



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A ECUACIÓN DA CORDA VIBRANTE E A XÉNESE DA ANÁLISE DE FOURIER

Paula Seoane Gao

2022/2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A ECUACIÓN DA CORDA
VIBRANTE E A XÉNESE DA
ANÁLISE DE FOURIER

Paula Seoane Gao

Xuño, 2023

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise Matemática

Título: A ecuación da corda vibrante e a xénese da análise de Fourier

Breve descrición do contido

Trátase de recompilar os resultados básicos sobre a ecuación da corda vibrante debidos a D'Alembert e comentar o célebre artigo de Daniel Bernoulli no que criticaba as ideas de D'Alembert e propoñía resolver o problema das cordas en vibración sen empregar ningún tipo de cálculo, sinalando o camiño que seguiría Fourier máis adiante para resolver a ecuación da calor. O clásico artigo de Bernoulli será explicado dende o punto de vista actual, repasando para iso os elementos da análise de Fourier que se precisen.

Índice

Resumo	VIII
Introdución	XI
1. Revisión histórica do problema da corda vibrante	1
1.1. Os inicios con Taylor	2
1.2. As ideas de D'Alembert e a controversia con Euler	5
1.3. O enfoque de Bernoulli	11
1.4. As achegas de Lagrange e a solución de Fourier	15
2. Dedución da ecuación da corda vibrante	19
2.1. Dedución natural da ecuación de ondas	19
2.2. Dedución con ondas transversais	22
2.3. Dedución coa lei de Hooke	24
3. Obtención da solución xeral da ecuación da corda vibrante	27
3.1. Resolución do problema de valor inicial asociado	28
3.2. Resolución de do problema inicial tipo Dirichlet	31
4. A xénese da análise de Fourier	37
4.1. Resolución da ecuación de ondas coas achegas de Fourier	42
4.2. Equivalencia da solución de Fourier coa dada por D'Alembert	44

5. Conclusiones	47
Bibliografía	49

Resumo

O problema da corda vibrante, impulsado como un xeito de explicar a música a través das matemáticas, xerou un dos maiores debates na historia das matemáticas, xogando un papel fundamental no esclarecemento do termo «función» que, ata o momento, non estaba claramente definido e servindo tamén para romper co axioma de fe da época, ao redor do século XVIII. Para resolver este problema foron necesarias aportacións de distintos matemáticos e dende distintas perspectivas.

Neste traballo destacaremos as aportacións de Brook Taylor, o primeiro en propoñer unha teoría sobre as vibracións fundamentais, Jean le Rond D'Alembert, que dá unha solución para o problema en cuestión, Leonhard Euler, suxerindo outra solución distinta á do seu colega, Daniel Bernoulli, centrándose no aspecto máis musical e físico do problema e servindo as súas ideas como base para os posteriores traballos de Joseph Fourier. Tamén Joseph-Louis Lagrange e, finalmente, Fourier quen, resolvendo a ecuación da calor resolvería tamén o problema da corda vibrante o que suporía a semente do que hoxe en día coñecemos como a análise de Fourier. Ademais, deduciremos a ecuación de ondas, que modela o problema, e o resolveremos en termos das matemáticas actuais.

Abstract

The vibrating string problem, promoted as a way of explaining music through mathematics, generated one of the biggest debates in the history of mathematics, playing a key role in clarifying the term «function» that, until that moment, was not clearly defined and serving also to break with the «article of faith» of the 18th century, which ruled the mathematics of that century. It took several contributions from different mathematicians with different perspectives to solve this problem.

In this dissertation, we will highlight the contributions of Brook Taylor, who was the first one to propose a theory on fundamental vibrations, Jean le Rond D'Alembert, who gave a solution to the problem, Leonhard Euler, who suggested another different solution, Daniel Bernoulli, who focused on the more musical and physical aspect of the vibrating string problem and whose ideas were the basis for the later work of Joseph Fourier. Also, Joseph-Louis Lagrange and, finally, Fourier who solved the problem by solving the heat equation. This was the germ of the Fourier analysis. In addition, we will derive the wave equation, which models the problem and solve it in terms of current mathematics.

Introdución

Na Antiga Grecia a música entendíase como unha expresión artística das matemáticas. Mesmo na Idade Media, a música era unha das materias da rama das Ciencias do *Quadrivium* (que xunto co *Trivium*, formaba as sete artes liberais herdadas da antigüidade clásica), que comprendía aritmética, xeometría, astronomía e música. Moitos avances musicais foron abordados por matemáticos e desde as matemáticas, xogando un papel fundamental na teoría do son, especialmente no problema da corda vibrante, pois recordemos que os sons producidos polos distintos instrumentos musicais son ondas lonxitudinais que se propagan no aire. En instrumentos de corda, como a guitarra, violín ou mesmo o piano, as ondas sonoras son estimuladas por ondas estacionarias resonantes transversais nas cordas.

En moitas áreas da física, a descripción matemática da ecuación de ondas é fundamental, para así poder estudar movementos ondulatorios máis complexos e problemas relacionados coa acústica. A ecuación de ondas que manexamos hoxe en día é o resultado dun longo debate ao que, durante anos, matemáticos fundamentalmente do século XVIII, trataron de poñer solución. O problema da corda vibrante supuxo unha das maiores controversias nas matemáticas ao longo de dito século. Para entender isto temos que ter en conta que aplicar un formalismo matemático a un fenómeno físico, algo que hoxe en día consideramos lóxico, na época era difícil de entender. Así, para comprender mellor o problema da corda vibrante e a solución deste, cómpre ter en conta as aportacións que distintos matemáticos fixeron a esta cuestión, ningunha das cales estivo exenta de dificultades ou debates. Participaron matemáticos desde Brook Taylor ata Joseph Fourier, pasando por outras personalidades relevantes entre as que destacaremos a D'Alembert, Euler, Bernoulli ou Lagrange. Este debate ía dirixido a explicar como unha corda en vibración é o resultado dunha suma infinita de movementos vibratorios de diferentes frecuencias. Como consecuencia introdúcense as series trigonométricas e se cuestiona a diferenza entre unha función e a súa representación analítica. Na época, non existía unha definición clara e explícita sobre o concepto de función. De feito, non foi ata 1748 cando Euler publica *Introductio in Analysin Infinitorum* que o concepto de función xoga, por primeira vez, un papel central. O debate principal do problema da corda vibrante xorde ao redor da falta dunha definición clara de «función» á hora de dar unha solución a este problema, pois, no século XVIII, as matemáticas gobernábanse

polo seguinte «axioma de fe»:

Se dúas expresións analíticas coinciden nun intervalo, entón coinciden en todo punto.

Isto significa que todo o movemento que presente a curva que forme a corda está dado por unha expresión analítica determinada por unha parte moi pequena da curva, calquera que sexa esta. Logo, aínda que para D'Alembert a solución do problema, como veremos, debía ser unha expresión analítica (pois para el as únicas funcións aceptables eran as dadas por unha fórmula), para Euler a solución que daba o seu colega non era o suficientemente xeral. De feito, a solución que Euler propoñía podía estar dada por distintas expresións analíticas cada una delas nun subintervalo diferente do intervalo de definición do problema, ou, incluso, por unha curva debuxada a man alzada. Non obstante, D'Alembert cría que a solución de Euler ía en contra das regras da análise.

O noso obxectivo será tratar de entender o problema da corda vibrante, o que supuxo desde un punto de vista histórico e a súa tradución e resolución en termos das matemáticas actuais, distribuíndo isto en cinco capítulos.

No capítulo 1 explicaremos a orixe do problema da corda vibrante, o debate que suscitou no século XVIII, comezando coas ideas de Taylor, o primeiro en propoñer unha solución formal, aínda que errónea, ao problema en cuestión. Porén, as súas ideas serviron para abrir o camiño de matemáticos posteriores como Daniel Bernoulli, Euler e, especialmente, D'Alembert cuxas aportacións foron fundamentais no debate, considerando a introdución de derivadas parciais. Pero non será ata Lagrange, e máis tarde Fourier, no século XIX, cando se chega á resolución en forma de serie do problema da corda vibrante.

No capítulo 2 deduciremos a ecuación de ondas unidimensional con extremos fixos, desde un punto de vista actual, empregando para iso varios enfoques distintos.

Xa no capítulo 3 obteremos a solución xeral da ecuación da corda vibrante desde as matemáticas actuais. Primeiro resolveremos o problema de valor inicial, sen ter en conta as condicións de fronteira, e despois consideraremos o problema inicial Dirichlet onde, ademais das iniciais, aparecen as condicións de fronteira.

No capítulo 4 comentaremos as investigacións de Fourier na transmisión da calor e como a resolución deste problema, apoiado nas ideas de Bernoulli sobre a corda vibrante, supuxo tamén a solución en forma de serie do problema que nos ocupa, o que foi o xerme do que hoxe en día coñecemos como a análise de Fourier.

Finalmente, a modo de conclusión, no capítulo 5 destacaremos os feitos máis importantes que se expoñen ao longo deste traballo.

Capítulo 1

Revisión histórica do problema da corda vibrante

O problema da corda vibrante supuxo unha das maiores controversias nas matemáticas ao longo do século XVIII. Primeiro expliquemos en que consistía este problema:

Unha corda elástica fixada nos seus extremos é deformada a unha posición inicial calquera e despois liberada para que comece a vibrar. O problema da corda vibrante consiste en describir a forma que adquire a corda en cada instante de tempo t .

Para comprender mellor este problema e a súa solución cómpre ter en conta as contribucións que durante anos distintos matemáticos fixeron a esta cuestión, ningunha delas exenta de dificultades ou debates. Para isto, seguiremos a liña temporal establecida nos artigos [22] e [13].

Non se trata, tan só, dun problema da Historia Moderna, senón que podemos remontar a súa orixe á Antiga Grecia, en concreto, á escola pitagórica fundada polo filósofo e matemático grego Pitágoras (470 - 590 a.C.). Pitágoras descubriu, grazas á harmonía dos instrumentos de corda da época como a cítara (similar a unha lira ou arpa moderna), que ao pulsar unha das súas cordas e deixala vibrar producía un son determinado, pulsando a mesma corda á metade e facéndoa vibrar producíase outro son distinto que se correspondía cunha oitava superior do primeiro son. Se pulsamos nos $\frac{2}{3}$ obteríamos unha quinta superior do son inicial, se agora pisáramos nos $\frac{3}{4}$ da corda temos unha cuarta,... chegando así á conclusión de que a altura do son era inversamente proporcional á lonxitude da corda.

1.1. Os inicios con Taylor

No século XVIII, xa na Idade Moderna, ten comezo unha variación das aportacións pitagóricas, esta vez empregando elementos da análise matemática. Algunhas destas aportacións foron feitas polo británico Brook Taylor (1685 - 1731) en 1715 no seu libro *Methodus incrementorum directa et inversa*, [20], no cal presenta unha discusión sobre o problema da corda vibrante cuxo interese lle xurdiu a través da música. Trátase da primeira teoría sobre a vibración fundamental dunha corda en vibración. Coméntanse a continuación algunhas das reflexións que expoñía Taylor nese libro.

Taylor considera unha corda moi fina e cun espesor uniforme ao longo de toda ela, cun alongamento máximo dende o eixe de movemento AB infinitamente pequeno, para que así ao variar a lonxitude da corda a tensión non varíe e o raio de curvatura respecto do eixe sexa despreziable sempre.

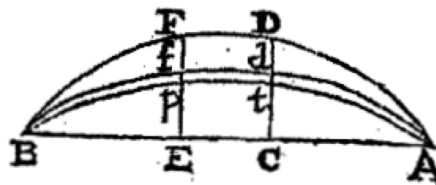


Figura 1.1: Representación da corda en vibración no libro de Taylor [20].

Observando a figura 1.1 que representa a curva $ADFB$ que fai a corda, Taylor afirma que, para calquera coordenadas EF e CD (perpendiculares ao eixe), a curvatura en D á curvatura de F será como DC a FE , o que nos vén dicir que a curva é un senoide (ver figura 1.2). Taylor afirma que a figura 1.1 representa a vibración da corda en calquera instante do seu movemento, así os puntos F e D chegan ao mesmo tempo ao eixe, e así mesmo as vibracións de retorno realízanse no mesmo lapso de tempo.

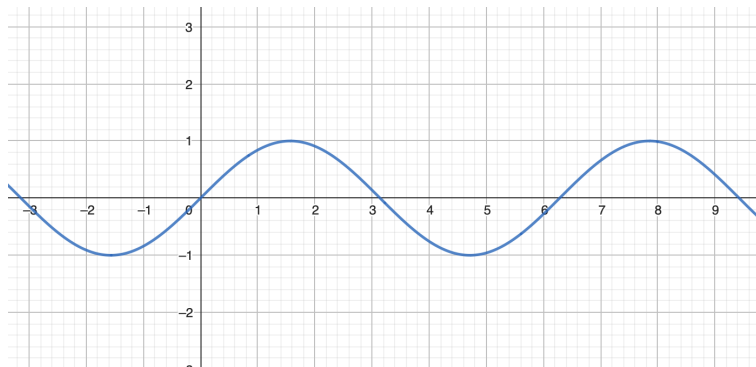


Figura 1.2: Función seno.

Taylor demostrou isto do xeito que se explica a continuación.

Lema 1.1. *Dada unha corda tensa cunha densidade dada, a forza da aceleración en calquera punto é proporcional á curvatura nese mesmo punto.*

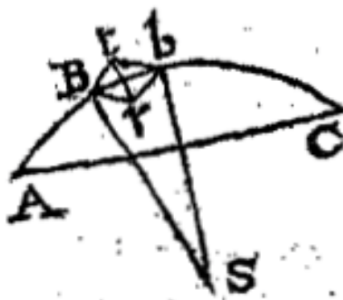


Figura 1.3: Esbozo atopado na obra de Taylor [20].

Demostración. Empregamos como apoio a figura 1.3. Consideramos a curva ABC , tomamos un punto nela próximo a B , b , e trazamos as tanxentes a eses dous puntos Bt (tanxente en B) e bt (tanxente a b). Agora se trazamos as rectas Br e br , temos o paralelogramo $Btbr$. Tomemos, ademais, as normais a B e b , BS e bS respectivamente. Agora ben, como Bt e BS son perpendiculares, os triángulos Btr e BbS son semellantes, co cal

$$\frac{tr}{Bt} = \frac{Bb}{BS},$$

así, tr a Bt é o mesmo que Bb a BS .

Polos principios da estática, máis concretamente polo principio do paralelogramo, a forza actuando sobre o arco Bb é proporcional á lonxitude de tr , logo tamén será proporcional a $\frac{Bb}{BS}$, poñamos

$$F = \alpha \frac{Bb}{BS}.$$

Por outro lado, a masa do arco Bb é proporcional á lonxitude de Bb , así, empregando a segunda lei de Newton temos que

$$\alpha \frac{Bb}{BS} = \beta Bb a,$$

onde a é a aceleración, co cal temos que a é proporcional a $\frac{1}{BS}$.

Se supoñemos que b está moi próximo a B , podemos identificar o segmento BS (ou bS) co raio do círculo osculador á corda no punto B . Polo tanto, $\frac{1}{BS}$ é a curvatura en B .

Temos así o resultado buscado, a aceleración é proporcional á curvatura.

□

Este é un dos resultados máis importantes do tema que nos ocupa, pois se reparamos un momento nel, a proba de Taylor pode considerarse a primeira dedución da ecuación da corda vibrante. En efecto, supoñamos que a forma da corda en cada instante t pode expresarse como a gráfica

$$y = u(x, t)$$

para certa función u de clase dúas en $[0, L] \times \mathbb{R}$. Estamos considerando que a corda en repouso está sobre o eixo das abscisas e que as vibracións soamente se producen en vertical en cada punto x da corda. Nestas condicións, a aceleración do punto x no instante t é $u_{tt}(x, t)$.

Por outra banda, a curvatura da corda no punto x e no instante t vén dada pola fórmula

$$K = \frac{|y''(x)|}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|u_{xx}(x, t)|}{(1 + u_x^2(x, t))^{\frac{3}{2}}}, \quad (1.1)$$

pois se parametrizamos a curva como $\sigma(x) = (x, u(x, t))$ e consideramos a diferencial de arco como $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + u_x^2}$, temos que o vector tanxente é

$$\frac{d\sigma}{dx} = (1, u_x)$$

co cal o vector tanxente unitario é

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2}}, \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right).$$

Así, o vector curvatura é

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = \left(\frac{-u_x u_{xx}}{(1 + u_x^2)^2}, \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^2} \right)$$

e, calculando o seu módulo, obtemos a curvatura (1.1).

Se supoñemos que as vibracións son «pequenas», entón podemos desprezar o termo u_x^2 , quedándonos só con

$$K = |u_{xx}|.$$

Segundo Taylor, a aceleración u_{tt} é proporcional á curvatura, $|u_{xx}|$, e u_{tt} é positiva cando a curva $y = u(x, t)$ é convexa, e é negativa cando sexa cóncava. Polo tanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R},$$

que é, en efecto, a ecuación de ondas.

Visto isto, continuemos vendo como Taylor demostra que as vibracións da corda son isócronas, é dicir, que todos os puntos chegan á posición de equilibrio ao mesmo tempo. Supoñamos que $ADFB$ é a distancia máxima da corda ao eixe AB , co resto de puntos en repouso. Por hipótese, trátase dun movemento sinusoidal ou, o que mesmo, a curvatura en D é á curvatura en F como

a distancia CD á distancia EF . En notación moderna, temos que se $y(x) = \text{sen}(\lambda x)$, entón a curvatura $y''(x) = -\lambda^2 y(x)$, co cal

$$\frac{y''(C)}{y''(E)} = \frac{-\lambda^2 y(C)}{-\lambda^2 y(E)} = \frac{y(C)}{y(E)}.$$

Disto, e do lema anterior, concluímos que a aceleración dun punto D , nas curvas $ADFB$ ou $AdfB$, da figura 1.1, é sempre proporcional á distancia do punto ao eixe AB . Polo tanto, todos os puntos da corda alcanzan e volven ó eixe ao mesmo tempo e as súas vibracións individuais realízanse nun período de tempo dado.

Así, Taylor xustifica que a forma da curva que a corda adopta na vibración pasa rapidamente a moverse de forma isócrona en todo momento.

Unha década máis tarde, en 1728, Johannes Bernoulli (1667 - 1748) intercambia ideas sobre o problema da corda vibrante co seu fillo Daniel Bernoulli (1700 - 1782) que se recollen no artigo *Meditationes de chordis vibrantibus*, podemos ver unha tradución deste en [3]. Consta duns primeiros comentarios sobre a cuestión da corda vibrante, sen chegar a diferenciarse substancialmente do que xa dixera Taylor.

1.2. As ideas de D'Alembert e a controversia con Euler

Non foi ata 1747, cando se publica *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, [4], primeira memoria que o francés Jean le Rond D'Alembert (1717 - 1783) escribe sobre o problema da corda vibrante, que empezan a xurdir as primeiras controversias e discusións sobre o tema. Xa comentamos que para Taylor a vibración da corda correspóndese, en todo momento, coa forma dun seno. D'Alembert non está de acordo con isto, para el existe unha solución máis xeral que a dada pola función seno, dada nesta obra. Temos que ter en conta que na súa memoria D'Alembert parte xa da ecuación de ondas deducida anteriormente por Taylor, retomando a idea de que a aceleración é proporcional á curvatura, e dá unha solución a este problema.

Para comprender como D'Alembert chegou á solución da ecuación da corda vibrante precisaremos dos esquemas da figura 1.4, debuxados no propio artigo [4].

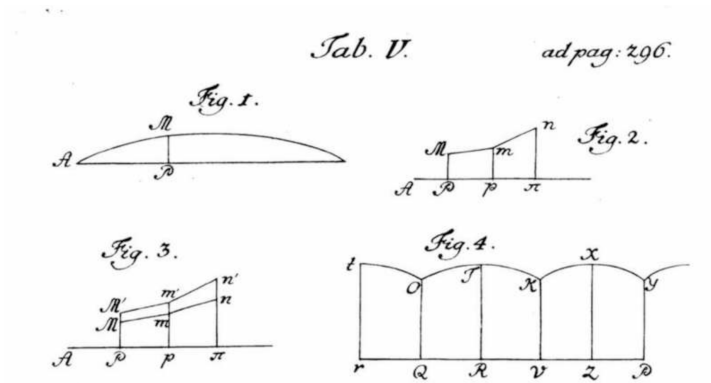


Figura 1.4: Debuxos no artigo orixinal de D'Alembert do ano 1747.

Na memoria, D'Alembert parte de catro hipóteses:

1. As vibracións da corda son moi pequenas en comparación cos arcos de curva que forma (AM , na Fig. 1 da figura 1.4), de feito, pódese supoñer que os arcos que forma son esencialmente iguais ás abscisas correspondentes AP , na Fig.1 da figura 1.4.
2. A corda ten un grosor uniforme.
3. Podemos escribir a forza da tensión como $F = mlg$ onde m é a masa da corda, l a lonxitude e g a gravidade.
4. Se renomeamos AP ou AM como x e PM como y , a aceleración no punto M é $-\frac{F d^2 y}{dx^2}$ se a curva é cóncava e $\frac{F d^2 y}{dx^2}$ se é convexa.

Observemos que é nesta última hipótese onde vemos as ideas de Taylor na obra de D'Alembert.

Tendo estas condicións en conta, se t é o tempo que transcorre desde que a corda comeza a vibrar, D'Alembert afirma que a ordenada PM pode expresarse só en función do tempo e a abscisa correspondente por x . Polo tanto, pode escribirse $PM = \Phi(x, t)$, sendo Φ unha función descoñecida e $d\Phi(x, t) = p dt + q dx$ sendo p e q funcións, así mesmo, descoñecidas. Empregando agora un dos teoremas de Euler, [5], temos que $dp = \alpha dt + \nu dx$ e $dq = \nu dt + \beta dx$ onde α, β, ν seguen sendo funcións descoñecidas dependentes de t e x tales que $\alpha = \beta$, como mostra D'Alembert na memoria. Entón temos que

$$d(p + q) = (\alpha + \nu)d(t + x),$$

$$d(p - q) = (\alpha - \nu)d(t - x),$$

con $\alpha \pm \nu$ en función de $t \pm x$, polo cal chegamos a

$$p + q = f(t + x),$$

$$p - q = g(t - x),$$

con f e g calquera funcións. Un cálculo sinxelo lévanos a

$$p = \frac{1}{2}(f(t+x) + g(t-x)).$$

Integrando temos que

$$y = \psi(t+x) + \Gamma(t-x).$$

Para interpretar as ideas de D'Alembert dende o punto de vista da matemática actual, cómpre comezar recordando o básico sobre a ecuación do transporte de Euler, [5]:

$$v_t = c v_x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad c \neq 0, \quad (1.2)$$

que pode reescribirse como

$$\nabla v(t, x) \cdot (1, -c) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

e, polo tanto, as solucións son constantes sobre as rectas de vector director $(1, -c)$, é dicir, as rectas $x + ct = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Como consecuencia, a cada solución $v = v(t, x)$ de (1.2) correspóndelle unha función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\phi(k)$ é o valor de v sobre a recta $x + ct = k$ e, por tanto,

$$v(t, x) = \phi(x + ct), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Podemos xa interpretar os argumentos de D'Alembert en termos matemáticos actuais.

Dada $u = u(t, x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, unha solución arbitraria da ecuación de ondas, D'Alembert usa a notación $p = u_t$ e $q = u_x$, e refírese ao gradiente de u como $du = p dt + q dx$. Tendo isto en conta, o argumento de D'Alembert baséase na función

$$v = p + c q \quad (\text{D'Alembert supón que } c = 1),$$

e na observación de que

$$v_t - c v_x = (u_t + c u_x)_t - c(u_t + c u_x)_x = u_{tt} + c u_{xt} - c u_{tx} - c^2 u_{xx} = 0,$$

grazas ao teorema de Schwarz (D'Alembert aplica unha versión antiga do mesmo debida a Euler que se recolle en [5]) e a que u é solución da ecuación de ondas.

Polo tanto, v é solución da ecuación do transporte (1.2) e, como consecuencia,

$$v(t, x) = \phi(x + ct), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

para unha certa función $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Neste caso a regularidade de ϕ vén implicada polo feito de que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Analogamente, $w = u_t - c u_x$ cumpre (1.2) con c cambiada por $-c$, así que

$$w(t, x) = \psi(x - ct), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

para unha certa función $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Como consecuencia, achamos o gradiente da solución

$$\begin{cases} 2u_t(t, x) = v(t, x) + w(t, x) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct), \\ 2cu_x(t, x) = v(t, x) - w(t, x) = \phi(x + ct) - \psi(x - ct), \end{cases}$$

e mediante integración chegamos á expresión desexada

$$u(t, x) = \psi(x + ct) + \Gamma(x - ct), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

para certas funcións $\psi, \Gamma \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Introducindo as condicións de contorno, pois recordemos que a corda está fixa nos seus extremos e supoñemos que ten unha lonxitude L ,

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (t > 0),$$

chegamos a que $\psi(t) = -\Gamma(t)$ e $\psi(t + L) = \psi(t - L)$. Así, esas dúas funcións arbitrarias pasan a tratarse como unha sóa ψ periódica, con período $2L$, suficientemente diferenciable e impar

$$y = u(x, t) = \psi(t + x) - \psi(t - x). \tag{1.3}$$

A ecuación (1.3) é a solución xeral do problema da corda vibrante cos extremos fixos.

Esta solución presentada por D'Alembert non aclara como determinar as funcións arbitrarias que rexen a solución. É neste contexto no que Leonhard Euler (1707 - 1783) fai as súas achegas ao problema da corda vibrante na súa obra, de 1749, *De vibratione chordarum exercitatio*, [6]. Aí determina as funcións arbitrarias ψ e Γ da solución de D'Alembert (1.3) unha vez coñecidas as condicións iniciais, posición e velocidade da corda. Estas condicións son condicións físicas polo que non podemos asumir unha certa regularidade da función ψ nin que estea definida por unha fórmula analítica. Para solventar isto, Euler supón que ψ é unha función que está definida por unha representación gráfica e polas condicións iniciais ás que está sometida a corda en cuestión. De feito, foi xustamente o estudo do problema da corda vibrante o que produciu un cambio no pensamento de Euler acerca do que el consideraba como «función», pois nun primeiro momento Euler reemplaza o termo «variable», en obxectos xeométricos, polo concepto «función» dado por unha fórmula alxébrica. Ata que acaba aceptando que unha función pode estar dada por máis dunha expresión analítica, unha fórmula, ou mesmo estar «debuxada a man alzada», pois acepta

ou, equivalentemente,

$$y = \psi(x + ct) + \psi(x - ct),$$

onde $c = \frac{Fa}{2M}$, con M a masa da corda e F a forza debida á tensión.

Como dixemos anteriormente, Euler afirmaba que a función ψ podía ser obtida empregando só as condicións iniciais. Se representamos coas funcións $Y(x)$ e $V(x)$ a posición e velocidade iniciais, respectivamente, como ψ pode ser unha función definida pola representación gráfica da curva, Y e V non precisan ser funcións no sentido considerado por D'Alembert de expresións analíticas, tendo en conta que para Euler, desde un punto de vista físico, unha función podía vir dada por varias expresións analíticas en diferentes subintervalos de $(0, L)$ ou por unha curva «debuxada a man alzada» no intervalo $0 \leq x \leq L$. Temos entón

$$y = \frac{1}{2} \left[Y(x + ct) + Y(x - ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} V(s) ds \right]. \quad (1.4)$$

Por outro lado, ao final de [6], Euler mostra unha construción gráfica para a cal dado un instante de tempo t , se pode obter unha representación de $y = \psi(ct + s) - \psi(ct - s)$. Ademais, particularizando a forma inicial da corda a unha curva como a da figura 1.6, chega a que a solución está dada por unha fórmula trigonométrica como

$$\alpha \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{a} \right) + \beta \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi x}{a} \right) + \gamma \operatorname{sen} \left(\frac{3\pi x}{a} \right). \quad (1.5)$$

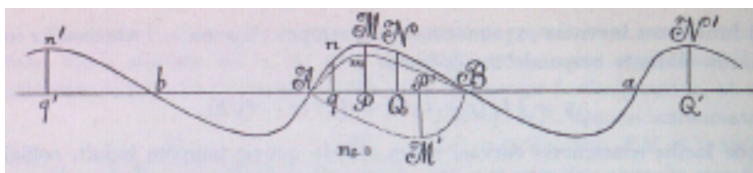


Figura 1.6: Esbozo sacado da obra de Euler.

Polo tanto, para Euler calquera forma que se lle atribúa a corda nun primeiro momento volverá a ela durante as vibracións. Así, o pensamento de que da igual o irregulares que sexan as vibracións da corda, pois se volven uniformes por si mesmas non é certo. Non obstante, calquera que sexa a forma da corda vibrante, as vibracións serán suficientemente periódicas.

Porén, para D'Alembert esta solución non era aceptable, pois para el non se podía aplicar o cálculo diferencial á solución de Euler, unha función definida que non admite unha expresión mediante unha única formulación, D'Alembert só admitía como funcións aquelas expresións analíticas dadas por unha fórmula, el estaba máis centrado nas matemáticas do problema que nas vibracións físicas da corda. Noutras palabras, o cálculo diferencial non se podía aplicar a unha función expresada por curvas «mecánicas» como a que plantexaba Euler.

1.3. O enfoque de Bernoulli

En 1753, Daniel Bernoulli (1700 – 1782) na súa obra *Réflexions et Eclaircissemens sur les Nouvelles Vibrations des Cordes Exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748*, [2], intervén nesta discusión entre Euler e D'Alembert, facendo unha resposta ás dúas obras anteriores vistas ata agora.

O enfoque de Bernoulli fundaméntase na experiencia, no fenómeno físico da corda vibrante. Bernoulli foi o primeiro en afirmar que calquera vibración, é dicir, calquera curva que adquira a corda no seu movemento pódese expresar como superposición das curvas de Taylor, pero con calquera número de nodos, entendendo por *nodo* un punto que permanece en repouso, é dicir, un caso particular do proposto por Euler. Fagamos un resumo do exposto por Bernoulli en [2].

D'Alembert e Euler afirmaban que en cada intervalo entre nodos veciños existen unha infinidade de curvas tales que cada punto comeza e remata as vibracións no mesmo instante de tempo, mentres que segundo a teoría de Taylor cada dito intervalo debe tomar necesariamente unha única curva dada por un senoide. Tendo en conta esta contradición, Bernoulli fai os seguintes comentarios:

A corda AB pode facer as súas vibracións seguindo os patróns de calquera das 6 primeiras figuras de 1.7 ou pode facer unha mestura desas vibracións, combinándoas entre elas. Así, o movemento de vibración dado por D'Alembert e Euler sería unha mestura de vibracións taylorianas. Isto é algo que todos os músicos saben desde que comezan a tocar: a existencia dos harmónicos. Se pulsamos unha corda, por exemplo dunha guitarra, ademais do ton fundamental a corda dá outros tons máis altos ao mesmo tempo, é dicir, o ton fundamental é combinación deses sobretóns que son, basicamente, os responsables do timbre dun instrumento pois, recordemos que, o timbre depende da cantidade de harmónicos que teña un son e da intensidade de cada un deles, trátase dunha das calidades fundamentais do son. O feito de que un ton fundamental sexa o resultado dunha mestura de harmónicos é unha proba clara de que cunha única corda se pode ter unha combinación de varios tipos de vibracións taylorianas en vez dunha. Temos que ter en conta que ao mesmo tempo que Bernoulli comezaba a traballar coas matemáticas tras os harmónicos e a superposición dos mesmos, a música pasaba por período de gran crecemento, sobre todo grazas ao traballo do músico alemán Johann Sebastian Bach, co que o interese de Bernoulli polos harmónicos non é infundado.

Para entender como un ton fundamental é unha mestura de harmónicos, Bernoulli explica o seguinte: supoñamos que temos cinco cordas exactamente iguais, a primeira delas vibra segundo a Fig. 1 da figura 1.7, a segunda segundo Fig. 2 e así sucesivamente. Consideramos que todas as cordas comezan as súas vibracións no mesmo instante de tempo, estas vibracións son isócronas, realízanse en tempos de igual duración, pois rematan unha das súas vibracións ao mesmo tempo

que a primeira corda remata unhas das súas. Se a segunda corda fai dúas vibracións, a terceira fai tres,... mentres que a primeira só fai unha; e cada corda dá un ton diferente. Temos entón que o que acabamos de dicir para cinco cordas exactamente iguais pódese aplicar a unha soa.

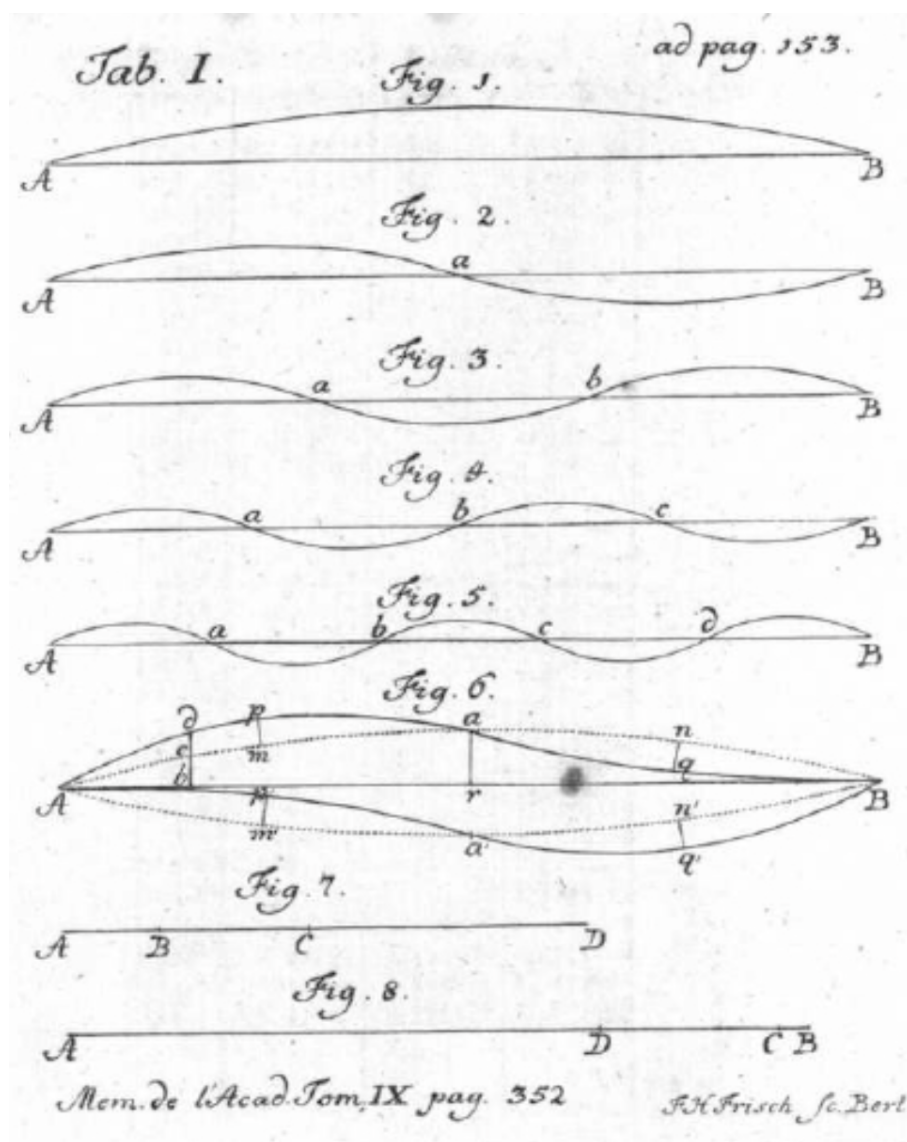


Figura 1.7: Esbozos de Bernoulli na súa memoria.

Con estas observacións, pódense construír unha infinidade de curvas a partir de AB coa condición de que cada punto da corda chegue algunha vez ao mesmo tempo a un nodo. Para isto, representaremos a Fig. 6 da figura 1.7 do seguinte xeito.

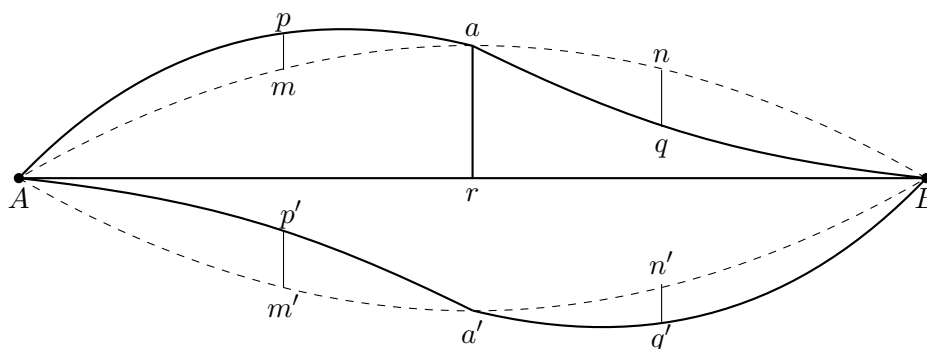


Figura 1.8: Figura número 6 dos esbozos de Bernoulli.

Consideraremos, na figura 1.8, a curva $AmanB$ que é do tipo da Fig.1 na imaxe 1.7, se a consideramos como un eixo recto, $ApaqB$ do tipo de Fig. 2 ten as seguintes propiedades segundo expón Bernoulli:

1. A curva $AmanB$ fai as vibracións con relación á recta ArB seguindo o patrón de Fig. 1.
2. Cada punto da curva $ApaqB$ terá un movemento relativo con relación a un punto correspondente da curva $AmanB$, pero segundo dicta a Fig. 2.
3. Cada punto de $ApaqB$ fai dúas vibracións, mentres que o mesmo punto fai unha delas segundo a vibración da Fig. 1. Logo, é necesario que os puntos da curva $ApaqB$ acaben ao mesmo tempo as súas vibracións alternas, que os da curva $AmanB$ acaban cada un as súas.
4. A curva $Ap'a'q'B$ é exactamente a mesma que $BqapA$.

Estas propiedades son resultado de combinar dúas vibracións do tipo de Fig. 1 e Fig. 2, pero pódense mesturar vibracións de Fig. 1 con calquera outra. Calquera que sexa a curva resultante desas combinacións, cumpre que os puntos da curva chegan no mesmo instante a un nodo no lado oposto do eixo, nese instante a curva será sempre a mesma, contrariamente a como o foi nun principio, como Euler afirmaba.

Denotemos por a ao segmento AB , π a semicircunferencia do círculo unidade (sic), α a maior ordenada no medio de cada ventre da curva de Fig. 1, β para a Fig.2, γ no caso da Fig. 3 e δ para a Fig. 4. Sexa tamén x unha abscisa calquera e y a ordenada para esa abscisa. Segundo

Taylor temos

$$\begin{aligned} \text{para Fig. 1, } y &= \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}, \\ \text{para Fig. 2, } y &= \beta \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a}, \\ \text{para Fig. 3, } y &= \gamma \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a}, \\ \text{para Fig. 4, } y &= \delta \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{a}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Así, ao facer as combinacións con estas curvas temos que, para a mesma abscisa x ,

$$y = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \beta \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} + \gamma \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} + \delta \operatorname{sen} \frac{4\pi x}{a} + \dots \quad (1.6)$$

Observamos que chegamos á mesma ecuación que Euler (1.5) ao considerar un caso particular.

Bernoulli pensaba que dada calquera curva inicial que adoptase a corda, esta non deixaría de facer as súas vibracións case inmediatamente para pasar a vibrar coa uniformidade dos movementos isócronos e de acordo ao movemento sinusoidal dado por Taylor, algo no que Euler discrepaba.

Mediante razoamentos baseados na experiencia, sabemos que considerando dúas cordas do mesmo grosor e igual tensadas, a máis longa conserva as súas vibracións por máis tempo que a pequena. Así, as vibracións parciais, mesturadas coa vibración total e fundamental, rematarán moi rapidamente, mentres que a fundamental todavía durará e, polo tanto, a corda non formará máis que o seno de Taylor. Isto é o que Bernoulli vía nas cordas punteadas dun clavicémbalo, no que se reconece a simple vista unha curva uniforme cun só ventre.

Esta solución dada por Bernoulli (1.6) está baseada no principio de superposición. É isto o que precisamente criticaba D'Alembert, para el o movemento de vibración da corda non estaba composto polo movemento de modelos distintos, afirmaba que só había unha única frecuencia asociada coa vibración da corda, co cal descompoñer a solución con expresións trigonométricas non era correcto, pois representaban múltiples frecuencias. Por outro lado, a crítica de Euler, detallada en [7], ía encamiñada a que a solución dada por esa serie trigonométrica non podería ser o suficientemente xeral para poder representar a calquera función arbitraria, xa fose unha función debuxada a man (no caso de Euler) ou unha dada cunha expresión analítica (D'Alembert).

Ata o momento, D'Alembert e Euler debatían, fundamentalmente, pola falta de definición do termo *función*, como xa comentamos D'Alembert dicía que a solución exposta por Euler rompía as regras da análise. Porén, as críticas de estes dous matemáticos ás ideas de Bernoulli teñen máis

que ver coa norma que gobernaba as matemáticas do século XVIII, explicado en profundidade en [14], o «axioma de fe» considerado como certo polos matemáticos da época:

Se dúas expresións analíticas coinciden nun intervalo, entón coinciden en todo punto.

Co cal, segundo este axioma e as ideas de Bernoulli, calquera función arbitraria debía ser impar e periódica. A pesar das súas discrepancias, Euler e D'Alembert coincidían en que as funcións trigonométricas eran demasiado restrictivas como para representar calquera función arbitraria (polo axioma de fe), do que non se decataban era da periodicidade da solución. En efecto, Euler comentaba que a solución de Bernoulli era impar, respecto do x , e non todas as funcións o son, pero agora sabemos que as funcións poden ser pares ou impares dependendo de como estendamos dita función no eixe negativo dos x . Mentres que as obxeccións á solución proposta por Bernoulli por parte de D'Alembert limitábanse a un enfoque máis físico, as opinións de Euler sobre esa solución encadrábanse na parte máis alxébrica da mesma. Precisamente, é nestes comentarios de Euler onde se orixina un dos grandes fallos desta discusión: ningún dos matemáticos, participantes ata agora no problema da corda vibrante, se deu conta de que a solución só necesita estar definida no intervalo $0 \leq x \leq L$, o que suceda fóra dese intervalo é irrelevante.

1.4. As achegas de Lagrange e a solución de Fourier

Chegados a este punto da controversia atopámonos con que, por un lado, D'Alembert rexeita os argumentos físicos tratando de que os demais fagan máis alusión ás matemáticas contidas neste problema, Euler trata con novas funcións con restricións pero dando argumentos moi débiles a favor das súas ideas. Finalmente, Bernoulli, pide «escoitar» á corda pero sen apoiar isto con argumentos matemáticos. É neste contexto no que, en 1759, chega un dos últimos autores que participan na controversia da corda vibrante: Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), físico, matemático e astrónomo italiano.

No artigo de Lagrange, *Recherches sur la nature et propagation du son* ([15]) faise un resumo das achegas feitas ata o momento ao problema da corda vibrante por parte dos autores anteriores: D'Alembert, Euler e Bernoulli. Neste artigo, Lagrange recalca que nin Euler nin Bernoulli poden asegurar que todas as curvas que unha corda en vibración pode facer están contidas na solución trigonométrica que eles dan; pois como cada termo desa ecuación (1.6) corresponde, por así dicilo, aos movementos de cada punto da corda, sería necesario primeiro dar unha solución xeral do problema baixo a hipótese de que a corda contén un número infinito de corpos; solución que non se vira ata o momento.

Chegados a este punto, Lagrange emprende a súa propia análise sobre o problema da corda

vibrante, tratando de conciliar as opinións de D'Alembert con parte do que Euler expoñía. Igual que D'Alembert, Lagrange consideraba que o cálculo diferencial só podía aplicarse en funcións definidas con fórmula analíticas, pero, como xa vimos, segundo Euler a forma inicial da corda non se expresa mediante unha fórmula analítica. Entón, Lagrange propón integrar as ecuacións do movemento, en vez de usar as ecuacións en derivadas parciais dadas por D'Alembert. Para iso, constrúe a corda partindo dunha colección de puntos de masa n , igualmente espaciados, conectados por unha corda moi fina, dando lugar a un sistema de n ecuacións da forma

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = c^2(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}), \quad (1.7)$$

onde y_k representa a ordenada da masa $k \in \{1, \dots, n\}$.

Para resolver este sistema Lagrange empregaba combinacións lineais da forma $\sum M_k \frac{dy_k}{dt}$ e $\sum N_k \frac{du_k}{dt}$ onde $u_k = \frac{dy_k}{dt}$, e M_k, N_k funcións arbitrarias a determinar polas condicións dos extremos, expresadas por polinomios trigonométricos. Por un proceso de paso ao límite, Lagrange transformaba as sumas finitas en integrais. Entón, Lagrange resolvía este sistema, primeiro para un número finito de masas, e despois dando unha solución para o problema da corda vibrante que permitía que o número de masas se fose a infinito a medida que o espazo entre elas descendía a cero. Lagrange chega así a

$$y(x, t) = \frac{2}{L} \int_0^L Y(s) ds \left[\sin\left(\frac{\pi s}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(2\frac{\pi ct}{L}\right) + \dots \right] \\ + \frac{2}{\pi c} \int_0^L V(s) ds \left[\sin\left(\frac{\pi s}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(2\frac{\pi ct}{L}\right) + \dots \right],$$

on $Y(x), V(x)$ a posición e velocidades iniciais da corda, respectivamente.

Este resultado trouxo a Lagrange moi preto das series de Fourier. De feito, foi este último quen, grazas os seus resultados en series trigonométricas do ano 1822, propón unha solución xeral ao problema da corda vibrante, poñendo fin ao debate, como veremos máis adiante no capítulo 4.

A modo de conclusión deste capítulo, fagamos un pequeno resumo das aportacións de cada matemático que interveu na resolución do problema da corda vibrante. Brook Taylor foi pioneiro en presentar unha teoría acerca da vibración fundamental dunha corda vibrante proponendo que o movemento de vibración se correspondía cun sinusoides, ademais cómpre destacar que foi o primeiro en dar unha expresión, aínda que non explícita, para a ecuación de ondas unidimensional. D'Alembert presentou as ideas máis revolucionarias chegando a unha solución do problema en cuestión pero esta debía poder escribirse mediante unha expresión analítica. Euler propuxo outro tipo de solución, sen prestar atención ás características das funcións que formaban dita solución, chegando a un debate con D'Alembert cuxa base se resumía na falta de claridade á hora de definir o que era unha función. Daniel Bernoulli decatouse de que, en efecto, cando se fai vibrar unha corda non se escoita tan só o ton fundamental, senón unha superposición de diferentes tons. Ademais, pensaba que unha serie trigonométrica podía representar calquera curva. Lagrange,

Bernoulli e Euler propuxeron solucións trigonométricas que, pese a non seren precisas, cada vez se achegaban máis á solución definitiva dada en series de Fourier.

Capítulo 2

Dedución da ecuación da corda vibrante

No capítulo anterior estudamos, ao longo da historia, como se chegou á ecuación da corda vibrante e ás posibles solucións. De agora en adiante, o que faremos será, desde o punto de vista das matemáticas actuais, deducir esa ecuación de ondas e resolver o problema da corda vibrante. Recordemos que este problema consiste en describir, dun xeito matemático, as pequenas vibracións que unha corda, suxeita nos seus extremos, produce ao facela vibrar. Cómpre dicir que a relevancia da análise desta cuestión non está tan só nas aplicacións matemáticas xerais, senón tamén nas consecuencias físicas para o estudo da acústica.

No momento de tocar un instrumento de corda calquera ou ben nun evento que involucre o uso dunha corda en tensión que presenta pequenas vibracións transversais, estamos falando dun sistema físico que se corresponde co problema da corda vibrante, chamado tamén o problema da ecuación de ondas unidimensional. Co cal, podemos representar este problema físico en termos das matemáticas, é dicir, podemos modelizar o problema deducindo unha ecuación que describa a forma da curva que adopta a corda en cada instante de tempo.

A ecuación de ondas nunha dimensión espacial pode obterse en distintos contextos físicos. Neste capítulo chegaremos a ela de tres xeitos distintos, nun primeiro momento cando se teñen en conta os ángulos que forma a curva da corda no plano bidimensional, despois empregando ondas transversais e, finalmente, usando a lei de Hooke.

2.1. Dedución natural da ecuación de ondas

A forma máis coñecida de derivación da corda vibrante é a que faremos a continuación, tomando como referencia [12] e [21], onde unha corda vibra nun plano bidimensional e cada un dos seus extremos é tirado en sentidos opostos pola forza da tensión.

Para poder obter unha dedución natural da ecuación da corda vibrante supoñamos, en primeiro lugar, que temos unha corda tensa, pois en caso contrario esta non vibraría. Representamos esta situación na figura 2.1, onde tomamos o inicio da corda na orixe do eixe de coordenadas.

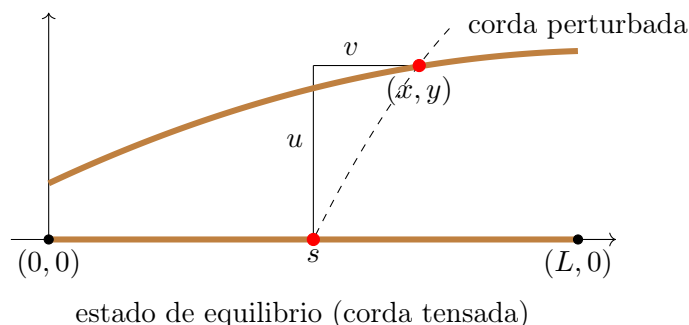


Figura 2.1: Representación do desprazamento vertical u e horizontal v da partícula s .

Estudemos o movemento das partículas que constitúen a corda. Sexa s a coordenada x dun punto (partícula) da corda na posición de equilibrio. Como a corda se move con respecto ao tempo, o punto que tomamos está nunha posición distinta da posición inicial en cada instante de tempo t . Así, a traxectoria da partícula s pode estudarse dando as súas coordenadas (x, y) en cada tempo t , que son da forma

$$x = v(s, t), \quad y = u(s, t),$$

onde v e u representan o desprazamento horizontal e vertical, respectivamente.

De aquí en adiante, asumimos que a pendente da corda é mínima, polo que podemos desprezar o desprazamento horizontal, e se temos en conta que, en xeral, $x = s$ temos que

$$y = u(x, t).$$

O noso obxectivo será deducir unha ecuación en derivadas parciais que modele como a posición u varía co tempo.

Supoñemos que a corda é perfectamente flexible, polo que non se precisa de ningún esforzo para dobrala. Tomamos un segmento da corda, contido entre x e $x + \Delta x$, cumprindo que

$$0 \leq x < x + \Delta x \leq L,$$

e consideramos a corda como un medio continuo, polo que podemos supoñer que ten unha densidade de masa $\rho_0(s)$ coñecida, tal que para o segmento considerado anteriormente a masa desa porción de corda vén dada por $\int_x^{x+\Delta x} \rho_0(s) ds$, aproximadamente igual a $\rho_0(x)\Delta x$. Conforme

á lei de Newton para unha masa puntual,

$$F = m a = \rho_0(x) \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.1)$$

Asumimos que a única forza é a da tensión. Posto que a corda non ofrece resistencia á flexión, a forza exercida sobre os puntos extremos do segmento pola corda restante é tanxente á mesma; isto é, só temos a tensión da corda $T(x, t)$ no punto x e no instante de tempo t . Esta tensión en dirección tanxente presenta unha compoñente vertical e outra horizontal, e para calculalas tomamos o ángulo que forma a corda coa horizontal, e denotámolo por $\theta \equiv \theta(x, t)$ pois resulta evidente que este ángulo tamén depende da posición e do tempo. Entón, a pendente da corda pode representarse como $\tan \theta$:

$$\tan \theta(x, t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ilustramos o visto ata agora coa figura 2.2.

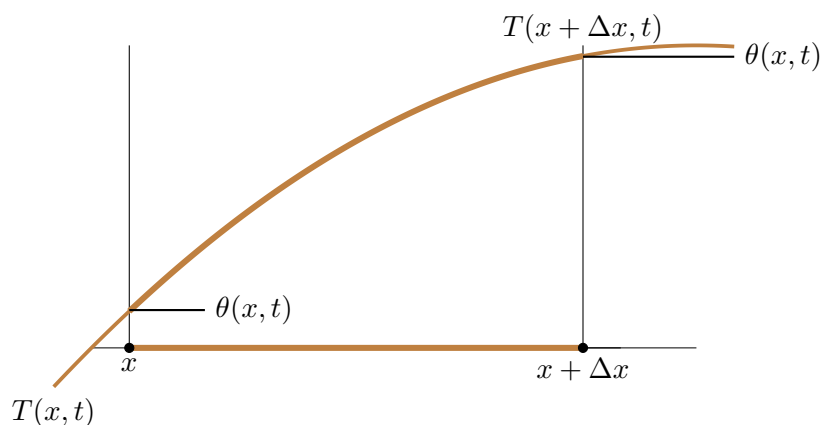


Figura 2.2: Forzas que actúan sobre o segmento de corda.

Unha vez discutidas as forzas que interveñen no movemento da partícula, retomamos a lei de Newton vista anteriormente (2.1). Como desprezamos o movemento horizontal, temos na ecuación só as compoñentes verticais das forzas que actúan sobre o corpo, logo:

$$\rho_0(x) \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F = -T(x, t) \operatorname{sen} \theta(x, t) + T(x + \Delta x, t) \operatorname{sen} \theta(x + \Delta x, t). \quad (2.2)$$

Observemos que, como estamos a considerar unha corda onde actúa a forza da tensión, o sentido desta é oposto nos dous extremos da corda, pois se mantén tirante.

Agora ben, dividindo a ecuación (2.2) entre Δx e tomando o límite cando $\Delta x \rightarrow 0$, é dicir, tomando un segmento de corda cada vez máis pequeno, obtemos

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \operatorname{sen} \theta(x, t)]. \quad (2.3)$$

Se tomamos o ángulo θ , da figura 2.2, o suficientemente pequeno,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} \approx \text{sen } \theta,$$

e entón (2.3) pasa a ser

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Para chegar a esta ecuación empregamos un ángulo θ pequeno, polo que o estiramento que facemos na corda é case o mesmo que para a corda na posición inicial de equilibrio. Tendo isto en conta e considerando a corda como perfectamente elástica, a magnitude da tensión só depende do estiramento local, polo que podemos aproximar a tensión $T(x, t)$ por unha constante T_0 . Polo tanto,

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Equivalentemente, supoñendo que $\rho_0(x) = \rho$ é constante, temos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

con $c^2 = T_0/\rho_0$. Introducimos esta notación para ter as unidades de velocidade ao cadrado, en efecto

$$\frac{[T_0]}{[\rho_0]} = \frac{N}{kg/m} = \frac{kg \ m/s^2 \ m^2}{kg/m \ s^2} = \left(\frac{m}{s}\right)^2.$$

Obtemos así a ecuación final (2.4) denominada ecuación de ondas unidimensional.

2.2. Dedución con ondas transversais

Para deducir a ecuación de ondas empregando ondas transversais, é dicir, ondas nas que a perturbación é perpendicular á dirección de propagación, consideramos como guía [17].

Supoñamos entón unha corda flexible, infinitesimalmente delgada, de lonxitude infinita, cunha tensión T e unha densidade de masa ρ . Escribiremos x para denotar o punto da corda e u para o desprazamento transversal. Igual ca antes, o noso obxectivo será atopar unha expresión xeral para $u(x, t)$.

Tomamos dous puntos veciños separados por unha distancia lonxitudinal, dunha unidade, da corda e por un desprazamento transversal du . Se supoñemos que du é pequeno podemos facer a aproximación de que todos os puntos da corda se moven só en direccións transversais, co cal non habería movemento lonxitudinal. En efecto, tomando a figura 2.3 como referencia temos que, polo teorema de Pitágoras, a hipotenusa é

$$\sqrt{1^2 + du^2} = \sqrt{1 + du^2} \approx dx \quad (2.5)$$

cando $|du| = |u_x|$ é pequeno.

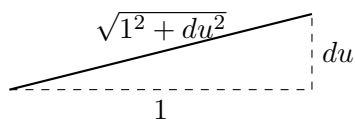


Figura 2.3: Representación do movemento do punto x .

Ao supoñer que du é pequeno, podemos desprezar o movemento lonxitudinal, quedándonos só co transversal. Co cal, todos os puntos da corda, a cal ten masa constante, móvense só en dirección transversal. Logo, estes pequenos desprazamentos transversais veñen a dicir que a pendente da corda é pequena.

Agora ben, para poder chegar á ecuación de ondas apoiáronos na figura 2.4, onde T_0 é a tensión, constante, no equilibrio e permanece constante tamén ao longo das vibracións, pois a corda, en principio, non está sometida a unha forza externa.

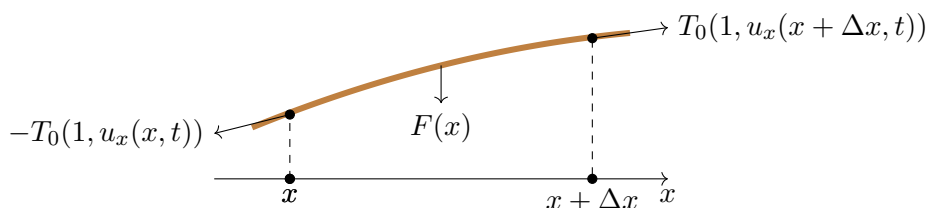


Figura 2.4: Segmento de corda que vai desde x ata $x + \Delta x$.

Aplicando a lei de Newton a ese pequeno segmento, de x a $x + \Delta x$, para aproximar a aceleración transversal da corda nel temos que, sendo ρ_0 a densidade da corda,

$$\rho_0 \Delta x u_{tt} \approx T_0(u_x(x + \Delta x) - u_x(x)),$$

$$\rho_0 u_{tt} \approx T_0 \frac{(u_x(x + \Delta x) - u_x(x))}{\Delta x}.$$

Agora se tomamos o límite cando a distancia entre os puntos se fai moi pequena, é dicir, o límite cando Δx tende a cero,

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho_0} u_{xx}.$$

Chegamos así a ecuación de ondas para u ,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ onde } c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}.$$

2.3. Dedución coa lei de Hooke

Outra forma de chegar á ecuación de ondas é empregando a lei de Hooke, como se pode ver en [10], onde se establece que a cantidade na que se deforma un corpo material, a deformación, está linealmente relacionada coa forza que causa a deformación, a tensión. Este método para chegar a ecuación de ondas é relevante desde un punto de vista histórico, como veremos a continuación, pero tamén o é desde as matemáticas pois as ideas que se aplican nesta forma de chegar á ecuación son precursoras dun proceso similar ao que hoxe en día coñecemos como paso ó límite.

En moitos libros e artigos afírmase que a ecuación de ondas foi descuberta por D'Alembert en 1747, porén xa vimos no capítulo 1 que Taylor chegara a ela, aínda que non de forma explícita, moito antes. Aínda así, D'Alembert fai unha dedución da ecuación apoiándose en traballos, de 1727, de Johann e Daniel Bernoulli, traducidos en [3]. Neles, o maior dos Bernoulli estuda o problema da corda vibrante cun número finito de pesos conectados por resortes, que satisfán a lei de Hooke, chegando a unha ecuación que modelaba o desprazamento da masa n -ésima en función do tempo. Inspirado por estes traballos e polas vibracións que observaba ao facer vibrar a corda dun violín, D'Alembert fixo tender a cantidade finita de pesos a infinito, mentres que o tamaño e peso destas masas tendía a cero, para que así a densidade, que recordamos que é o cociente da masa entre a lonxitude, quedase constante.

Imaxinemos que temos un conxunto de pequenas pesas de masa m unidas por uns resortes sen masa de lonxitude δx e cunha constante elástica k , tal é como se representa na figura 2.5, onde $u(x, t)$ representa o deaprazamento vertical da pesa de x -ésima no tempo t .

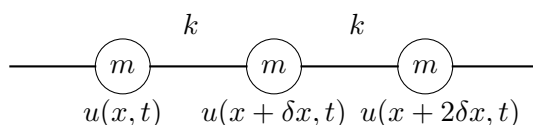


Figura 2.5: Representación dos resortes coas pesas.

As forzas que actúan sobre a masa m en $x + \delta x$ son, conforme á lei de Newton, temos

$$F = m u_{tt}(x, t).$$

Segundo á lei de Hooke temos entón que a forza do peso en $x + \delta x$ é

$$F = k [u(x + 2\delta x, t) - u(x + \delta x, t)] - k [u(x + \delta x, t) - u(x, t)].$$

Igualando ambas forzas obtemos a ecuación do movemento para o peso na posición $x + \delta x$:

$$u_{tt}(x, t) = \frac{k}{m} [u(x + 2\delta x, t) - u(x + \delta x, t) - u(x + \delta x, t) + u(x, t)].$$

Agora ben, se o noso conxunto de pesas consiste en $N + 2$ pesas espaciadas uniformemente sobre a lonxitude da corda, de tal xeito que a primeira e última pesa estean fixadas, temos que esa lonxitude é

$$L = (N + 1)\delta x,$$

logo se N tende a infinito, δx faíno cara cero.

Ademais, a masa total é $M = (N + 2)m$, se N tende a infinito entón m faíno a cero, e a constante total dos resortes é

$$K = \frac{k}{N + 2}.$$

Sabendo isto podemos reescribir a ecuación anterior como

$$u_{tt}(x, t) = \frac{KL^2}{M} \frac{(N + 2)^2}{(N + 1)^2} \frac{u(x + 2\delta x, t) - 2u(x + \delta x, t) + u(x, t)}{(\delta x)^2}. \quad (2.6)$$

Así, $c^2 = KL^2/M$, unha constante real positiva fixa e, usando o teorema de Taylor para escribir

$$F(x + 2\delta x) - 2F(x + \delta x) + F(x) \approx F''(x)(\delta x)^2,$$

agora, pasando ao límite cando N tende a infinito conseguimos

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t),$$

a ecuación de ondas unidimensional.

D'Alembert observou, en [4], que cando N tende a infinito ou δx tende a cero a diferenza anterior, (2.6), converxe a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. No caso dunha corda continua, o número de masas debe tender a infinito e a súa masa e distancia entre elas decrecer para que a masa total da cantidade crecente de pesos se aproximase a da corda continua. Trátase de facer un paso ao límite, no que as sutilezas deste método non se tiveron en conta.

Capítulo 3

Obtención da solución xeral da ecuación da corda vibrante

No capítulo anterior chegamos á seguinte ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

onde $c > 0$, e supoñamos de aquí en adiante que a corda está fixa nos seus extremos, suxeita por dous cravos: un na posición $x = 0$ e outro no punto $x = L$, $L > 0$, polo que as condicións de contorno homoxéneas son

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Para poder obter unha solución da ecuación de ondas, precisaremos dunhas condicións iniciais que nos axuden a resolver a ecuación diferencial (3.1). Como nesa ecuación temos a segunda derivada con respecto ao tempo precisamos de dúas condicións iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad (3.4)$$

onde $f(x)$ representa a posición e $g(x)$ a velocidade iniciais de cada punto da corda.

O noso obxectivo neste capítulo será obter unha solución, apoiándonos en [16], do seguinte problema que inclúe condicións de fronteira (3.2) e iniciais (3.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \\ u(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

Observamos que en (P) introduciuse a notación simplificada $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (análogo para a derivada parcial de segunda orde con respecto a x).

3.1. Resolución do problema de valor inicial asociado

Para resolver o problema (P), estudemos primeiro a solución do problema de valor inicial seguinte

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{PVI})$$

Como vemos, nun primeiro momento, só temos en conta as condicións iniciais.

A ecuación de ondas unidimensional é unha das poucas ecuacións diferencias que presenta unha solución xeral de forma explícita. En efecto, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Unha función $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ é solución da ecuación de ondas unidimensional $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ en \mathbb{R}^2 se, e só se, $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, con $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. " \Leftarrow "

Sexa u unha función da forma que se indica na hipótese, é dicir, $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$ con $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, logo u tamén é unha función de clase dous en \mathbb{R}^2 , ao ser unha combinación lineal de funcións de clase dous, e por ser $x \pm ct$ lineal. Cálculos elementais permiten obter

$$u_t(x, t) = F'(x + ct)c - cG'(x - ct), \quad u_x(x, t) = F'(x + ct) + G'(x - ct),$$

e

$$u_{tt}(x, t) = F''(x + ct)c^2 + c^2G''(x - ct), \quad u_{xx}(x, t) = F''(x + ct) + G''(x - ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Polo tanto,

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

" \Rightarrow "

Para probar que a solución da ecuación de ondas unidimensional é da forma

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, con $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, introducimos unhas novas coordenadas, chamadas coordenadas características: $\Phi : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \Phi(x, t) = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, onde

$$\begin{cases} \xi = x + ct, \\ \eta = x - ct. \end{cases}$$

Logo, $\xi + \eta = 2x$, resultando $x = \frac{\xi + \eta}{2}$. Por outro lado, $\xi - \eta = 2ct$ e, entón, $t = \frac{\xi - \eta}{2c}$.

Definimos agora a seguinte función $v(\xi, \eta) = u(\Phi^{-1}(\xi, \eta)) = u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ para todo $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Temos que $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ e vexamos que $v_{\xi\eta} = 0$ para todo $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. En efecto, tense que

$$\begin{aligned} v_{\xi}(\xi, \eta) &= u_x(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) x_{\xi}(\xi, \eta) + u_t(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) t_{\xi}(\xi, \eta) \\ &= \frac{1}{2}u_x(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)) + \frac{1}{2c}u_t(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta)). \end{aligned}$$

Derivando esta expresión respecto de η :

$$\begin{aligned} (v_{\xi})_{\eta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(u_{xx}x_{\eta} + t_{\eta}u_{xt}) + \frac{1}{2c}(u_{tx}x_{\eta} + u_{tt}t_{\eta}) = \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c}u_{xt} + \frac{1}{4c}u_{tx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} \\ &= \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} = 0, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é consecuencia do Teorema de Schwarz, e a última resulta de aplicar a ecuación da corda vibrante (2.4).

Así, $(v_{\xi})_{\eta}(\xi, \eta) = 0$ para todo $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$. Polo tanto, $v_{\xi}(\xi, \eta) = f(\xi)$ para todo $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ e para certa $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Integrando entre 0 e ξ temos que

$$v(\xi, \eta) - v(0, \eta) = \int_0^{\xi} v_{\xi}(s, \eta) ds = \int_0^{\xi} f(s) ds = F(\xi).$$

Como $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ deducimos que $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, e denotando $v(0, \eta) = G(\eta) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, temos que

$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2.$$

Se desfecemos o cambio, quedáanos

$$u(x, t) = v(\xi(x, t), \eta(x, t)) = v(x + ct, x - ct) = F(x + ct) + G(x - ct),$$

co cal xa chegamos ao resultado desexado. \square

Así, para resolver o problema de valores iniciais (PVI) debemos atopar as funcións F e G do teorema anterior axeitadas. Vexamos cales son coa axuda do seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Para que o problema (PVI) teña solución de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ é necesario e suficiente que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. En tal caso, a solución é única e vén dada por*

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (3.5)$$

Demostración. Suficiencia:

Supoñamos que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, entón a función $u(x, t)$ definida en (3.5) é de clase dúas en \mathbb{R}^2 e é solución de (PVI). En efecto,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, t) &= \frac{f'(x+ct)c - cf'(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(g(x+ct)c + cg(x-ct)), \end{aligned}$$

polo tanto,

$$u_t(x, 0) = \frac{f'(x)c - cf'(x)}{2} + \frac{2g(x)}{2} = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ata este momento vimos que u cumpre as condicións iniciais (3.3). Para ser solución de (PVI) só nos falta ver que esa función cumpre a ecuación da corda vibrante, o que se comproba a continuación:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= \frac{f''(x+ct)c^2 + c^2 f''(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(g'(x+ct)c^2 - c^2 g'(x-ct)) \\ &\quad - c^2 \left[\frac{f''(x+ct) - f''(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}(g'(x+ct) + g'(x-ct)) \right] = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Necesidade:

Supoñamos que u é solución de (PVI) de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Como $f(x) = u(x, 0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é evidente que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Ademais, $u_t(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ por ser u de clase dúas, polo tanto, tendo en conta que $g(x) = u_t(x, 0)$, con $x \in \mathbb{R}$, temos que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Por último, comprobemos que a solución é, en efecto, da forma

$$u(x, t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Polo teorema 3.1, sabemos que toda solución da ecuación de ondas se pode escribir da forma

$$u(x, t) = F(x+ct) + G(x-ct), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

con $F, G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Así,

$$u(x, 0) = f(x) = F(x) + G(x), \tag{3.6}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$$u_t(x, 0) = F'(x+ct)c - G'(x-ct)c|_{t=0} = cF'(x) - cG'(x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Despexando,

$$F'(x) - G'(x) = \frac{g(x)}{c}, \quad x \in \mathbb{R},$$

co cal,

$$\int_0^x (F'(s) - G'(s))ds = F(x) - G(x) - F(0) + G(0) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s)ds,$$

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(s)ds + F(0) - G(0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se a esta última igualdade lle sumamos (3.6), denotando $F(0) - G(0) = K$, quedáanos

$$2F(x) = f(x) + \frac{1}{c} \int_0^x g(s)ds + K,$$

é dicir,

$$F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds + \frac{K}{2}.$$

De (3.6), obtemos

$$G(x) = f(x) - F(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)ds - \frac{K}{2}.$$

Polo tanto,

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

chegando así ao resultado buscado.

□

A solución (3.5) que obtivemos neste resultado para o problema da corda vibrante coas condicións iniciais (3.3), coñécese co nome de *Fórmula de D'Alembert*, e describe a variación no tempo e no espazo dunha corda en vibración. Esta ecuación leva o nome do matemático e filósofo francés Jean le Rond D'Alembert, pois foi el quen a achou en 1747, como unha solución ao problema da corda vibrante, que redactou en [4], e sobre o cal Oliveira fai unha revisión histórica en [19].

3.2. Resolución de do problema inicial tipo Dirichlet

Unha vez que obtivemos unha solución do (PVI), engadimos as condicións de fronteira (3.2), en particular o problema (P) é de tipo Dirichlet, pois trátase de buscar unha solución a unha ecuación de derivadas parciais en \mathbb{R}^2 que toma valores sobre a fronteira. Notemos que o que buscamos nesta sección é obter unha solución de (1.4).

Para obter, finalmente, unha solución de (P) demostramos o seguinte teorema.

Teorema 3.3. *Para que (P) teña algunha solución $u = u(x, t) \in \mathcal{C}^2([0, L] \times \mathbb{R})$ é necesario e suficiente que $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$, $g \in \mathcal{C}^1([0, L])$ e que se cumpran as condicións de compatibilidade: $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0 = g(0) = g(L)$. En tal caso, (P) terá unha única solución $u \in \mathcal{C}^2([0, L] \times \mathbb{R})$ dada pola fórmula de D'Alembert:*

$$u(x, t) = \frac{\bar{f}(x + ct) + \bar{f}(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds, \quad (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R},$$

con \bar{f} e \bar{g} extensións impares e $2L$ -periódicas de f e g .

Demostración. Necesidade: Supoñamos que $u \in \mathcal{C}^2([0, L] \times \mathbb{R})$ é solución de (P). Entón, por verificárense as condicións iniciais temos que $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$ e $g \in \mathcal{C}^1([0, L])$, como consecuencia da hipótese de que u é unha solución de clase dúas do problema en cuestión.

Vexamos se se cumpren as condicións de compatibilidade

$$f(0) = u(x, 0)|_{x=0} = 0,$$

basta ter en conta as condicións de fronteira (3.2)

$$f''(x) = u_{xx}(x, 0), \quad x \in [0, L],$$

co cal

$$f''(0) = u_{xx}(0, 0).$$

Por (3.2), $u_{tt}(0, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, co cal é fácil ver que $u_{tt}(0, 0) = c^2 u_{xx}(0, 0)$, tendo en conta a expresión da ecuación da corda vibrante. Polo tanto, $f''(0) = 0$.

Por outro lado, $g(0) = u_t(x, 0)|_{x=0} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así $g(0) = 0$.

Analogamente, $f(L) = u(x, 0)|_{x=L} = 0$ pois $u(L, t) = 0$, con $t \in \mathbb{R}$. Se derivamos dúas veces esta función con respecto a x temos que $f''(x) = u_{xx}(x, 0)$, con $x \in [0, L]$, co cal $f''(L) = u_{xx}(L, 0)$. Por (3.2), $u_{tt}(L, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e avaliando en $t = 0$, $u_{tt}(L, 0) = c^2 u_{xx}(L, 0)$ tendo en conta que $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. Entón, $f''(L) = 0$.

Finalmente, $g(L) = u_t(x, 0)|_{x=L} = 0$, $t \in \mathbb{R}$, basta observar as condicións iniciais do problema, polo cal $g(L) = 0$.

Así temos que se cumpren as condicións de compatibilidade, para funcións f , de clase dúas, e g , de clase unha, no intervalo $[0, L]$.

Suficiencia: Supoñamos agora que $f \in \mathcal{C}^2([0, L])$, $g \in \mathcal{C}^1([0, L])$ e que se cumpren as condicións de compatibilidade $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0 = g(0) = g(L)$. Estas condicións implican que \bar{f} e \bar{g} son de clase dous e de clase un en \mathbb{R} , respectivamente. En efecto, como

$g(0) = g(L) = 0$ e $g \in \mathcal{C}^1([0, L])$, temos que \bar{g} é continua en \mathbb{R} . Vexamos entón se \bar{g} ten derivada en todos os puntos $x \in (-L, L]$, ao ser $2L$ -periódica. Por definición,

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in [0, L], \\ -g(-x), & x \in [-L, 0). \end{cases}$$

logo \bar{g} ten derivada continua en $(0, L) \cup (-L, 0)$. Demostremos que a derivada tamén é continua en $x = 0$ e en $x = L$.

Temos que \bar{g} é continua en $x = L$, logo existe o límite de $\bar{g}'(x)$ cando x tende a L . Como $\bar{g} = g$ en $(0, L)$ e $g \in \mathcal{C}^1([0, L])$ entón

$$\lim_{x \rightarrow L^-} \bar{g}'(x) = \lim_{x \rightarrow L^-} g'(x) = g'(L).$$

Por outro lado, como \bar{g} é $2L$ -periódica e $x - 2L \in (-L, 0)$ tense

$$\bar{g}(x) = \bar{g}(x - 2L) = -g(2L - x), \text{ para todo } x \in (L, 2L).$$

Co cal,

$$\lim_{x \rightarrow L^+} \bar{g}'(x) = \lim_{x \rightarrow L^+} g'(2L - x) = \lim_{x \rightarrow L^-} g'(x) = g'(L).$$

Entón, \bar{g}' é continua en $x = L$ e \bar{g} derivable no mesmo. Dun xeito similar chegamos a que \bar{g} é derivable tamén en $x = 0$.

Finalmente, como $f \in \mathcal{C}^1([0, L])$ e $f(0) = f(L) = 0$ temos que $\bar{f} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Bastaría probar que f' é continuamente derivable en $(-L, L]$ procedendo dun xeito similar ao caso anterior tendo en conta que $f''(0) = f''(L) = 0$.

Se consideramos agora o problema de valor inicial seguinte

$$(PVI) = \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = \bar{f}(x), & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = \bar{g}(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

no teorema 3.1 xa vimos que ten unha única solución $u(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ dada pola fórmula de D'Alembert, logo $u(x, t) = \frac{\bar{f}(x+ct) + \bar{f}(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^2$.

Vexamos se esta solución u é tamén solución do problema (P). Por hipótese, \bar{f} e \bar{g} son as extensión impares de f e g respectivamente. Logo, $\bar{f} = f$ e $\bar{g} = g$ para todo $x \in [0, L]$. Como consecuencia, temos que $u(x, 0) = f(x) = \bar{f}(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x) = \bar{g}(x)$, con $x \in [0, L]$, polo que se cumpren as condicións iniciais. Probemos, entón, que a solución u tamén cumpre as condicións de fronteira. Empregando a fórmula de D'Alembert (3.5), temos que

$$u(0, t) = \frac{\bar{f}(ct) + \bar{f}(-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} \bar{g}(s) ds = 0,$$

con $t \in \mathbb{R}$ pois \bar{f}, \bar{g} son as extensións impares.

Por outra banda,

$$u(L, t) = \frac{\bar{f}(ct) + \bar{f}(-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{+ct} \bar{g}(s) ds = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Isto cumprirase se \bar{f} é $2L$ -periódica e se \bar{g}, \bar{f} son impares con respecto a $x = L$. Vexamos isto último. En efecto, \bar{f}, \bar{g} son impares con respecto a $x = L$, é dicir, temos que demostrar que $\bar{f}(L+s) = -\bar{f}(L-s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e o mesmo para \bar{g} (faremos a demostración só no primeiro caso, pois para \bar{g} é análogo). Tense que

$$\bar{f}(L+s) = \bar{f}(L+s-2L) = \bar{f}(s-L) = \bar{f}(-s-L) = -\bar{f}(L-s).$$

Logo, podemos afirmar que $u(L, t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Unicidade: Para rematar a demostración deste teorema comprobaremos a unicidade da solución. Para iso empregamos o Método da Enerxía do xeito que segue.

Supoñamos que u_1, u_2 son solucións de $\mathcal{C}^2([0, L] \times \mathbb{R})$ de (P). Basta demostrar que $u_1 = u_2$ en $[0, L] \times \mathbb{R}$ ou, equivalentemente, $u_1 - u_2 = 0$ en $[0, L] \times \mathbb{R}$. Denotamos $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$, $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}$. Xa vimos que $u \in \mathcal{C}^2([0, L] \times \mathbb{R})$ e que u é solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = (u_1 - u_2)_{tt} - c^2 (u_1 - u_2)_{xx} = u_{1tt} - c^2 u_{1xx} - (u_{2tt} - c^2 u_{2xx}) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0, & x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = u_1(x, 0) - u_2(x, 0) = f(x) - f(x) = 0, & x \in [0, L], \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{P}_{Hom})$$

Vexamos entón que $u(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}$.

Para empregar o Método de Enerxía, primeiro definimos a enerxía da solución $u(x, t)$ como

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^L (u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t)) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

cuxo integrando é maior ou igual a cero para todo $t \in \mathbb{R}$ e continuo. Se probamos que $\mathcal{E}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ teríamos que $u_t^2(x, t) + c^2 u_x^2(x, t) = 0$, co cal $u_t = u_x = 0$ en $[0, L] \times \mathbb{R}$ e, en consecuencia, u sería constante en $[0, L] \times \mathbb{R}$. Por outro lado, como, polas condicións iniciais, $u(x, 0) = 0$ para todo $x \in [0, L]$, entón teríamos que $u(x, t) = 0$, para todo $(x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}$. Vexamos que $\mathcal{E}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En primeiro lugar, temos que

$$\mathcal{E}(0) = \int_0^L (u_t^2(x, 0) + c^2 u_x^2(x, 0)) ds = 0,$$

onde a segunda igualdade é consecuencia de supoñer que u é solución de (P_{Hom}) .

Agora demostraremos que $\mathcal{E}'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, co cal $\mathcal{E}(t)$ sería constante, e como xa vimos antes que $\mathcal{E}(0) = 0$, teríamos o resultado buscado, $\mathcal{E}(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para demostrar isto empregaremos a *Regra de Leibniz*:

Dada a función $F \in \mathcal{C}^1([0, L] \times \mathbb{R})$, definimos

$$G(t) = \int_0^L F(x, t) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

entón

$$G'(t) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) dx \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

O integrando de $\mathcal{E}(t)$ é de clase $\mathcal{C}^1([0, L] \times \mathbb{R})$. Así,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'(t) &= \int_0^L (2u_t(x, t)u_{tt}(x, t) + 2c^2u_x(x, t)u_{xt}(x, t)) dx = 2c^2 \int_0^L (u_tu_{xx} + u_xu_{xt}) dx \\ &= 2c^2 \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} (u_tu_x) dx = 2c^2 [u_tu_x]_{x=0}^{x=L} = 2c^2 (u_t(L, t)u_x(L, t) - u_t(0, t)u_x(0, t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Deste xeito, rematamos o capítulo no cal obtivemos a solución para o problema da corda vibrante e estudamos as condicións, necesarias e suficientes, para que esta exista e sexa única.

Capítulo 4

A xénese da análise de Fourier

Ata agora, fixemos un repaso histórico das orixes e controversias que rodearon ao problema da corda vibrante, e obtivemos unha dedución e solución, en termos das matemáticas actuais, da ecuación de ondas. Non obstante, como xa adiantabamos no primeiro capítulo, non foi ata entrado o século XIX, que o matemático e físico Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), alumno de Lagrange e Laplace, proporcionou unha solución ao problema da corda vibrante dada en serie, dun xeito que unificaría os intentos precedentes de resolución. A entrada en escena de Fourier no debate da corda vibrante non supuxo tan só a resolución da mesma, senón tamén a xénese da análise de Fourier que, como xa vimos, Lagrange xa adiantara, pois na súa solución xa se observaba o que coñecemos hoxe como unha serie de Fourier impar. Pero por que dicimos que Lagrange non descubriu estas series? O historiador das matemáticas Ivor Grattan-Guinness danos as seguintes razóns, no seu libro *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, [11]:

1. Lagrange non estaba buscando un teorema de análise matemática, el estaba procurando unha solución do problema da corda vibrante, como un problema relativo á natureza da propagación do son.
2. Lagrange buscaba unha solución en forma de integral, non de serie.
3. A representación en serie sería a solución dada por Bernoulli, (1.6), cos coeficientes dados por integrais, e polo axioma de fe que gobernaba no século XVIII, Lagrange consideraba que esa solución non era o bastante xeral.

Recordemos que, historicamente, nos atopamos a finais do século XVIII e principios do XIX e, se algo temos que destacar deste período é a invención da máquina de vapor, base da Revolución Industrial. Isto supuxo unha transformación económica, social e tecnolóxica da época: pasamos

dunha economía e estrutura social baseada puramente no rural, que conta coa agricultura e a gandaría como actividades principais, a unha economía industrializada e mecanizada, de carácter urbano.

Ademais, a máquina de vapor esperta o interese polo desenvolvemento dunha teoría matemática da condutividade da calor, o que se coñecería máis tarde como termodinámica. Laplace, Lavoisier ou Biot son só algúns exemplos dos físicos e matemáticos que realizaron investigacións neste ámbito. Joseph Fourier tamén foi un deles, interesándose pola teoría da transmisión da calor, presentando, en 1807, ante a Academia de Ciencias de París, a súa obra *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, [8], cuxo obxectivo era estudar a propagación da calor nun condutor, baixo certas hipóteses. Inspirado polo traballo de Daniel Bernoulli sobre o problema da corda vibrante, Fourier presentou nesa memoria un método para o cálculo explícito das solucións de ecuacións diferenciais que rexen o fenómeno da distribución da calor. Este método, que recibía o nome de «método Fourier-Bernoulli», é o que hoxe en día se coñece como «método de separación de variables».

Mais precisamente, e seguindo como guía o documento [1], o problema que Fourier presentaba en dita obra era o seguinte. Consideramos unha vara delgada cunha lonxitude π , con extremos a 0° centígrados e onde a súa superficie lateral está a unha temperatura constante. Supoñamos, ademais, que a distribución inicial da temperatura na vara está dada por unha función f . A pregunta que Fourier trata de responder é cal será a temperatura da vara en calquera punto x no instante de tempo t ?

Na memoria de 1807 de Fourier, mencionada anteriormente, o matemático chegou a que a difusión da calor nos puntos interiores dun sólido vén dada pola ecuación

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty), \quad (4.1)$$

onde $u(x, t)$ representa a temperatura do punto x da vara no tempo t . Porén, $u(x, t)$ non cumpre só a ecuación en derivadas parciais, *Ecuación da Calor*, (4.1), senón que tamén satisfai as seguintes condicións, xa mencionadas na exposición do problema que nos ocupa,

$$\begin{cases} u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty), \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (4.2)$$

Como ben dixemos, en [8], Fourier emprega por primeira vez, baseándose nas ideas de Bernoulli sobre o problema da corda vibrante, o método de separación de variables. Este método consistía en buscar as solucións máis sinxelas que puidesen representar a ecuación da calor (4.1), é dicir, buscamos solucións $u(x, t)$ que presenten a seguinte descomposición

$$u(x, t) = X(x) T(t),$$

o que transformará a ecuación en derivadas parciais (4.1), en ecuacións diferenciais ordinarias cuxa solución debemos atopar. Veremos a continuación, tomando o caso da ecuación da calor como exemplo, que a solución da EDP que estamos buscando se expresa como superposición das solucións das ecuacións diferenciais ordinarias, cuxos pesos asociados dependen das condicións iniciais e de fronteira do problema en cuestión.

Resolvamos entón a ecuación da calor, (4.1), mediante o método descrito anteriormente. Se $u(x, t) = X(x) T(t)$ é solución da ecuación, entón

$$X(x) T'(t) = c^2 X''(x) T(t),$$

ou, equivalentemente,

$$c^2 \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (4.3)$$

Notemos que as variables x e t son independentes entre si, co cal as expresións dadas en ambos lados da igualdade en (4.3) son iguais entre si e constantes, é dicir, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$c^2 \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Así, reescribimos o problema da ecuación da calor exposto por Fourier do xeito que segue

$$\begin{cases} X''(x) - \frac{\lambda}{c^2} X(x) = 0, & x \in [0, \pi], \\ T'(t) - \lambda T(t) = 0, & t \in [0, \infty), \end{cases} \quad (4.4)$$

con λ unha constante real e, tendo en conta as condicións iniciais de fronteira, temos que

$$X(0) = X(\pi) = 0. \quad (4.5)$$

Claramente, a solución xeral da segunda ecuación de (4.4) é

$$T(t) = C e^{\lambda t},$$

ao tratarse dunha ecuación diferencial homoxénea de primeira orde. Debemos ter en conta que como a calor da vara se disipa co paso do tempo temos que o límite de $u(x, t)$ cando t tende a infinito é 0:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = X(x) \lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = 0,$$

co cal o límite de $T(t)$ cando t tende a infinito é 0:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} C e^{\lambda t} = 0,$$

co que λ é un número real negativo.

Por outro lado, a solución da primeira das ecuacións de (4.4) é

$$X(x) = A \cos \sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}} x + B \operatorname{sen} \sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}} x.$$

Notemos que o radicando é positivo pois xa comentamos que λ é un real negativo, ao disiparse a calor da vara non ten sentido considerar $\lambda = 0$, que nos proporcionaría a solución trivial. Así, concluímos que $X(x)$ é unha función real.

Por (4.5), temos que

$$X(x) = B \operatorname{sen} \sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}} x,$$

logo,

$$w(x, t) = C e^{\lambda t} \operatorname{sen} \sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}} x = C e^{\frac{k^2}{c^2} t} \operatorname{sen}(k x),$$

onde $k = \sqrt{\frac{-\lambda}{c^2}}$ é un número natural, para que se satisfagan as condicións iniciais de fronteira (4.5) e para descartar a solución trivial, con $B = 0$.

Co cal a solución da ecuación do calor, polo método de separación de variables, é

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{\frac{k^2}{c^2} t} \operatorname{sen}(k x),$$

de onde obtemos que, se $t = 0$,

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(k x), \quad (4.6)$$

xurdindo así, de xeito natural, as *Series de Fourier*.

Agora é lóxico preguntarse se, elixindo de xeito oportuno os coeficientes b_k , existe unha única solución de (4.1) dada pola expresión anterior, (4.6). A resposta de Fourier a esta pregunta era afirmativa. Notemos que unha solución dada dese xeito é unha idea moi similar á que tivo Bernoulli para o problema da corda vibrante, como vimos no capítulo 1, co que temos unha mesma cuestión para dous problemas diferentes: por un lado o problema da corda vibrante e, por outro, o problema da ecuación da calor. Non obstante, Fourier si que deu unha expresión para os coeficientes b_k , a diferenza de Bernoulli, os cales calculou a partir do desenvolvemento en serie de Taylor de $f(x)$, na orixe de coordenadas, e de $\operatorname{sen}(k x)$:

$$\operatorname{sen}(k x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (kx)^{2n+1},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Substituíndo isto na ecuación (4.6) temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n k^{2n+1} b_k = f^{(2n+1)}(0), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \dots$$

Para resolver este sistema de ecuacións lineais, Fourier considera só as n primeiras variables b_k , resolve o sistema e toma o límite cando n tende a infinito, resultando así

$$b_k = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{k+n+1} k^{-2n-1} f^{(2n)}(\pi),$$

de onde reconece esta expresión como o resultado de aplicar, en repetidas ocasións, integración por partes á integral

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(k x) dx.$$

Agora ben, como se explica máis detalladamente en [14], non foi ata 1822, coa publicación da súa obra *Théorie analytique de la chaleur* ([9]), onde se enuncia o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *Calquera función $f(x)$ con $x \in (\pi, \pi)$ pode escribirse como unha serie de senos e cosenos de xeito*

$$2\pi f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\cos(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(a) \cos(an) da + \operatorname{sen}(nx) \int_{-\pi}^{\pi} f(a) \operatorname{sen}(an) da \right),$$

onde os valores que toma $f(x)$ en $(-\pi, \pi)$ son arbitrarios, e tamén podemos escoller uns límites calquera para a variable x .

Se reescribimos este resultado temos que o que Fourier enunciou foi que calquera función f definida nun intervalo $(-L, L)$ pode ser representada mediante unha serie trigonométrica como segue

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

onde os coeficientes, tamén denominados coeficientes de Fourier, están dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt.$$

Este resultado xa era familiar para outras personalidades da época, como Euler e Lagrange (como vimos no primeiro capítulo), aínda que só para certas funcións. Porén, Fourier, neste resultado, afirmaba que calquera función admite unha representación en serie trigonométrica. A proba que presentou para respaldar a súa idea carecía de rigor, incluso para o pouco formalismo que tiña a matemática do século XIX. Como sabemos hoxe en día, ese teorema 4 dado por Fourier

non é correcto e, non foi ata 1829 que se dan unhas condicións suficientes para poder presentar unha función en termos da súa serie de Fourier. Estas condicións veñen da man de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), matemático alemán responsable da definición moderna do termo *función*, que enunciou o seguinte teorema.

Teorema 4.2. *Se unha función f ten só un número finito de discontinuidades e un número finito de máximos e mínimos en $(-L, L)$, entón f pode ser representada pola súa serie de Fourier no intervalo $(-L, L)$.*

Ademais, a serie de Fourier en cuestión converge puntualmente a f onde a función f sexa continua e a $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ en cada punto x onde f sexa discontinua, onde $f(x^+) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$ e $f(x^-) = \lim_{t \rightarrow x^-} f(t)$.

4.1. Resolución da ecuación de ondas coas achegas de Fourier

Recordemos que o problema da corda vibrante ou ecuación de ondas, no caso unidimensional, consiste en resolver o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in [0, L] \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \\ u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L], \\ u(0, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (\text{P})$$

Empregando o método de Fourier-Bernoulli, ou separación de variables, igual a como fixemos para a ecuación da calor, comezamos calculando solucións do tipo $u(x, t) = T(t)X(x)$. Entón,

$$T''(t)X(x) = c^2 X''(x)T(t),$$

equivalentemente,

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

e denotamos esta igualdade con λ , sendo un número real positivo, obtendo como resultado as seguintes ecuacións diferenciais

$$\left\{ \begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad x \in [0, \pi], \\ T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0, \quad t \in [0, \infty). \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Aplicando as condicións de fronteira, temos que como $u(0, t) = u(L, t) = 0$ para todo t positivo, logo $X(0) = X(L) = 0$, como vimos para a ecuación da calor. Para obter solucións non

triviais de (4.7) primeiro centrarémonos en atopar os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os cales a primeira ecuación diferencial en (4.7) ten solución non trivial, tendo en conta as condicións de fronteira anteriores. Distinguimos os casos seguintes:

1. **Caso 1:** $\lambda > 0$. A solución xeral é

$$X(x) = A e^{\sqrt{\lambda}x} + B e^{-\sqrt{\lambda}x} \text{ con } A, B \in \mathbb{R}.$$

Tendo en conta as condicións de fronteira que derivan en $X(0) = X(L) = 0$, temos que $A = B = 0$. Polo tanto, para λ positivo só obtemos a solución trivial $X(x) = 0$.

2. **Caso 2:** $\lambda = 0$. A solución xeral é a ecuación dunha recta con coeficientes reais

$$X(x) = Ax + B$$

e aplicando as condicións de fronteira obtemos que para $\lambda = 0$ só chegamos a solución trivial.

3. **Caso 1:** $\lambda < 0$. Temos que a solución xeral é

$$X(x) = A \cos(-\sqrt{\lambda}x) + B \operatorname{sen}(-\sqrt{\lambda}x) \text{ onde } A, B \in \mathbb{R}.$$

Aplicando as condicións $X(0) = X(L) = 0$, obtemos que ou ben $A = B = 0$ o que levaría de novo á solución trivial, ou que $\lambda = -\frac{k^2\pi^2}{L^2}$, $k \in \mathbb{N}$, co que $X(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ é solución da ecuación diferencial para todo $A \in \mathbb{R}$.

Así, a solución xeral non trivial a para a primeira das ecuacións de (4.7) é

$$X_k(x) = A_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Analogamente, para a segunda ecuación, temos que a solución xeral é

$$T_k(t) = B_k \cos\left(\frac{\pi ckt}{L}\right) + C_k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ckt}{L}\right).$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= A_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(B_k \cos\left(\frac{\pi ckt}{L}\right) + C_k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ckt}{L}\right) \right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \left(a_k \cos\left(\frac{\pi ckt}{L}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi ckt}{L}\right) \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde $a_k = A_k B_k$ e $b_k = A_k C_k$. Usando o principio de superposición para ecuacións lineais temos que a solución da ecuación de ondas é

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t).$$

Finalmente, para determinar os coeficientes a_k e b_k empregamos as condicións iniciais. Pola primeira delas, $u(x, 0) = f(x)$, temos que f , se se pode expresar en serie de senos, é da forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k x}{L} \right), \quad (4.9)$$

unha serie de Fourier impar, co cal os seus coeficientes son

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{x \pi k}{L} \right) dx.$$

Da segunda condición inicial, $u_t(x, 0) = g(x)$, temos que

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k c k \pi}{L} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k x}{L} \right), \quad (4.10)$$

onde os coeficientes desta serie de Fourier son

$$b_k = \frac{2}{\pi k c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi k x}{L} \right) dx.$$

Así, concluímos a resolución do problema da corda vibrante coas ideas de Fourier, tendo xa unha expresión da solución $u(x, t)$ en termos das series de Fourier.

4.2. Equivalencia da solución de Fourier coa dada por D'Alembert

Nesta sección, e para rematar este capítulo, veremos que a solución dada polo método de separación de variables, ou método Fourier-Bernoulli, (4.8), é equivalente a solución da ecuación de ondas dada por D'Alembert (3.5). Para isto, empregaremos como referencia [18].

Trivialmente, en (4.8) temos que $u(x, t) = \bar{u}(x, t) + \tilde{u}(x, t)$ onde

$$\bar{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(\frac{k \pi c}{L} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k \pi x}{L} \right), \quad (4.11)$$

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} \left(\frac{k \pi c}{L} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k \pi x}{L} \right). \quad (4.12)$$

Por identidades trigonométricas temos

$$\operatorname{sen} \left(\frac{k \pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{k \pi c}{L} t \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{k \pi}{L} (x - ct) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{k \pi}{L} (x + ct), \quad (4.13)$$

logo podemos reescribir \bar{u} en (4.11) como

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k \pi}{L} (x - ct) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k \pi}{L} (x + ct).$$

Agora ben, sexa \bar{f} a extensión impar e $2L$ -periódica de $f(x)$, que recordemos que f é de clase dous en $[0, L]$, cumpre $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = 0$ e (4.9) converxe nese intervalo absoluta e uniformemente. É dicir, \bar{f} é unha función definida como

$$\bar{f} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right)$$

tal que

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= f(x), \quad x \in [0, L], \\ \bar{f}(-x) &= -\bar{f}(x), \quad x \in [0, L], \\ \bar{f}(x \pm 2L) &= \bar{f}(x). \end{aligned}$$

Podemos escribir \bar{u} do xeito

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\bar{f}(x - ct) + \bar{f}(x + ct)]. \quad (4.14)$$

Esta ecuación satisfai as condicións de fronteira trivialmente, $\bar{u}(0, t) = \bar{u}(L, t) = 0$, e tamén as iniciais con $g(x) \equiv 0$ pois como f é de clase dous, \bar{f}' existe e é continua para todo x . Por último, como \bar{f}'' existe e é continua, polas condicións que cumpre f , temos que

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}.$$

Por outro lado, a función g que é de clase un no intervalo $[0, L]$ e cumpre $g(0) = g(L) = 0$, co cal g dada pola serie (4.10) converxe absoluta e uniformemente no intervalo considerado. Introducindo uns coeficientes novos dados por $c_k = \frac{k\pi c}{L} b_k$, temos que

$$\tilde{u}(x, t) = \left(\frac{L}{\pi c} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right).$$

Derivando respecto de t ,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \left(\frac{k\pi c}{L} t \right) \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right).$$

Agora, se usamos de novo a identidade trigonométrica (4.13), chegamos a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} (x - ct) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{L} (x + ct).$$

Estas series son absoluta e uniformemente converxentes polas condicións que supoñemos en g , logo as anteriores tamén o son, xustificando así a diferenciación termo a termo.

Sexa agora

$$\bar{g}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right)$$

a extensión impar e $2L$ -periódica de g . De xeito análogo a como fixemos para \bar{f} , temos que podemos reescribir as series anteriores como

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} [G(x - ct) + G(x + ct)].$$

Integrando obtemos

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \bar{g}(x - cp) dp + \frac{1}{2} \int_0^t \bar{g}(x + cp) dp = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \bar{g}(s) ds.$$

Esta ecuación satisfai as condicións iniciais e de fronteira, supoñendo $f(x) \equiv 0$ e tamén cumpre

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}.$$

Logo, acabamos de comprobar que a solución dada por Fourier é equivalente á dada pola fórmula de D'Alembert (3.5), co que aínda que ambos matemáticos tomaron camiños distintos para dar unha solución ao problema da corda vibrante as conclusións son iguais, pois no teorema 3.3 xa establecimos que existe unha única solución do problema baixo unhas certas condicións.

Capítulo 5

Conclusións

A comezos deste traballo explicamos, de xeito breve, como a música e as matemáticas se relacionaron entre si desde hai séculos, pois aínda que a primeira vista poidan parecer dúas disciplinas completamente separadas o certo é que ambas coexisten e manteñen unha relación próxima unha da outra. Os pitagóricos xa se decataram deste vínculo, para eles o valor metafórico que tiñan as palabras «harmonía» e «número» eran complementarios entre si. Esta relación continuou durante séculos nas ideas de distintas personalidades, mesmo na de matemáticos relevantes como Leibniz, Taylor, Euler ou Bernoulli, como xa explicamos.

As matemáticas e a música teñen formas moi distintas de relacionarse, neste traballo centrámonos unicamente na teoría ondulatoria estudando os movementos que segue unha corda en vibración. Isto levounos a estudar o problema da corda vibrante que non destaca tan só por ser un medio para explicar as ondas senón tamén por servir de esclarecemento do concepto de «función», relevante para un maior rigor e desenvolvemento das matemáticas modernas.

Na breve revisión histórica que fixemos do problema en cuestión vimos que pese a que en moitos libros e artigos se lle atribúe ao francés D'Alembert a primeira expresión da ecuación de ondas, foi Brook Taylor quen décadas antes chegara a ela botando man de conceptos como aceleración ou curvatura, aínda que cometeu un fallo ao supoñer que os movementos de vibración se correspondían a un movemento sinusoidal. D'Alembert e Euler, familiarizados coas ideas de Taylor, propuxeron as súas propias solucións chocando entre eles no camiño pola falta de rigor da análise da época. Bernoulli foi o primeiro en «escoitar á corda» dando un punto de vista máis musical e físico, proponendo como solución do problema unha superposición de vibracións taylorianas, que recordemos que eran movementos sinusoidais. Porén, aínda que estaba equivocado, esta idea de superposición de series de senos serviu de axuda para que Fourier puidese presentar as súas achegas non só ao problema da corda vibrante senón tamén ao estudo da termodinámica. Isto último, como xa comentamos, foi a orixe da análise de Fourier actual. En certo modo,

D'Alembert defendía unha autonomía parcial da física con respecto das matemáticas e para el a música non tiña ningún tipo de papel na cuestión, Euler e Lagrange suxetiban a física e a música nas matemáticas e Bernoulli axustaba as matemáticas á física e á música.

Con maior ou menor acerto, estes estudosos presentaron ideas sobre o mesmo problema complementándose entre elas ou mesmo sendo desde distintas perspectivas, pero non cabe dúbida de que todas estas contribucións resultaron necesarias para a súa resolución. Mesmo aínda que todas parecen distintas entre si, como vimos, a solución de D'Alembert, a mediados do século XVIII, e a dada por Fourier, século XIX, son completamente equivalentes. É máis, por resultados que expuxemos son iguais, ao existir unha única solución.

A modo de conclusión, resaltamos a importancia da música, concretamente do problema da corda vibrante, nas matemáticas por colaborar no proceso de establecemento dunha rigorosidade nas matemáticas que vería o seu cume no século XIX.

Bibliografía

- [1] Almira, J. M. (2008). *Cuerdas vibrantes y calor: la génesis del análisis de Fourier*. *Matemática*, **4**, 1.
- [2] Bernoulli, D. (1753). *Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748*, *Mémoires de L'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, **9**, 147–172.
- [3] Bruce, I (2006) *Johann Bernoulli: Bernoulli on Vibrating Strings*. <http://www.17centurymaths.com/contents/bernoulli/bonstrings.pdf>
- [4] D'Alembert, J. (1747). *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*, *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin pour l'année 1747*, **3**, 214–219.
- [5] Euler, L. (1740). *De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis*, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **7**, 177.
- [6] Euler, L. (1749). *De vibratione chordarum exercitatio*, *Euler Archive - All Works*, **119**.
- [7] Euler, L. (1755). *Remarques sur les memoires precedens de M. Bernoulli*, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, **9**, 196–222.
- [8] Fourier, J. B. J. (1811). *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société Philomathique*. Paris, **1**, no. 6.
- [9] Fourier, J. B. J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur*, Chez Firmin Didot, Pere et Fils, Paris.
- [10] Granero-Belichón, R. (2022). *Ecuaciones en Derivadas Parciales y Series de Fourier*, publicación independiente, España.
- [11] Grattan-Guinness, I. (1970). *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann.*, Mit, Cambridge, MA. Capítulo 1.

-
- [12] Haberman, R. (2003). *Ecuaciones en derivadas parciales con series de Fourier y problemas de contorno*, 3^a ed., Prentice Hall, Madrid.
- [13] Jouve, G. (2007). *Imprevus et pieges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783). Doutes et certitudes sur les equations aux derivees partielles, les series et les fonctions*, Universite Claude Bernard - Lyon I, 19–27.
- [14] Kleiner, I. (1989). *Evolution of the Function Concept: A Brief Survey*, The College Mathematics Journal, **4**, 282–300.
- [15] Lagrange, J. L. (1759). *Rechercher sur la nature et propagation du son*, Miscellanea Taurinensia, 59–71.
- [16] López Pouso, R. (2019) *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales*, USC Editora.
- [17] Morin, D. (2023). *Transversal Waves*, Harvard University, https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/waves_transverse.pdf.
- [18] Myint-U, T. e Debnath, L. (2007), *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 4^a ed., Birkhäuser, Boston.
- [19] Oliveira, A.R.E. (2020). *D'Alembert and the Wave Equation: Its Disputes and Controversies*, Advances in Historical Studies, Scientific Research Publishing, **9**, 229–239.
- [20] Taylor, B. (1717). *Methodus incrementorum directa & inversa*, Impensis Gulielmi Innys, 89–91.
- [21] Weinberger, H. F. (1979). *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con métodos de variable compleja y de transformaciones integrales*, 3^a ed., Editorial Reverté, S.A., Barcelona.
- [22] Wheeler, G. F. e Crummett, W.P. (1987). *The vibrating string controversy*, American Journal of Physics, **55**, 33–37.