



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Grado**

# **Teoría de índice de punto fijo y aplicaciones a las ecuaciones diferenciales**

Victoria Leonor Méndez Álvarez

2024–2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRADO EN MATEMÁTICAS

**Trabajo Fin de Grado**

**Teoría de índice de punto fijo y  
aplicaciones a las ecuaciones  
diferenciales**

Victoria Leonor Méndez Álvarez

Julio, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

**Área de Conocimiento: Análisis Matemático**

**Título: Teoría de índice de punto fijo y aplicaciones a las ecuaciones diferenciales**

**Director:** Fernando Adrián Fernández Tojo

**Codirector:** Alejandro Omar Majadas Moure

**Breve descripción de los contenidos**

En este trabajo se pretende introducir la teoría de índice de punto fijo, primero en dimensión finita y luego en dimensión infinita, para poder aplicarla a la existencia de soluciones de problemas diferenciales.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Conceptos previos</b>	<b>3</b>
2.1. Aplicaciones diferenciables . . . . .	3
2.2. Espacios de Banach . . . . .	5
2.3. Operadores compactos . . . . .	6
2.4. Espacios de Hilbert . . . . .	7
<b>3. El índice y el grado</b>	<b>9</b>
3.1. Contexto histórico . . . . .	9
3.2. El grado de Brouwer para funciones $\mathcal{C}^1$ . . . . .	10
3.3. El grado de Brouwer para funciones continuas . . . . .	16
3.4. Extensión del grado a espacios normados arbitrarios de dimensión finita . . . . .	20
3.5. Extensión del grado a $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . . . . .	21
3.6. El índice topológico . . . . .	21
<b>4. El Teorema de punto fijo de Brouwer</b>	<b>23</b>
4.1. El Teorema de punto fijo de Brouwer . . . . .	26
<b>5. El grado de Leray-Schauder</b>	<b>29</b>
5.1. El Teorema de punto fijo de Schauder . . . . .	36

<b>6. Aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales</b>	<b>39</b>
6.1. El Teorema de existencia de Peano . . . . .	39
6.2. Problemas de frontera . . . . .	41
6.2.1. Solución de un sistema de ecuaciones Dirichlet . . . . .	42
6.3. El índice de punto fijo en conos . . . . .	43
6.4. El reactor tubular . . . . .	45
6.4.1. Resolución de la ecuación diferencial lineal asociada . . . . .	47
6.4.2. Existencia de solución del problema inicial . . . . .	49

## Resumen

La teoría de índice de punto fijo es una herramienta valiosa por su utilidad en múltiples ramas de las matemáticas y por sus numerosas aplicaciones a la economía, la teoría de juegos o el análisis. En este trabajo, recogemos los principales conceptos relativos a esta teoría desde un enfoque principalmente analítico, sin olvidar su estrecha relación con la topología y la geometría diferencial. Primero daremos una definición del grado topológico o grado de Brouwer para funciones continuas en dimensión finita, lo que nos permitirá desarrollar propiedades interesantes de esta teoría, y en particular, demostrar el Teorema de punto fijo de Brouwer. Posteriormente, extenderemos estos conceptos a dimensión infinita con el Teorema de Leray-Schauder. Buscaremos dar sentido práctico a los resultados presentados, analizando algunas de sus aplicaciones en el estudio de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Finalmente, estudiaremos una extensión del grado a operadores definidos sobre conos, y presentaremos un ejemplo concreto de aplicación: el análisis de un reactor tubular.

## Abstract

The fixed point index theory is a valuable tool for its usefulness in many branches of mathematics and for its numerous applications to economics, game theory or analysis. In this Bachelor's Final Project, we collect the main concepts related to this theory from a mainly analytical approach, without forgetting its close relation with topology and differential geometry. First we will give a definition of the topological degree or Brouwer's degree for continuous functions in finite dimensional spaces, which will allow us to develop interesting properties of this theory, and in particular, to prove Brouwer's Fixed Point Theorem. Subsequently, we will extend these concepts to infinite dimensional spaces with the Leray-Schauder Theorem. We will seek to give practical sense to the results presented, analyzing some of their applications in the study of the solutions of differential equations. Finally, we will study an extension of the degree to operators defined on cones, and we will present a concrete example of application: the analysis of a tubular reactor.



# 1. Introducción

El análisis funcional es una rama de las matemáticas que estudia las propiedades de funciones definidas entre espacios normados, atendiendo a su estructura y topología. Este campo se interesa por las funciones continuas y desarrolla métodos para resolver ecuaciones mediante dichas funciones. Existen dos enfoques principales desde los que se puede abordar el estudio: el topológico y el analítico. En este trabajo utilizaremos la teoría de índice de punto fijo y en particular el concepto de grado topológico, como herramienta para demostrar una serie de teoremas que nos permitirán estudiar la existencia, multiplicidad y estabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.

La teoría de índice de punto fijo estudia las condiciones en las que una función definida en un subconjunto  $A$  de un espacio  $B$  tiene un punto fijo, es decir, en las que una función  $f : A \subset B \rightarrow B$  tiene un punto  $x \in A$  tal que  $f(x) = x$ . Esta teoría tiene sus orígenes a finales del siglo XIX, con las aportaciones de reconocidos matemáticos como Poincaré, Hadamard, Brouwer, Lefschetz, Schauder, Kakutani y Banach, entre otros. Sus trabajos demostraron la existencia de puntos fijos para funciones definidas en dominios determinados. La teoría de punto fijo engloba diversas ramas de las matemáticas; unificando el análisis, la topología y geometría, lo que pone de manifiesto su riqueza, importancia y utilidad. El objetivo de este trabajo es explorar condiciones generales, es decir, lo menos restrictivas posible, sobre las funciones y los espacios en las que se definen, bajo las que se pueden obtener resultados aplicables y adecuados.

La estructura de este trabajo consta de cinco capítulos, organizados de forma progresiva para conseguir un acercamiento a la teoría de índice de punto fijo y sus aplicaciones.

En el primer capítulo recogemos una serie de teoremas y resultados preliminares que servirán de apoyo en el desarrollo de los contenidos, aunque no sean específicos de la teoría de punto fijo. Introducimos los conceptos fundamentales de espacios normados, compactos y operadores continuos, lo que proporciona el marco teórico idóneo para la formulación teórica presentada posteriormente.

En el Capítulo 3 introducimos el concepto de grado topológico o grado de Brouwer en espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$ . Presentamos sus propiedades fundamentales, definiéndolo primero para funciones de clase  $\mathcal{C}^1$ , y extendiéndolo posteriormente a funciones continuas. En la sección 3.4 establecemos su relación con el índice de punto fijo. En las secciones finales del capítulo (3.5 y 3.6) generalizamos

el grado a espacios normados arbitrarios de dimensión finita, así como a espacios con dominio y codominio de distinta dimensión. Uno de los principales resultados de este capítulo es el Teorema de invarianza de homotopía.

En el Capítulo 4, aplicamos estos conceptos al estudio de la existencia de puntos fijos. Enunciamos y demostramos el Teorema de punto fijo de Brouwer, que garantiza la existencia de un punto fijo para funciones continuas definidas en el disco unidad, y deducimos de él varios corolarios. También aprovechamos para presentar otros resultados relacionados o equivalentes, como el Teorema de la no retracción o el Teorema de la bola peluda.

En el Capítulo 5 extendemos los resultados y herramientas anteriores a un contexto más general, el de los espacios normados de dimensión infinita. De esta manera, analizamos las limitaciones de los resultados anteriores y por qué estos no son aplicables directamente, y formulamos condiciones adicionales que permiten establecer el Teorema de punto fijo de Schauder.

Por último, utilizaremos todos estos resultados para estudiar sus aplicaciones en la obtención de información sobre las soluciones de ecuaciones diferenciales. Presentamos una demostración del Teorema de Peano, que asegura la existencia de soluciones locales en  $\mathbb{R}^2$ , y mostramos su aplicación en problemas con condiciones de contorno tipo Dirichlet. También introducimos la generalización de la teoría a conos, un enfoque clave para el estudio de soluciones positivas. Como ejemplo práctico, desarrollamos un problema relacionado con el reactor tubular, en el que demostramos la existencia de múltiples soluciones, mostrando la utilidad y aplicabilidad de esta teoría.

Aunque a lo largo del trabajo se hace referencia a las distintas fuentes utilizadas para adquirir los conocimientos recogidos y expuestos, hemos obtenido la mayoría de contenidos a partir de tres obras fundamentales, que han guiado tanto la estructura general como el desarrollo del trabajo. Estas son [8], [13] y [5].

## 2. Conceptos previos

Con el objetivo de facilitar el seguimiento de la teoría de este trabajo, presentamos primero una serie de resultados que, aunque no forman parte de los objetivos principales del documento, son contenidos afines a las distintas ramas de las matemáticas y constituyen una herramienta indispensable para comprender y obtener los resultados que nos ocupan.

**Definición 2.1.** Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ . Diremos que  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  es un *campo escalar* y que  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un *campo vectorial*.

### 2.1. Aplicaciones diferenciables

*Notación 2.2.* Denotamos por  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  al espacio vectorial de aplicaciones lineales de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ . Consideramos en él la norma  $\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F(x)\|_{\mathbb{R}^m}$ , que lo convierte en un espacio normado y en un espacio vectorial topológico con la topología inducida por esta norma.

**Definición 2.3.** Dado un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , decimos que un campo  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  es *diferenciable en*  $x \in \Omega$  si existe una transformación lineal  $DF(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  tal que, para  $x \in \mathbb{R}^m$  y  $h \in \mathbb{R}^n$ , cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - DF(x)h\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

*Observación 2.4.* De existir tal aplicación, es única.

*Observación 2.5.* En estas condiciones, la matriz asociada a la aplicación diferencial en la base canónica es aquella formada por las derivadas parciales, es decir,  $[DF(x)]_i^j = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$  para  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ , y la llamamos *matriz jacobiana de F en x*.

*Notación 2.6.* Si  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función diferenciable,  $J_F = |DF(x)|$  denota el determinante de la matriz jacobiana de  $F$ .

**Definición 2.7.** Si  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función diferenciable, definimos

- el conjunto de puntos críticos de  $F$  como  $Z_F = J_F^{-1}(0) = \{x \in \Omega : J_F(x) = 0\}$ ,
- el conjunto de los valores críticos de  $F$ , o pliegue de  $F$ , como el conjunto de las imágenes de los puntos críticos, es decir,  $F(Z_F)$ .

**Definición 2.8.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto, decimos que un campo  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de *clase uno en  $\Omega$* , y lo denotamos por  $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , si es continuamente diferenciable en  $\Omega$ , es decir, si la aplicación

$$DF : x \in \Omega \rightarrow DF(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

existe y es continua.

Una función será de clase uno si y solo si sus derivadas parciales

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

existen y son continuas [19, p. 236].

**Definición 2.9.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , decimos que un campo  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de *clase  $k \in \mathbb{N}$  en  $\Omega$* , y lo denotamos por  $F \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , si es  $k$ -veces diferenciable.

**Definición 2.10.** Dado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , decimos que un campo  $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de *clase infinito en  $\Omega$* , y lo denotamos por  $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , si es de clase  $k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Decimos que un campo en estas condiciones es *regular*.

**Teorema 2.11 (de la Función Implícita [13], Teorema 1.3.1).** Sea  $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  con  $\Omega \subset B_1 \times B_2$  abierto y  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . Si  $F(x_0, y_0) = 0$  y  $D_y F(x_0, y_0)$  es invertible, donde  $D_y(\cdot)$  denota la derivada parcial respecto de la variable  $y$ , entonces existen dos entornos  $U$  de  $x_0$  y  $V$  de  $y_0$  y  $f \in \mathcal{C}(U, V)$  satisfaciendo:

- $f(x_0) = y_0$ ,
- $F(x_0, f(y_0)) = 0$ ,
- si existen  $x \in U$ ,  $y \in V$  tales que  $F(x, f(y)) = 0$ , entonces  $f(x) = y$ .

Gracias a este teorema podemos aportar condiciones suficientes para garantizar que una función sea localmente invertible, mediante el siguiente resultado.

**Corolario 2.12 (de la Función Inversa).** Sea  $F \in \mathcal{C}^r(A, \mathbb{R}^n)$  y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Si  $DF(x)$  es invertible (isomorfismo), entonces existen  $U \subset A$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  abiertos tales que  $x_0 \in U$  y existe  $(F|_U^{-1}) \in \mathcal{C}^r(V, U)$ .

*Demostración.* Basta considerar  $G : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $G(x, y) = F(x) - y$ , y aplicar el Teorema de la Función Implícita. ■

**Definición 2.13.** Dadas  $F, G \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ :

- decimos que  $F$  y  $G$  son *homótopas* si existe  $H \in \mathcal{C}^k([0, 1] \times \Omega, \mathbb{R}^m)$  tal que  $H(0, x) = F(x)$  y  $H(1, x) = G(x)$  para todo  $x \in \Omega$ .  $H$  será una *homotopía* entre  $F$  y  $G$  y lo denotaremos  $F \simeq G$ .
- Decimos que una aplicación es *nulhomótopa* si es homótopa a una aplicación constante.
- Decimos que  $\Omega$  es *contráctil* si es homótopo a un punto; equivalentemente, si la identidad  $\text{Id}_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$  es nulhomótopa.

*Notación 2.14.* Denotamos  $H(t, \cdot) = H_t$  y  $H(t, x) = H_t(x)$ . Análogamente, denotamos  $H(\cdot, x) = H^x$  y  $H^x(t) = H(t, x)$ .

**Lema 2.15 (de Sard [13], Teorema 1.3.4).** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y sea  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . El pliegue de  $F$   $F(Z_F)$ , tiene medida de Lebesgue cero.

**Teorema 2.16 (de aproximación de Weierstrass [14], Teorema 4.11-5).** El conjunto formado por los polinomios con coeficientes reales es denso en el espacio de funciones continuas, es decir, para cualquier  $\varepsilon > 0$  y para cualquier función  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , existe un polinomio de coeficientes reales  $p$ , tal que  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$ .

## 2.2. Espacios de Banach

**Definición 2.17.** Sea  $\mathbb{F}$  el cuerpo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  con  $|\cdot|$ , que denota el valor absoluto o el módulo respectivamente. Decimos que un par  $(V, \|\cdot\|)$  es un  $\mathbb{F}$ -espacio (vectorial) normado si  $V$  es un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial y  $\|\cdot\|$  es una *norma*, es decir, una aplicación  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que cumple las siguientes propiedades:

- (1)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  para  $u, v \in V$  (*desigualdad triangular*);
- (2)  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$  para  $\lambda \in \mathbb{F}, u \in V$ ;
- (3) si  $u \in V$  y  $\|u\| = 0$ , entonces  $u = 0$ .

*Observación 2.18.* De hecho, por la propiedad (2) de la Definición 2.17, tenemos que  $u \in V$ ,  $\|u\| = 0$  si y solo si  $u = 0$ . Efectivamente,  $\|u\| = \|0\| = \|0v\| = |0| \|v\| = 0$  para cualquier  $v \in V$ .

**Definición 2.19.** Decimos que un par  $(X, d)$  es un *espacio métrico* si  $X$  es un conjunto y  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación llamada *distancia* o *métrica*, que cumple las siguientes propiedades:

- (1)  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ ;
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$  (*simetría*);

(3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in X$  (*desigualdad triangular*).

*Observación 2.20.* En un espacio normado, la norma  $\|\cdot\|$  induce una distancia  $d(x, y) := \|y - x\|$ . De esta manera, un espacio normado será un espacio vectorial métrico.

Podemos trabajar entonces a partir de ahora con varias normas. Denotaremos por  $\|\cdot\|$  la norma euclidiana usual y por  $d$  la correspondiente distancia inducida usual. Además, también usaremos  $\|x\|_\infty := \sup_{j=1, \dots, n} |x_j|$ . En el espacio de las funciones continuas  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ , distinguiremos entre  $\|F\|_0 := \sup_{x \in X} \|F(x)\|$  y  $\|F\|_\infty := \sup_{x \in X} \|F(x)\|_\infty$ , aunque son equivalentes.

**Definición 2.21.** Se dice que un espacio métrico  $(X, d)$  es un espacio *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente, donde recordamos que una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $X$  se dice de Cauchy si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$  para cualesquiera  $p, q > N$ .

**Definición 2.22.** Decimos que un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un *espacio de Banach* si, con la distancia inducida, es un espacio métrico completo.

**Ejemplo 2.23.** El espacio de las funciones continuas acotadas,  $(\mathcal{B}\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ , definido como  $\mathcal{B}\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n) = \{F \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n) : \|F\|_\infty < \infty\}$  es un espacio de Banach. Si  $X$  es compacto, se tiene que  $\mathcal{B}\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n)$ .

## 2.3. Operadores compactos

Cuando estemos trabajando con espacios normados hablaremos en general de operadores en vez de funciones. Al conjunto de operadores lineales de  $X$  en  $Y$  lo denotamos por  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

**Definición 2.24.** Sean  $X, Y$  espacios normados. Decimos que un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  es *acotado* si para todo subconjunto  $A \subset X$ , tenemos que  $T(A)$  está acotado. Si consideramos la norma de operadores

$$\|T\| := \sup_{x \in X; \|x\| \leq 1} \|Tx\| \in [0, \infty],$$

podemos definir  $\mathcal{L}\mathcal{B}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : \|T\| < \infty\}$  como el *conjunto de operadores lineales acotados*.  $(\mathcal{L}\mathcal{B}(X, Y), \|T\|)$  será un espacio normado.

**Definición 2.25.** Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  es *continuo* si para todo  $\varepsilon > 0$  y todo  $x \in X$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|Tx - Ty\|_Y < \varepsilon$  para todo  $y \in X$  tal que  $\|x - y\|_X < \delta$ .

*Observación 2.26.* Dado un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$ , es equivalente decir que es acotado y decir que es compacto. Concretamente, se cumple la siguiente cadena de equivalencias:

- (1)  $T$  es continuo.
- (2)  $T$  es acotado.
- (3) Existe un entorno de cero  $U$  tal que  $T(U)$  es acotado.
- (4) Existe  $M > 0$  tal que  $\|Tx\| \leq M\|x\|$ .

**Definición 2.27.** Sean  $X, Y$  espacios normados. Decimos que un operador continuo  $T : \overline{\Omega} \subset X \rightarrow Y$  es *compacto* si  $T(A)$  es relativamente compacto para todo  $A \subset X$  acotado, i.e., si  $\overline{T(A)}$  es compacto. Denotamos el conjunto de operadores compactos de  $X$  en  $Y$  como  $\mathcal{L}\mathcal{K}(X, Y)$ .

**Definición 2.28.** Sean  $X, Y$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un operador lineal acotado. Diremos que  $T$  es de *rango finito* si  $T(X)$  está contenido en un espacio vectorial de dimensión finita. Al conjunto de operadores de rango finito de  $X$  en  $Y$  lo denotamos por  $\mathcal{FR}(X, Y)$ .

**Definición 2.29.** Sean  $X, Y$  espacios métricos y  $F \subset \mathcal{C}(X, Y)$ . Diremos que  $F$  es *equicontinuo* en  $x_0 \in X$  si para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, si  $x \in X$ ,  $d(x_0, x) < \delta$ , entonces  $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$  para todo  $f \in F$ . Decimos que  $F$  es *equicontinuo* si es equicontinuo en  $x$  para todo  $x \in X$ .

Decimos que  $F$  es *uniformemente equicontinuo* si, para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe  $\delta \in \mathbb{R}^+$  tal que si  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) < \delta$ , entonces  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$  para toda  $f \in F$ .

**Teorema 2.30 (Ascoli-Arzelà).** Sea  $I = [a, b]$  un intervalo compacto en  $\mathbb{R}$  y  $F \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . Entonces  $F$  es relativamente compacto si y solo si  $F$  es uniformemente acotado y equicontinuo.

## 2.4. Espacios de Hilbert

**Definición 2.31.** Sea  $\mathbb{F}$  el cuerpo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  con  $|\cdot|$ , que denota el valor absoluto o el módulo respectivamente. Dado un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial  $V$ , definimos un *producto escalar o interior* en  $V$  como una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  que, para  $u, v, w \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ , cumple las siguientes propiedades:

- (1) *Linealidad en la primera componente:*  $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$ .
- (2) *Hermiticidad:*  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ .
- (3) *Positividad:*  $\langle u, u \rangle \geq 0$ .
- (4) *Definición:* Si  $\langle u, u \rangle = 0$ , entonces  $u = 0$ .

**Observación 2.32.** En un espacio vectorial dotado de un producto escalar  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , se define una norma dada por  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  para todo  $x \in X$  que, a su vez, induce una métrica.

**Definición 2.33.** Un espacio dotado de producto escalar se dice un *espacio de Hilbert* si, con la distancia inducida, es un espacio métrico completo.

**Ejemplo 2.34.** Nótese que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio de Banach en el que todas las normas son equivalentes. Además, si definimos en este espacio el producto escalar usual,  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , es un espacio de Hilbert con la norma que este induce.

**Teorema 2.35 (de la Proyección ortogonal [14], Teorema 3.3.1).** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $K$  un subconjunto convexo, cerrado y no vacío. Para cada  $x \in H$ , existe un único punto  $P_K(x) \in K$  tal que

$$\|x - P_K(x)\| = \inf_{y \in K} \|x - y\| =: d(x, K).$$

**Definición 2.36.** Llamamos *proyección ortogonal* la aplicación  $P_K : \mathbb{R} \rightarrow K$ , que es continua.

## 3. El índice y el grado

Antes de adentrarnos en el estudio de algunos de los teoremas que abarca la teoría del índice de punto fijo, introduciremos los conceptos de grado e índice topológicos, presentaremos algunas de sus propiedades y buscaremos relacionarlos entre sí. Nos proponemos profundizar en el estudio de estas herramientas desde una perspectiva analítica, basada en el enfoque de Nagumo [18] y utilizando un lenguaje y notación actuales que faciliten la comprensión. Esto será de gran utilidad para la teoría que se desarrollará posteriormente; pues no solo permitirá una exposición más clara, sino que también resaltará la vigencia de estas herramientas en el estudio de problemas no lineales, particularmente en aquellos relacionados con la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales.

Empezaremos introduciendo el grado topológico (o grado de Brouwer) en dimensión finita, concretamente para campos vectoriales  $\mathcal{C}^1$ . El objetivo es extender la definición a funciones continuas, para obtener una expresión más general y aplicable a otros contextos. Esto será un primer paso para demostrar elegantemente uno de los resultados principales de este trabajo, el Teorema de punto fijo de Brouwer.

### 3.1. Contexto histórico

La teoría relativa a los teoremas de punto fijo tiene sus orígenes en el siglo XIX, cuando diversos matemáticos, como Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) o Jacques Charles François Sturm (1803-1855), establecieron condiciones necesarias sobre los coeficientes de ecuaciones reales para determinar la cantidad de soluciones reales de estas en un intervalo. Paralelamente, Augustin Louis Cauchy (1789-1857) desarrolló una herramienta esencial para el caso complejo en el contexto de las funciones holomorfas en dominios simplemente conexos; usando integrales de frontera introdujo el concepto de índice de una curva cerrada (conocido como *winding number*), que mide las veces que una curva rodea un punto en el plano complejo.

En 1869, Leopold Kronecker, matemático alemán, generalizó estas ideas al contexto de sistemas de ecuaciones [15]. Su enfoque, basado en integrales de frontera, le permitió definir un índice topológico que permitía conocer la cantidad de soluciones de un sistema de ecuaciones que permanecen estables ante pequeñas perturbaciones. Este índice fue un avance notable, precursor del grado topo-

lógico moderno, aunque solo se definiese para funciones regulares. Inicialmente, Kronecker no tuvo un gran seguimiento, aunque poco después Jacques Hadamard extendió sus avances a funciones continuas y variedades más genéricas [10].

Consideremos  $F \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Nos interesa determinar cuándo la ecuación  $F(x) = y$  tiene al menos una solución en un subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , saber si esta solución es única o no, e incluso la forma en que las soluciones se distribuyen en el conjunto de estudio. Además, será útil analizar los cambios que se producen al alterar ligeramente parámetros como el campo o el punto. Problemas como este se estudian continuamente en diversos contextos matemáticos. Sin embargo, los resultados obtenidos no son siempre aplicables a problemas como los de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, por lo que surgió la necesidad de construir una herramienta aplicable a estas situaciones: el grado topológico, introducido formalmente por L. E. J. Brouwer a principios de siglo XX en el contexto de las aplicaciones continuas entre variedades compactas orientadas [4]. Aunque Hadamard ya habría enunciado algún resultado similar, Brouwer definió formalmente el grado, y lo usó en 1911 para presentar una demostración sencilla basada en complejos simpliciales del teorema de punto fijo, motivo por el que llevan su nombre. Todo esto resultó estar estrechamente relacionado con el índice de Kronecker y sirvió para conectar conceptos analíticos y topológicos, así como para consolidar la teoría de punto fijo.

Posteriormente, Albrecht Dold desarrolló métodos para definir y calcular el grado de aplicaciones continuas en contextos más generales, incluyendo espacios de dimensión infinita [9]. Trabajó en la formalización del *número de Lefschetz*, que generaliza el concepto de grado a aplicaciones entre variedades compactas eliminando las condiciones de orientación, y estableció conexiones de gran relevancia entre el grado y otros invariantes topológicos, como la característica de Euler. Su enfoque permitió aplicar la teoría del grado a una amplia gama de problemas en topología y análisis.

### 3.2. El grado de Brouwer para funciones $\mathcal{C}^1$

El grado topológico es una herramienta que surge como una forma de contar, con signo y multiplicidad, el número de soluciones de una ecuación del tipo  $F(x) = y$ . Puede entenderse como un número entero que mide las veces que la imagen de un conjunto por una función diferenciable alcanza o cubre un valor objetivo, teniendo en cuenta si la orientación local se mantiene o se invierte. Así, muestra cómo la función  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  modifica el espacio alrededor de determinados puntos. Esencialmente, sustituye la suma algebraica usual por una que tiene en cuenta la variación del signo de la derivada en los puntos en los que tal valor es alcanzado. Para campos vectoriales, la idea es similar pero se trabaja en términos del signo del determinante de la matriz jacobiana. Su gran forta-

leza es que permanece invariante bajo homotopías y, por tanto, puede aplicarse a funciones donde otros métodos analíticos fallan.

En lo sucesivo, salvo que se indique lo contrario,  $\Omega$  denotará un conjunto abierto y acotado.

**Definición 3.1.** Sea  $F \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^n)$  y un conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado tal que  $\bar{\Omega} \subset X$ . Dado  $q \in \mathbb{R}^n \setminus (F(Z_F) \cup F(\partial\Omega))$ , se define el *grado topológico* o *grado de Brouwer* de  $F$  en  $q$  relativo a  $\Omega$  como

$$g(F, \Omega, q) = \sum_{x \in F^{-1}(q) \cap \Omega} \text{sign}(J_F(x)). \quad (3.1)$$

*Observación 3.2.* En caso de que  $F^{-1}(q) \cap \Omega = \emptyset$ , definimos el grado en  $q$  como  $g(F, \Omega, q) = 0$ .

**Lema 3.3.** Dados  $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \in \mathbb{R}^n \setminus F(Z_F)$ ,  $F^{-1}(q)$  es finito.

*Demostración.* Por ser  $F$  continua,  $F^{-1}(p) \subset \Omega$  es cerrado y compacto\*. Si fuese infinito, por la caracterización de compacidad de Bolzano-Weierstrass, tendrá un punto de acumulación. Basta entonces ver que todos sus puntos son aislados. Dado  $x \in F^{-1}(p)$ , sabemos que  $J_F(x) \neq 0$  y por el Teorema de la función inversa,  $F$  es invertible en un entorno  $U$  de  $x$ , por lo que es inyectiva y no existe ningún  $y \in U$  tal que  $y \in F^{-1}(q)$ , o lo que es lo mismo, todo  $x \in F^{-1}(q)$  es aislado, luego  $F^{-1}(q)$  es finito. ■

*Observación 3.4.* Tomamos  $q \notin F(\partial\Omega)$ , pues de lo contrario podría haber puntos arbitrariamente cerca de la frontera. Del mismo modo, tomamos  $q \notin F(Z_F)$ , pues en otro caso no podríamos hablar del signo de  $J_F(x)$  y además, al no ser la función localmente invertible, podría haber infinitas soluciones en un entorno, dejando así de tener una suma finita.

*Observación 3.5.* El grado toma valores enteros.

*Observación 3.6.* El grado está bien definido. Como  $F \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R}^n)$  y  $q \notin (F(Z_F) \cup F(\partial\Omega))$ , dado  $x \in F^{-1}(q)$  se tiene que  $DF(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  está bien definida y su determinante tendrá signo o positivo o negativo, pues  $J_F(x) \neq 0$ . Además, del lema anterior deducimos que el conjunto  $F^{-1}(q) \subset \bar{\Omega}$  es finito y la expresión (3.1) es una suma finita.

**Ejemplo 3.7 (Normalización).** Sea  $\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la identidad en  $\mathbb{R}^n$ ,

$$g(\text{Id}, \Omega, q) = \begin{cases} 1, & \text{si } q \in \Omega, \\ 0, & \text{si } q \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

---

\*La imagen recíproca de un conjunto cerrado por una aplicación continua es cerrado, y un cerrado contenido en un compacto es compacto.

**Ejemplo 3.8.** Dado un isomorfismo lineal  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$g(A, \Omega, q) = \begin{cases} \text{sign}(J_A(x)) = \text{sign}(\det A), & \text{si } q \in A(\Omega), \\ 0, & \text{si } q \notin A(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Además, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son los valores propios asociados a  $A$ , con multiplicidades  $m_1, \dots, m_r$  respectivamente. Como los valores complejos aparecen en pares conjugados, sabemos que  $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_r$  y entonces  $\text{sign}(\det(A)) = (-1)^m$ , donde  $m$  es la suma de multiplicidades asociadas a los valores negativos.

**Ejemplo 3.9.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función de una variable. Podemos definir entonces el grado para  $f(b)f(a) \neq 0$  como

$$g(f, (a, b), 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(a)f(b) > 0, \\ 1, & \text{si } f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0, \\ -1, & \text{si } f(a) < 0 \text{ y } f(b) < 0. \end{cases}$$

**Ejemplo 3.10.** Sea  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  un polinomio real con  $a_n \neq 0$ . Entonces, para  $R > 0$  suficientemente grande,

$$g(p, (-R, R), 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{a_n}{|a_n|}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Para poder estudiar las propiedades principales del grado, extender su definición y relacionarlo con el *índice topológico*, se introduce la *fórmula integral del grado*. La idea es pasar de una suma finita a una integral aproximando el valor mediante funciones continuas de soporte compacto, que satisfacen ciertas propiedades.

**Definición 3.11.** Fijamos  $N \in \mathbb{N}$  y definimos la función de soporte compacto  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  como

$$\phi(x) := \begin{cases} c \exp \frac{1}{\|x\|^2 - 1}, & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0, & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

con  $C > 0$  y de modo que  $\int_{\mathbb{R}^N} \phi \, dx = 1$ . Para  $\delta > 0$ , definimos

$$\phi_\delta := \frac{1}{\delta^N} \phi\left(\frac{x}{\delta}\right).$$

Estas funciones cumplen que  $\phi_\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$   $\int_{\mathbb{R}^N} \phi_\delta \, dx = 1$  y  $\text{sop}(\phi_\delta) = B_{\mathbb{R}^N}[0; \delta]$ . Así, forman una familia de funciones regularizadoras o mollifiers.

**Proposición 3.12** ([1], Proposición 2.18). Sea  $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ . Para  $\delta > 0$ , definimos la regularización de  $u$  por  $\phi_\delta$  como  $u_\delta : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$u_\delta(x) := (\phi_\delta * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi_\delta(x-y)u(y)dy.$$

Entonces,  $u_\delta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$  y  $u_\delta$  converge uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{R}^N$ .

Llegamos así a la siguiente formulación:

**Proposición 3.13 (Fórmula integral del grado).** Sean  $F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q$  en las condiciones de la definición anterior. Entonces existe  $\delta_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que para todo  $\delta$  tal que  $0 < \delta < \delta_0$ ,

$$g(F, \Omega, q) = \int_{\Omega} \phi_\delta(F(x) - q)J_F(x)dx \quad (3.2)$$

para toda  $\phi_\delta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  cumpliendo  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\delta(x)dx = 1$  y  $\text{sop}(\phi_\delta) = \overline{\mathbb{R}^n \setminus \phi_\delta^{-1}(0)} \subset B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)$ .

*Demostración.* Vamos a separar en dos casos, según la naturaleza de  $F^{-1}(q)$ :

*Caso 1:*  $F^{-1}(q) = \emptyset$ . Podemos considerar  $\delta_0 := d(q, F(\overline{\Omega})) > 0$ , aunque valdría también cualquier valor positivo menor que esta cantidad. Como  $F^{-1}(q) = \emptyset$ , se tiene que  $\|F(x) - q\| \geq \delta_0$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ , y entonces  $F(x) - q \notin \text{sop}(\phi_\delta) \subset B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta) \subset B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta_0)$  para cualquier  $\phi_\delta$  en las hipótesis del enunciado, por lo que  $\phi_\delta(F(x) - q) = 0$ . Así,

$$\int_{\Omega} \phi_\delta(F(x) - q)J_F(x)dx = 0.$$

Como además  $g(F, \Omega, q) = 0$  por definición, se tiene la igualdad.

*Caso 2:*  $F^{-1}(p) \neq \emptyset$ . En este caso tenemos  $F^{-1}(p) = \{x_0, \dots, x_m\}$ . Como  $J_F(x_k) \neq 0$  para  $k = 1, \dots, m$ ; por continuidad existirán entornos  $U_k$  de  $x_k$  disjuntos dos a dos y  $V_k$  de  $q$  para todo  $k = 1, \dots, m$ ; de modo que  $F|_{U_k} : U_k \rightarrow V_k$  es un homeomorfismo. Consideremos  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que:

- $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_k, r)} \subset \overline{U_k}$ ,  $k = 1, \dots, m$ ;
- $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_k, r)} \cap \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_j, r)} = \emptyset$  para  $j \neq k$ .

Además, si fuese necesario podríamos reducir estos entornos, es decir, tomar un  $r_0 \in \mathbb{R}^+$  tal que  $0 < r_0 < r$  de modo que  $J_F(x) \neq 0$  para todo  $x \in \bigcup_{k=1}^m \overline{B(x_k, r_0)}$  e incluso para que el signo de  $J_F|_{B_{\mathbb{R}^n}(x_k, r_0)}$  sea constante. Por el Teorema de la función inversa,  $F$  es un difeomorfismo local en cada  $x_k$  y entonces  $\bigcap_{k=1}^m F(B_{\mathbb{R}^n}(x_k, r))$  es abierto, por lo que existe  $\delta_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$B_{\mathbb{R}^n}(p, \delta_0) \subset \bigcap_{k=1}^m F(B_{\mathbb{R}^n}(x_k, r)) \quad \text{y} \quad F^{-1}(B_{\mathbb{R}^n}(p, \delta_0)) \subset \bigcup_{k=1}^m \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_k, r)}.$$

Definimos:

- $B := F^{-1}(B_{\mathbb{R}^n}(p, \delta_0))$ ,
- $B_k = \overline{B_{\mathbb{R}^n}(x_k, r)} \cap B$ ,
- $C_k = F(B_k)$ .

Nótese que los  $B_k$  son disjuntos dos a dos y que  $B = \bigcup_{k=1}^m B_k$ . Tomamos  $\phi_\delta$  en las hipótesis de la proposición para cualquier  $0 < \delta < \delta_0$  y se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \phi_\delta(F(x) - q) J_F(x) dx &= \int_B \phi_\delta(F(x) - q) |J_F(x)| \text{sign}(J_F(x)) dx \\
 &= \sum_{k=1}^m \int_{B_k} \phi_\delta(F(x) - q) |J_F(x)| \text{sign}(J_F(x_k)) dx \\
 &= \sum_{k=1}^m \text{sign}(J_F(x_k)) \int_{C_k} \phi_\delta(z - q) dz \\
 &= \sum_{k=1}^m \text{sign}(J_F(x_k)) \int_{B_{\mathbb{R}^n}(0, \delta)} \phi_\delta(y) dy = \sum_{x \in F^{-1}(q) \cap \Omega} \text{sign}(J_F(x)) = g(F, \Omega, q). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Esta formulación del grado permite no solo trabajar de manera más cómoda, sino que también hace posible probar una serie de resultados que enunciaremos a continuación y que son cruciales para extender la definición del grado tanto a valores críticos como a funciones continuas. Estamos hablando de resultados de estabilidad del grado con respecto a pequeñas perturbaciones de los parámetros que afectan a su definición (el campo  $F$  y el punto  $q$ ). Para que el grado sea útil en su aplicación práctica, es fundamental que sea invariante ante pequeñas perturbaciones de los parámetros de los que depende. El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la cantidad de ceros es una propiedad que, en general, no se conserva.

**Ejemplo 3.14.** Sea  $f : x \in \Omega = [-1, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ . La ecuación  $f(x) = 0$  tiene una solución en el conjunto considerado;  $x = 0$ . Sin embargo, basta tomar una pequeña perturbación del campo  $f$  para que el número de raíces cambie. En efecto, si consideramos  $\hat{f} = f + \varepsilon$ , con  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  tan pequeño como queramos; para  $\varepsilon > 0$  la ecuación deja de tener soluciones reales, y para  $\varepsilon < 0$ , pasa a tener dos:  $\sqrt{\varepsilon}$  y  $-\sqrt{\varepsilon}$ . El grado, sin embargo, será el mismo en todos estos casos, gracias a los resultados que presentamos a continuación.

**Teorema 3.15 (Estabilidad del grado con respecto del campo [20], Lema 3.8).** Sean  $F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y un punto cualquiera  $q \in \mathbb{R}^n \setminus (F(Z_F) \cup F(\partial\Omega))$ . Entonces existe  $\delta \in \mathbb{R}^+$  tal que para todo  $G \in B_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)}(F, \delta)$  se tiene que  $q \in \mathbb{R}^n \setminus (G(Z_G) \cup G(\partial\Omega))$ . Además,  $g(G, \Omega, q) = g(F, \Omega, q)$ .

**Teorema 3.16 (Invarianza/Estabilidad del grado respecto del punto [13], Teorema 2.2.1).** *Sea  $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Gamma \in \Omega$  una componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$  y  $q_1, q_2 \in \Gamma \setminus F(Z_F)$ . Se tiene que  $g(F, \Omega, q_1) = g(F, \Omega, q_2)$ .*

Estos resultados permiten extender de modo natural la definición del grado a valores críticos.

**Definición 3.17.** *Sea  $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \in F(Z_F) \setminus F(\partial\Omega)$ . Definimos el grado de  $F$  relativo a  $\Omega$  en  $q$  como  $g(F, \Omega, q) = g(F, \Omega, p)$ , donde  $p$  es cualquier punto  $p \in B_{F(\Omega)}(q, d(q, F(\partial\Omega))) \setminus F(Z_F)$ .*

*Observación 3.18.* Esta extensión a puntos en  $F(Z_F)$  está bien definida y además mantiene la estabilidad respecto del campo y del punto. En efecto, por el Lema de Sard 2.15 existirá algún punto  $p \notin F(Z_F)$  en el entorno de  $q$  escogido, es decir,  $B_{F(\Omega)}(q, d(q, F(\partial\Omega))) \setminus F(Z_F) \neq \emptyset$ . Además, dados  $p_1, p_2$  dos puntos en dicho entorno, se tendrá que  $g(F, \Omega, p_1) = g(F, \Omega, p_2)$ , usando el Teorema 3.16 y el hecho de que  $B_{F(\Omega)}(q, d(q, F(\partial\Omega)))$  es conexo.

Podemos recoger toda esta información enunciando un teorema de invarianza de homotopía, una de las propiedades clave del grado, que lo convierte en una herramienta robusta para estudiar la existencia de soluciones incluso cuando estas no se pueden obtener de forma explícita.

**Teorema 3.19 (Invarianza de homotopía  $\mathcal{C}^1$ ).** *Dada  $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \in \mathbb{R}^n$ , se cumple que*

- (1)  $g(F, \Omega, q)$  es constante en las componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$ .
- (2) **Continuidad con respecto del campo:** *Dado un punto  $q \notin F(\partial\Omega)$ , existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tal que  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$  para cualquier  $G \in B_{\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)}(F, \varepsilon)$ .*
- (3) **Invarianza bajo homotopía:** *Para toda homotopía  $H \in \mathcal{C}^1([0, 1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  entre  $F, G \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  con  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ , se tiene que  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$ .*

*Demostración.* (1) Sean  $q_1$  y  $q_2$  dos puntos en la misma componente conexa. Si ambos puntos son regulares, se deduce del Teorema 3.16 de invarianza del grado respecto del punto. Si no, el Lema de Sard 2.15 garantiza la existencia de dos puntos regulares  $p_i \in B_{F(\Omega)}(q_i, d(q_i, F(\partial\Omega))) \setminus F(Z_F)$  para  $i = 1, 2$  tan próximos como queramos. Estos seguirán estando en una misma componente conexa, y sabemos entonces que

$$g(F, \Omega, q_1) = g(F, \Omega, p_1) = g(F, \Omega, p_2) = g(F, \Omega, q_2).$$

- (2) Sea  $q \notin F(\partial\Omega)$ . Si  $q \notin F(Z_F)$  se sigue del Teorema 3.16. En caso contrario, basta tomar un punto regular  $p$  tal que  $\|p - q\| < \frac{1}{2}d(q, F(\partial\Omega)) =: \delta$ , cosa que podemos hacer por el Lema de Sard 2.15. Usando el Teorema 3.15 obtenemos fácilmente la igualdad para este punto  $p$ .  $p$  y  $q$  están en la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$ , así que basta ver que están en la misma

componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus G(\partial\Omega)$ . Para cualquier punto fijado de la frontera,  $x \in \partial\Omega$ ,

$$\|G(x) - q\| > \|F(x) - q\| - \|G(x) - F(x)\| > d(q, F(\partial\Omega)) - \frac{1}{2}d(q, F(\partial\Omega)) = \delta > \|p - q\| > 0,$$

y entonces  $q \notin G(\partial\Omega)$ . Tomando ínfimos con respecto a  $x \in \partial\Omega$  en la desigualdad anterior,  $\|p - q\| \leq d(q, G(\partial\Omega))$ . Como  $q$  no está en  $G(\partial\Omega)$  (que es cerrado), la desigualdad es estricta, por lo que están en la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus G(\partial\Omega)$ . Así, usando (1),

$$g(F, \Omega, q) = g(F, \Omega, p) = g(G, \Omega, p) = g(G, \Omega, q).$$

- (3) El grado para  $H_t = H(t, \cdot)$  está bien definido en  $q$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Definimos  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$  como  $u(t) = g(H_t, \Omega, q)$  y tomamos  $t \in [0, 1]$ . Por el apartado anterior, existe  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  tal que si  $\|H_t - H'_t\|_0 < \varepsilon$ , entonces  $g(H_t, \Omega, q) = g(H'_t, \Omega, q)$ . Pero como  $H \in \mathcal{C}^1([0, 1] \times \bar{\Omega})$ , para este  $\varepsilon$ , existe  $\delta \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\|H_t - H_s\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$  para todo  $s \in [0, 1]$  con  $|t - s| < \delta$ . Así,  $u(t) = u(s)$ . Como estamos trabajando en  $\mathbb{Z}$  con la topología discreta,  $u$  es continua y entonces  $u$  es necesariamente constante. Concretamente,

$$g(F, \Omega, q) = u(0) = u(1) = g(G, \Omega, q). \quad \blacksquare$$

### 3.3. El grado de Brouwer para funciones continuas

Una vez definido el grado y sus propiedades para  $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ , estamos en las condiciones adecuadas para extenderlo a funciones  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . En esencia, esto consiste en definirlo como el grado de una aproximación  $\mathcal{C}^1$  de la función dada. Esto es posible gracias a los resultados de estabilidad enunciados previamente.

**Definición 3.20.** Sea  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \in \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$ . Se define el grado de  $F$  en  $q$  relativo a  $\Omega$  como  $g(F, \Omega, q) := g(G, \Omega, q)$  para cualquier  $G \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|G - F\|_0 < d(q, F(\partial\Omega))$ , o lo que es lo mismo,  $G \in (B_{\mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)}(F, \delta) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n))$  con  $0 < \delta < d(q, F(\partial\Omega))$ .

*Observación 3.21.* El grado para funciones continuas está bien definido. En efecto, el Teorema de aproximación de Weierstrass 2.16 establece que toda  $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ , donde  $K \subset \mathbb{R}^n$  es un compacto, puede ser aproximada uniformemente por polinomios. Como estamos en las condiciones del teorema, verificamos la existencia de funciones  $h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tales que  $\|F - h\| < \varepsilon$  aplicándolo a cada componente de  $F$ ,  $F_j \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ . Así, existirá  $G = (h_1|_{\bar{\Omega}}, \dots, h_n|_{\bar{\Omega}}) \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|G - F\|_0 < d(q, F(\partial\Omega))$ . Como  $q \notin F(\partial\Omega)$ , se tiene que  $q \notin G(\partial\Omega)$  y el grado de  $G$  en  $q$  relativo a  $\Omega$  está bien definido por el Teorema 3.15.

Además, necesitamos comprobar que esta definición es independiente de la elección de  $G$ . Dadas dos funciones  $G_1, G_2$  en las condiciones anteriores, si consideramos la homotopía

$$H(t, x) = tG_1(x) + (1-t)G_2(x),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \|H(t, x) - F(x)\| &\leq \|t(G_1(x) - F(x))\| + \|(1-t)(G_2(x) - F(x))\| \\ &\leq t d(q, F(\partial\Omega)) + (1-t) d(q, F(\partial\Omega)) = d(q, F(\partial\Omega)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

de donde deducimos que  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ . Por el Teorema 3.19, sabemos que  $g(G_1, \Omega, q) = g(G_2, \Omega, q)$ .

**Proposición 3.22.** *Sea  $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \notin F(\partial\Omega)$ . Entonces  $g(F, A, q) = g(F - q, A, 0)$  para todo  $q \notin F(\partial\Omega)$ .*

*Demostración.* Sea  $G \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $p \notin G(Z_G)$ . Como  $p \notin G(\partial\Omega)$ ,  $\|G(x) - p\| > 0$  para todo  $x \in \partial\Omega$  y entonces  $d(0, G(\partial\Omega) - p) = d(p, G(\partial\Omega)) > 0$ . Así,  $0 \notin G(\partial\Omega) - p$  y el grado está bien definido en 0 para  $G - p$ . Basta aplicar la fórmula integral del grado para ver que  $g(G, \Omega, p) = g(G - p, \Omega, 0)$ . Si tomamos  $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  como en el enunciado, por un razonamiento análogo, el grado está bien definido en 0 para  $F - q$ . Dada  $G \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $G \in B_{\mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)}(F, d(q, F(\partial\Omega))/2)$ ,  $\|(F - q) - (G - q)\| = \|F - G\| < d(q, F(\partial\Omega))/2$  y entonces,  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$  y  $g(F - q, \Omega, 0) = g(G - q, \Omega, 0)$  por la definición del grado para funciones continuas. En caso de que  $q \in G(Z_G)$ , podemos considerar  $p$  tal que  $\|p - q\| < d(q, G(Z_G))/2$ . De este modo,  $g(G - p, \Omega, 0) = g(G - q, \Omega, 0)$  y  $g(G, \Omega, q) = g(G, \Omega, p)$ . Entonces

$$g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q) = g(G, \Omega, p) = g(G - p, \Omega, 0) = g(F - q, \Omega, 0). \quad \blacksquare$$

Aunque hemos definido el grado topológico de una manera puramente analítica, existen muchas otras formas de presentarlo, por ejemplo, a partir de nociones de topología algebraica o la geometría diferencial. Sin embargo, existe una única aplicación que verifica las propiedades que caracterizan al grado, por lo que todas ellas son equivalentes. Esto nos permite introducirlo de forma axiomática, como la única aplicación que verifica determinadas propiedades, entre las que se encuentran las ya mencionadas para el caso  $\mathcal{C}^1$ , que introducimos a continuación.

**Teorema 3.23 (Invarianza de homotopía  $\mathcal{C}^0$ ).** *Dada  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \in \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$ , el grado cumple las siguientes propiedades:*

- (1) **Continuidad respecto del campo:** *Existe un entorno  $U$  de  $F$  en  $\mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$  para cualquier  $G \in U = B_{\mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)}(F, d(q, F(\partial\Omega)))$ .*
- (2)  *$g(F, \Omega, \cdot)$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$ .*

(3) **Invarianza de homotopía:** Para toda homotopía  $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  entre  $F$  y  $G$ , y todo  $q \in \mathbb{R}^n$  tal que  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ , se cumple que  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$ , es decir,  $g(H(\cdot, t), \Omega, q)$  es independiente de  $t$ .

(4) **Aditividad:** Sean  $\{\Omega_j\}_{j=1}^m$  abiertos disjuntos dos a dos, tales que  $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$  y  $q \notin \bigcup_{j=1}^m (F(\Omega_j))$ . Entonces

$$g(F, \Omega, q) = \sum_{j=1}^m g(F, \Omega_j, q).$$

(5) **Escisión:** Sea  $K \subset \bar{\Omega}$  un conjunto compacto tal que  $q \notin F(K)$ . Entonces

$$g(F, \Omega, q) = g(F, \Omega \setminus K, q).$$

*Demostración.* (1) Basta considerar  $T \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|F - T\|_0 < d(q, F(\partial\Omega))$  para que quede definido el grado de  $F$  como el de  $T$ . Si pedimos  $\|F - T\|_0 < d(q, F(\partial\Omega)) - \|F - G\|_0$ , tenemos  $\|G - T\|_0 < \|G - F\|_0 + \|F - T\|_0 < d(q, G(\partial\Omega))$  y  $T$  entonces define también el grado de  $G$ , por lo que

$$g(F, \Omega, q) = g(T, \Omega, q) = g(G, \Omega, q).$$

(2) Dada una componente conexa  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$  y  $q_1, q_2$  dos puntos en ella. Veremos que para  $G \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  están en la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus G(\partial\Omega)$ , de donde usando el Teorema de invarianza del grado para funciones de clase 1 se sigue el resultado. Por ser  $\Gamma$  una componente conexa es conexa por caminos, y podemos considerar entonces  $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], \Omega)$  un camino entre  $q_1, q_2$ , es decir,  $\gamma(0) = q_1, \gamma(1) = q_2$ .

(3) Sea  $u(t) = g(H(t, \cdot), \Omega, q)$ . Por el apartado anterior y la continuidad de la homotopía  $H$ , tenemos que  $u$  es continua en el conexo  $I$ . Como  $u$  toma valores en  $\mathbb{Z}$ , la única manera de que sea continua es que tome siempre un único valor, así que  $u$  es constante.

(4) Tomamos  $G \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|F - G\| < d(q, F(\partial\Omega))$ , igual que antes. De esta manera,  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$  y  $g(F, \Omega_j, q) = g(G, \Omega_j, q)$  para  $j \in \{1, \dots, m\}$ . El resultado se sigue de que  $\partial\Omega_j \subset \partial\Omega$ , por lo que cualquier punto  $p$  considerado en la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus G(\partial\Omega)$  que  $q$ , estará también en la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus G(\partial\Omega_j)$ . De esta manera,  $g(G, \Omega, q) = g(G, \Omega, p)$  y  $g(G, \Omega_j, q) = g(G, \Omega_j, p)$ . Para  $T \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , el resultado se sigue de la definición del grado. Entonces

$$g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q) = g(G, \Omega, p) = \sum_{j=1}^m g(G, \Omega_j, p) = \sum_{j=1}^m g(G, \Omega_j, q) = \sum_{j=1}^m g(F, \Omega_j, q).$$

- (5) Una vez más, escogemos  $G \in \mathcal{C}^1$  tal que  $\|F - G\| < d(q, F(\partial\Omega))$  y además tal que  $q \notin G(K)$ . Escogemos un valor regular  $p$  de  $G$  tal que  $p \notin G(K)$  y pertenezca a la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus G(\partial\Omega)$  y de  $\mathbb{R}^n \setminus G(\partial(\Omega \setminus K))$  que  $q$ . Entonces, por la definición del grado para  $G$ ,

$$g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, p) = g(G, \Omega \setminus K, p) = g(G, \Omega \setminus K, q). \quad \blacksquare$$

*Observación 3.24.* Pueden verse también como propiedades del grado topológico la existencia (Teorema 3.25) y la normalización (Ejemplo 3.7).

Estas propiedades ponen de manifiesto cómo para estudiar los ceros de una función (o las veces que alcanza cierto valor) podemos prescindir de subconjuntos del dominio donde sabemos de antemano que no habrá soluciones. Siguiendo esta idea, enunciaremos un par de resultados que serán de gran utilidad en la práctica y en el estudio de puntos fijos y soluciones de ecuaciones.

**Teorema 3.25 (de existencia de solución).** Sean  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \notin F(\partial\Omega)$ . Si  $g(F, \Omega, q) \neq 0$ , entonces existe al menos un punto  $x \in \Omega$  tal que  $F(x) = q$ .

*Demostración.* Suponemos que, por el contrario, no existe ningún  $x \in \Omega$  tal que  $F(x) = q$ . Entonces, como  $q \notin F(\partial\Omega)$ ,  $q \notin F(\bar{\Omega})$  y podemos considerar  $\delta := d(q, F(\bar{\Omega})) > 0$ . Tomando  $G \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  que cumpla que  $q \notin G(Z_G)$  y  $\|G - F\| < \delta$ ; por definición  $q \notin G(\bar{\Omega})$  y entonces por el Teorema 3.15 tendríamos  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q) = 0$ , en contra de la hipótesis.  $\blacksquare$

*Observación 3.26.* Es equivalente afirmar que, si no existe ningún  $x \in \Omega$  tal que  $F(x) = q$ , entonces necesariamente  $g(F, \Omega, q) = 0$ .

*Observación 3.27.* El recíproco no es cierto, pues hay casos en los que  $g(F, \Omega, q) = 0$  pero existen puntos que verifican la ecuación  $F(x) = q$ . En efecto, basta retomar el Ejemplo 3.14 para  $\varepsilon < 0$ . En este caso, tomando  $q = 0$ ,  $x^2 + \varepsilon = 0$  tiene dos soluciones reales,  $\{+\sqrt{-\varepsilon}, -\sqrt{-\varepsilon}\}$ . Sin embargo, es fácil comprobar que  $g(f, \Omega, 0) = 0$ .

*Observación 3.28.* Ya que el grado estudia las soluciones de una ecuación en un conjunto dado, este concepto es muy útil para encontrar puntos fijos y para desarrollar toda la teoría que los involucra, pues ver la existencia de puntos fijos en  $F$  equivale a hallar  $g(\text{Id} - F, \Omega, 0)$ .

**Corolario 3.29.** Sean  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \notin F(\partial\Omega)$ . Si  $g(F, \Omega, q) \neq 0$ , entonces  $F(\Omega)$  es un entorno abierto de  $q$ .

*Demostración.* Definimos  $C_q$  como la componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$  que contiene a  $q$ . Para cualquier  $c \in C_q$ , el grado valdrá lo mismo que en  $q$ ;  $g(F, \Omega, c) \neq 0$ . Usando el teorema de existencia 3.25, el resultado se sigue de que  $F(C_q) \subset F(\Omega)$  y  $F(C_q)$  es abierto.  $\blacksquare$

**Proposición 3.30.** Sean  $F, G \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Si  $F|_{\partial\Omega} = G|_{\partial\Omega}$ , entonces  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$  para  $q \notin F(\partial\Omega)$ .

*Demostración.* Consideramos la homotopía  $H(t, x) = tF(x) + (1-t)G(x)$ . Como  $F|_{\partial\Omega}$  y  $G|_{\partial\Omega}$ ,  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ , pues de lo contrario,  $q = F(x)$  para algún  $x \in \partial\Omega$ , y entonces que  $q \in F(\partial\Omega)$ , que no puede ser. Así, aplicando el teorema de invarianza de homotopía,  $g(F, \Omega, q) = g(G, \Omega, q)$ . ■

*Observación 3.31.* Esto implica que, mientras  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ , el grado queda determinado por clases de homotopías entre funciones continuas.

### 3.4. Extensión del grado a espacios normados arbitrarios de dimensión finita

Consideremos un espacio vectorial finito  $V$  de dimensión  $n$ . Dada una base  $B$  de  $V$ , podemos identificar  $V$  con  $\mathbb{R}^n$ . Dadas dos bases  $B_1$  y  $B_2$ , un vector  $v \in V$  puede expresarse de dos formas distintas mediante coordenadas respecto de cada base, expresiones que denotaremos por  $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ , respectivamente. Existe una matriz invertible  $M \in GL(n, \mathbb{R})$ , llamada *matriz de cambio de base*, que permite obtener una expresión a partir de la otra, es decir,  $v^{(1)} = Mv^{(2)}$ .

**Lema 3.32.** Sea  $V$  un espacio normado  $n$ -dimensional y  $\varphi \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, V)$ , donde  $\Omega \subset V$ . Si  $q \notin \varphi(\partial\Omega)$  y es un valor regular, entonces  $g(\varphi, \Omega, q)$  es independiente de la base escogida para identificar  $V$  con  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Sea  $\Omega \subset V$  un subconjunto abierto y acotado, y sea  $q \in V$ . Supongamos que  $\varphi : \overline{\Omega} \subset V \rightarrow V$  es una aplicación tal que  $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, V)$ . Como se puede expresar en coordenadas respecto de cada base, definimos  $\varphi_i \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_i, \mathbb{R}^n)$  para  $i = 1, 2$  según las coordenadas que se estén utilizando, donde  $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$  representa  $\Omega$  en coordenadas respecto de la base  $B_i$ . Así, estas se relacionan de la siguiente manera:

$$\varphi_2(x^{(2)}) = M^{-1}\varphi_1(Mx^{(2)}).$$

Esto implica que  $D\varphi(x)$  no depende de la base escogida, ya que

$$D\varphi_2(x^{(2)}) = M^{-1}D\varphi_1(Mx^{(2)})M,$$

y entonces el determinante tendrá el mismo signo y la misma orientación local. Si  $q$  es un valor regular y además  $q \notin \varphi(\partial\Omega)$ , entonces

$$g(\varphi_1, \Omega_1, q^{(1)}) = g(\varphi_2, \Omega_2, q^{(2)}). \quad \blacksquare$$

### 3.5. Extensión del grado a $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

El último paso antes de intentar dar una definición adecuada y similar para espacios arbitrarios, es extender lo presentado hasta ahora para el caso en que la dimensión del dominio es estrictamente mayor que la del codominio. Es decir, consideramos funciones  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  con  $m < n$ , donde la diferencia de dimensión no permite aplicar la definición antes expuesta del grado.

Consideramos un espacio normado  $X$  de dimensión  $n$  y  $\Omega \subset X$  un subconjunto abierto y acotado. Dado  $Y \subset X$  un subespacio de dimensión  $m < n$ , podemos identificarlo con  $\mathbb{R}^m$  y embeberlo en  $X$  (identificado con  $\mathbb{R}^n$ ), considerando las últimas  $n - m$  coordenadas iguales a cero.

**Teorema 3.33.** Sean  $X, Y$  dos espacios normados como los definidos previamente y  $T : \bar{\Omega} \rightarrow Y$  continuo. Definimos  $\varphi = \text{Id} - T$  y, dado  $q \in Y \setminus \varphi(\partial\Omega)$ , consideramos  $q = (q_1, \dots, q_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  y  $Tx = (T_1x, \dots, T_mx, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Si  $T \in \mathcal{C}^1$  y  $q$  es un valor regular de  $\varphi$ , entonces

$$g(T, \Omega, q) = g(T|_{\bar{\Omega} \cap Y}, \Omega \cap Y, q).$$

*Demostración.* Aunque  $\varphi(x)$  tome valores en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que  $T(x), q \in Y$ , así que las soluciones para  $\varphi(x) = x - T(x) = q$  están en  $\Omega \cap Y$ , pues  $x = T(x) + q$  y  $T(x), q \in Y$ . Tenemos que

$$D\varphi(x) = \text{Id} - DT(x) = \begin{pmatrix} \text{Id}_m - \partial_j(T_i(x))_{i,j \in \{1, \dots, m\}} & -(\partial_j(T_i(x)))_{1 \leq i \leq m; m+1 \leq j \leq n} \\ 0 & \text{Id}_{n-m} \end{pmatrix},$$

por lo que  $J_\varphi(x) = \det[\text{Id}_m - (\partial_j(T_i(x)))_{i,j \in \{1, \dots, m\}}]$ . Así,  $J_\varphi(x) = J_{\varphi|_Y}(x) \neq 0$  y  $q$  seguirá siendo un valor regular, ya que si  $\varphi(x) = q$ ,  $x \in Y \cap \Omega$ . De esta manera, podemos restringir  $\varphi$  a  $Y$ . Como  $q \notin \varphi(\partial\Omega)$ , tampoco pertenecerá a la imagen de la frontera de la restricción. Así,

$$g(\varphi, \Omega, q) = \sum_{x \in \varphi^{-1}|_{\bar{\Omega} \cap Y}(q)} \text{sign} J_{\varphi|_{\bar{\Omega} \cap Y}}(x) = g(\varphi|_{\bar{\Omega} \cap Y}, \Omega \cap Y, q). \quad \blacksquare$$

### 3.6. El índice topológico

Podemos localizar el concepto de grado de Brouwer en entornos de puntos aislados de  $F^{-1}(q)$ .

**Definición 3.34.** Dados  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \in F(\Omega) \setminus F(\partial\Omega)$ , decimos que  $x \in \Omega$  es un  $q$ -punto aislado de  $F$  si existe un entorno  $V$  de  $x$  tal que  $q \notin F(V \setminus \{x\})$ . Denotamos por  $\mathcal{U}$  al conjunto formado por los entornos abiertos de  $x$  que verifican esta condición.

**Definición 3.35.** Dados  $q \in F(\Omega) \setminus F(\partial\Omega)$ ,  $F \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{R}^n)$  y  $x$  un  $q$ -punto aislado de  $F$ , definimos el índice de  $F$  en  $x$  como  $\text{ind}(F, x) := g(F, V, q)$  para cualquier  $V \in \mathcal{U}$ .

*Observación 3.36.* El índice está bien definido. En efecto, el grado de  $F$  en  $V$  respecto de  $q$  está bien definido ya que  $q \notin F(\partial V)$ . Dados dos entornos  $U, V \in \mathcal{U}$ , vemos que el valor del índice es el mismo (no depende del entorno escogido). Por ser  $U, V \in \mathcal{U}$ , también tendremos  $U \cup V \in \mathcal{U}$  y además podemos considerar los compactos  $K = \overline{U} \setminus V$ ,  $K' = \overline{V} \setminus U$  para los que  $q \notin F(K) \cup F(K')$ . Usando la propiedad de escisión (pues  $K \subset \overline{U \cup V}$ ),

$$\begin{aligned} g(F, U \cup V, q) &= g(F, \overline{U} \setminus K, q) = g(F, \overline{U} \setminus (U \setminus V), q) = g(F, V, q) \quad \text{y} \\ g(F, U \cup V, q) &= g(F, \overline{V} \setminus K', q) = g(F, \overline{V} \setminus (V \setminus U), q) = g(F, U, q), \end{aligned}$$

de donde se sigue que  $g(F, U, q) = g(F, V, q)$ .

**Ejemplo 3.37.** Consideramos  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineal e invertible. Para  $q \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x = L^{-1}(q)$ ,

$$\text{ind}(L, x) = g(L, V, q) = \text{sign}(\det L).$$

Si se cumplen las condiciones adecuadas, podemos establecer una relación entre el grado de un campo  $F$  en un conjunto  $\Omega$  con respecto a un punto  $q$  y el índice topológico que acabamos de definir.

**Teorema 3.38.** Dada  $F \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  y  $q \notin F(\partial\Omega)$ , se tiene que:

- (1) Si  $F^{-1}(q)$  es finito,  $g(F, \Omega, q) = \sum_{x \in F^{-1}(q)} \text{ind}(F, x)$ .
- (2) Si  $F \in \mathcal{C}^1$ ,  $x \in F^{-1}(q)$  y  $J_F(x) \neq 0$ , entonces  $x$  es  $q$ -punto aislado y el índice coincide con  $(-1)^\mu$ , donde  $\mu$  es el número de valores propios negativos de  $DF(x)$  contando multiplicidades.

*Demostración.* (1) Como  $F^{-1}(q)$  es finito,  $F^{-1}(q) = \{x_1, \dots, x_m\}$  y todos estos  $\{x_k\}_{k=1}^m$  son puntos  $p$ -aislados. Así, el índice está bien definido para ellos. Basta considerar entornos abiertos disjuntos dos a dos de cada uno de los puntos,  $V_1, \dots, V_m$ . Por definición,  $\text{ind}(F, x_k) := g(F, V_k, q)$  para todo  $k = 1, \dots, m$ . Tomamos  $V = \bigcup_{k=1}^m V_k$  y  $K = \overline{\Omega} \setminus V$ . Usando las propiedades de aditividad (4) y escisión (5),

$$g(F, \Omega, q) = g(F, \Omega \setminus K, q) = g(F, V, q) = \sum_{k=1}^m g(F, V_k, q) = \sum_{k=1}^m \text{ind}(F, x_k) = \sum_{x \in F^{-1}(q)} \text{ind}(F, x).$$

(2) Sea un abierto  $V \subset \Omega$  con  $x \in V$  y  $q \notin F(\overline{V} \setminus \{x\})$ . Por definición,

$$\text{ind}(F, x) = g(F, \Omega, q) = \text{sign} J_F(x) = \text{sign}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = (-1)^\mu,$$

donde la última igualdad se tiene porque los valores propios complejos aparecen en pares conjugados. ■

## 4. El Teorema de punto fijo de Brouwer

**Definición 4.1.** Dada una función  $F : X \rightarrow X$ , decimos que  $F$  tiene un *punto fijo* si existe  $x \in X$  tal que  $F(x) = x$ .

El Teorema de punto fijo de Brouwer afirma, en su forma más sencilla, que toda aplicación continua  $F \in \mathcal{C}(B_{\mathbb{R}^n}[0, 1], B_{\mathbb{R}^n}[0, 1])$  tiene al menos un punto fijo, donde  $B_{\mathbb{R}^n}[0, 1]$  denota el disco cerrado unidad en el espacio euclídeo  $n$ -dimensional  $B_{\mathbb{R}^n}[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ . Este es un teorema de existencia –no aporta información sobre cuál es el punto–, sin embargo, es de notable interés, ya que existen numerosos casos en que es necesario saber que un punto fijo existe sin que sea relevante cuál es específicamente. Este teorema admite infinidad de formulaciones equivalentes, distintas de las tratadas aquí, que tienen un enfoque más analítico. Algunas pueden verse, por ejemplo, en [7].

### Contexto histórico

Antes de que el Teorema de punto fijo de Brouwer se enunciase formalmente, ya se conocían versiones particulares para casos más concretos. Para el caso unidimensional, Bernard Bolzano demostró en 1817 una versión que garantizaba la existencia de ceros para funciones continuas en un intervalo real si cambian de signo en sus extremos [2]. De este resultado, junto con el Teorema de los valores intermedios, se deduce de modo natural la existencia de puntos fijos para ciertas funciones continuas en intervalos.

**Teorema 4.2 (de Bolzano).** Sea  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  una función continua tal que  $f(a)f(b) < 0$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

*Observación 4.3.* Recuperemos el Ejemplo 3.9, en el que teníamos una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de una variable y definíamos el grado para  $f(b)f(a) \neq 0$ . El teorema anterior es equivalente a decir que, si  $g(f, (a, b), 0) \neq 0$ , entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ , lo que es coherente con el Teorema 3.25.

**Corolario 4.4 (del punto fijo unidimensional [19]).** Sea  $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $(f(a) - a)(f(b) - b) < 0$ . Entonces existe  $c \in I$  tal que  $f(c) = c$ .

Sin embargo, al considerar funciones definidas en dimensiones superiores, estas herramientas

dejan de ser aplicables [6], pues se basan en propiedades características del espacio en que estamos trabajando, tanto analíticas (existencia de supremo) como topológicas (los conjuntos conexos son los intervalos y las aplicaciones continuas mantienen la conexidad). Esto subraya la necesidad de desarrollar conceptos más generales, basados en la topología del espacio, que permitan extender las ideas a contextos más abstractos. Un resultado intermedio hacia la generalización del punto fijo es el Teorema de Poincaré–Miranda, que generaliza el Teorema de Bolzano a funciones definidas sobre regiones rectangulares de  $\mathbb{R}^2$ . A pesar de su utilidad, sigue siendo muy restrictivo, ya que requiere que el dominio sea un rectángulo.

**Teorema 4.5 (de Poincaré–Miranda en  $\mathbb{R}^2$  [17]).** Sea  $F = (f_1, f_2) : [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua, tal que  $f_1(a, y)f_1(b, y) < 0$  para todo  $y \in [c, d]$  y  $f_2(x, c)f_2(x, d) < 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Entonces existen  $\hat{x}, \hat{y} \in (a, b) \times (c, d)$  tales que  $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ .

A principios del siglo XX, en 1909, Luitzen Egbertus Jan Brouwer extendió el Teorema de punto fijo para dimensiones superiores [3], como paso previo a la formulación y demostración del teorema que generaliza el resultado para bolas en espacios euclídeos de dimensión finita arbitraria. Poco después, Jacques Hadamard desarrolló una primera demostración relativamente sencilla de la versión general [11], aunque es el nombre de Brouwer el que se asocia al teorema, ya que en el proceso de obtener una demostración adecuada, Brouwer introdujo herramientas esenciales para la topología algebraica, como el grupo de homotopía y el grado de una aplicación. Estas permitieron abordar y generalizar teoremas como el de invarianza del dominio o el Teorema de la curva de Jordan en dimensiones superiores [12].

## Herramientas topológicas

Antes de enunciar el Teorema de punto fijo de Brouwer, introducimos una serie de definiciones y conceptos clave, que tienen numerosas aplicaciones en topología y serán, por tanto, de gran utilidad de aquí en adelante.

**Definición 4.6.** Dados dos espacios normados  $X$  e  $Y$ , con  $X \subset Y$ , decimos que  $X$  es un *retracto* de  $Y$  si existe una aplicación continua  $r : Y \rightarrow X$  tal que  $r(x) = x$  para todo  $x \in X$ , es decir  $r|_X = \text{Id}_X$ . Esta aplicación decimos que es una *retracción*.

**Ejemplo 4.7.** Consideramos la aplicación  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$r(x) = \begin{cases} R \frac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| > R, \\ x, & \text{si } \|x\| \leq R. \end{cases}$$

Entonces  $r$  es una retracción de  $\mathbb{R}^n$  en la bola centrada en 0 y de radio  $R$ .

**Definición 4.8.** La inclusión  $i : X \hookrightarrow Y$  es un *retracto* si existe una aplicación continua  $r : Y \rightarrow X$  tal que  $r \circ i = \text{Id}_X$ .

Un resultado fundamental en este contexto es el teorema de la no retracción, que pone de manifiesto que hay ciertas extensiones continuas de funciones que no se pueden construir.

**Teorema 4.9 (de la no retracción del disco sobre la esfera).** *No existe una retracción de  $B_{\mathbb{R}^n}[0, 1]$  sobre su frontera  $\mathbb{S}^{n-1}$ , es decir, no existe ninguna aplicación continua  $f : B_{\mathbb{R}^n}[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $f(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe una retracción  $f : B_{\mathbb{R}^n}[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Entonces  $0 \notin f(B_{\mathbb{R}^n}[0, 1])$  y además  $f(s) = s$  para todo  $s \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Por definición,  $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{Id}|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Como el grado solo depende de los valores que la función toma en la frontera,  $g(f, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = g(\text{Id}, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = 1$ . Pero entonces, necesariamente existe  $x \in B_{\mathbb{R}^n}[0, 1]$  tal que  $f(x) = 0$ , que es una contradicción. ■

Este resultado afirma que la esfera no puede ser retracción del disco, lo que implica que no existe una aplicación continua que conserve toda la información topológica de la frontera cuando se extiende al interior. Esto permite deducir el Teorema de Brouwer: basta asumir que existe una aplicación sin puntos fijos, que inducirá una retracción, pero esta no puede existir. Este resultado está estrechamente relacionado también con el Teorema de la bola peluda, un resultado clásico que asegura la inexistencia de campos vectoriales tangentes continuos no nulos en esferas en espacios de dimensión impar.

Sea  $q \in \mathbb{S}^{n-1}$ , donde  $n$  es impar y  $\phi$  una aplicación que lleva cada punto en un vector tangente a la superficie. Entonces, el Teorema de la bola peluda afirma que  $\phi$  tiene al menos una discontinuidad.

**Teorema 4.10 (de la bola peluda).** *No existe ninguna aplicación continua  $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $n$  impar, cumpliendo  $\varphi(x) \neq 0$  y  $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Es decir, todo campo vectorial tangente continuo en la esfera impar debe anularse en algún punto.*

*Demostración.* Suponemos que existe  $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que cumple las condiciones del enunciado. Entonces podemos considerar  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\|\varphi(x)\|}$ , y definir la homotopía

$$H(t, x) = \cos(n\pi t)x - \text{sen}(n\pi t)f(x),$$

entre  $H_0 = \text{Id}$  y  $H_1 = -\text{Id}$ . De este modo tendríamos que

$$1 = g(\text{Id}, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = g(H_0, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0),$$

pero, al mismo tiempo,

$$g(H_1, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = g(-\text{Id}, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = (-1)^n = -1.$$

Usando el Teorema de invarianza de homotopía, necesariamente

$$g(H_0, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = g(H_1, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0),$$

pero esto es imposible. ■

El teorema no se cumple para el caso en que  $n$  es par. Podemos ver en la Figura 4.1 un ejemplo de campo que no se anula en  $\mathbb{S}^1$  y un intento de campo no nulo para  $n = 3$ , que no existe, en la Figura 4.2.

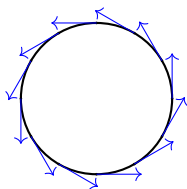


Fig. 4.1. Campo que no se anula en  $\mathbb{S}^1$ .

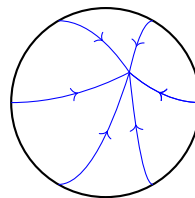


Fig. 4.2. Campo definido en  $\mathbb{S}^2$ .

## 4.1. El Teorema de punto fijo de Brouwer

Con todas estas herramientas, estamos en las condiciones adecuadas para enunciar y demostrar el teorema principal de este capítulo.

**Definición 4.11.** Decimos que un espacio normado  $X$  tiene la propiedad del punto fijo si toda función continua  $f : X \rightarrow X$  tiene un punto fijo.

**Teorema 4.12 (de punto fijo de Brouwer).** Toda función continua  $F : B_{\mathbb{R}^n}[0, 1] \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}[0, 1]$  tiene al menos un punto fijo.

*Demostración.* Suponemos que  $F$  no tiene ningún punto fijo. Entonces,  $F(x) \neq x$  para todo  $x \in B_{\mathbb{R}^n}[0, 1]$  y podemos considerar la recta que une  $F(x)$  con  $x$  (está bien definida). Denotaremos por  $f(x)$  al punto más próximo a  $x$  en que la recta interseca a la esfera unidad  $\mathbb{S}^{n-1}$ , como se muestra en la Figura 4.3. Pero  $f : B_{\mathbb{R}^n}[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  es una retracción del disco en la esfera, lo que contradice el Teorema 4.9. ■

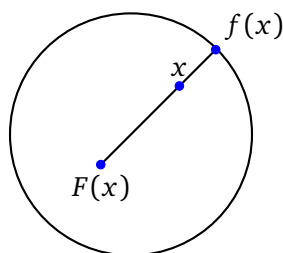


Fig. 4.3. Representación de la construcción de la aplicación  $f$ .

*Observación 4.13.* Puede hacerse una demostración alternativa usando directamente las propiedades del grado. Para esto, suponemos que  $F$  no tiene puntos fijos en el interior del disco, es decir, que  $F(x) - x \neq 0$  para todo  $x \in B[0, 1]$ . Consideramos la homotopía

$$H(t, x) = t(F(x) - x) + (1 - t)(-x) = tF(x) - x.$$

Esta es admisible ya que, para  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , se tiene que  $\|x\| = 1$ ,  $\|f(x)\| \leq 1$  y  $H(t, x) = 0 \Leftrightarrow tF(x) = x$ , pero entonces  $1 = \|x\| = |t|\|f(x)\| \leq |t|$ . Así, solo podría tomar el valor 0 cuando  $t = 1$ , pero en este caso  $H_1(x) = F(x) - x$ , que no se puede anular porque estamos suponiendo que  $F$  no tiene puntos fijos. Todo esto permite afirmar que  $0 = g(F - \text{Id}, B(0, 1), 0) = g(-\text{Id}, B[0, 1], 0) \neq 0$ , por lo que  $F$  tiene que tener un punto fijo.

**Definición 4.14.** Dados  $X$  e  $Y$  subconjuntos de un  $\mathbb{F}$ -espacio normado, definimos un *homeomorfismo* como un operador  $T : X \rightarrow Y$  continuo, biyectivo y con inverso  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  continuo. Decimos que  $X$  es *homeomorfo* a  $Y$ .

**Teorema 4.15.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto tal que  $\bar{\Omega}$  es homeomorfo a  $B_{\mathbb{R}^n}[0, 1]$  y  $F \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \bar{\Omega})$ . Entonces  $F$  tiene un punto fijo en  $\bar{\Omega}$ .

*Demostración.* Consideramos un homeomorfismo  $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}[0, 1]$ . Sea

$$G = \phi \circ F \circ \phi^{-1} : B_{\mathbb{R}^n}[0, 1] \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}[0, 1].$$

$G$  es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Estamos así en las condiciones del Teorema de punto fijo de Brouwer y podemos afirmar que existe  $x_0 \in B[0, 1]$  tal que  $G(x_0) = x_0$ . De esta manera,  $F(\phi^{-1}(x_0)) = \phi^{-1}G(x_0) = \phi^{-1}(x_0)$  y  $F$  tiene un punto fijo  $y_0 = \phi^{-1}(x_0) \in \bar{\Omega}$ . ■

**Definición 4.16.** Dado  $X \subset Y$  un subconjunto de un espacio normado, decimos que es *compacto* si toda sucesión admite una subsucesión convergente.

**Definición 4.17.** Sea  $X \subset Y$  un subconjunto de un espacio normado. Decimos que  $X$  es *convexo* si dados  $x, y \in X$  y  $t \in [0, 1]$ ,  $tx + (1 - t)y \in X$ .

**Corolario 4.18 (generalización del Teorema de punto fijo de Brouwer).** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto, convexo y con interior no vacío, y sea  $F \in \mathcal{C}(K, K)$ . Entonces  $F$  tiene un punto fijo en  $K$ .

*Demostración.* Como  $K$  es compacto, existe una bola  $B_{\mathbb{R}^n}(0, R)$  que lo contiene. Como es cerrado y convexo, por el Teorema 2.35, existe la proyección ortogonal continua  $P_K : \mathbb{R}^n \rightarrow K$ , que asigna a cada  $x \in \mathbb{R}^n$  el único punto  $P_K(x) \in K$  que cumple  $\|x - P_K(x)\| = d(x, K)$ . Consideramos  $f : B_{\mathbb{R}^n}(0, R) \rightarrow K \subset B_{\mathbb{R}^n}(0, R)$  definida como  $f(x) := F(P_K(x))$ . Por el Teorema de punto fijo de Brouwer, existe un punto  $x_0 \in B_{\mathbb{R}^n}(0, R)$ , tal que  $f(x_0) = x_0$ . Como  $f(x_0) = F(P_K(x_0)) = x_0$  y  $\text{Im}(f) \subset K$ , tenemos que  $x_0 \in K$ . Como para los puntos del conjunto la proyección coincide con la identidad,  $P_K(x_0) = x_0$  y entonces  $x_0 = f(x_0) = F(P_K(x_0)) = F(x_0)$ , es decir,  $F$  tiene un punto fijo. ■

**Corolario 4.19.** Si  $K \subset \mathbb{R}^n$  es homeomorfo a un conjunto compacto, convexo y con interior no vacío, toda  $F \in \mathcal{C}(K, K)$  tiene un punto fijo en  $K$ .

*Demostración.* Acabamos de ver que cualquier conjunto convexo, compacto y no vacío tiene la propiedad del punto fijo. Esta propiedad se mantiene entre conjuntos homeomorfos. Llamamos al conjunto compacto y convexo del enunciado  $\Omega$  y definimos  $\phi : K \rightarrow \Omega$ . Entonces existe  $G \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \overline{\Omega})$  tal que  $G = \phi \circ F \circ \phi^{-1}$ . Vimos que  $G$  tiene un punto fijo, es decir, existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $G(x_0) = x_0$ . De esta manera,  $F(\phi^{-1}(x_0)) = \phi^{-1}G(x_0) = \phi^{-1}(x_0)$  y  $F$  tiene un punto fijo. ■

Centramos nuestro estudio en la búsqueda de condiciones sobre conjuntos para poder afirmar que tienen la propiedad de punto fijo. El Teorema de punto fijo de Brouwer afirma que cualquier función continua definida en una bola cerrada en  $\mathbb{R}^n$  en sí misma tiene al menos un punto fijo. Fue generalizado a cualquier conjunto compacto convexo (gracias a la existencia de un homeomorfismo). Sin embargo, no podemos relajar estas condiciones para tener la propiedad del punto fijo en general. EL teorema se cumple solo para endomorfismos (mismo conjunto de dominio y codominio) y para conjuntos no vacíos compactos (cerrados y acotados). Eliminar alguna de estas hipótesis deja de garantizar la existencia de puntos fijos.

**Ejemplo 4.20 (Eliminando convexidad).** Sea  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  definida como  $f(x) = -x$ . No tiene puntos fijos. Aunque esta función está definida en un conjunto que es compacto,  $\mathbb{S}^n$  no es convexo.

**Ejemplo 4.21 (Eliminando compacidad).** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = x + 1$ . Tampoco tiene puntos fijos en  $\mathbb{R}$ , que es convexo. En este caso, el conjunto no es compacto.

**Ejemplo 4.22.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función anterior. Si tomamos ahora  $\hat{f} := f|_{[0,1]}$ , tenemos que tampoco tiene puntos fijos. En este caso,  $\hat{f}([0, 1]) = [1, 2]$ .

## 5. El grado de Leray-Schauder

Nuestro objetivo principal es extender el grado de Brouwer de manera que mantenga su comportamiento en espacios de dimensión infinita. Buscamos trabajar con funciones sobre las que se pueda definir una función con las mismas propiedades que las que caracterizan al grado de Brouwer. Esta extensión nace motivada por las aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, tendremos que ser más restrictivos en el estudio, ya que no existe una aplicación definida de manera análoga al grado topológico para todas las funciones continuas cuando el espacio es de dimensión infinita, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.1.** Sea  $l^2 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\}$  el espacio de sucesiones con la norma  $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2}$ ,  $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$  el disco abierto unidad con esta norma y  $T : B_{l^2}[0, 1] \rightarrow B_{l^2}[0, 1]$  un operador definido como

$$Tx = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots).$$

Supongamos que existe una aplicación  $\hat{g}$  definida sobre todas las aplicaciones continuas en  $B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$  que no se anulan en  $\mathbb{S}^{n-1}$ , y que además satisface las propiedades que caracterizan al grado en dimensión finita, es decir, las recogidas en el Teorema de invarianza 2.12. Entonces, por un razonamiento análogo al utilizado en la prueba del Teorema de punto fijo de Brouwer,  $T$  debe tener un punto fijo. Sin embargo,  $\|Tx\| = 1$  para todo  $x \in B_{l^2}[0, 1]$ , por lo que si  $Tx = x$ , entonces

$$Tx = (0, x_1, x_2, \dots) = x = (x_1, x_2, \dots),$$

lo que implica que  $x = 0$ , pero  $T0 = (1, 0, 0, \dots)$ , por lo que  $T$  no tiene puntos fijos.

De esta manera, el Teorema del punto fijo de Brouwer falla cuando intentamos aplicarlo en espacios de dimensión infinita, porque las bolas con las que trabaja dejan de ser compactas. De hecho, en cualquier espacio de Banach de dimensión infinita, siempre existirá una aplicación continua del disco unidad cerrado en si misma que no tendrá puntos fijos. Dicho de otra manera, el Teorema de Brouwer caracteriza los espacios de dimensión finita.

En 1934, Jean Leray y Jules Schauder publicaron “*Topologie et équations fonctionnelles*” [16], trabajo en el que extendían el grado topológico al contexto de los *operadores compactos*, concretamente, a las perturbaciones compactas de la identidad, es decir, a operadores de la forma  $\text{Id} - T$ , donde  $T$  es

un operador compacto. A partir de ahora,  $\Omega$  denota un subconjunto abierto y acotado de un espacio normado.

**Definición 5.2.** Sea  $X$  un espacio normado y  $\Omega \subset X$ . Dado un operador compacto  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$ , decimos que  $\varphi = \text{Id}_X - T$  es una *perturbación compacta de la identidad*.

**Proposición 5.3.** Una perturbación compacta de la identidad es cerrada<sup>†</sup>.

*Demostración.* Sea  $\varphi$  una perturbación compacta de la identidad definida en un espacio normado  $X$  y  $F \subset X$  un conjunto cerrado. Vamos a ver que  $\varphi(F)$  es cerrado. Tomamos una sucesión de  $\varphi(F)$  convergente en  $X$  y vemos que converge en  $\varphi(F)$ . Consideramos  $y_n = x_n - Tx_n = \varphi(x_n) \in \varphi(F)$  y llamamos a su límite  $y \in X$ .  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada, porque si no lo fuese, existiría una subsucesión  $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ , pero  $x_n = y_n + Tx_n$ , donde  $y_n$  es convergente y  $T$  es un operador acotado, por lo que se llega a una contradicción. Entonces, como  $T$  lleva acotados en relativamente compactos, existe una subsucesión convergente  $Tx_n \rightarrow z$ , por lo que  $x_n \rightarrow y + z \in F$ , ya que  $F$  es cerrado. De esta manera,

$$\varphi(y + z) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y,$$

y así  $y \in \varphi(F)$ . ■

Sea  $X$  un espacio normado,  $\Omega \subset X$  y  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  un operador de rango finito. Como  $T(X)$  es un conjunto de dimensión finita, podemos aplicar la extensión del grado para funciones con dimensión inferior del codominio, definida en la Sección 3.5. Dados dos subespacios  $Y_1, Y_2 \subset X$  de dimensión finita que contienen a  $T(\overline{\Omega})$ , su intersección  $Y_1 \cap Y_2$  sigue siendo un subespacio de dimensión finita que lo contiene, por lo que se puede aplicar la definición del grado en este subespacio. En particular,

$$g(\varphi|_{\overline{\Omega} \cap Y_i}, \Omega \cap Y_i, q) = g(\varphi|_{\overline{\Omega} \cap Y_1 \cap Y_2}, \Omega \cap Y_1 \cap Y_2, q) \quad \text{para } i = 1, 2,$$

por lo que el grado es independiente de la elección del subespacio de dimensión finita que contiene la imagen de  $T$ .

**Definición 5.4.** Sea  $X$  un  $\mathbb{F}$ -espacio normado,  $\Omega \subset X$  y  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  un operador de rango finito. Si  $q \notin \varphi(\partial\Omega)$ , donde  $\varphi = \text{Id} - T$ , definimos el grado de  $\varphi$  en  $\Omega$  con respecto a  $q$  como

$$g(\varphi, \Omega, q) = g(\varphi|_{\overline{\Omega} \cap Y}, \Omega \cap Y, q),$$

donde  $Y \subset X$  es un subespacio de dimensión finita que contiene a  $T(\overline{\Omega})$ .

<sup>†</sup>Lleva conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

**Teorema 5.5 (de aproximación).** Sean  $X, Y$  espacios normados y  $\Omega \subset X$  abierto y acotado. Sea  $T : \overline{\Omega} \subset X \rightarrow Y$  un operador continuo y compacto y  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . Existe un operador  $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \rightarrow Y$  de rango finito tal que  $\|Tx - T_\varepsilon x\| < \varepsilon$  para todo  $x \in \overline{\Omega}$ .

*Demostración.* Para demostrar que existe un operador de rango finito en las condiciones del enunciado, vamos a dar su expresión. Por la definición de operador compacto,  $T(\Omega)$  es relativamente compacto y por tanto es totalmente acotado. Dado un recubrimiento  $\{B_Y(y, \varepsilon)\}_{y \in T(\overline{\Omega})}$ , existe un subrecubrimiento finito  $\{B(y_k, \varepsilon)\}_{k=1}^m$ . Todo  $T(x) \in T(\overline{\Omega})$  estará en al menos una de las bolas, por ser estas un recubrimiento. Intuitivamente, esto lleva a pensar que  $Tx$  podría aproximarse mediante combinaciones de los  $y_k$ . Consideramos el subespacio vectorial  $V_\varepsilon$  generado por todos estos puntos, de modo que  $0 < \dim(V_\varepsilon) \leq m$ . Definimos, para cada  $x \in \overline{\Omega}$  y cada  $k = 1, \dots, m$ ,

$$b_k(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|Tx - y_k\|, & \text{si } Tx \in B(y_k, \varepsilon), \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las funciones  $b_k(x)$  son continuas y no negativas y, como siempre, existirá un índice  $k \in \{1, \dots, m\}$  para el que  $\|Tx - y_k\| < \varepsilon$ . Tenemos que  $\sum_{i=1}^m b_i(x) \neq 0$  y

$$t_k(x) = \frac{b_k(x)}{\sum_{i=1}^m b_i(x)}$$

está bien definido. Podemos definir entonces el operador  $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \rightarrow V_\varepsilon \subset Y$  que buscamos como sigue:

$$T_\varepsilon(x) := \sum_{k=1}^m t_k(x) y_k.$$

De esta manera, teniendo en cuenta que  $\sum_{k=1}^m t_k(x) = 1$ ,

$$Tx - T_\varepsilon x = Tx - \sum_{k=1}^m t_k(x) y_k = \sum_{k=1}^m t_k(x) (Tx - y_k),$$

y entonces

$$\|Tx - T_\varepsilon x\| \leq \sum_{k=1}^m t_k(x) \|Tx - y_k\| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Lema 5.6.** Sea  $X$  un espacio normado con distancia  $d$ ,  $\Omega \subset X$ , y  $T : \overline{\Omega} \rightarrow X$  un operador continuo y compacto. Si  $q \notin (Id - T)(\partial\Omega)$ , entonces  $d(q, (Id - T)(\partial\Omega)) > 0$ .

*Demostración.* Sea  $\varphi = Id - T$ . Supongamos que  $d(q, \varphi(\partial\Omega)) = \inf\{\|q - \varphi(x)\| : x \in \partial\Omega\} = 0$ . Entonces existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial\Omega$  tal que  $\varphi(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q$ . Como  $T$  es compacto,  $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es relativamente compacto y entonces tiene una subsucesión convergente a algún  $y$ , que podemos

suponer que es ella misma por comodidad. Además,  $x_n = \varphi x_n + Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} q + y$ . Como  $\partial\Omega$  es cerrada y  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \partial\Omega$ ,  $q + y \in \partial\Omega$ . Además, por la continuidad de  $T$ ,

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = T(\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)) = T(y + q).$$

Pero entonces  $\varphi(q + y) = (\text{Id} - T)(q + y) = q + y - y = q$  y  $q \in \varphi(\partial\Omega)$ , que es una contradicción. ■

**Definición 5.7.** Sea  $X$  es un espacio normado con distancia  $d$ ,  $\Omega \subset X$  y  $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$  continuo y compacto. Si  $q \notin \varphi(\partial\Omega)$ , donde  $\varphi = \text{Id} - T$ , definimos el *grado de Leray-Schauder* de  $\text{Id} - T$  como

$$g(\text{Id} - T, \Omega, q) := g(\text{Id} - \tilde{T}, \Omega, q),$$

donde  $\tilde{T}$  es un operador de rango finito que cumple  $\|Tx - \tilde{T}x\| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon \in (0, d(q, \varphi(\partial\Omega)))$  y todo  $x \in \bar{\Omega}$ , y que sabemos que existe por el Teorema 5.5. Definimos el *índice de punto fijo* de  $T$  como

$$\text{Ind}(T, x) = g(\text{Id} - T, \Omega, 0).$$

*Observación 5.8.* Por el Lema 5.6,  $d(q, \varphi(\partial\Omega)) > 0$ . Para un operador de rango finito en las condiciones de la definición, el grado está bien definido ya que

$$\|\varphi(x) - (\text{Id} - \tilde{T}x)\| = \|Tx - \tilde{T}x\| < \varepsilon < d(q, \varphi(\partial\Omega)),$$

y entonces  $d(q, (\text{Id} - \tilde{T})(\partial\Omega)) > 0$ . De este modo, el grado de Leray-Schauder está bien definido para  $\text{Id} - T$ . Basta ver que no depende del operador de rango finito escogido. Sean  $R, S : \bar{\Omega} \rightarrow X$  dos operadores de rango finito en las condiciones de la definición. Se cumplen las siguientes cotas:

$$\|Tx - Sx\| < \varepsilon,$$

$$\|Tx - Rx\| < \varepsilon.$$

Consideramos la homotopía entre  $\text{Id} - S$  y  $\text{Id} - R$

$$H(t, x) = t(\text{Id} - S)(x) + (1 - t)(\text{Id} - R)(x); \quad \text{para } t \in [0, 1] \text{ y } x \in \bar{\Omega}.$$

$H$  es admisible. Para  $x \in \partial\Omega$  y  $t \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \|H(t, x) - \varphi(x)\| &= \|t((\text{Id} - S)x - (\text{Id} - T)x) + (1 - t)((\text{Id} - R)x - (\text{Id} - T)x)\| \\ &\leq t\|Tx - Sx\| + (1 - t)\|Tx - Rx\| \\ &< t d(q, \varphi(\partial\Omega)) + (1 - t) d(q, \varphi(\partial\Omega)) = d(q, \varphi(\partial\Omega)), \end{aligned}$$

y entonces

$$\|q - H(t, x)\| \geq \|q - \varphi(x)\| - \|\varphi(x) - H(t, x)\| > 0,$$

es decir,  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ . Así, por el Teorema de invarianza de homotopía para el grado de Brouwer,

$$g(\text{Id} - R, \Omega, q) = g(\text{Id} - S, \Omega, q).$$

**Teorema 5.9 (Invarianza de homotopía del grado).** Sea  $T \in \mathcal{L}\mathcal{K}(\bar{\Omega}, X)$  y  $\varphi = \text{Id} - T$ . Dado  $q \notin (\text{Id} - T)(\partial\Omega)$ , el grado cumple las siguientes propiedades:

(1) **Continuidad respecto del operador:** Existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $T$  en  $\mathcal{L}\mathcal{K}(\bar{\Omega}, X)$  tal que, para todo  $S \in \mathcal{U}$ ,  $g(\text{Id} - T, \Omega, q) = g(\text{Id} - S, \Omega, q)$ .

(2)  $g(\text{Id} - T, \Omega, \cdot)$  es constante en cada componente conexa de  $X \setminus (\text{Id} - T)(\partial\Omega)$ .

(3) **Invarianza de homotopía:** Sea  $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \bar{\Omega}, X)$  una homotopía definida como

$$H(t, x) = x - S(t, x),$$

donde  $S(t, x) \in \mathcal{L}\mathcal{K}([0, 1] \times \bar{\Omega}, X)$ . Si  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega, X)$ , se cumple que  $g(H(t, \cdot), \Omega, q)$  es independiente de  $t$ .

*Demostración.* (1) Consideremos  $\varphi_S = \text{Id} - S$ . Definimos

$$\mathcal{U} = \left\{ S \in \mathcal{L}\mathcal{K}(\bar{\Omega}, X) : \|S - T\| < \frac{1}{2}d(q, \varphi(\partial\Omega)) \right\} = B_{\mathcal{L}\mathcal{K}(\bar{\Omega}, X)}(T, \frac{1}{2}d(q, \varphi(\partial\Omega))).$$

De esta manera,  $d(q, \varphi_S(\partial\Omega)) > 0$  para todo  $S \in \mathcal{U}$ . Fijado un operador  $S \in \mathcal{U}$ , escogemos dos operadores  $S_1, T_1$  de rango finito tales que  $\|S - S_1\| < \frac{1}{3}d(q, \varphi_T(\partial\Omega))$  y  $\|T - T_1\| < \frac{1}{3}d(q, \varphi_T(\partial\Omega))$ . Consideramos un subespacio  $F$  que contenga a  $T_1(\bar{\Omega}), T_2(\bar{\Omega})$  y a  $q$ , ya que así

$$g(\text{Id} - T, \Omega, q) = g(\text{Id} - T|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, q).$$

Definimos la homotopía  $H(t, x) = t(\text{Id} - T_1)x + (1 - t)(\text{Id} - S_1)x = (\text{Id} - (tT_1 + (1 - t)S_1))x$ . Es admisible, ya que para  $t \in [0, 1]$  y  $x \in \partial\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \|q - H(t, x)\| &\geq \|q - \varphi x\| - \|\varphi x - H(t, x)\| \\ &\geq \|q - \varphi x\| - \|t(\varphi x - (\text{Id} - T_1)x)\| - \|(1 - t)(\varphi x - \varphi_S x)\| \\ &\quad - \|(1 - t)(\varphi_S x - (\text{Id} - S_1)x)\| \geq d(q, \varphi(\partial\Omega)) - \frac{1}{3}t d(q, \varphi(\partial\Omega)) \\ &\quad - \frac{5}{6}(1 - t)d(q, \varphi(\partial\Omega)) = \frac{1}{6}d(q, \varphi(\partial\Omega)) + \frac{1}{2}t d(q, \varphi(\partial\Omega)) > 0. \end{aligned}$$

El grado coincide para  $\text{Id} - T_1$  e  $\text{Id} - S_1$  por el Teorema de invarianza de homotopía para el grado de Brouwer, y entonces el grado coincide para todo  $T \in \mathcal{U}$ . De hecho, basta tomar un entorno de radio  $r \in (0, d(q, \varphi(\partial\Omega)))$  para que el grado esté bien definido en  $q$  para los operadores de dicho entorno, y pedir después que los operadores de rango finito satisfagan  $\|T - T_1\|, \|S - S_1\| < r$ , donde esta desigualdad ha de ser estricta necesariamente.

(2) Se tiene la igualdad  $g(\text{Id} - T, \Omega, q) = g(\text{Id} - T - q, \Omega, 0)$ . Por (1), el grado es localmente constante, y en un conjunto conexo, esto hace que sea constante.

- (3) La función  $H(t, x) = x - S(t, x)$  tiene para cada  $t \in [0, 1]$  la forma  $\text{Id} - S_t$ , con  $S_t := S(t, \cdot)$  operador compacto en  $x \in \Omega$ . Como  $q \notin H([0, 1] \times \partial\Omega, X)$ , para cada  $t \in [0, 1]$  tenemos que  $q \notin H(t \times \partial\Omega, X) = (\text{Id} - S_t)(\partial\Omega)$ . Por (1), el grado es localmente constante respecto de  $t$ . El intervalo  $[0, 1]$  es conexo, por lo que toda función localmente constante en él, es constante. ■

Una de las aplicaciones más interesantes del grado es la búsqueda de puntos fijos de operadores, lo que motiva la manera en que ha sido definido. Encontrar una raíz de  $\text{Id} - T$  prueba la existencia de un punto fijo del operador  $T$ , por lo que nos centraremos en estudiar las propiedades en términos del índice de punto fijo  $\text{Ind}(T, \Omega) = g(\text{Id} - T, \Omega, 0)$ . Aún así, estas se pueden generalizar a cualquier otro  $q \notin (\text{Id} - T)(\partial\Omega)$ . La demostración de todas ellas se deduce a partir de las correspondientes para el grado de Brouwer, ya que para calcular el grado o índice en dimensión infinita se aproxima el operador por uno de rango finito para el que se pueden aplicar. Esto, junto con la continuidad de los operadores con los que trabajamos, permite ver que las propiedades se conservan en el contexto que ahora nos interesa.

**Teorema 5.10 (Propiedades del índice de punto fijo).** *Sea un espacio normado  $X$  con distancia  $d$ ,  $\Omega \subset X$  abierto y acotado y  $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$  continuo y compacto. Sea  $0 \notin (\text{Id} - T)(\partial\Omega)$ . Entonces el índice de punto fijo cumple las siguientes propiedades:*

- (1) **Normalización:** *Si el operador toma un valor constante  $c$ ,  $\text{Ind}(T, \Omega) = 1$  si y solo si  $c \in \Omega$ .*
- (2) **Existencia:** *Si  $\text{Ind}(T, \Omega) \neq 0$ , entonces existe al menos un punto  $x \in \Omega$  tal que  $T(x) = x$ , es decir,  $T$  tiene un punto fijo en  $\Omega$ .*
- (3) **Aditividad:** *Sean  $\{\Omega_j\}_{j=1}^m$  abiertos disjuntos dos a dos, tales que  $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$ . Entonces*

$$\text{Ind}(T, \Omega) = \sum_{j=1}^m \text{Ind}(T, \Omega_j).$$

- (4) **Escisión:** *Sea  $K \subset \bar{\Omega}$  un conjunto cerrado tal que  $0 \notin \varphi(K)$ .  $T$  no tiene puntos fijos en  $K$  y se tiene que  $\text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T, \Omega \setminus K)$ . Equivalentemente, dado un abierto  $A$  tal que  $0 \notin \Omega \setminus A$ , entonces  $\text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T, A)$ .*
- (5) **Localización:** *Sean  $\Omega_1, \Omega_2$  dos subconjuntos disjuntos de  $\Omega$  tales que  $0 \notin (\text{Id} - T)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ . Si  $\text{Ind}(T, \Omega) \neq 0$  e  $\text{Ind}(T, \Omega_1) = 0$ , entonces  $T$  tiene un punto fijo en  $\Omega_2$ .*
- (6) **Multiplicidad:** *Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos subconjuntos disjuntos de  $\Omega$  tales que  $0 \notin (\text{Id} - T)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ . Si  $\text{Ind}(T, \Omega) = 0$  e  $\text{Ind}(T, \Omega_1) \neq 0$ , entonces  $T$  tiene un punto fijo en  $\Omega_1$  y otro en  $\Omega_2$ .*

*Demostración.* (1) Sea  $Tx = c$  para todo  $x \in \Omega$ . Entonces el operador  $\varphi x = (\text{Id} - T)x = x - c$ , es

una traslación de la identidad. Además, tiene un cero solo si  $\text{Id} - T = 0$ , es decir, si existe  $x \in \Omega$  tal que  $x = Tx = c$ . Para esto, necesitamos que  $c \in \Omega$ . El grado de Brouwer para un operador de dimensión finita de la identidad trasladada vale 1 si  $0 \in \varphi(\Omega)$  y 0 en caso contrario. Como la imagen es constante, es de rango finito, y esta propiedad se conserva para el índice de punto fijo.

- (2) Para cada  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , existe un operador de rango finito tal que  $\|Tx - T_\varepsilon x\| < \varepsilon$  para  $x \in \Omega$ . Consideramos  $T_{1/n}$  tales que  $\|T - T_{1/n}\| < \frac{1}{n}d(0, \varphi(\partial\Omega))$ , y así  $\text{Ind}(T, \Omega) = g(\text{Id} - T_{1/n}, \Omega, 0)$ . Si  $g(\text{Id} - T, \Omega, 0) \neq 0$ , entonces  $T_{1/n}$  tiene un punto fijo, porque vimos que se cumple para dimensión finita. Podemos tomar la sucesión  $x_n = T_{1/n}(x_n)$  para ver que  $T$  también tiene un punto fijo.  $\{T_{1/n}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es relativamente compacta, de donde  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  también, por lo que tiene una subsucesión convergente a  $y \in \Omega$ . Además,  $\|x_n - Tx_n\| = \|T_{1/n}x_n - Tx_n\| < \frac{1}{n}$ . De esta manera, por la continuidad de  $T$ , tenemos que  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = T(y)$  e  $y$  es un punto fijo de  $T$ .
- (3) Tenemos  $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$ , con  $\Omega_j$  abiertos disjuntos dos a dos, y  $0 \notin (\text{Id} - T)(\partial\Omega)$ . Entonces  $0 \notin (\text{Id} - T)(\partial\Omega_j)$  para  $j = 1, \dots, m$  y el grado está bien definido en esos conjuntos. Podemos aproximar el grado para un operador de rango finito  $T_1$  que cumpla  $\|Tx - T_1x\| < d(0, (\text{Id} - T)(\partial\Omega))$ . Así, en cada subconjunto se seguirá cumpliendo esta cota,

$$\|T_{|\Omega_j}x - T_{1|\Omega_j}x\| \leq \|Tx - T_1x\| < d(0, (\text{Id} - T)(\partial\Omega)),$$

por lo que  $T_1$  sigue siendo un operador que cumple las condiciones de aproximación en cada  $\Omega_j$ . De esta manera,

$$\text{Ind}(T, \Omega) = g(\text{Id} - T, \bigcup_{j=1}^m \Omega_j, 0) = g(T_1, \bigcup_{j=1}^m \Omega_j, 0) = \sum_{j=1}^m g(T_1, \Omega_j, 0) = \sum_{j=1}^m \text{Ind}(T, \Omega_j).$$

- (4) Ya vimos que  $\text{Id} - T$  es cerrada. Por tanto,  $\varphi(K)$  es cerrado y así

$$\delta := \min\{d(0, \varphi(K)), d(0, \varphi(\partial\Omega))\} > 0.$$

Escogemos un operador de rango finito  $T_1$  tal que  $\|Tx - T_1x\| < \delta$ . Entonces tenemos que

$$\text{Ind}(T, \Omega) = g(\text{Id} - T_1, \Omega, 0) = g(\text{Id} - T_1, \Omega \setminus K, 0) = \text{Ind}(T, \Omega \setminus K).$$

- (5) Si  $0 \notin (\text{Id} - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , por escisión,  $0 \neq \text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T, \Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Por aditividad,  $0 \neq \text{Ind}(T, \Omega_1 \cup \Omega_2) = \text{Ind}(T, \Omega_1) + \text{Ind}(T, \Omega_2) = \text{Ind}(T, \Omega_2)$ . Entonces, por la propiedad de existencia,  $T$  tiene un punto fijo en  $\Omega_2$ .

(6) Si  $0 \notin (\text{Id} - T)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ , por escisión,  $0 = \text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T, \Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Por aditividad,

$$0 = \text{Ind}(T, \Omega_1 \cup \Omega_2) = \text{Ind}(T, \Omega_1) + \text{Ind}(T, \Omega_2).$$

Como el primer sumando del término de la derecha es no nulo,  $0 \neq \text{Ind}(T, \Omega_1) = -\text{Ind}(T, \Omega_2)$ .

Usando de nuevo la propiedad de existencia, tiene que haber un punto fijo en  $\Omega_1$  y en  $\Omega_2$ . ■

**Teorema 5.11.** Sean  $T, S : \overline{\Omega} \rightarrow X$  dos operadores compactos tales que  $T = S$  en  $\partial\Omega$ . Denotamos  $\varphi = \text{Id} - T$  y  $\psi = \text{Id} - S$ . Si  $q \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$ , entonces  $g(\varphi, \Omega, q) = g(\psi, \Omega, q)$ .

*Demostración.* Consideramos la homotopía  $H(t, x) = t\varphi(x) + (1-t)\psi(x)$  para  $t \in [0, 1]$ . Para  $x \in \partial\Omega$  y  $t \in [0, 1]$ , se tiene que  $H(t, x) = t\varphi(x) - (1-t)\psi(x) = \varphi(x)$ . Como  $q \notin \varphi(\partial\Omega)$ , entonces  $\|q - H(t, x)\| = \|q - \varphi(x)\| > 0$  y  $H(t, x)$  es admisible, y podemos aplicar la invarianza por homotopía. ■

## 5.1. El Teorema de punto fijo de Schauder

**Teorema 5.12 (de Punto Fijo de Schauder).** Sea  $X$  un espacio normado,  $F \subset X$  un subconjunto cerrado, acotado y convexo y  $T : F \rightarrow F$  un operador continuo y compacto. Entonces,  $T$  tiene un punto fijo en  $F$ .

*Demostración.* Definimos  $\varphi = \text{Id} - T$  y vamos a ver que tiene una raíz. Como  $T$  es compacto y  $F$  es acotado, la imagen  $T(F) \subset F$  es relativamente compacta. Podemos considerar un abierto  $\Omega \subset X$  tal que  $\overline{\Omega} \subset F$ ,  $T(F) \subset \Omega$ , y  $0 \notin \varphi(\partial\Omega)$ , para que el grado topológico esté bien definido. Por el teorema de aproximación, existe un operador de rango finito  $T_\varepsilon : F \rightarrow F_\varepsilon \subset F$ , con  $\dim(F_\varepsilon) < \infty$ , tal que  $\|Tx - T_\varepsilon x\| < \varepsilon$  para todo  $x \in F$ . Si tomamos  $\varepsilon < d(0, \varphi(\partial\Omega))$ , el grado está bien definido para  $T_\varepsilon$  y entonces  $g(\varphi, \Omega, 0) = g(\text{Id} - T_\varepsilon, \Omega, 0)$ . Como la imagen de  $T_\varepsilon$  está en un subespacio de dimensión finita y  $F_\varepsilon \cap \overline{\Omega}$  es compacto, convexo y acotado, por el Teorema de punto fijo de Brouwer, tiene un punto fijo  $x_\varepsilon \in F$ . Si se escogen operadores de rango finito para  $\varepsilon_k > 0$  cada vez más pequeños, se genera una sucesión de puntos fijos  $\{x_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{T_{\varepsilon_k} x_{\varepsilon_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ . Como es relativamente compacto, esta sucesión tiene una subsucesión convergente a  $x$ , y usando la siguiente desigualdad vemos que  $x$  es el punto fijo que buscábamos de  $T$ .

$$\|x - T(x)\| \leq \|x - x_{\varepsilon_k}\| + \|x_{\varepsilon_k} - T(x_{\varepsilon_k})\| + \|T(x_{\varepsilon_k}) - T(x)\|.$$

Por la definición de límite y la continuidad de los operadores, el primer y último términos tienden a cero al hacer  $\varepsilon_k$  cada vez más pequeño. En cuanto al término del medio; por definición se cumple que  $\|x_{\varepsilon_k} - T(x_{\varepsilon_k})\| = \|T_{\varepsilon_k} x_{\varepsilon_k} - T x_{\varepsilon_k}\| < \varepsilon_k$ . ■

**Corolario 5.13.** *Sea  $X$  un espacio vectorial normado y  $F \subset X$  cerrado, acotado, convexo y no vacío. Si  $F$  es homeomorfo a  $S \subset X$  y  $T : S \rightarrow S$  es un operador continuo y compacto, entonces tiene un punto fijo.*

*Demostración.* Sea  $h : F \rightarrow S$  un homeomorfismo entre  $F$  y  $S$ . Definimos el operador  $\tilde{T} : F \rightarrow F$  como  $\tilde{T} := h^{-1} \circ T \circ h$ .  $\tilde{T}$  es continuo y compacto por ser  $h$  un homeomorfismo (continuo y con inversa continua) y  $T$  continuo y compacto. Además, como  $T(S) \subset S$ ,

$$\tilde{T}(F) = h^{-1}(T(h(F))) = h^{-1}(T(S)) \subset h^{-1}(S) = F.$$

Así  $\tilde{T} : F \rightarrow F$  está en las condiciones del Teorema de punto fijo de Schauder y existe  $x \in F$  tal que  $\tilde{T}(x) = x$ . De esta manera,  $h(x) = (h(\tilde{T}x)) = T(h(x))$  y  $h(x) \in S$  es un punto fijo de  $T$ . ■

**Teorema 5.14 (Schaeffer).** *Sea  $T : F \rightarrow F$  compacto. Supongamos que existe  $R > 0$  tal que si  $x = tx$  para algún  $t \in [0, 1]$ , se tiene que  $\|x\| \leq R$ . Entonces  $T$  tiene un punto fijo en  $B(0, R)$ .*

*Demostración.* Se considera la homotopía  $H(t, x) = \text{Id} - tT$ . Es admisible, porque si  $x = tx$ , tenemos que  $\|x\| \leq R$ , por lo que  $x \notin \partial B(0, R)$ . Podemos aplicar entonces el Teorema de invarianza de homotopía,  $1 = g(\text{Id}, B(0, R), 0) = g(\varphi, B(0, R), 0)$ , de donde se obtiene el resultado por la propiedad de existencia. ■

**Lema 5.15.** *Dado un espacio normado  $X$  con distancia  $d$ ,  $\Omega \subset X$  abierto y acotado y  $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$  continuo y compacto. Sea  $0 \notin (\text{Id} - T)(\partial\Omega)$ . Si  $0 \in \Omega$  y  $\lambda x \neq Tx$  para todo  $\lambda > 1$  y todo  $x \in \partial\Omega$ , entonces  $\text{Ind}(T, \Omega) = 1$  ( $T$  tiene un punto fijo).*

*Demostración.* Consideramos la homotopía  $H(t, x) = tTx$ . Por hipótesis  $H \in \mathcal{C}([0, 1] \times \bar{\Omega}, X)$  es compacta. Además  $H(t, x) \neq x$  para todo  $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$  pues, en caso contrario, para algún  $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$  tendríamos  $H(t, x) = tTx = x$ . Como  $0 \notin \partial\Omega$ , esto sería una contradicción con la hipótesis. Como  $0 \in \Omega$ ,

$$\text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(H_0, \Omega) = \text{Ind}(H_1, \Omega) = \text{Ind}(0, \Omega) = 1,$$

donde en esta cadena de igualdades hemos usado la invarianza de homotopía y la normalización. ■



# 6. Aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales

En este capítulo veremos la utilidad del grado topológico y su aplicación práctica en la búsqueda de soluciones para ecuaciones diferenciales. El grado topológico proporciona criterios de existencia, pero también estabilidad frente a perturbaciones, lo que lo convierte en un método robusto dentro de esta teoría. Permite afrontar problemas reduciéndolos a otros más manejables mediante deformaciones continuas entre operadores.

Comenzaremos presentando el Teorema de existencia de Peano, fundamental en el estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias para garantizar la existencia de soluciones bajo ciertas condiciones específicas. Buscamos demostrarlo usando la teoría del grado. Esto lleva de manera natural al análisis de un sencillo problema de frontera, a través del que ilustraremos cómo el grado topológico se puede utilizar para demostrar la existencia de soluciones, incluso cuando no se tiene una expresiones explícita para ellas.

## 6.1. El Teorema de existencia de Peano

Sea  $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$  un valor dado. Consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(x) = F(x, u(x)), \\ u(x_0) = u_0, \end{cases} \quad (6.1)$$

donde la función  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $D$  y además  $(x_0, u_0) \in D$ . Dado un intervalo  $I$  que contiene a  $x_0$ , decimos que  $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución del problema (6.1) si

- $u \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  y  $u \in \mathcal{C}^1(\text{int}(I), \mathbb{R})$ ,
- para todo  $x \in I$  cumple la ecuación diferencial  $u'(x) = F(x, u(x))$ ,
- y además se satisface la condición inicial  $u(x_0) = u_0$ .

**Teorema 6.1 (de Peano).** Sea  $S = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq r \text{ y } |u - u_0| \leq r\}$  un entorno de  $(x_0, u_0)$

para un  $r > 0$  fijo, con  $(x_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ , y  $F : S \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces el problema (6.1) tiene al menos una solución  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  en un entorno  $I$  de  $x_0$ , para todo  $x \in I$ .

*Demostración.* Escogemos  $M > 1$  de manera que  $|F(x, u)| \leq M$  para cualquier punto en  $S$ . El intervalo  $I$  en que estará definida la solución será de la forma  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ , así que tomamos  $\alpha = \frac{r}{M}$  y buscamos ver que la solución existe en dicho intervalo. El conjunto de valores  $f(x, u)$  para todo  $(x, u) \in S$ , está acotado. De esta manera, por ser  $S$  cerrado y acotado (compacto), su imagen por medio de  $|f|$  es un subconjunto compacto de la recta (acotado), por lo que  $M$  existe. Usando la expresión dada por el Teorema fundamental del cálculo integral, encontrar solución al problema de valor inicial es equivalente a encontrar solución de la ecuación integral

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x F(t, u(t)) dt.$$

Consideremos el conjunto de funciones continuas en el intervalo cerrado  $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ,  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . Nos restringiremos al subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  de funciones que satisfacen

$$(1) |u(x) - u_0| \leq r \text{ para todo } x \in I \text{ y}$$

$$(2) |u(x_1) - u(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Gracias a las condiciones sobre las funciones que lo caracterizan, este subconjunto es convexo, es decir, para  $u, v \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $tu + (1-t)v \in \mathcal{A}$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Además, podemos definir en él la norma de funciones como  $\|u\| = \max |u(x)|$ . Esto induce una distancia y una topología, que dotan a  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  de una estructura de espacio normado. Como  $\mathcal{A}$  es cerrado, podemos aplicar el Teorema de Ascoli-Arzelà para ver que también es compacto.

Definimos ahora el operador  $T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , dado por

$$Tu(x) = u_0 + \int_{x_0}^x F(t, u(t)) dt.$$

Hallar solución de la ecuación integral es equivalente a encontrar un punto fijo para el operador  $T$ .

Por como hemos ido desarrollando la demostración, estamos trabajando con un conjunto compacto, convexo y  $T$  un operador continuo. Además, si  $u$  está en  $\mathcal{A}$ ,  $Tu$  también cumple esas condiciones y de este modo,  $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ . Estamos por tanto bajo las hipótesis del Teorema de punto fijo de Schauder, por lo que podemos garantizar la existencia de punto fijo y, consecuentemente, de solución para el problema (6.1). ■

*Observación 6.2.* Este teorema es de existencia, no de unicidad.

## 6.2. Problemas de frontera

Las ecuaciones diferenciales periódicas son un buen modelo matemático para el estudio de problemas reales diversos. Un ejemplo de esto son problemas de condiciones ambientales, de movimientos de los astros o de fenómenos naturales en los que se sigue ciertos patrones temporales. Por esto, la existencia de soluciones periódicas es importante en este contexto.

Sea  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua  $T$ -periódica respecto de la variable  $t$  (tal que  $F(t, x) = F(T + t, x)$  para todo  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ). Estudiar las soluciones de  $x' = F(t, x)$  es equivalente a estudiar las soluciones del problema de frontera

$$\begin{cases} x' = F(t, x), & \text{para todo } t \in [0, T], \\ x(0) = x(T). \end{cases} \quad (6.2)$$

Diremos que una función  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  es solución de este problema si cumple que  $x \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ ,  $x \in \mathcal{C}^1((0, T), \mathbb{R})$ ,  $x$  satisface la ecuación diferencial en todo el intervalo, es decir,  $x'(t) = F(t, x(t))$  y además cumple las condiciones de frontera, es decir,  $x(0) = x(T)$ .

**Teorema 6.3.** *Sea  $F : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua  $T$ -periódica y tal que  $\frac{\partial F}{\partial x} : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Si existen constantes  $a < b$  tales que  $F(t, a) > 0$  y  $F(t, b) < 0$  para todo  $t$ , entonces el problema de frontera asociado (6.2) tiene solución.*

*Demostración.* El problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = F(t, x) & \text{para todo } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

tiene una única solución  $\varphi(t, x_0)$  definida en un intervalo alrededor de  $t = 0^\dagger$ . Como  $F$  y su derivada son continuas y acotadas en  $[0, T] \times [a, b]$ , esta solución se puede prolongar a  $[0, T]$ . La solución está bien definida para  $x_0 \in [a, b]$ , por lo que podemos considerar una solución para cada  $x_0 \in [a, b]$ . Definimos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x_0) = \varphi(T, x_0) - \varphi(0, x_0) = \varphi(T, x_0) - x_0$ .  $f$  mide la diferencia entre la solución tras un tiempo  $T$  y el valor inicial. Como  $\varphi$  es continua,  $f$  también.

Si encontramos un cero de  $f$ , encontramos una solución del problema (6.2), ya que, para  $y \in [a, b]$  tal que  $f(y) = 0$ , tendremos  $\varphi(T; y) = y$ . Como  $F(t, a) > 0$  para todo  $t \in [0, T]$ , la derivada de la solución que parte de  $x(0) = a$  es estrictamente positiva (la solución crece). Esto significa que  $\varphi(T, a) > a = \varphi(0, a)$ . Análogamente para  $F(t, b) < 0$ , la solución decrece, y podemos entonces

<sup>†</sup>Se deduce del teorema de existencia y unicidad para EDOs, ya que el campo es continuo y la derivada parcial es continua respecto de  $x$ , con lo que es localmente Lipschitziana.

aplicar el Teorema del valor intermedio. Como  $f(a) = \varphi(T, a) - a > 0$  y  $f(b) = \varphi(T, b) - b < 0$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ . Esto permite afirmar que la solución  $\varphi(t)$  con condición inicial  $x(0) = c$  cumple  $\varphi(0) = \varphi(T)$  y entonces es una solución de la ecuación diferencial. ■

De esta manera vemos que, en ocasiones, los problemas pueden reducirse a otros más sencillos, consistentes en buscar soluciones de ecuaciones de la forma  $f(x) = 0$ . Sin embargo, no es tan directo cuando pasamos a trabajar en espacios de dimensión finita mayor que uno, ni cuando queremos trabajar en espacios de dimensión infinita. Es en este contexto en el que juegan un papel destacado tanto el grado topológico como toda la teoría desarrollada entorno a él, pues permiten, en muchos casos, dar solución a estos problemas, y garantizar así la existencia de soluciones.

### 6.2.1. Solución de un sistema de ecuaciones Dirichlet

Consideramos el problema Dirichlet en varias variables,

$$\begin{cases} u_1'' = F_1(t, u_1, \dots, u_N), & u_1(0) = u_1(T) = 0, \\ \vdots & \vdots \\ u_N'' = F_N(t, u_1, \dots, u_N), & u_N(0) = u_N(T) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

donde  $F_i : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas y acotadas para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

**Lema 6.4.** *Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua y tal que existe  $M > 0$  con  $\|Fx - x\| \leq M$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces  $Fx = 0$  tiene solución.*

*Demostración.* Escribiremos  $Fx = x + \phi(x)$ , donde  $\|\phi\| \leq M$ . Basta definir una homotopía entre la identidad y la aplicación con la que estamos trabajando. Tomamos entonces

$$H(\lambda, x) = \lambda x + (1 - \lambda)Fx, \quad \lambda \in [0, 1].$$

De este modo,  $H(0, x) = x$  y  $H(1, x) = Fx$ . Para poder aplicar la teoría del grado, concretamente el Teorema de invarianza de homotopía, necesitamos comprobar que esta es admisible, es decir, que no alcanza el valor 0 a lo largo de su frontera. Vemos que

$$\begin{aligned} H(\lambda, x) = 0 &\Leftrightarrow \lambda Fx + (1 - \lambda)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(x + \phi(x)) + (1 - \lambda)x = 0 \Leftrightarrow \lambda\phi(x) + x = 0. \end{aligned}$$

Para que esto se cumpla,  $0 = \|x + \lambda\phi(x)\| \geq \|x\| - |\lambda|\|\phi(x)\| \Rightarrow \|x\| \leq \|\phi(x)\| \leq M$ . Entonces, si consideramos como el abierto  $\Omega$  una bola de radio  $R > M$ ,  $0 \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$ . Así,

$$g(F, \Omega, 0) = g(H_1, \Omega, 0) = g(H_0, \Omega, 0) = g(\text{Id}, \Omega, 0) = 1,$$

por lo que la ecuación  $Fx = 0$  tiene solución en  $\Omega$ . ■

**Proposición 6.5.** *El sistema de ecuaciones (6.3) tiene al menos una solución.*

*Demostración.* Las  $F_i$  están acotadas para todo  $i \in \{1, \dots, N\}$  y podemos aplicar el lema anterior. ■

### 6.3. El índice de punto fijo en conos

En ocasiones, al abordar problemas de ecuaciones diferenciales, lo que verdaderamente interesa es la existencia de soluciones que cumplan ciertas características, es decir, soluciones cuya imagen esté contenida en conjuntos determinados. Aplicar esta herramienta resulta de gran utilidad, por ejemplo, para excluir la solución trivial del estudio o para determinar la existencia de soluciones positivas. Para esto no podemos usar el espacio normado entero, sino que necesitamos restringirnos a un subconjunto convexo que no es necesariamente un subespacio. Buscamos extender la teoría del índice de punto fijo a conos, ya que estos permiten un enfoque más específico en la resolución de problemas y ecuaciones. Nos centraremos en el caso concreto del conjunto de funciones continuas positivas.

**Definición 6.6.** Decimos que un subconjunto  $C$  de un espacio normado  $X$  es un *cono* si satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $C$  es cerrado y convexo.
- (2)  $\lambda C \subset C$  para todo  $\lambda \geq 0$ .
- (3) Si  $c \in C$  y  $-c \in C$ ,  $c = 0$ , es decir,  $C \cap -C = \{0\}$ .

Cuando trabajemos con un cono, supondremos que no está formado únicamente por el elemento cero, es decir, que no es trivial.

En general, la teoría de Leray-Schauder no es aplicable en este contexto. Esto se debe a que, dentro del conjunto de funciones con el que estemos trabajando, puede que el cono considerado no cumpla las hipótesis necesarias. Aprovecharemos que existe una retracción de todo subespacio cerrado y convexo de un espacio normado para construir una teoría análoga a la presentada hasta ahora, pero que esté bien definida en esta nueva situación. Esto pone de manifiesto también la posibilidad de extender la herramienta a contextos más generales.

**Teorema 6.7 ([5], Capítulo 14).** *Sea  $X$  un espacio normado y  $C \subset X$  un subconjunto cerrado y convexo. Existe una retracción  $r : X \rightarrow C$ .*

**Definición 6.8.** Sea  $X$  un espacio normado,  $C \subset X$  un cono y  $r : X \rightarrow C$  una retracción. Sea  $\Omega \subset C$  un abierto de la topología relativa y  $T : \overline{\Omega} \cap C \rightarrow X$  un operador compacto tal que  $Tx \neq x$  para todo  $x \in \partial\Omega$ . Entonces definimos el *índice de punto fijo de  $T$  en  $\Omega$  relativo a  $C$*  como

$$\text{Ind}(T, \Omega) = g(\text{Id} - T \circ r, \Omega \cap r^{-1}(\Omega), 0).$$

*Observación 6.9.* Como  $T$  es compacto, existe un entorno compacto  $K \subset X$  tal que  $T(\overline{\Omega}) \subset K$ . De esta manera,  $Tr(\overline{r^{-1}(\Omega)}) \subset K$  y  $T \circ r$  es compacto. Además, una retracción no añade puntos fijos en la frontera, por lo que tiene sentido considerar el grado de esta forma.

*Observación 6.10.* Para ver que el índice está bien definido, necesitamos ver que es independiente de la retracción considerada. Dadas dos retracciones  $r_1, r_2$  que cumplen la definición, definimos la homotopía  $H(t, x) = tT(r_1(x)) + (1-t)T(r_2(x))$ . Es admisible, ya que para cualquier  $x \in \partial\Omega$ ,  $r_1(x) = r_2(x) = x$ , por lo que  $H(t, x) = Tx \neq x$ . De esta manera, usando la invarianza de homotopía,

$$g(\text{Id} - T \circ r_i, \Omega \cap r_i^{-1}(\Omega), 0) = g(\text{Id} - T \circ r_j, \Omega \cap r_j^{-1}(\Omega), 0)$$

para  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ . Además, como

$$g(\text{Id} - T \circ r_i, \Omega \cap r_1^{-1}(\Omega) \cap r_2^{-1}(\Omega), 0) = g(\text{Id} - T \circ r_i, \Omega \cap r_i^{-1}(\Omega), 0),$$

tenemos la igualdad.

Las propiedades del grado de Leray-Schauder se conservan para el índice que acabamos de definir. Las enunciamos en este contexto:

**Teorema 6.11.** *El índice de punto fijo  $\text{Ind}(T, \Omega \cap C)$  satisface las siguientes propiedades:*

- (1) **Normalización:** *Para un operador que toma un valor constante  $c$ , se cumple que  $\text{Ind}(T, \Omega \cap C) = 1$  si y solo si  $c \in \Omega \cap C$ .*
- (2) **Existencia:** *Si  $\text{Ind}(T, \Omega \cap C) \neq 0$ , entonces  $Tx = x$  tiene al menos una solución en  $\Omega \cap C$ .*
- (3) **Escisión:** *Sea  $K \subset \overline{\Omega} \cap C$  un cerrado tal que  $Tx \neq x$  para  $x \in K$ . Entonces  $T$  no tiene puntos fijos en  $K$  y  $\text{Ind}(T, \Omega) = \text{Ind}(T, \Omega \setminus K)$ . Equivalentemente, dado un abierto  $A$  tal que  $Tx \neq x$  fuera de  $A$ , entonces  $\text{Ind}(T, \Omega \cap C) = \text{Ind}(T, A)$ .*
- (4) **Aditividad:** *Sean  $\{\Omega_j\}_{j=1}^m$  abiertos disjuntos dos a dos en  $C$  y  $\Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$ . Entonces*

$$\text{Ind}(T, \Omega \cap C) = \sum_{j=1}^m \text{Ind}(T, \Omega_j \cap C).$$

- (5) **Homotopía:** *Si  $H : [0, 1] \times \Omega \cap C \rightarrow C$  es una homotopía compacta que satisface  $Tx \neq x$  para  $x \in \partial\Omega \cap C$ , entonces*

$$\text{Ind}(H_0, \Omega \cap C) = \text{Ind}(H_1, \Omega \cap C).$$

**Lema 6.12.** Sea  $C$  un subconjunto cerrado y convexo de un espacio normado y  $T : C \rightarrow C$  compacto. Entonces  $\text{Ind}(T, C) = 1$ .

*Demostración.*  $C$  es abierto en sí mismo y por tanto, el índice está bien definido. Como estamos en un conjunto convexo, podemos definir la familia de funciones  $H(t, x) = tx_0 + (1 - t)Tx$ , que es una homotopía entre nuestro operador y una aplicación constante que asigna a cada elemento otro  $x_0 \in C$ . Como  $C$  no tiene frontera, la homotopía anterior es admisible. Usando las propiedades de existencia y de invarianza por homotopía,

$$\text{Ind}(T, C) = \text{Ind}(H_0, C) = \text{Ind}(H_1, C) = \text{Ind}(x_0, C) = 1. \quad \blacksquare$$

## 6.4. El reactor tubular

El objetivo principal de esta sección es analizar un modelo matemático que describe el comportamiento térmico en un reactor tubular, sistema muy utilizado en procesos químicos industriales. Partiendo de observaciones empíricas, construimos un problema de frontera para estudiar la evolución de la temperatura y obtenemos una ecuación integral mediante la función de Green asociada. Esta reformulación permite entender el problema como una búsqueda de puntos fijos de un operador no lineal sobre el espacio de funciones continuas positivas. El objetivo es identificar condiciones para garantizar la existencia de al menos dos o incluso tres soluciones distintas del problema, que representan distintos posibles estados de operación del reactor.

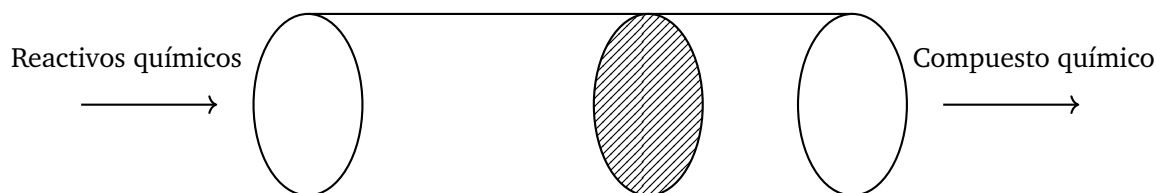


Fig. 6.1. Diagrama del reactor tubular.

Un reactor tubular es un reactor químico utilizado normalmente en aplicaciones industriales, relacionadas principalmente con procesos de flujo continuos. Se introducen los reactivos químicos en un extremo del tubo y en su interior tienen lugar las reacciones químicas adecuadas para obtener la composición química de interés en el otro extremo. Nos centraremos en el estudio del comportamiento de reactores tubulares adiabáticos de flujo pistón. Estos reactores están térmicamente aislados y el calor se genera proviene solo de la reacción química. En ellos, la composición del fluido varía a lo largo de la dirección del flujo, pero se mantiene uniforme en cada disco transversal infinitesimal (pistón). Esto se ilustra en la Figura 6.1, y permite entender el problema como uno unidimensional,

así como estudiar los cambios en función de la posición del disco a lo largo del tubo. Denotaremos por  $t \in [0, 1]$  a la posición a lo largo del tubo, siendo  $t = 0$  la entrada de los reactivos y  $t = 1$  la salida del reactor.

La temperatura  $x(t)$  producida por la conversión de los reactivos en estado estacionario puede modelarse mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden:

$$\begin{cases} \beta x''(t) - x'(t) + r(x(t)) = 0, \\ \beta x'(0) - x(0) = 0, \quad x'(1) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

La función  $r(x(t))$  representa la velocidad de conversión de los reactivos en la posición  $t$  en función de la temperatura en ese punto, y la llamamos tasa de reacción. La primera condición de frontera indica que la derivada de la temperatura en el origen (que representa su crecimiento) es proporcional a la temperatura en ese punto, mientras que la segunda condición inicial manifiesta que no hay cambio de temperatura al final del proceso. Además, trabajaremos con  $\beta > 0$ .

*Observación 6.13.* No especificamos la definición de cada una de las funciones implicadas porque estas dependerán del problema concreto estudiado. Aun así, la función de temperatura debe ser continua y tener derivadas primera y segunda continuas. Por tanto pedimos que  $x(t) \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ . La tasa de reacción química  $r(x(t))$ , que depende de  $x(t)$ , tendrá características diversas en cada problema. De todas formas, necesitamos pedir, al menos, que sea continua.

La existencia de varias soluciones en este contexto es de interés, ya que además de buscar una reacción estable y que funcione, interesa también llevarla a cabo de la manera más económica o sostenible posible. La existencia de varias soluciones puede implicar notables diferencias en los costes asociados a cada una de ellas. Como hay evidencia empírica de que, para ciertas funciones de velocidad de reacción  $r(x(t))$ , el problema presenta múltiples soluciones, vamos a respaldar esto probando que efectivamente existen para el problema (6.4). Se demuestra también así que estamos ante un modelo preciso del proceso. La idea principal es reducir el problema a una función cuyo estudio de puntos fijos dé las soluciones del problema de frontera. Esto es posible porque el operador  $Lx = \beta x'' - x'$  es lineal. Aunque las condiciones de frontera no son del tipo Dirichlet que vimos antes, mantienen la estructura general  $ax(t_0) + bx'(t_0) = 0$ ;  $cx(t_1) + dx'(t_1) = 0$ , con  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \neq 0$ . Buscamos entonces resolver  $Lv = \beta v'' - v' = w$ .

*Observación 6.14.* Estamos considerando  $L : \mathcal{C}_F^2([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , donde  $\mathcal{C}_F^2$  denota las funciones dos veces continuamente diferenciables que además satisfacen las condiciones de frontera asociadas al problema.

### 6.4.1. Resolución de la ecuación diferencial lineal asociada

Es fácil encontrar la solución del problema homogéneo asociado  $Lv = \beta v'' - v' = 0$ . Hacemos el cambio de variable  $u = v'$ , para reescribir  $\beta u' - u = 0$ . De esta manera, reducimos el problema a otro de primer orden, que se puede resolver por separación de variables, obteniendo la expresión

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\beta}u \Rightarrow \frac{1}{u}du = \frac{1}{\beta}dt.$$

Suponiendo que la solución es distinta de cero, reordenamos e integramos a ambos lados de la igualdad,

$$\int \frac{1}{u} du = \int \frac{1}{\beta} dt \Rightarrow \ln |u(t)| = \frac{1}{\beta}t + c_1 \Rightarrow u(t) = k e^{t/\beta}.$$

Hay que deshacer ahora el cambio de variable, por lo que integramos de nuevo

$$v(t) = \int u(t) dt = \int k e^{t/\beta} dt = k_1 e^{t/\beta} + c_2,$$

donde  $k_1 = k \frac{1}{\beta}$ . Así, llegamos a  $v_H(t) = k_1 e^{t/\beta} + c_2$ .

Para hallar la expresión de la ecuación no homogénea, partimos de la homogénea que acabamos de calcular, y usamos variación de parámetros sustituyendo las constantes por funciones de  $t$ , es decir, pasando al problema  $v_p(t) = k_1(t)e^{t/\beta} + c_2(t)$ . Hallamos las derivadas necesarias:

$$\begin{aligned} v_p'(t) &= k_1'(t)e^{t/\beta} + k_1(t)\frac{1}{\beta}e^{t/\beta} + c_2'(t), \\ v_p''(t) &= k_1''(t)e^{t/\beta} + \frac{2}{\beta}k_1'(t)e^{t/\beta} + \frac{1}{\beta^2}k_1(t)e^{t/\beta} + c_2''(t). \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos al añadir dos nuevas variables, podemos imponer la condición

$$k_1'(t)e^{t/\beta} + c_2'(t) = 0. \quad (6.5)$$

Teniendo en cuenta esto en las derivadas que acabamos de calcular, podemos sustituir en  $Lv$ , para obtener

$$Lv_p = \beta v_p'' - v_p' = k_1'(t)e^{t/\beta}.$$

El último paso es igualar  $L(v(t)) = w(t)$  e integrar una vez más,

$$k_1'(t)e^{t/\beta} = w(t) \Rightarrow k_1'(t) = w(t)e^{-t/\beta} \Rightarrow k_1(t) = \int_0^t w(s)e^{-s/\beta} ds.$$

Recurriendo a la condición (6.5),

$$c_2'(t) = -k_1'(t)e^{t/\beta} = -w(t) \Rightarrow c_2(t) = -\int_0^t w(s) ds,$$

y entonces ya podemos sustituir para obtener la solución particular del problema, que será

$$v_p(t) = e^{t/\beta} \int_0^t w(s) e^{-s/\beta} ds - \int_0^t w(s) ds.$$

Sumando ambas expresiones, se obtiene la solución general completa

$$v(t) = v_H(t) + v_p(t) = k_1 e^{t/\beta} + c_2 + v_p(t).$$

Falta ahora imponer las condiciones de frontera para encontrar  $k_1$  y  $c_2$ . La primera de ellas es  $\beta v'(0) - v(0) = 0$ . Derivamos para obtener

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{k_1}{\beta} e^{t/\beta} + v_p'(t) = \frac{k_1}{\beta} e^{t/\beta} + \frac{e^{t/\beta}}{\beta} \int_0^t w(s) e^{-s/\beta} ds + w(t) - w(t) \\ &= \frac{k_1}{\beta} e^{t/\beta} + \frac{e^{t/\beta}}{\beta} \int_0^t w(s) e^{-s/\beta} ds. \end{aligned}$$

Por tanto, al sustituir,  $\beta v'(0) = k_1$ . Como además  $v(0) = k_1 + c_2$ , para que se cumpla la condición de frontera necesitamos  $c_2 = 0$ . Si además imponemos  $v'(1) = 0$ , llegamos a

$$v'(1) = \frac{k_1}{\beta} e^{1/\beta} + \frac{e^{1/\beta}}{\beta} \int_0^1 w(s) e^{-s/\beta} ds = 0 \Rightarrow k_1 = - \int_0^1 w(s) e^{-s/\beta} ds.$$

Entonces la solución es

$$v(t) = v_H(t) + v_p(t) = -e^{t/\beta} \int_0^1 w(s) e^{-s/\beta} ds + e^{t/\beta} \int_0^t w(s) e^{-s/\beta} ds - \int_0^t w(s) ds,$$

es decir,

$$v(t) = -e^{t/\beta} \int_t^1 w(s) e^{-s/\beta} ds - \int_0^t w(s) ds.$$

La expresión final es

$$v(t) = - \int_0^1 G(t,s) w(s) ds,$$

donde  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es la función de Green asociada, definida como

$$G(t,s) = \begin{cases} e^{-\frac{t-s}{\beta}}, & s \geq t, \\ 1, & s < t. \end{cases}$$

Acabamos de ver que el operador  $L$  tiene inverso: como  $L(v(t)) = w(t)$ , tendremos que

$$v(t) = L^{-1}(w(t)) = \int_0^1 G(t,s) w(s) ds.$$

Sin embargo, el problema inicial tenía una parte no lineal asociada  $r(v(t))$ . Podemos solucionarlo, escribiendo  $Lv(t) = -r(v(t))$  y considerando  $T(v(t)) = -L^{-1}(r(v(t)))$ . De esta manera, las soluciones del problema (6.4) vienen dadas por los puntos fijos de  $T : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , donde  $T(x(t)) = -\int_0^1 G(t, s)r(x(s)) ds$ .

### 6.4.2. Existencia de solución del problema inicial

Para poder demostrar que el operador  $T$  que acabamos de definir tiene algún punto fijo, necesitamos que tenga las características adecuadas para aplicar la teoría que se ha desarrollado. Vamos a ver que  $T$  es un operador continuo y compacto.

**Teorema 6.15.** *Sea  $T : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  definido como  $T(x(t)) = \int_0^1 G(t, s)r(x(s)) ds$ , con  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas. Entonces  $T$  es compacto y continuo.*

*Demostración.* Sea  $A \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  un subconjunto acotado. Si  $T(A)$  es un subconjunto acotado y equicontinuo de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , por el Teorema de Ascoli–Arzelà,  $T(A)$  será relativamente compacto, con lo que tendremos que el operador es compacto.

Veamos primero que es acotado. Como  $[0, 1] \times [0, 1]$  es compacto y  $G$  es continua, existe  $M > 0$  tal que  $|G(t, s)| \leq M$  para todo  $t, s \in [0, 1]$ . Además, como  $A$  es acotado, existe  $K > 0$  tal que para todo  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq K$  y entonces  $|x(s)| \leq K$  para todo  $s \in [0, 1]$  y  $r(x(s)) \in r([-K, K])$ . Como  $r$  es continua en un compacto, existe  $L > 0$  tal que  $|r(x(s))| \leq L$  para todo  $x \in A$ , y todo  $s \in [0, 1]$ . Por tanto, para cada  $x \in A$  y  $t \in [0, 1]$ , tenemos que

$$|T(x(t))| = \left| \int_0^1 G(t, s)r(x(s)) ds \right| \leq \int_0^1 |G(t, s)| |r(x(s))| ds \leq \int_0^1 ML ds = ML.$$

De este modo,  $\|Tx\| \leq ML$  para todo  $x \in A$  y  $f(A)$  es acotado.

Veamos ahora que es equicontinuo en  $t_0 \in [0, 1]$  y  $\varepsilon > 0$ . Como  $G$  es uniformemente continua en  $[0, 1] \times [0, 1]$ —es continua en un compacto—, existe  $\delta > 0$  tal que si  $|t - t_0| < \delta$ ,  $|G(t, s) - G(t_0, s)| < \frac{\varepsilon}{L}$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Entonces, para cualquier  $x \in A$  y  $|t - t_0| < \delta$ , tenemos

$$\begin{aligned} |T(x(t)) - T(x(t_0))| &= \left| \int_0^1 (G(t, s) - G(t_0, s))r(x(s)) ds \right| \leq \int_0^1 |G(t, s) - G(t_0, s)| |r(x(s))| ds \\ &< \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $T(A)$  es equicontinuo en  $t_0$ . Como  $t_0$  fue escogido arbitrariamente,  $T(A)$  es equicontinuo en todo  $[0, 1]$ . ■

Como el problema con el que estamos trabajando representa la temperatura en la posición  $t$ , solo tiene sentido considerar soluciones  $x(t) \geq 0$ . Necesitamos restringir por tanto el estudio al conjunto de funciones continuas positivas, que denotaremos por  $\mathcal{C}^+$ . Para establecer la existencia de puntos fijos de  $T$ , necesitamos que cumpla una serie de requisitos. Estos se cumplirán en caso de trabajar con una tasa de reacción  $r$  adecuada. Como además nos interesa probar la existencia de dos o tres soluciones, buscaremos que verifique condiciones que permitan aplicar los resultados que veremos posteriormente.

**Teorema 6.16.** Sea  $T : \mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  definido como  $T(x(t)) = \int_0^1 G(t, s) r(x(s)) ds$ , donde  $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua,  $\beta > 0$ ,  $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  y

$$G(t, s) = \begin{cases} e^{(t-s)/\beta}, & t \leq s, \\ 1, & t > s. \end{cases}$$

Si suponemos que existen  $0 < d < a < a e^{1/\beta} = z$  tales que la función  $r(y)$  satisface para  $y \in [0, \infty)$  que

- (a) si  $y \leq z$  entonces  $r(y) \geq 0$ ,
- (b) si  $y \leq d$  entonces  $r(y) < d$ ,
- (c) si  $a \leq y \leq z$  entonces  $r(y) > a(\beta - \beta e^{-1/\beta})^{-1}$ ,

entonces  $Tx$ , con  $x \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  tiene las siguientes propiedades:

- (1) Si  $\|x\| \leq z$  entonces  $T(x(t)) \geq 0$  para todo  $0 \leq t \leq 1$ .
- (2) Si  $\|x\| \leq d$  entonces  $\|Tx\| < d$ .
- (3) Si  $a \leq x(t) \leq z$  entonces  $\inf_{0 \leq t \leq 1} T(x(t)) > a$ .
- (4) Si  $\|Tx\| > z$  entonces  $\inf_{0 \leq t \leq 1} T(x(t)) > \frac{a}{z} \|Tx\|$ .

*Demostración.* (1) La hipótesis (a) dice que si  $y \leq z$  entonces  $r(y) \geq 0$ . Como si  $\|x\| < z$  entonces  $x(s) < z$  para todo  $s \in [0, 1]$ , tenemos que  $r(x(s)) \geq 0$  y concluimos por la propia definición de  $T$ , ya que  $G(t, s) \geq 0$  para todo  $s, t \in [0, 1]$ .

- (2) Para cada  $s \in [0, 1]$ , la función  $G(t, s)$  es no decreciente respecto de  $t$ , por lo que  $T(x(t))$  también. Así,  $\inf_{0 \leq t \leq 1} T(x(t)) = T(x(0))$  y  $\|Tx\| = T(x(1))$ . Si  $\|x\| \leq d$ ,  $x(s) \leq d$  para todo  $s \in [0, 1]$  y por la hipótesis (b) tenemos que  $r(x(s)) < d$ . De esta manera,

$$\|Tx\| = T(x(1)) = \int_0^1 G(1, s) r(x(s)) ds < d \int_0^1 G(1, s) ds = d.$$

(3) Como  $a \leq x(t) \leq z$ , la hipótesis (c) implica que

$$\inf_{0 \leq t \leq 1} T(x(t)) = T(x(0)) = \int_0^1 e^{-s/\beta} r(x(s)) ds > a(\beta - \beta e^{-1/\beta})^{-1} \int_0^1 e^{-s/\beta} ds = a.$$

(4) Como  $\|Tx\| > z = ae^{1/\beta}$ , entonces

$$\begin{aligned} \inf_{0 \leq t \leq 1} T(x(t)) = T(x(0)) &= \int_0^1 e^{-s/\beta} r(x(s)) ds \geq e^{-1/\beta} \int_0^1 r(x(s)) ds \\ &= e^{-1/\beta} T(x(1)) = e^{-1/\beta} \|Tx\| = \frac{a}{z} \|Tx\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Vamos a ver los resultados necesarios para garantizar la existencia de múltiples soluciones en problemas definidos sobre ciertos subconjuntos convexos concretos. En particular, trabajaremos con el cono de las funciones continuas positivas en el intervalo  $[0, 1]$ , dotado de la norma del supremo. Este conjunto lo denotamos por

$$\mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R}) = \{x \in C([0, 1], \mathbb{R}) : x(t) \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1]\},$$

que es un cono convexo y cerrado en el espacio normado  $C([0, 1], \mathbb{R})$ . Salvo que se indique lo contrario, en los resultados que siguen denotaremos este conjunto simplemente como  $C$ , ya que los resultados son válidos para otros conos, aunque estamos trabajando en este contexto con uno en concreto.

*Notación 6.17.* Al restringir el cono  $C$  a elementos con norma acotada por cierto valor, utilizaremos la notación  $C_z = \{x \in C : \|x\| \leq z\}$ .

**Definición 6.18.** Definimos la función  $\alpha : \mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\alpha(x) = \inf_{0 \leq t \leq 1} x(t)$ .

*Observación 6.19.* Nótese que  $\alpha(x) \leq \|x\|$ .

*Observación 6.20.* La función  $\alpha$  que acabamos de definir es continua. Para todo  $\varepsilon > 0$ , si  $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$  y  $\alpha(x_j) = x_j(t_j)$  para  $j = 1, 2$ , entonces

$$\alpha(x_2) \leq x_2(t_1) < x_1(t_1) + \varepsilon = \alpha(x_1) + \varepsilon.$$

Del mismo modo,

$$\alpha(x_1) \leq x_1(t_2) < x_2(t_2) + \varepsilon = \alpha(x_2) + \varepsilon,$$

por lo que  $|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| < \varepsilon$ . Además, es una función cóncava en el convexo  $\mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R})$ , es decir, verifica que

$$\alpha(t x_1 + (1-t)x_2) \geq t \alpha(x_1) + (1-t) \alpha(x_2) \text{ para } t \in [0, 1].$$

Esto se debe a que, si establecemos

$$x(t) = t x_1(t) + (1-t)x_2(t)$$

y escribimos  $\alpha(x) = \inf_{0 \leq t \leq 1} x(t) = x(t_0)$ , entonces  $x_1(t_0) \geq \inf_{0 \leq t \leq 1} x_1(t)$  y  $x_2(t_0) \geq \inf_{0 \leq t \leq 1} x_2(t)$ .

*Notación 6.21.* Supongamos que tenemos una función continua y convexa  $\alpha : C \rightarrow [0, \infty)$  tal que  $\alpha(x) < \|x\|$ . Introducimos los subconjuntos  $S_z(\alpha \geq a) = \{x \in C_z : \alpha(x) \geq a\} \subseteq C_z$ . De forma análoga, para  $0 < a < b \leq z$ , escribimos  $S_b(\alpha \geq a) = \{x \in C_b : \alpha(x) \geq a\}$ .

Estos subconjuntos serán muy importantes en la construcción de los teoremas que nos permitirán garantizar la existencia de varios puntos fijos de la función, y por tanto varias soluciones para nuestro problema. Concretamente, recurriremos al siguiente cálculo del índice:

**Lema 6.22.** *Sea  $T : C_z \subset C \rightarrow C$  compacto. Supongamos que existe  $0 < a < b \leq z$  tales que*

- (a)  $S_b(\alpha > a) \neq \emptyset$ .
- (b) Si  $x \in S_b(\alpha \geq a)$ , entonces  $\alpha(Tx) > a$ .
- (c) Si  $x \in S_z(\alpha \geq a)$ , entonces  $\|Tx\| \leq z$ .
- (d) Si  $x \in S_z(\alpha \geq a)$  y  $\|Tx\| > b$  entonces  $\alpha(Tx) > a$ .

Entonces el índice de punto fijo de  $T$  en  $S_z(\alpha \geq a)$  está definido y además,  $\text{Ind}(T, S_z(\alpha \geq a)) = 1$ .

*Demostración.* Como  $S_b(\alpha > a) \neq \emptyset$  por (a), podemos escoger  $x_0 \in S_b(\alpha \geq a)$ . Definimos la homotopía  $H : [0, 1] \times S_b(\alpha \geq a) \rightarrow C_z$  como  $H(t, x) = (1 - t)Tx + tx_0$ . Está bien definida gracias a la hipótesis (c) y a la convexidad de  $C_z$ . Además, si  $H(t, x) = x$  para algún  $t \in [0, 1]$ , tenemos  $\alpha(x) > a$  y entonces no hay puntos fijos en la frontera, porque para cualquier par  $(t, x)$  de la frontera, necesariamente  $\alpha(x) = a$ . Para ver que hay un punto fijo y probar el lema, separamos en dos casos. Suponemos primero que  $H(t, x) = x$  y  $\|Tx\| \leq b$ . Así, como  $x_0 \in S_z(\alpha > a) \subseteq C_b$ ,

$$\|x\| = \|H(t, x)\| = \|(1 - t)Tx + tx_0\| \leq b.$$

Esto implica que  $\alpha(f(x)) > a$  por la hipótesis (b), y gracias a la concavidad de  $\alpha$ ,

$$\alpha(x) = \alpha(H(t, x)) = \alpha((1 - t)Tx + tx_0) \geq (1 - t)\alpha(Tx) + t\alpha(x_0) > a.$$

Ahora, si  $H(t, x) = x$  y  $\|Tx\| > b$ , por la hipótesis (d) volvemos a tener que  $\alpha(Tx) > a$  y  $\alpha(x) > a$ . Entonces estamos en las condiciones de aplicar la propiedad de invarianza de homotopía de índice de punto fijo, y podemos concluir la demostración teniendo en cuenta que

$$\text{Ind}(f, S_z(\alpha \geq a)) = \text{Ind}(H_0, S_z(\alpha \geq a)) = \text{Ind}(H_1, S_z(\alpha \geq a)) = \text{Ind}(x_0, S_z(\alpha \geq a)) = 1. \quad \blacksquare$$

Los resultados que vamos a presentar no solo garantizan la existencia de uno, dos o tres puntos fijos como tal, sino la localización de estos. Antes de enunciar y demostrar los teoremas principales de esta sección, aplicables al problema del reactor tubular, necesitamos un último resultado.

**Teorema 6.23.** Sea  $T : C_z \rightarrow C_z$  compacto y supongamos que existen  $0 < d < a < b \leq z$  tales que

- (1)  $S_b(\alpha > a) \neq \emptyset$ .
- (2) Si  $x \in S_b(\alpha \geq a)$  entonces  $\alpha(Tx) > a$ .
- (3) Si  $\|x\| \leq d$  entonces  $\|Tx\| \leq d$ .
- (4) Si  $x \in S_z(\alpha \geq a)$  y  $\|Tx\| > b$  entonces  $\alpha(Tx) > a$ .

Los conjuntos disjuntos  $U_1 = \{x \in C_z : \|x\| < d\}$ ,  $U_2 = S_z(\alpha > a)$  y  $U_3 = C_z \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$  tienen, cada uno, al menos un punto fijo de  $T$ .

*Demostración.* La propiedad de que  $\alpha(x) \leq \|x\|$  implica que, si  $x \in \overline{U_1}$  entonces  $\alpha(x) \leq d < a$  y así  $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$ . Por la hipótesis (c),  $T(\overline{U_1}) \subseteq U_1$  e  $\text{Ind}(T, U_1) = 1$  por el Lema 6.12, así que por el teorema de existencia, existe un punto fijo en este conjunto. Estamos ante las mismas hipótesis que en el lema anterior salvo (c). Sin embargo, esta se cumple, ya que  $T$  lleva  $C_z$  en sí mismo. Gracias a esto,  $\text{Ind}(T, U_2) = 1$  y también habrá un punto fijo en  $U_2$ , que será distinto al anterior por ser las clausuras de los conjuntos disjuntas. Por último, teniendo en cuenta que  $U_3 = C_z \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2})$ , los tres conjuntos cumplen la propiedad de aditividad del índice, así que

$$1 = \text{Ind}(T, C_z) = \text{Ind}(T, U_1) + \text{Ind}(T, U_2) + \text{Ind}(T, U_3) = 2 + \text{Ind}(T, U_3).$$

Esto nos permite concluir que  $\text{Ind}(T, U_3) = -1$ , y entonces hay un punto fijo en  $U_3$ . ■

El siguiente paso es cambiar la definición del operador del teorema. Aquí, no requeriremos que la imagen del operador sea  $C_z$ .

**Teorema 6.24.** Sea  $T : C_z \subset C \rightarrow C$  un operador compacto. Supongamos que existen  $0 < d < a \leq z$  tales que

- (1)  $S_z(\alpha > a) \neq \emptyset$ .
- (2) Si  $x \in S_z(\alpha \geq a)$  entonces  $\alpha(Tx) > a$ .
- (3) Si  $\|x\| \leq d$  entonces  $\|Tx\| \leq d$ .
- (4) Si  $\|Tx\| > z$  entonces  $\alpha(Tx) \geq \frac{a}{z}\|Tx\|$ .

Entonces  $T$  tiene por lo menos dos puntos fijos.

*Demostración.* Por la hipótesis (3), tenemos un punto fijo de  $T$  en  $C_d$  usando el Lema 6.12. El problema está en garantizar la existencia de un punto fijo de  $T$  en otro subconjunto de  $C_z \subset C$ . Para ello

usaremos el teorema inmediatamente anterior, pero primero necesitamos dar un operador en  $C_z$  que cumpla sus hipótesis. Definimos la retracción  $\phi : C \rightarrow C_z$  como

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq z, \\ \frac{z}{\|x\|}x, & \text{si } \|x\| \geq z, \end{cases}$$

y a partir de ella,  $F = \phi T$ . Como  $T$  es compacto, existe un subconjunto compacto  $K$  de  $C$  que contiene a  $T(S)$  para  $S \subset C_z$ . Entonces  $F(S) = \phi T(S) \subseteq \phi(K)$ , que es compacto. Como queremos aplicar el teorema anterior a  $F$ , vemos que las 4 hipótesis se satisfacen para  $b = z$ .

- (a) La hipótesis (1) coincide con la (1) de este teorema, y no cambia sus consecuencias, pues no depende de la aplicación.
- (b) La hipótesis (3) se cumple porque  $d < z$ .
- (c) La hipótesis (4) se cumple para  $F$  cuando  $b = z$  porque, en tal caso,  $\|Fx\| \leq z = b$ .
- (d) Falta entonces ver la hipótesis (2), es decir, que si  $x \in S_b(\alpha \geq a)$ , tenemos que  $\alpha(F(x)) > a$ . Si  $\|Tx\| \leq z$ , entonces  $\alpha(F(x)) = \alpha(T(x)) > a$  por la hipótesis (2). Si  $\|Tx\| \geq z$ , usamos la concavidad de  $\alpha$  y tenemos que

$$\alpha(F(x)) = \alpha\left(\frac{z}{\|Tx\|}Tx\right) \geq \frac{z}{\|Tx\|}\alpha(Tx) + \left(1 - \frac{z}{\|Tx\|}\right)\alpha(0) \geq \frac{z}{\|Tx\|}\alpha(Tx).$$

La hipótesis (4) permite acabar de comprobar las hipótesis del Teorema para  $F$  porque

$$\alpha(F(x)) \geq \frac{z}{\|Tx\|}\alpha(Tx) > \frac{z}{\|Tx\|}\frac{a}{z}\|Tx\|.$$

Podemos aplicar el Teorema 6.23 al operador  $F$  y concluir que existe un punto fijo  $x_3$  en el subconjunto  $U_3 = C_z \setminus (\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2)$ , donde  $U_1 = \{x \in C_z : \|x\| < d\}$  y  $U_2 = S_z(\alpha > a)$ . Como el punto fijo de  $U_3$  no está en  $U_1$ , es distinto al punto fijo de este conjunto. Además tampoco está en  $\overline{U}_2$ , por lo que  $\alpha(y_3) < a$ . Supongamos que  $\|Ty_3\| > z$ . La hipótesis (4) y la desigualdad que acabamos de desarrollar entre  $\alpha(Fx)$  y  $\alpha(Tx)$  implican

$$a > \alpha(x_3) = \alpha(T(x_3)) \geq \frac{z}{\|T(x_3)\|}\alpha(T(x_3)) \geq \frac{z}{\|T(x_3)\|}\frac{a}{z}\|T(x_3)\| = a.$$

Entonces, el punto es un punto fijo de  $T$  porque  $\|T(x_3)\| \leq z$  y  $x_3 = F(x_3) = \phi T(x_3) = T(x_3)$ . ■

Gracias a esto, recurriendo a las condiciones que impusimos sobre la función tasa de reacción y a todos los resultados que acabamos de ver, presentamos el teorema que nos permite garantizar la existencia de puntos fijos para el problema del reactor tubular. Para ello, demostraremos que se cumple para un operador de ciertas características, y veremos que el operador  $L$  de nuestro problema inicial, gracias a la definición de  $r$ , las cumple, lo que nos permite concluir.

**Teorema 6.25.** Si existen  $0 < c < b < b e^{1/\beta} = z$  tales que la función tasa de reacción  $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  verifica las siguientes propiedades:

- (1) Si  $y \leq z$ , entonces  $r(y) \geq 0$ .
- (2) Si  $x \leq c$ , entonces  $r(y) < c$ .
- (3) Si  $b \leq y \leq z$ , entonces  $r(y) > b(\beta - \beta e^{-1/\beta})^{-1}$ .

Entonces la función  $T : \mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , cuyos puntos fijos son las soluciones del problema de frontera (6.4), tiene al menos dos puntos fijos. Si además  $T(C_z) \subseteq C_z$  entonces tiene al menos tres puntos fijos.

*Demostración.* Tomamos la restricción de  $T$  definida como  $T_z : \mathcal{C}_z([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R})$ , con  $\mathcal{C}_z = \{y \in \mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R}) : \|y\| \leq z\}$ , para aplicar los teoremas anteriores. Como el dominio acotado, la restricción es compacta (Teorema de Ascoli-Arzelà). Su rango es el cono de las funciones continuas positivas  $\mathcal{C}^+([0, 1], \mathbb{R})$  por la hipótesis (1), ya que  $G(t, s) \geq 0$  para todo  $s, t \in [0, 1]$ . La tasa de reacción  $r$  cumple las propiedades del Teorema 6.16, cuyas conclusiones son todas las hipótesis del Teorema 6.24 salvo (1). Esta se cumple, por ejemplo, para la función  $x(t) = a e^{1/\beta}$ . Por este motivo,  $T$  tiene al menos dos puntos fijos. Si  $T : C_z \rightarrow C_z$ , estamos en las hipótesis del Teorema 6.23 para  $d = z = b e^{1/\beta}$ , porque si  $\|Tx\| > z$ , entonces  $\alpha(Tx) > b$  por el Teorema 6.16. Esta es la última hipótesis que pide el Teorema 6.23, por lo que en este caso hay, al menos, tres puntos fijos. ■

Hemos construido y analizado un problema matemático que modela, mediante una ecuación diferencial de segundo orden, la temperatura en un reactor tubular adiabático. Demostramos así que, bajo ciertas hipótesis razonables sobre la función de tasa de reacción, este modelo admite al menos dos soluciones distintas en el conjunto de funciones continuas positivas. La existencia de múltiples soluciones es de gran utilidad para la aplicación práctica, ya que pueden representar diferentes modos de operación del reactor, como distintos niveles de eficiencia, coste o estabilidad.

Este análisis muestra cómo la estructura matemática ayuda a identificar y seleccionar condiciones óptimas de operación, y desde el punto de vista teórico, ejemplifica el uso del índice de punto fijo en conos. Esto abre la puerta al estudio de modelos más complejos en ingeniería química.



# Bibliografía

- [1] Ackermann, N.: *El Grado Topológico en Análisis No Lineal* (2011). URL <https://www.ackermath.info/notes/gtaanl.pdf>. Curso Avanzado de Análisis, Maestría en Ciencias Matemáticas, Posgrado de la UNAM
- [2] Bolzano, B.: *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. *Beiträge zur Theorie der Funktionen* **1**, 1–13 (1817)
- [3] Brouwer, L.E.J.: *Beweis des ebenen Translationsatzes*. *Mathematische Annalen* **71**, 305–313 (1911)
- [4] Brouwer, L.E.J.: *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*. *Mathematische Annalen* **71**(1), 97–115 (1911)
- [5] Brown, R.F.: *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, third edn. Birkhäuser (2014)
- [6] Cañada, A., Villegas, S.: *¿El Teorema de Bolzano en varias variables?* *La Gaceta de la RSME* **7.1**, 101–121 (2004)
- [7] Dieck, T.T.: *Algebraic Topology, EMS Textbooks in Mathematics*, vol. 8. European Mathematical Society Publishing House (2008)
- [8] Dinca, G., Mawhin, J.: *Brouwer Degree: The Core of Nonlinear Analysis, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, vol. 95. Birkhäuser Cham (2021)
- [9] Dold, A.: *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag (1972)
- [10] Hadamard, J.: *Sur les transformations ponctuelles*. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **34**, 71–84 (1906)
- [11] Hadamard, J.: *Sur certains théorèmes fondamentaux de l'analyse mathématique*. *Bulletin des Sciences Mathématiques* **34**, 131–138 (1910)
- [12] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press (2002)
- [13] Kesavan, S.: *Nonlinear Functional Analysis: A First Course, Texts and Readings in Mathematics*, vol. 28. Hindustan Book Agency (2004)

- 
- [14] Kreyszig, E.: *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons (1978)
- [15] Kronecker, L.: *Zur Theorie der Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen*. Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin pp. 535–600 (1869)
- [16] Leray, J., Schauder, J.: *Topologie et équations fonctionnelles*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3e série **51**, 45–78 (1934)
- [17] Miranda, C.: *Una osservazione su una teorema di Brouwer*. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana **3** (1940)
- [18] Nagumo, M.: *A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis*. Mathematische Annalen **120**, 173–179 (1950)
- [19] Rudin, W.: *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill (1976)
- [20] Schwartz, J.T.: *Nonlinear Functional Analysis. Notes on mathematics and its applications*. Gordon and Breach Science publishers (1969)