de [4]:

**Proposición 2.12** (Casas et al., [4]). *Os vectores de pago nos equilibrios de Nash de  $G^{NA}$  coinciden co conxunto  $P(S_d) \cup \{d\}$ , onde  $P(S_d)$  representa a fronteira de Pareto do conxunto  $S_d$ .*

*Demostración.* Se  $x > u(S, d)$ , entón  $x \notin S$  e o equilibrio corresponde ao punto de desacordo  $d$ . Se  $x \in P(S_d)$ , entón  $x$  é un equilibrio con  $H(x) = x$ . Se  $x \in S \setminus P(S_d)$ , existe outra estratexia mellor, polo que non é equilibrio.  $\square$

A solución de Nash pode obterse como un refinamento dos equilibrios de Nash deste xogo.

## Implementación da solución de Kalai-Smorodinsky

Dado un xogo de negociación  $(S, d)$ , asociamos o xogo de demandas non cooperativo  $G^{KS}$ :

- Cada xogador  $i$  escolle  $x_i \in [d_i, u_i(S, d)]$ .
- As funcións de pago  $H(x)$  están definidas como:

$$H(x) = \begin{cases} (x_1, f_2(x_1)) & \text{se } \frac{x_1 - d_1}{u_1 - d_1} < \frac{x_2 - d_2}{u_2 - d_2}, \\ (f_1(x_2), x_2) & \text{se } \frac{x_1 - d_1}{u_1 - d_1} > \frac{x_2 - d_2}{u_2 - d_2}, \\ \frac{1}{2}(x_1, f_2(x_1)) + \frac{1}{2}(f_1(x_2), x_2) & \text{se } \frac{x_1 - d_1}{u_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2 - d_2}, \end{cases}$$

onde  $f_i(x_j) = \text{máx}\{x_i \in [d_i, u_i] : (x_1, x_2) \in S\}$ , con  $i \neq j$ .

**Proposición 2.13** ([4] e [20]). *O xogo  $G^{KS}$  posúe un único equilibrio de Nash, e o seu resultado é precisamente a solución de Kalai-Smorodinsky,  $KS(S, d)$ .*

*Demostración.* Denotemos  $u = u(S, d)$ ,  $k = KS(S, d)$ . Se  $x$  é un equilibrio de Nash, entón para todo  $i \in \{1, 2\}$  e  $j \neq i$ , o mellor que pode obter o xogador  $i$  fronte a  $x_j$  é:

$$a_i = \frac{x_j - d_j}{u_j - d_j}(u_i - d_i) + d_i.$$

Se  $x_i \neq f_i(x_j)$ , entón existe un incentivo para que algún xogador cambie a súa estratexia, violando a condición de equilibrio. Polo tanto, ten que cumprirse:

$$\frac{x_1 - d_1}{u_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2 - d_2}, \quad x_1 = f_1(x_2), \quad x_2 = f_2(x_1),$$

o que implica  $x = k$  e  $H(x) = k$ , concluindo a demostración.  $\square$

**Limitacións:** A pesar do resultado anterior, a implementación vía  $G^{KS}$  require coñecer o punto de utopía, o cal pode non estar dispoñible para o implementador. Unha crítica semellante se aplica a  $G^{NA}$ , que depende do punto de desacordo  $d$ .

## 2.3. Xogos con utilidade transferible (TU)

Problemas nos que os xogadores deciden como aliarse, formando coalicións. Supoñemos que os acordos son vinculantes e que os beneficios poden ser libremente distribuídos entre os membros dunha coalición. Este tipo de situacións represéntanse mediante os chamados xogos cooperativos con utilidade transferible (abreviadamente, xogos TU).

**Definición 2.14.** Un **xogo TU** é un par  $(N, v)$  onde  $N$  é un conxunto finito de xogadores e  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función característica tal que  $v(\emptyset) = 0$ . Para cada coalición  $S \subset N$ ,  $v(S)$  representa o beneficio asegurado polos xogadores de  $S$ , independentemente do comportamento dos demais. Denotamos por  $G(N)$  o conxunto de todos os xogos TU con conxunto de xogadores  $N$ .

A teoría dos xogos TU céntrase na proposta de asignacións que sexan aceptables polos xogadores. Existen dous enfoques principais, que están baseados na **estabilidade** (buscar un conxunto de asignacións estables como o núcleo ou os conxuntos estables) e na **equidade** (propoñer unha única asignación considerada equitativa, como no caso do valor de Shapley).

A continuación, descríbense algúns dos conceptos e solucións máis importantes, como o **núcleo**, o **nucleolus** e o **valor de Shapley**.

### 2.3.1. Núcleo

O núcleo é un subconxunto das imputacións dun xogo, entendidas como repartimentos posibles dos beneficios totais que respectan a racionalidade individual.

**Definición 2.15.** Dada  $v \in G(N)$ , unha **imputación** é un vector  $x \in \mathbb{R}^N$  tal que:

- $x_i \geq v(\{i\})$  para todo  $i \in N$ ,
- $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ .

O conxunto de imputacións de  $v$  denótase por  $I(v)$ .

**Definición 2.16.** O **núcleo** dun xogo  $v \in G(N)$ , denotado por  $C(v)$ , é o subconxunto de  $I(v)$  dado por:

$$C(v) = \left\{ x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subseteq N \right\}.$$

Os elementos do núcleo non deixan marxe para que ningunha coalición teña incentivos para apartarse do acordo, polo que son considerados acordos estables. Existen situacións de negociación entre coalicións que poden ser altamente inestables, resultando nun núcleo baleiro. A continuación, preséntase unha condición necesaria e suficiente para que o núcleo dun xogo sexa non baleiro. Este resultado foi demostrado de maneira independente por Bondareva e Shapley, e coñécese como o **Teorema de Bondareva–Shapley**. Para poder comprender este resultado cómpre introducir dúas definicións relacionadas co **equilibrio**:

**Definición 2.17.** Unha familia de coalicións  $\mathcal{F} \subseteq 2^N \setminus \{\emptyset\}$  chámase **equilibrada** se existe unha familia de números reais positivos (denominados *coeficientes de equilibrio*)  $\{y_S : S \in \mathcal{F}\}$  tal que, para todo  $i \in N$ , se cumpre:

$$\sum_{\substack{S \in \mathcal{F} \\ i \in S}} y_S = 1.$$

**Definición 2.18.** Un xogo  $v \in G(N)$  chámase **equilibrado** se, para toda familia equilibrada de coalicións  $\mathcal{F}$  con coeficientes de equilibrio  $\{y_S : S \in \mathcal{F}\}$ , se verifica:

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} y_S v(S) \leq v(N).$$

Esta condición expresa que as coalicións parciais non acumulan suficiente poder como para superar o valor da gran coalición, o que suxire certa estabilidade na estrutura de cooperación.

**Teorema 2.19** (Bondareva–Shapley, [35]). *Sexa  $v \in G(N)$  un xogo con utilidade transferible (TU). Entón, o núcleo  $C(v)$  é non baleiro se e só se o xogo  $v$  é equilibrado.*

Outro valor moi importante, xa mencionado anteriormente, é o **nucleolus**, vexamos de que se trata exactamente. O exceso mide o grao de insatisfacción da coalición  $S$  coa repartición  $x$  e é un concepto esencial para formalizar o **nucleolus**:

**Definición 2.20.** Para calquera coalición  $S \subseteq N$ , definimos o **exceso** de  $S$  respecto a unha imputación  $x$  como:

$$e(S, x) = v(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

**Definición 2.21.** O **nucleolus** é o conxunto das imputacións  $x$  que **lexicograficamente minimizan** o vector de excesos ordenado de forma decrecente:

$$E(x) = \text{ordenación decrecente do conxunto } \{e(S, x) \mid S \subset N, S \neq \emptyset\}$$

Formalmente, o nucléolo é a imputación  $x^*$  tal que:

$$E(x^*) \leq_{\text{lex}} E(x), \quad \text{para toda imputación } x. \quad (2.1)$$

Isto significa que o nucleolus minimiza a peor queixa das coalicións, despois a segunda peor, e así sucesivamente.

### 2.3.2. O valor de Shapley

Un dos conceptos centrais en xogos cooperativos con utilidade transferible é o **valor de Shapley**, introducido por Shapley en [35]. A súa aproximación é de natureza *axiomática*, e busca atopar unha asignación que resulte xusta e aceptable para todos os xogadores.

**Definición 2.22.** Dado un xogo  $v \in G(N)$ :

- Un xogador  $i \in N$  é **nulo** se, para todo  $S \subset N$ , se cumpre que  $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ .
- Dous xogadores  $i, j \in N$  son **simétricos** se, para todo  $S \subset N \setminus \{i, j\}$ , temos que  $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ .

Chamamos *valor* a calquera aplicación  $f : G(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ . A continuación, enumeramos as propiedades que caracterizan o valor de Shapley:

- **Eficiencia:**  $\sum_{i \in N} f_i(v) = v(N)$ .
- **Xogador nulo:** Se  $i$  é nulo en  $v$ , entón  $f_i(v) = 0$ .
- **Simetría:** Se  $i$  e  $j$  son simétricos en  $v$ , entón  $f_i(v) = f_j(v)$ .
- **Aditividade:** Para  $v, w \in G(N)$ , temos  $f(v + w) = f(v) + f(w)$ .

Estas propiedades aseguran que o valor asignado reflicte equidade, neutralidade técnica e consistencia.

**Teorema 2.23** (Shapley, [35]). *Existe un único valor  $F : G(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$  que satisfai eficiencia, xogador nulo, simetría e aditividade. Este valor, chamado **valor de Shapley**, está dado por:*

$$F_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)], \quad \text{para todo } i \in N. \quad (2.2)$$

*Observación 2.24.* O valor de Shapley admite unha formulación alternativa con interpretación heurística: supoñamos que os xogadores chegan nunha orde aleatoria; cada xogador recibe a súa contribución marxinal ao valor da coalición formada polos que chegaron antes. Formalmente, onde  $B_\pi(i) = \{j \in N : \pi(j) < \pi(i)\}$  e  $\mathcal{P}(N)$  é o conxunto de permutacións de  $N$ :

$$F_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(N)} [v(B_\pi(i) \cup \{i\}) - v(B_\pi(i))],$$

### 2.3.3. Xogo TU de bancarrota

Os problemas de bancarrota poden representarse de forma natural como xogos cooperativos con utilidade transferible (xogos TU), nos que un conxunto de axentes ou xogadores forman coalicións co obxectivo de maximizar o repartimento dun recurso escaso. Este cambio de perspectiva permite aplicar solucións ben establecidas da teoría dos xogos cooperativos, como o valor

de Shapley ou o núcleo, para obter regras de asignación que cumpran propiedades normativas desexables.

Dado un problema de bancarrota definido polo par  $(c, E)$ , onde  $E > 0$  representa o recurso dispoñible e  $c = (c_1, \dots, c_n)$  é o vector de demandas dos  $n$  axentes, constrúese un xogo TU  $(N, v)$ , sobre o conxunto de xogadores  $N = \{1, \dots, n\}$  a partir da creación dunha función característica que dependa dos datos do problema. Unha forma común na literatura de definir a **función característica**  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  é:

$$v(S) = \begin{cases} \text{máx} \left\{ 0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right\} & \text{se } \sum_{i \in N \setminus S} c_i \leq E, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad \text{para todo } S \subseteq N. \quad (2.3)$$

Esta función captura a cantidade que pode ser distribuída entre os membros da coalición  $S$ , tras satisfacer completamente as demandas do seu complementario  $N \setminus S$ , sempre que isto sexa posible. A interpretación é que  $S$  actúa como residual: recibe o que sobra tras atender as demandas externas. É dicir, o xogo describe a capacidade dunha coalición  $S \subseteq N$  de garantirse unha parte do recurso  $E$  fronte ás reclamacións dos axentes fóra da coalición. Empregarase nalgúns dos resultados máis importantes, pero existen outras funcións características que permiten relacionar os xogos de bancarrota cos xogos TU.

O núcleo do xogo  $(N, v)$  está formado polos vectores de pagos  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  que son eficientes e coalicionalmente racionais, é dicir:

$$\begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = v(N) = E, \\ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \quad \forall S \subseteq N. \end{cases}$$

Cando o núcleo non está baleiro, representa o conxunto de repartimentos nos que ningunha coalición ten incentivos a separarse e reclamar máis do que recibe. No caso do xogo de bancarrota coa función 2.3, Aumann demostrou en [3] un resultado importante:

**Teorema 2.25** (Aumann e Maschler,[3]). *Dado un problema de bancarrota definido polo par  $(c, E)$ , onde  $E > 0$  representa o recurso dispoñible e  $c = (c_1, \dots, c_n)$  é o vector de demandas dos  $n$  axentes, constrúese un xogo cooperativo con utilidade transferible  $(N, v)$  sobre o conxunto de xogadores  $N = \{1, \dots, n\}$ , no que se define a función característica  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  como en 2.3. Entón, o nucleolus do xogo  $v$ , definido en 2.1, coincide coa **regra Talmúdica** (definida en 1.7). Ademais, o nucleolus é único e pertence ao núcleo do xogo cando este non é baleiro.*

Esta coincidencia permite unha interpretación cooperativa da regra do Talmud como a solución que minimiza, de maneira lexicográfica, as esixencias insatisfeitas das coalicións, garantindo

así estabilidade e equidade. Outro resultado de [3] moi importante e fundamental na teoría de xogos e nos problemas de bancarrota relaciona a regra das chegadas aleatorias co valor de Shapley:

**Teorema 2.26** (Aumann e Maschler, [3]). *Dado un problema de bancarrota definido polo par  $(c, E)$ , onde  $E > 0$  representa o recurso dispoñible e  $c = (c_1, \dots, c_n)$  é o vector de demandas dos  $n$  axentes, constrúese un xogo cooperativo con utilidade transferible  $(N, v)$  sobre o conxunto de xogadores  $N = \{1, \dots, n\}$ , no que se define a función característica  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  como en 2.3. Entón, o valor de Shapley (definido en 2.2) do xogo  $(N, v)$  coincide coa regra de chegadas aleatorias que formalizamos en 1.11 aplicada ao problema de bancarrota  $(c, E)$ .*

Tamén se pode establecer unha conexión deste valor cooperativo con outras regras fundamentais no contexto dos problemas de bancarrota, como son as regras proporcional, de premios iguais e de perdas iguais. Vexamos primeiro a regra proporcional, que segue facendo uso da función característica de 2.3:

**Proposición 2.27** (Moulin, [29]). *Considérese un problema de bancarrota  $(c, E) \in C^N$ , con vector de demandas  $c = (c_1, \dots, c_n)$  e recurso dispoñible  $E > 0$ , e sexa  $(N, v)$  o xogo cooperativo con utilidade transferible asociado mediante a función característica definida en 2.3. Entón, o **valor de Shapley** do xogo  $(N, v)$ , definido en 2.2, coincide coa asignación obtida mediante unha **regra proporcional ponderada**, na que a contribución marxeal de cada axente á escaseza de cada coalición se ten en conta ao longo de todas as posibles ordes de entrada. Máis precisamente, para cada permutación  $\pi$  dos xogadores en  $N$ , definimos a contribución marxeal do xogador  $i$  como:*

$$\Delta_i^\pi = v(S_i^\pi \cup \{i\}) - v(S_i^\pi),$$

onde  $S_i^\pi = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$  é o conxunto de xogadores que preceden a  $i$  en  $\pi$ . A asignación final de cada xogador é:

$$x_i = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \Delta_i^\pi = \varphi_i(v).$$

*Este valor representa a media ponderada das marxes de contribución á escaseza ao longo de todas as posibles ordes de entrada, e proporciona unha interpretación cooperativa da regra proporcional dende o punto de vista do valor de Shapley.*

Nestes dous seguintes casos, non se fai uso da función característica definida en 2.3, xa que os resultados indican a propia existencia dunha nova función característica que relaciona o **xogo asociado** e o seu valor de Shapley coas regras mencionadas. Vexamos como podemos formalizalo:

**Proposición 2.28** (Dagan e Volij, [8]). *Dado un problema de bancarrota  $(c, E)$ , onde  $E > 0$  e  $c = (c_1, \dots, c_n)$ . Entón existe unha función característica  $\varphi : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  tal que o valor de Shapley*

---

do xogo cooperativo asociado,  $(N, \varphi)$ , coincide coa **regra de premios iguais** (CEA) para o xogo de bancarrota (definida en 1.3).

**Proposición 2.29** (Dagan e Volij, [8]). *Para o mesmo problema de bancarrota  $(c, E)$  e o xogo cooperativo  $(N, \varphi)$  asociado mediante o anterior resultado, a **regra de perdas iguais** (CEL), definida en 1.4, pode obterse como o valor de Shapley dun xogo TU dual, no que a función característica considera os dereitos residuais logo de restar esixencias mínimas a todos os xogadores. Así, o valor de Shapley de devandito xogo proporciona unha interpretación cooperativa das regras CEL como repartimento equitativo das perdas, limitado polas demandas de cada axente.*

En definitiva, a formalización dos problemas de bancarrota como xogos cooperativos con utilidade transferible permite aplicar metodoloxías sofisticadas e criterios ben xustificados de xustiza e estabilidade. Solucións como o valor de Shapley ou o nucleolus ofrecen ferramentas robustas para o deseño e a análise de regras de repartimento, reforzando a conexión entre a teoría de xogos e os principios normativos de equidade en situacións de escaseza.



## Capítulo 3

# Aplicación: escaseza de máscaras na pandemia

Neste último capítulo, aplícanse as regras e conclusións extraídas ao longo do traballo ao estudo dun caso práctico real: a escaseza de máscaras durante as dúas primeiras semanas do inicio da pandemia da COVID-19 en España. Este período caracterizouse por unha demanda moi elevada e un abastecemento insuficiente, o que xerou unha situación crítica en todo o territorio nacional. Isto ocorreu porque o inicio da pandemia atopou a todo o mundo pouco preparado, polo que non estaban os modelos de produción adaptados á demanda. Trátase entón dun problema de bancarrota, xa que durante as dúas primeiras semanas distribuíronse as máscaras das que se dispoñía, sen poder aínda obter máis.

A aplicación de regras de bancarrota en contextos de escaseza de recursos sanitarios xa foi considerada en traballos anteriores. Por exemplo, Moulin en [27] discute a utilización destas regras en contextos éticos de repartición limitada, mentres que Thomson en [39] analiza situacións similares en contornos de saúde pública. Durante a pandemia da COVID-19, varios estudos adoptaron enfoques de teoría de xogos ou regras de asignación para analizar a distribución de recursos escasos como ventiladores, vacinas ou test diagnósticos (Su en [38] e Kadane en [19]). Estes traballos serven como motivación e xustificación adicional para aplicar modelos de bancarrota á distribución de máscaras.

Para analizar este fenómeno, considérase a poboación de cada comunidade autónoma como un dos principais factores que determinan a demanda de máscaras, pero sen esquecerse doutros datos que tamén se tiveron en conta, como o nivel do sistema sanitario de cada territorio. Ademais, estudaremos a distribución oficial realizada polo Goberno central, tal e como figura nos datos oficiais publicados polo Ministerio de Sanidade e a Presidencia do Goberno en [15].

A combinación destes factores permite avaliar a eficacia das medidas adoptadas e identificar posibles melloras na xestión do material sanitario en situacións de crise.

### Poboación por comunidades autónomas (2020)

A continuación preséntase unha táboa coa poboación estimada en cada comunidade autónoma en 2020, que utilizarase para estimar a demanda relativa de máscaras:

Cadro 3.1: Poboación por comunidade autónoma, [17]

Comunidade Autónoma	Poboación
Andalucía	8.464.411
Aragón	1.329.391
Asturias	1.018.784
Illes Balears	1.171.543
Canarias	2.175.952
Cantabria	582.905
Castela e León	2.394.918
Castela-A Mancha	2.045.221
Cataluña	7.780.479
Comunitat Valenciana	5.057.353
Estremadura	1.063.987
Galicia	2.701.819
Madrid	6.779.888
Murcia	1.511.251
Navarra	661.197
País Vasco	2.220.504
A Rioxa	319.914
Ceuta	84.202
Melilla	87.076
<b>Total</b>	<b>47.450.795</b>

### Distribución oficial de mascarillas

O día 26 de marzo de 2020, o Goberno de España fixo público o primeiro repartimento oficial de máscaras entre as comunidades autónomas, correspondente ás entregas realizadas entre os días 10 e 26 de marzo. Trátase dun repartimento especialmente relevante, pois tivo lugar no período de maior escaseza de material de protección e resultou fundamental na loita inicial contra a expansión do virus.

Posteriormente realizáronse outros pedidos e distribucións de material, pero este traballo refírese aos recursos deste primeiro repartimento por ser o máis significativo no contexto do inicio da pandemia. Cada repartimento posterior pode afrontarse de maneira análoga ou de forma máis complexa engadindo factores producidos polo avance do virus ou a distribución de material médico anterior.

Cadro 3.2: Repartimento de máscaras por comunidade autónoma, [15]

Comunidade Autónoma	Máscaras repartidas
Andalucía	846.474
Aragón	163.174
Asturias	115.773
Baleares	113.496
Canarias	208.629
Cantabria	55.367
Castela-A Mancha	416.598
Castela e León	589.573
Cataluña	957.633
Estremadura	129.953
Galicia	243.973
A Rioxa	118.602
Madrid	2.207.468
Murcia	143.232
Navarra	169.208
País Vasco	406.155
Comunidade Valenciana	517.753
Ceuta	39.198
Melilla	31.448
<b>Total</b>	<b>7.473.708</b>

Aplicaranse distintas regras de repartimento ao caso mencionado: o primeiro repartimento oficial de máscaras feito polo Goberno de España ata o 26 de marzo de 2020. Para iso, tómasse como dotación total  $E = 7473708$  máscaras, e como vector de demandas a poboación de cada comunidade autónoma segundo os datos do ano 2020. Así, entendemos que cada comunidade reclama unha parte proporcional á súa poboación, xa que o número de habitantes representa razoablemente a súa necesidade deste recurso escaso. Emprégase R para levar a teoría explicada anteriormente á práctica, e cada un dos programas empregados móstrase no Anexo A. Os

resultados obtidos achéganse no cadro 3.3.

### 3.1. Familia básica

Esta familia ten un importante potencial práctico porque son inmediatas á hora de calculalas e intuitivas á hora de extraer as súas propiedades. A súa sinxeleza permite que sexan programables ou incluso calculadas a man nalgúns casos. Porén, a complexidade do noso caso de estudio e a influencia de factores externos fan que probablemente se queden cortas á hora de obter os mellores resultados. Para confirmar isto, empregáronse a proporcional e a CEA como exemplificación destas regras, e comparáronse co repartimento real realizado polo Goberno de España.

#### 3.1.1. CEA

A regra de premios iguais restrinxidos, **CEA**, descrita en 1.3, asigna a cada demandante  $i$  unha cantidade  $x_i = \min\{c_i, \lambda\}$ , onde  $\lambda$  é o maior valor común que se pode repartir sen superar o total  $E$  e sen exceder ningunha demanda. O procedemento consiste en distribuír o recurso dispoñible equitativamente entre os axentes, excluindo sucesivamente os que acadan a súa demanda, ata esgotar  $E$ .

Obsérvase que empregando esta regra obteñen un maior beneficio as comunidades con pouca poboación (Ceuta, Melilla e A Rioxa), pois enchen a súa demanda. como o resto das comunidades reciben o restante a partes iguais, presentan un gran déficit con respecto ao repartimento real as comunidades con moita poboación (Madrid, Cataluña e Andalucía) e unha pequena variación Castela e León e Valencia. O resto saen beneficiadas con esta regra con respecto ao repartimento real. Parece que esta non é unha regra que responda ás necesidades sanitarias marcadas polo virus, pois centrarse nas comunidades pequenas pode facer que as grandes sufran unha expansión moi rápida.

#### 3.1.2. Proporcional

Xa que a anterior regra parece non aproximarse aos criterios empregados polo Goberno central, estudemos outra posibilidade que non castiga aos grandes núcleos de poboación. A regra proporcional reparte o estado total  $E$  en proporción ás demandas de cada axente (formalizado en 1.1), que neste caso son as poboacións autonómicas.

Obsérvase que Madrid é claramente a máis favorecida polo repartimento realizado polo Goberno se tomamos como base a proporcionalidade, recibindo o dobre do que lle correspondería. Isto débese probablemente a que é o territorio con maior concentración de poboación, polo que,

---

ademais da poboación de cada territorio, é importante ter en conta factores que inflúen na facilidade do contaxio do virus. Porén, outra comunidade con alta densidade en grandes cidades como o é Cataluña recibiu moito menos do proporcional, polo que tampouco é este un criterio definitivo. Ademais, Castela e León, con pouca densidade pero bastante poboación, ten moitos beneficios no repartimento real. Así, para favorecer a estas comunidades, reduciuse no repartimento con respecto ao proporcional a da maioría das comunidades con menos poboación.

## 3.2. Familia do Talmud

Esta é unha das familias máis clásicas con importantes aplicacións ao longo da historia, especialmente a particular máis importante: a propia regra do Talmud, definida en 1.7. A demanda nesta situación é moito maior que o dobre do estado, polo que empregárase CEA. Cabe destacar que aplícase unha CEA considerando o vector demandas a metade da poboación.

Obsérvese que, como é común nesta regra, os máis beneficiados son os territorios con menor poboación, pois enchen a metade da súa demanda. Intuitivamente esta regra parece pouco axeitada para o caso, pois os núcleos urbanos con maior concentración de poboación deberían ter prioridade, e non as comunidades con menor poboación que están, a priori, máis a salvo da pandemia. Vese que, comparando co caso real, esta regra está moi distante da decisión do Goberno. Isto débese a que, neste caso, non é unha prioridade favorecer ás demandas pequenas. Destácase que as análises da regra do Talmud e da CEA son análogos, pois a natureza do reparto é a mesma nos dous casos (a regra CEA). Só cambia que, no caso do Talmud, aplícase esta regra á metade das demandas, producindo que non beneficie tanto aos territorios pequenos, pero non é unha diferenza significativa se falamos en termos absolutos (si en relativos para Ceuta, Melilla...)

## 3.3. Familia de prioridade

As regras de orde ou prioridade son aquelas que teñen unha base estocástica para asignar o recurso, considerando que os reclamantes van chegando un a un e recibindo certa cantidade do estado. As máis características son a regra de chegadas aleatorias e a regra de prioridade secuencial.

### 3.3.1. Chegadas aleatorias ou valor de Shapley

O carácter estocástico desta regra non limitada pola elección dunha orde determinada dálle moito potencial, pero o seu cálculo na práctica é moi complexo, pois no caso de problemas con

moitos reclamantes, o número de permutacións crece exponencialmente, como pode observarse en 1.11. No noso caso temos  $19!$  permutacións, o que é intratable á hora de facer cálculos. Un resultado moi importante na práctica da teoría de xogos e nos problemas de bancarrota é o mencionado na sección 2.3, que nos permite calcular a regra das chegadas aleatorias como o valor de Shapley, xa que coinciden. Aínda que o número de coalicións (subconxuntos posibles de  $E$ ) segue sendo elevado ( $2^{19}$ ), é tratable con R.

Recordemos que o valor de Shapley cumpre as importantes propiedades de xogador nulo, aditividade, simetría e eficiencia, e que a regra de chegadas aleatorias cumpre monotonía, eficiencia e simetría. Estas propiedades transmítennos nocións de xustiza e equidade, polo que parece unha regra bastante acertada para o caso. Porén, Madrid segue tendo diferenzas significativas en canto á cantidade absoluta, así como Galicia, Valencia e Andalucía, pero estas tres últimas saen prexudicadas no repartimento real respecto a Shapley.

### 3.3.2. Prioridade secuencial

Moitas regras de prioridade caracterízanse por necesitar establecer unha orde dos demandantes para realizar o repartimento, como móstrase en 1.10. Por ende, con esta regra pódense engadir factores externos ademais do vector de demandas que neste caso depende unicamente da poboación. Un factor importante é a calidade dos sistemas sanitarios no momento do comezo da pandemia, pois para evitar a proliferación do virus nas zonas con sistemas máis débiles, cabe darlles maior importancia. Emprégase o informe da Federación de Asociacións para a Defensa da Sanidade Pública (FADSP, [12]), no que se inclúe un ranking baseado en diversos parámetros que poden consultarse. Esta clasificación non inclúe a Ceuta e Melilla, pero situaranse ao final (non importa a orde para a aplicación da regra) debido a súa escasa poboación e probabilidade de ser núcleo do virus.

Desta maneira échese a demanda da Comunidade Valenciana e parte de Andalucía, que son, a priori, as que máis probabilidades teñen de ser un foco da infección polo seu sistema sanitario. Como Valencia e Andalucía teñen moita poboación e moita demanda, déixase en 0 a cantidade de máscaras que reciben o resto das comunidades, polo que parece que esta regra tampouco está facendo un repartimento xusto, aínda que incorpore datos importantes que outras non teñen en conta. Apréciase claramente que isto non foi un factor significativo á hora de tomar a decisión, xa que as diferenzas co repartimento real son extremadamente altas.

### 3.4. Familia paramétrica

Emprégase o conxunto de regras paramétricas por excelencia, que defínese en 1.13. O valor de  $\lambda$  que resolve a ecuación  $\sum_{i=1}^n \max\{c_i - \lambda, 0\} = E$  determina a asignación final segundo a CEL. Esta formulación permite implementar a regra CEL como un caso particular dunha regra paramétrica, usando técnicas numéricas para atopar o valor axeitado de  $\lambda$ .

Entendendo perdas como a diferenza entre o solicitado e o recibido, a maioría das comunidades reciben 0 máscaras, pois non ten suficiente poboación como para poder acumular as perdas que se esixen aos que si reciben estado (5183690), que son as tres comunidades con maior solicitude, tendo as mesmas perdas. Andalucía e Valencia reciben con esta regra moito máis do que o Goberno asignoulles, pois priorízase ás comunidades con moita poboación. Así, Madrid recibe con esta regra menos das que recibiu na realidade, polo que é un novo argumento a favor de que a repartición real foi extremadamente asimétrica a favor de Madrid.

### 3.5. Familia xeométrica

Nesta sección débese simplificar o problema para poder abordalo desde un punto de vista gráfico. Para iso, teranse en conta que o núcleo de máxima difusión da enfermidade é Madrid, por ser a que maior densidade de poboación ten. Así, estúdase a **regra de punto medio**, vista en 1.20, aplicada a dous axentes (Madrid e o resto de CCAA). como obsérvase na figura, o repartimento despois da normalización do punto medio é o vector

$$x = (1.067.862, \quad 6.405.846)$$

$$x_1 + x_2 = 1.067.862 + 6.405.846 = 7.473.708$$

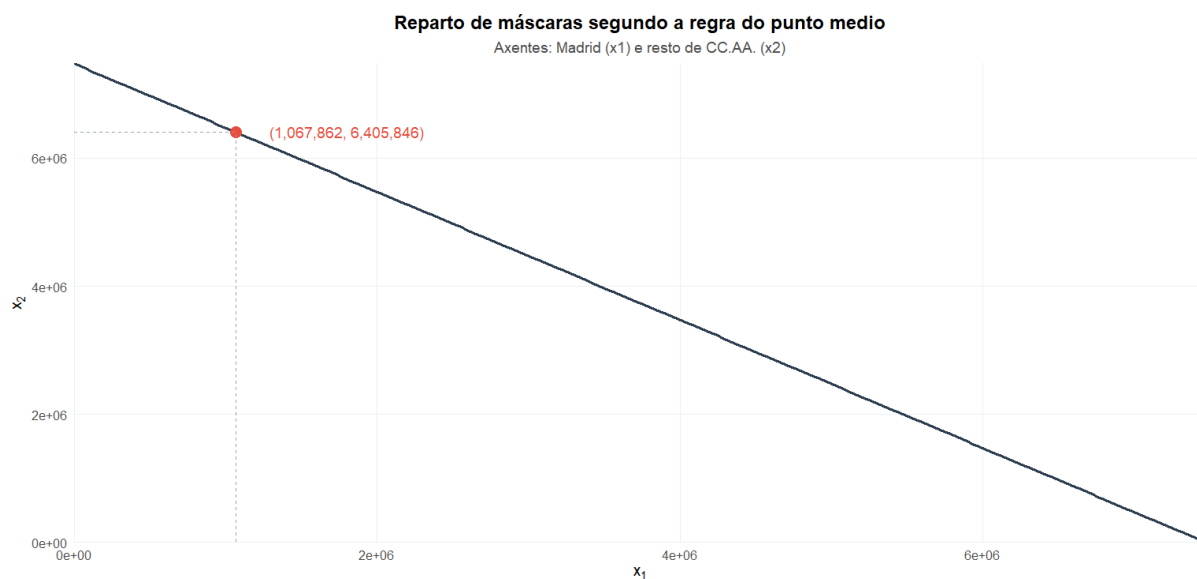


Figura 3.1: Regra do punto medio

Desta forma, Madrid recibiu de novo na realidade máis do que lle corresponde por esta regra, incluso considerándoo como un axente único e o resto de comunidades como unha coalición que posteriormente terán que repartir as súas perdas (ou ganancias) empregando algunha regra ou un criterio arbitrario.

### 3.6. Comparativa e análise

Nesta sección analízase comparativamente o comportamento das distintas regras de repartimento aplicadas ao noso contexto. A análise estrutúrase arredor de dous eixos principais: por unha banda, a comparación cuantitativa dos resultados obtidos por cada regra; por outra, a análise estatística das relacións entre elas e co repartimento real feito polo Goberno.

Comunidade	Poboación	Real	CEA	Proporcional	Talmud	Shapley	Prioridade	CEL
Andalucía	8.464.411	846.474	436.407	1.333.182	471.862	1.053.712	2.416.355	3.280.721
Aragón	1.329.391	163.174	436.407	209.385	471.862	243.558	0	0
Asturias	1.018.784	115.773	436.407	160.463	471.862	188.083	0	0
Baleares	1.171.543	113.496	436.407	184.523	471.862	215.377	0	0
Canarias	2.175.952	208.629	436.407	342.722	471.862	391.670	0	0
Cantabria	582.905	55.367	436.407	91.810	291.452	109.034	0	0
Castela-A Mancha	2.045.221	416.598	436.407	322.131	471.862	369.041	0	0
Castela e León	2.394.918	589.573	436.407	377.210	471.862	429.322	0	0
Cataluña	7.780.479	957.633	436.407	1.225.460	471.862	1.053.712	0	2.596.789
Estremadura	1.063.987	129.953	436.407	167.583	471.862	196.180	0	0
Galicia	2.701.819	243.973	436.407	425.548	471.862	480.770	0	0
A Rioxa	319.914	118.602	319.914	50.388	159.957	60.129	0	0
Madrid	6.779.888	2.207.468	436.407	1.067.862	471.862	1.009.014	0	1.596.198
Murcia	1.511.251	143.232	436.407	238.029	471.862	275.766	0	0
Navarra	661.197	169.208	436.407	104.141	330.598	123.491	0	0
País Vasco	2.220.504	406.155	436.407	349.739	471.862	399.359	0	0
C. Valenciana	5.057.353	517.753	436.407	796.555	471.862	843.110	5.057.353	0
Ceuta	84.202	39.198	84.202	13.262	42.101	15.918	0	0
Melilla	87.076	31.448	87.076	13.715	43.538	16.460	0	0

Cadro 3.3: Comparativa dos distintos métodos de repartimento de máscaras e o repartimento real do goberno

A táboa 3.3 mostra as asignacións resultantes de aplicar cada regra á situación concreta. Obsérvase como algunhas comunidades reciben cantidades moi diferentes segundo o criterio escollido, o que pon de manifesto o impacto que implica a elección dunha regra de repartimento. A diferenza entre métodos a nivel absoluto é especialmente evidente en casos extremos como Cataluña, Madrid ou Andalucía, en contraste con rexións máis pequenas como A Rioxa ou Ceuta, que sofren diferenzas absolutas pequenas, aínda que non o son tanto se falamos de termos relativos. É salientable como o repartimento real do Goberno se sitúa intermedio entre certas regras teóricas, sen coincidir completamente con ningunha. Isto apunta á posibilidade de que se tiveran en conta criterios múltiples ou incluso decisións políticas puntuais non explicitadas. Regras como a de prioridades ou CEL xeran distribucións altamente concentradas, mentres que CEA reparte unha mesma cantidade a case todas as comunidades, polo que o resto mantense en puntos intermedios.

A análise estatística preséntase na táboa 3.4, que recolle a matriz de correlación entre as distintas regras e variables. Esta ferramenta permite identificar similitudes estruturais entre os métodos, máis aló da simple observación directa dos valores.

Cadro 3.4: Matriz de correlación entre variables de repartimento

	Poboación	Real	CEA	Proporcional	Talmud	Shapley	Prioridade	CEL
Poboación	1.000	0.786	0.374	1.000	0.482	0.987	0.467	0.883
Real	0.786	1.000	0.274	0.786	0.351	0.804	0.148	0.648
CEA	0.374	0.274	1.000	0.374	0.911	0.436	0.127	0.164
Proporcional	1.000	0.786	0.374	1.000	0.482	0.987	0.467	0.883
Talmud	0.482	0.351	0.911	0.482	1.000	0.555	0.174	0.224
Shapley	0.987	0.804	0.436	0.987	0.555	1.000	0.493	0.800
Prioridade	0.467	0.148	0.127	0.467	0.174	0.493	1.000	0.189
CEL	0.883	0.648	0.164	0.883	0.224	0.800	0.189	1.000

A partir da análise da correlación pódense extraer varias conclusións:

- O método proporcional, pola súa propia definición, ten unha correlación de 1 coa demanda. O método de Shapley presenta unha correlación case perfecta coa poboación ( $r = 0,987$ ). Isto indica que ambos premian claramente o tamaño proporcional da comunidade. Ademais, o valor de Shapley ten unha moi boa correlación co repartimento real ( $r = 0,804$ ), incluso mellor que o proporcional.
- O repartimento real do Goberno presenta tamén unha alta correlación coa poboación ( $r = 0,786$ ), o que suxire que se tivo en conta este criterio, aínda que non foi determinante.
- A regra CEA, malia ser equitativa, mostra unha correlación baixa coa poboación e co repartimento real, indicando unha distribución máis homoxénea e menos influenciada polo tamaño. Como era de esperar pola definición da regra do Talmud, estas dúas teñen boa correlación.
- O método CEL tamén está fortemente correlacionado coa poboación ( $r = 0,883$ ), aínda que menos que o proporcional. Isto pode parecer sorprendente pois asigna 0 á maioría das comunidades, pero a relación coa proporcionalidade aparece porque canto maior poboación ten unha comunidade, máis lle corresponde por esta regra.
- O modelo de prioridade e o CEA son os máis desaxustados co repartimento real, evidenciando que foron modelos moito máis teóricos ou extremos. Ademais, a regra de prioridade ten moi mala correlación con todas as regras.

A gráfica de barras axuda a visualizar mellor as diferenzas e semellanzas entre os métodos, especialmente entre os máis correlacionados coa poboación (como Proporcional e Shapley) e os máis afastados (como CEA ou Prioridade).

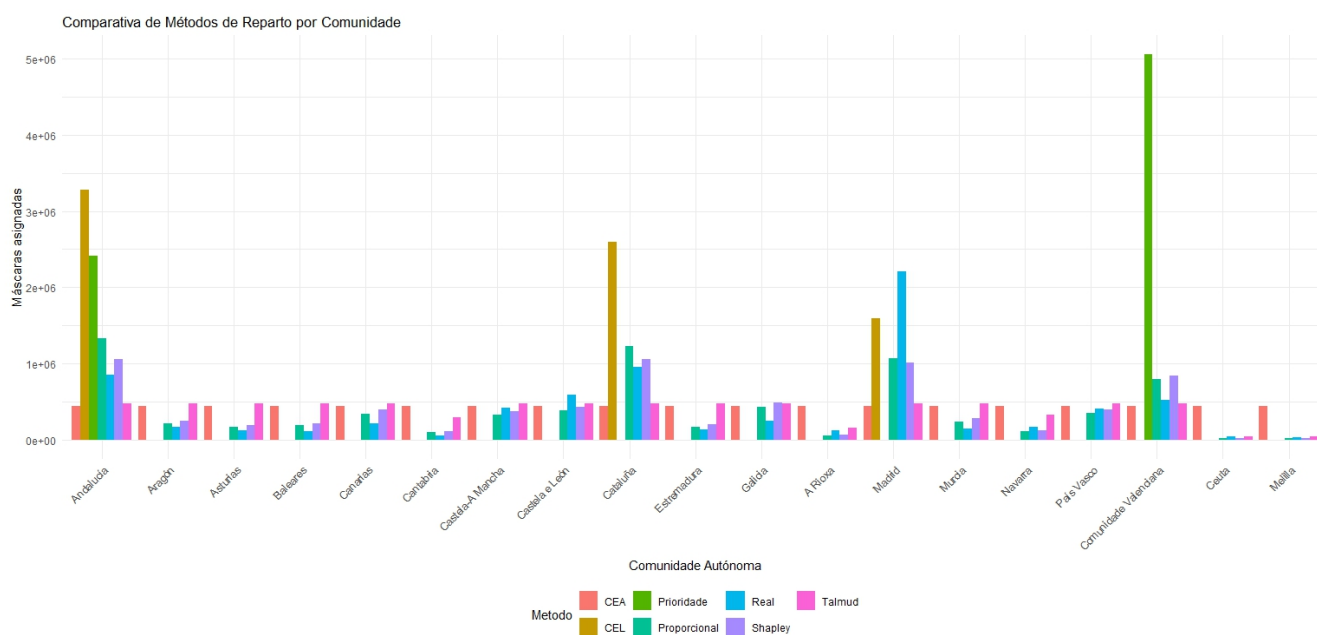


Figura 3.2: Gráfica das distintas regras

Ao observar con atención os datos, vese que as comunidades que máis se benefician en termos relativos das regras equitativas (como CEA ou Talmud) son aquelas cunha poboación intermedia ou baixa, que reciben máis do que lles correspondería por criterios proporcionais. En cambio, as regras baseadas en proporcionalidade ou contribución (como Shapley) favorecen claramente ás comunidades máis grandes.

No caso concreto de Madrid, detéctase unha diferenza notable: o repartimento real outórgalle unha cantidade moi superior á que recibiría segundo calquera regra proporcional ou cooperativa. Este feito provoca unha desviación importante na correlación entre o repartimento real e as regras baseadas estritamente na poboación. Este tipo de diferenzas podería deberse a decisións estratéxicas ou criterios externos ao modelo matemático, como a presión hospitalaria ou a concentración de casos naquel momento.

En resumo, o repartimento real do Goberno semella estar parcialmente baseado na poboación das comunidades, pero tamén inclúe elementos que o afastan dunha distribución puramente proporcional. O método de Shapley, pola súa banda, aparece como unha alternativa teórica próxima ao real pero máis sistemática. A análise tamén mostra como métodos baseados en equidade absoluta (CEA, CEL) ou priorización extrema resultan en distribucións moi distintas e probablemente pouco aceptables na práctica. Estes resultados ilustran claramente o poder das ferramentas matemáticas para analizar decisións políticas complexas, ofrecendo criterios obxectivos que poden complementar a toma de decisións en contextos críticos como o dunha pandemia.



## Capítulo 4

# Conclusións

Ao longo deste traballo abordouse o problema de bancarrota como un paradigma fundamental na teoría de xogos e na análise de situacións distributivas con recursos escasos. A formulación clásica, baseada no modelo de O'Neill (1982), permitiu establecer un marco formal onde se modela a interacción de varios axentes que reclaman máis do que hai dispoñible, permitindo así estudar criterios normativos de repartimento dende unha perspectiva rigorosa e xustificable.

A primeira parte do traballo centrouse na presentación e clasificación das principais regras de repartimento, agrupadas en familias segundo o seu fundamento conceptual: regras básicas, talmúdicas, de prioridade, paramétricas e xeométricas. Para cada unha delas analizáronse as expresións formais, a súa motivación histórica ou filosófica, e a súa interpretación en termos de equidade, eficiencia e consistencia. Especial énfase púxose nos axiomas que caracterizan e distinguen cada regra, como a dualidade, a consistencia, a preservación da orde, as cotas inferiores, a monotonicidade ou as propiedades de invariancia. Estes axiomas permiten seleccionar e xustificar unha regra de repartimento segundo os principios que se desexen preservar no contexto concreto.

Na segunda parte tratáronse os enfoques estratéxico e cooperativo, considerando a modelización do problema como un xogo de interacción entre axentes. No caso dos xogos estratéxicos, exploráronse os equilibrios de Nash e as súas interpretacións na asignación de recursos cando os axentes elixen estratexias para maximizar a súa ganancia individual. Pola súa banda, os xogos cooperativos, tanto de negociación como coalicionais, permitiron recuperar solucións como a de Nash, Kalai-Smorodinsky ou o valor de Shapley, que incorporan elementos de solidariedade, racionalidade colectiva ou estabilidade de coalicións.

Finalmente, realizouse unha aplicación práctica ao caso da escaseza de máscaras durante a pandemia da COVID-19 no contexto da situación de España. Esta análise empírica serviu para ilustrar como distintas regras de repartimento terían producido asignacións diferentes, poñendo de manifesto a relevancia dos criterios utilizados (como a proporcionalidade, a prioridade ou a

solidariedade) na toma de decisións políticas e sanitarias en situacións de crise.

En conxunto, este traballo demostra que os problemas de bancarrota constitúen un modelo versátil e potente para o estudo de situacións distributivas, e que a teoría de xogos fornece ferramentas conceptuais e técnicas valiosas para deseñar mecanismos de asignación xustos e eficientes. A súa aplicación transcende o ámbito puramente teórico, sendo de utilidade práctica en economía, dereito, xestión pública e planificación de emerxencias. Como liñas futuras, poderíase explorar a extensión destes modelos a contextos dinámicos, a presenza de incerteza ou a interacción con preferencias non lineares dos axentes.

## Anexo A

# Cálculo das regras con R

### A.0.1. Proporcional

```
> # Poboacion por comunidade
> ccaa <- c("Andalucia", "Aragon", "Asturias", "Balears", "Canarias", "
+ Cantabria",
+ "Castilla y Leon", "Castilla-La Mancha", "Cataluna", "Com.
+ Valenciana",
+ "Extremadura", "Galicia", "Madrid", "Murcia", "Navarra",
+ "Pais Vasco", "La Rioja", "Ceuta", "Melilla")
>
> poboacion <- c(8464411, 1329391, 1018784, 1171543, 2175952, 582905,
+ 2394918, 2045221, 7780479, 5057353, 1063987, 2701819,
+ 6779888, 1511251, 661197, 2220504, 319914, 84202,
+ 87076)
>
> # Total de mascaras distribuidas
> total_mascaras <- 7473708
>
> # repartimento proporcional
> repartimento_proporcional <- round((poboacion / sum(poboacion)) *
+ total_mascaras)
>
> # repartimento oficial real (datos da Moncloa)
> repartimento_real <- c(846474, 163174, 115773, 113496, 208629, 55367,
+ 589573, 416598, 957633, 517753, 129953, 243973,
+ 2207468, 143232, 169208, 406155, 118602, 39198,
+ 31448)
```

```

> # Crear data frame
> taboa_repartimento <- data.frame(
+   Comunidade = ccaa,
+   Poboacion = poboacion,
+   Proporcional = repartimento_proporcional,
+   repartimento_Real = repartimento_real
+ )
>
> # Amosar a taboa
> print(taboa_repartimento, row.names = TRUE)

```

	Comunidade	Poboacion	Proporcional	repartimento_Real
1	Andalucia	8464411	1333182	846474
2	Aragon	1329391	209385	163174
3	Asturias	1018784	160463	115773
4	Baleares	1171543	184523	113496
5	Canarias	2175952	342722	208629
6	Cantabria	582905	91810	55367
7	Castilla y Leon	2394918	377210	589573
8	Castilla-La Mancha	2045221	322131	416598
9	Cataluna	7780479	1225460	957633
10	Com. Valenciana	5057353	796555	517753
11	Extremadura	1063987	167583	129953
12	Galicia	2701819	425548	243973
13	Madrid	6779888	1067862	2207468
14	Murcia	1511251	238029	143232
15	Navarra	661197	104141	169208
16	Pais Vasco	2220504	349739	406155
17	La Rioja	319914	50388	118602
18	Ceuta	84202	13262	39198
19	Melilla	87076	13715	31448

## A.0.2. CEA

```

> # Datos de poboacion por CCAA (demandas)
> ccaa <- c("Andalucia", "Aragon", "Asturias", "Illes Balears", "
Canarias", "Cantabria", "Castela e Leon", "Castela-A Mancha", "
Cataluna", "Comunitat Valenciana", "Extremadura", "Galicia", "Madrid"
, "Murcia", "Navarra", "Pais Vasco", "A Rioxa", "Ceuta", "Melilla")

```

```
> poboacion <- c(
+   8464411, 1329391, 1018784, 1171543, 2175952, 582905,
+   2394918, 2045221, 7780479, 5057353,
+   1063987, 2701819, 6779888, 1511251, 661197, 2220504,
+   319914, 84202, 87076
+ )
>
> # Recurso disponible (mascaras)
> E <- 7473708
> # Regra CEA (Constrained Equal Awards)
> regra_CEA <- function(c, E, tol = 1e-6) {
+   n <- length(c)
+
+   # Funcion para resolver lambda tal que sum(min(ci, lambda)) = E
+   f <- function(lambda) {
+     sum(pmin(c, lambda)) - E
+   }
+
+   # Buscar lambda por metodo de biseccion
+   lambda_low <- 0
+   lambda_high <- max(c)
+
+   while ((lambda_high - lambda_low) > tol) {
+     lambda_mid <- (lambda_low + lambda_high) / 2
+     if (f(lambda_mid) > 0) {
+       lambda_high <- lambda_mid
+     } else {
+       lambda_low <- lambda_mid
+     }
+   }
+
+   lambda <- (lambda_low + lambda_high) / 2
+   asignacion <- pmin(c, lambda)
+   return(asignacion)
+ }
```

```
> # Calcular asignaci ns CEA
> asignacion_cea <- regla_CEA(poboacion, E)
>
> # Mostrar resultado
> resultado <- data.frame(
+   CCAA = ccaa,
+   Poboacion = poboacion,
+   Asignacion_CEA = round(asignacion_cea)
+ )
>
> # Ordenar por maior asignacion
> resultado <- resultado[order(-resultado$Asignacion_CEA), ]
>
> print(resultado, row.names = FALSE)
      CCAA Poboacion Asignacion_CEA
Andalucia  8464411      436407
  Aragon   1329391      436407
  Asturias 1018784      436407
Illes Balears 1171543      436407
  Canarias 2175952      436407
  Cantabria  582905      436407
Castela e Leon 2394918      436407
Castela-A Mancha 2045221      436407
  Catalunya 7780479      436407
Comunitat Valenciana 5057353      436407
  Extremadura 1063987      436407
  Galicia    2701819      436407
  Madrid     6779888      436407
  Murcia     1511251      436407
  Navarra     661197      436407
  Pais Vasco 2220504      436407
  A Rioxa    319914      319914
  Melilla    87076       87076
  Ceuta      84202       84202
>
```

### A.0.3. Talmud

```
> comunidades <- c("Andalucia", "Aragon", "Asturias", "Balears", "
  Canarias" "Cantabria", "Castela-A Mancha", "Castela e Leon", "
  Catalunya", "Estremadura", "Galicia", "A Rioxa", "Madrid", "Murcia", "
  Navarra", "Pais Vasco", "Comunidade Valenciana", "Ceuta", "Melilla")

> poboacion <- c(8464411, 1329391, 1018784, 1171543, 2175952,
+               582905, 2045221, 2394918, 7780479,
+               1063987, 2701819, 319914, 6779888, 1511251,
+               661197, 2220504, 5057353, 84202, 87076)
>
> reclamacions <- poboacion / 2
> total_mascaras <- 7473708
>
> # -----
> # Funcion para calcular a regra CEA
> # -----
>
> cea <- function(claims, E) {
+   n <- length(claims)
+   sorted <- sort(claims, index.return = TRUE)
+   d_sorted <- sorted$x
+   idx <- sorted$ix
+
+   awards <- rep(0, n)
+   remaining <- E
+
+   for (i in 1:n) {
+     equal_share <- remaining / (n - i + 1)
+     asignacion <- min(d_sorted[i], equal_share)
+     awards[i] <- asignacion
+     remaining <- remaining - asignacion
+   }
+
+   result <- numeric(n)
+   result[idx] <- awards
+   return(result)
+ }
```

```

> # -----
> # Aplicar CEA con demandas c/2
> # -----
>
> asignacion_cea <- cea(reclamacions, total_mascaras)
> # -----
> # Mostrar resultados
> # -----
>
> resultado <- data.frame(
+   Comunidade = comunidades,
+   Poboacion = poboacion,
+   Reclamacion_c2 = round(reclamacions),
+   Asignacion_CEA = round(asignacion_cea)
+ )
>
> print(resultado, row.names = FALSE)
  Comunidade Poboacion Reclamacion_c2 Asignacion_CEA
  Andaluca  8464411      4232206      471862
    Aragon   1329391      664696      471862
  Asturias  1018784      509392      471862
  Baleares  1171543      585772      471862
  Canarias  2175952     1087976      471862
  Cantabria  582905      291452      291452
Castela-A Mancha 2045221     1022610      471862
  Castela e Leon 2394918     1197459      471862
  Cataluna   7780479     3890240      471862
  Estremadura 1063987      531994      471862
  Galicia   2701819     1350910      471862
  A Rioxa   319914      159957      159957
  Madrid    6779888     3389944      471862
  Murcia    1511251      755626      471862
  Navarra   661197      330598      330598
  Pais Vasco 2220504     1110252      471862
Comunidade Valenciana 5057353     2528676      471862
  Ceuta     84202      42101      42101
  Melilla   87076      43538      43538

```

#### A.0.4. Prioridade secuencial

```
> prioridade <- c("Comunidade Valenciana", "Andalucia", "Balears", "
Murcia", "Madrid", "Castela-A Mancha", "Canarias", "Cataluna", "
Galicia", "Estremadura", "A Rioxa", "Cantabria", "Aragon", "Castela e
Leon", "Asturias", "Pais Vasco", "Navarra", "Ceuta", "Melilla")

> # -----
> # Funcion de repartimento secuencial
> # -----
>
> repartimento_prioridade <- function(nomes, reclamacions, total, orde)
{
+   asignacions <- numeric(length(nomes))
+   nomes <- as.character(nomes)
+   for (nome in orde) {
+     idx <- which(nomes == nome)
+     asignado <- min(reclamacions[idx], total)
+     asignacions[idx] <- asignado
+     total <- total - asignado
+     if (total <= 0) break
+   }
+   return(asignacions)
+ }
>
> # -----
> # Aplicar a regra
> # -----
>
> asignacion <- repartimento_prioridade(comunidades, poboacion, total_
mascaras, prioridade)
```

```
> # -----
> # Mostrar resultados
> # -----
>
> resultado <- data.frame(
+   Comunidade = comunidades ,
+   demanda = poboacion ,
+   Asignacion_Prioridade = round(asignacion)
+ )

> # Reordenar segundo a orde de prioridade
> resultado <- resultado[match(prioridade , resultado$Comunidade), ]
>
> print(resultado , row.names = FALSE)
      Comunidade demanda Asignacion_Prioridade
Comunidade Valenciana      5057353             5057353
           Andalucia      8464411             2416355
           Baleares      1171543              0
           Murcia      1511251              0
           Madrid      6779888              0
Castela-A Mancha      2045221              0
           Canarias      2175952              0
           Cataluna      7780479              0
           Galicia      2701819              0
Estremadura      1063987              0
           A Rioxa      319914              0
           Cantabria      582905              0
           Aragon      1329391              0
Castela e Leon      2394918              0
           Asturias      1018784              0
           Pais Vasco      2220504              0
           Navarra      661197              0
           Ceuta      84202              0
           Melilla      87076              0
```

### A.0.5. Chegadas aleatorias ou valor de Shapley

```

# Funcion para calcular o valor da coalicion segundo o xogo TU
# asociado ao problema de bancarrota
> valor_coalicion <- function(S, c, E) {
+   N <- seq_along(c)
+   NcS <- setdiff(N, S) # N \ S
+   suma_demandas <- sum(c[NcS])
+   max(0, E - suma_demandas)
+ }
>
> # Funcion para calcular o valor de Shapley para cada xogador
> shapley_bancarrota <- function(c, E) {
+   n <- length(c)
+   N <- seq_len(n)
+   shapley <- numeric(n)
+   coalicions <- unlist(lapply(0:n, function(k) combn(n, k, simplify =
+     FALSE)), recursive = FALSE)
+
+   for (i in N) {
+     phi_i <- 0
+     for (S in coalicions) {
+       if (!(i %in% S)) {
+         S_con_i <- sort(c(S, i))
+         v_S <- valor_coalicion(S, c, E)
+         v_S_i <- valor_coalicion(S_con_i, c, E)
+
+         s <- length(S)
+         coef <- factorial(s) * factorial(n - s - 1) / factorial(n)
+         phi_i <- phi_i + coef * (v_S_i - v_S)
+       }
+     }
+     shapley[i] <- phi_i
+   }
+
+   return(shapley)
+ }

```

```

> # Exemplo de uso
> c <- c(8464411, 1329391, 1018784, 1171543, 2175952, 582905, 2394918,
+       2045221,
+       7780479, 5057353, 1063987, 2701819, 6779888, 1511251, 661197,
+       2220504,
+       319914, 84202, 87076)
> E <- 7473708
>
> resultado_shapley <- shapley_bancarrota(c, E)
> names(resultado_shapley) <- c("Andalucia", "Aragon", "Asturias", "
+   Balears", "Canarias", "Cantabria",
+   "Castela-Leon", "Castela-Mancha", "
+   Cataluna", "Valenciana", "Extremadura",
+   "Galicia", "Madrid", "Murcia", "Navarra"
+   , "Pais Vasco", "A Rioxa",
+   "Ceuta", "Melilla")
>
> print(round(resultado_shapley))
  Andalucia      Aragon      Asturias      Balears
  Canarias
  1053712      243558      188083      215377
  391670
  Cantabria  Castela-Leon  Castela-Mancha      Cataluna
  Valenciana
  109034      429322      369041      1053712
  843110
  Extremadura      Galicia      Madrid      Murcia
  Navarra
  196180      480770      1009014      275766
  123491
  Pais Vasco      A Rioxa      Ceuta      Melilla
  399359      60129      15918      16460
>

```

### A.0.6. Paramétrica (CEL)

```
> # Implementacion da regra CEL
> # -----
>
> regra_CEL <- function(claims, E, tol = 1e-6) {
+   # Funcion obxectivo para atopar lambda
+   total_asignado <- function(lambda) {
+     sum(pmax(claims - lambda, 0))
+   }
+
+   # Intervalo inicial para lambda: entre 0 e max(claims)
+   lower <- 0
+   upper <- max(claims)
+
+   # Busca binaria
+   while ((upper - lower) > tol) {
+     mid <- (lower + upper) / 2
+     asignado <- total_asignado(mid)
+     if (asignado > E) {
+       lower <- mid
+     } else {
+       upper <- mid
+     }
+   }
+
+   lambda <- (lower + upper) / 2
+   premios <- pmax(claims - lambda, 0)
+   return(premios)
+ }
>
> # -----
> # Aplicacion da regra
> # -----
>
> asignacion_cel <- regra_CEL(claims, E)
>
> # -----
> # Resultados
> # -----
```

```

> resultado <- data.frame(
+   Comunidade = comunidades,
+   Reclamacion = round(claims),
+   Asignacion_CEL = round(asignacion_cel)
+ )
> resultado <- resultado[order(resultado$Asignacion_CEL), ]
> print(resultado, row.names = FALSE)
      Comunidade Reclamacion Asignacion_CEL
      Aragon      1329391          0
      Asturias   1018784          0
      Baleares   1171543          0
      Canarias   2175952          0
      Cantabria   582905          0
      Castela-A Mancha 2045221          0
      Castela e Leon 2394918          0
      Estremadura 1063987          0
      Galicia     2701819          0
      A Rioxa     319914          0
      Murcia      1511251          0
      Navarra     661197          0
      Pais Vasco  2220504          0
      Comunidade Valenciana 5057353          0
      Ceuta       84202          0
      Melilla     87076          0
      Madrid      6779888      1596198
      Cataluna    7780479      2596789
      Andalucia   8464411      3280721
> cat("\nSuma total asignada:", round(sum(asignacion_cel)), "\n")

Suma total asignada: 7473708
> Perdidas:5183690

```

## Anexo B

# Estatística con R

### B.1. Matriz de correlación

```
> # ---- Cargar paquetes ----
> library(tidyverse)
> library(ggcorrplot)
> library(GGally)
> library(reshape2)
>
> # ---- Crear o data frame cos datos ----
> repartimento <- tribble(
+   ~Comunidade, ~Poboacion, ~Real, ~CEA, ~Proporcional, ~Talmud, ~
  Shapley, ~Prioridade, ~CEL,
+   "Andalucia", 8464411, 846474, 436407, 1333182, 471862, 1053712,
  2416355, 3280721,
+   "Aragon", 1329391, 163174, 436407, 209385, 471862, 243558, 0, 0,
+   "Asturias", 1018784, 115773, 436407, 160463, 471862, 188083, 0, 0,
+   "Balears", 1171543, 113496, 436407, 184523, 471862, 215377, 0, 0,
+   "Canarias", 2175952, 208629, 436407, 342722, 471862, 391670, 0, 0,
+   "Cantabria", 582905, 55367, 436407, 91810, 291452, 109034, 0, 0,
+   "Castela-A Mancha", 2045221, 416598, 436407, 322131, 471862, 369041,
  0, 0,
+   "Castela e Leon", 2394918, 589573, 436407, 377210, 471862, 429322,
  0, 0,
+   "Cataluna", 7780479, 957633, 436407, 1225460, 471862, 1053712, 0,
  2596789,
+   "Extremadura", 1063987, 129953, 436407, 167583, 471862, 196180, 0,
  0,
```

```
+ "Galicia", 2701819, 243973, 436407, 425548, 471862, 480770, 0, 0,
+ "A Rioxa", 319914, 118602, 319914, 50388, 159957, 60129, 0, 0,
+ "Madrid", 6779888, 2207468, 436407, 1067862, 471862, 1009014, 0,
1596198,
+ "Murcia", 1511251, 143232, 436407, 238029, 471862, 275766, 0, 0,
+ "Navarra", 661197, 169208, 436407, 104141, 330598, 123491, 0, 0,
+ "Pais Vasco", 2220504, 406155, 436407, 349739, 471862, 399359, 0, 0,
+ "C. Valenciana", 5057353, 517753, 436407, 796555, 471862, 843110,
5057353, 0,
+ "Ceuta", 84202, 39198, 84202, 13262, 42101, 15918, 0, 0,
+ "Melilla", 87076, 31448, 87076, 13715, 43538, 16460, 0, 0
+ )
>

> # ---- Calcular matriz de correlacion ----
> cor_data <- repartimento %>%
+   select(-Comunidade) %>%
+   cor(use = "complete.obs")
```

```

> # ---- Mostrar a matriz ----
> print(cor_data)

```

	Poboacion	Real	CEA	Proporcional	Talmud
Poboacion	1.0000000	0.7855330	0.3739839	1.0000000	0.4823358
Shapley	0.9872967				
Real	0.7855330	1.0000000	0.2738932	0.7855329	0.3514252
CEA	0.3739839	0.2738932	1.0000000	0.3739838	0.9105458
Proporcional	1.0000000	0.7855329	0.3739838	1.0000000	0.4823357
Talmud	0.4823358	0.3514252	0.9105458	0.4823357	1.0000000
Shapley	0.9872967	0.8039708	0.4356579	0.9872966	0.5554583
Prioridade	0.4669766	0.1480437	0.1272833	0.4669765	0.1736731
CEL	0.8833528	0.6477013	0.1641827	0.8833529	0.2240209
	Prioridade	CEL			
Poboacion	0.4669766	0.8833528			
Real	0.1480437	0.6477013			
CEA	0.1272833	0.1641827			
Proporcional	0.4669765	0.8833529			
Talmud	0.1736731	0.2240209			
Shapley	0.4933481	0.7997668			
Prioridade	1.0000000	0.2259281			
CEL	0.2259281	1.0000000			

## B.2. Gráfico de barras

```
# =====  
# Transformacion a formato largo  
# =====  
repartimentos_long <- repartimentos %>%  
  pivot_longer(cols = -Comunidade, names_to = "Metodo", values_to = "  
    Valor")  
  
# Ordena as comunidades para que aparezan ben no grafico  
repartimentos_long$Comunidade <- factor(repartimentos_long$Comunidade,  
  levels = repartimentos$Comunidade)  
  
# =====  
# Grafico de barras comparativo  
# =====  
ggplot(repartimentos_long, aes(x = Comunidade, y = Valor, fill = Metodo)  
  ) +  
  geom_bar(stat = "identity", position = "dodge") +  
  labs(title = "Comparativa de Metodos de repartimento por Comunidade",  
    y = "Mascaras asignadas", x = "Comunidade Autonoma") +  
  theme_minimal() +  
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1),  
    legend.position = "bottom")
```

# Bibliografía

- [1] Ashlagi, I., Dothan, A., & Gal, S. (2012). *Game theory for health care: A microeconomic approach*. Health Care Management Science, **15**(2), 87–94.
- [2] Atlamaz, M., Berden, C., Peters, H., & Vermeulen, D. (2011). *Non-cooperative solutions for estate division problems*. Games and Economic Behavior, **73**, 39–51.
- [3] Aumann, R. J., & Maschler, M. (1985). *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*. Journal of Economic Theory, **36**(2), 195–213.
- [4] Casas Méndez, B., Fiestras Janeiro, M. G., García Jurado, I., & González Díaz, J. (s.f.). *Introducción a la Teoría de Juegos*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidade de Santiago de Compostela / Universidade de Vigo / Universidade da Coruña.
- [5] Chang, C., Hu, C.-C. (2008). *A non-cooperative interpretation of the f-just rules of bankruptcy problems*. Games and Economic Behavior, **63**, 133–144.
- [6] Chun, Y., Hokari, T., & Mitsunori, S. (2001). *Restricted uniform allocation rules*. Mathematical Social Sciences, **42**(1), 69–87.
- [7] Curiel, I., Maschler, M., & Tijs, S. (1987). *Bankruptcy games*. Zeitschrift für Operations Research, **31**(1), A143–A159.
- [8] Dagan, N., & Volij, O. (1993). *The consistency criterion for division problems*. Journal of Mathematical Economics, **22**(5), 579–594.
- [9] Dagan, N., Serrano, R., & Volij, O. (1997). *A non-cooperative view of consistent bankruptcy rules*. Games and Economic Behavior, **18**, 55–72.
- [10] Domínguez, D. (2013). *Recursive rules for bankruptcy problems*. Mathematical Social Sciences, **65**(2), 116–122.
- [11] Estévez-Fernández, A., Borm, P., & Fiestras-Janeiro, G. (2014). *NTU bankruptcy problems*. Mimeo.

- [12] Federación de Asociaciones para a Defensa da Sanidade Pública (FADSP), *Informe sobre os Servizos Sanitarios das Comunidades Autónomas*, disponible en: <https://fadsp.es/desigualdad-servicios-sanitarios/>, consultado o 1 de xuño de 2025.
- [13] García-Jurado, I., González-Díaz, J., Villar, A. (2006). *A non-cooperative approach to bankruptcy problems*. Spanish Economic Review, **8**, 189–197.
- [14] Giménez-Gómez, J. M., & Marco, R. (2014). *A new rule for bankruptcy problems with references*. Economics Letters, **123**(2), 192–195.
- [15] Presidencia del Gobierno de España. (2020, 27 de marzo). *El reparto de mascarillas a las Comunidades por parte del Gobierno asciende a 7,47 millones*. Recuperado de <https://www.lamoncloa.gob.es/serviciosdeprensa/notasprensa/presidencia/Paginas/2020/270320-mascarillas.aspx>
- [16] Hougaard, J. L., Moreno-Tertero, J. D., & Østerdal, L. P. (2012). *A unifying approach to the allocation of indivisible goods*. Social Choice and Welfare, **39**(4), 709–726.
- [17] Instituto Nacional de Estadística (INE). (2020). *Cifras oficiales de población según el Padrón municipal a 1 de enero de 2020*. Recuperado de <https://www.ine.es/jaxiT3/Datos.htm?t=1414>
- [18] Ju, B. G., & Moreno-Tertero, J. D. (2011). *Extreme merging-proof rules in claims problems*. Journal of Economic Theory, **146**(6), 2372–2385.
- [19] Kadane, J. B. (2021). *Fair allocation of medical resources under COVID-19: A Bayesian perspective*. Journal of Medical Ethics, **47**(5), 299–302.
- [20] Kalai, E., & Smorodinsky, M. (1975). *Other solutions to Nash's bargaining problem*. Econometrica, **43**(3), 513–518.
- [21] Kasajima, Y., & Thomson, W. (2011). *On the axiomatization of division rules*. Social Choice and Welfare, **37**(3), 483–502.
- [22] Luttens, R. (2010a). *Uncertainty, lower bounds and priority in competing claims problems*. CORE Mimeo.
- [23] Luttens, R. (2010b). *Lower bound rules*. Novembro.
- [24] Mirás Calvo, M. A., Núñez Lugilde, I., Quinteiro Sandomingo, C., & Sánchez Rodríguez, E. (2022). *E ti, como repartirías? O pouco ben repartido... Guía práctica*. Universidade de Vigo. ISBN: 978-84-123028-6-8.
- [25] Moreno-Tertero, J. D., & Villar, A. (2006). *A characterization of the constrained equal awards rule*. Social Choice and Welfare, **27**(2), 231–249.

- 
- [26] Moreno-Tertero, J. D. (2011). *A new characterization of the proportional rule*. *Economics Bulletin*, **31**(1), 234–239.
- [27] Moulin, H. (2000). *Priority rules and other asymmetric rationing methods*. *Econometrica*, **68**, 643–684.
- [28] Moulin, H. *Fair Division and Collective Welfare*. MIT Press, 2000.
- [29] Moulin, H. (2002). *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press.
- [30] Nash, J. F. (1950). *Equilibrium points in  $n$ -person games*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36**(1), 48–49.
- [31] Nash, J. F. (1951). *Non-cooperative games*. *Annals of Mathematics*, **54**(2), 286–295.
- [32] Núñez Lugilde, I. (2023). *Computation and comparison of division rules to adjudicate conflicting claims* [Tese de doutoramento, Universidade de Vigo]. Escola Internacional de Doutoramento, Programa de Doutoramento en Estatística e Investigación Operativa. “Mención internacional”.
- [33] O’Neill, B. (1982). *A problem of rights arbitration from the Talmud*. *Mathematical Social Sciences*, **2**(4), 345–371.
- [34] Peters, H., van den Brink, R., & van der Laan, G. (2013). *Probabilistic bankruptcy problems*. *Theory and Decision*, **74**(3), 345–368.
- [35] Shapley, L. S. (1967). *On balanced sets and cores*. *Naval Research Logistics Quarterly*, **14**(4), 453–460.
- [36] Statista. (2020). *Mapa de distribución de casos de COVID-19 en Europa a 9 de marzo de 2020*. Recuperado de <https://www.statista.com/statistics/1101917/coronavirus-cases-europe-map-march-2020/> (Accedido o 6 de xuño de 2025).
- [37] Statista. (2020). *Número diario de casos confirmados y muertes por COVID-19 en España*. Recuperado de <https://www.statista.com/statistics/1103047/coronavirus-daily-cases-and-deaths-spain/> (Accedido o 6 de xuño de 2025).
- [38] Su, X., Wang, Y., Gilbert, M., & Zhang, Y. (2020). *Allocation of COVID-19 medical resources using game theory and optimization*. *Health Policy and Technology*, **9**(4), 425–433.
- [39] Thomson, W. (2003). *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*. *Mathematical Social Sciences*, **45**(3), 249–297.
- [40] Thomson, W. (2006). *How to Divide When there Isn’t Enough; from the Talmud to Game Theory*.

- 
- [41] Thomson, W. (2011). *Axiomatic theory of fairness*. In K. J. Arrow, A. K. Sen, & K. Suzumura (Eds.), *Handbook of Social Choice and Welfare* (Vol. 2, pp. 393–506). Elsevier.
- [42] Thomson, W. (2015). *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: An update*. *Mathematical Social Sciences*, **74**, 41–59. <https://doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2014.09.002>
- [43] van den Brink, R., Funaki, Y., & van der Laan, G. (2013). *Characterization of the reverse Talmud bankruptcy rules by exemption and exclusion properties*. *European Journal of Operational Research*, **228**, 413–417.
- [44] Young, H. P. (1987). *On dividing an amount according to individual claims or liabilities*. *Mathematics of Operations Research*, **12**(3), 398–414.
- [45] Young, P. (1988). *Distributive justice in taxation*. *Journal of Economic Theory*, **44**, 321–335.