



FACULTADE DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Balbina Virginia
Casas Méndez

Tese de doutoramento

Conceptos de solución en
juegos cooperativos con
comunicación restringida
mediante grafos

Santiago de Compostela, 1996

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Departamento de Estatística e Investigación Operativa

CONCEPTOS DE SOLUCIÓN
EN JUEGOS COOPERATIVOS
CON COMUNICACIÓN RESTRINGIDA
MEDIANTE GRAFOS

John J. Nash, Jr.

Balbina V. Casas Méndez
Junio, 1996



Centro de Impresión Digital
Rosalía de Castro, 58 - SANTIAGO
D.L. C-1593

NINO

Realizado el acto público de Defensa y Mantenimiento de esta Tesis Doctoral el día 12 de septiembre de 1996, en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, ante el Tribunal formado por:

Presidente : Dr. D. José Antonio Cristobal Cristobal
Vocales : Dr. D. Francesc Carreras Escobar
 : Dr. D. Emilio Calvo Ramón
 : Dra. Doña María Gloria Fiestras Janeiro
Secretario : Dr. D. Ignacio García Jurado

obtuvo la máxima calificación de APTO CUM LAUDE, siendo el Dr. D. José Manuel Prada Sánchez su Director.

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento al Profesor José Manuel Prada Sánchez, por haber dirigido este trabajo.

También debo agradecer al Profesor Ignacio García Jurado las valiosas sugerencias y el apoyo ofrecido durante la realización de dicho trabajo.

Mi reconocimiento hacia todos mis compañeros del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Santiago, a mis compañeros del Tercer Ciclo y a los miembros del grupo de Teoría de Juegos de Galicia, que me han proporcionado un estimulante ambiente de trabajo.

Deseo agradecer su colaboración en la investigación a los Profesores Margarita Vázquez y Gustavo Bergantiños y la ayuda proporcionada en materia informática por mis compañeros César, Carlos, Manolo y Quindi.

Finalmente debo hacer constar que este trabajo se ha beneficiado de los proyectos de investigación: "Nuevos modelos, soluciones y algoritmos en juegos no cooperativos. Aplicaciones a la economía", subvencionado por la Universidad de Santiago de Compostela, "El papel de la comunicación entre los jugadores en diversos modelos de la teoría de juegos", "Soluciones en juegos cooperativos con condicionamientos exógenos" y "Formación de coaliciones en situaciones económicas", subvencionados por la Xunta de Galicia y "Comportamientos estratégicos: la teoría de los Juegos", subvencionado por la D.G.I.C.Y.T.

A mis padres.

Indice

Introducción	3
1. Preliminares	11
1.1. Juegos en forma extensiva	11
1.2. Conceptos de solución en juegos en forma extensiva	15
2. Juegos con utilidad transferible	19
2.1. Introducción	19
2.2. Conceptos de solución en juegos TU	20
2.2.1. El núcleo	21
2.2.2. El valor de Shapley	22
2.3. Situaciones TU con comunicación	26
2.4. Conceptos de solución en situaciones CTU	27
2.4.1. El valor de Myerson	28
2.4.2. El valor posicional	30
3. Juegos de negociación simple	35
3.1. Introducción	35
3.2. Conceptos de solución en juegos NS	36
3.2.1. Las soluciones de Nash	37
3.2.2. Las soluciones de Kalai-Smorodinsky	40

3.3. Situaciones de negociación con comunicación	48
3.4. Conceptos de solución en situaciones CNS	48
3.4.1. Solución de Nash ponderada por el grafo	49
3.4.2. Valor de compromiso ponderado por el grafo	58
3.4.3. Obtención de una solución por aproximación estratégica ..	62
4. Juegos sin utilidad transferible	75
4.1. Introducción	75
4.2. Conceptos de solución en juegos NTU	76
4.2.1. El núcleo	77
4.2.2. La correspondencia de Shapley	78
4.2.3. El MC-valor	81
4.3. Situaciones NTU con comunicación	82
4.4. Conceptos de solución en situaciones CNTU	83
4.4.1. La correspondencia posicional	83
4.4.2. La correspondencia de Myerson	101
4.4.3. El valor posicional NTU	103
Conclusiones	115
Símbolos y notación básica	119
Bibliografía	123

Introducción

La teoría de juegos es una disciplina matemática que estudia situaciones conflictivas en las que intervienen dos o más jugadores y de cuyas acciones depende el resultado final de la situación.

Se puede considerar la teoría de juegos como una teoría normativa en el sentido de que prescribe lo que cada jugador, al que se supone completamente racional, debería hacer en un juego con el objetivo de optimizar sus ganancias. No se puede considerar una teoría descriptiva puesto que la suposición de completa racionalidad no se corresponde a menudo con lo que ocurre en las situaciones reales.

En 1928, von Neumann publicó el que se considera el primer trabajo importante de la teoría de juegos, en el contexto de los juegos bipersonales de suma cero y en 1944, von Neumann y Morgenstern publican un libro ya clásico en esta disciplina, *Theory of Games and Economic Behavior*. A partir de ese momento, la teoría de juegos se ha ido desarrollando gradualmente y se ha convertido en una herramienta importante para la modelización de muchos problemas de las ciencias económicas y políticas, fundamentalmente.

En general la teoría de juegos se divide en teoría de juegos cooperativos y teoría de juegos no cooperativos. Asimismo los juegos cooperativos se clasifican tradicionalmente en juegos con utilidad transferible, juegos de regateo y juegos sin utilidad transferible.

En los juegos cooperativos se supone que están permitidos los acuerdos vinculantes entre los jugadores. En la teoría clásica, se supone que no hay limitaciones a la hora de cooperar entre los jugadores. El interés radica entonces en el resultado que los jugadores pueden obtener de forma individual y de forma conjunta, aunque no se indique la forma de obtener dicho resultado.

En este trabajo se estudian juegos cooperativos en los que existen restricciones a la comunicación entre los jugadores, las cuales modelizaremos utilizando un grafo definido sobre el conjunto de los jugadores. Para este tipo de

situaciones se hace una revisión de la literatura más relevante relativa a conceptos de solución y se proponen nuevos conceptos de solución y resultados. El primer trabajo en esta línea de investigación es debido a Myerson (1977) y en él se propone un concepto de solución o regla de reparto para juegos con utilidad transferible en los que la comunicación está restringida. Algunos trabajos posteriores son el de van den Nouweland y Borm (1991), en el que se estudian propiedades de juegos inducidos por otros en los que la comunicación está restringida, el de Borm, Owen y Tijs (1992), en el que se propone otro concepto de solución para juegos con utilidad transferible en los que la comunicación está restringida: el valor posicional, y el de van den Nouweland (1993) en el que se revisan los trabajos anteriores y se proponen nuevos conceptos así como aplicaciones.

Hemos de indicar que otros autores abordan el estudio de juegos cooperativos con comunicación restringida, modelizando de diferentes formas dichas restricciones a la comunicación.

Así en Aumann y Dreze (1974) y Owen (1977) se supone la existencia de una partición del conjunto de jugadores en un sistema de coaliciones a priori. En Myerson (1980) y van den Nouweland, Borm y Tijs (1992) se consideran conjuntos de dos o más jugadores que pueden cooperar juntos por presentar afinidades. En Vázquez Brage, García Jurado y Carreras (1996) se consideran simultáneamente coaliciones a priori y grafos definidos sobre el conjunto de jugadores.

Dedicamos los capítulos 2, 3 y 4 de este trabajo a presentar diferentes conceptos de solución para juegos cooperativos en los que la comunicación está restringida, centrándonos en cada capítulo en una de las tres clases de juegos cooperativos: juegos con utilidad transferible, juegos de regateo y juegos sin utilidad transferible. Al presentar los conceptos de solución utilizaremos en algunos casos el procedimiento axiomático y en otros el procedimiento estratégico. El procedimiento axiomático consiste en el estudio de las propiedades de los conceptos de solución y en tratar de caracterizar, por medio de esas propiedades, una solución o clase de soluciones. El procedimiento estratégico consiste en que a partir del juego cooperativo se describe el proceso de negociación entre los jugadores por medio de un juego no cooperativo y se estudian las estrategias en equilibrio de este último. El pago de dichas estrategias nos proporciona una solución al juego cooperativo.

Puesto que al seguir el procedimiento estratégico vamos a hacer uso de algunos conceptos relacionados con la teoría de juegos no cooperativos, dedicamos

el capítulo 1 a la exposición de los mismos. En los juegos no cooperativos se supone que no están permitidos los acuerdos vinculantes entre los jugadores y el interés en este tipo de juegos radica en las acciones que cada jugador puede adoptar y en el resultado que todas las acciones conjuntamente proporcionan a cada jugador. Dicha exposición se basa en gran parte en Van Damme (1991). Explicamos la forma extensiva de un juego, que es una de las formas que clásicamente se utiliza para modelizar un juego no cooperativo y se recuerda algún concepto de solución en este contexto, concretamente el equilibrio de Nash y el equilibrio perfecto en subjuegos.

En la primera parte del capítulo 2 se estudian juegos cooperativos con utilidad transferible en los que son relevantes todas las posibles coaliciones o subconjuntos de jugadores. Un concepto de solución es una aplicación que a cada juego le hace corresponder un vector que indica el pago final que debe recibir cada jugador. Se definen y estudian propiedades de dos de los conceptos de solución más conocidos en esta clase de juegos: el núcleo y el valor de Shapley. Esta última solución existe para cualquier juego y además tanto en su definición como en las propiedades que verifica tiene como soporte el principio de justicia en el reparto. El núcleo de un juego, sin embargo, puede ser vacío o contener más de un punto y en su definición aparece claramente el principio de estabilidad. Por ello son interesantes resultados que relacionen ambos conceptos; en particular se proporcionan condiciones suficientes para que el valor de Shapley de un juego sea un elemento del núcleo. Esta primera parte del capítulo se basa fundamentalmente en los trabajos de Gillies (1953), Shapley (1953), Young (1985), Shapley (1971) y Friedman (1991).

En la segunda parte de este capítulo se estudian situaciones TU con comunicación, es decir, juegos con utilidad transferible en los que existen restricciones a la comunicación entre los jugadores. Este tipo de situaciones generalizan a los juegos TU clásicos pues cuando en una situación con comunicación el grafo conecta a todos los jugadores, estamos ante un juego TU clásico. En este nuevo contexto se estudian otros dos conceptos de solución, basados en el valor de Shapley, que son el valor de Myerson y el valor posicional. Se definen juegos con utilidad transferible que de forma natural son inducidos por una situación TU con comunicación y nuevamente se trata de conciliar los principios de justicia en el reparto y estabilidad por medio de resultados que relacionan el valor de Myerson y el valor posicional de la situación TU con el núcleo del juego TU inducido. Esta exposición está basada en Myerson (1977), Borm, Owen y Tijs (1992), van den Nouweland y Borm (1991) y van den Nouweland (1993).

En la primera parte del capítulo 3 se estudian juegos cooperativos de negociación simple, también denominados juegos de regateo, que son aquellos en los que la única coalición relevante es la formada por todos los jugadores. Además en este tipo de juegos no se supone, en general, que la utilidad sea transferible. Se definen y estudian propiedades de dos conceptos de solución en esta clase de juegos: la solución simétrica de Nash y la solución simétrica de Kalai-Smorodinsky. Esta última solución tiene la peculiaridad de que se define como un valor de compromiso entre un cierto vector de pagos mínimos a los jugadores y un vector de pagos máximos.

Una de las propiedades o axiomas que se utilizan para caracterizar estas soluciones es la de simetría. Esta propiedad recoge la idea de que si en un juego dos jugadores son indistinguibles, la solución les debe dar a los dos el mismo pago. Al eliminar del sistema de axiomas que caracterizan la solución simétrica de Nash la propiedad de simetría queda caracterizada toda una familia de soluciones genéricamente denominadas soluciones de Nash ponderadas. De forma análoga, al eliminar la propiedad de simetría del conjunto de axiomas que caracterizan a la solución simétrica de Kalai-Smorodinsky queda caracterizada la familia de soluciones no simétricas de Kalai-Smorodinsky. Este tipo de soluciones, que no verifican el axioma de simetría, son adecuadas para obtener la solución de juegos en los que entre los jugadores existe algún tipo de asimetría, por ejemplo cuando los jugadores son realmente grupos de individuos de diferente tamaño. En este sentido, a juicio de algunos autores, la familia de soluciones no simétricas de Kalai-Smorodinsky puede ser demasiado amplia para reflejar la asimetría entre los jugadores. Se estudia por ello una tercera familia, menos amplia, la de las soluciones ponderadas de Kalai-Smorodinsky. Esta parte del capítulo se basa fundamentalmente en los trabajos de Nash (1950), Kalai-Smorodinsky (1975), Roth (1977), Kalai (1977), Roth (1979), Peters y Tijs (1994), Peters y Tijs (1985), Peters (1992) y Gutiérrez (1993).

Una clase interesante de juegos cooperativos donde el efecto de las restricciones a la comunicación no había sido explorado todavía es la clase de los juegos de regateo. Por supuesto, en un juego de regateo se necesita el consenso de todos los jugadores para alcanzar un acuerdo, por lo que el grafo de comunicación debe ser conexo, es decir, comunicar a todos los jugadores directa o indirectamente. Ahora bien, es posible que ciertos pares de jugadores sean incapaces de comunicarse directamente y entonces algún jugador puede tener una posición predominante en el proceso de negociación por estar mejor

”situado” en el grafo de comunicación. Estos aspectos no simétricos de la situación deben ser considerados por la solución final si se quiere proponer una solución justa para los jugadores.

En la segunda parte del capítulo 3 se estudian situaciones de negociación con comunicación, es decir, juegos de negociación en los que existen restricciones a la comunicación entre los jugadores. En este trabajo se proponen tres conceptos diferentes de solución en este contexto. Los dos primeros se introducen utilizando el procedimiento axiomático. El primero de estos conceptos de solución resulta ser una solución de Nash ponderada del juego de regateo, cuyo peso se obtiene teniendo en cuenta el grafo que modeliza las restricciones a la comunicación. El segundo concepto de solución resulta ser una solución de Kalai-Smorodinsky ponderada en la que el peso se obtiene utilizando el grafo de comunicación. Hemos denominado a estos dos conceptos de solución solución de Nash ponderada por el grafo y valor de compromiso ponderado por el grafo, respectivamente.

Una tercera solución se propone utilizando el procedimiento estratégico. Siguiendo algunas de las ideas utilizadas en Moulin (1984), a partir de la situación de negociación con comunicación se propone un juego en forma estratégica que describe el proceso de negociación entre los jugadores y del cual se estudian los equilibrios perfectos en subjuegos. El pago a dichos equilibrios resulta ser único y este pago se propone como solución a la situación de negociación con comunicación. Se estudian propiedades de este nuevo concepto de solución y se proporcionan dos procedimientos de obtención, uno como un valor de compromiso y otro semejante a la definición del valor posicional TU. Parte de esta segunda mitad del capítulo 3 se basa en Casas, García-Jurado y Prada-Sánchez (1996).

En el capítulo 4 se estudian en una primera parte juegos cooperativos sin utilidad transferible, en los que pueden ser relevantes todas las posibles coaliciones y en los que no se supone en general que la utilidad sea transferible. Esta clase de juegos generaliza tanto los juegos de regateo como a los juegos con utilidad transferible. En ella un concepto de solución será en principio una correspondencia que a cada juego le asigna un conjunto de vectores de pagos. Se definen y estudian propiedades de dos conceptos de solución: el núcleo y la correspondencia de Shapley. En la definición del núcleo de juegos sin utilidad transferible, que generaliza al núcleo de los juegos con utilidad transferible, se mantiene el principio de estabilidad. La correspondencia de Shapley generaliza a la solución simétrica de Nash para juegos de regateo y al valor de Shapley

con utilidad transferible y como éste persigue un reparto justo. Núcleo y correspondencia de Shapley se relacionan por medio de condiciones suficientes para que los valores de Shapley sin utilidad transferible sean elementos del núcleo.

Se estudia también un tercer concepto de solución conocido en la literatura como el MC-valor. Está definido sobre una clase de juegos sin utilidad transferible que son los juegos monótonos. El interés del MC-valor radica en que, para la clase de juegos monótonos, existe siempre y es único; además, generaliza al valor de Shapley para juegos TU y la solución de Kalai-Smorodinsky para juegos de regateo.

Esta primera parte del capítulo se basa en Shapley (1969), Rosenmuller (1981), Aumann (1985), Kern (1985) y Otten, Borm, Peleg y Tijs (1994).

En la segunda parte del capítulo 4 se estudian situaciones sin utilidad transferible con comunicación, es decir, juegos sin utilidad transferible en los que existen restricciones a la comunicación. Naturalmente, este tipo de situaciones generalizan a los juegos sin utilidad transferible, a las situaciones con utilidad transferible con comunicación y a las situaciones de regateo con comunicación. Para este tipo de situaciones, en van den Nouweland (1993) y siguiendo las ideas de la definición de la correspondencia de Shapley se definen dos conceptos de solución, la correspondencia de Myerson y la correspondencia posicional que generalizan respectivamente al valor de Myerson y al valor posicional de las situaciones TU con comunicación. A partir de estas dos definiciones, en este trabajo probamos que la correspondencia posicional generaliza la solución de Nash ponderada por el grafo, introducida en el capítulo 3, mientras que la correspondencia de Myerson generaliza a la solución simétrica de Nash. Siguiendo las ideas de Kern (1985) y Aumann (1985) se proporcionan condiciones para que las correspondencias posicional y de Myerson sean no vacías. Se estudian propiedades de estos conceptos de solución y se obtienen sendas caracterizaciones axiomáticas. A partir del juego sin utilidad transferible, que de forma natural induce una situación sin utilidad transferible con comunicación, se obtienen resultados que relacionan la correspondencia de Myerson y la correspondencia posicional de la situación con comunicación con el núcleo del juego NTU inducido.

La correspondencia posicional y la correspondencia de Myerson tienen la particularidad de que no existen para toda situación con comunicación, y si existen, en general pueden proporcionar más de un vector de pagos como solución. Proponemos un tercer concepto de solución, el valor posicional NTU,

que no existe para todas las situaciones con comunicación pero que cuando existe proporciona un único vector de pagos como solución. Se prueba que el valor posicional NTU generaliza al valor posicional de las situaciones TU y a la solución propuesta en el capítulo 3 para situaciones de negociación con comunicación y obtenida mediante aproximación estratégica. Además se estudian propiedades de este nuevo concepto de solución.

Hemos de hacer notar que no incluimos la demostración de los resultados que no son originales. De todas formas, en la mayoría de los casos se obtienen como caso particular de las demostraciones de los resultados originales.

Terminamos este trabajo con un apartado de conclusiones, en el que se relacionan todas las soluciones presentadas, un resumen de la notación utilizada y la bibliografía más relevante que hemos empleado.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Juegos en forma extensiva

En los juegos no cooperativos, al contrario que en los cooperativos, se supone que no están permitidos los acuerdos vinculantes entre los jugadores. Se supone además que los jugadores son completamente racionales y que el objetivo de cada jugador es maximizar la ganancia que puede obtener en el juego. En esta clase de juegos la atención se centra en las acciones que cada jugador puede adoptar y en el resultado que todas las acciones conjuntamente proporcionan a cada jugador. Una de las formas que clásicamente se utiliza para modelizar estos juegos es la denominada forma extensiva, que explicamos a continuación. También vamos a introducir algún concepto de solución en este contexto.

Definición 1.1 *Un grafo finito orientado es un par (K, β) donde K es un conjunto finito de puntos o vértices y $\beta : K \rightarrow 2^K$ es una aplicación que a cada punto de K le hace corresponder un subconjunto de K .*

- *Un vértice B es consecutivo a un vértice A si $B \in \beta(A)$ y entonces el par $(A:B)$ se denomina arco.*
- *Se denomina camino entre dos vértices A y B a una sucesión finita de arcos $(A_0 : A_1), (A_1 : A_2), \dots, (A_{k-1} : A_k)$, con $A_0 = A$, $A_k = B$ y $A_i \in K$ para $i = 1, \dots, k-1$. Un vértice B es posterior a un vértice A si existe un camino que une A con B .*

- $O \in K$ es un punto distinguido si $\nexists A \in K$ tal que $O \in \beta(A)$.
- $R \in K$ es un punto terminal si $\beta(R) = \emptyset$.

El grafo (K, β) es de tipo árbol si:

- $A \notin \beta(A), \forall A \in K$.
- $\exists^\circ O \in K$ tal que O es un punto distinguido.
- $A \neq B \Rightarrow \beta(A) \cap \beta(B) = \emptyset$.

Definición 1.2 Un juego Γ en forma extensiva finito es una estructura matemática en la que se regula el comportamiento de n jugadores $J_1, J_2, \dots, J_n$, y del azar, J_0 , y que consta de los siguientes elementos:

- Un grafo finito orientado de tipo árbol, (K, β) .
- Una partición de K en $n+2$ subconjuntos: $K_0, K_1, K_2, \dots, K_n, K^*$, donde K_0 es el conjunto del azar, K_i es el conjunto del jugador i -ésimo, para todo $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ y K^* es el conjunto de vértices terminales. Los vértices de K_i se denominan movimientos del jugador J_i y cada arco con origen en un movimiento de J_i va a ser una jugada de J_i . Análogamente los puntos de K_0 son movimientos de J_0 y los arcos con origen en un movimiento de J_0 son jugadas del azar.

Sea $P = \{K_i : i = 0, 1, \dots, n\}$.

- Una asignación de probabilidades, p , de forma que $\forall A \in K_0$ se define una distribución de probabilidades, p_A , sobre todos los arcos que parten de él y de forma que $p_A(A : B) > 0, \forall B \in \beta(A)$.
- $\forall i = 1, \dots, n$ se establece una partición de los vértices de K_i en subconjuntos que denominamos conjuntos de información que cumplen las dos siguientes propiedades: en primer lugar, si B es posterior a A entonces A y B no están en el mismo conjunto de información. En segundo lugar si A y B están en el mismo conjunto de información entonces el número de vértices de $\beta(A)$ es igual al número de vértices de $\beta(B)$. Cada conjunto de información de un jugador i está formado por un conjunto de vértices indistinguibles para dicho jugador, en el sentido de que tiene en

cada uno de esos vértices la misma información de lo que ha ocurrido previamente. $\forall i = 1, \dots, n$ denotemos por I_i la partición correspondiente al conjunto K_i y sea $I = \{I_i : i = 1, \dots, n\}$.

- Una partición de los arcos de (K, β) en subconjuntos elegibles. Si F es un conjunto de información y A_F es el conjunto de arcos con vértice inicial en un vértice de F , $C \subseteq A_F$ es un subconjunto elegible si y sólo si para cada vértice de F contiene un arco y solo uno, que se inicia en dicho vértice. Denotamos por $E(F)$ el conjunto de las elecciones contenidas en A_F . Sea $E_i = \{E(F), F \in I_i\}$, $\forall i = 1, \dots, n$ y $E = \{E_i, i = 1, \dots, n\}$. Si $C \in E(F)$ se dice que es una elección en el conjunto de información F . Las elecciones nos indican las distintas posibilidades de actuación que tiene cada jugador en cada uno de sus conjuntos de información.
- Existe una función $h : K^* \rightarrow \mathbb{R}^N$, tal que para todo $R \in K^*$, $h_i(R)$ representa el pago al jugador J_i si se alcanza el vértice R .
- Todos los jugadores conocen los elementos que acabamos de enumerar, que se denominan reglas del juego.

Cada camino que une el punto distinguido O con un punto terminal R se denomina partida.

Si $A \in K$, una alternativa en A será un arco que conecta A con un vértice posterior a A .

Si Γ es un juego en forma extensiva y (K, β) es el árbol de dicho juego, un subárbol (K_A, β_A) de (K, β) está formado por un vértice A de K , por todos los vértices posteriores a A y por todos los arcos de (K, β) conectando vértices de K_A .

Si K_A es tal que cada conjunto de información en el juego Γ que contiene un vértice de K_A no contiene ningún vértice fuera de K_A , se define el subjuego Γ_A como el juego en forma extensiva que consta de los elementos $K_A, \beta_A, P_A, p_A, I_A, E_A, h_A$, donde P_A, p_A, I_A, E_A, h_A son las restricciones de P, p, I, E y h al subárbol (K_A, β_A) .

En adelante supondremos que los juegos en forma extensiva, Γ , considerados, tienen recuerdo perfecto. Intuitivamente esto quiere decir que en cada instante cada jugador recuerda qué conjuntos de información han sido alcanzados y cómo ha actuado en cada uno de ellos.

Formalmente, un juego Γ se dice que tiene *recuerdo perfecto* si, para cada jugador J_i , para cada par de conjuntos de información F y F' en I_i y cada elección $C \in E(F)$, si $A, B \in F'$, se tiene que C es anterior a A si y sólo si C es anterior a B (donde una elección se dice que es anterior a un vértice A cuando dicha elección se encuentra en el camino que se inicia en el punto distinguido y cuyo vértice final es A).

Otros conceptos importantes en juegos en forma extensiva, relativos a la forma de comportarse los jugadores son los siguientes.

Una *estrategia pura* del jugador J_i es una aplicación $s_i : I_i \rightarrow E_i$ con $s_i(F) \in E(F)$, $\forall F \in I_i$. Denotamos por S_i el conjunto de estrategias puras del jugador J_i .

Consideremos ahora, para cada $i = 1, \dots, n$ y cada $F \in I_i$, $\Pi(E(F))$ el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre $E(F)$. Una *estrategia de comportamiento* para el jugador J_i , que vamos a denotar por b_i , es una aplicación que a cada conjunto de información F le asigna una distribución de probabilidad sobre $E(F)$. Si por B_i denotamos el conjunto de estrategias de comportamiento del jugador J_i , los elementos de B_i nos indican la forma de comportarse el jugador J_i en cada conjunto de información, comportamiento que puede consistir en efectuar un experimento aleatorio y a continuación actuar de acuerdo con el resultado del mismo. Además claramente $S_i \subseteq B_i$.

Una *mixtura de estrategias de comportamiento* del jugador J_i , que vamos a denotar por m_i , es una distribución de probabilidad sobre B_i que asigna probabilidad mayor que cero solamente a un número finito de elementos de B_i . Un caso particular son las distribuciones de probabilidad sobre S_i , las cuales denominamos *estrategias mixtas*. Denotamos por M_i el conjunto de mixturas de estrategias de comportamiento del jugador J_i . Se verifica entonces que $B_i \subseteq M_i$. S , B y M denotan respectivamente los productos cartesianos $X_{i \in N} S_i$, $X_{i \in N} B_i$ y $X_{i \in N} M_i$. Sus elementos se denominan, respectivamente, combinación de estrategias puras, combinación de estrategias de comportamiento y combinación de mixturas de estrategias de comportamiento.

Sea $m \in M$ una combinación de mixturas de estrategias de comportamiento. Para cada $A \in K$ sea $P_m(A)$ la probabilidad de que el vértice

A sea alcanzado. El vector de pago correspondiente a m se define como el vector $H(m) \in \mathbb{R}^N$ donde $H_i(m) = \sum_{R \in K} P_m(R) h_i(R)$, $\forall i = 1, \dots, n$, es decir, es el pago esperado para el jugador J_i si se juega de acuerdo con m .

Sean $m'_i, m''_i \in M_i$. Se dirá que m'_i y m''_i tienen realizaciones equivalentes para el jugador J_i si $\forall m \in M$ y $\forall A \in K$, $P_{m \setminus m'_i}(A) = P_{m \setminus m''_i}(A)$, donde $m \setminus m'_i$ denota la combinación de mixturas de estrategias de comportamiento $(m_1, \dots, m_{i-1}, m'_i, m_{i+1}, \dots, m_n)$.

Como consecuencia del siguiente resultado debido a Kuhn (1953), podemos suponer que los jugadores siempre van a jugar estrategias de comportamiento.

Teorema 1.1 *Si Γ es cualquier juego en forma extensiva, dada cualquier mixtura de estrategias de comportamiento m_i , existe una estrategia de comportamiento b_i tal que ambas tienen realizaciones equivalentes.*

Seguidamente introducimos dos conceptos de solución en juegos no cooperativos en forma extensiva.

1.2 Conceptos de solución en juegos en forma extensiva

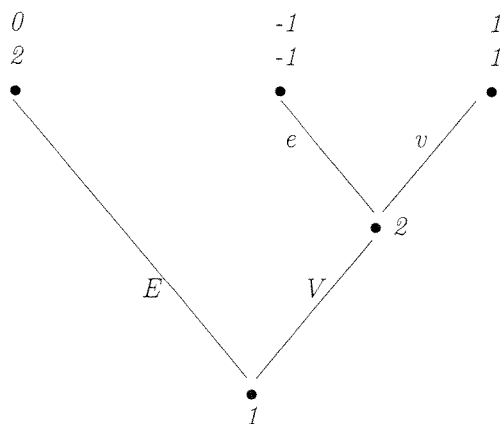
Definición 1.3 *Si $b \in B$ se dice que es un equilibrio de Nash del juego Γ si $\nexists i \in N$ tal que $\exists b'_i \in B_i$ con $H_i(b \setminus b'_i) > H_i(b)$.*

La anterior definición selecciona como soluciones del juego aquellas combinaciones de estrategias de comportamiento que se autoimponen en el sentido de que una vez acordadas ningún jugador tiene motivos para jugar de otra forma, puesto que de hacerlo no va a mejorar su ganancia y en cambio sí puede empeorarla.

Nash (1951) demostró que cualquier juego en forma extensiva posee al menos un equilibrio de Nash.

No obstante, existen equilibrios de Nash que no se autoimponen ante jugadores completamente racionales, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo y que han llevado a numerosos autores a refinar el concepto de equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.1 *Consideremos el siguiente juego en forma extensiva.*



El jugador 1 inicia el juego pudiendo elegir entre E y V . Si elige E , el jugador 1 gana 0 y el jugador 2 gana 2. Si el jugador 1 elige V , el jugador 2 puede elegir entre e y v siendo entonces los pagos -1 y -1 , en el primer caso, y 1 y 1 en el segundo caso.

Este juego tiene dos equilibrios que son (E, e) y (V, v) . Sin embargo (E, e) es un equilibrio que no se autoimpone completamente. Desde luego, si el jugador 2 elige e , lo mejor para el jugador 1 es elegir E . Sin embargo, no es de esperar que el jugador 2 elija e ya que si se alcanza el conjunto de información del jugador 2, jugar v le da a éste un pago mayor. Por tanto el jugador 1 debería de elegir V .

Definición 1.4 Diremos que $b \in B$ es un equilibrio perfecto en subjuegos si para cada subjuego Γ_A de Γ , la combinación de estrategias de comportamiento b_A inducida por b en Γ_A es un equilibrio de Nash de Γ_A .

Selten (1975) probó que todo equilibrio perfecto en subjuegos es equilibrio de Nash, que el recíproco no se verifica en general y que todo juego posee al menos un equilibrio perfecto en subjuegos. También existen equilibrios perfectos en subjuegos que no se autoimponen por lo que este concepto de solución también ha sido refinado.

Aunque un juego en forma extensiva describe perfectamente el desarrollo de un juego no cooperativo, resulta en ocasiones poco manejable, por lo que se introduce una forma de representación simplificada, la denominada forma estratégica (o forma normal):

Definición 1.5 Si Γ es un juego en forma extensiva se define su forma estratégica asociada como el vector $(S_1, \dots, S_n, H_1, \dots, H_n)$ donde, como ya hemos visto S_i denota el conjunto de estrategias puras y H_i la función de pago, para el jugador J_i , $\forall i = 1, \dots, n$.

Hasta aquí hemos introducido los conceptos relativos a juegos no cooperativos que se van a utilizar en los capítulos posteriores. Un desarrollo más completo se puede encontrar en Van Damme (1991).

Capítulo 2

Juegos con utilidad transferible

2.1 Introducción

En este capítulo se estudia una clase de juegos cooperativos: los denominados juegos con utilidad transferible o, abreviadamente, juegos TU.

La diferencia más importante entre los juegos no cooperativos y los cooperativos es que, en estos últimos, se permiten los acuerdos vinculantes entre los jugadores, mientras que en los no cooperativos no se permiten.

En un juego cooperativo, una coalición es un subconjunto de jugadores, y si una coalición llega a un acuerdo vinculante, es decir, si sus miembros deciden cooperar, alcanzarán un cierto pago.

Suponer que la utilidad es transferible, es exigir que los pagos alcanzables por cualquier coalición en particular, se compongan de todos los pagos individuales cuya suma no sea superior a una cifra concreta. En otras palabras, el pago de cada coalición puede distribuirse de cualquier forma entre sus miembros.

Estas consideraciones dan lugar a la siguiente definición:

Definición 2.1 *Un juego cooperativo con utilidad transferible es un par (N, ν) , donde $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y, si denotamos por*

$$2^N = \{T \subseteq N\},$$

$\nu : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que verifica $\nu(\emptyset) = 0$.

La función ν se denomina *función característica* del juego. Para cada coalición T , $\nu(T)$ representa el pago máximo que los jugadores de T pueden alcanzar, independientemente de las acciones del resto de los jugadores.

Suponiendo que no hay impedimentos para la comunicación entre los jugadores, la teoría clásica de los juegos TU asume la formación de la gran coalición, N , formada por todos los jugadores y la cuestión central es cómo dividir $\nu(N)$ entre los miembros de N .

Por $TU(N)$ denotamos el conjunto de todos los juegos cooperativos TU en los que $N=\{1,2,\dots,n\}$ es el conjunto de jugadores.

A continuación proporcionamos dos definiciones básicas:

Definición 2.2 *Un juego (N,ν) de $TU(N)$ se dice que es superaditivo si*

$$\forall T \subseteq N, \forall U \subseteq N, \text{ si } T \cap U = \emptyset \text{ entonces } \nu(T \cup U) \geq \nu(T) + \nu(U).$$

En un juego superaditivo, la cooperación entre los jugadores siempre va a resultar provechosa.

Definición 2.3 *Diremos que (N,ν) perteneciente a $TU(N)$ es convexo si la contribución de un jugador a una coalición es mayor cuanto más grande es el tamaño de dicha coalición, es decir:*

$$\nu(T \cup \{i\}) - \nu(T) \geq \nu(U \cup \{i\}) - \nu(U), \forall i \in N, \forall U \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}.$$

2.2 Conceptos de solución en juegos TU

Definición 2.4 *Un concepto de solución sobre $TU(N)$ será una aplicación*

$$f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada juego $(N,\nu) \in TU(N)$ asigna un vector cuya componente i -ésima representa el pago final que recibe el jugador i .

En los apartados siguientes se estudian alguno de estos conceptos de solución, por su importancia en el desarrollo posterior de este trabajo.

2.2.1 El núcleo

Al tratar de encontrar la solución de un juego, parece natural empezar por seleccionar un conjunto de vectores de pago, que contenga todos los resultados de alguna forma razonables. Este conjunto se va a denominar conjunto de imputaciones.

Definición 2.5 *Un vector de pagos, $x \in \mathbb{R}^N$, es una imputación en el juego (N, ν) de $TU(N)$ si $x_i \geq \nu(i)$, $\forall i \in N$ y $\sum_{i=1}^n x_i = \nu(N)$, es decir, es un vector que otorga a cada jugador, al menos tanto como lo que podría garantizarse a sí mismo y que otorga a todos los jugadores en conjunto $\nu(N)$.*

El conjunto de las imputaciones se representa por $I(N, \nu)$.

Por otro lado, un concepto importante en el estudio de los juegos cooperativos, es el de la dominancia. Está relacionado directamente, con el poder que una coalición puede ejercer mediante su capacidad para independizarse.

Definición 2.6 *Sean x e y pertenecientes a $I(N, \nu)$, con $(N, \nu) \in TU(N)$. Se dice que y domina a x vía T , con $T \subseteq N$, si*

$$y_i \geq x_i, \forall i \in T \text{ y } \sum_{i \in T} y_i \leq \nu(T).$$

Se dice que y domina a x si para un cierto subconjunto T de N , y domina a x vía T .

Parece razonable que un vector de pagos que aspire a solución deba ser estable, en el sentido de ser no dominado. De acuerdo con esta idea, se introduce el siguiente concepto de solución:

Definición 2.7 *El núcleo de (N, ν) , si (N, ν) es un juego de $TU(N)$, lo vamos a denotar por $\text{Nu}(N, \nu)$, y se define como el subconjunto del conjunto de las imputaciones formado por aquellas que no están dominadas, es decir,*

$$\text{Nu}(N, \nu) = \{x \in I(N, \nu) : \sum_{i \in T} x_i \geq \nu(T), \forall T \subset N\}.$$

La definición del núcleo fue debida a Gillies (1953).

Desafortunadamente, el núcleo de un juego puede ser vacío, y cuando es distinto del vacío, puede estar formado por más de un vector de pagos.

2.2.2 El valor de Shapley

Numerosos autores han diseñado distintos conceptos de solución siguiendo el procedimiento axiomático: consiste en el estudio de las propiedades de tales conceptos de solución y en tratar de caracterizar, por medio de esas propiedades, una solución o clase de soluciones.

En este apartado estudiamos un concepto de solución desde el punto de vista axiomático. Comenzamos por enumerar las propiedades que caracterizan a dicho concepto de solución. Antes proporcionamos dos definiciones:

Definición 2.8 Sea (N, ν) un juego de $TU(N)$. Dos jugadores i, j pertenecientes a N se dicen *simétricos* si y sólo si

$$\nu(T \cup \{i\}) = \nu(T \cup \{j\}), \forall T \subseteq N \setminus \{i, j\},$$

es decir, si aportan lo mismo a cualquier coalición.

Definición 2.9 Sea (N, ν) un juego de $TU(N)$. Un jugador i de N se dice que es un *jugador nulo* si y sólo si $\nu(T \cup \{i\}) = \nu(T)$, $\forall T \subseteq N \setminus \{i\}$. Es decir, es un jugador que no aporta nada a ninguna coalición.

- $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *eficiencia* (EFI) si $\sum_{i=1}^n f_i(N, \nu) = \nu(N)$, $\forall (N, \nu) \in TU(N)$, es decir, la solución reparte $\nu(N)$ entre los jugadores.
- $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *simetría* (SIM) si $f_i(N, \nu) = f_j(N, \nu)$, $\forall (N, \nu) \in TU(N)$ y para todo par de jugadores i, j simétricos. En otras palabras, si dos jugadores aportan lo mismo a todas las coaliciones, reciben lo mismo.
- $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *aditividad* (ADI) si para todo par de juegos $(N, \nu), (N, \mu)$ de $TU(N)$ se cumple que

$$f_i(N, \nu + \mu) = f_i(N, \nu) + f_i(N, \mu)$$

$\forall i \in N$, donde el juego $\nu + \mu$ será el juego de $TU(N)$ cuya función característica, $\forall T \subseteq N$, viene dada por:

$$(\nu + \mu)(T) = \nu(T) + \mu(T).$$

- $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *jugadores nulos* (JNU) si $f_i(N, \nu) = 0, \forall (N, \nu) \in TU(N)$ y para todo jugador nulo i . Es decir, a un jugador que no aporta nada a ninguna coalición, la solución le asignará 0.

Shapley (1953) propuso una solución que se conoce con el nombre de valor de Shapley y que caracterizó utilizando las propiedades anteriores:

Teorema 2.1 *Existe una única solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades de eficiencia, simetría, aditividad y jugadores nulos y es el valor de Shapley.*

En adelante se denota el valor de Shapley de un juego (N, ν) por $\text{Sh}(N, \nu)$.

El valor de Shapley admite, entre otras, la siguiente formulación. Consideremos $\Pi(N)$ el conjunto de todas las permutaciones sobre N . Para cada permutación $\sigma \in \Pi(N)$, supongamos que vamos añadiendo jugadores, en el orden indicado por σ , hasta completar la coalición N , recibiendo cada jugador su contribución marginal al valor de la coalición que se forma al entrar él. Así obtenemos el vector $m^\sigma(\nu)$, que denominaremos *vector de aportaciones marginales*, cuya componente $\sigma(i)$ es:

$$m_{\sigma(i)}^\sigma(\nu) = \nu(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) - \nu(\sigma(1), \dots, \sigma(i-1)), \quad \forall i \in N.$$

Si ahora sobre $\Pi(N)$ consideramos la distribución de probabilidad definida, para cada σ de $\Pi(N)$, por $P(\sigma) = \frac{1}{n!}$, y para cada $\sigma(i)$ de N consideramos la siguiente variable aleatoria sobre $\Pi(N)$:

$$m_{\sigma(i)}^\sigma(\nu) = \nu(\sigma(1), \dots, \sigma(i)) - \nu(\sigma(1), \dots, \sigma(i-1)),$$

entonces el valor de Shapley del juego (N, ν) se puede formular como sigue:

$$\text{Sh}(N, \nu) = \sum_{\sigma \in \Pi(N)} \frac{1}{n!} m^\sigma(\nu).$$

Así lo que Sh le asigna a cada jugador i , es el pago esperado de dicho jugador, cuando los pagos se efectúan según el procedimiento anteriormente explicado.

Una expresión alternativa para el valor de Shapley es la siguiente:

$$\forall i \in N, \quad \text{Sh}_i(N, \nu) = \sum_{i \in T \subseteq N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \{\nu(T) - \nu(T \setminus \{i\})\},$$

donde $t = |T|$.

Un tipo especial de conceptos de solución en el ámbito de los juegos cooperativos, que nos van a permitir una nueva interpretación del valor de Shapley, son los denominados *valores de compromiso*. Tales valores asignan a cada juego un vector, que se construye utilizando dos vectores de referencia, denominados genéricamente vectores de pagos máximos y vectores de pagos mínimos.

El valor de Shapley admite entonces una interpretación como valor de compromiso. Esta interpretación fue dada por primera vez por C. Rafels. Previamente necesitamos dos definiciones.

Definición 2.10 Diremos que $(N, \nu) \in TU(N)$ es un juego cero-normalizado si y sólo si $\nu(i) = 0, \forall i \in N$.

Definición 2.11 Diremos que $(N, \nu) \in TU(N)$ es un juego esencial si y sólo si $\sum_{i=1}^n \nu(i) < \nu(N)$.

Supongamos entonces que (N, ν) es un juego de $TU(N)$, cero-normalizado y esencial. Notemos que estas suposiciones no son en absoluto restrictivas. En particular, si el juego no es esencial, a la vista de la anterior definición de conjunto de imputaciones, el juego no tendría imputaciones o tendría solamente una y el juego sería trivial. Vamos entonces a considerar como vector de pagos mínimos

$$m(\nu) = (\nu(1), \dots, \nu(n))$$

y como vector de pagos máximos $M(\nu) = \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m^\sigma(\nu)$, es decir, la suma de las aportaciones marginales. Notemos que $M(\nu)$ es un vector "utópico", es decir, no factible, ya que $\sum_{\sigma(i) \in N} m_{\sigma(i)}^\sigma(\nu) = \nu(N), \forall \sigma \in \Pi(N)$ y por lo tanto $\sum_{i \in N} M_i(\nu) = n! \nu(N) > \nu(N)$ si $n > 1$. Entonces, el valor de Shapley puede escribirse como:

$$\text{Sh}(N, \nu) = \max \{ \alpha M(\nu) : \alpha \in \mathbb{R}_{++}, \sum_{i \in N} \alpha M_i(\nu) = \nu(N) \}.$$

donde si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

Para interpretar geoméricamente esta nueva expresión del valor de Shapley tengamos en cuenta la siguiente definición:

Definición 2.12 Dado un subconjunto S de $\mathbb{R}^N$, denominamos frontera de Pareto del conjunto S , y lo denotamos por $P(S)$, al siguiente subconjunto de S :

$$\{x \in S : \nexists y \in S, y \geq x, y \neq x\}.$$

Por tanto, de acuerdo con esta definición, la nueva expresión para el valor de Shapley, geoméricamente, quiere decir que si consideramos el segmento que une $m(\nu)$ y $M(\nu)$, $Sh(N, \nu)$ es la intersección de ese segmento con la frontera de Pareto del conjunto

$$V(N) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^n x_i \leq \nu(N)\}.$$

Otros valores de compromiso aparecen en la literatura. Entre ellos podemos mencionar el τ -valor, debido a Tijs (1981), y la solución para juegos de negociación debida a Kalai y Smorodinsky (1975). De este último valor hablaremos con más detalle en otra parte de este trabajo.

Un tipo de propiedades que frecuentemente aparecen en la literatura y nos van a permitir una nueva caracterización del valor de Shapley, son las denominadas propiedades de monotonía. Genéricamente, indican cómo se comporta una solución ante cierta clase de variaciones de la función característica. Una de estas propiedades de monotonía es la siguiente:

- Se dirá que una solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verifica la propiedad de *monotonía fuerte* (MOF) si

$$f_i(N, \nu) \geq f_i(N, \mu)$$

para todo par de juegos (N, ν) y (N, μ) de $TU(N)$ y $\forall i \in N$ tal que $\nu(T \cup \{i\}) - \nu(T) \geq \mu(T \cup \{i\}) - \mu(T)$, $\forall T \subseteq N$. Es decir, a un jugador que, dada una coalición cualquiera, va a aportar más a dicha coalición en el juego ν que en el juego μ , la solución le dará más en el juego ν que en el juego μ .

Esta propiedad fue utilizada por Young (1985) para dar una nueva caracterización del valor de Shapley:

Teorema 2.2 *Existe una única solución $f : TU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades de eficiencia, simetría y monotonía fuerte y es el valor de Shapley.*

Hemos de señalar que existen otras caracterizaciones axiomáticas del valor de Shapley y también existen caracterizaciones del núcleo. Asimismo se han definido y estudiado valores de Shapley ponderados, es decir, que no verifican la propiedad de simetría.

Vamos a relacionar estos dos conceptos de solución estudiados hasta el momento.

Mientras que en el valor de Shapley, tanto en la definición como en las propiedades, aparece implícitamente el principio de justicia en el reparto, en el núcleo buscamos fundamentalmente la estabilidad. Por tanto, es interesante el siguiente teorema debido a Shapley (1971), que relaciona el núcleo con el valor de Shapley y que de alguna forma unifica ambas ideas.

Teorema 2.3 *El valor de Shapley de un juego con utilidad transferible convexo es un elemento del núcleo de dicho juego.*

2.3 Situaciones TU con comunicación

En la teoría clásica de los juegos cooperativos, se supone que está permitida la libre comunicación entre los jugadores. Ahora bien, en los últimos años, a partir de que el valor de Myerson fue introducido (Myerson, 1977), se han estudiado ampliamente modelos cooperativos con restricciones en la comunicación (estas restricciones, por ejemplo, pueden ser consecuencia de afinidades políticas entre los jugadores).

Haremos uso de algunos elementos de teoría de grafos para modelizar este tipo de situaciones.

Definición 2.13 *Si $N = \{1, \dots, n\}$, un grafo no orientado sin lazos, definido sobre N , es un conjunto A de pares no ordenados de elementos distintos de N . Denotaremos estos pares de elementos de N por $(i:j)$ y se denominarán arcos.*

En este contexto, los grafos servirán para modelizar las restricciones en la comunicación, de tal forma que dos jugadores pueden comunicarse directamente si y sólo si existe un arco del grafo que los une.

Denotamos por $G(N)$ el conjunto de grafos no orientados sin lazos, definidos sobre N .

Definición 2.14 *Un grafo $A \in G(N)$ se dice completo si $\forall i, j \in N (i : j) \in A$.*

Definición 2.15 Para una coalición T de N y cualquier grafo A de $G(N)$, diremos que dos jugadores i y j de T están conectados en T por A , si A induce un camino en T conectando i y j , es decir, existe una sucesión finita de jugadores $j_1, \dots, j_m$ de T tales que

$$(j_{i-1} : j_i) \in A, \forall i = 1, \dots, m+1, j_0 = i, j_{m+1} = j.$$

Denotaremos por T/A el conjunto de componentes conexas en T asociadas al grafo A (es decir, subconjuntos maximales de elementos conexos en T). Obsérvese que T/A es una partición de T .

Definición 2.16 Una situación TU con comunicación y conjunto de jugadores N es una terna (N, ν, A) , donde (N, ν) es un juego con utilidad transferible y A un grafo no orientado sin lazos, definido sobre el conjunto de los jugadores.

Denotaremos por $CTU(N)$ todas las situaciones TU con comunicación y conjunto N de jugadores.

En adelante, por comodidad, escribiremos (ν, A) en lugar de (N, ν, A) cuando no haya lugar a confusión con el conjunto de jugadores.

2.4 Conceptos de solución en situaciones CTU

Definición 2.17 Un concepto de solución sobre $CTU(N)$ será una aplicación

$$f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada situación TU con comunicación, $(N, \nu, A) \in CTU(N)$, asigna un vector cuya componente i -ésima representa el pago final que recibe el jugador i .

Dos importantes conceptos de solución han sido estudiados en este contexto, el ya citado valor de Myerson (1977) y el valor posicional (Meessen, R., 1988; Borm, Owen, Tijs, 1992). Antes de introducir las definiciones y propiedades de estos dos conceptos de solución veamos algunas definiciones previas.

Definición 2.18 Si $(\nu, A) \in CTU(N)$, se denomina juego de puntos inducido y se denota por ν/A , al juego de $TU(N)$ definido, para cada coalición T de N , por:

$$(\nu/A)(T) = \sum_{U \in T/A} \nu(U).$$

En la definición de juego de puntos inducido, se tiene en cuenta que el valor de una coalición T , debe ser el que le asigna la función característica inicial, si la coalición es conexa y en otro caso, será la suma de los valores dados por la función característica inicial, a las coaliciones que constituyen la partición de T inducida por el grafo A , puesto que éstas son las coaliciones que realmente se podrían formar, y no T , teniendo en cuenta las restricciones dadas por el grafo A .

En la siguiente definición se pretende dar una medida natural de la importancia, en la situación con comunicación, de las distintas vías de comunicación:

Definición 2.19 *Se denomina juego de arcos inducido por una situación (ν, A) de $CTU(N)$ al juego (A, ν_A) de $TU(A)$, definido de la siguiente forma:*

$$\nu_A(L) = \sum_{T \in N/L} \nu(T), \forall L \subseteq A.$$

Nótese que los jugadores de ν_A son los arcos de A . Al definir el valor de una coalición de arcos, L , se tiene en cuenta, que si la estructura de comunicación estuviese dada por L , las coaliciones de jugadores que se formarían serían las de N/L y por tanto el pago al que optarían los jugadores de N sería $\sum_{T \in N/L} \nu(T)$.

2.4.1 El valor de Myerson

Antes de introducir el concepto de solución propuesto por Myerson para situaciones TU con comunicación, comencemos por enumerar algunas propiedades razonables.

- $f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *eficiencia en componentes* (EFC) si

$$\forall (\nu, A) \in CTU(N), \forall T \in N/A, \sum_{i \in T} f_i(\nu, A) = \nu(T).$$

Es decir, si T es una componente conexa inducida por el grafo A , entonces los miembros de T , deberían ganar la cantidad $\nu(T)$. Esta propiedad recoge la idea de que N/A es la estructura de coaliciones natural asociada con el grafo de cooperación A .

- $f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *justicia* (JUS) si $\forall(\nu, A) \in CTU(N), \forall(i : j) \in A$,

$$f_i(\nu, A) - f_i(\nu, A \setminus (i : j)) = f_j(\nu, A) - f_j(\nu, A \setminus (i : j)).$$

Es decir, si desaparece el arco que une a los jugadores i y j , ambos jugadores pierden lo mismo.

- $f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *grafos estables* (GES) si $\forall(\nu, A) \in CTU(N), \forall(i : j) \in A$,

$$f_i(\nu, A) \geq f_i(\nu, A \setminus (i : j)), \quad f_j(\nu, A) \geq f_j(\nu, A \setminus (i : j)).$$

Es decir, si un concepto de solución es de grafos estables, dos jugadores siempre se benefician de alcanzar acuerdos bilaterales.

Myerson (1977) obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2.4 *Existe un único concepto de solución*

$$f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que verifica las propiedades de eficiencia en componentes y justicia. Dicho concepto de solución se denomina valor de Myerson y lo vamos a denotar por $m(\nu, A)$. Se verifica que $m(\nu, A) = Sh(N, \nu/A)$. Además, si el juego ν es super-aditivo, el valor de Myerson es de grafos estables.

Otra propiedad interesante del valor de Myerson es que si $A(N)$ denota el grafo completo sobre N , es decir, si no hay restricciones a la comunicación, entonces $m(\nu, A(N)) = Sh(N, \nu)$.

De modo análogo a como hemos hecho con el valor de Shapley, podemos pensar en relacionar los principios de justicia y estabilidad, ahora en el contexto de comunicación restringida. Desde luego, en este caso, parece natural que el núcleo considerado sea el del juego de puntos inducido por el juego TU de partida y el grafo de comunicación. El siguiente resultado aparece en A. van den Nouweland y P. Borm (1991) y proporciona una condición suficiente para que el valor de Myerson de un juego pertenezca al núcleo del juego de puntos. Antes es necesario proporcionar una definición.

Definición 2.20 Un grafo A , definido sobre un conjunto N de jugadores, se dice de ciclos completos si se verifica la siguiente condición: si existe un ciclo $(i, j_1, j_2, \dots, j_m, i)$, es decir, un camino conectando al jugador i consigo mismo, entonces el grafo completo sobre $\{i, j_1, j_2, \dots, j_m\}$ es un subgrafo de A . Notemos que tanto el grafo completo definido sobre N , como un grafo en el que no existan ciclos, son grafos de ciclos completos.

Teorema 2.5 Sea (N, ν, A) una situación TU con comunicación, en la que el juego TU, (N, ν) , es convexo y el grafo de comunicación es de ciclos completos, entonces el valor de Myerson de (N, ν, A) pertenece al núcleo del juego de puntos inducido $(N, \nu/A)$.

A continuación enunciamos una propiedad y un resultado que aparecen en A. van den Nouweland (1993) y que indican que para calcular el valor de Myerson de un jugador es suficiente considerar la componente conexa que contiene a dicho jugador.

- $f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que es *descomponible en componentes* si

$$\forall (N, \nu, A) \in CTU(N), \forall T \in N/A \text{ y } \forall i \in T$$

se tiene que

$$f_i(N, \nu, A) = f_i(N, \nu|_T, A(T)),$$

donde $\nu|_T$ denota la restricción de ν a T , definida por $\nu|_T(U) := \nu(U)$ para toda $U \subseteq T$ y donde

$$A(T) = \{(i : j) \in A : i, j \in T\}.$$

Teorema 2.6 El valor de Myerson es descomponible en componentes

2.4.2 El valor posicional

Vamos a introducir nuevas propiedades razonables de un concepto de solución para situaciones TU con comunicación. Previamente se proporcionan dos nuevas definiciones.

Definición 2.21 Sea (N, ν, A) una situación TU con comunicación. Un arco $(i:j)$ del grafo A se dice nulo, si es un jugador nulo en el juego de arcos inducido ν_A , es decir,

$$\nu_A(L) = \nu_A(L \cup (i:j)), \forall L \subseteq A \setminus (i:j).$$

Definición 2.22 Sea (N, ν, A) una situación TU con comunicación. Se dice que es de arcos anónimos cuando existe una función

$$F : \{0, 1, \dots, |A|\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\nu_A(L) = F(|L|), \forall L \subseteq A$.

En una situación de este tipo, el valor de cada coalición de arcos depende únicamente del número de arcos que la forman, en particular, todos los arcos, individualmente, tienen el mismo valor. En estas condiciones, parece razonable que lo que debe recibir cada jugador, sea también función del número de arcos que parten de él.

- $f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *arcos nulos* (ANU) si

$$f(N, \nu, A) = f(N, \nu, A \setminus (i:j)),$$

$\forall (N, \nu, A) \in CTU(N)$ y $\forall (i:j) \in A$, nulo.

- $f : CTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *arcos anónimos* (AAN) si lo que recibe un jugador en una situación con comunicación es proporcional al número de arcos que parten de dicho jugador, cuando la situación de comunicación es de arcos anónimos.

Denotaremos por $CTU(N)_s^0$ el conjunto de todas las situaciones TU con comunicación y N jugadores, (N, ν, A) , en las que el grafo de comunicación, A , no contiene ciclos, esto es, caminos de arcos conectando un jugador de N consigo mismo, y el juego TU, (N, ν) , es cero- normalizado.

Borm, Owen y Tijs (1992) proporcionan el siguiente resultado:

Teorema 2.7 Existe un único concepto de solución sobre $CTU(N)_s^0$,

$$f : CTU(N)_s^0 \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

que verifica las propiedades de eficiencia en componentes, aditividad, arcos nulos y arcos anónimos. Dicho concepto de solución se denomina valor posicional y lo vamos a denotar por $p(\nu, A)$. Se verifica que

$$p_i(\nu, A) = \sum_{a \in A_i} \frac{1}{2} \text{Sh}_a(A, \nu_A), \forall i \in N,$$

donde $A_i := \{(i : j) \in A : j \in N\}$, denota el conjunto de arcos que parten del jugador i .

Como vemos, el valor posicional asigna a cada jugador, la suma de la mitad de lo que el valor de Shapley, del juego de arcos inducido, asigna a cada uno de los arcos que parten de dicho jugador.

En A. van den Nouweland y P. Borm (1991), también se proporcionan condiciones suficientes para que el valor posicional de una situación TU con comunicación pertenezca al núcleo del juego de puntos inducido:

Teorema 2.8 Sea (N, ν, A) una situación TU con comunicación, en la que el juego TU, (N, ν) , es cero-normalizado, convexo y el grafo de comunicación no contiene ciclos, entonces el valor posicional de (N, ν, A) pertenece al núcleo del juego de puntos inducido $(N, \nu/A)$.

El siguiente resultado es análogo al ya enunciado para el valor de Myerson y se encuentra en A. van den Nouweland (1993).

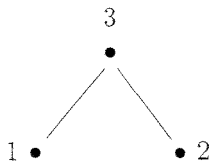
Teorema 2.9 El valor posicional es descomponible en componentes

El siguiente ejemplo ilustra algunos de los conceptos de solución presentados hasta ahora.

Ejemplo 2.1 Consideremos (N, ν, A) una situación de comunicación en la que $N = \{1, 2, 3\}$, ν es el juego de unanimidad de la coalición $\{1, 2\}$, es decir:

- $\nu(T) = 1$ si $\{1, 2\} \subseteq T$
- $\nu(T) = 0$ si $\{1, 2\} \not\subseteq T$

y el grafo de comunicación es $A=\{(1:3), (2:3)\}$.



Consideremos, en primer lugar, la solución del juego TU, sin tener en cuenta las restricciones en la comunicación, y utilizando el valor de Shapley:

$$\text{Sh}(N, \nu) = (1/2, 1/2, 0).$$

Si ahora tenemos en cuenta las restricciones en la comunicación, el juego de puntos inducido, $(N, \nu/A)$, está dado por:

- $(\nu/A)(T)=1$ si $T=N$
- $(\nu/A)(T)=0$ si $T \neq N$.

Por tanto,

$$\text{m}(N, \nu, A) = \text{Sh}(N, \nu/A) = (1/3, 1/3, 1/3).$$

Por otra parte, el juego de arcos inducido, (N, ν_A) está dado por:

- $\nu_A(L)=1$ si $L=A$
- $\nu_A(L)=0$ si $L \neq A$.

Por tanto, tomando $a:=(1:3)$ y $b:=(2:3)$,

$$\text{Sh}_a(N, \nu_A) = \text{Sh}_b(N, \nu_A) = 1/2$$

y

$$\text{p}(N, \nu, A) = (1/4, 1/4, 1/2).$$

Capítulo 3

Juegos de negociación simple

3.1 Introducción

Abordamos en este nuevo capítulo el estudio de otra clase de juegos cooperativos: los denominados juegos de negociación simple, también denominados juegos de regateo.

Las dos grandes diferencias entre estos juegos y los juegos con utilidad transferible son que, por un lado, ahora no se considera que la utilidad sea transferible, es decir, si un vector de pagos para s jugadores es alcanzable como consecuencia de un acuerdo entre ellos, si consideramos la suma de esos pagos, no tiene necesariamente que ser factible cualquier reparto entre los s jugadores de esa cantidad. Además, en los juegos de negociación, sólo se contemplan acuerdos entre la coalición total de jugadores y por tanto, cualquier otra coalición no va a ser relevante en el proceso de negociación.

Vamos a proporcionar ahora algunas definiciones básicas.

Definición 3.1 *Un subconjunto S de $\mathbb{R}^N$ se denomina comprehensivo cuando si $x \in S$, $y \in \mathbb{R}^N$ y se verifica que $y \leq x$ entonces $y \in S$.*

Definición 3.2 *Un juego de negociación simple es una terna (N, S, d) que verifica:*

- $N = \{1, 2, \dots, n\}$ es un conjunto de jugadores.
- S es un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, no vacío, cerrado, convexo y comprehensivo.

- d es un punto de S .
- Suponemos que $\exists x \in S : x > d$.
- El conjunto $S_d = \{x \in S : x \geq d\}$ es compacto.

Por $NS(N)$ denotamos el conjunto de todos los juegos de negociación simple (en adelante diremos abreviadamente juegos de negociación) en los que interviene el conjunto N de jugadores.

La interpretación de un juego de negociación $(N, S, d) \in NS(N)$ (en adelante escribiremos únicamente (S, d) cuando no haya lugar a confusión en cuanto al conjunto de jugadores) es la siguiente. Un conjunto N de jugadores negocia para alcanzar un acuerdo unánime sobre un conjunto de alternativas. Se consideran las loterías sobre este conjunto de alternativas y que cada jugador posee una relación de preferencias sobre el conjunto de dichas loterías. Si suponemos que las preferencias de cada jugador se pueden representar por medio de una función de utilidad de von Neumann Morgenstern, el conjunto de loterías sobre las alternativas se puede representar por un subconjunto convexo, S , de $\mathbb{R}^N$ constituido por vectores de utilidades. El subconjunto S contiene un vector d , correspondiente a la utilidad que los jugadores obtendrían en caso de no llegar a un acuerdo.

S recibe el nombre de *conjunto factible* y d el de *punto de desacuerdo*.

La exigencia de comprehensividad de S está motivada por la libre disponibilidad de la utilidad por parte de los agentes. En cuanto a las condiciones escritas en cuarto y quinto lugar en la definición de juego de negociación, se interpretan, respectivamente, como que la negociación tiene sentido y las alternativas preferidas a la de desacuerdo tienen utilidad acotada. El carácter cerrado del conjunto S se exige por conveniencia matemática.

3.2 Conceptos de solución en juegos NS

Definición 3.3 *Un concepto de solución sobre $NS(N)$ será una aplicación*

$$f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada juego $(S, d) \in NS(N)$ asigna un vector cuya componente i -ésima representa el pago final que recibe el jugador i y que verifica:

- $f(S, d) \in S, \forall (S, d) \in A$, es decir, la solución propone un vector del conjunto factible.
- $f(S, d) > d, \forall (S, d) \in A$. Esta condición se denomina racionalidad individual fuerte.

Como en el caso de los juegos TU, numerosos autores han diseñado distintos conceptos de solución siguiendo el procedimiento axiomático. En los apartados siguientes estudiamos solamente dos importantes familias de soluciones: las soluciones de Nash y las soluciones de Kalai-Smorodinsky por su importancia en el desarrollo posterior de este trabajo.

3.2.1 Las soluciones de Nash

Para describir estas soluciones utilizaremos el mismo esquema seguido al estudiar conceptos de solución en el contexto TU, es decir, comenzaremos por enunciar propiedades deseables o axiomas. En primer lugar proporcionamos una definición.

Definición 3.4 Dado (S, d) en $NS(N)$ se dirá que es un juego simétrico si y sólo si para todo $x \in S$, cualquier $y \in \mathbb{R}^N$ obtenido a partir de x efectuando alguna permutación de sus coordenadas, está también en S y además

$$d_1 = d_2 = \dots = d_n.$$

- $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *eficiencia* (EFI) si $f(S, d)$ pertenece a la frontera de Pareto de S , para todo juego de negociación (S, d) de $NS(N)$.
- $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *simetría* (SIM) si para cada juego de negociación (S, d) en $NS(N)$, simétrico, entonces $f_1(S, d) = f_2(S, d) = \dots = f_n(S, d)$. Es decir, si la descripción del juego de negociación no contiene información que nos permita establecer diferencias entre los jugadores, la solución tampoco debe diferenciar entre los mismos.
- $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *covarianza ante transformaciones de origen y de escala* (COV) si para cada juego de negociación (S, d) en $NS(N)$ y para cualesquiera $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}_{++}^N$ entonces

$f(aS + b, ad + b) = af(S, d) + b$, donde si

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^N \text{ y } S \subseteq \mathbb{R}^N$$

entonces

$$ax := (a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n),$$

$$a + x := (a_1 + x_1, a_2 + x_2, \dots, a_n + x_n),$$

$$aS := \{y \in \mathbb{R}^N : \exists z \in S, y = az\} \text{ y}$$

$$a + S := \{y \in \mathbb{R}^N : \exists z \in S, y = a + z\}.$$

La motivación de este axioma viene dada por el hecho de que, como se dijo más atrás, los puntos del conjunto factible S son utilidades de von Neumann Morgenstern, las cuales representan las preferencias de los jugadores sobre un conjunto de alternativas, representaciones que son únicas salvo transformaciones afines positivas. El axioma de covarianza requiere entonces que la solución sea independiente de la representación elegida.

- $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *independencia de alternativas irrelevantes* (IAI) si para cualesquiera juegos de negociación (S, d) , (S', d') pertenecientes a $NS(N)$, verificando que $d = d'$, $S \subset S'$ y $f(S', d') \in S$, entonces se tiene que $f(S, d) = f(S', d')$. Esta propiedad quiere decir que si el conjunto factible se reduce, pero la solución del juego inicial continúa siendo factible, entonces la solución correspondiente al juego con conjunto factible más pequeño debe ser el mismo punto.

Nash (1950) demostró que las anteriores cuatro propiedades caracterizaban una solución en $NS(N)$, que definimos a continuación:

Definición 3.5 *Se denomina solución simétrica de Nash a la aplicación*

$$N : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada juego (S, d) de $NS(N)$, asigna el punto donde se maximiza la función $x \longrightarrow X_{i=1}^n (x_i - d_i)$ sobre el conjunto $\{x \in S : x \geq d\}$.

Por tanto, la solución simétrica de Nash asigna a cada problema de negociación el vector del conjunto factible, de entre aquellos que dominan al punto de desacuerdo, que maximiza el producto de las ganancias de los jugadores con respecto al punto de desacuerdo. Además es conocido que la aplicación N está bien definida: a cada juego (S, d) le asigna un punto que además es único.

Teorema 3.1 *Existe una única solución $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades de eficiencia, simetría, covarianza ante transformaciones de origen y de escala e independencia de alternativas irrelevantes y es la solución simétrica de Nash.*

En adelante denotaremos la solución simétrica de Nash de un juego (S, d) por $N(S, d)$.

En la demostración del resultado anterior, Nash no hace uso de la exigencia de racionalidad individual fuerte, que hemos incluido en la definición de solución para un juego de negociación. Utilizando la racionalidad individual fuerte, Roth (1977) caracteriza la solución simétrica de Nash, sin hacer uso de la propiedad de eficiencia:

Teorema 3.2 *Existe una única solución $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades de simetría, covarianza ante transformaciones de origen y de escala e independencia de alternativas irrelevantes y es la solución simétrica de Nash.*

Si en la anterior colección de axiomas, suprimimos el de simetría, queda caracterizada la familia de las soluciones ponderadas de Nash.

El interés de considerar soluciones no simétricas radica en la existencia, en ciertos problemas de negociación, de factores exógenos que pueden no estar recogidos por el modelo abstracto que constituye el juego de negociación. Así, en particular, los jugadores pueden ser realmente, grupos de diferente tamaño.

Empezamos entonces por definir las soluciones ponderadas de Nash.

Definición 3.6 *Si $w \in \mathbb{R}_{++}^N$, se denomina solución ponderada, de peso w , de Nash, a la aplicación $N^w : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada juego (S, d) de $NS(N)$ asigna el punto donde se maximiza la función*

$$x \longrightarrow \prod_{i=1}^n (x_i - d_i)^{w_i}$$

sobre el conjunto $\{x \in S : x \geq d\}$.

Como en el caso de la solución simétrica, para cada $\omega \in \mathbb{R}_{++}^N$, la solución ponderada existe siempre y es única. Además, la solución simétrica se obtiene, como caso particular de la ponderada, tomando un vector de pesos con todas las componentes iguales.

En Kalai(1977) se demuestra el siguiente resultado en el caso de dos jugadores. De forma análoga se prueba el resultado para cualquier número de jugadores.

Teorema 3.3 *Una solución $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verifica las propiedades de covarianza ante transformaciones de origen y de escala e independencia de alternativas irrelevantes si y sólo si existe $w \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que $f = N^w$.*

3.2.2 Las soluciones de Kalai-Smorodinsky

Se han definido y estudiado otras muchas soluciones al problema de la negociación, además de las soluciones de Nash. En este apartado, nos ocupamos de una familia de soluciones, definidas como valores de compromiso entre unos ciertos pagos mínimo y máximo. Comencemos por dar una definición de pago máximo.

Definición 3.7 *Si (S, d) es un juego de negociación de $NS(N)$, se denomina punto de utopía al vector $u(S, d)$ de $\mathbb{R}^N$, cuya componente i -ésima viene dada por el máximo pago que recibe el jugador i , de forma que a los restantes jugadores se les pueda garantizar su pago de desacuerdo, es decir,*

$$u_i(S, d) = \max\{t \in \mathbb{R} : \exists x \in S_d, x_i = t\}, \forall i \in N.$$

Utilizando en su definición $u(S, d)$, que representa la máxima aspiración de los jugadores, y d , que representa las mínimas aspiraciones, Kalai y Smorodinsky (1975) caracterizan un nuevo concepto de solución, que está definido como un "valor de compromiso" entre el punto de desacuerdo y el de utopía:

Definición 3.8 *Se denomina solución simétrica de Kalai-Smorodinsky a la aplicación $KS : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada juego (S, d) de $NS(N)$ le asigna el punto $KS(S, d)$, definido por:*

$$KS(S, d) = d + \alpha_0(u(S, d) - d),$$

$$\alpha_0 = \max\{\alpha \in \mathbb{R}_{++} : d + \alpha(u(S, d) - d) \in S_d\}$$

Es decir, la solución simétrica de Kalai-Smorodinsky hace corresponder a cada juego (S, d) , la intersección con la frontera de Pareto del conjunto S , del segmento que une los puntos de desacuerdo, d , y de utopía, $u(S, d)$.

Kalai y Smorodinsky caracterizan axiomáticamente este nuevo concepto de solución en el caso de dos jugadores, sustituyendo en el conjunto de axiomas que caracterizan la solución de Nash, el de independencia de alternativas irrelevantes por el siguiente:

- $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *monotonía individual* (MOI) si para cualesquiera juegos (S, d) y (S', d) de $NS(N)$ tales que $S_d \subseteq S'_d$ y, para cada jugador j de N , si

$$\forall i \in N \setminus \{j\}, u_i(S, d) = u_i(S', d)$$

entonces $f_j(S, d) \leq f_j(S', d)$.

Es decir, si en una situación de negociación aparecen nuevas alternativas, de manera que las utopías de los jugadores son las mismas, excepto la de uno de ellos, que es igual o mayor, este individuo recibe un pago que es igual o mayor al recibido en la situación inicial.

Kalai y Smorodinsky (1975) obtuvieron el siguiente resultado:

Teorema 3.4 *Existe una única solución $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$, con $N = \{1, 2\}$, que verifica las propiedades de eficiencia, simetría, covarianza ante transformaciones de origen y de escala y monotonía individual y es la solución simétrica de Kalai-Smorodinsky.*

Roth (1979) también caracteriza este valor de compromiso, en el caso de dos jugadores, aunque sustituyendo el axioma de monotonía individual por el de monotonía restringida:

- $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *monotonía restringida* (MOR) si para cualesquiera juegos (S, d) y (S', d) de $NS(N)$ tales que $S_d \subseteq S'_d$ y $u(S, d) = u(S', d)$ entonces $f(S, d) \leq f(S', d)$.

Es decir, si en una situación de negociación aparecen nuevas alternativas, de manera que las utopías de todos los jugadores son las mismas, entonces ningún jugador resulta perjudicado en la nueva situación.

Claramente la propiedad de monotonía restringida es más débil que la de monotonía individual, además Peters y Tijs (1985) demuestran que, en presencia de eficiencia y covarianza ante transformaciones de origen y escala, ambas propiedades de monotonía son equivalentes.

En el trabajo ya citado de 1979, Roth prueba un resultado de imposibilidad y es el de que para $n \geq 3$ no existe ninguna solución sobre $NS(N)$ que verifique simultáneamente eficiencia, simetría y monotonía restringida. Debido a este resultado de imposibilidad, Peters y Tijs (1984) restringieron el conjunto $NS(N)$ imponiendo la siguiente condición:

- $\forall x \in S, \forall i \in N$, si $x \notin P(S)$ y $x_i < u_i(S, d)$ entonces

$$\exists \epsilon > 0 : (x + \epsilon e^i) \in S,$$

donde si $i \in N$ $e^i = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^N : y_i = 1, y_j = 0, \forall j \neq i, j \in N$.

Esta condición permite la existencia de algunos tramos de nivel en la frontera de S , siempre que estén en alguna de las caras del cubo construido de forma que uno de los vértices sea el punto d y el vértice opuesto a éste, el punto $u(S, d)$.

Denotaremos por $NS(N)^I$ a la familia de juegos de negociación, con conjunto N de jugadores, que verifican la condición anterior.

Ejemplo 3.1 De la familia de juegos $NS(N)^I$ estaría excluido, por ejemplo, el siguiente juego, con 3 jugadores, donde

$$S = \text{comp conv} \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

es decir, consideramos la envoltura comprehensiva y convexa de los puntos $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$, y $d = (0, 0, 0)$. En la Figura 1 representamos S_d .

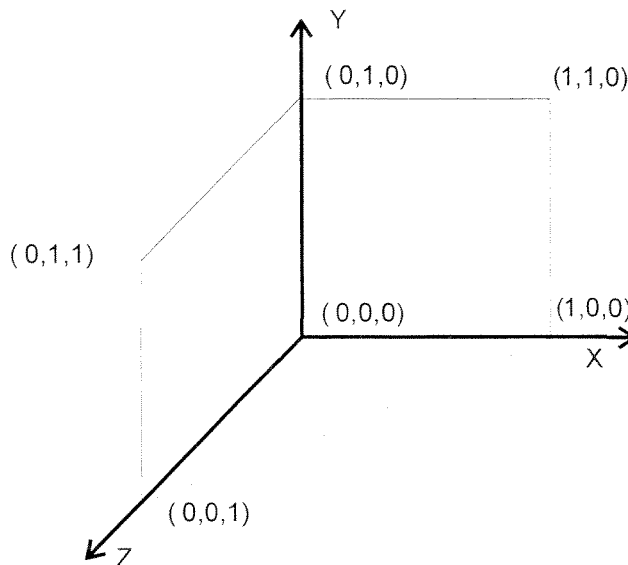


Figura 1

Nótese que su punto de utopía es el $(1,1,1)$ y por tanto no verifica la condición anterior. Si calculamos la solución de Kalai-Smorodinsky se obtiene un punto que no está en la frontera de Pareto del conjunto S . Un juego similar es precisamente el juego considerado por Roth en su resultado de imposibilidad citado anteriormente.

Peters y Tijs (1984) obtienen la familia de soluciones sobre $NS(N)^I$ que verifican eficiencia, covarianza ante transformaciones de origen y escala y monotonía individual.

Definición 3.9 Una curva monótona (para el conjunto N) es una aplicación

$$\lambda : [1, n] \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}_+^N : x \leq e^N, 1 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq n\},$$

donde $e^N = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$, que satisface la siguiente condición: para todo $1 \leq s \leq t \leq n$, se tiene $\lambda(s) \leq \lambda(t)$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i(s) = s$.

Por Λ^N denotamos la familia de todas las curvas monótonas para N .

Se verifica que cada aplicación $\lambda \in \Lambda^N$ es continua. Además, con cada curva monótona λ está asociada una solución de negociación:

Definición 3.10 Para cada $\lambda \in \Lambda^N$, se denomina solución no simétrica de Kalai-Smorodinsky asociada a λ , a la aplicación

$$KS^\lambda : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

que a cada $(S, d) \in NS(N)$, con $d = (0, \dots, 0)$ y $u(S, d) = (1, \dots, 1)$, le asigna el único punto en $\delta S_d \cap \{\lambda(t)/t \in [1, n]\}$. A otro $(S, d) \in NS(N)$, le asigna el punto $F^{-1}(z)$, donde $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es la aplicación tal que $F(d) = (0, \dots, 0)$, $F(u(S, d)) = (1, \dots, 1)$ y $z = KS^\lambda(F(S), F(d))$.

Ejemplo 3.2 La Figura 2 muestra la obtención de la solución no simétrica de Kalai-Smorodinsky asociada a una cierta λ , en la que $\lambda(1) = (1/3, 2/3)$, del juego (N, S, d) con $N = \{1, 2\}$, $S = \text{comp conv} \{(0, 1), (1/3, 1), (1, 0), (1, 1/3)\}$ y $d = (0, 0)$. Intersecando con la frontera de Pareto de S el conjunto

$$\{\lambda(t)/t \in [1, n]\}$$

se obtiene que $KS^\lambda(N, S, d) = (1/2, 5/6)$.

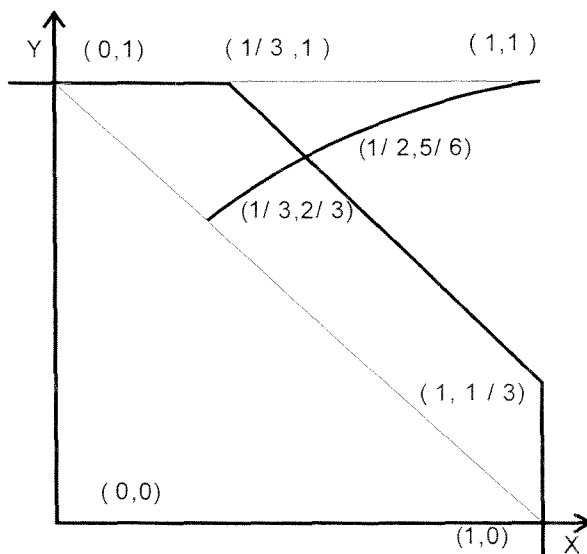


Figura 2

En Peters (1992) podemos encontrar la demostración de los dos siguientes resultados:

Teorema 3.5 Sea $f : NS(N)^I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una solución de negociación. Entonces f verifica eficiencia, covarianza ante transformaciones de origen y escala y monotonía individual si y sólo si $f = KS^\lambda$, para alguna $\lambda \in \Lambda^N$.

Sea $\lambda^* \in \Lambda^N$ definida por $\lambda^*(t) := tn^{-1}e^N$, para cada $t \in [1, n]$.

Corolario 3.1 Sea $f : NS(N)^I \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una solución de negociación. Entonces f verifica eficiencia, covarianza ante transformaciones de origen y escala, monotonía individual y simetría si y sólo si $f = KS^{\lambda^*}$.

En Gutiérrez (1993) se estudia una nueva familia de soluciones denominadas soluciones ponderadas de Kalai-Smorodinsky, argumentando que la familia de soluciones no simétricas de Kalai-Smorodinsky puede ser excesivamente amplia para reflejar la no simetría, ya que el tratamiento no simétrico que se da a los jugadores puede cambiar en función de la geometría del conjunto factible.

Ejemplo 3.3 Vamos a considerar dos juegos, (N, S, d) y (N, S', d) . En ambos casos $N = \{1, 2\}$ y $d = (0, 0)$.

$$S = \text{comp conv} \{(0, 1), (1/6, 1), (1, 0), (1, 1/6)\} \text{ y}$$

$$S' = \text{comp conv} \{(0, 1), (2/3, 1), (1, 0), (1, 2/3)\}.$$

En ambos juegos los jugadores son los mismos. Sin embargo al calcular la solución no simétrica de Kalai-Smorodinsky asociada a la curva λ de la Figura 3 (que recoge las diferencias entre los jugadores), vemos como en el juego (N, S, d) resulta favorecido el primer jugador mientras que en el juego (N, S', d) resulta favorecido el segundo. Es decir, aunque la curva monótona considerada es la misma, al cambiar el conjunto factible, ha cambiado el tratamiento que reciben los jugadores lo cual no parece demasiado razonable.

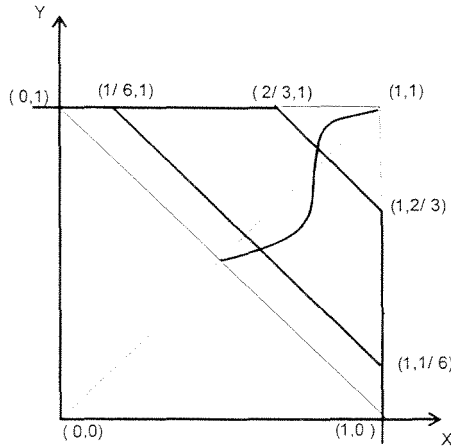


Figura 3

Definición 3.11 Dado $\omega \in \mathbb{R}_+^N$ tal que $\sum_{i \in N} \omega_i = 1$ se denomina solución ponderada de Kalai-Smorodinsky de peso ω a la aplicación

$$KS^\omega : NS(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada $(S, d) \in NS(N)$ con $d = (0, \dots, 0)$ y $u(S, d) = (1, \dots, 1)$, le asigna el único punto $z \in \delta S_d$ que verifica $z_i \omega_j = z_j \omega_i \forall i, j \in N$. A otro $(S, d) \in NS(N)$ le asigna el punto $F^{-1}(z)$ donde $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es tal que $F(d) = (0, \dots, 0)$ y $F(u(S, d)) = (1, \dots, 1)$ y $z = KS^\omega(F(S), F(d))$.

Ejemplo 3.4 La Figura 4 muestra la obtención de la solución ponderada de Kalai-Smorodinsky de peso ω , en la que $\omega = (1/3, 2/3)$, del juego (N, S, d) con $N = \{1, 2\}$, $S = \text{comp conv} \{(0, 1), (1/3, 1), (1, 0), (1, 1/3)\}$ y $d = (0, 0)$. Se obtiene que $KS^\omega(N, S, d) = (4/9, 8/9)$.

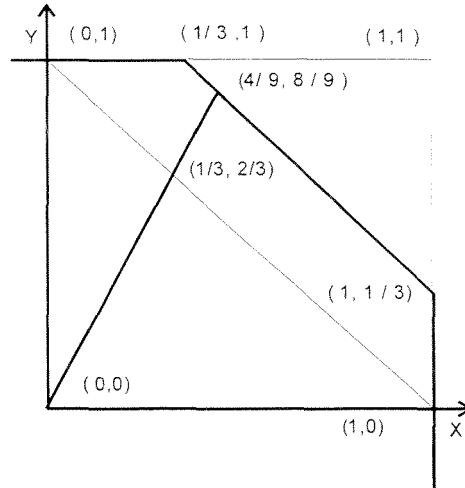


Figura 4

La familia de soluciones ponderadas de Kalai-Smorodinsky se caracteriza haciendo uso del siguiente axioma:

- $f : NS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *monotonía proporcional de utopías* (MPU) si para cualesquiera (S, d) y (S', d) de $NS(N)$ tales que $f(S, d) \in S'$ y

$$\frac{u_i(S, d) - d_i}{u_j(S, d) - d_j} = \frac{u_i(S', d) - d_i}{u_j(S', d) - d_j} \quad \forall i, j \in N$$

entonces $f(S', d) \geq f(S, d)$.

Es decir, si en un juego de negociación los jugadores han alcanzado un acuerdo, y se pasa a un nuevo juego en el que sigue siendo factible la antigua solución y en ambos juegos el pago de desacuerdo es el mismo y las ganancias utópicas están en la misma proporción, entonces ningún jugador debe resultar perjudicado en el nuevo juego.

En el siguiente resultado se considera una nueva subfamilia de juegos de negociación:

$$NS(N)^R = \{(S, d) \in NS(N) :$$

$$\{x \in S : \nexists y \in S, y \geq x, y \neq x\} = \{x \in S : \nexists y \in S, y > x\} \}.$$

Teorema 3.6 *Sea $f : NS(N)^R \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una solución de negociación. Entonces f verifica eficiencia, covarianza ante transformaciones de origen y de escala y monotonía proporcional de utopías si y sólo si $\exists \omega \in \mathbb{R}_+^N$ con $\sum_{i \in N} \omega_i = 1$ tal que $f = KS^\omega$.*

3.3 Situaciones de negociación con comunicación

Nos planteamos ahora el estudio de problemas de negociación, en los que no todos los jugadores pueden comunicarse libremente, sino que existen algunas restricciones a dicha comunicación, las cuales vamos a modelizar por medio de un grafo, de tal forma, que dos jugadores pueden comunicarse directamente si y sólo si existe un arco del grafo que los une.

Por supuesto, en un problema de negociación se necesita el consenso de todos los jugadores para alcanzar un acuerdo, por tanto, el grafo de comunicación debe ser conexo, es decir, la partición que el grafo induce, en el conjunto de jugadores sobre el que está definido, contiene una única clase.

Denotamos por $G(N)_c$ el conjunto de todos los elementos conexos de $G(N)$.

Definición 3.12 *Una situación de negociación, con comunicación y conjunto de jugadores N , es una terna (S, d, A) , donde (S, d) es un elemento de $NS(N)$ y A es un elemento de $G(N)_c$.*

En una de tales situaciones, los jugadores de N tienen que elegir una asignación en S , a través de un proceso de negociación que está limitado por las restricciones en la comunicación dadas por el grafo. Si no se alcanza un acuerdo de todos los jugadores, entonces el punto de desacuerdo, d , es la solución del juego.

Denotaremos por $CNS(N)$ todas las situaciones de negociación con comunicación y conjunto N de jugadores.

3.4 Conceptos de solución en situaciones CNS

Definición 3.13 *Un concepto de solución sobre $CNS(N)$ será una aplicación*

$$f : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada situación de negociación con comunicación (S, d, A) asigna un vector, cuya componente i -ésima representa el pago final que recibe el jugador i y que verifica:

- $f(S, d, A) \in S, \forall (S, d, A) \in CNS(N)$, es decir, la solución propone un vector del conjunto factible.
- $f(S, d, A) > d, \forall (S, d, A) \in CNS(N)$, es decir, la solución es un punto que verifica la racionalidad individual fuerte.

En los siguientes apartados, proponemos distintas soluciones y analizamos algunas de sus propiedades. Dos de estas soluciones se definen y estudian en Casas, García- Jurado y Prada-Sánchez (1996).

3.4.1 Solución de Nash ponderada por el grafo

En apartados anteriores hemos introducido algunas propiedades que permiten caracterizar soluciones en juegos de negociación. Una de estas propiedades, estándar en la literatura de la negociación, es la propiedad de simetría.

Al estudiar el efecto de las restricciones en la comunicación, en un juego de negociación, vamos a tener en cuenta que es posible que ciertas parejas de jugadores son incapaces de comunicarse directamente y, por ello, algunos jugadores pueden tener una posición predominante en el proceso de negociación (ya que están mejor "situados" en el grafo de comunicación). Estos aspectos no simétricos de la situación, pueden ser considerados por la solución final, si deseamos proponer una asignación justa para los jugadores.

De acuerdo con esta idea, vamos a proponer una nueva propiedad, que junto con otras, nos permita caracterizar una primera solución al problema de negociación con comunicación. Esta nueva propiedad es similar a la propiedad de arcos anónimos, utilizada por Borm y otros (1992), para axiomatizar el valor posicional de situaciones TU con comunicación, aunque adaptada convenientemente a las características de los juegos de negociación.

En primer lugar, queremos dar una medida de la importancia en la negociación de un arco o conjunto de arcos del grafo. Teniendo en cuenta que en un problema de negociación, la única coalición relevante es la formada por todos los jugadores, vamos a establecer dos clases de subconjuntos de arcos del grafo inicial: aquéllos en los que la partición inducida sobre el conjunto de

jugadores, contiene una única clase (conectando todos los jugadores de N) y aquéllos en los que la partición inducida contiene más de una clase.

Definición 3.14 Diremos que un grafo $A \in G(N)_c$ es equilibrado si y sólo si se verifica que cuando una coalición de arcos L induce una única componente conexa entonces cualquier otra coalición de arcos, L' , con $|L| = |L'|$ también induce una única componente conexa, es decir,

$$N/L = N \Rightarrow \forall L' \subseteq A, |L| = |L'|, N/L' = N$$

Nótese que en un grafo equilibrado, todos los arcos son igualmente importantes, en el sentido de que, para conocer si un cierto subconjunto de A conecta a todos los jugadores de N , es suficiente saber cuántos elementos (arcos) tiene.

A continuación relacionamos la propiedad anterior con la propiedad de arcos anónimos utilizada en el contexto TU.

Proposición 3.1 Si (S, d, A) es una situación de negociación con comunicación, en la que (S, d) es equivalente a un juego TU cero-normalizado, (N, ν) , el grafo A es equilibrado si y sólo si la situación (N, ν, A) es de arcos anónimos.

Demostración.

Vamos a tener en cuenta que por ser (N, ν) un juego TU cero-normalizado equivalente a un juego de regateo,

$$\nu(T) = 0, \forall T \subset N.$$

Si ahora consideramos el juego de arcos, ν_A , inducido por la situación (N, ν, A) ,

$$\nu_A(L) = 0 \text{ si } N/L \neq N \text{ y } \nu_A(L) = \nu(N) \text{ si } N/L = N.$$

Además

$$\text{si } N/L = N \Rightarrow \forall L' : L \subseteq L', N/L' = N.$$

Supongamos que A es equilibrado. Si tomamos

$$k_0 := \min\{|L| : L \subseteq A, N/L = N\}$$

podemos definir

$$f : \{0, 1, \dots, |A|\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(|L|) = \nu_A(L) = \nu(N) \forall L \subseteq A : |L| \geq k_0$$

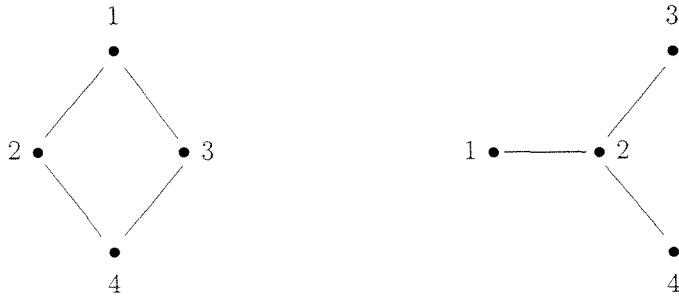
$$f(|L|) = \nu_A(L) = 0 \quad \forall L \subseteq A : |L| < k_0.$$

Se tiene así que $\nu_A(L) = f(|L|) \quad \forall L \subseteq A$ y por tanto la situación (N, ν, A) es de arcos anónimos.

Recíprocamente, si la situación es de arcos anónimos y teniendo en cuenta la forma del juego de arcos, si tomamos k_0 como se ha definido más arriba, se tiene que $N/L = N \Leftrightarrow |L| \geq k_0$ y por tanto A es equilibrado. $\square$

Ejemplo 3.5 Si consideramos como conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$, los grafos

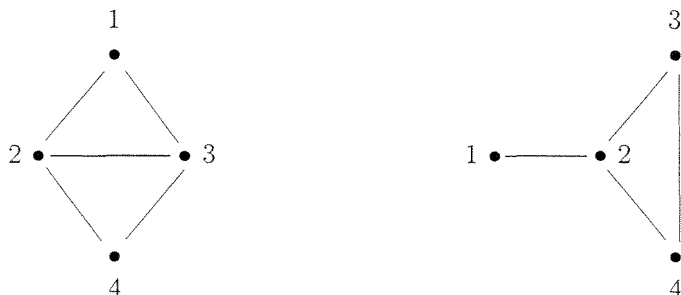
$$A = \{(1:2), (2:4), (3:4), (3:1)\} \text{ y } A' = \{(1:2), (2:4), (2:3)\},$$



son equilibrados. Cualquier subconjunto (tanto de A como de A') con 3 arcos (o más en el caso de A), e independientemente de qué arcos sean, conecta a todos los jugadores (que en ese caso podrán alcanzar un acuerdo). Subconjuntos con dos arcos o menos no conectan a todos los jugadores y por tanto conducirían a éstos al pago de desacuerdo.

Sin embargo, los grafos

$$A = \{(1:2), (2:4), (2:3), (3:4), (3:1)\} \text{ y } A' = \{(1:2), (2:4), (2:3), (3:4)\},$$



no son equilibrados. Por ejemplo, en A' , $\{(1 : 2), (2 : 4), (3 : 4)\}$ es un subconjunto formado por tres arcos que conecta a todos los jugadores, mientras que $\{(3 : 4), (2 : 3), (2 : 4)\}$ está también formado por tres arcos y no conecta a todos los jugadores. El arco $(1:2)$ es más importante que todos los demás, en el sentido de que es imprescindible para conseguir un acuerdo entre todos los jugadores. Consideraciones análogas podríamos hacer con el grafo A .

Vamos a denotar por $(S(C), \theta)$ el siguiente juego de negociación, con conjunto N de jugadores:

$$S(C) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^n x_i \leq C\}$$

con $C \in \mathbb{R}_{++}$ y $\theta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$.

Con todos estos elementos, estamos ya en condiciones de introducir una nueva propiedad:

- $f : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *grafos equilibrados* (GEQ) si para todo grafo A equilibrado y para todo jugador i de N , si $C \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$f_i(S(C), \theta, A) = \alpha |A_i|,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$, A_i es el subconjunto de A formado por los arcos que parten del jugador i y $|A_i|$ es el cardinal de A_i .

En la literatura de juegos cooperativos sin utilidad transferible, distintos autores han utilizado propiedades que indican cómo debe comportarse una solución, cuando el juego sin utilidad transferible es equivalente a un juego

TU. Entre otros, Aumann (1985) en la caracterización del valor de Shapley en juegos sin utilidad transferible, Levy y McLean (1991) en la caracterización del valor de Shapley ponderado en juegos sin utilidad transferible y Winter (1991) en la caracterización del valor coalicional en juegos sin utilidad transferible.

La propiedad de grafos equilibrados quiere decir que, si los jugadores tienen que dividir una cantidad C , (esta situación es un juego de negociación, simétrico y además, equivalente a un juego con utilidad transferible) y todos los arcos de comunicación son igualmente importantes, la solución f propone para cada jugador, una cantidad que es proporcional a sus posibilidades de comunicación. Así pues, en esta propiedad, especificamos cómo debe comportarse la solución cuando el juego de negociación es realmente un juego con utilidad transferible en determinadas condiciones. Es una propiedad más débil que la de arcos anónimos utilizada en la caracterización del valor posicional.

Propiedades de las soluciones a juegos de negociación, se pueden reescribir de forma inmediata como propiedades de soluciones a situaciones de negociación con comunicación restringida. Vamos a considerar las siguientes:

- $f : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *covarianza ante transformaciones de origen y de escala* (COV) si para cada situación de negociación con comunicación $(S, d, A) \in CNS(N)$ y para todo $a \in \mathbb{R}^N$ y $b \in \mathbb{R}_{++}^N$ entonces $f(aS + b, ad + b, A) = af(S, d, A) + b$.
- $f : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *independencia de alternativas irrelevantes* (IAI) si para cualesquiera situaciones de negociación con comunicación (S, d, A) , (S', d', A) pertenecientes a $CNS(N)$, con $d=d'$, $S \subset S'$ y $f(S', d', A) \in S$, entonces se tiene que $f(S, d, A) = f(S', d', A)$.

Proponemos a continuación una solución a situaciones de negociación con comunicación.

Definición 3.15 Denominamos solución de Nash ponderada por el grafo a la aplicación

$$\varphi_N : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

tal que $\forall (S, d, A) \in CNS(N)$, $\varphi_N(S, d, A) = N^w(S, d)$ con $w = p(u^N, A)$ y donde u^N denota el juego TU de unanimidad de los N jugadores, es decir, $u^N(T) = 0$, $\forall T \subset N$ y $u^N(N) = 1$.

Es decir, calculamos la solución de Nash ponderada del juego de negociación donde el peso es el valor posicional de la situación TU con comunicación (u^N, A) .

Por tratarse de una solución de Nash, φ_N está bien definida. Además la siguiente proposición enumera sus propiedades más interesantes:

Proposición 3.2 *La solución de Nash ponderada por el grafo*

$$\varphi_N : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

verifica eficiencia, covarianza ante transformaciones de origen y escala, independencia de alternativas irrelevantes y grafos equilibrados.

Además si $A = A(N) := \{(i : j) : i \in N, j \in N, i \neq j\}$, o lo que es lo mismo, cuando consideramos el grafo completo sobre N , entonces, para cada $(S, d) \in NS(N)$, $\varphi_N(S, d, A(N)) = N(S, d)$, es decir, cuando no hay restricciones a la comunicación, la solución de Nash ponderada por el grafo de la situación con comunicación, $\varphi_N(S, d, A(N))$, coincide con la solución de Nash del correspondiente juego de regateo, $N(S, d)$.

Demostración.

Todas las soluciones ponderadas de Nash verifican las propiedades de (EFI), (COV) e (IAI).

En cuanto a la propiedad de (GEQ), si un grafo A es equilibrado, la situación TU (u^N, A) es de arcos anónimos; entonces, por las propiedades de (EFC) y (AAN) del valor posicional,

$$\forall i \in N, w_i = p_i(u^N, A) = \frac{|A_i|}{2|A|}.$$

Es una propiedad conocida de las soluciones de Nash que si $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, entonces $N^w(S(1), \theta) = w$, con lo que, si $C \in \mathbb{R}$, por la propiedad de (COV), para todo $i \in N$, $N_i^w(S(C), \theta)$ es proporcional a $|A_i|$.

En cuanto a la última parte de la proposición, queremos ver que si el grafo es completo, es decir, no hay restricciones a la comunicación, la solución de Nash ponderada por el grafo coincide con la solución de Nash.

En primer lugar vamos a probar que $\text{Sh}_a(A(N), u_{A(N)}^N) = \text{Sh}_b(A(N), u_{A(N)}^N)$ para todo $a, b \in A(N)$.

Si $a \in A(N)$,

$$\text{Sh}_a(A(N), u_{A(N)}^N) = \sum_{a \in L \subseteq A(N)} \frac{(l-1)! (|A(N)| - l)!}{|A(N)|!} \{u_{A(N)}^N(L) - u_{A(N)}^N(L \setminus \{a\})\},$$

donde $l = |L|$.

Por las características de los juegos que estamos utilizando, para el cálculo de $\text{Sh}_a(A(N), u_{A(N)}^N)$, para cada $a \in A(N)$, son significativas únicamente las coaliciones de arcos, L , tales que $a \in L$, $u_{A(N)}^N(L) = 1$ y $u_{A(N)}^N(L \setminus \{a\}) = 0$, puesto que son las únicas que dan lugar a sumandos distintos de cero y además iguales a uno.

Sea entonces $a \in A(N)$. Para cada $l \in \{1, \dots, |A(N)|\}$, consideremos

$$H_a^l = \{L \subseteq A(N), |L| = l, a \in L, u_{A(N)}^N(L) = 1, u_{A(N)}^N(L \setminus \{a\}) = 0\},$$

es decir, coaliciones de arcos de cardinal l , en las que el arco a tiene una aportación marginal distinta de cero.

Análogamente, si $b \in A(N)$ sea

$$H_b^l = \{L \subseteq A(N), |L| = l, b \in L, u_{A(N)}^N(L) = 1, u_{A(N)}^N(L \setminus \{b\}) = 0\}.$$

Entonces vamos a comprobar que para cada $l \in \{1, \dots, |A(N)|\}$, se verifica que $|H_a^l| = |H_b^l|$, $\forall a, b \in A(N)$. Para ello es suficiente comprobar que para cada elemento distinto de H_a^l podemos construir uno distinto de H_b^l y recíprocamente. Efectivamente, si $a \in L \in H_a^l$, $a = (i : j)$ y $b = (k : h)$, construiremos $L' \in H_b^l$ intercambiando en los arcos de L al jugador i con el jugador k y al jugador j con el jugador h y dejando igual a los demás jugadores. Puesto que $a \in L \in H_a^l$ entonces se tiene que $b \in L' \in H_b^l$.

Así pues para cada $l \in \{1, \dots, |A(N)|\}$ $|H_a^l| = |H_b^l|$, $\forall a, b \in A(N)$, y en consecuencia $\text{Sh}_a(A(N), u_{A(N)}^N) = \text{Sh}_b(A(N), u_{A(N)}^N)$ para todo $a, b \in A(N)$.

Así

$$p_i(u^N, A(N)) = p_j(u^N, A(N)), \forall i, j \in N$$

y por tanto $\varphi_N(S, d, A(N)) = N(S, d)$. $\square$

Desafortunadamente, las anteriores propiedades no nos permiten caracterizar axiomáticamente la solución de Nash ponderada por el grafo sobre todo $\text{CNS}(N)$, aunque sí es posible si nos restringimos a las situaciones de negociación con comunicación en las que el grafo de comunicación no contiene ciclos, y que vamos a denotar por $\text{CNS}(N)_s$.

Teorema 3.7 *Existe una única solución $f : CNS(N)_s \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica covarianza ante transformaciones de origen y de escala, independencia de alternativas irrelevantes y grafos equilibrados. Dicha aplicación es la solución de Nash ponderada por el grafo.*

Demostración.

Existencia: Es consecuencia de la proposición anterior.

Unicidad: Sea f una solución, definida de $CNS(N)_s$ en $\mathbb{R}^N$, que verifica las propiedades (COV), (IAI) y (GEQ). Queremos probar que

$$f(S, d, A) = N^w(S, d), \text{ con } w = p(u^N, A), \forall (S, d, A) \in CNS(N)_s.$$

En primer lugar, consideremos $(S(C), \theta, A) \in CNS(N)_s$ con $C=1$. Por ser f una solución, $f_i(S(C), \theta, A) > 0, \forall i \in N$ y $\sum_{i=1}^n f_i(S(C), \theta, A) \leq 1$. Sea F la transformación afín positiva dada por:

$$F(x) = \left(\sum_{i=1}^n f_i(S(C), \theta, A) x_i \right) x, \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Ahora, consideremos

$$F(S(C)) = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n f_i(S(C), \theta, A)\}.$$

Claramente, $F(S(C)) \subseteq S(C)$ y $f(S(C), \theta, A) \in F(S(C))$. Como f satisface (IAI), entonces

$$f(F(S(C)), \theta, A) = f(S(C), \theta, A)$$

y, ya que f verifica (COV)

$$f(F(S(C)), \theta, A) = F(f(S(C), \theta, A)) = \left(\sum_{i=1}^n f_i(S(C), \theta, A) \right) f(S(C), \theta, A).$$

De las dos expresiones anteriores, se sigue que $\sum_{i=1}^n f_i(S(C), \theta, A) = 1$.

Además, como A no contiene ciclos, es equilibrado. Entonces, teniendo en cuenta que f satisface (GEQ) y la última igualdad, $\forall i \in N$ se tiene:

$$f_i(S(C), \theta, A) = \frac{|A_i|}{2|A|} = N_i^w(S(C), \theta), \text{ con } w = p(u^N, A).$$

Finalmente, consideremos $(S, d, A) \in CNS(N)_s$ y F la transformación afín tal que $F(N^w(S, d)) = f(S(C), \theta, A)$ y $F(d) = \theta$ con $w = p(u^N, A)$ y $C=1$. Es también conocido para las soluciones de Nash que en esas condiciones

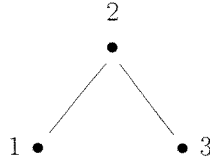
$$F(S) \subseteq S(C)$$

y, por la factibilidad de las soluciones de Nash, $f(S(C), \theta, A) \in F(S)$. Ya que f verifica (IAI), $f(F(S), \theta, A) = f(S(C), \theta, A)$. Por último, teniendo en cuenta que f satisface (COV), $f(S, d, A) = N^w(S, d)$, con $w = p(u^N, A)$. $\square$

Hemos visto que φ_N verifica algunas propiedades interesantes. Vamos a ver ahora cómo funciona en un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.6 Consideremos $(S, d, A) \in CNS(N)$ donde $N = \{1, 2, 3\}$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^N : 3x + y + z \leq 1\}, \quad d = (0, 0, 0) \quad y \quad A = \{(1 : 2), (2 : 3)\}.$$



En primer lugar, si no tenemos en cuenta las restricciones a la comunicación: $N(S, d) = (4/36, 12/36, 12/36)$. Teniendo en cuenta el grafo de comunicación: $p(u^N, A) = (1/4, 2/4, 1/4)$ y $\varphi_N(S, d, A) = (3/36, 18/36, 9/36)$.

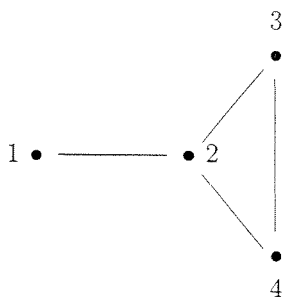
En este ejemplo, la solución φ_N da un pago mayor al segundo jugador por su mejor posición en el proceso de negociación, y paga a los otros dos jugadores proporcionalmente (en el sentido de Nash) a sus posibilidades de comunicación.

En el ejemplo anterior, dado que el grafo es equilibrado, a los jugadores se les da un peso proporcional a sus posibilidades de comunicación. Ahora bien, al calcular φ_N , no siempre el peso de cada jugador coincide con el número de arcos que establece. En el siguiente ejemplo, un arco ocupa una posición dominante en el grafo de comunicación (el cual ya no es equilibrado). En el reparto final, los jugadores que forman ese arco resultan favorecidos, en particular el jugador 1 obtiene un pago mayor que los jugadores 3 y 4, aunque éstos en principio tienen más posibilidades de comunicación.

Ejemplo 3.7 Consideremos la situación con comunicación (S, d, A) , con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$, donde

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^N : x + y + z + t \leq 1\}, \quad d = (0, 0, 0, 0)$$

$$A = \{(1 : 2), (2 : 3), (2 : 4), (3 : 4)\}.$$



En primer lugar, si no tenemos en cuenta las restricciones a la comunicación: $N(S, d) = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Teniendo en cuenta el grafo de comunicación:

$$p(u^N, A) = (3/12, 5/12, 2/12, 2/12) \text{ y } \varphi_N(S, d, A) = (3/12, 5/12, 2/12, 2/12).$$

3.4.2 Valor de compromiso ponderado por el grafo

En el apartado anterior se introduce un concepto de solución a situaciones de negociación con comunicación restringida, basado en las soluciones ponderadas de Nash.

Análogamente, podemos definir nuevas soluciones al problema de negociación con comunicación, relacionadas con otras soluciones de negociación no simétricas. En particular, vamos a proponer un valor de compromiso para problemas de negociación con comunicación, inspirado en las soluciones ponderadas de Kalai-Smorodinsky.

Vamos a denotar por $CNS(N)^R$ el conjunto de situaciones de negociación con comunicación, (S, d, A) , en las que (S, d) es un elemento de $NS(N)^R$ y A es un grafo de $G(N)_c$. Por $CNS(N)^R_s$ denotaremos el conjunto de situaciones de negociación con comunicación que pertenecen a $CNS(N)^R$, en las que además, el grafo de comunicación no contiene ciclos.

Definición 3.16 Se denomina valor de compromiso ponderado por el grafo a la aplicación

$$\varphi_C : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N,$$

que a cada $(S, d, A) \in CNS(N)$, con $d = (0, \dots, 0)$ y $u(S, d) = (1, \dots, 1)$, le asigna el único punto en δS que pertenece a la recta que pasa por los puntos d y $p(u^N, A)$. Es decir, es la intersección con la frontera de S , de la recta que une el punto de desacuerdo con el valor posicional de la situación TU con comunicación (u^N, A) . A otro $(S, d, A) \in CNS(N)$, le asigna el punto $F^{-1}(z)$, donde $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ es la aplicación tal que $F(d) = (0, \dots, 0)$, $F(u(S, d)) = (1, \dots, 1)$ y $z = \varphi_C(F(S), F(d), A)$.

Por tanto $\varphi_C(S, d, A)$ es la solución de Kalai-Smorodinsky ponderada del juego (S, d) , donde el peso es $p(u^N, A)$.

Es posible caracterizar axiomáticamente el valor de compromiso ponderado por el grafo. Para ello adaptamos la propiedad de monotonía proporcional de utopías al contexto de la comunicación restringida:

- $f : CNS(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *monotonía proporcional de utopías* (MPU) si para cualesquiera (S, d, A) y (S', d, A) de $CNS(N)$ tales que $f(S, d, A) \in S'$ y

$$\frac{u_i(S, d) - d_i}{u_j(S, d) - d_j} = \frac{u_i(S', d) - d_i}{u_j(S', d) - d_j} \quad \forall i, j \in N$$

entonces $f(S', d, A) \geq f(S, d, A)$.

Se tienen entonces los siguientes resultados:

Proposición 3.3 El valor de compromiso ponderado por el grafo

$$\varphi_C : CNS(N)^R \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

verifica eficiencia, covarianza ante transformaciones de origen y escala, monotonía proporcional de utopías y grafos equilibrados.

Además si $A = A(N) := \{(i : j) : i \in N, j \in N, i \neq j\}$, o lo que es lo mismo, cuando consideramos el grafo completo sobre N , entonces, para cada $(S, d) \in NS(N)$, $\varphi_C(S, d, A(N)) = KS(S, d)$, es decir, cuando no hay restricciones a la comunicación, el valor de compromiso ponderado por el grafo de la situación con comunicación, $\varphi_C(S, d, A(N))$, coincide con la solución de Kalai-Smorodinsky del correspondiente juego de regateo, $KS(S, d)$.

Demostración.

Por ser el valor de compromiso una solución de Kalai-Smorodinsky proporcional verifica (EFI), (COV) y (MPU). En cuanto a la propiedad de (GEQ) es consecuencia inmediata de las propiedades de (EFC) y (AAN) del valor posicional.

En cuanto a la última parte de la proposición, como vimos en la proposición 3.2., si el grafo es completo, se tiene que $\text{Sh}_a(N, u_{A(N)}^N) = \text{Sh}_b(N, u_{A(N)}^N)$ para todo $a, b \in A(N)$. Así $p_i(u^N, A(N)) = p_j(u^N, A(N))$ para todo $i, j \in N$ y por tanto $\varphi_C(S, d, A(N)) = \text{KS}(S, d)$. $\square$

Teorema 3.8 *Existe una única solución $f : \text{CNS}(N)_s^R \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica eficiencia, covarianza ante transformaciones de origen y de escala, monotónia proporcional de utopías y grafos equilibrados. Dicha aplicación es el valor de compromiso ponderado por el grafo.*

Demostración.

Existencia: Es consecuencia de la proposición anterior.

Unicidad: Sea ahora f un concepto de solución en $\text{CNS}(N)_s^R$ que satisface (EFI), (COV), (MPU) y (GEQ). Veamos que $f(S, d, A) = \varphi_C(S, d, A) \forall (S, d, A)$ que pertenece a $\text{CNS}(N)_s^R$.

Consideremos en primer lugar $(S(C), \theta, A)$, con $C \in \mathbb{R}_{++}$. Por verificar f (EFI) se tiene que $f(S(C), \theta, A) = \epsilon$ para algún $\epsilon > 0$ tal que $\sum_{i \in N} \epsilon_i = C$.

Como además A no contiene ciclos, A es equilibrado y $(S(C), \theta, A)$ es de arcos anónimos y por la propiedad de (GEQ) de f ,

$$\epsilon_i = \alpha |A_i|, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Como $\sum_{i \in N} \epsilon_i = C$ entonces $\alpha = C / \sum_{i \in N} |A_i|$ y

$$f_i(S(C), \theta, A) = C |A_i| / \sum_{i \in N} |A_i|.$$

Por otro lado

$$p_i(u^N, A) = \frac{|A_i|}{\sum_{i \in N} |A_i|} = \omega_i, \forall i \in N \Rightarrow \varphi_C(S(1), \theta, A) = p(u^N, A).$$

Por (COV) de φ_C , $\varphi_C(S(C), \theta, A) = C_p(u^N, A)$ y así

$$f(S(C), \theta, A) = \varphi_C(S(C), \theta, A).$$

Sea ahora (S, d, A) genérico y consideremos $s = \varphi_C(S, d, A)$. Sea F la transformación afín positiva tal que $F_i(d) = 0$ y $F_i(u(S, d)) = 1$, $\forall i \in N$ y consideremos el juego de regateo $(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta)$.

Se verifica que

$$u_i(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta) = u_j(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta), \forall i, j \in N$$

y $F(s) = \varphi_C(F(S), \theta, A) \in S(\sum_{i \in N} F_i(s))$, entonces como φ_C verifica (MPU) se tiene que $\varphi_C(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta, A) \geq F(s)$ y por (EFI) de φ_C ,

$$\varphi_C(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta, A) = F(s) = f(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta, A).$$

Pero además

$$f(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta, A) = \varphi_C(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta, A) = F(s) \in F(S)$$

por lo que aplicando el axioma (MPU) de f se tiene que

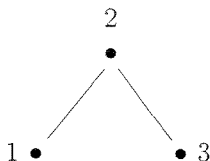
$$f(F(S), \theta, A) \geq f(S(\sum_{i \in N} F_i(s)), \theta, A) = F(s) \in P(F(S))$$

y por tanto por (EFI) de f , $f(F(S), \theta, A) = F(s) = F(\varphi_C(S, d, A))$. Finalmente aplicando nuevamente (COV) $f(S, d, A) = \varphi_C(S, d, A)$. $\square$

Ejemplo 3.8 Consideremos la situación con comunicación (S, d, A) , con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$, donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^N : x + y + z \leq 1, x \leq 1/4\}, \quad d = (0, 0, 0)$$

$$A = \{(1 : 2), (2 : 3)\}.$$



$$p(u^N, A) = (1/4, 1/2, 1/4) \text{ y } \varphi_N(S, d, A) = (1/4, 1/2, 1/4).$$

En este caso, la solución propuesta por φ_N no es muy razonable ya que al jugador 1 le asigna su pago de utopía.

Calculando el valor de compromiso ponderado por el grafo se obtiene

$$\varphi_C(S, d, A) = (1/13, 8/13, 4/13)$$

que parece recoger mejor las diferentes posibilidades de comunicación y la geometría del conjunto factible.

3.4.3 Obtención de una solución por aproximación estratégica

Hasta ahora, al buscar un concepto de solución para situaciones de negociación con comunicación hemos seguido el enfoque axiomático.

Una aproximación complementaria en el estudio de soluciones de juegos cooperativos es la estratégica: a partir del juego cooperativo se describe el proceso de negociación entre los jugadores por medio de un juego no cooperativo y se estudian las estrategias en equilibrio de este último. El pago de dichas estrategias nos proporciona una solución al juego cooperativo. Este proceso se denomina *implementación* de un concepto de solución.

Entre los trabajos que aparecen en la literatura y que estudian juegos cooperativos desde un punto de vista estratégico podemos citar el de Moulin (1984), en el contexto de los juegos de regateo sin restricciones a la comunicación. El pago al equilibrio perfecto en subjuegos del juego no cooperativo definido por Moulin a partir de un juego de regateo coincide con la solución axiomática, al problema de regateo, de Kalai-Smorodinsky. Otros trabajos en esta línea son

los de Nash (1953) y Rubinstein (1982) en los que se implementa la solución axiomática de Nash, el de Crawford (1977) en el que se implementa la solución de Kalai-Smorodinsky, el de Gul (1989) en el que se implementa el valor de Shapley, el de Borm y Tijs (1992) en el que se relacionan juegos no cooperativos y juegos NTU y conceptos de solución en ambos tipos de juegos y más recientemente el trabajo de Hart y Mas-Colell (1996) en el que se implementa una solución para juegos NTU que coincide con el valor de Shapley consistente y el de Bergantiños, Casas y Vázquez (1996) en el que se implementa una solución para juegos NTU que se puede definir como un valor de compromiso y generaliza al τ -valor de los juegos TU y la solución de Kalai-Smorodinsky de los juegos de regateo.

En esta sección estudiamos, desde un punto de vista estratégico, el problema de regateo con comunicación restringida mediante un grafo. A partir de una situación de este tipo, se define un juego no cooperativo (teniendo en cuenta algunas de las ideas que aparecen en Moulin (1984)), se estudian los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos de dicho juego y se obtiene el pago al que conducen, que resulta ser único. Proponemos ese pago como solución a la situación de negociación con comunicación y finalmente estudiamos algunas de sus propiedades.

En esta sección tendremos en cuenta las definiciones y resultados vistos en el capítulo primero relativos a juegos no cooperativos.

Sea entonces $(S, d, A) \in CNS(N)$ y vamos a suponer por conveniencia que $d_i = 0$, $\forall i \in N$ y $u_i(S, d) = 1$, $\forall i \in N$ (estas suposiciones no son restrictivas puesto que si nos planteamos obtener la solución de una situación que no las verifique basta hacer la transformación de origen y escala adecuada, calcular la solución de la situación transformada y luego deshacer el cambio).

Si $i \in N$, vamos a denotar por $A(i)$ el conjunto de jugadores que se comunican directamente con él, es decir $A(i) := \{j \in N : (i : j) \in A\}$. Por $|A(i)|$ denotamos el número de elementos de $A(i)$.

Vamos a considerar un juego en forma estratégica, definido a partir de (S, d, A) , que vamos a denotar por $\Gamma(S, d, A)$. La idea intuitiva es la siguiente. Supongamos que los jugadores tienen que repartirse una cierta ganancia. Entonces cada par de jugadores que se comunican directamente (es decir, que están unidos mediante un arco) se reparten a partes iguales una parte de la ganancia total. Más precisamente, se ordena a los jugadores y se juega un juego en varias etapas. En cada etapa, un jugador propone a cada uno de los jugadores con los que se comunica directamente, y que aún no le hayan hecho

ningún ofrecimiento, repartirse a partes iguales una cierta cantidad. En cada etapa, el jugador correspondiente podrá rechazar los ofrecimientos anteriores. Además el juego comienza con una subasta, en la que cada jugador propone una cantidad entre 0 y 1, de forma que el jugador que gana la subasta inicia los ofrecimientos y si algún jugador rechaza, sabe que con una probabilidad p , igual a la cantidad subastada por el jugador ganador de dicha subasta, se aceptarán sus ofrecimientos y con una probabilidad de $1 - p$ el juego finaliza recibiendo todos los jugadores su pago de desacuerdo.

La motivación intuitiva de esta subasta previa es conseguir que los jugadores hagan en cada etapa ofrecimientos razonables y que no rechacen cualquier propuesta porque ello conlleva un riesgo.

$\Gamma(S, d, A)$ es el siguiente:

Etapla 0) Cada agente $i \in \{1, \dots, n\}$, independientemente, presenta una oferta p_i , $0 < p_i \leq 1$.

A continuación ordenamos los jugadores por orden decreciente de ofertas (en caso de empate entre dos jugadores se efectuaría un sorteo para ordenarlos). Supongamos entonces

$$p_1 > p_2 > \dots > p_n.$$

Etapla 1) El agente 1 ofrece a cada jugador $j \in A(1)$ una cantidad x_1^j de forma que es factible el reparto de x_1^j a partes iguales entre los jugadores 1 y j .

A continuación le corresponde actuar al jugador n .

Este jugador, forme parte o no de $A(1)$, conoce los ofrecimientos efectuados por el jugador 1 y puede rechazarlos.

En ese caso, el jugador n debe hacer a cada jugador $j \in A(n)$ un ofrecimiento de x_n^j (tal que sea factible el reparto igualitario entre los jugadores n y j de esa cantidad) de forma que con probabilidad p_1 el juego termina, cada jugador $j \in A(n)$, $j \neq 1$, recibe $x_n^j/2$, n recibe $\sum_{j \in A(n)} x_n^j/2$ y el resto de los jugadores reciben 0 y con probabilidad $1-p_1$ el juego termina y los jugadores reciben todos pago 0.

Nótese que si el jugador n rechaza, el jugador 1 recibe 0. Con esto se pretende obligar al jugador 1 a hacer ofrecimientos razonables para que ningún jugador rechace y todos tengan la oportunidad de intervenir en el proceso de negociación.

Si por el contrario el jugador n acepta las ofertas del jugador 1, el juego continúa en la etapa 2.

Etapla 2) El jugador n ofrece a cada jugador $j \in A(n)$, $j \neq 1$ una cantidad x_n^j de forma que es factible el reparto de x_n^j a partes iguales entre los jugadores n y j y compatible con anteriores ofrecimientos (en el sentido de que sea factible tanto el reparto propuesto en esta etapa como los repartos propuestos en la etapa anterior).

Si el jugador $n - 1$ rechaza algún ofrecimiento anterior, el jugador $n - 1$ hace a cada jugador $j \in A(n - 1)$ un ofrecimiento de x_{n-1}^j de forma que con probabilidad p_1 el juego termina, cada jugador $j \in A(n - 1)$, $j \neq 1$, recibe $x_{n-1}^j/2$, $n - 1$ recibe $\sum_{j \in A(n-1)} x_{n-1}^j/2$ y el resto de los jugadores reciben 0 y con probabilidad $1-p_1$ el juego termina y los jugadores reciben todos pago 0.

Si el jugador $n - 1$ no rechaza vamos a la etapa 3.

...

Etapla n-1) Si el conjunto $\{j \in A(3) : j \neq 1, n, n-1, \dots, 4\} \neq \emptyset$ el agente 3 ofrece a los jugadores j de dicho conjunto (es decir, al jugador 2) una cantidad x_3^j de forma que es factible el reparto de x_3^j a partes iguales entre los jugadores 3 y j y compatible con anteriores ofrecimientos.

Si el jugador 2 acepta las propuestas anteriores, el juego finaliza y cada jugador $k \in N$ recibe $\sum_{i,j=1}^n x_i^j/2$, donde en la suma anterior $i = k$ o $j = k$.

Si el jugador 2 rechaza las anteriores ofertas, el jugador 2 hace a cada jugador $j \in A(2)$ un ofrecimiento de x_2^j de forma que con probabilidad p_1 el juego termina, cada jugador $j \in A(2)$, $j \neq 1$, recibe $x_2^j/2$, 2 recibe $\sum_{j \in A(2)} x_2^j/2$ y el resto de los jugadores reciben 0 y con probabilidad $1-p_1$ el juego termina y los jugadores reciben todos pago 0.

Proposición 3.4 Sea $(S, d, A) \in CNS(N)^R$ tal que el pago de desacuerdo de todos los jugadores sea 0 y el pago de utopía 1. Si el juego no cooperativo $\Gamma(S, d, A)$ definido a partir de (S, d, A) según el procedimiento anterior tiene estrategias en equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, todas tienen el mismo pago.

Demostración.

Para cada $i, j \in N$ tal que $(i : j) \in A$ sea

$$u(i : j) := \max\{t \in \mathbb{R} : x \in S, x_i = t, x_j = t, x_k = 0 \ \forall k \in N, k \neq i, j\}$$

y para cada $i \in N$ sea $u(i) := \sum_{j \in A(i)} u(i : j)$.

Consideremos ahora

$$\alpha_0 := \max\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \alpha(u(1), \dots, u(n)) \in S\}$$

y $z := \alpha_0(u(1), \dots, u(n))$.

Si x_i es el pago a un cierto jugador $i \in N$ en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (abreviadamente E.N.P.S.), vamos a probar que $x_i = z_i$.

- En primer lugar supongamos que $x_i < z_i$. Vamos a llegar a un absurdo. Si analizamos los distintos casos que se pueden presentar, puede ocurrir que el jugador i no sea el ganador de la subasta o puede ocurrir que sí lo sea.

– Supongamos que el jugador i no ha sido el ganador de la subasta. Nuevamente vamos a considerar dos posibles casos: que $p_1 \geq \alpha_0$ o que $p_1 < \alpha_0$, donde p_1 es la cantidad subastada por el jugador ganador de la subasta.

- * Si $p_1 \geq \alpha_0$, entonces $1 \geq \alpha_0/p_1$. Por tanto, si el jugador i subasta una cantidad p_i tal que $p_1 > p_n > p_i$, en la etapa 1 puede rechazar la oferta del jugador 1 y ofrecer a cada jugador $j \in A(i)$ un pago de $x_i^j = 2\alpha_0 u(i : j)/p_1$. De esta forma x_i^j es menor o igual que $2u(i : j)$ y por tanto factible el reparto a partes iguales entre los jugadores i y j . Además el jugador i termina con un pago esperado de $\sum_{j \in A(i)} \alpha_0 u(i : j) = z_i > x_i$ lo cual contradice que x sea el pago correspondiente a un E.N.P.S.
- * Si $p_1 < \alpha_0$, entonces el jugador i en lugar de p_i puede subastar $(\alpha_0 + p_1)/2$ (que es una cantidad estrictamente menor que α_0) y de esta manera convertirse en ganador de la subasta. Cualquier jugador $j \in N$, $j \neq i$, rechazando las ofertas anteriores tendrá garantizado a lo sumo una cantidad igual a

$$\frac{\alpha_0 + p_1}{2} \sum_{k \in A(j)} u(k : j) = \frac{\alpha_0 + p_1}{2} u(j),$$

es decir, una cantidad estrictamente menor que z_j . Entonces si el jugador i ofrece a cada jugador $j \in A(i)$ el pago $2\alpha_0 u(i : j)$, como estamos en un E.N.P.S. cada jugador $j \in N$, $j \neq i$,

aceptará ofrecimientos anteriores y a cada jugador $k \in A(j)$ le ofrecerá una cantidad de al menos

$$x_j^k = (\alpha_0 + p_1)u(j : k) + \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

En cualquier caso, el jugador i se puede garantizar una cantidad igual a $z_i > x_i$, lo cual contradice nuevamente que x sea el pago correspondiente a un E.N.P.S.

- Supongamos ahora que el jugador i ha ganado la subasta. Vamos a considerar p_2 , es decir, la cantidad subastada por el jugador que ha quedado en segundo lugar en la subasta. Nuevamente pueden presentarse dos casos: que $p_2 \geq \alpha_0$ o que $p_2 < \alpha_0$.
 - * Si $p_2 \geq \alpha_0$, entonces si el jugador i subasta una cantidad p_i tal que $p_i < p_n < p_2$ y en la etapa 1 rechaza el ofrecimiento efectuado por el jugador 2 (que ahora es el ganador de la subasta) y ofrece a cada jugador $j \in A(i)$ un pago de $x_i^j = 2\alpha_0 u(i : j)/p_2$ se garantiza un pago de z_i .
 - * Si $p_2 < \alpha_0$, entonces razonando como en la primera mitad de la demostración si el jugador i en lugar de p_i subasta $(\alpha_0 + p_2)/2$ (que es una cantidad estrictamente menor que α_0) es el ganador de la subasta y por estar en un E.N.P.S. tiene garantizado un pago igual a z_i .
- En segundo lugar supongamos que $x_i > z_i$. Como $z \in P(S)$ y el juego $(S, d) \in NS(N)^R$ entonces $\exists j \in N : x_j < z_j$, lo cual es absurdo por lo visto en la primera parte de la demostración. $\square$

Proposición 3.5 Sea $(S, d, A) \in CNS(N)^R$ tal que el pago de desacuerdo de todos los jugadores sea 0 y el pago de utopía 1. El juego no cooperativo, $\Gamma(S, d, A)$ definido a partir de (S, d, A) según el procedimiento anterior tiene al menos un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Demostración.

Vamos a proponer una combinación de estrategias de forma que la restricción a cada subjuego constituya un equilibrio de Nash del subjuego correspondiente, haciendo uso de la inducción hacia atrás.

- Supongamos que un jugador $i \in N$ está en la etapa $n-1$ (o en cualquier otra etapa anterior, de manera que no le corresponda ya hacer ofrecimientos, únicamente aceptar ofrecimientos anteriores o rechazarlos). Consideremos p_1 (mayor cantidad presentada en la subasta) y sea M_i la máxima cantidad que el jugador i obtiene rechazando, es decir,

$$M_i = \max p_1 \sum_{j \in A(i)} x_i^j / 2, \quad 0 \leq x_i^j \leq 2u(i : j)$$

y tal que $y \in S$, donde $y_i = p_1 \sum_{j \in A(i)} x_i^j / 2$, $y_j = p_1 x_i^j / 2$, si $j \in A(i) \setminus 1$, $y_j = 0$ si $j \neq i$, $j \notin A(i) \setminus 1$.

Notemos que el máximo anterior existe siempre (ya que se trata de maximizar una función continua definida sobre un conjunto compacto), aunque los ofrecimientos, x_i^j , $j \in A(i)$, que conducen a ese máximo, no tienen porqué ser únicos.

Una estrategia en equilibrio para el jugador i , en ese subjuego, sería aceptar ofrecimientos que le proporcionan a i un pago mayor o igual que M_i , y rechazar en otro caso.

- Supongamos ahora que un jugador i está en una etapa con posibilidad de hacer ofrecimientos (a los jugadores $j \in B(i)$,

$$B(i) = \{j \in A(i) : p_j > p_i, j \neq 1\}$$

es decir, jugadores con los que se comunica y que aún no han intervenido en el juego).

Denotemos por $P(i) = \{j \in N : p_j > p_i, j \neq 1\}$ (jugadores que pueden intervenir en etapas posteriores y que se comunican o no con el jugador i). Por lo visto en el punto anterior, si el jugador i rechaza se puede garantizar M_i . Sea c_j la cantidad que hasta el inicio de esta etapa tiene garantizado cualquier jugador $j \in N$ (como consecuencia de los ofrecimientos hechos hasta el momento). Sea $M'_i = \max \sum_{j \in B(i)} x_i^j / 2$, tal que $\forall k \in P(i), \forall l \in B(k), \exists x_k^l, 0 \leq x_k^l \leq 2u(k : l)$ de forma que $y \in S$ con

$$\begin{aligned} y_i &= c_i + M'_i \\ y_j &= c_j + x_i^j / 2 + \sum_{l \in B(j)} x_j^l / 2 + \sum_{l \in P(i): j \in B(l)} x_l^j / 2 & \text{si } j \in B(i) \\ y_j &= c_j + \sum_{l \in B(j)} x_j^l / 2 + \sum_{l \in P(i): j \in B(l)} x_l^j / 2 & \text{si } j \in P(i) \setminus B(i) \\ y_j &= c_j & \text{si } j \notin P(i) \end{aligned}$$

y además $y_j \geq M_j \forall j \in P(i)$.

Es decir, el jugador i hará ofrecimientos a los jugadores de $B(i)$ intentando maximizar su propio pago, tratando además de que dicho pago sea compatible con un pago igual o mayor que M_j (lo máximo que se obtiene rechazando) para todos los jugadores que intervienen en el juego después que el jugador i .

Si existe M'_i y además $c_i + M'_i \geq M_i$, el jugador i ofrecerá a cada jugador $j \in B(i)$ cantidades x^j_i que le conduzcan al pago $c_i + M'_i$.

Si existe M'_i pero $c_i + M'_i < M_i$, o bien no existe M'_i , el jugador i rechazará y así obtiene M_i .

- Supongamos que los jugadores se encuentran en la etapa 0. Entonces todos pueden subastar α_0 , y si en las etapas posteriores actúan como se indicó en los puntos anteriores cada jugador obtiene $z_i = \alpha_0 u(i)$. (Notemos que si $p_1 = \alpha_0$, entonces $M_i = \alpha_0 u(i)$, $\forall i \in N$).

Si algún jugador i subasta una cantidad $p_i < \alpha_0$ otro jugador ganará la subasta (con $p_1 = \alpha_0$) pero por lo visto anteriormente en ningún caso el jugador i acabará ganando más de z_i .

Si algún jugador i subasta una cantidad $p_i > \alpha_0$, se convertirá en ganador de la subasta, pero no ganará más de z_i , porque si ofrece a los jugadores con los que se comunica cantidades x^j_i tales que $\sum_{j \in A(i)} x^j_i / 2 > z_i$, al final del juego, si ningún jugador rechaza, existirá algún j tal que su pago será menor que z_j (ya que $(z_1, \dots, z_n)$ está en la frontera de Pareto de S) y por lo visto en las etapas anteriores dicho jugador j rechazará ofrecimientos anteriores pues así tendrá garantizado al menos un pago de z_j ofreciendo a los jugadores $k \in A(j)$, con los que se comunica, repartirse una cantidad de $\alpha_0 2u(i : j) / p_i$. $\square$

Como consecuencia de las dos anteriores proposiciones se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.9 Sea $(S, d, A) \in CNS(N)^R$ tal que el pago de desacuerdo de todos los jugadores sea 0 y el pago de utopía 1. El juego no cooperativo, $\Gamma(S, d, A)$ definido a partir de (S, d, A) según el procedimiento descrito anteriormente posee equilibrios de Nash perfectos en subjuegos. Además el pago a todos ellos es el mismo.

La obtención del pago a las estrategias en equilibrio perfecto en subjuegos del juego no cooperativo $\Gamma(S, d, A)$ construido a partir de una situación con comunicación (S, d, A) , nos proporciona un método para obtener la solución de cualquier situación de $CNS(N)^R$. Vamos a denotar dicho concepto de solución por P . De la demostración del resultado anterior se sigue que P se puede interpretar como un valor de compromiso entre el pago de desacuerdo y un cierto punto de utopía para el cálculo del cual se utiliza el conjunto factible y el grafo de comunicación. De la demostración del resultado anterior también se sigue inmediatamente el siguiente corolario que enumera algunas de las propiedades de P .

Corolario 3.2 $P : CNS(N)^R \rightarrow \mathbb{R}^N$ verifica eficiencia y covarianza de origen y escala. Además si $A(N)$ denota el grafo completo sobre N , $\forall (S, d)$ en $NS(N)$ con (S, d) simétrico $P_i(S, d, A(N)) = P_j(S, d, A(N))$, $\forall i, j \in N$.

Demostración.

Las propiedades de eficiencia y covarianza de origen y escala son inmediatas.

Supongamos que $(S, d) \in NS(N)$ es simétrico. Se puede suponer que $u_i(S, d) = 1$ y $d_i = 0$, $\forall i \in N$. Entonces $\forall i, j, k, l \in N$ se verifica que

$$u(i : j) = u(k : l) = K$$

para una cierta constante $K \in \mathbb{R}$. Si además el grafo $A(N)$ es completo entonces para cada $i \in N$ se tiene

$$u(i) := \sum_{j \in A(i)} u(i : j) = (n - 1)K.$$

Consideremos ahora

$$\alpha_0 := \max\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha(u(1), \dots, u(n)) \in S\}$$

se tiene que $P(S, d, A(N)) = \alpha_0(u(1), \dots, u(n))$ y por tanto

$$P_i(S, d, A(N)) = P_j(S, d, A(N)), \quad \forall i, j \in N. \square$$

De manera análoga a como se hacía en los juegos TU, si $(S, d, A) \in CNS(N)$ (con $d_i = 0$, y $u_i(S, d) = 1 \forall i \in N$), podemos definir un juego de arcos inducido, (A, S^A, d^A) , de la siguiente forma:

$$S^A := \{x \in \mathbb{R}^A : \exists y \in S, y_i \geq \sum_{a \in A_i} x_a / 2, \forall i \in N\}$$

$$d_a^A := 0, \forall a \in A$$

Para interpretar la definición anterior supongamos que se parte de un juego de arcos para obtener el juego donde los jugadores son los elementos de N . Sea entonces (A, S^A, d^A) un juego donde los jugadores son los arcos y donde si $(x_1, \dots, x_{|A|}) \in S^A$, x_a es una medida de la utilidad de la vía de comunicación a si se elige una determinada alternativa. Pasemos ahora a considerar los jugadores que une cada arco. Podemos construir un nuevo juego (S, d) adoptando como función de utilidad para cada jugador la suma de las funciones de utilidad de los arcos de los que forma parte divididas por 2, es decir, entendemos que la utilidad de un arco se la reparten a partes iguales los dos jugadores que lo forman. Entonces (A, S^A, d^A) es el juego inducido por (S, d, A) de acuerdo con nuestra definición de juego de arcos inducido.

El siguiente resultado proporciona una nueva interpretación para P que lo asemeja al valor posicional de las situaciones TU con comunicación.

Proposición 3.6 Si $(S, d, A) \in CNS(N)^R$ con $d_i = 0$ y $u_i(S, d) = 1 \forall i \in N$

$$P_i(S, d, A) = \sum_{a \in A_i} \frac{1}{2} KS_a(A, S^A, d^A) \quad \forall i \in N$$

Demostración.

Consideremos $\forall i, j \in N$ tal que $(i : j) \in A$, $u(i : j)$, $u(i)$, α_0 y z como en la demostración de la proposición 3.4.

Se tiene, $\forall a \in A$, que $u_a(S^A, d^A) = 2u(i : j)$ donde $i, j \in N$ y $a = (i : j)$. Por tanto, $KS_a(A, S^A, d^A) = \beta_0 2u(i : j)$, $\forall a \in A$ donde

$$\beta_0 = \max\{\beta \in \mathbb{R}_+ : \beta(u_a(S^A, d^A))_{a \in A} \in S^A\}$$

es decir,

$$\beta_0 = \max\{\beta \in \mathbb{R}_+ : \exists y \in S : y_i \geq \sum_{j \in A(i)} \beta 2u(i : j)/2 = \beta u(i), \forall i \in N\}.$$

Como $P(S, d, A) := \alpha_0(u(1), \dots, u(n))$ con

$$\alpha_0 := \max\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha(u(1), \dots, u(n)) \in S\}$$

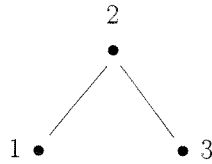
se tiene que $\beta_0 = \alpha_0$ y $P_i(S, d, A) = \sum_{a \in A_i} \frac{1}{2} KS_a(A, S^A, d^A) \quad \forall i \in N$. $\square$

A continuación calculamos sobre un ejemplo las tres soluciones que hemos propuesto al problema de negociación con comunicación restringida.

Ejemplo 3.9 Consideremos nuevamente la situación con comunicación (S, d, A) , con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$, donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^N : x + y + z \leq 1, x \leq 1/4\}, \quad d = (0, 0, 0)$$

$$A = \{(1 : 2), (2 : 3)\}.$$



Como ya se vio en un ejemplo anterior

$$p(u^N, A) = (1/4, 1/2, 1/4), \quad \varphi_N(S, d, A) = (1/4, 1/2, 1/4) \text{ y}$$

$$\varphi_C(S, d, A) = (1/13, 8/13, 4/13).$$

Si ahora calculamos la última solución propuesta se obtiene

$$P(S, d, A) = (26/260, 169/260, 65/260).$$

Como φ_N y φ_C , P le da al jugador 2 un pago mayor por su situación predominante en el grafo.

Si tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} \varphi_N(S(1), \theta, A) &= \varphi_C(S(1), \theta, A) = \\ &= P(S(1), \theta, A) = (1/4, 1/2, 1/4) \end{aligned}$$

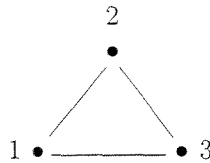
y ahora pasamos a considerar la nueva situación (S, d, A) , $P(S, d, A)$ le sigue dando al jugador 3 un pago de $1/4$ ya que su situación, tanto en el grafo como en el conjunto factible no se ha modificado, al jugador 1 le da un pago menor ya que su situación en el conjunto factible ha empeorado, y de eso se beneficia el jugador 2 que es el que se comunica directamente con el jugador 1.

Hemos de hacer notar que cuando no hay restricciones a la comunicación, P no coincide, en general, con ninguna de las soluciones más conocidas de la literatura. En el siguiente ejemplo comprobamos que es distinta de la solución de Nash y de la solución de Kalai-Smorodinsky.

Ejemplo 3.10 Consideremos la situación con comunicación (S, d, A) , con conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3\}$, donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^N : x + y + z \leq 1, x \leq 1/3\}, \quad d = (0, 0, 0)$$

$$A = \{(1 : 2), (2 : 3), (1 : 3)\}.$$



$$N(S, d) = (1/3, 1/3, 1/3)$$

$$KS(S, d) = (12/84, 36/84, 36/84)$$

$$P(S, d, A) = (14/84, 35/84, 35/84).$$

En este ejemplo la solución de Nash da a todos los jugadores lo mismo aunque el juego no es simétrico. La solución de Kalai-Smorodinsky da a los jugadores un pago que es proporcional al vector de utopía: los jugadores 2 y 3 reciben un pago que es el triple del pago que recibe el jugador 1. La tercera solución tiene en cuenta más información geométrica que las anteriores: aunque el pago de utopía del segundo y tercer jugador es el triple del pago de utopía del primero, los jugadores 2 o 3 sólo pueden obtener su pago de utopía cuando a la vez los restantes jugadores reciben un pago igual o menor al de desacuerdo, mientras que el jugador 1 puede obtener su punto de utopía a la vez que los jugadores 2 y 3 obtienen cada uno un pago de $1/3$. Según esto parece razonable el pago $(14/84, 35/84, 35/84)$, que en relación a la solución de Kalai-Smorodinsky, le da un pago mayor al jugador 1 y un pago menor a los jugadores 2 y 3.

Capítulo 4

Juegos sin utilidad transferible

4.1 Introducción

En este capítulo se estudia una nueva clase de juegos cooperativos: los denominados juegos sin utilidad transferible o, abreviadamente, juegos NTU que definimos a continuación.

Definición 4.1 *Un juego sin utilidad transferible es un par (N, V) en el cual $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y V una función que asigna a cada coalición $T \subseteq N$ un subconjunto $V(T) \subset \mathbb{R}^T$ verificando las siguientes propiedades:*

- $\forall i \in N, V(\{i\}) = \{x \in \mathbb{R}^{\{i\}} : x \leq V(i)\}$, donde $V(i) \in \mathbb{R}$.
- $\forall T \subseteq N, T \neq \emptyset, V(T)$ es un subconjunto no vacío, cerrado, convexo y comprehensivo.
- $\forall T \subseteq N, T \neq \emptyset$, el subconjunto

$$V_o(T) = \{x \in V(T) : x \geq (V(i))_{i \in T}\}$$

está acotado.

Los subconjuntos $V(T)$ representan los posibles pagos que pueden alcanzar los jugadores de cada coalición T si deciden cooperar entre ellos.

Denotamos por $\text{NTU}(N)$ la clase de todos los juegos sin utilidad transferible con conjunto N de jugadores.

Si $x \in V(T)$ y $U \subseteq T$, por x_U denotamos las componentes de x correspondientes a los jugadores de U .

La clase de juegos sin utilidad transferible generaliza la clase de los juegos cooperativos con utilidad transferible y la clase de los juegos de negociación.

Si (N, ν) es un juego TU puede ser visto como un juego NTU, (N, V) , donde $V(T) = \{x \in \mathbb{R}^T : \sum_{i \in T} x_i \leq \nu(T)\} \forall T \subseteq N$.

Si (N, S, d) es un juego de negociación puede ser visto como un juego NTU, (N, V) , donde $V(T) = \{x \in \mathbb{R}^T : x_i \leq d_i \forall i \in T\} \forall T \subseteq N$ y $V(N) = S$.

Algunas clases particulares de juegos NTU son las siguientes.

Definición 4.2 Un juego $(N, V) \in NTU(N)$,

- se dice que es *convexo* cuando la contribución de cada jugador a una coalición es mayor cuanto más grande es el tamaño de dicha coalición, es decir, $\forall T \subseteq U \subseteq N \setminus \{i\}$,

$$V^*(T \cup \{i\}) - V^*(T) \subseteq V^*(U \cup \{i\}) - V^*(U)$$

donde para cada $T \subseteq N$, $V^*(T) = V(T) \cdot \{\theta_{N \setminus T}\}$.

Recordemos que $\theta_{N \setminus T}$ denota el vector de $\mathbb{R}^{N \setminus T}$ con todas las componentes iguales a cero.

- se dice que es *compactamente generado* si $\forall T \subseteq N \exists C_T \subset \mathbb{R}^T$ conjunto compacto tal que $V(T) = \text{comp } C_T$.
- se dice que es *monótono* si $V^*(T) \subseteq V^*(U)$ si $T \subseteq U \subseteq N$.

4.2 Conceptos de solución en juegos NTU

La teoría clásica de los juegos NTU supone que se forma la coalición N de todos los jugadores y la cuestión central es obtener un conjunto de vectores de pagos de $V(N)$ como solución del juego cooperativo. Formalmente, en el contexto NTU se define un concepto de solución, no como una aplicación sino como una correspondencia. Aunque ante la necesidad de que los jugadores alcancen un compromiso razonable parece recomendable la unicidad de la solución, Aumann (1985) afirma que los compromisos, y pone como ejemplo el código civil,

pueden estar basados en diferentes clases de principios y criterios de forma que un criterio puede ser aplicable sólo a una clase limitada de situaciones y dada una situación se le podrían aplicar diferentes criterios. En el caso del código civil, la función de un juez sería seleccionar en cada caso una de las posibles leyes que se pueden aplicar. En este sentido, definir la solución como una correspondencia estaría justificado.

Definición 4.3 *Un concepto de solución sobre $NTU(N)$ es una correspondencia*

$$f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada juego $(N, V) \in NTU(N)$ asigna un subconjunto de vectores de pagos para los jugadores de N .

En los apartados siguientes se introducen algunos conceptos de solución en juegos NTU.

4.2.1 El núcleo

Veamos primero una definición.

Definición 4.4 *Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ se dice que $x \in A$ está dominado si $\exists y \in A : y \geq x, y \neq x$.*

Denotamos por $Dom(A)$ el conjunto de todos sus elementos dominados.

Definición 4.5 *El núcleo de un juego $(N, V) \in NTU(N)$ es el conjunto*

$$Nu(N, V) := V(N) \cap \bigcap_{T \subseteq N} \{x \in \mathbb{R}^N : y \in V(T), y \geq x_T \Rightarrow y = x_T\}.$$

En la anterior definición, siguiendo el mismo principio que en el caso del núcleo de juegos TU, se seleccionan aquellos vectores de pagos que son estables en el sentido de no ser dominados para ninguna coalición.

4.2.2 La correspondencia de Shapley

Vamos a comenzar por enumerar algunas propiedades razonables de un concepto de solución en el contexto NTU.

- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *existencia* (EXI) si $\forall (N, V) \in NTU(N)$ $f(N, V) \neq \emptyset$.
- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *eficiencia* (EFI) si $\forall (N, V) \in NTU(N)$ $f(N, V) \subseteq P(V(N))$.
- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *independencia de alternativas irrelevantes* (IAI) si $\forall (N, V), (N, W) \in NTU(N)$ tal que $V(N) \subset W(N)$ y si $T \subset N \Rightarrow V(T) = W(T)$, si $x \in f(N, W) \cap V(N)$ entonces $x \in f(N, V)$.
- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *covarianza de escala* (CES) si $\forall (N, V) \in NTU(N)$ y $\forall a \in \mathbb{R}_{++}^N$, si aV denota el juego de NTU(N) definido por $(aV)(T) = a_TV(T) \forall T \subseteq N$ entonces $f(N, aV) = af(N, V)$.
- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *aditividad condicional* (ADC) si $\forall (N, V), (N, V'), (N, W) \in NTU(N)$ tal que $W = V + V'$ se tiene que $(f(N, V) + f(N, V')) \cap P(W(N)) \subseteq f(N, W)$, donde si $A, B \subset \mathbb{R}^N$, $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ y si $(N, V), (N, V') \in NTU(N)$, $W = V + V'$ es el juego de NTU(N) definido por $W(T) = V(T) + V'(T) \forall T \subseteq N$.
- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *unanimidad* (UNA) si $f(N, V) = e^T / |T|$ cuando (N, V) es el juego NTU equivalente al juego $(N, \nu) \in TU(N)$ de unanimidad de la coalición T , es decir,

$$\nu(U) = 1 \forall U : T \subseteq U$$

$$\nu(U) = 0 \forall U : T \not\subseteq U,$$

donde $e^T = \{x \in \mathbb{R}^N, x_i = 1 \text{ si } i \in T, x_j = 0 \text{ si } j \notin T\}$.

Las anteriores propiedades nos permiten caracterizar el concepto de solución que definimos a continuación, introducido por Shapley (1969) y que vamos a denominar correspondencia de Shapley.

Definición 4.6 Si $(N, V) \in NTU(N)$, un vector de pagos $x \in V(N)$ es un valor de Shapley NTU del juego (N, V) si existe $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que $\text{Sh}(N, \nu_\lambda) = \lambda x$ donde (N, ν_λ) es el juego TU definido por:

$$\nu_\lambda(T) = \sup_{y \in V(T)} \sum_{i \in T} \lambda_i y_i, \quad \forall T \subseteq N.$$

Denotaremos por $\text{SH}(N, V)$ el conjunto de valores de Shapley del juego (N, V) .

La anterior definición puede interpretarse como sigue. Supongamos que en el juego $(N, V) \in NTU(N)$ la utilidad fuese transferible. Entonces el juego que realmente se estaría jugando sería el juego $(N, W) \in TU(N)$ en el que

$$W(T) = \{x \in \mathbb{R}^T : \sum_{i \in T} x_i \leq \max_{y \in V(T)} \sum_{i \in T} y_i\}, \quad \forall T \subseteq N,$$

o lo que es lo mismo, el juego $(N, \nu) \in TU(N)$ en el que

$$\nu(T) = \max_{y \in V(T)} \sum_{i \in T} y_i, \quad \forall T \subseteq N.$$

Una posible solución del juego (N, ν) es el valor de Shapley TU, $\text{Sh}(N, \nu)$. Obviamente $\text{Sh}(N, \nu) \in W(N)$. Supongamos que también se verifica que $\text{Sh}(N, \nu) \in V(N)$, es decir, que al eliminar los pagos de $W(N)$ que inicialmente no eran factibles, $\text{Sh}(N, \nu)$ continúa estando entre los pagos factibles. Si utilizamos el principio de independencia de alternativas irrelevantes, el punto $\text{Sh}(N, \nu)$ se puede seguir considerando como una solución razonable para el juego inicial.

Pero en general puede ocurrir que $\text{Sh}(N, \nu) \notin V(N)$. En este caso, en lugar del juego ν , se consideran juegos ν_λ , donde $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ y

$$\nu_\lambda(T) = \sup_{y \in V(T)} \sum_{i \in T} \lambda_i y_i, \quad \forall T \subseteq N,$$

que es el resultado de suponer que la utilidad es transferible en el juego (N, V) inicial, después de efectuar un cambio de escala en las utilidades de los jugadores, que viene dado por el vector $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$. Si $\text{Sh}(\nu_\lambda) \in \lambda V(N)$, entonces, el punto $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $\text{Sh}(\nu_\lambda) = \lambda x$ es una solución para el juego (N, V) .

Por considerar los anteriores cambios de escala en las utilidades, a los valores de Shapley NTU también se les denomina *valores λ -transferibles*.

Cuando nos restringimos a los juegos TU o a los juegos de regateo, la correspondencia de Shapley coincide, respectivamente, con el valor de Shapley y con la solución de Nash. Pero en general, dado un juego NTU, puede ocurrir que no posea valores de Shapley o que posea más de uno. Shapley (1969), Rosenmuller (1981), Kern (1985) proporcionan resultados de existencia. A continuación presentamos uno de estos resultados, que es debido a Kern.

Definición 4.7 *Un conjunto convexo $C \subseteq \mathbb{R}^N$ se denomina cuasipoliédrico si existe un semiespacio $E \subseteq \mathbb{R}^N$ tal que $E \cap C \neq \emptyset$ es un conjunto poliédrico y $C \setminus E$ es acotado.*

Teorema 4.1 *Si $(N, V) \in NTU(N)$ es un juego monótono, $\forall T \subseteq N$, $V(T)$ es cuasipoliédrico y si*

$$x, y \in \delta V(N), x \geq y \Rightarrow x = y,$$

entonces (N, V) posee algún valor de Shapley.

Vamos a denotar por $NTU(N)^R$ la familia de situaciones NTU que verifican las siguientes condiciones:

1. $V(N)$ es "suave", es decir, admite un único hiperplano soporte en cada punto de la frontera.
2. Para cada coalición T existe un vector de pagos x tal que

$$V(T) \cdot \theta_{N \setminus T} \subseteq V(N) + x.$$

3. $x, y \in \delta V(N)$, $x \geq y$, entonces $x = y$.

En Aumann (1985) se puede encontrar el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Existe una única solución $f : NTU(N)^R \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades de existencia, eficiencia, aditividad condicional, unanimidad, covarianza de escala e independencia de alternativas irrelevantes y es la correspondencia de Shapley.*

Kern(1985) obtiene un resultado en el que, como hemos visto en el caso TU, se relacionan los valores de Shapley y el núcleo de un juego NTU.

Teorema 4.3 *Los valores de Shapley de un juego sin utilidad transferible convexo son elementos del núcleo de dicho juego.*

4.2.3 El MC-valor

El MC-valor es un concepto de solución para juegos NTU monótonos que existe siempre y es único. Generaliza el valor de Shapley para juegos TU y la solución de Kalai-Smorodinsky para juegos de regateo. El MC-valor se obtiene utilizando los vectores de aportaciones marginales que definimos a continuación y que son generalización de los vectores de aportaciones marginales para juegos TU introducidos en el capítulo 2.

Definición 4.8 Sea $V \in NTU(N)$ un juego monótono tal que $V(i) = 0$, $\forall i \in N$ y sea $\sigma \in \Pi(N)$. El vector de aportaciones marginales, $m^\sigma(V)$, se define como:

$$m_{\sigma(i)}^\sigma(V) := \max\{t \in \mathbb{R} : (m_{\sigma(1)}^\sigma, \dots, m_{\sigma(i-1)}^\sigma, t) \in V(\sigma(1), \dots, \sigma(i))\}, \forall i \in N.$$

Notemos que los vectores de aportaciones marginales están bien definidos por la definición de juego NTU y la monotonía. Además $m^\sigma(V) \in P(V(N))$ y $m^\sigma(V) \geq 0$, $\forall \sigma \in \Pi(N)$.

Vamos a denotar $b(V) := \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m^\sigma(V)$.

Definición 4.9 En este contexto, se dice que los jugadores $i, j \in N$ son simétricos en (N, V) si:

- $\forall T \subseteq N \setminus \{i, j\}$, $\forall x \in V(T \cup \{i\})$ se tiene que $y \in V(T \cup \{j\})$, donde $y \in \mathbb{R}^{T \cup \{j\}}$ se define por $y_j = x_i$ e $y_T = x_T$.
- $\forall T \subseteq N$, $i, j \in T$ y $x \in V(T)$, se tiene que $y \in V(T)$, donde $y \in \mathbb{R}^T$ se define por $y_i = x_j$, $y_j = x_i$ e $y_{T \setminus \{i, j\}} = x_{T \setminus \{i, j\}}$.

Vamos a comenzar por enumerar otras propiedades razonables de un concepto de solución en el contexto NTU.

- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *simetría* (SIM) si $f_i(V) = f_j(V) \forall (N, V) \in NTU(N)$ y $\forall i, j \in N$ que son simétricos en el juego (N, V) .
- $f : NTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *monotonía proporcional de utopías* (MPU) si $f(V) \leq f(W)$, $\forall V, W \in NTU(N)$ con $V(N) \subseteq W(N)$, $b(W) > 0$ y $b_i(V)/b_i(W) = b_j(V)/b_j(W)$, $\forall i, j \in N$.

Estas dos últimas propiedades, junto con otras enunciadas con anterioridad, permiten caracterizar la solución que definimos a continuación, debida a Otten, Borm, Peleg y Tijs (1994).

Definición 4.10 *El MC-valor de V , si $(N, V) \in NTU(N)$ es un juego monótono tal que $V(i) = 0 \forall i \in N$, es un valor de compromiso entre el vector de pagos mínimos $(V(1), \dots, V(n))$ y el vector $b(V)$. Formalmente*

$$MC(V) := \max\{\alpha b(V) : \alpha \in \mathbb{R}_+, \alpha b(V) \in V(N)\}.$$

Sea $NTU(N)^C$ la subfamilia de juegos (N, V) de $NTU(N)$ tales que:

- $V(i)=0, \forall i \in N$
- V monótono
- $b(V) > 0$
- $V_0(N)$ sin niveles, es decir, si $x, y \in \delta(V_0(N))$ y $x \geq y$, entonces $x = y$.

En Otten, Borm, Peleg y Tijs (1994) se puede encontrar el siguiente resultado.

Teorema 4.4 *Existe una única solución $f : NTU(N)^C \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que verifica las propiedades de eficiencia, covarianza de escala, simetría y monotonía proporcional de utopías y es el MC-valor.*

4.3 Situaciones NTU con comunicación

Nos planteamos ahora el problema más general de los considerados hasta ahora, el estudio de juegos sin utilidad transferible, en los que no todos los jugadores pueden comunicarse libremente, sino que existen algunas restricciones a dicha comunicación, las cuales vamos a modelizar por medio de un grafo, de tal forma, que dos jugadores pueden comunicarse directamente si y sólo si existe un arco del grafo que los une.

Definición 4.11 *Una situación NTU con comunicación y conjunto de jugadores N , es una terna (N, V, A) , donde (N, V) es un elemento de $NTU(N)$ y A es un elemento de $G(N)$.*

Denotaremos por $CNTU(N)$ el conjunto de todas las situaciones NTU con comunicación y conjunto N de jugadores.

Obviamente la clase de situaciones NTU con comunicación generaliza la clase de las situaciones TU con comunicación y la clase de las situaciones de negociación con comunicación.

En adelante, por comodidad, escribiremos (V, A) en lugar de (N, V, A) cuando no haya lugar a confusión con el conjunto de jugadores.

4.4 Conceptos de solución en situaciones CNTU

Definición 4.12 *Un concepto de solución sobre $CNTU(N)$ será una correspondencia*

$$f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que a cada situación NTU con comunicación, $(N, V, A) \in CNTU(N)$, asigna un subconjunto de vectores de pagos para los jugadores de N .

Desde que Shapley (1969) generaliza el valor de Shapley TU al contexto de los juegos NTU utilizando el mecanismo de λ -transferencias, distintos autores utilizan el mismo mecanismo para generalizar otras soluciones. Así en el contexto NTU Levy y McLean (1991) generalizan los denominados valores de Shapley ponderados (Kalai y Samet, 1985), Borm y otros (1992) generalizan el τ -valor (Tijds, 1981). En van den Nouweland (1993), siguiendo también las ideas de la correspondencia de Shapley se introducen dos conceptos de solución en el contexto de las situaciones NTU con comunicación: la correspondencia de Myerson y la correspondencia posicional.

En esta sección se estudian propiedades de estos conceptos de solución, algunas de las cuales nos permiten caracterizarlos axiomáticamente.

4.4.1 La correspondencia posicional

Definición 4.13 *Si $(V, A) \in CNTU(N)$, se denomina juego de puntos inducido y se denota por V/A , al juego de NTU(N) dado por:*

$$(V/A)(T) = X_{U \in T/A} V(U), \quad \forall T \subseteq N.$$

Definición 4.14 Sea $(N, V, A) \in CNTU(N)$ y supongamos por conveniencia que $V(i) = 0, \forall i \in N$. Un vector de pagos $x \in X_{U \in N/A} V(U)$ es un valor posicional NTU de la situación (N, V, A) si existe $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que si $i \in N$

$$\lambda_i x_i = \sum_{a \in A_i} \text{Sh}_a(A, \nu_{\lambda, A})/2,$$

donde $(A, \nu_{\lambda, A})$ es el juego de arcos definido para cada $L \subseteq A$ por

$$\nu_{\lambda, A}(L) = \sup_{y \in X_{T \in N/L} V(T)} \sum_{i \in N} \lambda_i y_i.$$

Denotaremos por $\text{CP}(N, V, A)$ el conjunto de valores posicionales de (N, V, A) .

En van den Nouweland (1993) se proporciona el siguiente resultado que establece que la correspondencia posicional es una generalización del valor posicional.

Teorema 4.5 Si $(N, \nu, A) \in CTU(N)^0$ y (N, V) es el juego NTU correspondiente a (N, ν) entonces $\text{CP}(N, V, A) = \{p(N, \nu, A)\}$.

En el siguiente resultado se relacionan la correspondencia posicional y la solución de Nash ponderada por el grafo introducida en el capítulo 3.

Teorema 4.6 Si $(S, d, A) \in CNS(N)$ con $d = \theta$ y (N, V) es el juego NTU correspondiente a (S, d) entonces $\text{CP}(N, V, A) = \{\varphi_N(S, d, A)\}$.

Demostración.

Es fácil ver que restringidos a la familia de situaciones de negociación con comunicación CP verifica las propiedades de covarianza de escala y de independencia de alternativas irrelevantes.

- Consideremos en primer lugar la situación de $\text{CNS}(N)$, $(S(1), \theta, A)$. Equivale a la situación TU con comunicación (N, u^N, A) y por el teorema anterior

$$\text{CP}(N, V, A) = \{p(N, u^N, A)\} = q$$

para un cierto q , que por la eficiencia en componentes de p y dado que $N/A = N$ es tal que $\sum_{i \in N} q_i = 1$ y por tanto si (N, V) es el juego NTU equivalente a $(S(1), \theta)$

$$\text{CP}(N, V, A) = \{\varphi_N(S(1), \theta, A)\} = q.$$

- Consideremos ahora una situación (S, θ, A) genérica.

– Vamos a probar que $\{\varphi_N(S, \theta, A)\} \subseteq \text{CP}(N, V, A)$.

Sea entonces $\varphi_N(S, \theta, A)$ y F la transformación afín de $\mathbb{R}^N$ de modo que $F(\theta) = \theta$ y $F(\varphi_N(S, \theta, A)) = p(N, u^N, A) = \varphi_N(S(1), \theta, A)$. Si $(F(S), F(\theta)) = (S', \theta)$ entonces como es conocido $S' \subseteq S(1)$. Por lo visto más arriba, si $(N, V(1))$ es el juego NTU correspondiente a $(S(1), \theta)$ y (N, V') el correspondiente a (S', θ)

$$\text{CP}(N, V(1), A) = \{p(N, u^N, A)\} = \{\varphi_N(S(1), \theta, A)\} \in S'.$$

Por independencia de alternativas irrelevantes de CP

$$\varphi_N(S(1), \theta, A) \in \text{CP}(N, V', A),$$

y por covarianza de escala se verifica $\varphi_N(S, \theta, A) \in \text{CP}(N, V, A)$.

– Veamos ahora que $\text{CP}(N, V, A) \subseteq \{\varphi_N(S, \theta, A)\}$.

Si $x \in \text{CP}(N, V, A)$ entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}_{++}^N : \lambda_i x_i = \sum_{a \in A_i} \text{Sh}_a(A, \nu_{\lambda, A})/2$. Ahora bien,

$$\nu_{\lambda, A}(L) = \begin{cases} \sup_{y \in S} \sum_{i \in N} \lambda_i y_i & N/L = N \\ 0 & N/L \neq N \end{cases}$$

y si consideramos el subconjunto de $\mathbb{R}^N$

$$S' = \{z \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} \lambda_i z_i \leq \sup_{y \in S} \sum_{i \in N} \lambda_i y_i\},$$

entonces $S \subseteq S'$, el juego TU (N, ν_λ) con

$$\nu_\lambda(T) = \begin{cases} \sup_{y \in S} \sum_{i \in N} \lambda_i y_i & T = N \\ 0 & T \neq N \end{cases}$$

es equivalente al juego de regateo $(N, \lambda S', \theta)$ y si (N, V', A) es el juego NTU equivalente, como por las consideraciones anteriores,

$$\{\lambda x\} = \{p(N, \nu_\lambda, A)\} = \text{CP}(N, V', A) = \{\varphi_N(\lambda S', \theta, A)\},$$

por la covarianza de origen y escala $x = \varphi_N(S', \theta, A)$. Como además

$$x \in V(N) = S \subseteq S',$$

por independencia de alternativas irrelevantes de CP y φ_N ,

$$\begin{aligned} \text{CP}(N, V, A) &\subseteq \text{CP}(N, \lambda^{-1}V', A) = \{\varphi_N(S', \theta, A)\} = \\ &= \{\varphi_N(S, \theta, A)\} = \{x\}. \quad \square \end{aligned}$$

En el siguiente teorema se proporcionan condiciones suficientes para que una situación con comunicación NTU, (N, V, A) , tenga valores posicionales. Previamente proporcionamos una definición y un lema. Dicho lema aparece en Kern (1985).

Definición 4.15 Sea $C \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto convexo. El cono frontera de C se denota por $N(C)$ y es el conjunto

$$N(C) = \{\lambda \in \mathbb{R}^N : \sup_{x \in C} \sum_{i \in N} \lambda_i x_i < \infty\}.$$

Se verifica que $N(C)$ es un cono convexo y que contiene a todos los vectores normales de C .

Lema 4.1 Sea $(N, V) \in \text{NTU}(N)$. Para $T \subseteq N$, si $V(T)$ es un conjunto cuasipoliédrico, la aplicación

$$\nu_\lambda(T) : N(V(T)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua.

Teorema 4.7 Sea $(N, V, A) \in \text{CNTU}(N)$ tal que verifica las siguientes condiciones:

1. $V(i) = 0, \forall i \in N$.
2. $\forall U \subseteq T \in N/A, V(U)$ es un conjunto cuasipoliédrico.
3. $\forall T \in N/A$, si $x, y \in \delta V(T)$ y $x \geq y$ entonces $x = y$.

4. V es monótono en las componentes, es decir,

$$\forall T \in N/A, \forall U \subseteq W \subseteq T, V^*(U) \subseteq V^*(W).$$

Entonces $CP(N, V, A) \neq \emptyset$.

Demostración.

Si $T \in N/A$ vamos a considerar el cono frontera de $V(T)$, $N(V(T))$. Por la condición 3. del enunciado del teorema, si $\lambda_T \in N(V(T))$ entonces $\lambda_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, t$, donde $t = |T|$. Además, por ser $V(T)$ comprehensivo, $N(V(T)) \subseteq \mathbb{R}_{++}^T$.

Si $\lambda_T \in N(V(T))$ entonces $\nu_{\lambda_T}(T) = \sup\{\sum_{i \in T} \lambda_{T_i} x_i, x \in V(T)\}$ es finito y por la condición 4. del teorema $\nu_{\lambda_U}(U)$ también lo es, $\forall U \subseteq T$ y por tanto $\nu_{\lambda, A}$ está bien definido.

Si ahora normalizamos, pasamos a considerar

$$N_1(V(T)) = \{\lambda_T \in N(V(T)) : \sum_{i \in T} \lambda_{T_i} = 1\}.$$

Dividiremos lo que resta de demostración en cinco apartados, en los cuales haremos uso de resultados conocidos de análisis convexo, que se pueden encontrar, por ejemplo, en Rockafellar (1970).

• APARTADO I

Para cada componente conexa, es decir, para cada coalición $T \in N/A$ definimos la siguiente aplicación:

$$F^T : N_1(V(T)) \longrightarrow \mathbb{R}^T,$$

donde si $i \in T$

$$F_i^T(\lambda_T) = \lambda_{T_i}^{-1} p_i(T, \nu_{\lambda_T}, A(T)) = \lambda_{T_i}^{-1} \sum_{a \in A_i} \text{Sh}_a(A(T), \nu_{\lambda_T, A(T)})/2,$$

siendo $(A(T), \nu_{\lambda_T, A(T)})$ el juego de arcos inducido por $(T, \nu_{\lambda_T}, A(T))$.

Vamos a probar que F^T es continua en $N_1(V(T))$ y que además

$$F^T(\lambda_T) \notin V(T) \setminus P(V(T)),$$

para cada $\lambda_T \in N_1(V(T))$.

Sabemos que

$$\begin{aligned} & \text{Sh}_a(A(T), \nu_{\lambda_T, A(T)}) = \\ &= \sum_{L \subseteq A(T), a \in L} \frac{(l-1)! (|A(T)| - l)!}{|A(T)|!} (\nu_{\lambda_T, A(T)}(L) - \nu_{\lambda_T, A(T)}(L \setminus \{a\})) \end{aligned}$$

donde $l = |L|$.

Por la condición 2. del enunciado del teorema y el lema 4.1, $\nu_{\lambda_T}(U)$ es continua en λ_T para cada $U \subseteq T$. Al ser $\nu_{\lambda_T}(U)$ continua, lo son $\nu_{\lambda_T, A(T)}(L)$ para cada $L \subseteq A(T)$, $\text{Sh}_a(A(T), \nu_{\lambda_T, A(T)})$ y F^T .

En cuanto a la segunda parte, si $F^T(\lambda_T) \in V(T) \setminus P(V(T))$, entonces $\exists y \in V(T) : y > F^T(\lambda_T)$, es decir, $y_i > F_i^T(\lambda_T) \forall i \in T$.

Como $\lambda_{T_i} > 0 \forall i \in T$, entonces $\lambda_{T_i} y_i > \lambda_{T_i} F_i^T(\lambda_T) = p_i(T, \nu_{\lambda_T}, A(T)) \forall i \in T$.

Por tanto, teniendo en cuenta además que p es eficiente en componentes y descomponible en componentes,

$$\sum_{i \in T} \lambda_{T_i} y_i > \sum_{i \in T} p_i(T, \nu_{\lambda_T}, A(T)) = \nu_{\lambda}(T) = \sup_{x \in V(T)} \sum_{i \in T} \lambda_{T_i} x_i,$$

con lo que hemos llegado a un absurdo y por tanto

$$F^T(\lambda_T) \notin V(T) \setminus P(V(T)).$$

De la demostración se deduce también que si λ_T es un vector normal a $V(T)$, $\sum_{i \in T} \lambda_{T_i} F_i^T(\lambda_T) = \sup_{x \in V(T)} \sum_{i \in T} \lambda_{T_i} x_i$, es decir, $F^T(\lambda_T)$ es un punto del hiperplano tangente a $V(T)$, con vector normal λ_T .

• APARTADO II

Sea ahora $x_0 \in V(T) \setminus P(V(T))$ y la aplicación F^T como en el apartado anterior.

Para cada coalición $T \in N/A$ definimos la siguiente aplicación:

$$t^T : N_1(V(T)) \rightarrow \mathbb{R}^T,$$

donde si $\lambda_T \in N_1(V(T))$

$$t^T(\lambda_T) = \max\{t \in [0, 1] : tF^T(\lambda_T) + (1-t)x_0 \in V(T)\}.$$

Vamos a probar que t^T es continua en $N_1(V(T))$.

Como $V(T)$ es cerrado, el máximo de la definición de $t^T(\lambda_T)$ se alcanza. Además como $F^T(\lambda_T) \notin V(T) \setminus P(V(T))$ y $x_0 \in V(T) \setminus P(V(T))$, se tiene que $t^T(\lambda_T) > 0$.

Consideremos ahora el denominado *funcional de Minkowski* de $V(T)$:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = \inf\{s > 0 : x/s \in V(T)\} \end{aligned}$$

Es un resultado conocido que esta función es convexa, no nula, definida en todo $\mathbb{R}^T$ si 0 es un punto interior de $V(T)$ y por tanto continua en $\mathbb{R}^T$.

Supongamos $x_0 = 0$, entonces, como también F^T es continua

$$t^T(\lambda_T) = \max\{t \in [0, 1] : tF^T(\lambda_T) \in V(T)\} = 1/g(F^T(\lambda_T))$$

es continua.

Si $x_0 \neq 0$, trasladamos $V(T)$, x_0 y $F^T(\lambda_T)$ por $-x_0$ y las consideraciones de continuidad siguen siendo válidas, es decir, consideramos

$$g(x) = \inf\{s > 0 : x/s \in V(T) - x_0\},$$

y por tanto

$$t^T(\lambda_T) = 1/g(F^T(\lambda_T) - x_0).$$

- APARTADO III

Sean F^T y t^T como en los apartados anteriores.

Para cada coalición $T \in N/A$ definimos la siguiente aplicación:

$$h^T : N_1(V(T)) \rightarrow \mathbb{R}^T,$$

donde si $\lambda_T \in N_1(V(T))$

$$h^T(\lambda_T) = t^T(\lambda_T)F^T(\lambda_T) + (1 - t^T(\lambda_T))x_0.$$

Se verifica que h^T es continua en $N_1(V(T))$.

Para ver que h^T es continua en $N_1(V(T))$ basta tener en cuenta que las aplicaciones t^T y F^T lo son.

• APARTADO IV

Sean F^T , t^T y h^T como en los apartados anteriores.

Para cada coalición $T \in N/A$ definimos la siguiente aplicación:

$$G^T : N_1(V(T)) \rightarrow \mathbb{R}^T,$$

donde si $\lambda_T \in N_1(V(T))$,

$$G^T(\lambda_T) = \{\alpha \in N_1(V(T)) : x \in V(T) \Rightarrow \sum_{i \in T} \alpha_i x_i \leq \sum_{i \in T} \alpha_i h_i^T(\lambda_T)\}.$$

Entonces vamos a probar que:

- $G^T(\lambda_T)$ es no vacío, convexo y compacto para cada $\lambda_T \in N_1(V(T))$.
- G^T es una correspondencia cerrada.

es decir, G^T satisface las condiciones del teorema del punto fijo de Kakutani (1944).

Notemos que G^T lleva λ_T al cono normal de $h^T(\lambda_T)$ normalizado. Por tanto, la primera parte es consecuencia de que el cono normal de un punto frontera de un conjunto convexo es no vacío, convexo y cerrado. Si se normaliza al intersecarlo con el hiperplano $\sum_{i \in T} \lambda_i = 1$ mantiene esas propiedades y ahora tiene también la de acotación.

Para probar la segunda parte consideremos $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ dos sucesiones de elementos de $N_1(V(T))$ tal que $\lambda_k \rightarrow \lambda$ y $\alpha_k \rightarrow \alpha$, con $\alpha_k \in G(\lambda_k)$, para $k \in \mathbb{N}$.

Como $N_1(V(T))$ es cerrado α y λ están en $N_1(V(T))$.

Como h^T es continua, si $x \in V(T)$,

$$\sum_{i \in T} \alpha_i x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in T} \alpha_{k,i} x_i \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in T} \alpha_{k,i} h_i^T(\lambda_k) = \sum_{i \in T} \alpha_i h_i^T(\lambda).$$

Así α es un vector normal a $V(T)$ en $h(\lambda)$, luego $\alpha \in G^T(\lambda)$ y por consiguiente G^T es una aplicación cerrada, $\forall T \in N/A$.

• APARTADO V

Sean F^T , t^T , h^T y G^T como en los apartados anteriores.

Veamos entonces que $\exists x \in X_{T \in N/A} V(T)$ tal que $\exists \lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ con

$$\lambda_i x_i = \sum_{a \in A_i} \text{Sh}_a(A, \nu_{\lambda, A})/2.$$

Sea $x_0^T \in V(T) \setminus P(V(T))$ fijo. El último apartado indica que se satisfacen las condiciones del teorema de Kakutani, luego existe al menos un punto fijo de la correspondencia G^T , es decir,

$$\exists \mu_T \in N_1(V(T)) : \mu_T \in G^T(\mu_T),$$

o lo que es lo mismo,

$$\forall x \in V(T), \sum_{i \in T} \mu_{T_i} x_i \leq \sum_{i \in T} \mu_{T_i} h_i^T(\mu_T),$$

y como $h^T(\mu_T) \in V(T)$ entonces

$$\sum_{i \in T} \mu_{T_i} h_i^T(\mu_T) = \sup_{x \in V(T)} \sum_{i \in T} \mu_{T_i} x_i = \sum_{i \in T} \mu_{T_i} F_i^T(\mu_T),$$

por tanto

$$\sum_{i \in T} \mu_{T_i} F_i^T(\mu_T) = \sum_{i \in T} \mu_{T_i} h_i^T(\mu_T) = \sum_{i \in T} \mu_{T_i} [t^T(\mu_T) F^T(\mu_T) + (1 - t^T(\mu_T)) x_0]_i.$$

Así se tiene que

$$\sum_{i \in T} (1 - t^T(\mu_T)) \mu_{T_i} F_i^T(\mu_T) = \sum_{i \in T} (1 - t^T(\mu_T)) \mu_{T_i} x_{0_i}.$$

Como $x_0 \in V(T) \setminus P(V(T))$ y $F^T(\mu_T) \notin V(T) \setminus P(V(T))$, esta ecuación sólo se satisface si $t^T(\mu_T) = 1$ y así $h^T(\mu_T) = F^T(\mu_T) \in V(T)$ y μ_T normal a $V(T)$ en $F^T(\mu_T)$.

Por tanto, basta tomar $\lambda = X_{T \in N/A} \mu_T \in \mathbb{R}_{++}^N$ y

$$x = X_{T \in N/A} F^T(\mu_T) \in X_{T \in N/A} V(T).$$

Para todo $T \in N/A$ y para todo $i \in T$ se tiene

$$\lambda_i x_i = \mu_{T_i} F_i^T(\mu_{T_i}) = p_i(T, \nu_{\mu_T}, A(T)) = \sum_{a \in A_i} \text{Sh}_a(A, \nu_{\mu, A})/2,$$

con lo que $x \in \text{CP}(N, V, A)$. $\square$

Vamos a enumerar algunas propiedades razonables que puede verificar un concepto de solución sobre $CNTU(N)$.

- $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *existencia* (EXI) si $\forall (V, A) \in CNTU(N)$ $f(V, A) \neq \emptyset$.
- $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *eficiencia en componentes* (EFC) si $\forall (V, A) \in CNTU(N)$ $f(V, A) \subseteq X_{T \in N/A} P(V(T))$.
- $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *independencia de alternativas irrelevantes en las componentes* (IAC) si

$$\forall (V, A), (W, A) \in CNTU(N)$$

tal que $\forall T \subseteq N/A$ $V(T) \subset W(T)$ y si $U \subset T \Rightarrow V(U) = W(U)$, si $x \in f(W, A) \cap X_{T \in N/A} V(T)$ entonces $x \in f(V, A)$.

- $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *covarianza de escala* (CES) si $\forall (V, A) \in CNTU(N)$ y $\forall a \in \mathbb{R}_{++}^N$, entonces

$$f(aV, A) = af(V, A).$$

- $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *aditividad condicional* (ADC) si

$$\forall (V, A), (V', A), (W, A) \in CNTU(N) \text{ tal que } W = V + V'$$

se tiene que $(f(V, A) + f(V', A)) \cap X_{T \in N/A} P(W_0(T)) \subseteq f(W, A)$.

- $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *arcos nulos* (ANU) si

$$f(V, A) = f(V, A \setminus (i : j)),$$

$\forall (V, A) \in CNTU(N)$, tal que la situación (V, A) es equivalente a una situación TU con comunicación, y $\forall (i : j) \in A$, nulo.

- $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *arcos anónimos* (AAN) si lo que recibe un jugador en una situación NTU con comunicación es proporcional al número de arcos que parten de dicho jugador, cuando la situación es equivalente a una situación TU con comunicación que además es de arcos anónimos.

Vamos a denotar por $CNTU(N)^r$ la familia de situaciones NTU con comunicación que verifican las siguientes condiciones:

1. $\forall T \in N/A$, $V_0(T)$ es "suave", es decir, admite un único hiperplano soporte en cada punto de la frontera.
2. $\forall T \in N/A$, si $x, y \in \delta V(T)$ y $x \geq y$ entonces $x = y$.
3. $\forall U \subseteq T \in N/A$, $V(U)$ es un conjunto cuasipoliédrico.
4. V es monótono en las componentes.
5. $V(i) = 0$, $\forall i \in N$.

Por $CNTU(N)^r_s$ denotamos el subconjunto de situaciones de $CNTU(N)^r$ en las que el grafo de comunicación no contiene ciclos.

El siguiente resultado enumera algunas de las propiedades de la correspondencia posicional. Antes vamos a ver un lema.

Lema 4.2 *Sea $x \in CP(N, V, A)$ con $(N, V, A) \in CNTU(N)$ tal que $V_0(T)$ es "suave", $\forall T \in N/A$. Por $\delta^T(V(T), x_T)$ denotamos, para cada $T \in N/A$, el vector normal correspondiente al único hiperplano soporte a $V_0(T)$ en el punto x_T . Sea $\lambda_T = \delta^T(V(T), x_T)$ y $\lambda = X_{T \in N/A} \lambda_T$, entonces $\forall T \in N/A$ el juego $TU \nu_{\lambda T}$ está definido y $\lambda_i x_i = \sum_{a \in A_i} Sh_a(A, \nu_{\lambda, A})/2 \forall i \in T$.*

Demostración.

Como $x \in CP(N, V, A)$ entonces $\exists \mu \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que $\forall i \in T$, $\forall T \in N/A$,

$$\mu_i x_i = p_i(T, \nu_{\mu T}, A(T)) = \sum_{a \in A_i} Sh_a(A, \nu_{\lambda, A})/2.$$

Por la eficiencia en componentes de p ,

$$\sum_{i \in T} \mu_i x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in T} \mu_i y_i : y \in V(T) \right\}.$$

Así $\sum_{i \in T} \mu_i y_i$ se maximiza sobre $V(T)$ en $y = x_T \in V_0(T)$, es decir,

$$\lambda_T = \delta^T(V(T), x_T) = \mu_T$$

con lo que se tiene el resultado. $\square$

Proposición 4.1 *La correspondencia posicional*

$$CP : CNTU(N)^r \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

verifica las propiedades de eficiencia en componentes, independencia de alternativas irrelevantes en las componentes, covarianza de escala, arcos nulos, arcos anónimos y aditividad condicional.

Demostración.

La propiedad de eficiencia en componentes se deduce inmediatamente de la definición de CP y la eficiencia en componentes de p: sea (N, V, A) una situación con comunicación en $CNTU(N)^r$ y $x \in CP(N, V, A)$. Supongamos que $\exists T \in N/A$ y $\exists y \in V(T)$ tal que $(y_i)_{i \in T} \geq (x_i)_{i \in T}$ e $(y_i)_{i \in T} \neq (x_i)_{i \in T}$. Como $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$,

$$\sum_{i \in T} \lambda_i y_i > \sum_{i \in T} \lambda_i x_i = \sum_{i \in T} p_i(N, \nu_\lambda, A) = \nu_\lambda(T) = \sup \left\{ \sum_{i \in T} \lambda_i z_i : z \in V(T) \right\},$$

lo cual es absurdo y por tanto $(x_i)_{i \in T} \in P(V(T))$, $\forall T \in N/A$.

En cuanto a la independencia de alternativas irrelevantes en las componentes, si $x \in CP(N, W, A)$ entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$ tal que $\lambda_i x_i = p_i(T, w_\lambda, A)$ $\forall i \in T \in N/A$.

Como p es eficiente en componentes entonces

$$\sum_{i \in T} \lambda_i x_i = \sum_{i \in T} p_i(T, w_\lambda, A) = w_\lambda(T) = \sup_{y \in W(T)} \sum_{i \in T} \lambda_i y_i.$$

Por otro lado, como $x \in X_{T \in N/A} V(T)$ y si $T \in N/A$, $V(T) \subseteq W(T)$ se tiene que

$$\sum_{i \in T} \lambda_i x_i \leq \sup_{y \in V(T)} \sum_{i \in T} \lambda_i y_i \leq \sup_{y \in W(T)} \sum_{i \in T} \lambda_i y_i = \sum_{i \in T} \lambda_i x_i.$$

Por tanto $\nu_\lambda(T) = w_\lambda(T) = \sum_{i \in T} \lambda_i x_i$.

Como además $V(U) = W(U)$, $\forall U \subset T \in N/A$ entonces $\nu_\lambda(U) = w_\lambda(U)$, $\forall U \subseteq T \in N/A$ y por tanto $p_i(T, \nu_\lambda, A) = p_i(T, w_\lambda, A) = \lambda_i x_i$, $\forall i \in T \in N/A$ y así $x \in CP(N, V, A)$.

La covarianza de escala es inmediata y las propiedades de arcos nulos y arcos anónimos se siguen del hecho de que CP coincide con p al restringirse a las situaciones TU con comunicación y de que p verifica las propiedades de arcos nulos y arcos anónimos.

Por último vamos a probar la propiedad de aditividad condicional. Sea $W = V + V'$, $x \in \text{CP}(N, V, A)$, $y \in \text{CP}(N, V', A)$ y $x + y \in X_{T \in N/A} P(W_0(T))$. Para cada $T \in N/A$ sea λ_T el vector director del único hiperplano soporte de $W(T)$ en $(x + y)_T$. Entonces $\sum_{i \in T} \lambda_{T_i} z_{T_i}$ se maximiza sobre $V(T)$ en x_T y sobre $V'(T)$ en y_T . Definimos los siguientes juegos TU:

$$\nu_\lambda(U) = \max_{y \in V(U)} \sum_{i \in U} \lambda_{U_i} y_i,$$

$$\nu'_\lambda(U) = \max_{y \in V'(U)} \sum_{i \in U} \lambda_{U_i} y_i,$$

$$\omega_\lambda(U) = \max_{y \in W(U)} \sum_{i \in U} \lambda_{U_i} y_i,$$

para cada $U \subseteq T \in N/A$. Dichos juegos están bien definidos y por el lema anterior

$$p(T, \nu_\lambda, A) = \lambda_T x_T, \quad p(T, \nu'_\lambda, A) = \lambda_T y_T.$$

Además, por la aditividad de p ,

$$p(T, \omega_\lambda, A) = p(T, \nu_\lambda, A) + p(T, \nu'_\lambda, A) = \lambda_T (x_T + y_T),$$

con lo que $x + y \in \text{CP}(N, W, A)$. $\square$

El siguiente resultado es una caracterización axiomática de la correspondencia posicional.

Teorema 4.8 *Existe un único concepto de solución sobre $\text{CNTU}(N)_s^r$,*

$$f : \text{CNTU}(N)_s^r \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que verifica las propiedades de existencia, eficiencia en componentes, aditividad condicional, covarianza de escala, independencia de alternativas irrelevantes en las componentes, arcos nulos y arcos anónimos. Dicho concepto de solución es la correspondencia posicional.

Demostración.

La existencia es consecuencia de la proposición anterior. La demostración de la unicidad la dividiremos en varios apartados.

• APARTADO I

Si f es un concepto de solución sobre $CNTU(N)_s^r$ que verifica las propiedades de existencia, eficiencia en componentes, covarianza de escala, aditividad condicional, arcos nulos y arcos anónimos, vamos a probar que si V es un juego NTU equivalente a un juego TU ν , entonces

$$f(N, V, A) = \{p(N, \nu, A)\}.$$

Veamos en primer lugar que si consideramos U^T , $T \subseteq N$, $|T| \geq 2$, el juego NTU correspondiente al juego TU de unanimidad de los jugadores de T , entonces $f(N, U^T, A) = \{p(N, U^T, A)\}$.

Si la coalición T es A -conexa, es decir, los elementos de T están en la misma componente conexa, consideremos su *envoltura conexa*, es decir:

$$H(T) := \cap \{U \subseteq N : T \subseteq U, U \text{ } A\text{-conexo}\}.$$

Si ahora consideramos el juego de arcos U_A^T , se tiene que $U_A^T(L) = 1$ si $A(H(T)) \subseteq L$ y $U_A^T(L) = 0$ si $A(H(T)) \not\subseteq L$. Por tanto, cada arco en $A \setminus A(H(T))$ es nulo y por la propiedad de arcos nulos de p se tiene que $f(N, U^T, A) = f(N, U^T, A(H(T)))$. Además la situación con comunicación $(N, U^T, A(H(T)))$ es de arcos anónimos y por la propiedad de arcos anónimos de f , $\exists \alpha \in \mathbb{R} : f_i(N, U^T, A) = \alpha \mid A(H(T))_i \mid \forall i \in N$. Utilizando la eficiencia en componentes se tiene que

$$f_i(N, U^T, A) = \frac{|A(H(T))_i|}{2|A(H(T))|} = p_i(N, U^T, A), \forall i \in N.$$

Si la coalición T no es A -conexa, entonces por anonimidad de arcos y eficiencia en componentes de p y f se tiene que

$$f_i(N, U^T, A) = \{p_i(N, U^T, A)\}, \forall i \in N.$$

Sea ahora V el juego NTU correspondiente a un juego TU ν . Si $\alpha \in \mathbb{R}$, por V^α denotamos el juego NTU correspondiente al juego TU $\alpha\nu$. Sea ahora V^0 el juego correspondiente al juego TU idénticamente cero y U^N el juego de unanimidad de los N jugadores. Si N es A -conexo por la parte

anterior de la demostración y los axiomas de aditividad y eficiencia en componentes:

$$\begin{aligned} f(V^0, A) + \{(\frac{|A_i|}{\sum_{i \in N} |A_i|})_{i \in N}\} &= f(V^0, A) + f(U^N, A) \subseteq \\ &\subseteq f(V^0 + U^N, A) = f(U^N, A) = \{(\frac{|A_i|}{\sum_{i \in N} |A_i|})_{i \in N}\}. \end{aligned}$$

Por el axioma de existencia se sigue que

$$f(V^0, A) = \{\theta\}. \quad (4.1)$$

Si N no es A -conexo se procede igual sustituyendo $\{(\frac{|A_i|}{\sum_{i \in N} |A_i|})_{i \in N}\}$ por $\{\theta\}$, que es el valor de $f(U^N, A)$ si $N/A \neq N$.

Por eficiencia y aditividad condicional,

$$f(V, A) + f(V^{-1}, A) \subseteq f(V + V^{-1}, A) = f(V^0, A) = \{\theta\}.$$

Por el axioma de existencia se sigue que tanto $f(V, A)$ como $f(V^{-1}, A)$ constan de un solo punto y

$$f(V^{-1}, A) = -f(V, A). \quad (4.2)$$

Si ahora $\alpha \in \mathbb{R}^+$, por covarianza de escala y tomando $\lambda = (\alpha, \dots, \alpha)$, se tiene que

$$f(V^\alpha, A) = \alpha f(V, A). \quad (4.3)$$

Combinando con (4.1) y (4.2), la expresión (4.3) se tiene para todo α , cualquiera que sea su signo.

Así, como $p(\beta U^T, A) = \beta p(U^T, A)$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f(U^{T, \alpha}, A) = \{p(\alpha U^T, A)\}, \quad \forall T \subseteq N \text{ y } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Por último como cualquier juego TU ν puede expresarse en la forma $\nu = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T U^T$, con $\alpha_T \in \mathbb{R}$, el correspondiente juego V será

$$V = \sum_{T \subseteq N} U^{T, \alpha_T}.$$

Por la expresión (4.4) y las propiedades de eficiencia y aditividad condicional se sigue:

$$\begin{aligned} \{p(\nu, A)\} &= \sum_{T \subseteq N} \{p(\alpha_T U^T, A)\} = \sum_{T \subseteq N} f(U^{T, \alpha_T}, A) \subseteq \\ &\subseteq f\left(\sum_{T \subseteq N} U^{T, \alpha_T}, A\right) = f(V, A), \end{aligned}$$

donde la anterior inclusión es consecuencia de que si

$$x \in \sum_{T \subseteq N} f(U^{T, \alpha_T}, A) = \sum_{T \subseteq N} \{p(\alpha_T U^T, A)\},$$

entonces si $i \in N$

$$x_i = \sum_{U \subseteq T \in N/A} \frac{\alpha_U |A(H(U))_i|}{2 |A(H(U))|}.$$

Fijado $T \in N/A$, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T} x_i &= \sum_{i \in T} \sum_{U \subseteq T} \frac{\alpha_U |A(H(U))_i|}{2 |A(H(U))|} = \sum_{U \subseteq T} \sum_{i \in T} \frac{\alpha_U |A(H(U))_i|}{2 |A(H(U))|} = \\ &= \sum_{U \subseteq T} \alpha_U \sum_{i \in H(U)} \frac{|A(H(U))_i|}{2 |A(H(U))|} = \sum_{U \subseteq T} \alpha_U = \nu(T) \end{aligned}$$

y por tanto, si $x \in \sum_{T \subseteq N} f(U^{T, \alpha_T}, A)$ y teniendo en cuenta la aditividad de f se tiene que $x \in f(\sum_{T \subseteq N} U^{T, \alpha_T}, A)$.

Entonces, como ya hemos visto que $f(V, A)$ consta de un solo punto se tiene que $f(V, A) = \{p(\nu, A)\}$.

• APARTADO II

Veamos que si f verifica las propiedades de existencia, eficiencia en componentes, covarianza de escala, aditividad condicional, arcos anónimos y arcos nulos, entonces para cada $(N, V, A) \in CNTU(N)_s^r$,

$$f(N, V, A) \subseteq CP(N, V, A).$$

Consideremos $y \in f(N, V, A)$. Por eficiencia en componentes de f ,

$$y \in X_{T \in N/A} P(V(T)).$$

Sea λ_T es el vector director del único hiperplano soporte de $V(T)$ en y_T , $\lambda \in \mathbb{R}_{++}^N$. Como f y CP satisfacen covarianza de escala, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda = e_N$. Si V^0 corresponde al juego idénticamente cero, $V + V^0$ es un juego, se verifica que $y \in X_{T \in N/A} P((V + V^0)(T))$ y además $V + V^0$ corresponde al juego TU $\nu_\lambda(T) = \sup_{x \in V(T)} \sum_{i \in T} \lambda_i x_i$.

Aplicando el apartado anterior y la aditividad:

$$\begin{aligned} \lambda y = y \in f(N, V, A) \cap X_{T \in N/A} P((V + V^0)(T)) &= (f(N, V, A) + f(N, V^0, A)) \cap \\ &\cap X_{T \in N/A} P((V + V^0)(T)) \subseteq f(V + V^0, A) = \{p(\nu_\lambda, A)\}. \end{aligned}$$

Así $\lambda y = p(\nu_\lambda, A)$ es decir $y \in \text{CP}(V, A)$.

- APARTADO III

Por último veamos que si f es un concepto de solución que satisface las propiedades de existencia, eficiencia en componentes, aditividad condicional, covarianza de escala, independencia de alternativas irrelevantes en las componentes, arcos nulos y arcos anónimos entonces para cada $(N, V, A) \in \text{CNTU}(N)_s^r$, $\text{CP}(N, V, A) \subseteq f(N, V, A)$.

Sea entonces $y \in \text{CP}(N, V, A)$ entonces $\exists \lambda : \nu_\lambda(T) = \sup_{x \in V(T)} \sum_{i \in T} \lambda_i x_i$ está definido y $\lambda y = p(\nu_\lambda, A)$.

Sea V_λ el juego correspondiente a ν_λ . Definimos el juego W como:

$$W(U) = \begin{cases} V_\lambda(T) & \text{si } U = T \in N/A \\ \lambda V(U) & \text{si } U \neq T. \end{cases}$$

Entonces $\lambda y \in \text{CP}(N, W, A)$, con el vector $\lambda = e_N$, $(W, A) \in \text{CNTU}(N)_s^r$ y $f(W, A)$ está definido.

Se tiene que $V_\lambda = W + V_0$ y $P(W(T)) = P(W + V_0)(T)$, $\forall T \in N/A$.

Ahora por el apartado I y los axiomas de eficiencia en componentes, existencia y aditividad se tiene:

$$\begin{aligned} \{p(\nu_\lambda, A)\} &= f(V_\lambda, A) = f(W + V_0, A) \supseteq \\ &\supseteq (f(W, A) + f(V_0, A)) \cap X_{T \in N/A} P((W + V_0)(T)) = \\ &= (f(W, A) + \theta) \cap X_{T \in N/A} P(W(T)) = f(W, A) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Así, $f(W, A) = \{p(\nu_\lambda, A)\} = \{\lambda y\}$.

Por definición,

$$W(T) = V_\lambda(T) \supseteq \lambda V(T), \quad T \in N/A$$

$$W(U) = \lambda V(U), \quad U \neq T$$

y como $y \in X_{T \in N/A} V(T)$ entonces $\lambda y \in X_{T \in N/A} \lambda V(T)$.

Por último, aplicando independencia de alternativas irrelevantes en las componentes y covarianza

$$\lambda y \in f(\lambda V, A) = \lambda f(V, A),$$

es decir, $y \in f(V, A)$. $\square$

En el siguiente resultado se relacionan los valores posicionales NTU con el núcleo del juego de puntos inducido, obteniéndose una generalización del teorema 2.8. Haremos uso del siguiente lema que aparece en Kern (1985).

Lema 4.3 *Si $(N, V) \in NTU(N)$ es un juego sin utilidad transferible convexo, fijado $\lambda \in N(V) := \cap_{T \subseteq N} N(V(T))$, el juego con utilidad transferible ν_λ es también convexo.*

Teorema 4.9 *Si (N, V, A) es una situación con comunicación en $CNTU(N)_s^r$ y además el juego (N, V) es convexo, entonces los valores de posición NTU de (N, V, A) son elementos del núcleo del juego de puntos inducido $(N, V/A)$, es decir,*

$$CP(N, V, A) \subseteq Nu(N, V/A).$$

Demostración.

Sea $(N, V, A) \in CNTU(N)_s^r$ y $x \in CP(N, V, A)$ con λ^* su vector asociado.

Por el teorema 2.8, el valor posicional del juego TU (N, ν_{λ^*}, A) , $p(N, \nu_{\lambda^*}, A)$, es un elemento del núcleo del juego de puntos inducido, $Nu(N, \nu_{\lambda^*}/A)$. Por tanto, si $T \subseteq N$, $\sum_{i \in T} p_i(N, \nu_{\lambda^*}, A) \geq \nu_{\lambda^*}/A(T)$.

Como $x \in CP(N, V, A)$, si $T \in N$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T} \lambda_i^* x_i &= \sum_{i \in T} \lambda_i^* \lambda_i^{*-1} p_i(N, \nu_{\lambda^*}, A) = \\ &= \sum_{i \in T} p_i(N, \nu_{\lambda^*}, A) \geq \nu_{\lambda^*}/A(T) = \sum_{U \in T/A} \nu_{\lambda^*}(U) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{U \in T/A} \sup_{y \in V(U)} \sum_{i \in U} \lambda_i^* y_i.$$

Además, por la eficiencia en componentes, si $x \in \text{CP}(N, V, A)$,

$$x \in X_{T \in N/A} V(T) = V/A(N).$$

Veamos que $x \in \text{Nu}(N, V/A)$.

Supongamos que $\exists T_0 \subseteq N$, $\exists y^0 \in V/A(T_0)$ con $y^0 \geq x$ e $y^0 \neq x$. Entonces $\exists i_0 \in T_0$ tal que $y_{i_0}^0 > x_{i_0}$. Como $\lambda^* > 0$, en particular, $\lambda_{i_0}^* > 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T_0} \lambda_i^* y_i^0 &= \sum_{U \in T_0/A} \sum_{i \in U} \lambda_i^* y_i^0 > \\ &> \sum_{U \in T_0/A} \sup_{z \in V(U)} \sum_{i \in U} \lambda_i^* z_i. \end{aligned}$$

Ahora bien, $y^0 \in V/A(T_0) = X_{U \in T_0/A} V(U)$ lo que contradice la anterior desigualdad. Por tanto $\text{CP}(N, V, A) \subseteq \text{Nu}(N, V/A)$. $\square$

4.4.2 La correspondencia de Myerson

Definición 4.16 Si $(N, V, A) \in \text{CNTU}(N)$, el conjunto de valores de Myerson de (N, V, A) está dado por $\text{SH}(N, V/A)$.

Denotaremos por $\text{M}(N, V, A)$ el conjunto de valores de Myerson de (N, V, A) .

En van den Nouweland (1993) se proporciona el siguiente resultado que establece que la correspondencia de Myerson es una generalización del valor de Myerson.

Teorema 4.10 Si $(N, \nu, A) \in \text{CTU}(N)$ y (N, V) es el juego NTU correspondiente a (N, ν) entonces $\text{M}(N, V, A) = \{\text{m}(N, \nu, A)\}$.

En el siguiente resultado se relacionan la correspondencia de Myerson y la solución simétrica de Nash introducida en el capítulo 3. Es consecuencia de que la correspondencia de Shapley generaliza la solución de Nash y de que si la situación con comunicación NTU es equivalente a una situación de regateo, el juego de puntos inducido coincide con el juego de partida.

Teorema 4.11 Si $(S, d, A) \in \text{CNS}(N)$, con A un grafo conexo y (N, V) es el juego NTU correspondiente a (S, d) entonces $\text{M}(N, V, A) = \{\text{N}(S, d)\}$.

En el siguiente teorema se proporcionan condiciones suficientes para que una situación con comunicación NTU, (N, V, A) , tenga valores de Myerson.

Teorema 4.12 *Sea $(N, V, A) \in CNTU(N)$ tal que*

1. $V(i) = 0, \forall i \in N$.
2. $\forall U \subseteq T \in N/A, V(U)$ es un conjunto cuasipoliédrico.
3. $\forall T \in N/A$, si $x, y \in \delta V(T)$ y $x \geq y$ entonces $x = y$.
4. V es monótono en las componentes, es decir,

$$\forall T \in N/A, \forall U \subseteq W \subseteq T, V^*(U) \subseteq V^*(W).$$

entonces $M(N, V, A) \neq \emptyset$.

La demostración de este resultado es análoga a la del teorema 4.7 y por ello se omite.

Otra propiedad razonable de una solución sobre $CNTU(N)$ es la siguiente.

- $f : CNTU(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *justicia* (JUS) si $\forall (V, A) \in CNTU(N)$, tal que la situación (V, A) es equivalente a una situación TU con comunicación, $\forall (i : j) \in A$,

$$f_i(V, A) - f_i(V, A \setminus (i : j)) = f_j(V, A) - f_j(V, A \setminus (i : j)).$$

La siguiente proposición enumera alguna de las propiedades de la correspondencia de Myerson.

Proposición 4.2 *La correspondencia de Myerson*

$$M : CNTU(N)^r \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

verifica las propiedades de eficiencia en componentes, aditividad condicional, covarianza de escala, independencia de alternativas irrelevantes en las componentes y justicia.

La demostración de este resultado es análoga a la de la proposición 4.1 y consecuencia de los teoremas 2.4 y 4.10.

El siguiente resultado es una caracterización axiomática de la correspondencia de Myerson.

Teorema 4.13 *Existe un único concepto de solución sobre $CNTU(N)_s^r$,*

$$f : CNTU(N)^r \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

que verifica las propiedades de existencia, eficiencia en componentes, aditividad condicional, covarianza de escala, independencia de alternativas irrelevantes en las componentes y justicia. Dicho concepto de solución es la correspondencia de Myerson.

En el siguiente resultado se relacionan los valores de Myerson NTU con el núcleo del juego de puntos inducido, obteniéndose una generalización de los teoremas 2.3 y 2.5.

Teorema 4.14 *Si (V, A) es una situación con comunicación en $CNTU(N)^r$, V es convexo y el grafo de comunicación es de ciclos completos, entonces los valores de Myerson NTU de (V, A) son elementos del núcleo del juego de puntos inducido $(N, V/A)$.*

La demostración de este resultado es análoga a la del teorema 4.9, y consecuencia del lema 4.3 y del teorema 2.5.

Otra propiedad interesante de la correspondencia de Myerson es que si $A(N)$ denota el grafo completo sobre N , es decir, si no hay restricciones a la comunicación, entonces $M(V, A(N)) = SH(N, V)$.

4.4.3 El valor posicional NTU

Nos planteamos en esta sección generalizar al contexto de las situaciones sin utilidad transferible alguna de las soluciones estudiadas en los dos capítulos anteriores por medio de un concepto de solución que proporcione para cada situación un único vector de pagos.

En primer lugar haremos algunas consideraciones acerca del valor posicional TU.

Si (N, ν, A) es una situación TU con comunicación, en el capítulo 2 se define el valor posicional de dicha situación a partir del valor de Shapley TU y de un juego de arcos inducido que se denota por ν_A .

Otra posible definición basada en la misma idea es la siguiente. Dado (N, ν, A) , vamos a considerar la situación con comunicación equivalente (N, V, A) , donde

$$V(T) = \{x \in \mathbb{R}^T : \sum_{i \in T} x_i \leq \nu(T)\}, \quad \forall T \subseteq N.$$

Vamos a definir un "nuevo" juego de arcos inducido, (A, V_A^2) , de la siguiente forma.

Definición 4.17 Si (N, V, A) es una situación NTU con comunicación, se denomina juego de arcos inducido al juego (A, V_A^2) definido por:

$$V_A^2(L) = \{x \in \mathbb{R}^L : \exists y \in X_{T \in N/L} V(T), y_i \geq \sum_{j \in L_i} x_j/2, \forall i \in N\}, \quad \forall L \subseteq A.$$

La interpretación de esta definición es análoga a la que hemos dado en el capítulo 3 al definir un juego de arcos inducido por una situación de regateo con comunicación. Si partimos del juego de arcos (A, V_A^2) y consideramos los jugadores que componen cada arco, se puede construir el juego (N, V) adoptando como función de utilidad para cada jugador la suma de las funciones de utilidad de los arcos de los que forma parte dividido por dos, es decir, suponemos que la utilidad de un arco o vía de comunicación se la reparten a partes iguales los dos jugadores que la forman. Entonces (A, V_A^2) es el juego inducido por (N, V) de acuerdo con nuestra definición de juego de arcos inducido.

Nota La definición que hemos dado de juego de arcos inducido, tanto en el caso de situaciones de regateo como en el caso más general de situaciones NTU, guarda cierta similitud con las definiciones de juego réplica dadas en Kalai (1977), Calvo, García y Zarzuelo (1995) y Thomson (1986). En estos trabajos se consideran juegos de n jugadores donde cada jugador es realmente un grupo de individuos, pudiendo ser los grupos de diferentes tamaños, por ejemplo $t_1, \dots, t_n$. En estos juegos participan efectivamente $t = t_1 + \dots + t_n$ jugadores y el juego réplica se define a partir del juego de partida con el objetivo de formalizar el juego que juegan los t jugadores. En los trabajos citados se relacionan ciertas soluciones simétricas de los juegos réplica con soluciones ponderadas del juego inicial, donde el peso de cada grupo de individuos es el

tamaño de dicho grupo. En particular se obtienen resultados de "invarianza" en el sentido de que la suma de lo que a los individuos de un grupo les asigna una cierta solución en el juego réplica, coincide con lo que la solución ponderada le asigna a dicho grupo en el juego de partida.

Un posible principio a seguir al definir los juegos réplica es que la utilidad que consigue un grupo de individuos se la puedan repartir de cualquier forma posible dichos individuos. El principio que seguimos al definir el juego de arcos inducido, y que parece bastante natural, es que la utilidad de un arco se la puedan repartir a partes iguales los dos jugadores que lo forman.

La anterior definición es válida para cualquier situación NTU con comunicación (N, V, A) y nótese que aunque la situación (N, V, A) sea equivalente a una situación TU, el juego de arcos inducido, (A, V_A^2) , no tiene por qué ser equivalente a un juego TU.

Ahora, si (N, ν, A) es una situación TU con comunicación, consideramos el juego NTU equivalente al juego de arcos inducido, ν_A , que se considera en la definición del valor posicional TU, que vamos a denotar por (A, V_A^1) , es decir,

$$V_A^1(L) = \{x \in \mathbb{R}^L : \sum_{a \in L} x_a \leq \nu_A(L) = \sum_{T \in N/L} \nu(T)\}, \quad \forall L \subseteq A.$$

El siguiente ejemplo pone de manifiesto que, en general, dada una situación con comunicación TU (N, ν, A) , los dos juegos de arcos considerados, (A, V_A^1) y (A, V_A^2) no tienen por qué coincidir y además si L es una coalición de arcos, $V_A^1(L)$ puede ser un conjunto demasiado grande para medir la importancia de dicha coalición L .

Ejemplo 4.1 Sea $(N, \nu, A) \in CTU(N)$ con $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$\nu(\{1, 2, 3\}) = 6, \quad \nu(T) = 0, \quad \forall T \subseteq N, \quad T \neq \{1, 2, 3\}$$

y $A = \{(1 : 2), (2 : 3), (4 : 5)\}$.



Si consideramos $L=A$, se tiene que:

$$V_A^1(L) = \{x \in \mathbb{R}^A : \sum_{i=1}^3 x_i \leq 6\}$$

y

$$V_A^2(L) = \{x \in \mathbb{R}^A : \sum_{i=1}^2 x_i \leq 6, x_3 \leq 0\}.$$

El punto $(4, 0, 2) \notin V_A^2(L)$ y sin embargo $(4, 0, 2) \in V_A^1(L)$. Esto último no parece muy razonable puesto que V_A^1 le da al arco $(4:5)$ un pago de 2 cuando realmente $\nu(\{4, 5\}) = 0$.

Utilizando esta nueva definición de juego de arcos inducido y el MC-valor, concepto de solución NTU introducido en este capítulo, que generaliza al valor de Shapley TU y a la solución de Kalai-Smorodinsky, se puede dar una nueva definición de valor posicional TU.

Definición 4.18 Si (N, ν, A) es una situación TU con comunicación se define el valor posicional de (N, ν, A) obtenido a partir del juego de arcos (A, V_A^2) como el vector de $\mathbb{R}^N$ cuya componente i -ésima viene dada por:

$$\sum_{j \in A_i} MC_j(A, V_A^2)/2.$$

En el siguiente resultado se relacionan los dos juegos de arcos inducidos propuestos y los dos valores posicionales, en particular se obtiene que las dos definiciones de valor posicional TU, la debida a Borm, Owen y Tijs presentada en el capítulo 2, y la que proporcionamos en este capítulo, coinciden, aunque están basadas en juegos de arcos diferentes.

Proposición 4.3 Sea (N, ν, A) una situación TU con comunicación, con (N, ν) un juego cero-normalizado. Se verifica:

1. $V_A^2(L) \subseteq V_A^1(L)$, $\forall L \subseteq A$.
2. $b_l(V_A^1) = b_l(V_A^2)$, $\forall l = 1, \dots, |A|$.
3. $p_i(N, \nu, A) = \sum_{j \in A_i} MC_j(A, V_A^2)/2$, $\forall i \in N$.

Demostración.

La primera afirmación se sigue de que si $L \subseteq A$ y $(x_1, \dots, x_n) \in V_A^2(L)$ entonces existe $y \in X_{T \in N/L} V(T)$, $y_i \geq \sum_{j \in L_i} x_j/2$, $\forall i \in N$. Por tanto

$$\sum_{i=1}^l x_i = \sum_{T \in N/L} \sum_{i \in T} \sum_{j \in L_i} x_j/2 \leq \sum_{T \in N/L} \sum_{i \in T} y_i \leq \sum_{T \in N/L} \nu(T) = \nu_A(L),$$

y así $(x_1, \dots, x_n) \in V_A^1(L)$.

Para demostrar la segunda afirmación, puesto que si $(N, V) \in NTU(N)$, $b(V) = \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m^\sigma(V)$, basta ver que $m^\sigma(V_A^1) = m^\sigma(V_A^2)$, $\forall \sigma \in \Pi(A)$.

Sea entonces (N, V) el juego NTU equivalente al juego (N, ν) , $\sigma \in \Pi(A)$ un cierto orden en el conjunto de jugadores (arcos), $l \in A$ y $L = (\sigma(1), \dots, \sigma(l))$. Como (A, V_A^1) es equivalente a un juego TU, entonces

$$\begin{aligned} m_{\sigma(l)}^\sigma(V_A^1) &= \nu_A(\sigma(1), \dots, \sigma(l)) - \nu_A(\sigma(1), \dots, \sigma(l-1)) = \\ &= \sum_{T \in N/L} \nu(T) - \sum_{T \in N/L \setminus \sigma(l)} \nu(T). \end{aligned}$$

Por otro lado como V_A^2 es un juego NTU,

$$m_{\sigma(l)}^\sigma(V_A^2) = \max\{t \in \mathbb{R} : (m_{\sigma(1)}^\sigma, \dots, m_{\sigma(l-1)}^\sigma, t) \in V_A^2(\sigma(1), \dots, \sigma(l))\}.$$

- Si $l = 1$, como ν es cero-normalizado,

$$m_{\sigma(1)}^\sigma(V_A^1) = \sum_{T \in N/\{\sigma(1)\}} \nu(T) = \nu(\{i, j\}),$$

donde $(i : j) = \sigma(1)$.

Por otro lado

$$m_{\sigma(1)}^\sigma(V_A^2) = \max\{t \in \mathbb{R} : t \in V_A^2(\sigma(1))\} = \nu(\{i, j\}) = m_{\sigma(1)}^\sigma(V_A^1),$$

pues

$$V_A^2(\sigma(1)) = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in V(\{i, j\}) \text{ i.e. } y_1 + y_2 \leq \nu(\{i, j\})$$

$$\text{con } x/2 \leq y_1, \ x/2 \leq y_2\}.$$

- Si $l = 2$,

$$\begin{aligned}
 m_{\sigma(2)}^{\sigma}(V_A^1) &= \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \sigma(2)\}} \nu(T) - \sum_{T \in N/\{\sigma(1)\}} \nu(T) = \\
 &= \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \sigma(2)\}} \nu(T) - m_{\sigma(1)}^{\sigma}(V_A^1) = \\
 &= \begin{cases} \nu(\{i, j, k\}) - \nu(\{i, j\}) & \text{si } \sigma(2) = (j : k) \text{ o } \sigma(2) = (i : k) \\ \nu(\{i, j\}) + \nu(\{k, h\}) - \nu(\{i, j\}) & \text{si } \sigma(2) = (k : h), \end{cases}
 \end{aligned}$$

donde $k, h \notin \{i, j\}$.

Por otro lado

$$\begin{aligned}
 m_{\sigma(2)}^{\sigma}(V_A^2) &= \max\{t \in \mathbb{R} : (m_{\sigma(1)}^{\sigma}, t) \in V_A^2(\sigma(1), \sigma(2))\} = \\
 &= \begin{cases} \nu(\{i, j, k\}) - \nu(\{i, j\}) & \text{si } \sigma(2) = (j : k) \text{ o } \sigma(2) = (i : k) \\ \nu(\{k, h\}) & \text{si } \sigma(2) = (k : h), \end{cases}
 \end{aligned}$$

por tanto,

$$m_{\sigma(2)}^{\sigma}(V_A^1) = m_{\sigma(2)}^{\sigma}(V_A^2) = \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \sigma(2)\}} \nu(T) - m_{\sigma(1)}^{\sigma}(V_A^2),$$

con $m_{\sigma(1)}^{\sigma}(V_A^2) = m_{\sigma(1)}^{\sigma}(V_A^1)$.

- Supongamos por hipótesis de inducción

$$m_{\sigma(i)}^{\sigma}(V_A^1) = m_{\sigma(i)}^{\sigma}(V_A^2) = \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}} \nu(T) - \sum_{i=1}^{l-1} m_{\sigma(i)}^{\sigma}(V_A^2),$$

con $m_{\sigma(i)}^{\sigma}(V_A^2) = m_{\sigma(i)}^{\sigma}(V_A^1)$, $\forall i = 1, \dots, l-1$.

- Veamos que la igualdad es cierta para $l+1$.

Utilizando la hipótesis de inducción,

$$m_{\sigma(l+1)}^{\sigma}(V_A^1) = \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \dots, \sigma(l+1)\}} \nu(T) - \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \dots, \sigma(l)\}} \nu(T) =$$

$$= \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \dots, \sigma(l+1)\}} \nu(T) - \sum_{i=1}^l m_{\sigma(i)}^{\sigma}(V_A^1).$$

Utilizando nuevamente que

$$\sum_{i=1}^l m_{\sigma(i)}^{\sigma}(V_A^2) = \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \dots, \sigma(l)\}} \nu(T),$$

teniendo en cuenta la definición de V_A^2 y razonando como en el caso $l = 2$,

$$\begin{aligned} m_{\sigma(l+1)}^{\sigma}(V_A^2) &= \max\{t \in \mathbb{R} : (m_{\sigma(1)}^{\sigma}, \dots, m_{\sigma(l)}^{\sigma}, t) \in V_A^2(\sigma(1), \dots, \sigma(l+1))\} = \\ &= \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \dots, \sigma(l+1)\}} \nu(T) - \sum_{T \in N/\{\sigma(1), \dots, \sigma(l)\}} \nu(T). \end{aligned}$$

Para demostrar que los dos valores posicionales coinciden, puesto que por 1. $V_A^2(A) \subseteq V_A^1(A)$ y por 2.

$$\frac{b_l(V_A^2)}{b_l(V_A^1)} = \frac{b_m(V_A^2)}{b_m(V_A^1)}, \quad \forall l, m \in \{1, \dots, |A|\},$$

por la monotonía proporcional de utopías de MC se tiene que

$$\text{MC}(V_A^2) \leq \text{MC}(V_A^1) = \text{Sh}(\nu_A),$$

y por tanto $\sum_{j \in A_i} \text{MC}_j(A, V_A^2)/2 \leq p_i(N, \nu, A)$, $\forall i \in N$, como además ambos conceptos de solución son eficientes en componentes se tiene

$$\sum_{j \in A_i} \text{MC}_j(A, V_A^2)/2 = p_i(N, \nu, A), \quad \forall i \in N. \quad \square$$

Las anteriores consideraciones nos llevan a proporcionar la siguiente definición de concepto de solución para situaciones NTU con comunicación.

Definición 4.19 Si (N, V, A) es una situación NTU con comunicación con $b(V) = e_N$, se define el valor posicional de (N, V, A) y se denota por VP como el vector de $\mathbb{R}^N$ cuya componente i -ésima viene dada por:

$$\sum_{j \in A_i} \text{MC}_j(A, V_A^2)/2.$$

Es inmediato por la proposición anterior el siguiente resultado:

Proposición 4.4 Sea (N, V, A) una situación NTU con comunicación

- Si (N, V, A) es equivalente a una situación TU (N, ν, A) en la que (A, V_A^2) es cero- normalizado y monótono, entonces se verifica que

$$VP(N, V, A) = p(N, \nu, A),$$

es decir, el valor posicional NTU generaliza al valor posicional TU.

- Si (N, V, A) es equivalente a una situación de regateo (S, d, A) con A sin ciclos, entonces se verifica que $VP(N, V, A) = P(S, d, A)$, es decir, el valor posicional NTU generaliza a la solución para situaciones de regateo obtenida mediante aproximación estratégica.

Veamos nuevas propiedades razonables que puede verificar un concepto de solución sobre CNTU(N).

1. $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *arcos anónimos* (AAN) si cuando la situación con comunicación (N, V, A) es de arcos anónimos entonces

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : f_i(N, V, A) = \alpha |A_i|, \forall i \in N,$$

donde (N, V, A) se dice de arcos anónimos si el juego de arcos asociado (A, V_A^2) es simétrico.

2. $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *monotonía restringida condicional en las componentes* (MRC) cuando si (N, V, A) , (N, W, A) son dos situaciones NTU con comunicación tal que $\forall T \in N/A$, $V(T) \subseteq W(T)$, $b(W_A^2) > \theta$ y $b_p(V_A^2)/b_p(W_A^2) = b_q(V_A^2)/b_q(W_A^2)$, $\forall p, q \in A$ entonces $f(N, V, A) \leq f(N, W, A)$.
3. $f : CNTU(N) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ se dirá que verifica la propiedad de *covarianza de arcos* (CAR) cuando si (N, V, A) , (N, W, A) son dos situaciones NTU con comunicación tales que $W_A = aV_A$, $a \in \mathbb{R}_{++}^A$, si

$$f_i(N, V, A) = \sum_{j \in A_i} y_j / 2, \quad y \in V_A,$$

entonces $f_i(N, W, A) = \sum_{j \in A_i} a_j y_j / 2, \forall i \in N$.

Por $CNTU^*(N)$ denotamos las situaciones (N, V, A) de $CNTU(N)$ en las que el juego inducido (A, V_A^2) es cero-normalizado y monótono y el juego (N, V) no tiene niveles.

El siguiente resultado enumera algunas propiedades del valor posicional NTU.

Proposición 4.5 *El valor posicional*

$$VP : CNTU(N)^* \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

verifica las propiedades de eficiencia en componentes, arcos anónimos, monotónia restringida condicional en las componentes y covarianza de arcos.

Demostración.

Sea $(N, V, A) \in CNTU(N)^*$. Para demostrar la eficiencia en componentes de VP tendremos que demostrar que $VP_T(N, V, A) \in P(V(T))$, $\forall T \in N/A$. Por las propiedades del MC-valor se tiene que $\exists x \in V_A^2(A)$, $x > MC(A, V_A^2)$.

Supongamos que $\exists y \in X_{T \in N/A} V(T)$, $y > VP(N, V, A)$. Sea entonces $j_0 \in N$ tal que

$$y_{j_0} - VP_{j_0}(N, V, A) = \min_{i \in N} \{y_i - VP_i(N, V, A)\} > 0,$$

$$p = \max_{i \in N} |A_i| > 0, \epsilon = \frac{2(y_{j_0} - VP_{j_0}(N, V, A))}{p} > 0 \text{ y}$$

$$x' = (x_1 + \epsilon, \dots, x_{|A|} + \epsilon)$$

con $x = MC(A, V_A^2)$. Se tiene que $x' > x$ y vamos a probar que además pertenece a $V_A^2(A)$, lo cual contradiría la propiedad de eficiencia del MC-valor y así VP es eficiente en componentes.

Para cada $i \in N$, sea

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{j \in A_i} (x_j + \epsilon)/2 = \\ &= \sum_{j \in A_i} x_j/2 + |A_i| (y_{j_0} - VP_{j_0}(N, V, A))/p \leq \\ &\leq \sum_{j \in A_i} x_j/2 + y_{j_0} - VP_{j_0}(N, V, A) \leq \\ &\leq VP_i(N, V, A) + y_i - VP_i(N, V, A). \end{aligned}$$

Como $y \in X_{T \in N/A} V(T)$, por la comprehensividad de $V(T)$, $\forall T \in N/A$ se tiene que $a \in X_{T \in N/A} V(T)$ y $x' \in V_A^2(A)$.

En cuanto a las restantes propiedades, la de arcos anónimos, monotonía restringida condicional en las componentes y covarianza de arcos se siguen, respectivamente, de la simetría, la monotonía proporcional en las componentes y la covarianza de escala del MC-valor. $\square$

Se verifica además el siguiente resultado de caracterización.

Teorema 4.15 *Existe un único concepto de solución sobre $CNTU(N)_s^*$,*

$$f : CNTU(N)_s^* \rightarrow \mathbb{R}^N$$

que verifica las propiedades de eficiencia en componentes, arcos anónimos, monotonía restringida condicional en las componentes y covarianza de arcos. Dicho concepto de solución es el valor posicional NTU.

Demostración.

Existencia: es consecuencia de la proposición anterior.

Unicidad: si f es una solución que verifica (EFC), (AAN), (MRC) y (CAR), vamos a demostrar que $f(V, A) = VP(V, A)$, $\forall (V, A) \in CNTU(N)_s^*$.

Sea entonces $(V, A) \in CNTU(N)_s^*$. Consideremos $F : \mathbb{R}^A \rightarrow \mathbb{R}^A$ la transformación afín de utilidades tal que $b(F(V_A^2)) = e_A$, y el juego NTU de arcos, (A, W_A^2) :

$$W_A^2(L) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^L : x \leq 0\} & \text{si } L \neq A \\ \{x \in F(V_A^2)(A) : \sigma(x) \in F(V_A^2)(A), \forall \sigma \in \Pi(A)\} & \text{si } L = A. \end{cases}$$

Sea ahora W el juego de NTU(N) inducido por (A, W_A^2) , es decir,

$$W(T) = \{y \in \mathbb{R}^T : y_i \leq \sum_{j \in A(T)_i} x_j/2, x \in W_A^2(A(T))\}$$

y $F(V)$ el juego de NTU(N) inducido por $(A, F(V_A^2))$. Entonces

$$MC_i(A, F(V_A^2)) = MC_j(A, F(V_A^2)), \forall i, j \in A$$

y así $MC(A, F(V_A^2)) \in P(W_A^2(A))$.

Como $b_i(W_A^2) = b_j(W_A^2)$, entonces $MC(A, F(V_A^2)) = MC(A, W_A^2)$ y

$$VP(N, W, A) = VP(N, F(V), A).$$

Si ahora aplicamos las propiedades (AAN) y (EFC) se tiene que

$$\text{VP}(N, W, A) = f(N, W, A) = \text{VP}(N, F(V), A)$$

y así como $f(N, W, A) \in X_{T \in N/A} F(V)(T)$, aplicando las propiedades de (MRC) y (EFC) $f(N, F(V), A) = f(N, W, A)$.

Así

$$f(N, F(V), A) = f(N, W, A) = \text{VP}(N, W, A) = \text{VP}(N, F(V), A)$$

y

$$f_i(N, F(V), A) = \text{VP}_i(N, F(V), A) = \sum_{j \in A_i} x_j/2, \quad x \in F(V_A^2).$$

Aplicando (CAR) se obtiene que $f(N, V, A) = \text{VP}(N, V, A)$. $\square$

Conclusiones

En este trabajo se han propuesto diferentes soluciones en el ámbito de los juegos cooperativos, con comunicación restringida mediante un grafo definido sobre el conjunto de los jugadores, y se han presentado las más relevantes de las ya existentes en la literatura en este contexto.

A continuación relacionamos las soluciones estudiadas.

- Consideremos en primer lugar la correspondencia de Myerson (van den Nouweland, 1993), definida en el contexto de las situaciones NTU con comunicación. Para esta solución estudiamos condiciones de existencia, su caracterización axiomática y condiciones de pertenencia al núcleo del juego inducido.

Al restringirnos a juegos NTU coincide con la correspondencia de Shapley.

Al restringirnos a situaciones TU con comunicación coincide con el valor de Myerson y al restringirnos a juegos TU coincide con el valor de Shapley.

Al restringirnos tanto a situaciones de regateo con comunicación como a juegos de regateo coincide con la solución simétrica de Nash.

- En cuanto a la correspondencia posicional, se hace un estudio análogo al efectuado para la correspondencia de Myerson.

Al restringirnos a juegos NTU proporciona un nuevo concepto de solución.

Al restringirnos a situaciones TU con comunicación coincide con el valor posicional y al restringirnos a juegos TU proporciona un nuevo concepto de solución.

Al restringirnos a situaciones de regateo con comunicación coincide con la solución de Nash ponderada por el grafo. Definimos y caracterizamos axiomáticamente este último concepto de solución.

Al restringirnos a juegos de regateo coincide con la solución simétrica de Nash.

- Se introduce y caracteriza axiomáticamente el valor posicional NTU. Esta solución coincide con el valor posicional TU cuando nos restringimos a situaciones TU con comunicación y cuando nos restringimos a situaciones de regateo con comunicación coincide con la solución que hemos obtenido por medio de una aproximación estratégica. De esta última solución estudiamos algunas de sus propiedades y proponemos dos procedimientos de obtención.

Al restringirnos a juegos NTU, TU o de regateo, el valor posicional NTU proporciona nuevos conceptos de solución.

- Por último se introduce en el ámbito de las situaciones de regateo con comunicación el valor de compromiso ponderado por el grafo y se caracteriza axiomáticamente. Esta solución coincide con la solución simétrica de Kalai-Smorodinsky al restringirnos a juegos de regateo.

El objetivo de este trabajo ha sido el de introducir conceptos de solución en el contexto de los juegos de regateo con comunicación restringida mediante un grafo y el de proponer conceptos de solución en el ámbito más general de las situaciones sin utilidad transferible con comunicación que generalicen a los propuestos para situaciones de regateo con comunicación y a los ya existentes para situaciones TU con comunicación. Se han utilizado para cumplir este objetivo los procedimientos axiomático y estratégico. Al utilizar el procedimiento axiomático se utilizan propiedades naturales e intuitivas que un concepto de solución debe de verificar. Al seguir el procedimiento estratégico se describe de forma natural el proceso de negociación entre los jugadores y el pago a las estrategias en equilibrio nos proporciona un concepto de solución a la situación cooperativa.

Algunas cuestiones que a partir de este trabajo nos planteamos resolver en el futuro son por ejemplo la de obtener una solución en el contexto NTU que generalice al valor de compromiso ponderado por el grafo, implementar (utilizando el procedimiento estratégico) los conceptos de solución que sólo se

han estudiado por el procedimiento axiomático, obtener nuevas propiedades que permitan diferentes caracterizaciones axiomáticas y estudiar las nuevas soluciones que aparecen al restringir los valores y correspondencia posicionales al contexto cooperativo clásico, es decir, sin restricciones a la comunicación.

En la tabla 1 se proporciona un resumen de las soluciones más relevantes que han aparecido en este trabajo. Las soluciones que no aparecen sombreadas son aquellas que se han utilizado como herramienta pero para las cuales no se ha hecho ninguna aportación. Las soluciones que aparecen con un sombreado más intenso son las que hemos definido y estudiado en este trabajo y las que aparecen con un sombreado menos intenso ya habían sido definidas aunque en este trabajo obtenemos algún resultado sobre ellas.

SITUACIONES NTU	Correspondencia de Myerson	Correspondencia posicional	Valor posicional NTU	??
JUEGOS NTU	Valor de Shapley NTU			??
SITUACIONES TU	Valor de Myerson TU	Valor posicional TU	Valor posicional TU	??
JUEGOS TU	Valor de Shapley TU			??
SITUACIONES DE REGATEO	Solución de Nash	Solución de Nash ponderada por el grafo	Solución obtenida por aproximación estratégica	Valor de compromiso ponderado por el grafo
JUEGOS DE REGATEO	Solución de Nash	Solución de Nash		Solución de Kalai-Smorodinsky

tabla 1

La tabla debe ser leída por columnas y la primera solución de cada columna generaliza a las restantes de la misma columna. Cuando un cuadro aparece en blanco, quiere decir que al restringir la primera solución de la columna al

correspondiente contexto (indicado por la fila en que se encuentra el cuadro) aparece un nuevo concepto de solución y que aún no ha sido estudiado. Cuando en un cuadro aparece un símbolo de interrogación quiere decir que aún no se conoce una solución en el correspondiente contexto que generalice a las soluciones que aparecen al final de la columna.

Símbolos y notación básica

$\emptyset$	:conjunto vacío
:	:tal que
$n!$	: $n(n-1)\cdots 1$
$\square$	:fin de demostración
$\subseteq$	:inclusión
X	:producto cartesiano
$\subset$	:inclusión estricta
$N=\{1,\cdots,n\}$	:un conjunto de jugadores
$N\setminus\{i\}$	: $\{1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n\}$
2^N	:subconjuntos de N
$\Pi(N)$	:conjunto de permutaciones de los elementos de N
σ	:un elemento de $\Pi(N)$
$\mathbb{R}$	:conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^N$	:espacio euclídeo n-dimensional
$x=(x_1,\cdots,x_n)$	:un elemento de $\mathbb{R}^N$
αx	:si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n)$
xy	: $(x_1y_1,\cdots,x_ny_n)$
$x+y$	: $(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$
$\mathbb{R}_+^N$	: $\{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0, \forall i \in N\}$
$\mathbb{R}_{++}^N$	: $\{x \in \mathbb{R}^N : x_i > 0, \forall i \in N\}$
$P(S)$	:si $S \subset \mathbb{R}^N$, la frontera de Pareto de S
$comp S$	:envoltura comprensiva de S
$conv S$	:envoltura convexa de S
e^N	: $x \in \mathbb{R}^N : x_i = 1 \forall i \in N$
e^i	: $x \in \mathbb{R}^N : x_i = 1 \ x_j = 0 \ \forall j \in N \ j \neq i$

θ	: $x \in \mathbb{R}^N : x_i = 0 \ \forall i \in N$
T, U	: subconjuntos de N
$G(N)$	: el conjunto de grafos definidos sobre el conjunto N
$G(N)_c$	: los elementos conexos de $G(N)$
A	: un grafo definido sobre el conjunto N
A_i	: arcos de A que parten del jugador i
$A(i)$	: $\{j \in N : (i : j) \in A\}$
$A(N)$	: el grafo completo
$ A $	: número de arcos de A
$(i:j)$	: un arco del grafo A
L, H	: subconjuntos de arcos del grafo A
T/A	: partición del conjunto T inducida por el grafo A
$TU(N)$	: el conjunto de juegos con utilidad transferible
(N, ν)	: un juego con utilidad transferible
f	: cualquier concepto de solución
$I(N, \nu)$	: el conjunto de imputaciones de (N, ν)
$Nu(N, \nu)$	: el núcleo de (N, ν)
$Sh(N, \nu)$	: el valor de Shapley de (N, ν)
$CTU(N)$	: el conjunto de situaciones TU con comunicación
$CTU(N)_s$	: los elementos de $CTU(N)$ en los que el grafo no posee ciclos
$CTU(N)^0$	: los elementos de $CTU(N)$ en los que el juego TU es cero-nor- malizado
(ν, A)	: una situación TU con comunicación
$(N, \nu/A)$	: el juego de puntos inducido por $(\nu, A) \in CTU(N)$
(A, ν_A)	: el juego de arcos inducido por $(\nu, A) \in CTU(N)$
$m(\nu, A)$	: el valor de Myerson de (ν, A)
$p(\nu, A)$	: el valor posicional de (ν, A)
$NS(N)$	: el conjunto de juegos de negociación simple
$NS(N)^R$	: $\{(S, d) \in NS(N) : \text{la frontera de } S \text{ no tiene niveles}\}$
(S, d)	: un juego de negociación simple
$S(C)$	: $\{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i \leq C\}, C \in R$
$u(S, d)$	: el punto de utopía de (S, d)
$N(S, d)$	: la solución simétrica de Nash de (S, d)
$N^w(S, d)$	: la solución ponderada de Nash de peso w de (S, d)
$KS(S, d)$	: la solución de Kalai-Smorodinsky de (S, d)

$KS^\lambda(S,d)$	:la solución no simétrica de Kalai-Smorodinsky de (S,d)
$KS^w(S,d)$	:la solución ponderada de Kalai-Smorodinsky de peso w de (S,d)
$CNS(N)$	:el conjunto de situaciones de negociación con comunicación
φ_N	:solución de Nash ponderada por el grafo
φ_C	:valor de compromiso ponderado por el grafo
P	:solución obtenida por aproximación estratégica
$NTU(N)$	:el conjunto de juegos sin utilidad transferible
(N,V)	:un juego sin utilidad transferible
$Nu(N,V)$	:el núcleo de (N,V)
$SH(N,V)$	:el conjunto de valores de Shapley de (N,V)
$MC(N,V)$	:el MC-valor de (N,V)
$CNTU(N)$	:el conjunto de situaciones NTU con comunicación
(V,A)	:una situación NTU con comunicación
$(N,V/A)$	:el juego de puntos inducido por $(V,A) \in CNTU(N)$
(A, V_A^2)	:un juego de arcos inducido por $(V,A) \in CNTU(N)$
$CP(V,A)$	:los valores posicionales de (V,A)
$M(V,A)$	:los valores de Myerson de (V,A)
$VP(V,A)$	:el valor posicional de (V,A)

Axiomas

AAN	:arcos anónimos
ADC	:aditividad condicional
ADI	:aditividad
ANU	:arcos nulos
CAR	:covarianza de arcos
CES	:covarianza de escala
COV	:covarianza de origen y escala
EFC	:eficiencia en componentes
EFI	:eficiencia
EXI	:existencia
GES	:grafos estables
GEQ	:grafos equilibrados
IAI	:independencia de alternativas irrelevantes
JNU	:jugadores nulos
JUS	:justicia
MOF	:monotonía fuerte
MOI	:monotonía individual
MOR	:monotonía restringida
MPU	:monotonía proporcional de utopías
MRC	:monotonía restringida condicional en las componentes
SIM	:simetría
UNA	:unanimidad

Bibliografía

- Aumann, R. J. (1985): An axiomatization of the non-transferable utility value, *Econometrica*, **53**, 599-612.
- Aumann, R. J. and Dreze, J.H. (1974): Cooperative Games with Coalition Structures, *International Journal of Game Theory*, **3**, 217-237.
- Bergantiños, G. (1993): Aportaciones a la Teoría de Juegos, *Tesis doctoral. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Santiago de Compostela*.
- Bergantiños, G., Casas, B. and Vázquez, M. (1996): A generalization of the implementation of the Kalai-Smorodinsky bargaining solution , *preprint*.
- Borm, P., Keiding, H., McLean, R., Oortwijn, S. and Tijs, S. (1992): The compromise value for NTU-games, *International Journal of Game Theory*, **21**, 175-189.
- Borm, P., Owen, G. and Tijs, S. (1992): On the position value for communication situations, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **5**, 305-320.
- Borm, P. and Tijs, S. (1992): Strategic claim games corresponding to an NTU-game, *Games and Economic Behavior*, **4**, 58-71.
- Calvo, E., García, I., Zarzuelo, J. M. (1995): Replication Invariance on NTU Games, *Documentos de trabajo. Economía Aplicada. Universidad del País Vasco*.
- Casas, B., García-Jurado, I. and Prada-Sánchez, J. M. (1996): Bargaining with Graph-Restricted Communication, aparecerá próximamente en

Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationnelle. Université Libre de Bruxelles, Belgium.

Crawford, V. P. (1977): A game of fair division, *Review of Economic Studies*, **XLIV**, 235-247.

Friedman, J. W. (1991): Teoría de Juegos con aplicaciones a la economía, *Alianza Editorial, Madrid*.

Gillies, D. B. (1953): Some theorems on n-person games, *Ph. D. Dissertation, University of Princeton*.

Gul, F. (1989): Bargaining foundations of Shapley value, *Econometrica*, **57**, 81-95.

Gutiérrez López, M. E. (1993): Tres ensayos sobre el problema del regateo, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco.

Hart, S. and Mas-Colell, A. (1996): Bargaining and value, *Econometrica*, **64**, 357-380.

Harary, F. (1969): Graph Theory, *Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts*.

Kalai, E. (1977): Nonsymmetric Nash Solutions and Replications of 2-Person Bargaining, *International Journal of Game Theory*, **6**, 129-133.

Kalai, E. and Samet, D. (1985): Monotonic Solutions to General Cooperative Games, *Econometrica*, **53**, 307-327.

Kalai, E. and Smorodinski, M. (1975): Other solutions to Nash's bargaining problem, *Econometrica*, **43**, 513-518.

Kakutani, S. (1944): A generalization of Brouwers fixed point theorem, *Duke Mathematical Journal*, **8**, 457-459.

Kern, R. (1985): The Shapley Transfer Value Without Zero Weights, *International Journal of Game Theory*, **14**, 73-92.

Kuhn, H.W. (1953): Extensive games and the problem of information, *Annals of Mathematics Studies*, **28**, 193-216.

- Levy, A. and McLean, R. P. (1991): An axiomatization of the weighted NTU value, *International Journal of Game Theory*, **19**, 339-351.
- Meessen, R. (1988): Communication games (in Dutch), *Ph. D. Dissertation*, University of Nijmegen, The Netherlands.
- Moulin, H. (1984): Implementing the Kalai-Smorodinsky bargaining solution, *Journal of Economic Theory*, **33**, 32-45.
- Myerson, R. B. (1977): Graphs and Cooperation in Games, *Mathematics of Operations Research*, **2**, 225-229.
- Myerson, R. B. (1980): Conference Structures and fair allocation rules, *International Journal of Game Theory*, **9**, 169-182.
- Myerson, R. B. (1991): Game Theory, Analysis of conflict, *Harvard University Press*. Cambridge, Massachusetts.
- Nash, J. F. (1950): The Bargaining Problem, *Econometrica*, **18**, 155-162.
- Nash, J. F. (1951): Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, **54**, 286-295.
- Nash, J. F. (1953): Two- Person Cooperative Games, *Econometrica*, **21**, 128-140.
- Nouweland, A. van den and Borm, P. (1991): On the convexity of communication games, *International Journal of Game Theory*, **19**, 421-430.
- Nouweland, A. van den, Borm, P. and Tijs, S. (1992): Allocation rules for hypergraph communicationn situations, *International Journal of Game Theory*, **20**, 255-268.
- Nouweland, A. van den (1993): Games and graphs in economic situations, *Ph. D. Dissertation*, University of Tilburg, The Netherlands.
- Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1990): Bargaining and Markets, *Academic Press*, San Diego, California.
- Otten, G., Borm, P., Peleg, B. and Tijs, S. H. (1994): The MC-value for Monotonic NTU-games, *Discussion paper*. Center for Economic Research. Tilburg, The Netherlands.

- Owen, G. (1977): Values of Games with a Priori Unions, *Mathematical Economics and Game Theory*, Eds. R. Henn and O. Moeschlin, Springer-Verlag, Berlín, 76-88.
- Owen, G. (1995): Game Theory, *Academic Press. U.S.A.*
- Peters, H. and Tijs, S. (1984): Individually monotonic bargaining solutions for n-person bargaining games, *Methods of Operations Research*, **51**, 377-384.
- Peters, H. and Tijs, S. (1985): Characterization of all individually monotonic bargaining solutions, *International Journal of Game Theory*, **14**, 219-228.
- Peters, H. J. M. (1992): Axiomatic bargaining game theory, *Kluwer Academic Publishers, The Netherlands*.
- Rockafellar, R. (1970): Convex Analysis, *Princeton University Press, Princeton, New Jersey*.
- Roth, A. E. (1977): Individual rationality and Nash's solution to the bargaining problem, *Mathematics of Operations Research*, **2**, 64-65.
- Roth, A. E. (1979): An impossibility result concerning n-person bargaining games, *International Journal of Game Theory*, **8**, 129-132.
- Roth, A. E. (1985): Game-theoretic models of bargaining, *Cambridge University Press*.
- Rubinstein, A. (1982): Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica*, **50**, 97-109.
- Selten, R. (1975): Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory*, **4**, 25-55.
- Shapley, L. S. (1953): A value for n-person games, *Annals of Mathematics Studies*, **28**, 307-318.
- Shapley, L. S. (1969): Utility comparison and the theory of games, *La decision 2. Centre national de la recherche scientifique, Paris*, 251-263.

- Shapley, L. S. (1971): Cores of convex games, *International Journal of Game Theory*, **1**, 11-26.
- Tijs, S. H. (1981): Bounds for the core and the τ -value, *Game Theory and Mathematical Economics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, 123-132.
- Tijs, S. H. (1987): An axiomatization of the τ -value, *Mathematical Social Sciences*, **13**, 177-181.
- Thomson, W. (1986): Replication invariance of bargaining solutions, *International Journal of Game Theory*, **15**, 59-63.
- Vázquez-Brage, M., García Jurado, I. and Carreras, F. (1996): The Owen value applied to games with graph-restricted communication, *Games and Economic Behavior*, **12**, 42-53.
- van Damme, E. (1991): Stability and perfection of Nash equilibria, *Springer-Verlag, Berlin*.
- von Neumann, J. (1928): Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Annalen*, **100**, 295-320.
- von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944): Theory of Games and Economic Behavior, *Princeton: Princeton University Press*.
- Winter, E. (1991): On non-transferable utility games with coalition structure, *International Journal of Game Theory*, **20**, 53-63.
- Young, H. P. (1985): Monotonic solutions of cooperative games, *International Journal of Game Theory*, **14**, 65-72.
- Zarzuelo, J. M. (1989): Juegos Cooperativos: Soluciones no simétricas según el enfoque del valor, *Tesis doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad del País Vasco*.

La teoría de juegos es una disciplina matemática que estudia situaciones conflictivas en las que intervienen dos o más jugadores y de cuyas acciones depende el resultado final de la situación. Se puede considerar la teoría de juegos como una teoría normativa en el sentido de que prescribe lo que cada jugador, al que se supone completamente racional, debería hacer en un juego con el objetivo de optimizar sus ganancias. No se puede considerar una teoría descriptiva puesto que la suposición de completa racionalidad no se corresponde a menudo con lo que ocurre en las situaciones reales. En 1928, von Neumann publicó el que se considera el primer trabajo importante de la teoría de juegos, en el contexto de los juegos bipersonales de suma cero y en 1944, von Neumann y Morgenstern publican un libro ya clásico en esta disciplina, *Theory of Games and Economic Behavior*. A partir de ese momento, la teoría de juegos se ha ido desarrollando gradualmente y se ha convertido en una herramienta importante para la modelización de muchos problemas de las ciencias económicas y políticas, fundamentalmente.