



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvaturas y giroscopios

Julio Pardo Ripoll

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Curvaturas y giroscopios

Julio Pardo Ripoll

07-2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Geometría y Topología, Dpto. Matemáticas
Título: Curvaturas y giroscopios
Breve descripción del contenido
El objetivo de este trabajo es dar una interpretación mecánica de la curvatura de Gauss de una superficie a través de la fuerza giroscópica.
Recomendaciones
Otras observaciones

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Conceptos previos	1
1.1. Sobre curvas y superficies	1
1.2. Sobre las ecuaciones de Euler-Lagrange	9
1.3. Sobre sólidos rígidos	11
1.4. Sobre electromagnetismo	14
2. La peonza de Lagrange	17
3. Formulación del problema	21
3.1. Formulación clásica	21
3.2. El disco pequeño que gira rápidamente	22
3.3. Formulación intrínseca	23
4. Ecuaciones del movimiento en coordenadas	25
5. Ecuaciones del movimiento sin coordenadas	31
Bibliografía	35

Resumen

A lo largo de este trabajo estudiaremos la relación existente entre la curvatura de Gauss de una superficie y un campo magnético. Para ello, introduciremos primero una serie de definiciones y resultados necesarios para profundizar en dicha relación y poder demostrarla. Después, definiremos la “peonza de Lagrange” y consideraremos un caso más general de esta (un disco que gira tangente a una superficie lisa) para comprobar que el movimiento de este es el mismo que el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético normal a una esfera. Todo esto da lugar al resultado principal del trabajo, $F = LKv$, siendo F la fuerza adicional que actúa sobre el centro del disco debido al efecto giroscópico, L el momento angular axial del disco, v la velocidad de este y K la curvatura de Gauss de la superficie. Estudiaremos primero este resultado en una versión con coordenadas, logrando al final relacionar la curvatura de Gauss de la superficie en la que se encuentra el disco con la energía cinética de este. Más adelante, escribiremos de una forma más geométrica y sin coordenadas el movimiento del disco en la superficie, logrando así tener las ecuaciones del movimiento de una forma invariante. Con esta notación y con los resultados previos, probaremos finalmente que $m\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = LKJ\dot{\gamma}$, siendo esta la versión sin coordenadas de $F = LKv$.

Abstract

In this work we study the relationship between the Gaussian curvature of a surface and a magnetic field. We define the “Lagrange’s top” and consider a more general case of this (a spinning disk tangent to a smooth surface) to verify that the motion of the top is the same as the motion of a charged particle in a magnetic field normal to a sphere. This gives rise to the main result of the work, $F = LKv$, where F is the additional force acting on the center of the disk due to the gyroscopic effect, L is the axial angular momentum of the disk, v is the velocity of the disk and K the Gaussian curvature of the surface. We will

first study this result in a coordinate version, finally relating the Gaussian curvature of the surface on which the disk is located to the kinetic energy of the disk. Later on, we will write the motion of the disk on the surface in a more geometric form and without coordinates, thus achieving the equations of motion in an invariant form. With this notation and the previous results, we will finally prove that $m\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = LKJ\dot{\gamma}$, this being the coordinate-free version of $F = LKv$.

Introducción

En el primer capítulo del trabajo trataremos de dar unas definiciones y resultados necesarios para el posterior desarrollo del mismo. Comenzaremos introduciendo conceptos sobre curvas y superficies, así como algunos resultados más avanzados sobre familias de curvas admisibles y variaciones. También hablaremos sobre las ecuaciones de Euler-Lagrange, necesarias en las demostraciones de varios resultados del trabajo. Para finalizar el Capítulo 1, hablaremos sobre los sólidos rígidos y sobre algunas ecuaciones de electromagnetismo, lo que será necesario para entender en profundidad la relación entre la curvatura de Gauss y los campos magnéticos.

En el segundo capítulo explicaremos en primer lugar qué es la peonza de Lagrange. Consideraremos un caso más general que la peonza, un disco que gira y que es tangente a una superficie lisa, para ver que la fuerza adicional que actúa sobre un disco que gira (en comparación con uno que no gira) es equivalente a la fuerza de Lorentz actuando sobre una partícula cargada en un campo magnético. Esto nos da el resultado principal del trabajo, $F = LKv$, siendo F dicha fuerza, L el momento angular axial del disco, v su velocidad y K la curvatura de Gauss de la superficie.

A partir del tercer capítulo nos centraremos en las ecuaciones del movimiento de un disco que gira sobre una superficie curvada. Explicaremos cómo podemos formular la energía cinética del mismo y estas ecuaciones de tres formas distintas, siendo la última una versión sin coordenadas (más interesante que el resto). También daremos al final una versión sin coordenadas del resultado citado en el capítulo anterior, $F = LKv$.

En el cuarto capítulo nos centraremos en la versión con coordenadas de las ecuaciones del movimiento del disco. Comprobaremos de dónde surge la curvatura de Gauss en las ecuaciones del movimiento desarrollando y trabajando sobre la energía cinética del disco.

Para finalizar, en el quinto y último capítulo, estudiaremos la versión sin coordenadas

de las ecuaciones del movimiento del disco. Introduciremos alguna notación geométrica que nos servirá para probar la fórmula sin coordenadas de $F = LKv$, es decir, $m \frac{D}{dt} \dot{\gamma} = LKJ\dot{\gamma}$.

Capítulo 1

Conceptos previos

A lo largo de este primer capítulo se incluirán una serie de definiciones y resultados necesarios para seguir el posterior desarrollo del trabajo.

1.1. Sobre curvas y superficies

En esta sección se introducirán primero algunas definiciones básicas sobre curvas y superficies para poder explicar y demostrar más adelante algunos resultados que utilizaremos en las demostraciones incluidas en el trabajo. Las referencias bibliográficas empleadas en esta sección son [1], [3], [4] y [7].

Comenzaremos introduciendo unas pequeñas definiciones sobre curvas.

Definición 1.1. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, una **curva diferenciable parametrizada** es una aplicación $\alpha: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y x , y , z son diferenciables.

Definición 1.2. Una **curva regular** es una curva $\alpha: I \rightarrow S$ tal que α es \mathcal{C}^∞ y $\alpha'(t) \neq 0$ para cada $t \in I$.

Definición 1.3. Definimos el **vector tangente** a la curva $\alpha: I \rightarrow S$ como

$$V_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Siempre es posible parametrizar una curva regular de modo que $\|\alpha'(t)\| = 1$. Este es el llamado parámetro longitud de arco, y será denotado por s .

Definición 1.4. Sea $\alpha(s)$ una curva diferenciable regular parametrizada por el parámetro longitud de arco ($\|\alpha'(s)\| = 1$ para cada $s \in I$). Definimos la **curvatura** de $\alpha(s)$ en $s = s_0$

como:

$$\kappa(s_0) = \|\alpha''(s_0)\|.$$

Definición 1.5. Definimos el **vector normal principal** a la curva $\alpha: I \rightarrow S$ parametrizada por arco como

$$V_2(s) = \frac{V_1'(s)}{\|V_1'(s)\|}.$$

Definición 1.6. Definimos el **vector binormal** a la curva $\alpha: I \rightarrow S$ como

$$V_3(t) = V_1(t) \times V_2(t).$$

Definición 1.7. Definimos la **derivada direccional** de una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en la dirección del vector $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ como el número real:

$$\mathbf{v}_p(f) = \left. \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}.$$

A continuación serán expuestos unos primeros conceptos sobre superficies que servirán, sobre todo, para poder enunciar con rigurosidad algunos lemas útiles a la hora de demostrar y entender los resultados de los siguientes capítulos.

Definición 1.8. Se dice que $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para cada $p \in S$, existen abiertos $U \subset \mathbb{R}^2$ y $V \subset \mathbb{R}^3$ con $p \in V$ y una aplicación $\mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tales que:

1. \mathbb{X} es diferenciable.
2. \mathbb{X} es un homeomorfismo.
3. Para cada $(u, v) = q \in U$, la aplicación diferencial $d\mathbb{X}_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

Definición 1.9. Se dice que (U, \mathbb{X}) es una **parametrización local** de la superficie S si para cada $p \in S$ podemos parametrizar localmente la superficie a través de la aplicación $\mathbb{X}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$.

Definición 1.10. Una aplicación f es **diferenciable en $p \in S$** si existe alguna parametrización local (U, \mathbb{X}) de forma que $\hat{f} = f \circ \mathbb{X}$ es diferenciable en $q \in U$, donde $\mathbb{X}(q) = p$.

Definición 1.11. Un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se dice **tangente a S en el punto $p \in S$** si existe una curva $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Definición 1.12. Se define el **subespacio tangente a S en $p \in S$** como:

$$T_p S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} \text{ tangente a } S \text{ en } p\}.$$

Definición 1.13. Llamaremos **primera forma fundamental de la superficie S** a la restricción del producto escalar de \mathbb{R}^3 a cada espacio tangente a la superficie. Será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y su matriz de Gram asociada a la base $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2\}$ viene dada por:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_1 \rangle & \langle \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \rangle \\ \langle \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1 \rangle & \langle \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

donde las funciones $g_{ij}(u, v) = \langle \mathbb{X}_i(u, v), \mathbb{X}_j(u, v) \rangle$ se llamarán **coeficientes de la 1ª forma fundamental** respecto de la parametrización (U, \mathbb{X}) .

Definición 1.14. Llamaremos **aplicación de Gauss de una superficie S** a la aplicación:

$$N: p \in S \longrightarrow N(p) \in S^2(1),$$

donde $N(p)$ es un vector unitario normal a $T_p S$.

Definición 1.15. Definimos el **operador de configuración** como la aplicación:

$$A_p: T_p S \longrightarrow T_p S \text{ tal que } A_p = -dN_p.$$

Definición 1.16. Llamaremos **segunda forma fundamental de S en un punto $p \in S$** a la forma bilineal

$$\begin{aligned} \mathbb{I}\mathbb{I}_p: T_p S \times T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow \mathbb{I}\mathbb{I}_p(u, v) = \langle -dN_p(u), v \rangle. \end{aligned}$$

Le asociamos a la 2ª forma fundamental de la superficie S la matriz con coeficientes $L_{ij} = \mathbb{I}\mathbb{I}(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ con respecto a una parametrización (U, \mathbb{X}) .

Definición 1.17. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Definimos la **curvatura de Gauss de un punto $p \in S$** como:

$$K(p) = -\det(A_p).$$

Definición 1.18. Si X e Y son dos campos de vectores tangentes a una superficie S , se define su **derivada covariante** $\nabla_X Y$ como la proyección en el espacio tangente de la derivada usual $D_X Y$ de \mathbb{R}^3 .

Definición 1.19. Se define la curvatura geodésica de una curva $\alpha: I \rightarrow S$ parametrizada por arco como

$$\kappa_g(s) = \left\| \frac{D\alpha'}{ds} \right\|.$$

Teorema 1.20. Sea $R \subset S$ una región regular de una superficie regular orientada S . Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ las curvas regulares a trozos, cerradas, simples, bien orientadas y parametrizadas por el parámetro longitud de arco, que limitan a R y $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$ los ángulos externos de las curvas Γ_i . Entonces:

$$\int_R K \, d\sigma + \int_{\partial R} \kappa_g \, ds + \sum_{i=1}^p \Theta_i = 2\pi\chi(R).$$

Definición 1.21. Definimos los **símbolos de Christoffel** de una superficie S (que denotaremos por Γ_{ij}^k con $i, j, k = 1, 2$) a través de la siguiente ecuación:

$$\nabla_{\mathbb{X}_i} \mathbb{X}_j = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \mathbb{X}_k,$$

siendo ∇ el operador de la derivada covariante en S .

Con todas estas definiciones previas, podemos enunciar el siguiente lema, que utilizaremos en la prueba del Lema de simetría 1.25 más adelante.

Lema 1.22. Sea ∇ el operador de la derivada covariante en una superficie S y sea $\gamma: I \rightarrow S$ una curva en dicha superficie. Entonces existe un único operador $\nabla_{\dot{\gamma}}: \chi(\alpha) \rightarrow \chi(\alpha)$ tal que:

- a) $\nabla_{\dot{\gamma}}(aV + bW) = a\nabla_{\dot{\gamma}}V + b\nabla_{\dot{\gamma}}W$ para $a, b \in \mathbb{R}$ (linealidad sobre \mathbb{R}).
- b) $\nabla_{\dot{\gamma}}(fV) = \dot{f}V + f\nabla_{\dot{\gamma}}V$ para $f \in C^\infty(I)$ (regla de Leibniz).
- c) Si V es extensible, entonces $\frac{D}{dt}V = \nabla_{\dot{\gamma}}\tilde{V}$, donde V es extensible si $V = \tilde{V}|_S$, siendo \tilde{V} un campo de vectores tangente a la superficie S .

Demostración. Veamos primero la unicidad. Supongamos que $\frac{D}{dt}$ es un operador de este tipo y tomamos un $t_0 \in I$ arbitrario. Veamos ahora que el valor de $\frac{D}{dt}V$ en t_0 depende únicamente de los valores de V en un intervalo $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Nótese que en caso de que este intervalo contenga a un extremo de I , bastaría extender γ a un intervalo un poco más grande y probar el lema en ese intervalo para, después, restringir γ a I .

Para probarlo, escogemos unas coordenadas cercanas a $\gamma(t_0)$ y escribimos

$$V(t) = \sum_{i=1}^2 V_i(t)\mathbb{X}_i,$$

donde denotamos por

$$\mathbb{X}_i = \mathbb{X}_i(u_1(t), u_2(t)).$$

Entonces,

$$\frac{D}{dt}V \stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^2 \frac{D}{dt}(V_i \mathbb{X}_i) \stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^2 \left(V_i' \mathbb{X}_i + V_i \frac{D}{dt} \mathbb{X}_i \right).$$

Ahora bien, por (c) y por ser $\dot{\gamma}(t) = u_1'(t)\mathbb{X}_1 + u_2'(t)\mathbb{X}_2$ tenemos que

$$\frac{D}{dt} \mathbb{X}_i = \nabla_{\dot{\gamma}} \mathbb{X}_i = \nabla_{\sum_{j=1}^2 u_j' \mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i = \sum_{j=1}^2 u_j' \nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i = \sum_{j=1}^2 u_j' \left(\sum_{k=1}^2 \Gamma_{ji}^k \mathbb{X}_k \right) = \sum_{j,k=1}^2 u_j' \Gamma_{ji}^k \mathbb{X}_k.$$

Por lo tanto, llegamos a

$$\frac{D}{dt}V = \sum_{i=1}^2 \left(V_i' \mathbb{X}_i + V_i \sum_{j,k=1}^2 u_j' \Gamma_{ji}^k \mathbb{X}_k \right) = \sum_{i,j,k=1}^2 (V_i' + V_i u_j' \Gamma_{ji}^k) \mathbb{X}_k.$$

Con esto hemos demostrado que el operador es único en caso de existir. Por tanto, veamos ahora que existe.

Si $\gamma(I)$ está contenida en una única parametrización, entonces podemos definir $\frac{D}{dt}V$ como en la anterior igualdad. Para el caso general, podemos cubrir $\gamma(I)$ con parametrizaciones coordenadas y definir $\frac{D}{dt}V$ con la fórmula anterior para cada una de ellas. Además, la unicidad implica que estas definiciones de $\frac{D}{dt}V$ coinciden cuando las parametrizaciones se superponen. Por otro lado, es fácil demostrar que el operador $\frac{D}{dt}$ así definido satisface las condiciones del enunciado. \square

Definimos ahora los conceptos de curva admisible y familia admisible de curvas.

Definición 1.23. Una aplicación continua $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ es una **curva admisible** si existe una subdivisión finita $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ tal que $\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]}$ es una curva regular para $i = 1, \dots, k$.

Definición 1.24. Una **familia admisible de curvas** es una aplicación continua $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow S$ que es \mathcal{C}^∞ en cada rectángulo de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ para cualquier partición $a = a_0 < \dots < a_k = b$ de $[a, b]$ y tal que $\Gamma_s(t) := \Gamma(s, t)$ es una curva admisible para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Con todo lo anterior podemos enunciar y probar el lema de simetría que utilizaremos más tarde.

Lema 1.25 (Lema de simetría). Sea $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ una familia admisible de curvas en una superficie. Entonces, en cualquier rectángulo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [a_{i-1}, a_i]$ donde Γ sea suave (\mathcal{C}^∞),

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t) = \frac{D}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, t).$$

Demostración. Como el resultado se aplica de forma local, podemos realizar la prueba en coordenadas, con lo que si escribimos $\Gamma(s, t) = (\mathbb{X}_u(u, v), \mathbb{X}_v(u, v))$, entonces

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \mathbb{X}_u + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbb{X}_v,$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} \mathbb{X}_u + \frac{\partial v}{\partial s} \mathbb{X}_v.$$

Por lo tanto, utilizando en el Lema 1.22 a), b) y c), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= \frac{D}{ds} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \mathbb{X}_u + \frac{\partial v}{\partial t} \mathbb{X}_v \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_u + \frac{\partial u}{\partial t} \underbrace{\frac{D}{ds} \mathbb{X}_u}_{\nabla_{\frac{\partial \Gamma}{\partial s}} \mathbb{X}_u} + \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_v + \frac{\partial v}{\partial t} \underbrace{\frac{D}{ds} \mathbb{X}_v}_{\nabla_{\frac{\partial \Gamma}{\partial s}} \mathbb{X}_v} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_u + \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_v + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\nabla_{\frac{\partial u}{\partial s} \mathbb{X}_u + \frac{\partial v}{\partial s} \mathbb{X}_v} \mathbb{X}_u \right) + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\nabla_{\frac{\partial u}{\partial s} \mathbb{X}_u + \frac{\partial v}{\partial s} \mathbb{X}_v} \mathbb{X}_v \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_u + \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_v + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \nabla_{\mathbb{X}_u} \mathbb{X}_u + \frac{\partial v}{\partial s} \nabla_{\mathbb{X}_v} \mathbb{X}_u \right) \\ &\quad + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \nabla_{\mathbb{X}_u} \mathbb{X}_v + \frac{\partial v}{\partial s} \nabla_{\mathbb{X}_v} \mathbb{X}_v \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_u + \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_v + \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} (\Gamma_{uu}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbb{X}_v) + \frac{\partial v}{\partial s} (\Gamma_{vu}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbb{X}_v) \right) \\ &\quad + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial s} (\Gamma_{uv}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbb{X}_v) + \frac{\partial v}{\partial s} (\Gamma_{vu}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbb{X}_v) \right). \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial s} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \mathbb{X}_u + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial s} \mathbb{X}_v + \frac{\partial u}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} (\Gamma_{uu}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbb{X}_v) + \frac{\partial v}{\partial t} (\Gamma_{vu}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbb{X}_v) \right) \\ &\quad + \frac{\partial v}{\partial s} \left(\frac{\partial u}{\partial t} (\Gamma_{uv}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{uv}^v \mathbb{X}_v) + \frac{\partial v}{\partial t} (\Gamma_{vu}^u \mathbb{X}_u + \Gamma_{vv}^v \mathbb{X}_v) \right). \end{aligned}$$

Entonces, si intercambiamos u y v y tenemos en cuenta que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, llegamos a la igualdad que queríamos probar. \square

Con las definiciones de curva admisible y familia admisible podemos ahora definir lo que es una variación y una variación propia.

Definición 1.26. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ es una curva admisible. Entonces, una **variación de γ** es una familia admisible $\Gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow S$ tal que $\Gamma_0(t) = \gamma(t)$ para cada $t \in [a, b]$. Además, una variación es **propia** si $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Definición 1.27. Si Γ es una variación de γ , se define el **campo variacional de Γ** como el campo de vectores $V(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(0, t)$ a lo largo de γ . Si además $V(a) = V(b) = 0$ diremos que el campo es **propio**.

A continuación, enunciamos el lema fundamental del cálculo variacional.

Lema 1.28. *Si una función continua f satisface en el intervalo abierto (a, b) la igualdad*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0,$$

para cualquier función h que en (a, b) sea suave (C^∞) y con soporte compacto, entonces f es idénticamente nula.

Ahora vamos a introducir el tensor de curvatura de Riemann para, después, enunciar y probar el Teorema egregium de Gauss.

Definición 1.29. Sea S una superficie. Se define el **tensor de curvatura de Riemann** R como la aplicación

$$R(X, Y, V, W) = \langle (\nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{\nabla_X Y - \nabla_Y X} V, W \rangle,$$

donde X, Y, V, W son campos de vectores tangentes a S .

Teorema 1.30 (Teorema egregium de Gauss). *Para S una superficie, se tiene*

$$K = \frac{R(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1)}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

siendo K la curvatura de Gauss de la superficie.

Demostración. Es conocido que los símbolos de Christoffel pueden ser expresados en términos de la primera forma fundamental y de sus derivadas covariantes mediante las expresiones

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial_1 g_{11} & \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} & \partial_2 g_{12} - \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} \\ \partial_1 g_{12} - \frac{1}{2}\partial_2 g_{11} & \frac{1}{2}\partial_1 g_{22} & \frac{1}{2}\partial_2 g_{22} \end{pmatrix}.$$

Otra manera de probar que la curvatura de Gauss depende solo de la primera forma fundamental y de sus derivadas, que difiere de la manera clásica pero que necesitaremos en este trabajo, es la siguiente:

Recordando que los vectores coordenados \mathbb{X}_i son tangentes, tenemos

$$\begin{aligned} R(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1) &= \langle \nabla_{\mathbb{X}_1} \nabla_{\mathbb{X}_2} \mathbb{X}_2 - \nabla_{\mathbb{X}_2} \nabla_{\mathbb{X}_1} \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_1 \rangle \\ &= \langle \nabla_{\mathbb{X}_1} (\nabla_{\mathbb{X}_2} \mathbb{X}_2 - \langle \nabla_{\mathbb{X}_2} \mathbb{X}_2, N \rangle N), \mathbb{X}_1 \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{\mathbb{X}_2} (\nabla_{\mathbb{X}_1} \mathbb{X}_2 - \langle \nabla_{\mathbb{X}_1} \mathbb{X}_2, N \rangle N), \mathbb{X}_1 \rangle \\ &= \langle \mathbb{X}_{221} - \nabla_{\mathbb{X}_1} L_{22} N, \mathbb{X}_1 \rangle + \langle -\mathbb{X}_{212} + \nabla_{\mathbb{X}_2} L_{12} N, \mathbb{X}_1 \rangle \\ &= \langle L_{22} N, \nabla_{\mathbb{X}_1} \mathbb{X}_1 \rangle - \langle L_{12} N, \nabla_{\mathbb{X}_2} \mathbb{X}_1 \rangle = L_{22} L_{11} - L_{12} L_{21}, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $\mathbb{X}_{221} = \nabla_{\mathbb{X}_1} \nabla_{\mathbb{X}_2} \mathbb{X}_2 = \nabla_{\mathbb{X}_2} \nabla_{\mathbb{X}_1} \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}_{221}$. De este modo obtenemos el resultado requerido, ya que

$$L_{11}L_{22} - L_{12}^2 = K(g_{11}g_{22} - g_{12}^2). \quad \square$$

El lema que escribiremos ahora nos servirá para probar el resultado principal del trabajo.

Lema 1.31. *Si tenemos Γ una familia admisible de curvas y V es un campo de vectores \mathcal{C}^∞ , entonces*

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V - \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V = R(S, T)V,$$

donde

$$T(s, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(s, t); \quad S(s, t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(s, t).$$

Demostración. Como es un problema local, podemos probarlo en coordenadas locales, con lo que escribimos $V(s, t) = V_1(s, t)\mathbb{X}_1 + V_2(s, t)\mathbb{X}_2$. Entonces,

$$\frac{D}{dt} V = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_i}{\partial t} \mathbb{X}_i + V_i \frac{D}{dt} \mathbb{X}_i.$$

Con lo que tenemos que

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial s \partial t} \mathbb{X}_i + \frac{\partial V_i}{\partial t} \frac{D}{ds} \mathbb{X}_i + \frac{\partial V_i}{\partial s} \frac{D}{dt} \mathbb{X}_i + V_i \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \mathbb{X}_i.$$

De forma análoga se calcula $\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V$. Al hacerlo, es fácil comprobar que todos los términos con excepción del último son iguales a los de $\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V$. Por tanto,

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} V - \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} V = \sum_{i=1}^2 V_i \left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \mathbb{X}_i - \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \mathbb{X}_i \right). \quad (1.1)$$

Para calcular lo que hay dentro del paréntesis, vamos a escribir primero T y S en coordenadas. Si escribimos $\Gamma(s, t) = \sum_{j=1}^2 u_j(s, t)\mathbb{X}_j$, entonces

$$T(s, t) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial t} \mathbb{X}_j; \quad S(s, t) = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial s} \mathbb{X}_k.$$

Como \mathbb{X}_i es extensible, se tiene que

$$\frac{D}{dt} \mathbb{X}_i = \nabla_T \mathbb{X}_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial t} \nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i,$$

y, como $\nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i$ también es extensible, entonces

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \mathbb{X}_i &= \frac{D}{ds} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial t} \nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i \right) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s \partial t} \nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i + \frac{\partial u_j}{\partial t} \nabla_S (\nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i) \right) = \\ &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial s \partial t} \nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i + \frac{\partial u_j}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial s} \nabla_{\mathbb{X}_k} \nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i \right) \right). \end{aligned}$$

De manera análoga, obtenemos

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \mathbb{X}_i = \sum_{k=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial t \partial s} \nabla_{\mathbb{X}_k} \mathbb{X}_i + \frac{\partial u_k}{\partial s} \left(\sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial t} \nabla_{\mathbb{X}_j} \nabla_{\mathbb{X}_k} \mathbb{X}_i \right) \right).$$

Por tanto, nos queda que

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \mathbb{X}_i - \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \mathbb{X}_i &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial t} \frac{\partial u_k}{\partial s} (\nabla_{\mathbb{X}_k} \nabla_{\mathbb{X}_j} \mathbb{X}_i - \nabla_{\mathbb{X}_j} \nabla_{\mathbb{X}_k} \mathbb{X}_i) = \\ &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial t} \frac{\partial u_k}{\partial s} R(\mathbb{X}_k, \mathbb{X}_j) \mathbb{X}_i = R(S, T) \mathbb{X}_i. \end{aligned}$$

Así obtenemos el resultado que queríamos probar. \square

1.2. Sobre las ecuaciones de Euler-Lagrange

En esta sección hablaremos exclusivamente de las ecuaciones de Euler-Lagrange de un funcional. En primer lugar las definiremos y, a continuación, exhibiremos un pequeño ejemplo. Las referencias bibliográfica empleada en esta sección son [1] y [5].

Definición 1.32. Consideramos el funcional

$$J[f] = \int_{x_1}^{x_2} L(x, f(x), f'(x)) dx$$

donde:

- x_1, x_2 son constantes.
- Es continuamente diferenciable.
- $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

- L es dos veces continuamente diferenciable con respecto a sus argumentos x , f , f' .

Entonces definimos la **ecuación de Euler-Lagrange** del funcional $J[f]$:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0.$$

Las funciones que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional $J[f]$ son precisamente los puntos críticos del mismo.

Veamos a continuación un ejemplo que ilustra alguna de las utilidades de la ecuación de Euler-Lagrange.

Ejemplo 1.33. Vamos a considerar el problema de buscar una función $y = f(x)$ que sea la curva más corta que conecta dos puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . La longitud de la curva viene dada por:

$$A[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx,$$

con $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

Ahora emplearemos la ecuación de Euler-Lagrange para buscar el punto crítico $f(x)$ que minimiza al funcional $A[y]$. Entonces, tenemos que:

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0,$$

siendo

$$L = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}.$$

Como f no aparece en L , el primer término de la ecuación de Euler-Lagrange desaparece, con lo que nos queda:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial f'} = 0.$$

Sustituyendo L arriba y derivando con respecto a f' llegamos a:

$$\frac{d}{dx} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} = c, \text{ para alguna constante } c.$$

Esto es equivalente a:

$$\frac{[f'(x)]^2}{1 + [f'(x)]^2} = c^2, \text{ donde } 0 \leq c^2 < 1.$$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$[f'(x)]^2 = \frac{c^2}{1-c^2}, \text{ lo que implica que } f'(x) = m, \text{ con } m \text{ constante.}$$

Con lo cual, la curva más corta que conecta los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$f(x) = mx + b, \text{ con } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ y } b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

En conclusión, hemos probado a través de la ecuación de Euler-Lagrange que la curva más corta que conecta dos puntos es una recta.

1.3. Sobre sólidos rígidos

En esta sección nos centraremos en el concepto de sólido rígido y en las definiciones y resultados relacionados con este concepto que nos serán útiles para entender los siguientes capítulos y el trabajo en general.

Comenzaremos definiendo el momento lineal y exponiendo algunos resultados sobre el mismo.

Definición 1.34. El **momento lineal** \mathbf{p} es una magnitud vectorial que relaciona la masa m y la velocidad \mathbf{v} de un cuerpo de la siguiente forma:

$$\mathbf{p} = m \cdot \mathbf{v}.$$

Proposición 1.35 (Segunda ley de Newton).

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

siendo \mathbf{F} la fuerza y \mathbf{p} el momento lineal del cuerpo.

Cuando la masa del cuerpo es constante, se tiene

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Proposición 1.36 (Conservación del momento lineal). *El momento lineal total de un sistema aislado permanece constante, es decir,*

$$\sum \mathbf{F} = 0 \iff \mathbf{p} = \text{constante.}$$

Definición 1.37. Definimos el **centro de masa** como:

- $\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i}$, si hay partículas con posiciones \mathbf{r}_i y masas m_i .
- $\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{\int dm}$, si la partícula es un continuo, siendo la “masa infinitesimal” $dm = \rho \cdot dv$ y ρ la densidad.

Proposición 1.38 (Segunda ley de Newton para un sistema de partículas).

$$\sum \mathbf{F}_i = \sum m_i \mathbf{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (\sum m_i) \mathbf{r}_{CM} = (\sum m_i) \frac{d^2 \mathbf{r}_{CM}}{dt^2} = M \mathbf{a}_{CM},$$

con $M = \sum m_i$.

Vemos ahora la definición de sólido rígido y de algunos conceptos interesantes tales como el momento angular o el momento de una fuerza. También definiremos el tensor de inercia y la energía rotacional de un cuerpo rígido, términos que emplearemos a menudo durante los próximos capítulos.

Definición 1.39. Un **sólido rígido** es un conjunto de partículas tales que sus distancias relativas permanecen constantes.

El movimiento de un sólido rígido puede ser analizado como un movimiento “traslacional” de su centro de masas más el movimiento rotacional alrededor de su centro. Este movimiento rotacional puede verse “infinitesimalmente” como el movimiento del eje de giro y el movimiento alrededor de dicho eje.

Todos los puntos de un sólido rígido que rota alrededor de un eje se mueven con la misma velocidad angular ω .

- $v = R\omega$, siendo R la distancia al eje y v la velocidad de la partícula.
- $a_t = R\alpha$, siendo a_t la aceleración tangencial y α la aceleración angular.

Tanto la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ como la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ son consideradas magnitudes vectoriales, siendo vectores perpendiculares al plano de rotación y con dirección dada por la regla de la mano derecha, i.e., $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{V}_3$, $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{V}_3$, siendo \mathbf{V}_3 el vector binormal de la correspondiente curva parametrizada que describe la partícula. Entonces, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

Definición 1.40. El **momento angular** con respecto a un punto con vector de posición \mathbf{r} es

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Definición 1.41. El **momento de una fuerza** \mathbf{F} con respecto de un punto con vector de posición \mathbf{r} es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Suponiendo la masa constante:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{a}) = m(\mathbf{r} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}) = m\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Definición 1.42. En el caso de un sólido rígido en rotación con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (igual para todas las partículas) tenemos el **momento angular total**:

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum \mathbf{r}_i \times (m_i\mathbf{v}_i) = \sum m_i(\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum m_i[\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \rangle \boldsymbol{\omega} - \langle \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega} \rangle \mathbf{r}_i].$$

Definición 1.43. Definimos el **tensor de inercia** como

$$\mathbb{I}x = \sum m_i[r_i^2 x - \langle \mathbf{r}_i, x \rangle \mathbf{r}_i],$$

por lo que

$$\mathbf{L} = \mathbb{I}\boldsymbol{\omega} \text{ y } \boldsymbol{\tau} = \mathbb{I}\boldsymbol{\alpha}.$$

Además, en el caso continuo tenemos que

$$\mathbb{I}x = \int (r^2 x - \langle \mathbf{r}, x \rangle \mathbf{r}) dm.$$

Observación 1.44. Nótese que $\langle \mathbf{x}, \mathbb{I}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbb{I}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para cada \mathbf{x}, \mathbf{y} , por lo que \mathbb{I} es diagonalizable en virtud del Teorema Espectral, también llamado Ley de Inercia de Sylvester. Esto será útil en el trabajo para poder descomponer la dirección del disco en axial y traslacional.

Definición 1.45. La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido es:

$$\begin{aligned} H &= \sum H_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \langle \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i (\langle \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_i \rangle \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i \rangle - \langle \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{r}_i \rangle^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \langle r_i^2 \boldsymbol{\omega}_i - \langle \boldsymbol{\omega}_i, \mathbf{r}_i \rangle \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum \langle m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega}_i - \langle \mathbf{r}_i, \boldsymbol{\omega}_i \rangle \mathbf{r}_i], \boldsymbol{\omega}_i \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbb{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle. \end{aligned}$$

1.4. Sobre electromagnetismo

En esta última sección sobre conceptos previos, escribiremos las 4 ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Lorentz.

Ecuaciones de Maxwell:

1. Ley de Gauss

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho \cdot dV,$$

donde \mathbf{E} es el campo electrostático, ϵ_0 la permitividad y ρ la densidad de carga.

Equivalentemente,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

siendo $\nabla \cdot \mathbf{E}$ la divergencia de \mathbf{E} .

2. Ley de Gauss del magnetismo (ausencia de monopolos magnéticos):

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

donde \mathbf{B} es la inducción magnética o densidad de flujo magnético.

3. Ley de inducción de Faraday:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

en la que $\partial\Sigma$ es la integral de línea o de trayectoria (cerrada).

Equivalentemente,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

siendo $\nabla \times \mathbf{E}$ el rotacional de \mathbf{E} .

4. Ley de Ampère-Maxwell:

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left[\int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right],$$

donde \mathbf{J} es la densidad de corriente eléctrica.

Equivalentemente,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).$$

Ecuación de Lorentz:

Si una partícula con carga q se mueve a una velocidad \mathbf{v} en presencia de un campo eléctrico \mathbf{E} y de un campo magnético \mathbf{B} , entonces experimenta una fuerza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.2)$$

Esta es una ecuación fundamental de la física y no es consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell, pero se puede deducir de ellas bajo ciertas condiciones.

Capítulo 2

La peonza de Lagrange

En este capítulo comenzaremos tratando el concepto de “peonza de Lagrange” y veremos cuáles son las bases para relacionar el movimiento de esta con el de una partícula cargada en un campo magnético, siendo este el resultado principal del trabajo. A lo largo de los siguientes capítulos la principal referencia bibliográfica será [2].

La peonza de Lagrange (ver [6]) es un sólido rígido axisimétrico con punto de contacto a una superficie horizontal fijo. Es equivalente a un disco montado sobre un eje unido a una articulación esférica o a una partícula (que sería el centro del disco) moviéndose por una esfera bajo la influencia de fuerzas gravitatorias y magnéticas. Esta última, la fuerza magnética o **efecto giroscópico**, es la que nos interesa, ya que es la causa de que la peonza precese, es decir, que cambie la dirección en el espacio de su eje de rotación de forma repentina.

A lo largo del trabajo trataremos de ver que el movimiento de la peonza de Lagrange es el mismo movimiento que el de una partícula cargada en un campo magnético normal a una esfera y que tiene la misma magnitud que la curvatura de Gauss, con la carga de la partícula dada por el momento angular de la peonza alrededor de su eje de simetría.

Se podría decir que esto es una coincidencia ya que la geometría de la esfera es un caso muy particular, pero veremos que no es así, sino que es un reflejo de una relación mucho más profunda entre la curvatura y la dinámica.

Para ver esto, consideremos un disco que gira y que es tangente a una superficie lisa (caso más general para la peonza), con el punto de contacto libre y que puede deslizarse a lo largo de dicha superficie, como podemos observar en la Figura 2.1.

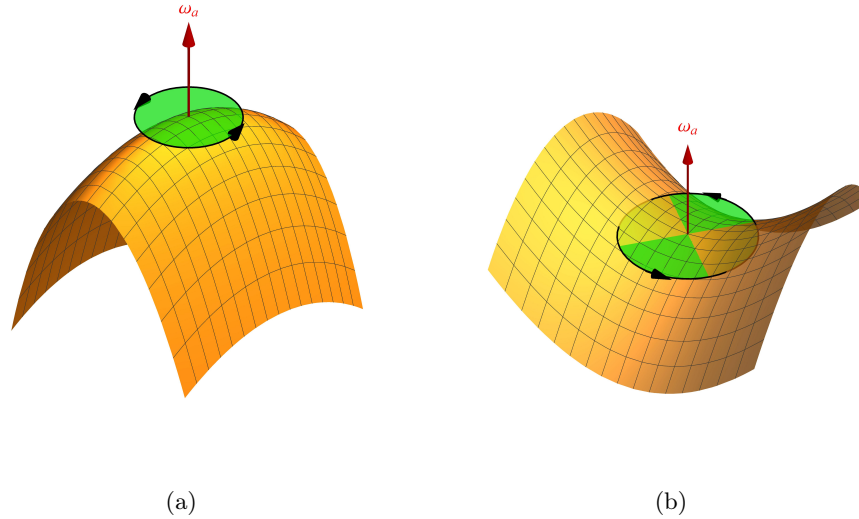


Figura 2.1: En esta figura se muestra un disco girando tangente a una superficie. En el caso (a) la superficie tiene curvatura de Gauss positiva. En el caso (b) tiene curvatura negativa.

El resultado principal del trabajo, que se ilustra en la Figura 2.2, es que la rotación del disco alrededor de su eje produce una fuerza adicional actuando en el centro del disco, perpendicular a la velocidad y con magnitud

$$F = LKv, \quad (2.1)$$

donde L es el momento angular axial del disco, v es la velocidad del centro del disco y K es la curvatura de Gauss de la superficie.

Lo que quiere decir este resultado es que la trayectoria del centro de un disco que gira es la misma que la de un disco que no gira pero en el que actúa esta fuerza adicional F . Esto es equivalente a la fuerza de Lorentz (1.2) actuando sobre una partícula cargada en un campo magnético, con L siendo la carga de la partícula y K la fuerza del campo magnético. Este resultado es una interpretación física de la curvatura de Gauss como un “campo magnético” y del momento angular como la “carga” de una partícula.

Hay que tener en cuenta que un disco que no gira es diferente que una masa puntual, ya que el primero tiene una energía cinética debido a la rotación del plano tangente. De

todas formas, si el disco tiene un radio muy pequeño esta energía cinética es relativamente pequeña en comparación con la energía de traslación, por lo que podemos omitirla y así ambos sistemas serían equivalentes. En cambio, si el disco gira rápidamente, la energía cinética generada por el giro del eje no puede ser ignorada, aunque el radio sea muy pequeño (veremos esto con más profundidad en la Sección 3.2). Planteemos las ecuaciones del movimiento de este último disco.

Tenemos que para un disco pequeño que gira rápidamente existen coordenadas (x_1, x_2) en cualquier punto en las que las ecuaciones del movimiento tienen la forma

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -LK\dot{x}_2, \\ m\ddot{x}_2 &= LK\dot{x}_1. \end{aligned}$$

Este resultado se formulará en el Capítulo 3 y se probará en el Capítulo 4. Concluimos en el Capítulo 5 dando una formulación sin coordenadas y probando nuestro resultado principal empleando el lenguaje de la geometría diferencial moderna. Esto nos da como un caso especial una derivación funcional de las ecuaciones del movimiento de la peonza de Lagrange.

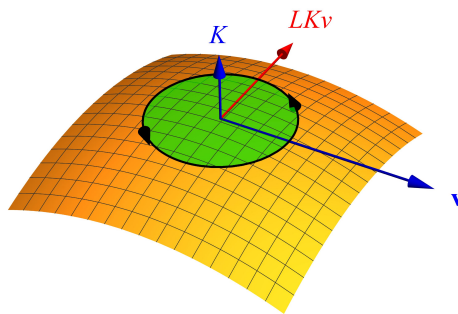


Figura 2.2: En la figura se muestra el resultado principal del trabajo (2.1). La curvatura de Gauss K es la magnitud del campo magnético y el momento angular axial L es la carga. Entonces, la fuerza F en la ecuación es la misma que la fuerza de Lorentz (1.2) en una partícula de carga L .

Observación 2.1. El resultado da una mayor motivación al problema de estudiar curvas para las que la curvatura geodésica es un múltiplo constante de la curvatura de Gauss, i.e, $k = cK$. En efecto, la curvatura geodésica es $k = \frac{a}{v^2}$, donde a es la aceleración provocada por la fuerza magnética. Sustituyendo $a = m^{-1}KLv$ (de la Ecuación (2.1)), obtenemos

$$k = \frac{L}{mv}K.$$

Nótese que v es constante ya que la fuerza es perpendicular a la velocidad, y la constante c es precisamente la relación entre el momento angular y el momento lineal.

Capítulo 3

Formulación del problema

En este capítulo formularemos uno de los resultados más importantes del trabajo: las ecuaciones del movimiento de un disco que gira sobre una superficie curvada. Para ello, primero escribiremos la energía cinética del disco en un sistema de coordenadas concreto, después veremos cómo simplificar esto y más tarde lo escribiremos en un sistema sin coordenadas.

3.1. Formulación clásica

En esta sección daremos una primera ecuación para la energía cinética del disco y analizaremos el movimiento de su centro. Así, podremos relacionar a través del momento angular la rotación axial con los conceptos sobre electromagnetismo introducidos previamente.

Sea (x_1, x_2) un sistema local de coordenadas rectangulares en la superficie de modo que las líneas $x_1 = \text{constante}$ son ortogonales a $x_2 = \text{constante}$. Tomamos estas coordenadas para que sean compatibles con respecto a la orientación escogida para la superficie. La métrica ds^2 en la superficie viene dada por

$$ds^2 = a_{11}dx_1^2 + a_{22}dx_2^2. \quad (3.1)$$

Sean $x = (x_1, x_2)$ las coordenadas del centro del disco. Entonces, la energía cinética rotacional del disco es $\frac{1}{2}\langle \mathbb{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} \rangle$, donde \mathbb{I} es el tensor de inercia del disco alrededor de su centro de masa y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular. Si descomponemos $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo de la dirección del eje y del resto, obtenemos que la energía cinética total del disco, formada por la rotacional y la traslacional, es

$$E = \frac{1}{2}\mathbb{I}_a\omega_a^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_d\omega_d^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.2)$$

donde ω_a y ω_d son los valores escalares de las dos proyecciones de $\boldsymbol{\omega}$ (axial y a lo largo del diámetro), m es la masa del disco y v es la velocidad del centro del disco: $v^2 = \langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle$, siendo $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22})$. De aquí, se tiene que la energía cinética de un disco que no gira es

$$P = \frac{1}{2} \mathbb{I}_d \omega_d^2 + \frac{1}{2} m v^2, \quad (3.3)$$

y su centro se mueve de acuerdo a la ecuación

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Veamos ahora lo que ocurre cuando $\omega_a \neq 0$.

Teorema 3.1. *Definimos $P = P(x, \dot{x})$ como antes y sea $K = K(x)$ la curvatura de Gauss de la superficie. Entonces, el momento angular $L = \mathbb{I}_a \omega_a$ alrededor del eje del disco es una cantidad conservada y el movimiento del centro del disco viene dado por*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial P}{\partial x} = \sqrt{a_{11} a_{22}} L K J \dot{x}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Probaremos este teorema más adelante.

Para profundizar en el significado de estas ecuaciones, fijemos un punto Q en la trayectoria y sean (x_1, x_2) las coordenadas cartesianas en el plano tangente a la superficie en el punto Q . En este caso tenemos que los puntos de la trayectoria en un entorno de Q vienen dados por las coordenadas (x_1, x_2) de la proyección ortogonal sobre este plano tangente. Con estas coordenadas, tenemos que $a_{11} = a_{22} = 1$ en Q , con lo que (3.4) se simplifica en

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial P}{\partial x} = L K J \dot{x} \text{ en } Q. \quad (3.5)$$

Esto confirma que la rotación axial es equivalente a añadir un “campo magnético” ortogonal a la superficie con magnitud K .

Observación 3.2. Es posible incluir en P términos de energía potencial, permitiendo fuerzas externas como la gravedad, pero estos términos no tiene relación con el resultado, ya que no afectan al término “magnético”.

3.2. El disco pequeño que gira rápidamente

En esta sección trataremos de simplificar las ecuaciones anteriores ignorando el término del medio en (3.2). Esto es algo que podemos hacer cuando el radio del disco es muy pequeño ya que, como explicamos en la introducción, en este caso la energía cinética

de traslación es muy superior a la de rotación alrededor del diámetro, pues $|\omega_d| \leq \|h\|v$, donde h es la segunda forma fundamental de la superficie e \mathbb{I}_d tiene un valor muy bajo.

Con todo esto, definimos el disco pequeño que gira rápidamente como el sistema con energía cinética

$$E = \frac{1}{2}\mathbb{I}_a\omega_a^2 + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3.6)$$

En este caso el centro del disco se mueve exactamente como una partícula de carga L en un campo magnético de fuerza K . En particular, se tiene que

$$m\ddot{x} = LKJ\dot{x} \text{ en } Q, \quad (3.7)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -LK\dot{x}_2 \\ m\ddot{x}_2 &= LK\dot{x}_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3. Formulación intrínseca

Para finalizar el capítulo, veremos una pequeña introducción a lo que serán las ecuaciones del movimiento del disco en una versión sin coordenadas.

Las ecuaciones del movimiento (3.4) están expresadas en función de unas coordenadas locales, lo que oculta su naturaleza geométrica. Por otra parte, las ecuaciones más simplificadas (3.5) y (3.8), aún siendo geoméricamente transparentes, solo son válidas en un sistema de coordenadas particular en un único punto Q . Para solucionar estos problemas, trataremos de escribir las ecuaciones del movimiento de una manera invariante sin coordenadas.

Tenemos que el centro del disco se mueve a lo largo de una curva parametrizada γ en la superficie con una velocidad $\dot{\gamma}$. Denotamos por $\frac{D}{dt}$ al operador de la derivada covariante a lo largo de γ , por lo que la aceleración del centro viene dada por $\frac{D\dot{\gamma}}{dt}$. En estos términos, la ecuación de una geodésica es $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$.

Mantenemos aún la suposición del disco pequeño que gira rápidamente, por lo que seguimos despreciando la contribución de la rotación del disco alrededor de su diámetro.

Con todas estas suposiciones, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 3.3. *El centro del disco pequeño que gira rápidamente se mueve de acuerdo a*

$$m \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = LKJ\dot{\gamma}, \quad (3.9)$$

donde J es la rotación de $\frac{\pi}{2}$ en sentido contrario a las agujas del reloj y L es constante.

Esta es una versión sin coordenadas de la Ecuación (2.1) en la que la parte de la izquierda es la masa por la aceleración del disco y el lado derecho es la fuerza magnética que actúa sobre su centro.

La demostración de este teorema se encuentra en el Capítulo 5.

Capítulo 4

Las ecuaciones del movimiento: versión con coordenadas

En este capítulo mostraremos cómo la curvatura de Gauss surge de las ecuaciones de Euler-Lagrange, probando así el Teorema 3.1.

Para escribir la energía cinética E en coordenadas escogemos un sistema rectangular local de coordenadas (x_1, x_2) en la superficie de tal manera que las rectas $x_1 = \text{constante}$ son ortogonales a las rectas $x_2 = \text{constante}$. Marcando ahora un radio determinado en el disco y denotando por θ al ángulo que ese radio hace con la dirección positiva de las rectas $x_2 = \text{constante}$, obtenemos la tripla (θ, x_1, x_2) que parametriza localmente el espacio de configuración del disco.

Lema 4.1. *Sea u un campo de vectores tangente unitario a lo largo de la curva $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Además, consideremos la función $\varphi(t) := \langle \frac{D}{dt}e_1, e_2 \rangle$, donde $e_i(t) := \frac{\nabla e_i}{\|\nabla e_i\|}$, para cada $i \in \{1, 2\}$. Entonces,*

$$\frac{D}{dt}u(t) = (\dot{\theta} + \varphi(t))Ju, \quad (4.1)$$

donde θ es el ángulo que forman u y e_1 . Además,

$$\varphi(t) = k_1\sqrt{a_{11}}\dot{x}_1 + k_2\sqrt{a_{22}}\dot{x}_2, \quad (4.2)$$

donde k_i es la curvatura geodésica de las curvas coordenadas $x_i = \text{constante}$ y a_{ii} son los coeficientes del tensor métrico (3.1) para $i \in \{1, 2\}$.

Demostración. Como x_1 y x_2 son coordenadas rectangulares, esto implica que los campos de vectores coordenados asociados ∇x_1 y ∇x_2 también lo son, por lo que

$$e_1 = \frac{\nabla x_1}{|\nabla x_1|}, \quad e_2 = \frac{\nabla x_2}{|\nabla x_2|}$$

son ortonormales y positivamente orientados. Calculamos entonces

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}, e_1 \rangle &= |\nabla x_1|^{-1} \langle \dot{x}, \nabla x_1 \rangle = \sqrt{a_{11}} \dot{x}_1, \\ \langle \dot{x}, e_2 \rangle &= |\nabla x_2|^{-1} \langle \dot{x}, \nabla x_2 \rangle = \sqrt{a_{22}} \dot{x}_2.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal, se tiene que si $\varphi(t) := \langle \frac{D}{dt} e_1, e_2 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt} e_1 &= \langle \frac{D}{dt} e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle \frac{D}{dt} e_1, e_2 \rangle e_2 = \varphi(t) e_2, \\ \frac{D}{dt} e_2 &= \langle \frac{D}{dt} e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle \frac{D}{dt} e_2, e_2 \rangle e_2 = -\varphi(t) e_1,\end{aligned}$$

ya que

$$\langle \frac{D}{dt} e_i, e_i \rangle = \frac{d}{dt} \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, \frac{D}{dt} e_i \rangle = 0 - \langle \frac{D}{dt} e_i, e_i \rangle,$$

lo que implica que $\langle \frac{D}{dt} e_i, e_i \rangle = 0$ para cada $i = 1, 2$.

Por la definición de θ podemos escribir $u = (\cos \theta) e_1 + (\sin \theta) e_2$, por lo que

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt} u &= -\sin \theta \dot{\theta} e_1 + \cos \theta \frac{D}{dt} e_1 + \cos \theta \dot{\theta} e_2 + \sin \theta \frac{D}{dt} e_2 \\ &= (\dot{\theta} + \varphi(t))(-\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) = (\dot{\theta} + \varphi(t)) J u,\end{aligned}$$

como queríamos probar.

A continuación probaremos la Ecuación (4.2). Por un lado, como $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal y positivamente orientada, se tiene que

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} e_1 &= \langle \nabla_{e_1} e_1, e_1 \rangle e_1 + \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle e_2 = \langle \nabla_{e_1} e_1, J e_1 \rangle e_2 = k_1 e_2, \\ \nabla_{e_2} e_2 &= \langle \nabla_{e_2} e_2, e_1 \rangle e_1 + \langle \nabla_{e_2} e_2, e_2 \rangle e_2 = \langle \nabla_{e_2} e_2, -J e_2 \rangle e_2 = -k_2 e_1,\end{aligned}$$

ya que $e_1 = J e_2$, $e_2 = -J e_1$ y

$$\langle \nabla_{e_i} e_i, e_i \rangle = \nabla_{e_i} \langle e_i, e_i \rangle - \langle e_i, \nabla_{e_i} e_i \rangle = 0 - \langle \nabla_{e_i} e_i, e_i \rangle,$$

lo que implica que $\langle \nabla_{e_i} e_i, e_i \rangle = 0$ para cada $i = 1, 2$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \langle \frac{D}{dt} e_1, e_2 \rangle = \langle \nabla_{\dot{x}} e_1, e_2 \rangle = \langle \nabla_{\langle \dot{x}, e_1 \rangle e_1 + \langle \dot{x}, e_2 \rangle e_2} e_1, e_2 \rangle \\ &= \langle \nabla_{\langle \dot{x}, e_1 \rangle e_1} e_1, e_2 \rangle + \langle \nabla_{\langle \dot{x}, e_2 \rangle e_2} e_1, e_2 \rangle \\ &= \langle \dot{x}, e_1 \rangle \langle \nabla_{e_1} e_1, e_2 \rangle + \langle \dot{x}, e_2 \rangle \langle \nabla_{e_2} e_1, e_2 \rangle \\ &= k_1 \sqrt{a_{11}} \dot{x}_1 + k_2 \sqrt{a_{22}} \dot{x}_2,\end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Teniendo esto en cuenta, vamos a buscar ahora una expresión para ω_a en estas coordenadas. Para ello, necesitamos una expresión del transporte paralelo (es decir, cuando $\omega_a = 0$), la cual nos la da el siguiente lema.

Lema 4.2. *El transporte paralelo de un vector tangente a lo largo de una curva $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ en una superficie viene dado por*

$$\dot{\theta} = -\sqrt{a_{11}}k_1\dot{x}_1(t) - \sqrt{a_{22}}k_2\dot{x}_2(t). \quad (4.3)$$

Demostración. Sea u el campo de vectores tangente unitario paralelo a lo largo de $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ tal que $u(0) = \dot{x}(0)$. Ahora por ser u un campo paralelo a lo largo de $x(t)$, la Ecuación (4.1) implica que $\dot{\theta} = -\varphi(t)$. Por lo tanto, $\dot{\theta} = -\varphi(t) = -k_1\sqrt{a_{11}}\dot{x}_1 - k_2\sqrt{a_{22}}\dot{x}_2$, como queríamos probar. \square

De acuerdo con (4.3), la componente axial de la velocidad angular del disco es

$$\omega_a = \dot{\theta} + k_1\sqrt{a_{11}}\dot{x}_1 + k_2\sqrt{a_{22}}\dot{x}_2. \quad (4.4)$$

Ahora bien, tomando $x = (x_1, x_2)$ y $f(x) = (k_1\sqrt{a_{11}}, k_2\sqrt{a_{22}})$ se tiene que

$$\dot{\theta} + k_1\sqrt{a_{11}}\dot{x}_1 + k_2\sqrt{a_{22}}\dot{x}_2 = \dot{\theta} + f(x)\dot{x},$$

por lo que

$$\omega_a = \dot{\theta} + f(x)\dot{x}. \quad (4.5)$$

En efecto y, de acuerdo con el Lema 4.2, la parte derecha de la Ecuación (4.5) mide la diferencia con el transporte paralelo. La energía cinética del disco en estas coordenadas es

$$E = \frac{1}{2}\mathbb{I}_a(\dot{\theta} + f(x)\dot{x})^2 + \frac{1}{2}(m + \mathbb{I}_d\kappa^2)\langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle, \quad (4.6)$$

donde $\kappa = \kappa(x, \dot{x})$ es la “curvatura de la sección” de la superficie en la dirección \dot{x} . El término $P = P(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(m + \mathbb{I}_d\kappa^2)\langle A\dot{x}, \dot{x} \rangle$ es la energía cinética del disco no rotatorio. Por otro lado, si el término $\mathbb{I}_d\kappa^2$ se puede omitir, entonces P es simplemente la energía cinética del punto de masa m .

Observación 4.3. Si el disco no gira entonces se comporta como una partícula de masa variable $m + \mathbb{I}_d\kappa^2$, de acuerdo con la Ecuación (4.6).

Veamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano

$$E = \frac{1}{2}\mathbb{I}_a(\dot{\theta} + f(x)\dot{x})^2 + P(x, \dot{x}). \quad (4.7)$$

Caso 1 - Tomamos $q = \theta$ (de acuerdo con la notación introducida en (1.32):

$$\frac{dE}{d\theta} - \frac{d}{dt} \frac{dE}{d\dot{\theta}} = 0, \quad (4.8)$$

donde el primer término de la ecuación se anula ya que E no depende de θ . Por otra parte,

$$\frac{dE}{d\dot{\theta}} = \mathbb{I}_a(\dot{\theta} + f(x)\dot{x}),$$

por lo que, derivando con respecto a t ,

$$\frac{d}{dt} \frac{dE}{d\dot{\theta}} = \mathbb{I}_a \frac{d}{dt} (\dot{\theta} + f(x)\dot{x}) = 0,$$

y, como tenemos que $\mathbb{I}_a \neq 0$, esto es equivalente a

$$\frac{d}{dt} (\dot{\theta} + f(x)\dot{x}) = 0. \quad (4.9)$$

Caso 2 - Tomamos $q = x$:

$$\frac{dE}{dx} - \frac{d}{dt} \frac{dE}{d\dot{x}} = 0. \quad (4.10)$$

En primer lugar, tenemos que

$$\frac{dE}{dx} = \mathbb{I}_a(\dot{\theta} + f(x)\dot{x}) \frac{d}{dt} f(x)\dot{x} + \frac{\partial P}{\partial x} = \mathbb{I}_a(\dot{\theta} + f(x)\dot{x}) \left(\frac{df}{dx} \right)^T \dot{x} + \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Por otra parte,

$$\frac{dE}{d\dot{x}} = \mathbb{I}_a(\dot{\theta} + f(x)\dot{x})f(x) + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}},$$

con lo que, derivando con respecto a t ,

$$\frac{d}{dt} \frac{dE}{d\dot{x}} = \mathbb{I}_a \frac{d}{dt} (\dot{\theta} + f(x)\dot{x}) \frac{d}{dt} f(x) + \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}},$$

con

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \dot{x}.$$

Por tanto, sustituyendo en (4.10), llegamos a:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dE}{dx} + \frac{d}{dt} \frac{dE}{d\dot{x}} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial P}{\partial x} + \mathbb{I}_a \left(\frac{d}{dt} (\dot{\theta} + f(x)\dot{x})f(x) + (\dot{\theta} + f(x)\dot{x}) \left(\frac{df}{dx} - \left(\frac{df}{dx} \right)^T \right) \dot{x} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ahora bien, de acuerdo a (4.9), $\dot{\theta} + f(x)\dot{x}$ es constante a lo largo de cualquier solución. De hecho, es la velocidad angular del disco alrededor del eje, ω_a . Si tomamos un valor arbitrario de esta constante,

$$\omega_a = \dot{\theta} + f(x)\dot{x},$$

la Ecuación (4.11) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial P}{\partial x} + L \left(\frac{df}{dx} - \left(\frac{df}{dx} \right)^T \right) \dot{x} = 0, \quad (4.12)$$

donde $L = \mathbb{I}_a \omega_a$, con la matriz antisimétrica

$$\frac{df}{dx} - \left(\frac{df}{dx} \right)^T = - \left((k_1 \sqrt{a_{11}})_{x_2} - (k_2 \sqrt{a_{22}})_{x_1} \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

siendo J la matriz que hemos definido en (3.4) y donde denotamos por

$$\widehat{K}(x) = \left((k_1 \sqrt{a_{11}})_{x_2} - (k_2 \sqrt{a_{22}})_{x_1} \right).$$

Lema 4.4. *Teniendo en cuenta la notación y el resultado anterior, tenemos que*

$$\widehat{K}(x) = \sqrt{a_{11}a_{22}}K(x), \quad (4.14)$$

donde K es la curvatura de Gauss de la superficie.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = (0, 0)$. Consideramos también un rectángulo en la superficie con $x_1 \in [0, \epsilon]$ y $x_2 \in [0, \delta]$ para $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequeños. Entonces, aplicando el teorema de Gauss-Bonnet a este rectángulo de la superficie obtenemos

$$\int_0^\epsilon \int_0^\delta K(x_1, x_2) \sqrt{a_{11}a_{22}} dx_1 dx_2 + 4 \frac{\pi}{2} + \int k ds = 2\pi, \quad (4.15)$$

donde $4 \frac{\pi}{2}$ viene de la suma de los 4 ángulos rectos del rectángulo (recordemos que hemos tomado coordenadas ortogonales entre sí) y k es la curvatura geodésica.

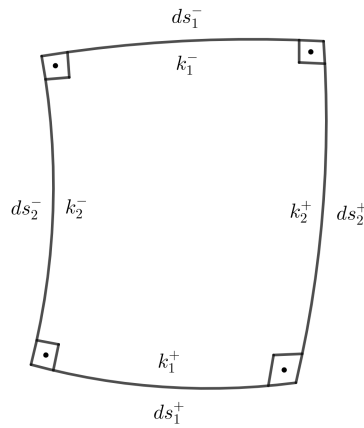


Figura 4.1: En esta imagen podemos observar la descomposición de la curvatura geodésica k que utilizamos en la Ecuación (4.16).

Ahora bien, teniendo en cuenta que $ds_i = \sqrt{a_{ii}}dx_i$ y observando la Figura 4.1, podemos escribir $\int k ds$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int k ds &= \int_0^\epsilon \left((\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, 0) - (\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, \delta) \right) dx_1 \\ &\quad + \int_0^\delta \left((\sqrt{a_{22}}k_2)(\epsilon, x_2) - (\sqrt{a_{22}}k_2)(0, x_2) \right) dx_2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $(\sqrt{a_{ii}}k_i)(x, y)$ denota a $(\sqrt{a_{ii}}k_i)$ evaluado en (x, y) . Si sustituimos esto en (4.15), dividimos por $\epsilon\delta$ y hacemos tender $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\delta} \int_0^\epsilon \int_0^\delta K(x_1, x_2) \sqrt{a_{11}a_{22}} dx_1 dx_2 \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\delta} \int_0^\epsilon \left((\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, 0) - (\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, \delta) \right) dx_1 \\ &\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\delta} \int_0^\delta \left((\sqrt{a_{22}}k_2)(\epsilon, x_2) - (\sqrt{a_{22}}k_2)(0, x_2) \right) dx_2. \end{aligned}$$

Ahora bien, empleando la definición de derivada tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\delta} \int_0^\epsilon \left((\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, \delta) - (\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, 0) \right) dx_1 = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, \delta) - (\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, 0)}{\delta} dx_1 = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_2} (\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, 0) dx_1. \end{aligned}$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\delta} \int_0^\delta \left((\sqrt{a_{22}}k_2)(\epsilon, x_2) - (\sqrt{a_{22}}k_2)(0, x_2) \right) dx_2 \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a_{22}}k_2)(\epsilon, x_2) - (\sqrt{a_{22}}k_2)(0, x_2)}{\epsilon} dx_2 = \\ &= - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x_1} (\sqrt{a_{22}}k_2)(0, x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Por lo que la igualdad (4.15) queda en:

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon\delta} \int_0^\epsilon \int_0^\delta K(x_1, x_2) \sqrt{a_{11}a_{22}} dx_1 dx_2 \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_2} (\sqrt{a_{11}}k_1)(x_1, 0) dx_1 - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x_1} (\sqrt{a_{22}}k_2)(0, x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Entonces, hemos probado que

$$(k_1 \sqrt{a_{11}})_{x_2}(0, 0) - (k_2 \sqrt{a_{22}})_{x_1}(0, 0) = \sqrt{a_{11}a_{22}} K(0, 0),$$

como queríamos demostrar. \square

Capítulo 5

Las ecuaciones del movimiento: Versión sin coordenadas

En este último capítulo, probaremos el Teorema 3.3 que enunciamos en el Capítulo 3. Para ello, necesitamos una expresión sin coordenadas para la ecuación de la energía cinética (3.6). Con lo cual, vamos a introducir alguna notación geométrica que nos será útil antes de empezar a probarlo.

Como en el Capítulo 3, supongamos que el centro del disco sigue una curva γ en la superficie, por lo que tiene una velocidad $\dot{\gamma}$. Denotamos la derivada covariante a lo largo de la curva γ por $\frac{D}{dt}$, así que la aceleración es $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}$. Para medir la rotación del disco, primero fijamos un punto en su radio. Entonces existe un vector u unitario apuntando desde el centro del disco al punto que hemos fijado en el radio. Por lo tanto, para cada tiempo t , $u(t)$ es un vector (que tomamos unitario) en el espacio tangente de $\gamma(t)$.

Lema 5.1. *La componente axial de la velocidad angular viene dada por $\omega_a = \langle \frac{D}{dt}u, Ju \rangle$, por lo que la energía cinética del disco pequeño que gira rápidamente es*

$$E(\gamma, u) = \frac{1}{2}m|\dot{\gamma}|^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_a\left|\frac{D}{dt}u\right|^2. \quad (5.1)$$

Demostración. Sean (x_1, x_2, θ) las coordenadas locales que hemos introducido en el Capítulo 4. Como consecuencia del Lema 4.1, tenemos que

$$\left\langle \frac{D}{dt}u, Ju \right\rangle = \dot{\theta} + k_1\sqrt{a_{11}}\dot{x}_1 + \dot{\theta}\sqrt{a_{22}}\dot{x}_2 = \omega_a,$$

de acuerdo con la fórmula de ω_a dada en (4.4). Derivando $|u|^2 = 1$ con respecto a t tenemos que $\langle \frac{D}{dt}u, u \rangle = 0$. Entonces podemos escribir $\frac{D}{dt}u = \langle \frac{D}{dt}u, Ju \rangle Ju = \omega_a Ju$, lo que implica que $|\frac{D}{dt}u| = |\omega_a|$ (ya que $|Ju| = 1$). \square

Sea ahora (γ, \mathbf{u}) una curva en el fibrado tangente unitario (esto es, γ es una curva en la superficie y \mathbf{u} es una curva de vectores tangentes unitarios tal que $\mathbf{u}(t)$ está en el plano tangente en $\gamma(t)$ para cada tiempo t) y definimos

$$S(\dot{\gamma}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_a^b (m|\dot{\gamma}|^2 + \mathbb{I}_a \left| \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right|^2) dt.$$

Las ecuaciones del movimiento que buscamos son precisamente las ecuaciones variacionales (Euler-Lagrange) de S .

Para calcular estas ecuaciones, denotamos por $\gamma_s(t)$ a una familia admisible de curvas y $\mathbf{u}_s(t)$ a una familia admisible de campos vectoriales unitarios definidos sobre $\gamma_s(t)$ tal que $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ y $\mathbf{u}_0(t) = \mathbf{u}(t)$. Definimos también los campos variacionales propios $V = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}$ y $w = \frac{D}{ds} \mathbf{u}$. Como $\frac{D}{ds} \dot{\gamma}_s = \frac{D}{dt} V$ por el Lema de simetría 1.25, tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} |\dot{\gamma}_s|^2 = \left\langle \frac{D}{ds} \dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V, \dot{\gamma} \right\rangle. \quad (5.2)$$

Calculamos ahora el segundo término de S :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left| \frac{D}{dt} \mathbf{u}_s \right|^2 = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \mathbf{u}_s, \frac{D}{dt} \mathbf{u}_s \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \mathbf{u}_s, \frac{D}{dt} \mathbf{u}_s \right\rangle + R \left(V, \dot{\gamma}, \mathbf{u}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right),$$

donde en la última igualdad hemos empleado el Lema 1.31. Por la definición de w sabemos que $\left\langle \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \mathbf{u}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt} w, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right\rangle$. Entonces, empleando la fórmula para el tensor de curvatura de Riemann en una superficie (Teorema egregium de Gauss 1.30) calculamos el término

$$\begin{aligned} R \left(V, \dot{\gamma}, \mathbf{u}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right) &= K \left(\left\langle V, \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \right\rangle \langle \dot{\gamma}, \mathbf{u} \rangle - \langle V, \mathbf{u} \rangle \left\langle \dot{\gamma}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right\rangle \right) \\ &= K \left\langle V, \langle \dot{\gamma}, \mathbf{u} \rangle \frac{D}{dt} \mathbf{u} - \langle \dot{\gamma}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} \right\rangle \\ &= \left\langle V, K \left(\langle \dot{\gamma}, \mathbf{u} \rangle \frac{D}{dt} \mathbf{u} - \langle \dot{\gamma}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Del Lema 5.1 sabemos que $\frac{D}{dt} \mathbf{u} = \omega_a J \mathbf{u}$, por lo que

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}, \mathbf{u} \rangle \frac{D}{dt} \mathbf{u} - \langle \dot{\gamma}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} &= \omega_a [\langle \dot{\gamma}, \mathbf{u} \rangle J \mathbf{u} - \langle \dot{\gamma}, J \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}] \\ &= \omega_a J [\langle \dot{\gamma}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle \dot{\gamma}, J \mathbf{u} \rangle J \mathbf{u}] \\ &= \omega_a J \dot{\gamma}, \end{aligned}$$

ya que $(\mathbf{u}, J \mathbf{u})$ es una base ortonormal.

Se sigue que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left| \frac{D}{dt} \mathbf{u}_s \right|^2 = \left\langle \frac{D}{dt} \mathbf{u}, \frac{D}{dt} w \right\rangle + \langle V, \omega_a K J \dot{\gamma} \rangle. \quad (5.3)$$

Si juntamos ahora las ecuaciones (5.2) y (5.3) tenemos que

$$\frac{d}{ds}E(\gamma_s, \mathbf{u}_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b \left(\left\langle \frac{D}{dt}V, m\dot{\gamma} \right\rangle + \mathbb{I}_a \left\langle \frac{D}{dt}\mathbf{u}, \frac{D}{dt}w \right\rangle + \langle V, \mathbb{I}_a \omega_a K J \dot{\gamma} \rangle \right) dt. \quad (5.4)$$

Ahora bien, trabajando sobre el primer sumando y empleando la regla de Leibniz obtenemos:

$$\int_a^b \left\langle \frac{D}{dt}V, m\dot{\gamma} \right\rangle = \int_a^b m \frac{D}{dt} \langle V, \dot{\gamma} \rangle dt - \int_a^b \langle V, m \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \rangle = - \int_a^b \langle V, m \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \rangle,$$

ya que

$$\int_a^b m \frac{D}{dt} \langle V, \dot{\gamma} \rangle dt = \int_a^b m \frac{d}{dt} \langle V, \dot{\gamma} \rangle dt = \langle V, \dot{\gamma} \rangle \Big|_a^b = 0,$$

pues V se anula en los extremos $t = a, b$.

En cuanto al segundo término, de forma similar tenemos que

$$\int_a^b \mathbb{I}_a \left\langle \frac{D}{dt}\mathbf{u}, \frac{D}{dt}w \right\rangle dt = \int_a^b \mathbb{I}_a \frac{D}{dt} \left\langle \frac{D}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle dt - \int_a^b \mathbb{I}_a \left\langle \frac{D^2}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle dt = - \int_a^b \mathbb{I}_a \left\langle \frac{D^2}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle dt,$$

viniendo la última igualdad de que

$$\int_a^b \mathbb{I}_a \frac{D}{dt} \left\langle \frac{D}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle dt = \mathbb{I}_a \frac{d}{dt} \left\langle \frac{D}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle dt = \left\langle \frac{D}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle \Big|_a^b = 0,$$

pues w se anula en los extremos $t = a, b$.

Entonces, sustituyendo en la Ecuación (5.4) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds}E(\gamma_s, \mathbf{u}_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b \left(\langle V, \mathbb{I}_a \omega_a K J \dot{\gamma} \rangle - \langle V, m \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \rangle - \mathbb{I}_a \left\langle \frac{D^2}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\langle V, \mathbb{I}_a \omega_a K J \dot{\gamma} - m \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \rangle - \mathbb{I}_a \left\langle \frac{D^2}{dt}\mathbf{u}, w \right\rangle \right) dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ahora bien, como V y w son arbitrarios, utilizando el Lema fundamental del cálculo de variaciones 1.28 se tiene que sus puntos críticos deben cumplir que

$$\begin{aligned} m \frac{D}{dt} \dot{\gamma} &= \mathbb{I}_a \omega_a K J \dot{\gamma}, \\ \frac{D^2}{dt} \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

La primera ecuación es precisamente la Ecuación (3.9), con $L = \mathbb{I}_a \omega_a$. Por tanto, para finalizar la prueba del Teorema 3.3, solo debemos demostrar que ω_a es constante. Pero tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right|^2 = 2 \left\langle \frac{D^2}{dt} \mathbf{u}, \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right\rangle = 0 \Rightarrow \left| \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right| = c,$$

con c constante.

Empleando el Lema 5.1 tenemos, finalmente, $|\omega_a| = \left| \frac{D}{dt} \mathbf{u} \right| = c$, con lo que ya tenemos probado el Teorema 3.3.

Observación 5.2. Nótese que en (5.5) podemos emplear el Lema fundamental del cálculo de variaciones tomando en primer lugar $V = (V_1, 0, 0)$ y $u = 0$ (podemos hacer esto ya que V y u son arbitrarias); después, $V = (0, V_2, 0)$ y $u = 0$; para finalizar la primera igualdad de (5.6), $V = (0, 0, V_3)$ y $u = 0$. Por último, se repite el proceso para u con $V = 0$, logrando la segunda igualdad.

Bibliografía

- [1] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, Richard A. Silverman, *Calculus of variations*, Courier Corporation, 2000.
- [2] Graham Cox, Mark Levi, Gaussian curvature and gyroscopes, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **71**(5):938-952, 2018.
- [3] M. A. Hernández Cifre, J. A. Pastor González, *Un curso de geometría diferencial*, CSIC, 2012.
- [4] John M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature* (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag New York, 1997.
- [5] *Calculus of variations*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus_of_variations.
Consultado por última vez: Mayo 2021.
- [6] *The Lagrange Top*,
<https://rotations.berkeley.edu/the-lagrange-top/>.
Consultado por última vez: Junio 2021.
- [7] *Fundamental lemma of calculus of variations*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_lemma_of_calculus_of_variations.
Consultado por última vez: Junio 2021.