

Traballo Fin de Grao

Ecuacións de Euler-Lagrange en variedades

Raúl Rodríguez Bello

2020-21

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Ecuacións de Euler-Lagrange en variedades

Raúl Rodríguez Bello

Febreiro, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Ecuacións de Euler-Lagrange en variedades
Breve descrición do contido
O principal propósito do TFG é · introducción dos SODES no fibrado tanxente · introducción dos SODES no fibrado tanxente extendido · describir exemplos que expliquen os contidos teóricos.
Recomendacións
Ter cursado ou estar cursando a materia de Variedades Diferenciáveis.
Outras observacións

Índice xeral

Resumo	VII
Introdución	IX
1. Ecuacións de Newton e de Euler-Lagrange: caso autónomo	1
1.1. Ecuacións de Newton: caso autónomo	2
1.2. Ecuacións de Euler-Lagrange: caso autónomo	3
2. Ecuacións diferenciais de segundo orde en TQ	7
2.1. Campos de vectores en TQ	8
2.1.1. Levantamentos verticais de campos de vectores	8
2.1.2. Levantamentos completos de campos de vectores	10
2.1.3. Campo de vectores de Liouville	10
2.2. Estructura tanxente canónica	11
2.3. Sistema de ecuacións en derivadas de segundo orde: SODEs	11
2.3.1. Levantamento tanxente de curvas	13
2.3.2. SODEs	13
2.4. Ecuacións de Euler-Lagrange e SODEs	16
2.5. Exemplo: Péndulo simple	17
3. Ecuacións diferenciais de segundo orde en $\mathbb{R} \times TQ$	19
3.1. Estructuras canónicas en $\mathbb{R} \times TQ$	19
3.1.1. Campo de Liouville e endomorfismo canónico en $\mathbb{R} \times TQ$	20
3.2. SODEs	21
3.2.1. Prolongación de curvas	21
3.3. Ecuacións de Euler-Lagrange e SODEs	23
3.4. Exemplo: Péndulo simple que se move sobre un anel	24
Bibliografía	27

Resumo

O obxectivo principal deste traballo, é a introducción dos SODEs no fibrado tanxente e no fibrado tanxente extendido, así coma a importancia das ecuacións de Euler-Lagrange e a súa utilidade.

Para isto, necesitamos describir o fibrado tanxente TQ como variedade diferenciable, e os seus elementos xeométricos, como a estrutura tanxente canónica, o campo de vectores de Liouville ou os levantamentos de campos de vectores. Tamén extenderemos todos estes conceptos á variedade diferenciable $\mathbb{R} \times TQ$.

Para entender ben todo o anterior, axudarémonos de dous exemplos, no primeiro caso, cando o lagrangiano non depende do tempo, estudaremos o movemento dun péndulo simple, e no segundo, cando o lagrangiano depende do tempo, estudaremos o péndulo simple que se move sobre un anel .

Abstract

The main objective of this work is the introduction of SODEs in the tangent bundle and in the extended tangent bundle, as well as the importance of the Euler-Lagrange equations and their usefulness.

To that end, we need to describe the tangent bundle TQ as a differentiable manifold and its geometrical elements, such as the canonical tangent structure, the Liouville vector field or the vector field lifts. We will also extend all these concepts to the differentiable variety $\mathbb{R} \times TQ$.

In order to understand all the above, we will use two examples, in the first case, when the lagrangian does not depend on time, we will study the motion of a simple pendulum, and in the second, when the lagrangian depends on time, we will study the simple pendulum moving on a ring.

Introdución

A Mecánica Analítica é unha formulación abstracta e xeral da mecánica, que permite o uso en igualdade de condicións de sistemas inerciais ou non inerciais sen que, a diferenza das leis de Newton, a forma básica das ecuacións do movemento cambie.

As ecuacións de Euler-Lagrange e de Hamilton, que son sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias, xogan un papel primordial na Mecánica Clásica.

Como xa se indica no resumo, o obxectivo principal deste traballo é a introdución dos SODEs no fibrado tanxente e no fibrado tanxente extendido, utilizando as ferramentas da XEOMETRÍA DIFERENCIAL.

O traballo queda dividido nos seguintes tres capítulos:

- **Capítulo 1. Ecuacións de Newton e de Euler-Lagrange: caso autónomo**

As ecuacións de Newton, as ecuacións de Euler-Lagrange e as ecuacións de Hamilton, que son sistemas de ecuacións diferenciais ordinarias, xogan un papel fundamental na Mecánica Clásica.

No capítulo 1 faise unha breve introdución a esas ecuacións de Newton e de Euler-Lagrange no caso de sistemas conservativos, chegando a unha clara equivalencia entre as dúas á hora de describir as ecuacións do movemento dun sistema de partículas. Todo isto realízase sen empregar os principios variacionais. As referencias bibliográficas deste capítulo son [3] e [5].

- **Capítulo 2. Ecuacións diferenciais de segundo orde en TQ .**

Descríbese o fibrado tanxente TQ como variedade diferenciable e introdúcense os elementos xeométricos de TQ : a estrutura tanxente canónica, o campo de vectores de Liouville en TQ e os levantamentos verticais e completos de campos de vectores.

Introdúcense tamén os SODEs, que son un tipo moi importante de campos de vectores sobre o fibrado tanxente dunha variedade diferenciable, xa que as súas curvas integrais en TQ , son levantamentos tanxentes $\alpha^{(1)}$ de curvas α na variedade Q .

Finalizamos o capítulo describindo o SODE que nos proporciona o movemento dun péndulo simple. As referencias bibliográficas de este capítulo son [1] e [4].

■ **Capítulo 3. Ecuacións diferenciais de segundo orde en $\mathbb{R} \times TQ$.**

Descríbese a variedade $\mathbb{R} \times TQ$ como variedade diferenciable e introdúcense algúns elementos xeométricos nesa variedade: as extensións da estrutura tanxente canónica e o campo de vectores de Liouville en TQ a $\mathbb{R} \times TQ$.

Amplíase o concepto de SODE en TQ a $\mathbb{R} \times TQ$.

Finalizamos o capítulo describindo o SODE que nos proporciona o movemento dun péndulo simple que se move sobre un anel. As referencias bibliográficas de este capítulo son [1] e [4].

Capítulo 1

Ecuacións de Newton e de Euler-Lagrange: caso autónomo

Consideremos un sistema dinámico de N masas puntuais, sendo unha *masa puntual*, un obxecto ideal de dimensión cero, descrito pola súa masa, que tomaremos constante, e pola súa posición en \mathbb{R}^3 .

Nun sistema de N masas puntuais, denotaremos por *configuración* do sistema a

$$(q^1, \dots, q^{3N}) \in \mathbb{R}^{3N},$$

onde $(q^{3i-2}, q^{3i-1}, q^{3i}) \in \mathbb{R}^3$ indica a posición da masa puntual i -ésima, con $i = 1, \dots, N$.

Chamaremos *espazo de configuración*, ao conxunto de todas as posibles configuracións do sistema, e denotarémolo por Q .

Análogamente, dise que

$$(q^1, \dots, q^{3N}, v^1, \dots, v^{3N}) \in \mathbb{R}^{6N}$$

é un *estado* do sistema, onde $(v^{3i-2}, v^{3i-1}, v^{3i}) \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade da masa puntual i -ésima, con $i = 1, \dots, N$. O conxunto de todos os posibles estados se chama *espazo de estados*, e o imos denotar por S .

Exemplos

1. Consideremos unha masa puntual movéndose libremente no interior dunha esfera de radio 1. Os seus espazos de configuración e estados son

$$Q = \{(q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^3 / (q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2 < 1\}, \quad S = Q \times \mathbb{R}^3.$$

2 CAPÍTULO 1. ECUACIONES DE NEWTON E DE EULER-LAGRANGE: CASO AUTÓNOMO

2. Collemos agora unha masa puntual unida por unha corda ríxida, de lonxitude unida-
de, á orixe de coordenadas. Neste caso o espazo de configuración é $Q = \mathbb{S}^2$ (a esfera
en \mathbb{R}^3) e o espazo de estados

$$S = \{(q^1, q^2, q^3, v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^3 / \sum_{i=1}^3 q^i v^i = 0\} = T\mathbb{S}^2,$$

ou o que é o mesmo, o espazo tanxente á esfera.

3. Neste exemplo imos considerar N masas puntuais movéndose libremente polo espazo,
con vector de posición $q_i = (q^{3i-2}, q^{3i-1}, q^{3i})$, o espazo de configuración é

$$Q = \{(q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} / q_i \neq q_j, \forall i \neq j\},$$

e o espazo de estados $S = Q \times \mathbb{R}^{3N}$.

Nótese que Q é un aberto en \mathbb{R}^{3N} , e a condición $q_i \neq q_j, \forall i \neq j$ é para evitar colisións
que nós non consideraremos.

4. (Sólido rixido) Neste caso, temos $N \geq 2$ masas puntuais sometidas a restricións fixas
do tipo

$$\|q_i - q_j\| = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

e dicir, desprazándose como se estiveran acopladas, como un sólido rixido. O espazo
de configuración é

$$Q = \{(q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} / \|q_i - q_j\| = a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N\}$$

e o espazo de estados $S = TQ$, isto é, o fibrado tanxente a Q (como veremos máis
adiante).

Por norma xeral, o espazo de configuración vai a ser unha variedade diferenciable e o
espazo de estados o seu fibrado tanxente.

Nesta breve introdución imos supoñer que non hai restricións no movemento, o que se
traduce en que o espazo de configuración será \mathbb{R}^{3N} , ou no seu defecto un aberto Q de \mathbb{R}^{3N} ,
e o de estados $Q \times \mathbb{R}^{3N}$, como no caso dos exemplos 1 e 3.

1.1. Ecuacións de Newton: caso autónomo

Consideremos N partículas movéndose en \mathbb{R}^3 e denotemos o vector de masas por

$$(m_1, m_2, m_3, \dots, m_{3i-2}, m_{3i-1}, m_{3i}, \dots, m_{3N-2}, m_{3N-1}, m_{3N}),$$

onde $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i} = M_i$ é a masa da partícula i -ésima.

A *Segunda Lei de Newton* establece que o movemento dun sistema de partículas se rixe polo seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segundo orde

$$F_i \left(q^j(t), \frac{dq^j}{dt} \Big|_t \right) = m_i \frac{d^2 q^i}{dt^2} \Big|_t, \quad i, j = 1, \dots, 3N, \quad (1.1)$$

onde

$$F_i : S = Q \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots, 3N,$$

sendo $(F_{3i-2}, F_{3i-1}, F_{3i})$ a forza que actúa sobre a partícula i -ésima, e (F_1, \dots, F_{3N}) a forza total do sistema.

Unha solución de (1.1) será unha curva

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow Q \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (q^1(t), \dots, q^{3N}(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de configuración, que representa o movemento das N partículas.

A partir de agora, nos imos centrar nos denominados sistemas *conservativos*, que son aqueles nos que existe unha función *potencial*

$$V : Q \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \circ \tau, \quad i = 1, \dots, 3N$$

sendo $\tau : S = Q \times \mathbb{R}^{3N} \longrightarrow Q$ a proxección canónica. Isto quere dicir que as forzas que actúan sobre cada partícula son funcións que dependen unicamente das posicións, non das velocidades.

1.2. Ecuacións de Euler-Lagrange: caso autónomo

En contra dá Mecánica Newtoniana, a Mecánica Lagrangiana se desenvolve no espazo de estados.

Definición 1.1. A *enerxía cinética* do sistema é

$$\begin{aligned} T : S = Q \times \mathbb{R}^{3N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q^i, v^i) &\longmapsto T(q^i, v^i) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i (v^i)^2, \end{aligned}$$

4 CAPÍTULO 1. ECUACIONES DE NEWTON E DE EULER-LAGRANGE: CASO AUTÓNOMO

e nun sistema conservativo, con enerxía potencial V , o *lagrangiano* do sistema é

$$\begin{aligned} L : S = Q \times \mathbb{R}^{3N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q^i, v^i) &\longmapsto L(q^i, v^i) = T(q^i, v^i) - (V \circ \tau)(q^i, v^i) = T(q^i, v^i) - V(q^i), \end{aligned}$$

sendo funcións do espazo de estados. Polo tanto, o lagrangiano é a enerxía cinética menos a enerxía potencial.

Definición 1.2. As ecuacións de *Euler-Lagrange* son o seguinte sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde sobre o espazo de estados

$$\frac{d}{dt} \Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (1.2)$$

cuxa solución é unha curva

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow Q \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (q^1(t), \dots, q^{3N}(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de configuración, e $\dot{\alpha}$ denota a curva levantamento tanxente de α , cuxa expresión é

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow Q \times \mathbb{R}^{3N} \\ t &\longmapsto \dot{\alpha}(t) = \left(q^1(t), \dots, q^{3N}(t), \frac{dq^1}{dt} \Big|_t, \dots, \frac{dq^{3N}}{dt} \Big|_t \right). \end{aligned}$$

é fácil ver que $\alpha^{(1)}(t)$ é curva integral do seguinte campo de vectores X_L sobre o espazo de estados S , dado por

$$X_L(q^i, v^i) = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{1}{m_i} \frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Teorema 1.3. Nun sistema conservativo, as ecuacións de Newton (1.1) son equivalentes ás ecuacións de Euler-Lagrange (1.2).

Demostración. Da definición 1.1, obtemos as seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = m_i v^i, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \circ \tau.$$

Sexa $\alpha(t)$ unha solución de (1.2), entón

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) = m_i v^i(\dot{\alpha}(t)) = m_i \frac{dq^i}{dt} \Big|_t, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \dot{\alpha}(t) = -\frac{\partial V}{\partial q^i} \circ \alpha(t),$$

polo tanto $\alpha(t)$ é solución de

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) = m_i \frac{d^2 q^i}{dt^2} \Big|_t + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0,$$

co que chegamos a que

$$m_i \frac{d^2 q^i}{dt^2} \Big|_t = -\frac{\partial V}{\partial q^i},$$

e dicir, $\alpha(t)$ é solución de (1.1).

O recíproco realízase de forma completamente análoga. □

Observación 1.4. A función lagrangiana contén toda a información dinámica do sistema. Unha das propiedades máis interesantes das ecuacións de Euler-Lagrange é que non dependen das coordenadas escollidas.

Capítulo 2

Ecuacións diferenciais de segundo orde en TQ

Un tipo importante de campos de vectores sobre o fibrado tanxente dunha variedade diferenciable, son os campos de vectores chamados ecuacións diferenciais de segundo orde, conocidos como semisprays ou como SODEs (do inglés, second order differential equation).

Neste capítulo imos ver que para obter as curvas integrais dun SODE, teremos que resolver un sistema de ecuacións diferenciais de segundo orde en \mathbb{R}^n , de ahí o seu nome.

Sexa Q unha variedade diferenciable de dimensión n , denotarase por τ_Q , á proxección canónica

$$\begin{aligned}\tau_Q &: TQ \longrightarrow Q \\ v_q &\mapsto q\end{aligned}$$

Se (q^i) son coordenadas locais en $U \subseteq Q$, entón as coordenadas locais inducidas en $TU = \tau_Q^{-1}(U)$ denótanse por

$$(q^i, v^i)$$

onde $1 \leq i \leq n$, e están definidas por

$$q^i(v_q) = q^i(\tau_Q(v_q)) = q^i(q), \quad v^i(v_q) = v_q(q^i) = dq^i(q)(v_q),$$

onde $v_q \in TQ$, e dicir

$$v_q = v^i(v_q) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q.$$

Estas coordenadas canónicas dotan a TQ dunha estrutura de variedade diferenciable de dimensión $2n$.

En coordenadas canónicas a proxección canónica $\tau_Q: TQ \rightarrow Q$ ven dada por

$$\tau_Q(q^i, v^i) = (q^i).$$

Para unha aplicación $h: M \rightarrow N$ entre dúas variedades, denotamos a diferencial usual como

$$h_*(m): T_m M \rightarrow T_{h(m)} N,$$

e a correspondente aplicación entre os espazos tanxentes por

$$\begin{aligned} Th &: TM \longrightarrow T_{h(m)} N \\ v_m &\mapsto Th(v_m) = h_*(m)(v_m). \end{aligned}$$

2.1. Campos de vectores en TQ

O primerio que nos fai falla, é introducir o concepto de vector tanxente a unha curva.

Dada $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ unha curva en Q , o vector tanxente $\dot{\alpha}$, a α no punto $\alpha(t)$ ven dado por

$$\begin{aligned} \alpha_*(t) &: T_t I \longrightarrow T_{\alpha(t)} Q \\ \frac{d}{dt} \Big|_t &\mapsto \alpha_*(t) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \dot{\alpha}(t) \end{aligned} ,$$

e a súa expresión local é

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_*(t) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \frac{d(q^i \circ \alpha)}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\alpha(t)} .$$

2.1.1. Levantamentos verticais de campos de vectores

Sexa $X_q \in T_q Q$ un vector tanxente en $q \in Q$. Para cada $v_q \in T_q Q$ consideramos a curva α_{X_q, v_q} en TQ dada por

$$\begin{aligned} \alpha_{X_q, v_q} &: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow TQ \\ t &\mapsto \alpha_{X_q, v_q}(s) = v_q + tX_q \end{aligned} ,$$

obviamente $\alpha_{X_q, v_q}(0) = v_q$

Chamaremos *levantamento vertical* de X_q a TQ no punto $v_q \in TQ$, ao vector tanxente a curva α_{X_q, v_q} en $t = 0$, é dicir

$$(X_q)^V(v_q) = \dot{\alpha}_{X_q, v_q}(0) = (\dot{\alpha}_{X_q, v_q})_*(0) \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) .$$

O vector $(X_p)^V(v_p)$ é vertical, o que quere dicir que a proxección por τ_Q é nula, en efecto,

$$(\tau_Q)_*(v_q)((X_q)^V(v_q)) = (\tau_Q)_*(v_q)(\dot{\alpha}_{X_q, v_q}(0)) = (\tau_Q \circ \alpha_{X_q, v_q})(0) = 0 \quad ,$$

dato que $\tau_Q \circ \dot{\alpha}_{X_q}$ é constante

$$(\tau_Q \circ \alpha_{X_q, v_q})(s) = \tau_Q(v_q + tX_q) = q ,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Imos calcular agora a súa expresión local, sendo X_q e v_q elementos que se escriben da seguinte forma

$$X_q = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q, \quad v_q = b^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q .$$

Como a expresión local da curva α_{X_p, v_q} é

$$\begin{aligned} \alpha_{X_p, v_q} &: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow TQ \\ t &\mapsto \alpha_{X_p, v_q}(t) = v_q + tX_q \equiv (q^i(q), b^i + ta^i), \end{aligned}$$

deducimos que

$$\begin{aligned} (X_p)^V(v_p) = \dot{\alpha}_{X_p}(0) &= \frac{dq^i(q)}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q} + \frac{d(b^i + ta^i)}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q} + a^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q} = a^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

polo tanto, localmente temos

$$\left[\frac{\partial}{\partial q^i} \right]^V = \frac{\partial}{\partial v^i} .$$

O levantamento vertical de vectores induce ao levantamento vertical de campos de vectores.

Sexa $X \in \mathfrak{X}(Q)$, defínese o *levantamento vertical* $X^V \in \mathfrak{X}(TQ)$ de X como segue

$$X^V(v_q) = (X(q))^V(v_q),$$

nun sistema de coordenadas canónicas, se

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i},$$

en (U, q^i) , entón de (2.1.1) dedúcese que

$$X^V = (X^i \circ \tau_Q) \frac{\partial}{\partial v^i},$$

en $(TU, (q^i, v^i))$.

◇,

2.1.2. Levantamentos completos de campos de vectores

Se X é un campo de vectores en Q , con grupo local 1-paramétrico de transformacións locais $\{h_s\}$, entón o grupo local 1-paramétrico de transformacións locais $\{Th_s\}$ xenera un campo de vectores X^C en TQ , o cal se chama *levantamento completo* de X a TQ .

Se localmente, en (U, q^i) ,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial q^i},$$

entón o levantamento completo ten a seguinte expresión

$$X^C = X^i \frac{\partial}{\partial q^i} + v^i \frac{\partial X^j}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial v^j}.$$

en coordenadas locais inducidas (q^i, v^i) .

Observación 2.1. Obsérvese que

$$\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^V = \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)^C = \frac{\partial}{\partial q^i}. \quad (2.2)$$

◇

2.1.3. Campo de vectores de Liouville

Consideremos agora un punto v_q na variedade TQ e a curva

$$\begin{aligned} \alpha_{v_q} &: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow TQ \\ t &\mapsto \alpha_{v_q}(t) = e^t v_p, \end{aligned}$$

pasando por v_q en tempo 0, é dicir, $\alpha_{v_q}(0) = v_q$.

Defínese o *campo de vectores de Liouville* $\Delta \in \mathfrak{X}(TQ)$ no punto v_q , como o vector tanxente en $t = 0$ á curva α_{v_q} , é dicir

$$\Delta(v_q) = \dot{\alpha}_{v_q}(0) = (\alpha_{v_q})_*(0) \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 \right) \in T_{v_q}(TQ).$$

Como a expresión local de α_{v_q} é

$$\alpha_{v_q}(t) = (q^i(q), e^t v^i)$$

obtense que a expresión local do campo de vectores de Liouville en coordenadas canónicas é

$$\Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (2.3)$$

2.2. Estructura tanxente canónica

De (2.2) dedúcese que os campos de tensores de tipo (1,1) están caracterizados pola súa acción nos levantamentos verticais e completos.

En cada punto $v_q \in TQ$ definimos o endomorfismo

$$J(v_q) : T_{v_q}(TQ) \rightarrow T_{v_q}(TQ)$$

como segue

$$J(v_q)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{v_q}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_q} \quad J(v_q)\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\Big|_{v_q}\right) = 0 \quad (2.4)$$

que induce un campo de tensores de tipo (1,1) en TQ caracterizado por

$$J(X^C) = X^V \quad J(X^V) = 0 \quad (2.5)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(Q)$, que se denomina *estructura tanxente canónica* en TQ .

De (2.4) e (2.5) dedúcese que a súa expresión local é

$$J = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i, \quad (2.6)$$

2.3. Sistema de ecuacións en derivadas de segundo orde: SODES

O primeiro que debemos recordar, antes de entrar nos SODEs, é o concepto de curva integral dun campo de vectores.

Definición 2.2. Unha *curva integral* dun campo de vectores X en Q , pasando polo punto $q \in Q$, é unha aplicación $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$, definida nun entorno aberto I de $0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$\alpha(0) = q, \quad \alpha_*(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_t \right) = X(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)}Q, \quad (2.7)$$

para todo $t \in I$, ou equivalentemente, α verifica

$$X(\alpha(t)) = \dot{\alpha} \quad \text{para todo } t \in I$$

é dicir, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & TQ \\ & \nearrow \dot{\alpha} & \uparrow X \\ I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & Q \end{array}$$

é conmutativo.

Sexa X un campo de vectores en M e $\alpha(t)$ unha curva integral de X , entón nun entorno coordenado $(U, \varphi \equiv (x^i))$ temos

$$\varphi(\alpha(t)) = (x^1(\alpha(t)), \dots, x^n(\alpha(t))) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

$$X^i(\alpha(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} = X(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t) = \alpha_*(t) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) = \frac{dx^i \circ \alpha}{dt} \Big|_t \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)},$$

ou equivalentemente

$$X^i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha(t) = \frac{d(\pi_i \circ \varphi \circ \alpha)}{dt} \Big|_t,$$

denotando $F^i = X^i \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(t)$ podemos afirmar que $(x^1(t), \dots, x^n(t))$ é curva integral de X se e só se

$$F^i(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \frac{dx^i}{dt} \Big|_t \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde $x^i = \pi_i \circ \varphi \circ \alpha$. Así, para obter as curvas integrais dun campo de vectores, temos que resolver un sistema de ecuacións diferenciais de primeiro orde en \mathbb{R}^n .

Unha clase importante de campos de vectores sobre o fibrado tanxente TQ dunha variedade diferenciable Q , son as ecuacións diferenciais de segundo orde, coñecidos como semisprays ou tamén como SODE's (do inglés, second order differential equation).

No desenvolvemento do formalismo simpléctico lagrangiano aparecen certas ecuacións de segundo orde definidas en TQ .

Nesta sección recordarase cales son os campos de vectores que dan lugar as ecuacións en derivadas de segundo orde.

Daremos tamén unha caracterización dos mesmos en termos da estrutura tanxente canónica e o campo de vectores de Liouville Δ .

2.3.1. Levantamento tanxente de curvas

O levantamento tanxente de curvas en Q a curvas en TQ , xeralízase como segue.

Definición 2.3. Dada unha curva $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow Q$ defínese o *levantamento tanxente*, ou *primeira prolongación*, $\alpha^{(1)}$ de α a TQ , da seguinte forma

$$\begin{aligned} \alpha^{(1)} : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow TQ \\ t &\rightarrow \alpha^{(1)}(t) = \alpha_*(t) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in T_{\alpha(t)}Q, \end{aligned} \quad (2.8)$$

é dicir, $\alpha^{(1)}(t)$ é o vector tanxente á curva $\alpha(t)$ en cada punto.

En coordenadas locais $\alpha(t) = (q^i \circ \alpha(t)) = (\alpha^i(t))$, entón a expresión local de $\alpha^{(1)}$ é

$$\alpha^{(1)}(t) = \left(\alpha^i(t), \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \right). \quad (2.9)$$

Da definición é obvio que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & TQ \\ & \nearrow \alpha^{(1)} & \downarrow \tau_Q \\ I \subset \mathbb{R} & \xrightarrow{\alpha} & Q \end{array}$$

é conmutativo.

◇

2.3.2. SODEs

Un campo de vectores nunha variedade arbitraria M é unha aplicación

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ m &\mapsto X(m) \in T_m M \end{aligned}$$

tal que

$$\tau_M \circ X = Id_M.$$

sendo $\tau_M : TM \rightarrow M$ a proxección canónica, dado que

$$\tau_M \circ X(m) = \tau_M(X(m)) = m.$$

Definición 2.4. Sexa Γ un campo de vectores sobre o fibrado tanxente TQ dunha variedade diferenciable Q . Polo visto anteriormente sabemos que $\tau_{TQ} \circ \Gamma = Id_{TQ}$, é dicir

$$\begin{array}{ccc} & & TQ \\ & \nearrow \tau_{TQ} & \downarrow \Gamma \\ T(TQ) & \xrightarrow{Id_{TQ}} & Q \end{array}$$

Diremos que Γ é un SODE si ademais se verifica

$$T\tau_Q \circ \Gamma = Id_{TQ}. \quad (2.10)$$

é dicir, se o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & TQ \\ & \nearrow T\tau_Q & \downarrow \Gamma \\ T(TQ) & \xrightarrow{Id_{TQ}} & Q \end{array}$$

é conmutativo.

Expresión local dun SODE:

Supoñamos que a expresión local dun SODE Γ ven dada por

$$\Gamma(v_q) = A^i(v_q) \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i(v_q) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Sabemos que

$$\begin{array}{ccc} \tau_Q : & TQ & \longrightarrow Q \\ & (q^i, v^i) & \longmapsto (q^i) \end{array}$$

e, ademáis

$$\begin{array}{ccc} T\tau_Q : & T(TQ) & \longrightarrow TQ \\ & (q^i, v^i, \dot{q}^i, \dot{v}^i) & \longmapsto (q^i, \dot{q}^i) \end{array}$$

é dicir

$$T\tau_Q \left(\dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q} + \dot{v}^i \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q} \right) = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q}$$

de onde deducimos que

$$T\tau_Q \circ \Gamma(v_q) = T\tau_Q \left(\Gamma(v_q) \right) = (\tau_Q)_*(v_q) \left(A^i(v_q) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q} + \Gamma^i(v_q) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_q} \right) = A^i(v_q) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_q}.$$

2.3. SISTEMA DE ECUACIONES EN DERIVADAS DE SEGUNDO ORDE: SODES 15

Por outra banda, de 2.10 sabemos que

$$T\tau_Q(\Gamma(v_q)) = Id_{TQ}(v_q) = v^i(v_q) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_q,$$

como consecuencia $A^i = v^i$ e a expresión local dun SODE quedáanos

$$\Gamma = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i}. \quad (2.11)$$

Proposición 2.5. *As curvas intregráís dun SODE Γ en TQ , son levantamentos tanxentes $\alpha^{(1)}$ de curvas α na variedade Q .*

Demostración. Sexa

$$\begin{aligned} \phi : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow TQ \\ t &\longmapsto \phi(t) = (a^i(t), b^i(t)) \end{aligned}$$

unha curva integral dun SODE. Tendo en conta a expresión local (2.11) do SODE temos

$$\Gamma(\phi(t)) = v^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\phi(t)} + \Gamma^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\phi(t)}$$

e como $\phi(t)$ é unha curva integral de Γ

$$\Gamma(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) = \frac{da^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\phi(t)} + \frac{db^i}{dt} \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\phi(t)}$$

obtemos que

$$b^i(t) = v^i(\phi(t)) = \frac{da^i}{dt} \quad \Gamma^i(\phi(t)) = \frac{db^i}{dt} \quad (2.12)$$

polo que as funcións $(a^i(t))$ son solucións do sistema de ecuacións de segundo orden

$$\Gamma^i \left(q^j(t), \frac{da^j}{dt} \Big|_t \right) = \frac{d^2 a^i}{dt^2} \Big|_t, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.13)$$

Sexa α un curva en Q definida como

$$\alpha = \tau_Q \circ \phi$$

entón

$$\alpha(t) = \tau_Q(\phi(t)) \equiv (a^i(t)),$$

así de (2.12) temos que

$$\alpha^{(1)}(t) = \dot{\alpha}(t) = \left(a^i(t), \frac{da^i}{dt} \Big|_t \right) = \phi(t)$$

□

Resumindo, seza Γ un SODE, e ϕ unha curva integral de Γ entón: ϕ é o levantamento tanxente da curva

$$\alpha = \tau_Q \circ \phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow TQ \rightarrow Q.$$

Definición 2.6. Se $\alpha^{(1)}(t)$ é curva integral do SODE Γ , a curva $\alpha(t)$ se denomina *solución* de Γ .

◇

Finalmente de (2.3), (2.6), e (2.11) dedúcese a seguinte proposición

Proposición 2.7. Un campo de vectores Γ en TQ é un SODE se e so se $J(\Gamma) = \nabla$.

□

2.4. Ecuacións de Euler-Lagrange e SODEs

Sexa $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ unha función arbitraria no espazo de estados TQ .

Recordemos que as ecuacións de *Euler-Lagrange* son o sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde dadas por

$$\frac{d}{dt} \Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

cuxa solución é unha curva

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow Q \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (q^1(t), \dots, q^{3N}(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de configuración Q .

As ecuacións (2.14) desenvolvidas son

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{dq^j}{dt} \Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{d^2 q^j}{dt^2} \Big|_t = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)}. \quad (2.15)$$

Definición 2.8. Un lagrangiano $L \in C^\infty(TQ)$ dise *regular* se o Hessiano de L con respecto ás coordenadas da fibra

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

ten rango máximo ($2n$) en todo punto de TQ .

Utilizando a xeometría simpléctica asociase a cada lagrangiano regular L un SODE Γ_L en TQ , cuxas solucións son solucións das ecuacións de Euler-Lagrange.

A expresión local de Γ_L é

$$\Gamma_L = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i} \quad (2.16)$$

onde as funcións $\Gamma^i(q^i, v^i)$ son solución do sistema

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \Gamma^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (2.17)$$

Así se $\alpha(t) = (q^i(t))$ é solución de Γ_L , dedúcese de (2.13) e das ecuacións anteriores (3.14) que $\alpha(t) = (q^i(t))$ é solución das Ecuacións de Euler-Lagrange (2.15)

2.5. Exemplo: Péndulo simple

Consideremos unha partícula de masa m que colga dun soporte mediante unha corda, de masa despreziable e lonxitude l , nun campo gravitacional. Supoñamos que o eixo Z é perpendicular ao “papel” e que a masa, que se move no plano XY , atópase desviada un ángulo θ da posición de equilibrio.

Neste caso, Q é a semicircunferencia

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = l^2, x < 0, z = 0\},$$

que se a expresamos en función do ángulo θ temos

$$Q = \{(l \cos \theta, l \sin \theta, 0) / \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\}.$$

Polo tanto, as posibles posicións da partícula quedan determinadas por θ e as coordenadas en TQ son $(q, v) = (\theta, v_\theta)$.

O lagrangiano (regular) do sistema neste exemplo é

$$\begin{aligned} L: \quad TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, v_\theta) &\longmapsto L(\theta, v_\theta) = T - V = \frac{1}{2} m l^2 v_\theta^2 + m g \cos \theta, \end{aligned}$$

que é a enerxía cinética menos a enerxía potencial.

Facendo as derivadas parciais de L obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m g l \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial v_\theta} = m l^2 v_\theta, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial v_\theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial v_\theta \partial v_\theta} = m l^2$$

e po lo tanto de (2.17) temos

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial v_\theta} v_\theta + \frac{\partial^2 L}{\partial v_\theta \partial v_\theta} \Gamma^\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

é dicir

$$m l^2 \Gamma^\theta = -m g l \operatorname{sen} \theta$$

De 2.16 tenemos que a expresión local do SODE Γ_L é

$$\Gamma_L = v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \Gamma^\theta \frac{\partial}{\partial v_\theta} = v_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial}{\partial v_\theta}.$$

Sexa $\phi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow TQ$ con $\phi(t) = (\theta(t), v_\theta(t))$ unha curva integral de Γ_L , entón

$$\Gamma_L(\phi(t)) = v_\theta(t) \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\phi(t)} - \frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta(t) \frac{\partial}{\partial v_\theta} \Big|_{\phi(t)} \quad (2.18)$$

e por outro lado

$$\Gamma_L(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) = \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\phi(t)} + \frac{dv_\theta}{dt} \frac{\partial}{\partial v_\theta} \Big|_{\phi(t)}. \quad (2.19)$$

De (2.18) e (2.19) deducimos que

$$v_\theta(t) = \frac{d\theta}{dt} \quad , \quad -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta = \frac{dv_\theta}{dt}$$

é dicir, o movemento da partícula $\theta(t)$ queda determinado pola seguinte ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \theta.$$

Capítulo 3

Ecuacións diferenciais de segundo orde en $\mathbb{R} \times TQ$

3.1. Estructuras canónicas en $\mathbb{R} \times TQ$

Todo entorno (U, q^i) en Q induce o entorno coordenado (TU, q^i, v^i) , e o conseguinte sistema de coordenadas *canónicas* (t, q^i, v^i) en $\mathbb{R} \times TU \subseteq \mathbb{R} \times TQ$ de forma que

$$t(s, v_p) = s, \quad q^i(s, v_p) = q^i(p), \quad v^i(s, v_p) = v^i(v_p) \quad i = 1, \dots, n.$$

Da mesma forma, podemos considerar o espazo tanxente, á variedade $\mathbb{R} \times TQ$ en cada punto

$$T_{(t, v_q)}(\mathbb{R} \times TQ)$$

e o seu espazo dual,

$$T_{(t, v_q)}^*(\mathbb{R} \times TQ)$$

cuxas bases son

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t, v_p)}, \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_{(t, v_p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial q^n} \Big|_{(t, v_p)}, \frac{\partial}{\partial v^1} \Big|_{(t, v_p)}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n} \Big|_{(t, v_p)} \right\}$$

e

$$\{ dt(t, v_p), dq^1(t, v_p), \dots, dq^n(t, v_p), dv^1(t, v_p), \dots, dv^n(t, v_p) \}$$

repectivamente.

3.1.1. Campo de Liouville e endomorfismo canónico en $\mathbb{R} \times TQ$

O isomorfismo

$$T_{(t,v_p)}(\mathbb{R} \times TQ) \quad \equiv \quad T_t\mathbb{R} \oplus T_{v_p}(TQ)$$

$$a \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,v_p)} + A^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(t,v_p)} + B^j \frac{\partial}{\partial v^j} \Big|_{(t,v_p)} \quad \equiv \quad \left(a \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t, A^i \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{v_p} + B^j \frac{\partial}{\partial v^j} \Big|_{v_p} \right)$$

nos permite extender o campo de vectores de Liouville Δ e a estrutura tanxente J en TQ , a un campo de vectores e a un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ en $\mathbb{R} \times TQ$, para os que utilizaremos a mesma notación que os correspondentes en TQ .

Definimos o campo de vectores de Liouville en $\mathbb{R} \times TQ$ como segue

$$\Delta(t, v_p) = (0, \Delta(v_p)) \equiv \left(0 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t, v^i(v_p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{v_p} \right) \equiv v^i(v_p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{(t,v_p)}$$

e definimos o campo de tensores de tipo $(1, 1)$ en $\mathbb{R} \times TQ$ do seguinte xeito

$$J(t, v_p) : T_{(t,v_p)}(\mathbb{R} \times TQ) \longrightarrow T_{(t,v_p)}(\mathbb{R} \times TQ)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,v_p)} \quad \rightarrow \quad J(t, v_p) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,v_p)} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(t,v_p)} \quad \rightarrow \quad J(t, v_p) \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{(t,v_p)} \right) = \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{(t,v_p)}$$

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{(t,v_p)} \quad \rightarrow \quad J(t, v_p) \left(\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{(t,v_p)} \right) = 0$$

En coordenadas canónicas, as súas expresións locais son

$$\Delta(t, v_p) = v^i(v_p) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{(t,v_p)} \quad J(t, v_p) = \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{(t,v_p)} \otimes dq^i(t, v_p). \quad (3.1)$$

Introducimos agora o campo de tensores \tilde{J} de tipo $(1, 1)$ en $\mathbb{R} \times TQ$

$$\tilde{J} = J - \Delta \otimes dt,$$

cuxa expresión local é

$$\tilde{J} = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i - (v^i \frac{\partial}{\partial v^i}) \otimes dt = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes (dq^i - v^i dt)$$

as 1-formas

$$\theta^i = dq^i - v^i dt, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

se denominan formas de contacto.

3.2. SODES

3.2.1. Prolongación de curvas

Definición 3.1. Sexa

$$\begin{aligned} \alpha: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow Q \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = (\alpha^i(t)) = (q^i \circ \alpha(t)) \end{aligned}$$

unha curva en Q .

A *primeira prolongación* de α é a curva

$$\begin{aligned} \alpha^{[1]}: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times TQ \\ t &\longrightarrow \alpha^{[1]}(t) \equiv (t, \alpha^{(1)}(t)) \equiv \left(t, \alpha_*(t) \frac{d}{dt} \Big|_t \right) \in \mathbb{R} \times T_{\alpha(t)}Q \end{aligned} \quad (3.3)$$

En coordenadas locais, se

$$\alpha(t) = (\alpha^i(t)) = (q^i \circ \alpha(t))$$

entón

$$\alpha^{[1]}(t) \equiv \left(t, \alpha^i(t), \frac{d\alpha^i}{dt} \Big|_t \right) \quad (3.4)$$

Definición 3.2. Un campo de vectores Γ en $\mathbb{R} \times TQ$ dise que é un sistema de ecuacións diferenciais de segundo orde (SODE) se

$$dt(\Gamma) = 1, \quad \tilde{J}(\Gamma) = 0,$$

ou equivalentemente

$$dt(\Gamma) = 1, \quad \theta^i(\Gamma) = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.5)$$

Expresión local dún SODE:

Sexa

$$\Gamma = A \frac{\partial}{\partial t} + B^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

de (3.5) temos

$$A = dt(\Gamma) = 1$$

e po lo tanto

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + B^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

por outra parte

$$0 = \theta^i(\Gamma) = dq^i - v^i dt(\Gamma) = B^i - v^i$$

e polo tanto a expresión local do SODE é

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i} \quad (3.6)$$

Proposición 3.3. *As curvas integrais dun SODE Γ en $\mathbb{R} \times TQ$, son levantamentos tanxentes $\alpha^{[1]}$ de curvas α na variedade Q .*

Estas curvas α chámanse solucións de Γ .

Demostración. Sexa

$$\begin{aligned} \phi : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \times TQ \\ t &\longmapsto \phi(t) = (f(t), a^i(t), b^i(t)) \end{aligned}$$

unha curva integral dun SODE. Tendo en conta a expresión local (3.6) do SODE temos

$$\Gamma(\phi(t)) = \frac{\partial}{\partial t} + v^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\phi(t)} + \Gamma^i(\phi(t)) \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\phi(t)}$$

e como $\phi(t)$ é unha curva integral de Γ

$$\Gamma(\phi(t)) = \dot{\phi}(t) = f'(t) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{da^i}{dt} \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\phi(t)} + \frac{db^i}{dt} \frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{\phi(t)}$$

obtemos que

$$f'(t) = 1, \quad b^i(t) = v^i(\phi(t)) = \frac{da^i}{dt} \quad \Gamma^i(\phi(t)) = \frac{db^i}{dt} \quad (3.7)$$

polo que a curva ϕ ven dada por

$$\phi(t) = \left(t, a^i(t), \frac{da^i}{dt} \Big|_t \right)$$

onde as funcións $(a^i(t))$ son solucións do sistema de ecuacións de segundo orden

$$\Gamma^i \left(t, q^j(t), \frac{dq^j}{dt} \Big|_t \right) = \frac{d^2 a^i}{dt^2} \Big|_t, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sexa α un curva en Q definida como

$$\alpha = pr_2 \circ \tau_Q \circ \phi$$

onde $pr_2 : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow TQ$ é a proxección no segundo factor, entón

$$\alpha(t) = \tau_Q(\phi(t)) \equiv (a^i(t)),$$

así de (3.7) temos que

$$\alpha^{[1]}(t) = (t, \dot{\alpha}(t)) = \left(t, a^i(t), \frac{da^i}{dt} \Big|_t \right) = \phi(t)$$

□

3.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange e SODEs

Sexa $L : \mathbb{R} \times TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función lagrangiana.

Recordemos agora, que no caso dependente do tempo, as ecuacións de *Euler-Lagrange* son o sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde dadas por

$$\frac{d}{dt} \Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \alpha^{[1]}(t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \alpha^{[1]}(t) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 3N, \quad (3.8)$$

cuxa solución é unha curva

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow Q \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (q^1(t), \dots, q^{3N}(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de configuración Q .

Definición 3.4. Un lagrangiano $L \in C^\infty(\mathbb{R} \times TQ)$ dise *regular* se o Hessiano de L con respecto ás coordenadas da fibra

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

ten rango $2n$ en todo punto de $\mathbb{R} \times TQ$.

Utilizando a xeometría cosimpléctica asóciase a cada lagrangiano regular L un SODE Γ_L en $\mathbb{R} \times TQ$, cuxas solucións son solucións das ecuacións de Euler-Lagrange.

A expresión local de Γ_L é

$$\Gamma_L = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i} \quad (3.9)$$

onde as funcións $\Gamma^i(t, q^i, v^i)$ son solución do sistema

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \Gamma^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (3.10)$$

Sexa $L : \mathbb{R} \times TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ unha función arbitraria no espazo de estados TQ .

Recordemos que as ecuacións de *Euler-Lagrange* son o sistema de ecuacións diferenciais de segunda orde dadas por

$$\frac{d}{dt} \Big|_t \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \circ \dot{\alpha}(t) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.11)$$

cuxa solución é unha curva

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow Q \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (q^1(t), \dots, q^{3N}(t)) \end{aligned}$$

sobre o espazo de configuración Q .

As ecuacións (3.11) desenvolvidas son

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial v^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial v^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{dq^j}{dt} \Big|_t + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)} \frac{d^2 q^j}{dt^2} \Big|_t = \frac{\partial L}{\partial q^i} \Big|_{\dot{\alpha}(t)}. \quad (3.12)$$

Definición 3.5. Un lagrangiano $L \in C^\infty(\mathbb{R} \times TQ)$ dize *regular* se o Hessiano de L con respecto ás coordenadas da fibra

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \right)$$

ten rango máximo $(2n)$.

Utilizando a xeometría cosimpléctica se asocia a cada lagrangiano regular L un SODE Γ_L en $\mathbb{R} \times TQ$, cuxas solucións son solucións das ecuacións de Euler-Lagrange.

A expresión local de Γ_L é

$$\Gamma_L = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma^i \frac{\partial}{\partial v^i} \quad (3.13)$$

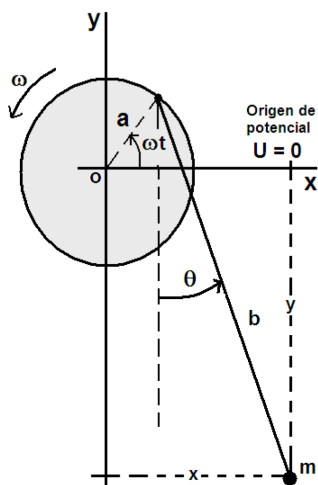
donde as funcións $\Gamma^i(q^i, v^i)$ son solución do sistema

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial v^j} v^j + \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} \Gamma^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} \quad (3.14)$$

Así se $\alpha(t) = (q^i(t))$ é solución de Γ_L , dedúcese de (2.13) e das ecuacións anteriores (3.14) que $\alpha(t) = (q^i(t))$ é solución das Ecuaciones de Euler-Lagrange (2.15)

3.4. Exemplo: Péndulo simple que se move sobre un anel

O punto de soporte para un péndulo simple de lonxitude b e masa pendular m móvese sobre un anel (de masa despreziable) de radio a con velocidade angular ω constante.



Polo tanto, as posibles posicións da partícula, espacio de configuración Q quedan determinadas por θ e as coordenadas en $\mathbb{R} \times TQ$ son $(t, q, v) = (t, \theta, v_\theta)$.

O lagrangiano (regular) do sistema neste exemplo é

$$L(t, \theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} [a^2 \omega^2 + b^2 v_\theta^2 + 2 b v_\theta a \omega \operatorname{sen}(\theta - \omega t)] - m g [a \operatorname{sen}(\omega t) - b \cos \theta]$$

e obtense que osODE asociado é

$$\begin{aligned} \Gamma_L &= \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \Gamma(t, \theta, \dot{\theta}) \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\omega^2 a}{b} \cos(\theta - \omega t) - \frac{b}{g} \operatorname{sen} \theta \right) \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \end{aligned}$$

A curva $t \rightarrow \theta(t) \in Q$, solución de Γ_L , verifica que é solución da ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{\omega^2 a}{b} \cos(\theta - \omega t) - \frac{b}{g} \operatorname{sen} \theta$$

e $\theta(t)$ proporciona o movemento da masa m .

Bibliografía

- [1] Abraham, R., and Marsden, J.E. *Foundations of Mechanics*, second edition, revised, enlarged, reset. Benjamin/Cummings, Reading, 1978.
- [2] Cannas Da Silva, A., *Lectures on Symplectic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.
- [3] Curtis, W. D., and Miller, F. R., *Differential manifolds and theoretical physics*, Academic Press, INC 1985.
- [4] De León, M., Rodrigues, P.R. *Methods of differential geometry in analytical mechanics*, North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.
- [5] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1959.
- [6] Libermann, P., and C-M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics*, Kluwer Academic 1987
- [7] Ratiu, T. S., Tudoran, R., Sbano, L., Dias, E., and Terra, G., A Crash Course in Geometric Mechanics, *Geometric Mechanics and Symmetry: The Peyresq Lectures*, In Montaldi, J. and Ratiu, T. (Eds.), 2005.
- [8] Weyl, H., *The Classical Groups: their invariants and representations*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1939.