AGORA —Papeles de Filosofía— (1999), 18/1: 5-32 ISSN 0211-6642

EL DESARROLLO DE LA LÓGICA EN EL SIGLO XX*

Luis Vega Reñón
UNED (Madrid)

Resumen

La lógica, una venerable disciplina con larga tradición, ha presenciado durante el siglo XX su periodo de mayor desarrollo y diversificación. La lógica moderna, a la luz de su crecimiento exponencial, se ha convertido en una gran ciencia. La presente contribución sintetiza esta expansión contemplada desde un punto de vista histórico y filosófico, distinguiendo tres grandes aspectos: (1) el mayor evento de la lógica del siglo XX su establecimiento como una nueva disciplina científica; este largo proceso involucra dos movimientos interrelacionados de (2) un tipo de sístole, que prevalece a medida que avanza la primera mitad del siglo, hacia una lógica estándar, y (3) diástole, que se desarrolla durante la segunda mitad del siglo, hacia las lógicas alternativas. Concluyo considerando en este contexto algunas cuestiones sobre los sistemas y el concepto de consecuencia lógica.

Palabras clave: Lógica moderna, lógica estándar, lógicas alternativas, consecuencia lógica.

Abstract

Logic, a venerable and age-long philosophical discipline, has witnessed its period of biggest development and diversification during the 20th century. Modern logic, in the light of its exponential growth, has become a big science. My review summarizes this expansion, seen from a historical and philosophical point of view, by distinguishing three main aspects of it: (1) the great event of 20th century, in logic, has been its seting up as a new scientific discipline; this long-drawn-out process involves two interwoven movements of (2) a sort of «systole», prevailing as the first half-century advances, towards a standard logic, and (3) a «diastole», growing as the second half-century goes on, towards alternative logics. I conclude by raising a number of issues from this context about the systems and concept of logical consequence.

Keywords: Modern logic, standard logic, alternative logics, logical consequence.

1. Introducción: un punto de vista

La lógica, materia venerable, cuenta unos 24 siglos de historia a sus espaldas. Pero en ningún siglo anterior ha conocido un desarrollo y una diversificación comparables a los que han tenido lugar en el s. XX. Los cambios han sido sustanciales: han afectado tanto a su constitución interna, como a su estatuto institucional. Para hacerse una idea de lo primero bastaría confrontar lo que se entendía en nuestro país por «lógica fundamental»

* Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación PS95-0024.

 Aceptación: XII/1999

a principios de siglo con lo que ahora se cultiva y enseña a título de «elementos»[1]. Para hacerse una idea de lo segundo, bastaría reparar en su conversión de disciplina filosófica tradicional en «big science» moderna; un indicador es el crecimiento exponencial de la literatura técnica dentro del campo abierto por la que Carnap llamaba «die neue Logik» a principios de los años 1930. Mediada esta misma década, Church registraba, dentro del periodo 1847-1932, un total de 1.733 autores y 5.845 publicaciones distribuidas en 15 secciones. Cincuenta años después, una Ω-Bibliography of Mathematical Logic recoge, de entre 1879 y 1985, 14.813 autores y 47.117 publicaciones, amén de reconocer 8 áreas capitales y 109 subáreas especializadas[2]. Hoy, por añadidura, la lógica puede prosperar en diversos medios académicos (facultades de filosofía y de matemáticas; escuelas de informática; centros de trabajo en computación, en inteligencia artificial, en ciencias lingüísticas y cognitivas). Esta diseminación facilita no sólo usos y subespecialidades dispares, sino concepciones distintas de la lógica que, al fin, vienen a reflejarse en varias y diversas visiones selectivas[3].

No es obligado concluir de ahí que, en definitiva, la lógica ha cambiado totalmente de tema o de naturaleza. La lógica sigue ocupándose de sus asuntos propios —por ejemplo, la determinación de formas lógicas y de relaciones de consecuencia—, y sigue cultivando dos dimensiones tradicionales: [1] analítica, e.g. en orden a la caracterización de gramáticas formales, de estructuras semánticas, de representaciones cognitivas, y [2] teórica, e.g. en orden a la sistematización de (clases de) inferencias, por más que la persecución de estos objetivos trate de atender y acomodarse a las demandas y los signos de los tiempos[4].

---

[1] Cf., de una parte, J. de Castro (1901), «Evolución y concepto de la lógica», *BILE*, 27/516 y 517 (1903): 86-96 y 114-123, o las referencias de A. Gómez Izquierdo, *Nuevas direcciones del análisis lógico*, Madrid: Victoriano Suárez, 1907, pp. 210-237; de otra parte, C. Badesa, I. Jané, R. Jansana, *Elementos de lógica formal*, Barcelona: Ariel, 1998.

[2] A. Church, «A bibliography of symbolic logic», *JSL*, 1/4 (1936): 121-218; adic. y correcc. *Ibd.* 3/4 (1938): 178-212. G. H. Müller, ed., Ω-Bibliography of matemathical logic, Berlin/Heidelberg/New York: Springer, 1988, 6 vols. Hay un estudio bibliométrico que compara algunos aspectos de esta evolución en R. Wagner-Döbler y J. Berg, *Mathematische Logik von 1847 bis zur Gegenwart*, Berlin/New York: W. de Gruyter, 1993.

[3] Así, a los ojos de un observador de filiación matemática, la lógica presenta esta «composición cuatripartita: *funciones recursivas*, el corazón de la materia; *teoría de la prueba*, que incluye los mejores teoremas; *conjuntos y clases*, cuyo romántico atractivo sobrepasa con mucho su sustancia matemática; y *teoría de modelos*, cuyo valor reside en su aplicabilidad a, y sus raíces en, el álgebra.» (G. Sacks, «Differential closure of a differential field», *Bull. Amer. Mathem. Soc.*, 78 [1972], 629). A los ojos de un observador de filiación filosófica, pueden ser otras la composición y la valoración de los componentes: el análisis se centra en la determinación de formas y consecuencias lógicas, y en esta perspectiva se mueven las cuestiones de construcción efectiva y deducibilidad; la teoría de conjuntos cumple servicios más bien instrumentales, al margen de su halo; y, en fin, los teoremas clásicos de la teoría de modelos (e.g. los comprendidos entre Löwenheim 1915 y Lindström 1969) han resultado tan buenos como —e incluso más fecundos que— los de la teoría de la prueba.

[4] Por ejemplo, la investigación en inteligencia artificial viene dirigiendo desde los 70 el trabajo en la línea [1] hacia el análisis de representaciones cognitivas y el procesamiento de información

Pero de ahí se colige que ninguna panorámica dejará de incurrir en una imagen parcial y sesgada de la lógica del s. XX. Nadie está hoy en condiciones de dominar todo ese campo analítico y teórico ni, menos aún, el conjunto de sus aplicaciones[5]. Aquí, por mi parte, me limitaré a unas observaciones impresionistas, marcadas por los sesgos propios de quien ve la lógica en una perspectiva histórica mirando desde una facultad de filosofía.

Vistas así las cosas, el gran acontecimiento del siglo en lógica ha sido la constitución de sus señas básicas de identidad como nueva disciplina científica —nacida en tierra de nadie, fruto de unas relaciones extra-disciplinarias entre ciertas matemáticas y ciertas filosofías[6]. En este largo y accidentado acontecer destacan dos movimientos de sístole y de diástole: uno ha conducido a la conformación e implantación de una lógica clásica de primer orden como *la* lógica por antonomasia, nuestra lógica «estándar»; el otro ha discurrido al hilo del desarrollo de *las* lógicas, lógicas «alternativas» o, más en general, «no estándar»; el primero cobra mayor importancia a medida que avanza la primera mitad del siglo; el segundo, a medida que avanza la segunda. Las notas que siguen girarán en torno a estos tres procesos seculares y sus interrelaciones. Pero no voy a entrar en los cambios de configuración del contorno interdisciplinario (metodológico, matemático, lingüístico, cognitivo, etc.), que acompañan a esos procesos constituyentes. Tampoco discutiré las imágenes y las secuelas historiográficas que se han ido desprendiendo de ellos[7].

y, en la línea [2], hacia el tratamiento y control de la inferencia en sistemas de razonamiento con conocimiento incompleto, amén de recurrir metódicamente a la simulación de las computaciones ordinarias mediante lenguajes de programación; vid. el informe de R. C. Moore, *Logic and representation*, Stanford (CA): CSLI [Lecture Notes, 39], 1995.

[5] Para hacerse cargo de la situación actual habría que partir de compilaciones del género de J. Barwise (ed.), *Handbook of mathematical logic*, Amsterdam: North Holland, 1977, o D. Gabbay y F. Guenthner (eds.), *Handbook of philosophical logic*, Dordrecht: Reidel, 1983-1989, 4 vols. Otras vías de aproximación abiertas a los filósofos son las misceláneas del tipo de C. E. Alchourrón (ed), *Lógica* [EIAF, 7], Madrid: Trotta, 1995, o D. Miéville (ed.), *Introduction aux logiques non classiques* [*Travaux de logique*, 11], Neuchâtel: Université de Neuchâtel, 1997; también cabe partir de las entradas pertinentes en E. Craig (ed.) *Routledge Encyclopedia of Philosophy*, London/New York: Routledge, 1988, 10 vols. Por lo que se refiere al amplio margen de las aplicaciones en curso, convendría acudir a informes monográficos y a bibliografías especializadas.

[6] Todavía hoy, reconocida su autonomía como campo de conocimiento —vid. e.g. «Logic as a field of knowledge», monográfico de *The Monist*, 72/1 (1989)—, se sigue discutiendo su localización en el mapa: cf. G.H. Moore, «Is mathematical logic a part of mathematics?», *Historia Mathematica*, 24 (1997): 210-212, y J. Gray, «Reply to "Is mathematical logic a part of mathematics?"», *Ibid.*, 24 (1997): 454-456.

[7] Por ejemplo, según Lewis (1918), la época constituyente de la lógica moderna se inicia a partir de diversas líneas británicas y germanas, desde mediados del s. XIX, y se clausura con su confluencia en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell (1910-1913); según van Heijenoort (1967), es la «gran época» que abre Frege en 1879 y cierra Gödel en 1931; según Moore (1998) se abre precisamente a partir de Gödel. Hay noticias y muestras de esos cambios de óptica y de perspectiva en la sección monográfica «Sobre la historia de la lógica matemática» de *Theoría*, 12/28 (1997): 7-160. Por lo demás, el baile de «grandes momentos» o de «fechas clave» se animaría mucho más y se desplazaría en línea con el avance del siglo si se trajeran a colación

2. La lógica moderna: tendencias, tradiciones y programas

La lógica *tradicional* se interesaba por la convalidación de argumentos y la detección de falacias, mediante esquematizaciones —e.g. gramaticales, diagramáticas— de formas lógicas dentro del discurso común o académico. Por contraste, algunos intereses característicos de la lógica *moderna* son: [1] la construcción de lenguajes simbólicos artificiales; [2] el estudio formal y sistemático de la deducción matemática; [3] la investigación de estructuras y de modelos matemáticos. Con el tiempo estos intereses se han plasmado en realizaciones y áreas de trabajo que hoy distinguen el cultivo de la materia: [1], por ejemplo, en la construcción y la determinación efectivas de los elementos y las categorías gramaticales de los lenguajes lógicos; [2] en la (mal) llamada «teoría de la prueba»; [3] en la llamada «teoría de modelos».

A pesar de algunas supuestas primicias anteriores, e.g. en la estela leibniziana[8], esta lógica *moderna* no existe como campo de conocimiento antes de mediados del s. XIX —así que sería más justo calificarla de *contemporánea*. No se encuentra ni en las vastas regiones filosóficas frecuentadas por la lógica tradicional (epistemológicas, metafísicas, metodológicas), ni en los diversos terrenos de expansión y desarrollo de las matemáticas modernas, e.g. el análisis, el álgebra, la teoría de probabilidades. Luego, en la segunda mitad del siglo, irán apareciendo solapamientos y zonas francas entre la lógica tradicional y la matemática moderna, e.g. en el álgebra simbólica o entre los *conceptos* de la tradición lógico-filosófica y las *colecciones* o *multiplicidades* consideradas por algunos matemáticos, así como nuevos lugares preparados para construirse una especie de residencia propia, e.g. el tratamiento veritativo-funcional de las proposiciones, la cuantificación de variables, el cálculo de relativos[9]. Esta perspectiva no concede el protagonismo decisivo a un

otros desarrollos especializados o divergentes de la corriente principal (e.g. Birkhoff y von Neumann 1936 sería una inflexión crucial para el desarrollo de la lógica cuántica; Ackermann 1956 pasa por ser la «fecha fundacional» de las lógicas de la pertinencia; las lógicas borrosas o difusas suelen remitirse a Zadeh 1965; y las de la inferencia no monótona no parecen remontarse más atrás de 1985 —Gabbay 1985; Alchourrón, Gärdenfors, Makinson 1985—). Las 900 y pico páginas de C. Mangione y S. Bozzi (1993) son la panorámica más amplia disponible actualmente, aunque no alcancen a considerar estas innovaciones y desviaciones de la segunda mitad del siglo. En el c. 6 de mi *Guía* (Vega Reñón, 1996, pp. 181-271), hay visiones de conjunto y esquemas de las líneas principales de constitución, así como referencias bibliográficas de fuentes y literatura secundaria.

[8] Alentadas por el renacimiento de Leibniz, especialmente a partir de la mediación de Couturat (1901, 1903). Para una reconducción de la significación histórica de Leibniz y de las tradiciones leibnizianas a sus justos términos, vid. V. Peckhaus, *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft*. Berlin: Akademie Verlag, 1997.

[9] Vid. sobre las tradiciones existentes en la lógica filosófica la versión inglesa de F. Ueberweg (18683), *System of logic and history of logical doctrines*, London: Longmans, Green & Co., 1871, reimp. en Bristol: Thoemmes, 1993; al panorama germano original, el traductor, T.M. Lindsay, añade un apéndice sobre las tradiciones británicas, pp. 557-578. También es ilustrativo el ya citado Gómez Izquierdo (1907). Por lo que concierne a las matemáticas, una buena fuente historiográfica es Ph. E. B. Jourdain (1906-1918), *Selected essays on the history of set theory and logic*, edic. de I. Grattan-Guinness, Bologna: CLUEB, 1991; el mismo Grattan-Guinness (1988)

nombre propio —a un presunto «fundador» de la lógica moderna: Boole, Frege, Peirce, Peano, etc.—, o a una contribución singular, «fundante». Hace pensar más bien en corrientes o tendencias abiertas que discurren, por lo general, al margen de la lógica académica y obran como cauce de diversas tradiciones y programas. Por ejemplo, el interés [1] antes aludido puede relacionarse con algunas propuestas semióticas y algebraicas que podrían remontarse al s. XVIII, aunque haya de esperar hasta la segunda mitad del XIX para empezar a dar frutos en el marco de dos programas que, adoptando los términos de una discusión entre Frege y Schröder, podrían denominarse «lógica como cálculo», más pendiente de las posibilidades operacionales y resolutivas del lenguaje lógico-algebraico, y «lógica como lenguaje», más pendiente de la expresión depurada y transparente de los contenidos y las leyes del pensamiento. Concurren además dos tendencias perceptibles: (A) una que se mueve hacia una creciente generalidad y abstracción en las expresiones simbólicas, en el análisis de condiciones o de «leyes» de protoestructuras matemáticas y en el cálculo combinatorio de las operaciones correspondientes; (B) otra que se mueve hacia una creciente rigorización de los conceptos, de las pruebas y de las teorías deductivas. Si un ámbito característico —pero no exclusivo— de (A) es el álgebra, dos ámbitos característicos —pero no exclusivos— de (B) son el análisis y la geometría. También pueden entreverse lugares de confluencia, como las nociones iniciales de *estructura abstracta* y de *sistema teórico*: la primera podría considerarse resultado de la progresiva toma de conciencia de fenómenos de isomorfismo entre áreas y aplicaciones teóricas diversas; la segunda podría considerarse resultado de la creciente familiarización con el análisis conceptual, con las variaciones de postulados que dan lugar a variantes axiomáticas alternativas, con ciertas relaciones entre teorías —e.g. de representabilidad de una teoría en otra. No es extraño que entre finales del XIX y principios del XX asomen cuestiones que se dirían *avant la lettre* «metamatemáticas»: e.g. el punto de las relaciones entre independencia, interpretación o contrainterpretación en un modelo, consistencia y consecuencia, o incluso entre la idea de categoricidad y una noción inicial de axiomatización suficiente o completa. Por lo demás, las dos tendencias señaladas no sólo sirven de cauce para diversas líneas y programas en consonancia con los intereses [2] y [3], antes mencionados, y en la dirección de lo que será en nuestro siglo la lógica matemática. También serán tendencias de larga duración. Por ejemplo, si el concepto cabal de estructura algebraica y su conversión en un foco de la investigación matemática moderna no cristalizan hasta los 30 —e.g. en van der Waerden (1930), *Moderne Algebra*—, el análisis de las relaciones básicas de deducibilidad y de consecuencia en una teoría —entendida como un conjunto de enunciados cerrado con respecto a una u otra relación— no madura hasta la metodología de las ciencias deductivas de Tarski, en esa

ofrece un sucinto informe panorámico. Por lo demás, J. Hintikka, ed. (1995) trata algunos aspectos complementarios y menos conocidos de la interacción entre lógicas, matemáticas y filosofía.

misma década, a pesar de los pasos anteriores en uno y otro sentido: e.g., el estudio de invariantes algebraicas y de conceptos abstractos de grupo, cuerpo, etc., en el primer caso; las tradiciones hipotético-deductivas de la «escuela» de Peano y de los «American postulate theorists», en el segundo.

Dentro de este contexto, es natural encontrarse a principios del s. XX con varias tradiciones y orientaciones lógico-matemáticas y, por ende, asistir a una especie de parto múltiple de la lógica moderna. De hecho, hacia 1900, podemos detectar la presencia de diversas líneas de génesis y desarrollo de la que será la lógica del s. XX. En particular:

[a] La tradición booleana del álgebra de la lógica que, al hilo de su dedicación a las clases y las proposiciones —más alguna incursión en el estudio de las probabilidades—, considera diversos universos de discurso como posibles marcos de referencia del cálculo. Además, por entonces y por mediación de Peirce y de Schröder, ya cuenta con un aparato cuantificacional en su análisis de relativos. Su fortuna empezará a declinar a medida que se extiendan la preocupación por el análisis y la fundamentación de la deducción matemática y, en particular, el influjo de las lógicas matemáticas de Peano y Russell. Pero mantendrá el legado de sus contribuciones operacionales y resolutivas (e.g. a través del recurso a las formas normales) y alentará la investigación de las relaciones entre la cuantificación y los diferentes dominios de interpretación (e.g. en la línea de Löwenheim 1915).

[b] El análisis lógico objeto-gráfico y concepto-gráfico de *Begriffsschrift* y los programas logicistas de Frege y de Russell. El programa fregeano de fundamentar ciertas bases teóricas (aritméticas y conjuntistas) de las matemáticas en los términos de una «Gran Lógica», expresión universal, autónoma y traslúcida del pensamiento puro, había logrado una teoría de la cuantificación general y unitaria. El programa de Russell, más ambiguo en el terreno filosófico y más comprensivo en el matemático, procurará en el curso de la primera década del siglo no sólo beneficiarse de algunas propuestas notacionales y conceptuales de Peano, sino salir al paso de las antinomias que amenazaban con socavar los cimientos de la sistematización lógico-matemática. Aparte de algunas contribuciones importantes al análisis lógico del lenguaje, sus logros más influyentes quizás sean la teoría de la «implicación» —o de la «deducción» en *Principia Mathematica* (*PM*, I [1910])— y la reconstrucción del análisis general de las funciones proposicionales dentro del marco de la teoría de los tipos. Por añadidura, el gran edificio de *PM* (1910-1913) dio solidez y alas a la idea de que la lógica matemática moderna podía alcanzar la forma cabal de una disciplina científica.

[c] La orientación de Peano —después de algunos ensayos iniciales en la línea lógico-algebraica— y de su escuela (Pieri, Padoa) hacia la sistematización y la metodología deductiva de teorías matemáticas clásicas (aritmética, geometría). Un producto derivado del estudio de las condiciones de interpretación de las expresiones primitivas de una teoría axiomática formalmente considerada será una noción de deducibilidad aproximada al concepto canónico moderno —desde Tarski 1936— de consecuencia lógica.

[d] El interés de Hilbert por una nueva vía de axiomatización, relativamente abstracta, y por las propiedades de los sistemas axiomáticos mismos (e.g. consistencia, suficiencia en el sentido de que los axiomas determinantes de un sistema teórico basten para derivar todos los teoremas conocidos en la teoría). Posteriormente, su creciente preocupación por los problemas de fundamentación de las matemáticas y sus expectativas de un control efectivo de las teorías y las pruebas matemáticas, le llevarían a emprender —junto con sus colaboradores de Göttingen (Bernays, Ackermann)— una parcelación y reconstrucción formal y sistemática de la lógica subyacente en la matemática clásica. Entre los años 1917-1928, Göttingen se convierte en el centro de la transición hacia lo que hoy entendemos por lógica «estándar» —sin olvidar por ello la existencia de otras contribuciones en esta dirección más bien periféricas (e.g. Löwenheim 1915; Skolem, 1920 ss.; Post 1921).

Para completar el cuadro de la situación matriz de la lógica del s. XX, habría que incluir las variantes filosóficas de la lógica tradicional, tradición que hacia 1900 también estaba lejos de presentar un cuerpo único u homogéneo de doctrina[10]. La alusión a la lógica tradicional no es superflua en la perspectiva de los problemas de identificación de la nueva área de las lógicas matemáticas. La lógica «simbólica» de corte booleano (la más difundida por entonces) era recibida en medios lógico-filosóficos tradicionales, por regla general, bien como una excrecencia extensionalista o calculística de escaso interés, bien como una amenaza de invasión desde el exterior, desde las matemáticas, tan perniciosa para la naturaleza genuina de la lógica como pudiera serlo la intromisión psicologista, la invasión desde la psicología científica. De este modo, a los problemas internos de identificación y delimitación —recordemos que, por ejemplo, ni el logicismo de Frege ni el de Russell llegaron a acotar con precisión los campos de las proposiciones matemáticas y de las proposiciones lógicas, pese a su programa de fundamentación de aquéllas en éstas—, se sumaban los problemas externos de jurisdicción y de emplazamiento en la república de las disciplinas filosóficas, metodológicas y científicas.

Podían darse, incluso, terrenos en disputa entre el análisis lógico-filosófico y el análisis lógico-matemático, como el cubierto por la que Coffa llama «lucha de clases»[11]. Según la tradición, todo concepto tiene tanto una *comprensión* o un contenido de notas conceptuales, como una *extensión*, un con-

[10] La cuestión de la índole misma de la lógica —¿es una ciencia natural, o es el canon de la razón, o es la técnica del pensamiento correcto?— venía siendo un debate abierto desde su planteamiento expreso en 1842 como «die logische Frage». En el supuesto de su condición de disciplina filosófica concurrían además orientaciones doctrinales diversas: la formal-trascendental y la epistemológica, en la onda de Kant; la metafísica, en la onda de Hegel; la metodológica, en la onda de Stuart Mill; sin contar las variaciones en torno al debate «antipsicologismo *versus* psicologismo» o los tanteos y discusiones en torno a la idea de inferencia. El colmo de la indiscriminación sería reducir esta variedad de lógicas filosóficas a una muletilla como la que identifica «lógica tradicional» con «lógica aristotélica».

[11] Coffa (1991), pp. 113 ss. En Ferreirós 1999 podrá verse una caracterización detallada del papel de la teoría de conjuntos en la gestación de la matemática y la lógica modernas.

junto de conceptos subordinados o una clase de objetos subsumidos. La existencia de una correspondencia entre ambas, en el sentido de que la comprensión determina de algún modo la extensión, venía siendo un dogma de la lógica tradicional desde su promulgación en el s. XVII —aunque a veces se discutiera alguna cuestión derivada de esta correspondencia. El dogma sigue vigente en el s. XIX y suele ser asumido por quienes se acercan a la lógica desde otras regiones más o menos vecinas, pongamos por caso desde las matemáticas. Ahora bien, las ideas de concepto y de clase venían formando parte sustancial del patrimonio del pensamiento lógico y este título de propiedad no dejaba de pesar en las nociones matemáticas de multiplicidad o colección o conjunto, consideradas por unos —matemáticos, sobre todo— como un crédito abierto y por otros —filósofos, por lo regular— como una desviación de fondos, aunque también hubiera quienes, al parecer, se limitaran a actuar por propia cuenta, e.g. Cantor. En cualquier caso, el primer incidente serio no se produce hasta que Russell comunica a Frege en 1902 la antinomia implícita en su propio uso de la noción fundamental de extensión de un concepto: de ella se sigue la anomalía de que no todo concepto envuelve la existencia de una clase correspondiente. La segunda anomalía crítica aparece cuando, unos años después, Zermelo llama la atención sobre las peculiariades del axioma de elección: es un supuesto decisivo de la prueba de importantes teoremas, pero funciona de modo que da existencia a un conjunto sin necesidad de un concepto o de una determinación conceptual correspondiente. El caso ilustra dos puntos importantes. Muestra, por un lado, la apropiación y disolución de antiguos fondos lógico-filosóficos en función del desarrollo de diversos programas lógico-matemáticos; por otro lado, revela la complejidad del proceso general de generación y crecimiento de la(s) lógica(s) matemática(s), pues no sólo involucra tradiciones dispares, filosóficas y matemáticas, sino que envuelve planos y ritmos de desarrollo no menos diversos —el álgebra básica de clases, por ejemplo, venía disfrutando de una vida sencilla y placentera desde los primeros tiempos; por lo demás, todas estas peripecias conjuntistas traen sin cuidado al común de los profesores de lógica y a la mayoría de los filósofos que adoctrinan sobre las cuestiones lógicas, en suma: al *Collegium logicum* en corporación[12].

De todo lo anterior se pueden extraer tres conclusiones: 1/ A principios del s. XX hay varias tradiciones y programas que comportan otras tantas maneras más o menos distintas de entender y de emplear la lógica. Algunas de estas variantes tienen que ver con el nuevo ámbito de la lógica «simbólica» o «matemática» o «exacta» o «logística» —nombres para un lugar todavía

[12] La inercia de los tópicos tradicionales da lugar además a otro aspecto digno de mención: el de la pervivencia de restos del mundo antiguo en el mundo nuevo. E.g., en 1929 todavía se recoge la doctrina de la correspondencia entre la comprensión y la extensión del concepto en unos «fundamentos lógicos y epistemológicos» previos a la exposición de la *Theoretische Logik* de Hilbert y Ackermann (1928); vid. W. Brand y M. Deutschein (1929), *Introducción a la filosofía matemática*, Madrid: Revista de Occidente, 1930, pp. 11-88.

incierto en los mapas académicos de la época[13]. 2/ Según todos los visos, ninguna de esas variantes de modernización de la lógica puede arrogarse en exclusiva la fundación de la lógica moderna: no ha sido hija de una sola madre. 3/ El largo y accidentado proceso de generación y constitución de la lógica moderna no es una revolución «gestáltica», no reviste la forma de un movimiento compacto y lineal de sustitución del antiguo régimen de «*la* lógica tradicional» por el nuevo régimen de «*la* lógica matemática».

El desplazamiento de la(s) lógica(s) tradicional(es) se irá produciendo en un largo proceso con varias fases y vicisitudes, por ejemplo: la incursión de la lógica algebraica en el campo de la lógica y la semiótica tradicionales; la promoción del nuevo campo de las lógicas matemáticas en el que concurren programas logicistas, nociones conjuntistas, cuestiones de método y de estructura deductiva; la ascensión de la teoría russelliana de los tipos como sistematización del nuevo campo lógico-matemático y primera formación definida de la lógica moderna; en fin, la instauración de la lógica estándar, una variante restringida dentro de ese contexto, cuya circunscripción habría sido imperceptible —y cuya fortuna habría parecido además harto improbable— a la luz de la situación reinante a principios de siglo. La lógica que hoy se enseña en 1° de Filosofía no llegará a tener plena conciencia de sí misma, para luego pasar a hacerse dueña del terreno, hasta los años 30-50.

3. Movimientos de sístole: hacia una lógica estándar

El calificativo de «estándar» responde justamente a esta condición institucional de nuestra lógica clásica de primer orden: desde mediados de siglo y por regla general, es la base primordial de aprendizaje de quienes se inician en la lógica[14] y constituye un cuerpo de nociones, métodos y resultados que se dan por consabidos entre los profesionales de la disciplina, aunque esta hegemonía escolar no la haya convertido, por cierto, en la única lógica viable,

[13] Durante la última década del s. XIX y los primeros años del XX, los enterados que oían la expresión «lógica simbólica» tendían a pensar en gente como Boole, Peirce o Schröder; los que oían «lógica matemática», en Peano y su escuela; «lógica exacta» fue una denominación avanzada por Schröder y asumida por el círculo de Peirce, e.g. por C. Ladd-Franklin, para denotar las inflexiones y los desarrollos que el propio Peirce y Schröder venían introduciendo en el programa inicialmente booleano; el término «logística» se propuso en el Congreso Internacional de Filosofía de 1904, a partir del cálculo aritmético. Pero todas estas expresiones no dejaban de resultar un tanto equívocas. Por ejemplo, la expresión inglesa «mathematical logic» había sido introducida por A. de Morgan en 1859 en el sentido genérico de una vaga asociación con el álgebra y, casi medio siglo más tarde —como Couturat hacía notar— esta misma denominación, «lógica matemática», podía significar tanto una lógica matematizada a la manera booleana como una lógica de la matemática en la línea de Peano; «logística», en fin, adquiere un sentido preciso en el contexto del «método logístico» de A. Church (1944), *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton: Princeton University Press, 1956 edic. rev., § 07, pp. 47-58.

[14] Hay incluso una declaración programática al respecto en las «Guidelines for logic and education» recientemente elaboradas por el llamado «Committee on Logic and Education» de la Asociación de lógica simbólica, en *The Bulletin of Simbolic Logic*, 1/1 (1995): 4-7.

reconocible en principio o practicada de hecho. Sin embargo, todavía sigue sirviendo de espejo o de referencia para la identificación habitual de otras variedades del análisis lógico contemporáneo, incluidas algunas lógicas que se consideran «no-clásicas» o se erigen en alternativas o rivales suyas.

En una caracterización más «interna», pero tampoco demasiado apurada, nuestra lógica estándar presenta rasgos como los siguientes:

(i) Su conformación lingüística comporta una gramática recursiva, que determina el conjunto numerable de las fórmulas enunciativas pertenecientes a su lenguaje, y la construcción en paralelo de una semántica, que determina las condiciones de asignación de valores veritativos y de interpretación en una estructura conjuntista. Ambas dimensiones envuelven ciertos supuestos, e.g. una demarcación expresa entre términos lógicos y no-lógicos; la adopción de un principio composicional y de un régimen veritativo-funcional de evaluación de las fórmulas enunciativas; una especificación de las funciones de interpretación y de designación en un dominio o «universo» poblado por individuos. La construcción de una y otra dimensión, siendo ambas en principio independientes, no deja de ser correlativa de modo que —parafraseando a Quine—, la lógica suba a la caza de la verdad por las ramas de la gramática. A los supuestos se añaden algunas otras restricciones características, e.g. el régimen de evaluación es bivalente; las expresiones del lenguaje son finitarias —no hay cadenas de símbolos bien formadas de longitud infinita—; los cuantificadores sólo ligan variables individuales, dentro del ámbito circunscrito a los lenguajes de primer orden.

(ii) Su conformación sistemática también discurre en las dos dimensiones apuntadas, pero ahora una está dirigida a la determinación formal y efectiva de la idea de deducibilidad en el sistema y la otra a la determinación de conceptos semánticos como el de consecuencia lógica. El sistema es susceptible de presentaciones diversas (e.g. axiomática, secuencial, arboriforme), pero todas ellas envuelven algunos supuestos típicos. Así, se supone que una fórmula α es *deducible* de un conjunto cualquiera de fórmulas Γ en un sistema S si hay una serie finita de pasos pautados por las reglas de deducción de S que parte de Γ y concluye en α —cuando Γ es el conjunto vacío de fórmulas (premisas), se dice que α es una tesis de S (es decir un axioma o un teorema de S)—; como las reglas de deducción son contadas y finitarias y los axiomas —si S es axiomático— pueden numerarse, siempre cabe comprobar si una serie de fórmulas es una deducción en S y el conjunto de sus tesis es efectivamente numerable. También se pretende que, siendo S un sistema cerrado con respecto a la deducibilidad —si α es deducible de S, α pertenece a S—, esta relación no sea trivial, en el sentido de que no toda fórmula del lenguaje de S sea deducible como una tesis de S; pretensión que se encargará de probar una demostración de la consistencia del sistema. El concepto de consecuencia lógica acusa, por su parte, la marca de un tratamiento semántico conjuntista: se supone que una fórmula α se sigue *lógicamente* de un conjunto de fórmulas Γ —posiblemente infinito— si y sólo si no hay estructura en la que todas y cada una de las fórmulas de Γ sean verdaderas y α resulte falsa o, dicho en otras palabras, si y sólo si todo modelo de Γ es un modelo de α. También se asumen las características clásicas de esta relación, en particular las de ser reflexiva, transitiva y estable o monótona.

(iii) La disposición característica del entramado estándar distingue dos niveles o estratos sistemáticos: el básico y autónomo de la lógica primaria (o de proposiciones), donde obran como términos lógicos los conectores veritativo-funcionales; el de la lógica general (o teoría de la cuantificación), articulado sobre el anterior, donde los operadores lógicos son los cuantificadores universal y existencial —con el suplemento habitual de la identidad.

La lógica estándar ha sido un producto histórico complejo y delicado —aunque nadie lo diría a juzgar por la naturalidad con que suele presentarse en los libros de texto. Cabe recordar, sin ir más lejos, cómo se han formado los dos estratos o niveles constituyentes recién mencionados. Veamos, por ejemplo, el caso de la lógica primaria. Según el célebre estudio histórico de £ukasiewicz (1934, 1935), la moderna lógica proposicional aparece de forma súbita y casi perfecta en Frege 1879, *Begriffsschrift*[15]. Convengamos en que así es por lo que se refiere a su planteamiento veritativo-funcional y a su sistematización axiomática inicial —aunque no represente «una lógica» o un ámbito sistemático singularmente distinguido dentro del programa fregeano de rigorización de la deducción. Ahora bien, en 1879 ya existían otras dos versiones del análisis lógico en este campo de las proposiciones: la propuesta como una interpretación subsidiaria del álgebra simbólica de Boole (1847, 1854) y la avanzada por H. MacColl (entre 1877 y 1878), que vindicaba el carácter primordial y autónomo de este ámbito centrado en torno a una noción de implicación necesaria entre «enunciados variables». En 1880 aparecía otra versión de Peirce, donde la autonomía de la lógica proposicional se inspiraba en el análisis de esquemas argumentales y se fundaba en la prioridad de una relación o forma implicativa, capaz de cubrir tanto el condicional material como la inferencia ilativa y por añadidura capaz de asimilar la cópula entre términos (e.g. silogísticos) a esa misma forma de «implicación» entre proposiciones; cinco años más tarde, esta versión presentaba cierta sistematización deductiva interna y un procedimiento reductivo de resolución veritativa —comparable a las conocidas variantes de resolución de Los métodos de la lógica de Quine (1959, 1972[3]), I, §7. La versión booleana, una vez depurada de algún inconveniente técnico y de adherencias —e.g. la referencia al tiempo en que una proposición es verdadera o falsa, introducida en 1854—, tenía la virtud de su sencillez resolutiva. Las de MacColl y Peirce se movían además en torno a unos puntos lógicamente sensibles por entonces, como la implicación y la inferencia. Estando así las cosas, cabe ingenuamente pensar que la versión fregeana se impuso

[15] Hay varias traducciones españolas, vid. e.g. «Contribución a la historia de la lógica de proposiciones» en L. Vega, ed. *Lecturas de Lógica*, Madrid: UNED, 1986[2], p. 123.

sobre estas otras opciones coetáneas porque era evidentemente la mejor. Pero la verdad es que los méritos de *Begriffsschrift* fueron durante largos años casi imperceptibles frente a los de la versión booleana que asumían, con ciertas modificaciones y ajustes operacionales, las corrientes lógico-algebraicas británica (Jevons, Venn) y germánica (Schröder), dominantes en el campo de la nueva lógica simbólica o exacta durante las últimas décadas del s. XIX y los primeros años del s. XX. Lo cierto es que esa «versión mejor» originariamente fregeana empezó a ganar puntos gracias a los buenos oficios de una cuarta versión relativamente afín pero «peor», propia de Peano, y a la mediación posterior de Russell, quien supo no sólo aprovechar el instrumental lógico, analítico y notacional, de Frege y de Peano, sino relacionarlo con la discusión del punto crítico ya mencionado de la implicación[16]. También aparecieron otras líneas de mediación y de transición, como la iniciada en Göttingen por Hilbert en 1905 en los términos de un cálculo de corte ecuacional —pero en la perspectiva de una fundamentación de la matemática que evitara los riesgos que habían dado al traste con la de Frege—, o como la ensayada por Zermelo en 1908 a partir de las contribuciones de Peano, Schröder y el propio Frege, en una dirección similar. La versión fregeana empieza a cobrar luego una ventaja sustancial merced al éxito de la «teoría de la deducción» de *Principia Mathematica*: es a la luz y a la sombra de *PM* como *Begriffsschrift* se torna en el hito decisivo de la historia de la lógica de proposiciones que cree ver £ukasiewicz. Pero esto no es todo: la buena opción acaba por imponerse gracias a los refinamientos teóricos y operacionales, y a la investigación metateórica que luego tuvieron lugar en el curso de la segunda década del s. XX. En ellos desempeñaron su papel tanto la perspectiva veritativo-funcional de la tradición Frege-Russell, como los intereses operacionales y combinatorios de la tradición algebraica —por ejemplo, es sintomático el relieve del método resolutivo de las formas normales conjuntiva y disyuntiva (que también propicia el trato con los cuantificadores). Amén de otros motivos emergentes que vendrían a suponer la fragmentación de las «Grandes lógicas» anteriores en parcelas sistemáticas —e.g. la investigación de la consistencia, completud e independencia de un sistema de la lógica de proposiciones, emprendida por Hilbert en un curso impartido en 1917-18 («Prinzipien der Mathematik und Logik»), sobre un formato que por cierto no era implicativo sino ecuacional, algebraico, semejante al que había avanzado antes, en 1905. En suma, creo que es por los años 1918-1920 cuando podemos reconocer sin reservas las señas de identidad de nuestra «lógica proposicional moderna», e.g. en la *Habilitationsschrift* de Bernays (1918) en Göttingen y en la tesis doctoral de Post (1920) en Columbia, ambas independientes entre sí. Estas señas incluyen tanto la distinción expresa entre resultados teóricos —dentro del sistema— y metateóricos —acerca del

[16] Cf. (1903), *The Principles of Mathematics*, §§ 15-16, 37-45, y (1906), «The theory of implication», *American Journal of Mathematics*, 28: 159-202, artículo del que Russell transcribe largos pasajes en la «teoría de la deducción» de *Principia Mathematica*.

sistema—, como la prueba de ciertas propiedades metalógicas básicas del sistema proposicional estudiado: la adecuación funcional [Post], la consistencia en virtud de una condición hereditaria [Hilbert, Bernays, Post], la suficiencia y la completud sintáctica [Hilbert, Post], la completud semántica [Bernays], la decidibilidad [Bernays] o efectividad [Post], la independencia [Bernays][17]. En el curso de los años 20 y 30, los trabajos de los lógicos polacos de entreguerras sobre la teoría de la deducción de *PM*, así como su consideración de variantes sistemáticas más o menos afines, fijarán el perfil hoy familiar de la lógica proposicional moderna[18]. En 1935 Tarski establece que cualquier sistema proposicional que cumpla ciertas condiciones generales, sólo admitirá una extensión consistente y completa, a saber: el sistema bivalente de la lógica clásica. Por lo demás, la misma década asiste al giro desde los sistemas axiomáticos hacia los sistemas de reglas de «deducción natural» y de secuentes (Jaśkowski 1934; Gentzen 1934), en una perspectiva congruente con el papel reservado a la lógica a medida que avanza el siglo: el de oficiar no ya como la «Teoría» —o cuerpo de verdades o de leyes— fundamental o más general, sino más bien como una lógica subyacente en las demostraciones y teorías matemáticas —un sistema de condiciones y de reglas estructurales de las relaciones de deducibilidad y «teorematicidad».

El segundo componente antes mencionado, nuestra teoría de la cuantificación de primer orden, muestra una evolución análoga, aunque su desarrollo haya sido algo más lento y mucho más complicado. Me limitaré a unas alusiones telegráficas; la historia de la teoría de la cuantificación —a diferencia de la de la lógica primaria— viene siendo objeto de atención desde los años 70 y abunda la literatura sobre sus diversos aspectos y vicisitudes[19].

En la década de 1880 y aparte de la ligadura de variables de argumentos (objetos de funciones o funciones de funciones) que propone la notación de Frege (1879), hay otras dos maneras de tratar la cuantificación lógica. Uno de estos procedimientos, desarrollado por Peirce a partir de 1880, trabaja con la cuantificación de índices de relativos y de 1883 en adelante adopta los cuantificadores existencial y universal 0 ('Σ' y 'Π', con índices suscritos

[17] Vid. P. Bernays, «Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der 'Principia Mathematica'», *Mathematische Zeitschrift*, 25 (1926): 305-320; en esta publicación muy posterior, Bernays silencia la conexión de su *Habilitationsschrift* con el curso de Hilbert 1917-18 y omite su estudio inicial de otros sistemas que descansan en reglas de deducción antes que en axiomas. E. L. Post, «Introduction to a general theory of elementary propositions», *Amer. J. of Mathematics*, 43 (1921): 163-185 [trad. y notas en L. Vega (ed.), *Lecturas...*, 1986^2, pp. 317-378]; Post revela sus fuentes de inspiración: la tradición algebraica de Schröder, la veritativo-funcional de *PM* y la sintáctico-calculista de C. I. Lewis.

[18] Del grado de estandarización alcanzado ya en la década de los 20 dan idea los trabajos del seminario de Varsovia (£ukasiewicz, Tarski, Lindenbaum, Sobociński, Wajberg). Vid. e.g. el informe presentado conjuntamente por £ukasiewicz y Tarski «Untersuchungen über den Aussagenkalkül», *Comptes rendues des séances de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*, 23 (1930), cl. iii, pp. 39-50. Sobre el ambiente creado, vid. Woleński (1995).

[19] Cf., por ejemplo, los trabajos de J. van Heijenoort (1976), W. D. Goldfarb (1979), I. Grattan-Guinness (1981) y (1997), G. H. Moore (1988) y (1997), I. H. Anellis (1991), J. W. Dawson (1993). Para más detalles y referencias, vid. L. Vega Reñón (1996), pp. 211 ss.

en calidad de variables ligadas), como prefijos respectivamente de sumas y productos lógicos booleanos, posiblemente infinitos, referidos a un universo dado de discurso[20]. Esta notación y su inflexión cuantificacional llegarán a tener, por mediación de Schröder, notables usos y servicios no sólo combinatorios sino «semánticos» e informalmente metateóricos unas décadas más tarde (e.g. en las líneas de Löwenheim 1915 y de Skolem 1920 ss.). Otro tipo de versión fue desarrollado por Peano de 1888 en adelante al hilo de la noción de abstracción de clase y de la simbolización de construcciones del tipo «los x tales que...», al margen de la idea de abstracción introducida por Frege en 1884. El siguiente paso capital suele verse en la nueva inflexión de la tradición algebraica del cálculo de relativos que supone Löwenheim 1915: aquí han visto algunos la primera referencia específica a unas fórmulas de primer orden. Su resultado más notorio es: si una ecuación o fórmula numérica finitaria vale para todo dominio finito, pero no es válida, entonces no será válida en ningún dominio infinito numerable; así pues, el resultado implica la consideración de diversos dominios y, al parecer, de una lógica de primer orden. Pero aunque el teorema verse sobre fórmulas de este tipo, Löwenheim se expresa en términos de segundo orden, en el marco del sistema lógico de Schröder que también se mueve en este plano superior y sin perder de vista las expansiones infinitarias de sus fórmulas numéricas. De ahí que la primera manifestación de unas señas inequívocas de lo que hoy entendemos por un lenguaje de primer orden no pueda quizás remontarse más atrás del ya citado curso impartido por Hilbert en Göttingen (1917-18). En todo caso, creo que si hemos situado por los años 1910-20 la definición cabal de nuestra lógica de proposiciones, debemos esperar a la década siguiente para asistir a una identificación y constitución pareja de nuestra lógica de primer orden. Skolem anuncia a principios de los 20 la buena nueva: la lógica de primer orden (la teoría de la cuantificación elemental y finitaria) es todo lo que hay en el ámbito propio de la lógica matemática —un anuncio con visos de provocación habida cuenta no sólo de la existencia de otras alternativas, como la teoría de conjuntos de Zermelo, sino de la relativa hegemonía de *PM* y de la teoría de los tipos por aquel entonces. Luego, no sin atravesar por vicisitudes que descartan la idea de un progreso lineal de autoconstitución, se perfila una estructura estratificada interna del campo de la lógica, abierto al horizonte de la teoría de los tipos, como la elaborada en Hilbert y Ackermann (1928) *Grundzüge der theoretischen Logik*: aquí hace la lógica «restringida» de primer orden su presentación pública impresa. Explosiona a partir de entonces su madurez metalógica, e.g. con las tesis doctorales de Herbrand y Gödel (1929), hasta desembocar, digamos, en la de Henkin (1947). Son los celebrados resultados de este periodo —e.g. los metateoremas de la década de los 30 en torno a sus posibilidades (com-

---

[20] No era, por lo demás, la única opción disponible para la tradición algebraica: Poretskii en 1884 también introduce la cuantificación en su lógica algebraica considerando las que llama «cualidades» como predicados monádicos, vid. Anellis y Houser (1988).

pletud, compacidad) y limitaciones (indecidibilidad); la reelaboración de la tradición metalógica de Löwenheim-Skolem a Gödel por parte de Henkin—, los que deparan a la lógica de primer orden una identidad precisa como teoría del análisis lógico. Y serán las virtudes ligadas a su carácter elemental y a su eficacia como codificación formal de la deducción, las que harán de ella la vía preferida de investigación en campos antes reservados a sistemas del alcance de *PM*, e.g. en el campo de las teorías axiomáticas de conjuntos.

Recordemos algunos de los resultados que han determinado su identidad y su eficacia. Conforme a Gödel 1930, si S es un sistema lógico de primer orden y α es una fórmula enunciativa cualquiera de su lenguaje, entonces o bien α es refutable —su negación es derivable de S—, o bien α es satisfacible (tiene un modelo) en un dominio infinito numerable; así pues, toda fórmula válida —cuya negación es insatisfacible— es derivable de S; con esta completud o suficiencia se relacionan otros dos resultados relevantes: el de Löwenheim-Skolem —en el sentido de que o α es insatisfacible o es satisfacible en un dominio infinito numerable como el de los números naturales—, y el de compacidad —en el sentido de que si Γ es un conjunto infinito numerable de fórmulas de primer orden, Γ es satisfacible si y sólo si cada uno de los subconjuntos finitos de Γ es satisfacible. A partir de Gödel, tanto la distinción entre el plano sintáctico de la derivabilidad y nociones asociadas, y el semántico de la satisfacibilidad y nociones asociadas, como sus correlaciones mutuas, vendrán a demarcar el ámbito propio de los sistemas clásicos de primer orden. Henkin 1949 articula y generaliza las correlaciones conocidas entre *derivabilidad* y *consistencia* —α es derivable de Γ si el conjunto $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ es inconsistente—, *consecuencia* y *satisfacibilidad* —α es consecuencia de Γ si el conjunto $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ es insatisfacible—, *derivabilidad* y *consecuencia* —α es derivable de Γ si y sólo si α es consecuencia de Γ—; añade la correspondencia entre *consistencia* y *satisfacibilidad* en un dominio numerable, de donde se sigue la existencia de un modelo canónico numerable —si un sistema lógico de primer orden S es consistente, tiene un modelo numerable, y si S tiene un modelo infinito tiene un modelo infinito numerable. De las correlaciones entre el plano sintáctico de la derivabilidad y el semántico de la consecuencia, se desprende, en fin, otra virtud notable de los sistemas lógicos de primer orden: su *finitud*, en el sentido de que si α es consecuencia de un conjunto Γ posiblemente infinito, α es consecuencia de un subconjunto finito Δ de Γ; luego, por completud de S, α es derivable o deducible de Δ; así pues, toda consecuencia de un sistema lógico de primer orden es, en principio, accesible deductivamente en el sistema. Por contra, los sistemas de orden superior, como la teoría de los tipos de *PM* o afines, son no sólo incompletos sino incompletables (Gödel 1931), de modo que el conjunto de sus consecuencias ya no es accesible. Pero no todo son parabienes dentro del recinto de la lógica de primer orden, pues sus condiciones expresivas también conllevan ciertas limitaciones de su capacidad de análisis: ningún conjunto de fórmulas de primer orden es satisfacible precisamente en dominios finitos y si Γ es un conjunto cualquiera de fórmulas de primer orden satisfacible en un dominio infinito, entonces es satisfacible en un dominio infinito de cualquier cardinalidad[21], por consiguiente la lógica de primer orden no puede dar cuenta exactamente de una estructura categórica como la de los números naturales —lo cual es perfectamente viable en una lógica de segundo orden[22]. Una limitación más llamativa es su *indecidibilidad* (establecida de forma independiente por Turing y Church en 1936): marca una diferencia entre la teoría de la cuantificación y la lógica proposicional —que dispone de diversos métodos de decisión aplicables a cualquier fórmula de su lenguaje— y, además, contraviene las expectativas de control que podrían alimentarse al calor de las virtudes anteriores, en particular la accesibilidad deductiva. La lógica de primer orden resulta indecidible en el sentido de que no hay un procedimiento finito efectivo —o un algoritmo mecánico— que determine, en general, si una fórmula cualquiera es válida o es inválida[23]; aunque no falten varias clases de fórmulas que se prestan a una determinación concluyente en tal sentido. Pero la llave que cierra una puerta puede abrir otras y, en efecto, el desarrollo del aparato técnico que da al traste con los ideales de control efectivo y de resolución lógica universal es el que da alas a la naciente teoría de la computabilidad. Si a los resultados anteriores sumamos las nuevas vías de investigación abiertas en la prodigiosa década de los 30 —además de la teoría de la computabilidad, la semántica de Tarski o el análisis estructural de Gentzen, por ejemplo—, no nos extrañará que esta lógica clásica de primer orden, al tiempo que define sus señas de identidad, se vaya convirtiendo al mediar el siglo en el espejo de la lógica matemática moderna y sus propiedades metalógicas pasen a representar condiciones o desiderata de las candidatas a ingresar en la nueva corporación de las *lógicas*. Años más tarde, los resultados de Lindström 1969 completan esas señas de identidad con la adscripción de un domicilio, un territorio propio dentro de la vasta heredad secular de las teorías lógico-matemáticas: el acotado como la clase de equivalencia de todas las teorías de la cuantificación de primer orden en las que se cumplan la versión descendente de Löwenheim-Skolem y la compacidad, de modo que las lógicas o conjuntos de fórmulas que se atengan a estas condiciones u otras equivalentes no admiten mayor extensión que la cubierta por la cuantificación clásica. Ahora bien, para entonces la lógica clásica de primer orden ya había

[21] De la generalización del resultado de Löwenheim-Skolem se pueden obtener una versión ascendente —si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito M, tiene un modelo infinito M' que es a su vez un supermodelo de M—, y una versión descendente —si una teoría de primer orden tiene un modelo infinito M, tiene un modelo infinito numerable M* que es a su vez un submodelo de M.

[22] Vid. los trabajos recogidos en la compilación de S. Shapiro (ed.), *The limits of logic. (Higher-order logic and the Löwenheim-Skolem theorem)*. Aldershot: Darmouth, 1996.

[23] Dicho con más precisión, el conjunto de sus fórmulas válidas es semi-decidible: hay un procedimiento efectivo para determinar todas las fórmulas que pertenecen a este conjunto (son justamente las tesis deducibles), pero no para determinar todas las que no le pertenecen.

adquirido una relativa hegemonía institucional y constituía el núcleo sistemático del cultivo de la disciplina[24].

Llegados a este punto, convendría —como en el apartado anterior— resumir lo dicho en algunas conclusiones. Valgan las tres siguientes: 1/ La constitución de la lógica moderna a través del desarrollo de la lógica clásica de primer orden no ha sido el cumplimiento de un destino anunciado o previsible desde un principio. 2/ En el curso del proceso de constitución se fueron produciendo desplazamientos sucesivos mientras quedaban al margen otras opciones posibles[25]. 3/ Nuestra lógica estándar adquirió su privilegiado estatuto no sólo en razón de sus virtudes «internas», lógicas y metalógicas, ni sólo en función del consenso creado en torno a su simplicidad y su rendimiento metódicos, sino también a impulsos de otros motivos «externos», socioinstitucionales e interdisciplinarios.

¿Cómo se refleja la lógica del siglo XX en el espejo de la lógica estándar? Creo que a través suyo ha adquirido sesgos y tonalidades que la distinguen de tradiciones anteriores. Un sesgo característico es el inducido por el protagonismo de un concepto formal y efectivo de deducibilidad que (1) envuelve la consideración de teorías lógicas formalizadas, (2) se rige por reglas estructurales en ese contexto y (3) es un procedimiento finito y decisorio de acceso a conjuntos posiblemente infinitos de consecuencias. Con (1), sin ir más lejos, no sólo se reduce sustancialmente el campo del análisis tradicional de la inferencia, sino que objetivos tradicionalmente prioritarios, como la convalidación o invalidación de la argumentación en general pasan a ser productos, cuando no desechables, derivados. Por lo que se refiere a las nuevas tonalidades adquiridas, baste mencionar: (a) Su papel como lógica subyacente en las demostraciones y teorías matemáticas presuntamente básicas (e.g. aritmética, teoría de conjuntos, álgebras[26]), de la que se esperan diversos servicios: no sólo formales y reductivos, en la línea de las «teorías de la demostración» más o menos asociadas al programa de Hilbert, o metateóricos, en el sentido convencional de determinar la capacidad relativa

[24] También representaba ya la lógica formal de referencia en otros medios más o menos próximos como ciertas filosofías del lenguaje y de la ciencia. Ni que decir tiene que en su fortuna, difusión y reconocimiento como lógica estándar influyen, además de los motivos «internos» que hemos visto, otros factores —digamos— «externos» que ahora no puedo comentar como es debido: e.g., entre otros, el influjo de algunos núcleos académicos como Göttingen o como los círculos polacos de entreguerras, en especial la «escuela Lvóv-Varsovia»; la diáspora de los lógicos centroeuropeos a finales de los años 30 y principios de los 40; la recepción y asunción de la nueva lógica en diversos medios filosóficos, en particular los círculos relacionados con el neopositivismo lógico y la filosofía analítica.

[25] Por ejemplo, a la popularidad inicial de las tradiciones lógico-algebraicas sucedió la influencia de *Principia Mathematica*, a partir de la segunda década, y a ésta sucedió a su vez la ascensión y la hegemonía de la lógica de primer orden en el curso del segundo tercio del siglo. Al margen de este cauce central de desarrollo fueron quedando opciones infinitarias o de orden superior, sistematizaciones distintas —como la propuesta por Leśniewski entre 1927 y 1931—, teorías de la demostración rivales —como la intuicionista—, entre otras alternativas.

[26] La lógica matemática nunca ha sido la lógica de *todas* las matemáticas, ni siquiera en el marco programático de las «grandes lógicas» (Frege, Schröder, Russell).

de diversas teorías o métodos deductivos, sino heurísticos, en orden a la investigación de estructuras matemáticas. (b) Una conciencia de su constitución no sólo sistemática, sino *teórica* en el sentido de envolver, cuando menos, una concepción particular de la relación de deducibilidad y, en general, del análisis lógico —en palabras de Church (1944, 1956), § 1, «la adopción de un lenguaje formalizado envuelve la adopción de una teoría del análisis lógico». (c) Su propia colocación en un plano metateórico en general, metalógico en particular, de trabajo e investigación. En razón de (a)-(b), la lógica moderna se distancia de las concepciones que hacían de ella una ciencia filosófica —un cuerpo de verdades sobre el mundo, el lenguaje o el conocimiento—, así como de las tradiciones más o menos comprometidas con alguna suerte de historia natural del entendimiento o de destino trascendental de la razón. En el plano de (c), en vez de suponer —con arreglo a un tópico tradicional— que la lógica es doblemente racional pues, por una parte, procede conforme a los dictados de la razón y, por otra, puede reflexionar sobre las condiciones y operaciones de la razón misma, se supone que la lógica consiste no sólo en análisis metalingüísticos de textos o argumentos deductivos, sino ante todo en análisis metateóricos de las condiciones, posibilidades y limitaciones de (clases de) teorías deductivas, incluidas —con arreglo a (b)— las teorías lógicas mismas.

4. Movimientos de diástole: las lógicas más allá o al margen del espejo

En la conformación de la lógica moderna también han desempeñado su papel otras lógicas más o menos diferentes de la lógica clásica de primer orden. Cierto es que algunas de ellas han venido a discurrir a través de este espejo, como réplicas o como extensiones de la lógica estándar —pueden verse muestras al respecto en la llamada «tradición sintáctica» de la lógica modal, desde Lewis 1918 hasta von Wright 1951. Pero otras han ido más allá o se han abierto otros caminos —sería el caso de las tradiciones «algebraica» y «modelista», por seguir con el ejemplo de las lógicas modales. Hay además sistemas divergentes desde un principio —baste recordar el programa intuicionista— y hoy no faltan, en fin, ensayos de lógicas y análisis lógicos dispuestos a investigar como la aventurera Alicia lo que hay «al otro lado del espejo» de la lógica estándar: el muestrario, desde las lógicas no monótonas hasta algunas variantes dentro de la informe «teoría de la argumentación», es amplio y variopinto.

La historia de la génesis y desarrollo de las lógicas no estándar en general aún está por escribir. Disponemos de apuntes más o menos esquemáticos sobre variaciones en algunos campos de trabajo —e.g. lógicas modales, lógicas multivalentes, lógicas intuicionistas—; contamos con informes y boletines bibliográficos que siguen el curso de la investigación en ciertas áreas —e.g.

en lógica de la demostrabilidad, en lógicas difusas o borrosas[27]. Se han escrito, en suma, memorias y «biografías», pero no una historia. Y no será fácil escribirla, tanto por falta de la caracterización adecuada y comprensiva que nos sirva de guía[28], como por inexistencia de un cauce central de evolución o de procesos convergentes de desarrollo como los que hoy podemos reconstruir retrospectivamente a propósito de la lógica estándar. De hecho, en la gestación de algunas de esas lógicas durante la primera mitad del siglo han influido factores tan heterogéneos como los siguientes: [a] nociones dispares contenidas en solución en las discusiones de finales del s. XIX y principios del s. XX, por ejemplo en torno a las ideas de implicación y de inferencia; [b] tradiciones diversas, por ejemplo la que vindica una lógica intensional frente a la lógica extensional del álgebra de clases y de las funciones veritativas; [c] programas alternativos de fundamentación y análisis de las matemáticas. Una consecuencia de esta complicada situación es la dificultad de señalar con precisión el lugar y la fecha de nacimiento de la idea misma de «*otra* lógica» o de «*las* lógicas». Hay, creo, dos puntos críticos al respecto: (i) la percepción de las variantes lógicas alternativas entre sí, o a una lógica de referencia, como un buen motivo para poner en cuestión la existencia de una lógica universal y uniforme —de una suerte de «destino de los humanos en lo formal», según decía Alfredo Deaño—; (ii) el reconocimiento de una lógica como una teoría particular y viable del análisis lógico. Con arreglo a (i), las alternativas lógicas son algo más que meras aproximaciones a, o desviaciones de, la naturaleza genuina de la Razón o del Discurso; con arreglo a (ii), son otra cosa. A la luz de estos criterios, la idea cabal de unas «lógicas alternativas» es una idea de la lógica moderna, una idea que deviene explícita ya bien avanzado el primer tercio del siglo XX[29].

[27] Sobre los esquemas usuales en la historia de la modernas lógicas modales y multi(poli)valentes, vid. Vega Reñón (1996), pp. 247-251; el «Historical Appendix» de M.J. Beeson, *Foundations of constructive mathematics*, Berlin/Heidelberg/New York: Spinger, 1985, pp. 417-438, es un lúcido bosquejo histórico de la lógica intuicionista; un reciente informe sobre la lógica de la demostrabilidad se encuentra en el «Afterword» de J. P. Burgess a G. Boolos, *Logic, logic, and logic* (R. Jeffrey, ed.), Cambridge (MA): Harvard University Press, 1998, pp. 415-424; el desarrollo de las lógicas difusas puede seguirse puntualmente desde mediados de los 80 al hilo de inventarios bibliográficos como los que van apareciendo periódicamente en la revista *Fuzzy Sets and Systems*, 18 (1986), 30-33 (1989), etc.

[28] En esto no hemos progresado mucho desde los 70. Por ejemplo, el que espere grandes cosas de la nueva edición y ampliación de S. Haack (1974) en su reciente *Deviant logic, fuzzy logic: beyond the formalism*, Chicago/London: The University of Chicago Press, 1996, se verá decepcionado. Por lo demás, persiste la afición «naturalista» a la confección de mapas y catálogos: pero es instructivo comparar el mapa de N. Rescher (1968) con el catálogo electrónico de P. Suber (1997: www.earlham.edu/~peters/nonstbib.htm), para hacerse una idea de la proliferación de las lógicas no estándar en los últimos treinta años.

[29] Por ejemplo, Lewis (1932) «Alternative systems of logic» [trad. en L. Vega, comp. *Lecturas de Lógica I*, Madrid: UNED, 19862, 247-271] considera la posibilidad de diversos sistemas lógicos de relaciones de consecuencia irreducibles entre sí, pero todos ellos parejamente coherentes y cada uno capaz de justificarse en sus propios términos. Quizás puedan apreciarse en algún otro —o en el propio Lewis (1912-1918)— unos escarceos previos. Ni que decir tiene que es anterior la idea de variantes analíticas o filosóficas en lógica: por ejemplo, desde mediados del s. XIX se

Con todo, voy a aventurar un esquema del desarrollo de *las* lógicas que comprende tres fases principales en correspondencia con tres tendencias dominantes o características: Una *fase 0*, entre finales del s. XIX y principios del s. XX, cuando no parece discutirse la existencia de una lógica universal, aunque se reconozcan nidos de anomalías —e.g. las ideas de implicación y de inferencia— y diversas variantes programáticas que tienden a interpretarse bien como variaciones más o menos acertadas en torno a los principios lógicos, bien como expresiones más o menos perspicuas y logradas de la lógica; son tiempos de inquietud antes que mudanza. Una *fase 1*, entre los años 30 y 70, en la que se desarrollan lógicas alternativas de diverso signo —complementarias, divergentes, rivales—, por comparación o por contraste con una lógica de referencia —al principio *PM*, luego la lógica estándar. Una *fase 2*, más propia de los años 80 y 90, en la que no sólo aumenta la tendencia hacia la diversificación, sino que aparecen dos fenómenos notables ligados a investigaciones «al otro lado del espejo»: (1) los ámbitos de aplicación empiezan a decidir sobre la índole de la lógica adecuada —a los casos ya mencionados del análisis de la inferencia no monótona y del análisis del discurso argumentativo podrían sumarse otros, como la evolución del tratamiento de la vaguedad en términos de conjuntos borrosos—; (2) la promoción de «nuevas ciencias» en la periferia de la lógica o en sus encrucijadas fronterizas con otras disciplinas —a tenor del manifiesto de van Benthem (1997)[30], de la interfaz multidisciplinaria entre lógica, lenguaje, información, ciencias cognitivas y de la computación, puede nacer una nueva ciencia de la información. A la luz de estos desarrollos, está claro que las tonalidades de la lógica moderna antes apuntadas adquieren una coloración tornasolada; por ejemplo, la condición y diversificación teórica (b) se acentúa —hasta el punto de que no es infrecuente que las presentaciones de lógicas no-estándar empiecen preguntándose «¿qué es una *lógica*?»—, mientras que (a), el papel de lógica subyacente en las teorías y demostraciones matemáticas, pierde parte del protagonismo que tenía en el segundo tercio del siglo en favor de una composición más coral del análisis lógico: clara señal es la creciente multiplicación de investigaciones bajo la rúbrica: «aplicaciones de instrumentos lógicos al análisis del discurso». Así pues, salta a la vista la dificultad de reducir a un planteamiento unitario —a la consabida pregunta por «*el* estado de *la* cuestión»— todos los problemas suscitados por las lógicas no estándar.

Bastará considerar un asunto capital: la determinación de la relación de consecuencia. He aquí, en principio, una preocupación distintiva de la lógica, siquiera sea porque una de sus tareas primordiales —no diré que la única ni, en todo momento, la principal— consiste en la convalidación e invalida-

habla de la «lógica india», de la «hegeliana» o incluso luego de una «lógica de los sentimientos», por contraste con el *corpus* lógico tradicional; pero esto poco tiene que ver con la idea moderna de sistemas o teorías «lógicas alternativas».

30 «Logic, language & information: the making of a new science?», *Journal of Logic, Language and Information*, 6/1 (1997): 1-3.

ción de argumentos. Esquematizando los argumentos deductivos en general como secuentes del tipo: Γ, luego α, donde α es la conclusión y Γ un conjunto de premisas, decimos que «Γ, luego α» es un argumento válido sólo si α se sigue de Γ; de modo que toda deducción válida descansa en alguna relación de consecuencia. Pues bien, ¿qué se entiende por una relación del tenor de «α se sigue de Γ»?. Más precisamente, ¿qué se entiende por «α se sigue *lógicamente* de Γ»? O, también, ¿cómo o por qué dicha relación es justamente una relación de consecuencia *lógica*? Éstas son preguntas no sólo familiares en historia de la lógica sino casi obligadas en filosofía de la lógica. Pero, además, las versiones del «seguirse de» y el análisis de relaciones de consecuencia han cobrado especial relieve en el marco actual de la discusión en torno a los sistemas y las teorías lógicas. Fue Tarski quien inició en el curso de los años 30 el estudio de sus dimensiones sistemático-deductiva, como «operación de consecuencia» sobre conjuntos de proposiciones, y lógico-semántica, en términos de «modelos». Hoy su caracterización sistemática se ha convertido en un punto primordial de la definición de (clases de) sistemas inferenciales y de sistemas deductivos como *lógicas*, según muestran los desarrollos de los años 80 y 90 bien en una línea estructural tarskiana, hoy clásica, o bien en otras líneas de exploración al otro lado de este espejo. Por añadidura, en torno a su caracterización semántica —«modelista»— se agita buena parte de la discusión actual sobre el concepto de consecuencia lógica[31].

Veamos, para empezar, el punto de la determinación de las teorías lógicas en el marco general de los sistemas inferenciales. Un planteamiento sumario puede ser el siguiente. Consideremos un sistema formal consistente en un conjunto de fórmulas F y una función *Cn* que transforma subconjuntos de F en subconjuntos de F. *Cn* es una operación de inferencia si el conjunto de las inferencias de un conjunto de fórmulas X comprende dicho conjunto X [i.e. si la operación es reflexiva o incluyente: $X \subseteq Cn(X)$]; diremos el par $<F, Cn>$ es un sistema llamaremos «cerrado» si cumple las condiciones de transitividad o de idempotencia [i.e. $Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$] y de monotonía o estabilidad [i.e. si $X \subseteq Y$, entonces $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$]. Y lo reconoceremos como un sistema *deductivo* si satisface además las condiciones de compacidad y finitud [i.e. si todo cuanto se infiera de X se infiere de los subconjuntos finitos de X: $Cn(X) \subseteq \cup\{CnY\text{: } Y \subseteq X$, siendo Y finito$\}$. Esta caracterización puede aplicarse a la relación de deducibilidad, $\vdash$, entre subconjuntos y fórmulas de F, de modo que [i] $X\cup\{\alpha\} \vdash \alpha$; [ii] si $X \vdash \alpha$, $X\cup Y \vdash \alpha$; [iii] si $X \vdash \alpha$ y $\{\alpha\}\cup Z \vdash \beta$, entonces

[31] Son ejemplos de esos desarrollos R. Wójcicki, *Theory of logical calculi (Basic theory of consequence operations)*, Dordrecht/Boston: Kluwer, 1988; J.P. Cleave, *A study of logics*, Oxford: Clarendon Press, 1991; los ensayos compilados en D. Gabbay, ed. *What is a logical system?* Oxford: Clarendon Press, 1994, se mueven en la perspectiva sistemática más general que comprende inferencias no monótonas. Por lo que concierne a la discusión del concepto de consecuencia lógica, el más notorio agitador ha sido J. Etchemendy, *The concept of logical consequence*, Cambridge (MA): Harvard University Press, 1990; sus ecos llegan hasta, por ejemplo, W.H. Hanson, «The concept of logical consequence», *The Philosophical Review*, 106/3 (1997): 365-409, una revisión que no tiene visos de ser concluyente.

$X \cup Z \vdash \beta$; (iv) si $X \vdash \alpha$, hay algún subconjunto finito $Y \subseteq X$ tal que $Y \vdash \alpha$. A su vez las condiciones (i), (ii) y (iii) son equivalentes respectivamente a los principios estructurales: identidad, atenuación y corte, de los sistemas de secuentes de tipo Gentzen (1935-36). Sobre esta base cabe construir sistemas *lógicos* o teorías lógicas de la consecuencia, e.g. mediante reglas de introducción y eliminación de los operadores usuales [conectores, cuantificadores] que determinan el «significado» o cometido deductivo de cada operador en el marco de la teoría de la deducibilidad que los principios y las reglas, en conjunto, configuran. Para evitar teorías triviales —donde cabe cualquier regla o donde cualquier fórmula resulta deducible—, las condiciones de introducción y eliminación deberán atenerse a ciertos requisitos como los de conservación y armonía. Los rasgos de reflexividad, transitividad, monotonía reflejan formalmente el perfil clásico de la relación de consecuencia o de seguirse-de; relación que, conforme al rasgo añadido de finitud, se supone accesible deductivamente. Pues bien, las variaciones de esos supuestos, en el plano de los principios estructurales o de las reglas, pueden comportar diversos tipos de *lógicas* alternativas. Por ejemplo, si la relación de deducibilidad reviste la forma $X \vdash Y$, siendo Y una adición o un conjunto disyuntivo de fórmulas, y se entiende en el sentido: «de X se sigue al menos un elemento de Y» —aunque no pueda saberse formalmente cuál o cuáles se sigan—, entonces nos vemos antes las llamadas «lógicas de conclusión múltiple» —una de cuyas variedades sería, según Gentzen, la propia lógica estándar. Otras variaciones resultan de restricciones de los principios estructurales, cuando X, Y, Z se toman no ya como conjuntos sino como listas de fórmulas susceptibles de permutación y contracción: dado $X(= \langle\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\rangle) \vdash \beta$, los elementos de X son permutables si se da $X'(= \langle\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3\rangle) \vdash \beta$; y dado $X(= \langle\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2\rangle) \vdash \beta$, los elementos de X son contraíbles si vale también $X'(= \langle\alpha_1, \alpha_2\rangle) \vdash \beta$. Las variaciones con respecto a alguna de las condiciones o principios estructurales dan lugar a las llamadas «lógicas subestructurales» y alcanzan a tener aplicaciones en diversas áreas interdisciplinares del análisis lógico, e.g. en lingüística, en ciencias de la computación, en ciencias cognitivas. Hay, por ejemplo, lógicas de la pertinencia («relevance logics») sin atenuación; lógicas sin contracción; lógicas lineales, sin atenuación ni contracción; lógicas de tipo Lambek, sin atenuación, ni contracción, ni permutación. En fin, la renuncia a la condición de monotonía abre un vasto horizonte de lógicas no monotónicas hacia el cual se encamina buena parte de las lógicas aplicadas en el presente trance del cambio de siglo. La cuestión sigue siendo, en todo caso, qué significa en este contexto la denominación común de *lógicas*. O, dicho en términos más generales, qué tienen que ver todos estas variaciones sistemáticas con la oscura noción de inferencia y con la relación crucial de seguirse-de.

Pasemos, entonces, a un planteamiento más franco y directo de este punto. ¿Qué entendemos por «α se sigue de Γ» o, más precisamente, por «α se sigue *lógicamente* de Γ»? Una dificultad inicial, ya detectada en las primeras escaramuzas con las lógicas alternativas (e.g. Lewis 1932, «Alternative systems of logic»), es el conflicto entre nuestras intuiciones o nociones «pre-lógicas» al respecto. Cabe reconocer que tales intuiciones son precipitados culturales y responden a variaciones históricas de las ideas sobre la lógica, así que nuestros conflictos no dejan de ser una larga herencia envenenada. El caso es que hoy nos movemos desde una concepción, digamos, *minimalista* de la relación de consecuencia lógica hasta una concepción *maximalista*, entre las que median distintas variantes. Según la concepción minimalista, «α se sigue de Γ» significa que el consecuente (o conclusión) α será verdadero siempre que lo sea el antecedente (o conjunto de premisas) Γ, de modo que la consecuencia se distingue por ser una relación preservadora o transmisora de la verdad del antecedente al consecuente —esta noción tiene un discurrir guadiana por la historia de la lógica desde Filón de Megara hasta nuestra lógica moderna[32]. Según la concepción maximalista, «α se sigue lógicamente de Γ» significa que, siendo α' y Γ' un consecuente y un antecedente cualesquiera de la misma forma lógica que α y Γ respectivamente, si Γ' fuera verdadero, entonces necesariamente α' sería verdadero —condición contrafáctica que descarta por improcedentes las reglas minimalistas del tenor de «una verdad necesaria se sigue de cualquier proposición» o «de una contradicción se sigue cualquier cosa» u otras por el estilo. Ahora se supone que la consecuencia lógica reúne, además de la virtud mínima anterior, las características de formalidad, necesidad y pertinencia ilativa. Esta caracterización también aparece y reaparece en diversos momentos, desde que despunta en el silogismo canónico de Aristóteles hasta nuestras lógicas de la pertinencia. Entre ambas concepciones se mueven las variantes que, además de la condición mínima de preservación/transmisión de la verdad, reconocen el carácter formal de la relación (e.g. conforme a la idea de «deducibilidad» de Bolzano), o su carácter necesario (e.g. la idea de «implicación analítica» atribuida a Crisipo), o su carácter necesario y formal (e.g. la idea de «consequentia» de Buridan o la de «implicación estricta» de Lewis). Por no hablar de las subvariedades que pueden perfilar a su manera estas características, e.g. con arreglo a si el consecuente se halla contenido de algún modo (formalmente, intensionalmente, noéticamente, etc.), o no, en el antecedente. Una cuestión latente en esta discusión es si hay garantías —y si las hay, cuáles son— de la ilación entre antecedente y consecuente, punto que nos llevaría desde la índole propia del «seguirse de» –desde su condición semántica u «ontológica»— hasta sus proyecciones inferenciales o cognitivas —«epistémicas»—; en esta línea de transición se dice, por ejemplo, que si α se sigue lógicamente de Γ, entonces la imposibilidad de que α sea falso si Γ fuera verdadero ha de ser reconocible a priori o en virtud de nuestra intelección de Γ. Por lo demás, el punto de calificar la relación en cuestión como

[32] Por ejemplo, según *PM*: «La propiedad esencial que requerimos de una implicación es esta: 'lo implicado por una proposición verdadera es verdadero'», (I, parte I, sec. A. En edic. *Principia Mathematica* to *56, Cambridge: Cambridge University Press, 1962, p. 94).

relación *lógica* no deja de prestarse a discusiones ulteriores. Por ejemplo, cabe acusar a ciertos tratamientos semánticos de no distinguir entre las implicaciones analíticas o las consecuencias materiales —e.g. del tenor de «la pared es roja; luego, no es incolora»— y las consecuencias lógicas, que se han de suponer formales o válidas en atención a la forma lógica de las proposiciones concurrentes —en otras palabras, una relación de consecuencia lógica media entre ciertas proposiciones dadas sólo si mediara igualmente entre cualesquiera otras proposiciones de la misma forma lógica que las dadas; un argumento sólo es válido si lo es todo posible argumento de la misma forma lógica. Confiando la determinación de la forma lógica de una proposición a los términos que se distinguen como lógicos en ella, cabría pensar en un criterio distintivo de sustitución: α es una consecuencia lógica de Γ si toda sustitución de las expresiones no lógicas que haga verdadero el antecedente Γ hace verdadero el consecuente α. Pero la eficacia del criterio corre el albur de la riqueza del lenguaje involucrado[33]. La noción de interpretación depara un criterio alternativo cuya formulación más socorrida es la consabida versión semántica tarskiana: «α es consecuencia lógica de Γ si y sólo si todo modelo de Γ es modelo de α». Esta concepción «modelista» concuerda con dos virtudes comúnmente asociadas a la lógica: su neutralidad temática y su independencia con respecto a los recursos expresivos propios del lenguaje empleado. Pero también puede verse acusada de -entre otras cosas- limitarse a establecer una especie de correlación input-output entre sistemas de objetos y/o asignaciones de valores, sin hacerse cargo de la especificidad de las relaciones lógicas de consecuencia dentro del ámbito formal o estructuralmente acotado de las consecuencias semánticas. Para dar cuenta y razón de la peculiaridad lógica vuelven a presentarse las condiciones de necesidad, pertinencia, aprioricidad, por separado o en conjunción. En todo caso, los criterios semánticos en general y, en particular, la determinación básica de la forma lógica de las proposiciones suponen, a su vez, la demarcación entre sus términos o ingredientes *extralógicos* y sus términos *lógicos*. Por lo demás, cabría pensar a primera vista que la cuestión de fijar qué es lo que hace que un término sea *lógico* es un asunto más preciso y tratable que el problema de determinar qué es lo que hace que una relación de seguirse-de sea una consecuencia *lógica*.

Pero también ahí nos encontramos, para empezar, con planteamientos dispares y criterios contrapuestos. Bastará recordar dos direcciones principales: una ha partido de Gentzen (1934-35) y cobrado nuevo impulso desde Prawitz (1965, 1971); la segunda procede de Tarski (1966)[34]. La primera

[33] Puede considerarse un criterio quineano en la medida en que Quine define la verdad lógica como el enunciado que se mantiene verdadero en toda sustitución de su vocabulario extralógico. Boolos, en el apéndice de su (1975) «On second order logic», ha mostrado que este planteamiento no puede extenderse al caso de la consecuencia lógica en el lenguaje «razonablemente rico» postulado por Quine —vid. el ya citado Boolos (1998), p. 53.

[34] Cf. D. Prawitz, *Natural deductiom*, Stockholm: Almqvist & Wiksell, 1965; «Ideas and results in proof theory», en J. Fenstad, ed. *Proc. second Scandinavian logic symposium*, Amsterdam:

propone una caracterización de los términos lógicos como operadores definidos, en el marco de una teoría de la deducibilidad, por unas reglas básicas de introducción y eliminación que han de cumplir unas condiciones de armonía e inversión: cada par de reglas o deducciones básicas de introducción/eliminación de un operador determinan su cometido deductivo en el sentido de que la regla de introducción establece las condiciones suficientes para la deducción de enunciados de la forma lógica determinada por dicho operador, mientras que la regla pareja de eliminación sólo permite deducir enunciados congruentes o «justificados» con arreglo a esas mismas condiciones. Este planteamiento deductivo se atiene ante todo a la lógica de primer orden y, por lo regular, parece mejor avenido con los operadores (conectores, cuantificadores) intuicionistas que con los clásicos. La segunda dirección se mueve en una línea estructural y más general de caracterización de los términos lógicos como constantes lógicas, es decir: como expresiones de objetos que son invariantes con respecto a toda permutación del dominio de discurso. Este planteamiento se hace eco de la autonomía y de la neutralidad temática tadicionalmente asociadas a la lógica, pero requiere precisiones ulteriores para corregir su exceso de generalidad —e.g. las nociones mismas de universo de discurso y conjunto vacío resultarían constantes lógicas, de modo que el criterio sólo funcionaría como condición necesaria en relación con los términos que suelen considerarse lógicos. En cualquier caso, tanto una como otra dirección pueden conducir a acotaciones dispares de los términos lógicos, así que su definición —y, en particular, su identificación con los conectores y cuantificadores clásicos— sigue arrastrando un punto incierto de tradición y convención. Para paliar esta impresión, cabe considerar los términos lógicos como una especie de términos T-teóricos, siendo T una teoría lógica, e introducir consideraciones metalógicas que nos ayuden a dirimir la cuestión. Sabido es, por ejemplo, que los cuantificadores clásicos —el universal, «para todos y cada uno vale ...», y el particular o existencial, «hay al menos uno para el que vale ...»—, en la medida en que conforman una lógica estándar de primer orden, T, gozan de las virtudes metalógicas propias de esta clase de teorías: todas las consecuencias lógicas que se sigan de T son accesibles deductivamente, de manera que siempre que algo se siga de T podremos saber que se sigue. Al tratarse de una virtud muy estimable en una teoría lógica, la calificación de sus términos característicos como términos lógicos parece justificada. Consideremos ahora la teoría T' resultante de introducir en T un cuantificador plural, «para muchos (la mayoría) vale...», o la teoría T^* resultante de añadir a T un cuantificador finitario,

North Holland, 1971, pp. 235-307. A. Tarski, «What are logical notions?», edic. de J. Corcoran, *History and Philosophy of Logic*, 7 (1966): 143-154. En L. Vega, «¿La lógica da explicaciones? El caso de la relación de consecuencia», en AAVV, *Variacione sobre la explicación*, Madrid: UNED, 1990, pp. 135-209, hay una revisión del planteamiento de la consecuencia en términos de la relación de deducibilidad y de los operadores lógicos. Pero la discusión ha seguido viva y productiva en el curso de esta última década, e.g. a través de G. Sher, *The bounds of logic*, Cambridge (MA): MIT Press/Bradford, 1991.

«para finitamente muchos vale...». Ni *T'* ni *T** gozan de las propiedades de completud y compacidad-*T**, por añadidura, descarta el resultado Löwenheim-Skolem. En suma, las consecuencias lógicas de estas extensiones teóricas dejan de ser accesibles deductivamente. Según esto, la presunta calificación *lógica* de los nuevos candidatos quedaría en entredicho[35]. Pero la disyuntiva abierta por las dos direcciones de determinación de los términos lógicos, en calidad de operadores deductivos o en calidad de constantes estructurales, tiene más calado y comporta una opción entre dos orientaciones generales y básicas del análisis lógico. Si nos interesa la accesibilidad de la relación de consecuencia lógica a través de un correlato más próximo como la deducibilidad, tenderemos a considerar lógicos los operadores que conforman la deducción sistemática de secuentes y a seguir tomando la teoría estándar de primer orden como la *lógica* de referencia. Si nos interesa más, en cambio, la investigación y caracterización de estructuras, de modo que otras virtudes metateóricas como la categoricidad cobren especial relieve, tenderemos a considerar lógicas las contantes invariantes y a tomarnos en serio las lógicas de segundo orden. En el primer caso, la dimensión filosófica del análisis lógico privilegiada sería más bien una dimensión epistemológica; en el segundo, sería más bien una dimensión ontológica.

En todo caso, al final nos hallamos ante no pocas cuestiones y opciones abiertas que, al abrigo del romántico dicho de F. von Schlegel: «El historiador es un profeta que mira hacia atrás», cabe diagnosticar como síntomas de la compleja situación por la que hoy atraviesa la lógica en camino hacia el siglo venidero. Para terminar a la manera de los apartados anteriores, aventuraré tres conclusiones en esta línea prospectiva. 1/ Según parece, a los intereses y preocupaciones inicialmente dominantes en el campo del análisis lógico-matemático por la convalidación de las pruebas y la justificación de las teorías, vienen a sucederles nuevos intereses heurísticos en la exploración de estructuras, donde la lógica ya no es tanto una instancia jurídica (e.g. epistemológica) como una caja de herramientas: un repertorio de lenguajes, métodos y procedimientos al servicio de la investigación. 2/ Esta condición instrumental se ve acentuada en los nuevos ámbitos interdisciplinarios de las ciencias del lenguaje, de la computación, ciencias cognitivas, análisis del discurso, etc.; una suerte de colonias periféricas que generan formas de vida propia al margen de la antigua metrópolis y del antiguo centro: la disciplina de la lógica estándar, la concepción de la inferencia como trasunto de la relación semántica clásica (reflexiva, transitiva, monótona) de consecuencia. En algún caso, e.g. dentro del vasto campo de la teoría de la argumentación, se ha llegado incluso a situaciones de rivalidad institucional y de competencia escolar directa. 3/ Pero estos factores de dispersión no han anulado los deseos de reunificación relativa en una perspectiva más general de la idea

[35] Naturalmente, no todas las extensiones de este género resultan anómalas en el mismo sentido: por ejemplo, la introducción usual del descriptor en una teoría lógica estándar *T* no implica la pérdida de la completud o de la compacidad de *T*.

de sistema lógico, por ejemplo en la línea de cálculos de secuentes capaces de integrar lógicas clásicas, intuicionistas y lineales (vid. la propuesta de Girard 1991), o de apuntar marcos generales de diversificación y desarrollo de sistemas inferenciales monotónicos y no monotónicos. El futuro se presenta, como siempre, incierto.

Referencias

Para no recargar la bibliografía, omito las contribuciones históricas [Boole, Frege, Peirce ... Gödel, Tarski, Gentzen, etc.]; se encuentran fácilmente en la literatura secundaria citada, por ejemplo en Mangioni y Bozzi (1993) o en Vega Reñón (1996).

Anellis, Irving H. (1991), «The Löwenheim-Skolem theorem, theories of quantification, and proof theory», en T. Drucker (ed.), *Perspectives on the history of mathematical logic*. Basel/Berlin/Boston: Birkhäuser, 1991; 71-83.

Anellis, I.H., y Houser, Nathan R. (1988), «Nineteenth century roots of algebraic logic and universal algebra», en H. Andréka, J.D. Monk & I. Németi (eds.), *Algebraic Logic* (Procds. of the Conference on AL, Budapest, 1988. Colloq. Mathem. Soc. I Bolyai, vol. 54). Amsterdam/New York: North Holland, 1991; 1-36.

Cellucci, Carlo (1998), *Le ragioni della logica*. Bari: Laterza, 1998.

Coffa, J. Alberto (1991), *The Semantic tradition from Kant to Carnap. To the Vienna station*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993 paperb.

Dawson, John W. (1993), «The compactness of first-order logic; from Gödel to Lindström», *History and Philosophy of Logic*, 14/1 (1993): 15-37.

Ferreirós, José M. (1999), *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*. Basel/Berlin/Boston: Birkhäuser, (próxima aparición).

Girad, Jean-Yves (1991), «On the unity of logic», *Rapports de Recherche*, Prog. 2, nº 1467 [INRIA-Rocquencourt], 1991.

Goldfarb, Warren D. (1979), «Logic in the twenties: the nature of the quantifier», *The Journal of Symbolic Logic*, 44/3 (1979): 351-368.

Grattan-Guinness, Ivor (1981), «On the developments of logics between the two World Wars», *American Mathematical Monthly*, 88 (1981): 495-509.

Grattan-Guinness, I. (1988), «Vida en común, vidas separadas. Las interacciones entre matemáticas y lógicas desde la revolución francesa hasta la primera guerra mundial», *Theoria*, 12/28 (1997): 13-37.

Heijenoort, Jean van (1976), *El desarrollo de la teoría de la cuantificación*. México: UNAM.

Hintikka, Jaakko, ed. (1995), *From Dedekind to Gödel*. Dordrecht: Reidel, 1995.

Largeault, Jean (1997), «Peut-on parler de logiques régionales?», *Archives de Philosophie*, 60 (1997): 129-134.

Mangione, Corrado, y Bozzi, Silvio (1993), *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni*. Milano: Garzanti, 1995[2].

Moore, Gregory H. (1988), «The emergence of first-order logic», en W. Aspray y P. Kitcher (eds.), *History and philosophy of modern mathematics* [Minnesota Studies in the Phil. of Science, XI]. Minneapolis: University of Minnesota Press, 1988; 95-135.

Moore, G.H. (1997), «Hilbert and the emergence of modern mathematical logic», *Theoria*, 12/28 (1997): 65-90.

Vega Reñón, Luis (1996), *Una guía de historia de la lógica*. Madrid: UNED, 1997 reimp.

Wolenski, Jan (1995), «Mathematical logic in Poland 1900-1939: people, circles, institutions, ideas», *Modern Logic*, 5/4 (1995): 363-405.