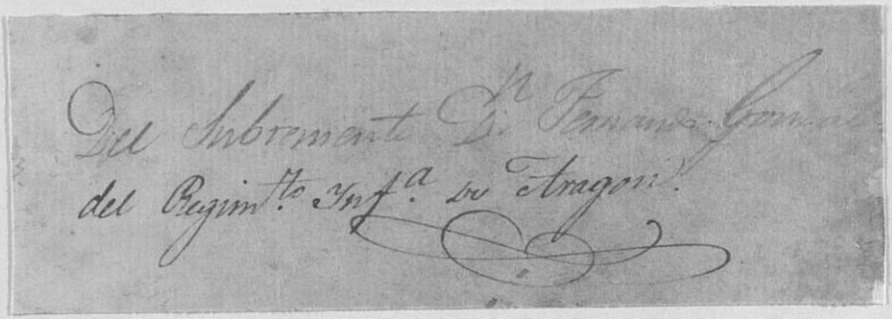
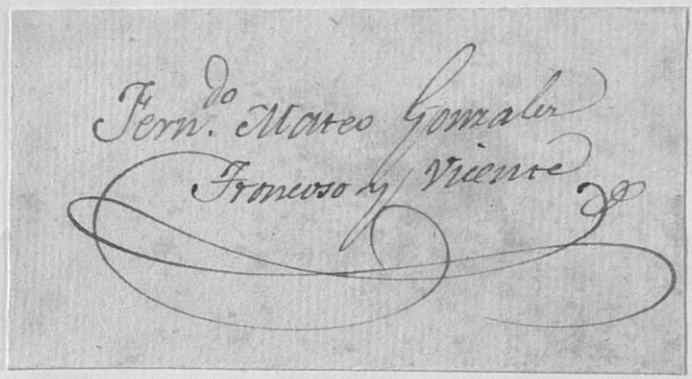
30.332

30 332

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA DE SANTIAGO
01470980


Del Subteniente D.n Fernando Gonzalez
del Regim.to Inf.a de Aragon.

30 332



USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

R. 2503999

TRATADO
DE
GEOMETRÍA,

DISPUESTO PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CABALLEROS CADETES DEL REAL COLEGIO MILITAR DE LA CIUDAD DE SANTIAGO,

POR D. ANGEL LABORDE Y NAVARRO,
TENIENTE DE NAVÍO DE LA REAL ARMADA, Y PRIMER PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE DICHO COLEGIO.

EN DICHA CIUDAD,
OFICINA DE D. MANUEL ANTONIO REY.
M.DCCC.XII.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

INTRODUCCION.

La imperiosa necesidad de establecer un Tratado de Geometría que conviniese al plan y forma de estudios que debian regir en este Colegio militar, y que ademas reuniese las circunstancias precisas y detalladas por la Superioridad, me ha obligado á encargarme de la formacion del presente Tratado.

Para esto se me presentaban dos medios de verificarlo: el primero era innovar, alterando y truncando el método y demostraciones de los autores clásicos, lo que hubiera dado un aire de novedad á mi escrito, que no hubiera dexado de lisonjear el amor propio de otro menos amante que yo del bien público. Los que tengan alguna práctica en esta clase de trabajo, saben no es muy dificil lograrlo, aunque las mas veces á costa de la claridad y laconismo. Pero este artificio era ageno de mi caracter; por lo tanto, ocupado unicamente en ser útil, he preferido el segundo, reducido á valerme de los autores mas célebres, tanto nacionales como extrangeros, y de ellos he tomado lo que he creido mas conveniente. De modo que si en esta obra puede residir algun mérito, será unicamente el haber recopilado con algun discernimiento lo que era conducente al fin que me proponia.

Su objeto principal es facilitar la práctica de las operaciones geométricas en campaña, y suministrar suficiente número de proposiciones para la inteligencia de los trazados de Fortificacion, principios de Artillería, y debido conocimiento de la Táctica. Esta es la razon por qué se explican en él extensamente las reglas y propiedades de que se hará mucho uso en dichos tratados.

He creido sería útil amalgar la parte teórica con la práctica. En efecto, el mayor estímulo en el estudio de una ciencia consiste en ver desde las primeras páginas la aplicacion de los principios teóricos en la práctica.

Para el plan, coordinacion y distribucion de materias, se ha tenido presente la urgencia de abastecer el Exército

á la mayor brevedad de competente número de alumnos, que á no poder reunir una cabal instruccion en Geometría, tuviesen á lo menos la suficiente para poder servir con utilidad en campaña. Con este fin se ha dispuesto en la primera seccion quanto ha parecido bastar á este fin, y en la segunda y tercera lo necesario para completar su instruccion en esta interesante parte de las Matemáticas.

La primera seccion comprehende la Geometría especulativa ó teórica hasta las superficies, y la parte de Trigonometría práctica, necesaria para poner á los alumnos en estado de levantar un plano, poner en execucion qualquier trazado, y verificar qualquier otra medicion; ya sea con el auxîlio de los instrumentos necesarios, ó bien substituyendo á falta de estos otros métodos, para cuya execucion solo se necesitan algunos piquetes y cordeles. De lo dicho se deduce, que el objeto primario que nos hemos propuesto en la primera seccion de este Tratado, es no solo enseñar el modo de operar con los instrumentos necesarios para lograr resultados de toda confianza; sino que teniendo presente que escribíamos para militares, que las mas de las veces carecen de ellos en campaña, ha sido preciso substituir á dichos procederes otros, que aunque tan exâctos como aquellos en su teoría, puestos en práctica no debe sin embargo esperarse de ellos igual precision en los resultados; aunque por otra parte tienen la ventaja de la brevedad en la execucion; circunstancia por la qual son de gran ventaja en las operaciones de reconocimientos militares y otras semejantes.

La segunda seccion trata de las superficies planas: se explica lo que se entiende por unidad superficial: se enseña á medir toda figura plana rectilínea, y el círculo: se demuestra que las superficies de todas las figuras semejantes estan entre sí como los quadrados de sus dimensiones homólogas. Asimismo se trata de las líneas que se hallan en distintos planos: se dan las definiciones de los sólidos mas usuales: se demuestran algunas propiedades de la esfera, indispensables para la cabal inteligencia de la parte geográfica. Se trata de las solideces: se explica lo que se entiende por unidad de solidéz: se enseña el modo de medir los sólidos regulares, y los irregulares

AL SEÑOR

D. FRANCISCO XAVIER ABADÍA,

MARISCAL DE CAMPO DE LOS REALES EXÉRCITOS, Y COMANDANTE GENERAL DEL SEXTO EXÉRCITO.

Ofrezco á V. S. en este Tratado que he dispuesto para la enseñanza de los caballeros Cadetes del Colegio militar del sexto Exército el resultado de mis tareas en este establecimiento. El interes que toma V. S. en quanto puede contribuir á la mejor edu-

cacion militar de tan brillante juventud, me hace esperar que admitirá V. S. con benignidad este corto tributo de mi gratitud y respeto. Conozco Señor la pequeñez de la ofrenda, pero estoy seguro que no graduará V. S. su valor por el mérito intrínseco de la obra, sino por las miras de utilidad pública que me propuse quando emprendí escribirla.

Me he ceñido con el mayor esmero al plan y fines para que destinó la Superioridad este establecimiento,

hasta ahora nuevo entre nosotros; y si mereciese la aprobacion de V. S. se llenarán todos mis deseos, y tendré una prueba de que he logrado el fin que me propuse.

De todos modos, Señor, será para mi la mayor satisfaccion el que se persuada V. S. de los sentimientos de respeto y de la mas alta consideracion con que tengo el honor de ser su mas obediente súbdito, y reconocido servidor

Q. B. L. M. de V. S.

Angel Laborde.

Angel Ludevid.

ÍNDICE

de las Lecciones contenidas en este Tratado.

PRIMERA SECCION.		Páginas.
Primera Leccion.....	*Nociones preliminares*.....	1
Segunda Leccion.....	*De las líneas*.....	4
	Del modo de trazar las líneas rectas	6
Tercera Leccion.....	*De la medida de las líneas*.....	12
Quarta Leccion.....	*De la circunferencia, y modo de describirla*.....	18
Quinta Leccion.....	*De los ángulos*.....	24
Sexta Leccion.....	*Del modo de medir los ángulos*.....	32
Séptima Leccion.....	*De las líneas perpendiculares*.....	36
Octava Leccion.....	*De las líneas paralelas*.....	44
Nona Leccion.....	*De las líneas rectas, consideradas con relacion á la circunferencia del círculo*.....	50
Décima Leccion.....	*De los ángulos considerados respecto al círculo*.....	55
Undécima Leccion.....	*Del trazado de las líneas perpendiculares sobre el terreno, y varios problemas cuya resolucion depende de este trazado*....	63
Duodécima Leccion.....	*Del trazado de las líneas paralelas sobre el terreno, y nociones generales acerca de los triángulos*.....	69
	De los triángulos en general.....	72
Decima tercia Leccion.....	*De la igualdad de los triángulos, y varios problemas útiles en la práctica*.....	76
Décima quarta Leccion....	*Del trazado de los ángulos sobre el papel, y sobre el terreno*.....	86
Décima quinta Leccion....	*De las líneas proporcionales*.....	92
	De la similitud de los triángulos...	95
Décima sexta Leccion.....	*Aplicacion de la leccion anterior á la práctica*.....	103
Décima séptima Leccion...	*De los quadriláteros y polígonos*....	112

Décima octava Leccion.... *De las figuras semejantes*..... 120
Décima nona Leccion..... *Del modo de levantar un plano*..... 128
Vigésima Leccion..... *Continuacion de la leccion anterior*.. 140
Vigésima prima Leccion... *Del nivelamiento*..... 150

SEGUNDA SECCION.

Vigésima segunda Leccion. *De las superficies planas*..... 157
Vigésima tercia Leccion.... *De la comparacion de las superficies*..... 167
De los planos..... 170
Vigésima quarta Leccion.. *De los sólidos en general*..... 176
Vigésima quinta Leccion.. *De la medida y comparacion de las superficies de los sólidos*..... 182
Vigésima sexta Leccion..... *De la medida y comparacion de las solideces de los cuerpos*..... 189

TERCERA SECCION.

Vigésima séptima Leccion. *De las líneas trigonométricas*..... 198
Vigésima octava Leccion.. *Disposicion y uso de las Tablas de los logaritmos de las líneas trigonométricas*..... 204
Vigésima nona Leccion.... *De la resolucion de los triángulos rectilíneos rectángulos empleando los logaritmos, con su aplicacion á varios problemas*.... 208
Trigésima Leccion..... *De la resolucion de los triángulos rectilíneos obliguángulos, empleando los logaritmos*..... 211
Trigésima prima Leccion... *Aplicacion de la leccion anterior en la resolucion de varios problemas*..... 218
Apéndice..... 229

descomponiéndolos en partes sólidas regulares, ó próximamente regulares: se demuestra que las solideces de los sólidos semejantes estan entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas. Finalmente se advierten las equivocaciones en que se puede incurrir en el cálculo de las superficies y solideces, y se enseña el método que debe seguirse en estos cálculos, ínterin no se detallan otros mas expeditos en el Suplemento á este Tratado.

La tercera seccion contiene las nociones generales de Trigonometría plana logarítmica. Se definen con precision las líneas trigonométricas, se demuestran sus propiedades mas esenciales, y se explica la disposicion y uso de las Tablas que contienen los logaritmos de sus valores en partes del radio. Se trata de la resolucion de los triángulos rectilíneos rectángulos y obliquángulos, empleando los logaritmos, y se hacen las aplicaciones á problemas resueltos practicamente en la primera seccion: asimismo se resuelven trigonometricamente los problemas pertenecientes á la inscripcion de los polígonos regulares en el círculo, y la circunscripcion del círculo á qualesquiera de ellos; cuyos dos problemas son muy interesantes en el trazado de las obras de fortificadion.

Sobre las citas hay que advertir, que las letras puestas entre paréntesis se refieren al Apéndice puesto al fin del Tratado, en el qual se dan las definiciones de algunas voces de que ha sido preciso usar por la aplicacion que se hace á la parte militar: asimismo se hallarán en él la descripcion de los instrumentos geométricos de que se hace uso para aquellos que no puedan tener dichos instrumentos á la vista. La abreviatura *Aritm.* puesta entre paréntesis, y seguida de un número, es una cita al tratado de Aritmética: la abreviatura *art.* colocada en los mismos términos, es una cita á un artículo de la Geometría; y quando á dicha abreviatura sigue esta *corol.*, se refiere al corolario del artículo citado. Dichas citas tienen la ventaja de recordar los artículos y corolarios en que se hallan expuestos los principios que sirven de base á lo que se establece. Los alumnos deben acostumbrarse en el discurso de las demostraciones á enunciar el principio á que se refiere la cita, y demostrarlo si fuesen requeridos á ello, y

no contentarse con citar el número de los artículos.

El uso de las Cartas geográficas es tan absolutamente indispensable en un militar, que necesariamente era preciso entrase el conocimiento de su formacion en el plan de estudios de este Colegio militar. Con este fin se ha dispuesto por via de suplemento á este Tratado una breve recapitulacion de todas las nociones preliminares de Cosmografia indispensable para su inteligencia: se demuestra en él, que la extension de un grado del equador es á la de un grado de un paralelo qualquiera, como el radio es al coseno de la latitud de dichos paralelos; y en seguida se da una Tabla de las extensiones de todos los grados de los paralelos desde 0° hasta el de 90°, expresando sus valores en minutos del grado terrestre del equador: se enseña el modo de formar la quadrícula de la Carta, y construida esta el de formar la Carta colocando los objetos en su correspondiente lugar, segun su posicion absoluta, esto es, por su longitud y latitud; ó bien respectivamente, es decir, respecto á otro situado ya en ella, por medio de la distancia y arrumbamiento ó direccion respectiva: en fin, se explican todos los usos de ellas.

Para facilitar a los alumnos la inteligencia de las obras militares, cuyos autores se han conformado ya con el sistema de nuevos pesos y medidas decimales, se ha juzgado útil insertar á continuacion un extracto de la Memoria publicada en 1800 por el Brigadier de la real Armada D. Gabriel de Ciscar; y para completar quanto en esta parte es necesario, se han añadido Tablas de diferentes medidas extrangeras comparadas con las nuestras.

Síguese un extracto del Tratado del caballero Villelongue sobre el modo de operar en los cálculos de medicion de las superficies y solideces, para servir de suplemento á lo dicho sobre este particular al fin de la segunda seccion.

El plan de esta obra ha sido consultado con nuestro digno Director D. Francisco Serrallach, Teniente Coronel del real cuerpo de Ingenieros, el que durante su formacion me ha auxiliado con la eficacia y esmero que emplea en quanto puede contribuir al bien del establecimiento, y á la amistad con que me honra: quisiera poder expresar aquí quanto me dicta la gratitud que le profeso, pero me abstengo de ello por no ofender su modestia.

TRATADO
DE
GEOMETRÍA.

PRIMERA SECCION.

PRIMERA LECCION.

NOCIONES PRELIMINARES.

1. *La Geometría* es una ciencia que tiene por objeto medir la extension, ó espacio.

2. Todo *cuerpo*, ó *sólido geométrico* es esencialmente extenso, segun las tres dimensiones: *largo* ó *longitud*, *ancho* ó *latitud*, y *profundidad* ó *espesor*.

En efecto, no se conoce ningun cuerpo, de qualquiera especie que sea, en el qual no se note el concurso de estas tres dimensiones.

Por lo regular se llama longitud la mayor, ó principal dimension de un objeto, particularmente quando es horizontal: latitud la otra dimension horizontal: profundidad, ó espesor, y tambien altura, á la tercera dimension. Pero estas denominaciones son arbitrarias, y se usan indistintamente.

3. Las caras que terminan los cuerpos se llaman *superficies*. La superficie es una extension, que consta solamente de dos dimensiones, á saber: longitud, y latitud.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

4. Las orillas ó bordes de las superficies se llaman *líneas*. La *línea geométrica* es un ser abstracto que solo tiene longitud.

Las líneas perceptibles á la vista son unas líneas materiales, que por mas finamente que se trazen tienen siempre alguna latitud; sin embargo puede formarse una idéa de la línea geométrica, concibiendo que esta se halla en la misma division de lo negro de la línea material con lo blanco del papel; aunque generalmente se consideran las líneas geométricas en la medianía de las materiales ó perceptibles.

5. El punto geométrico no tiene longitud, ni latitud ni profundidad: son los extremos ó remates de la línea, y se consideran colocados en el medio del punto material.

6. Aunque todo cuerpo ó sólido geométrico consta de las tres dimensiones, longitud, latitud y profundidad, y estas no puedan exîstir separadas, no quita esto el que la Geometría se ocupe solo de una de estas dimensiones sin atender á las dos restantes, ó de dos de ellas sin atender á la tercera, ó bien trate de las tres á un tiempo.

En efecto, si se quiere medir la distancia que media entre Santiago y la Coruña transitando por el camino real, no se atiende mas que á la longitud del citado camino, y á nada nos conduce saber lo que pueda tener de ancho. Tampoco quando queremos medir el ancho de un rio nos importa saber su longitud, ni profundidad. Pero si se trata de averiguar quantas losas se necesitan para enlosar una calle, no bastará conocer su longitud, sino que tambien será preciso saber qual es su ancho, esto es, la superficie de la tal calle. Asimismo, si se quiere indagar quantos ladrillos se necesitarian para la construccion de una pared, es evidente no podrá determinarse el número de estos si de antemano no sabemos su longitud, latitud y altura, esto es, la *solidéz* de la tal pared.

7. Para evitar repeticiones en lo sucesivo, convendrá tener presente, que para que pueda decirse que dos cantidades geométricas son *totalmente iguales*, han de tener la misma figura ademas de tener el mismo tamaño, y que quando simplemente se diga que dos cantidades geométricas son *iguales*, bastará que estas sean del mismo tamaño, aunque tengan diversa figura. En fin, para que dos cantidades geométricas sean *semejantes*, basta que tengan la misma figura aunque tengan distinto tamaño.

Por exemplo, si se tienen dos vasos de igual figura, y que tanto el uno como el otro se llenen con la misma cantidad de agua, ó de otro líquido qualquiera; en este caso diremos, que estos dos vasos son *totalmente iguales*: pero diremos simplemente que son *iguales*, aunque se llenen con la misma cantidad de líquido, si la figura de los dos vasos es diversa. Se dice que un retrato de miniatura es *semejante*, quando sin embargo de su pequeñez relativamente al original representa á la vista una figura exâctamente parecida á aquel: claro está que expresándose con el rigor geométrico podrá decirse, que el retrato es semejante, pero no podrá decirse que es igual al original, puesto que varía el tamaño.

8. Si dos líneas ó dos superficies son tales, que sobrepuesta la una encima de la otra se verifica que todos los puntos de la una coincidan con los de la otra, podremos concluir con evidencia que dichas líneas, ó superficies, son totalmente iguales. Asimismo, si se supone que en el lugar que ocupa un cuerpo se puede colocar otro que lo llene exâctamente, sin faltarle ni sobrarle nada, se podrá asegurar con igual certeza, que los dos sólidos de que se trata son totalmente iguales.

Corolario. De lo que acabamos de decir se deduce, que si dos líneas, superficies, ó sólidos son iguales, podrán sobreponerse en los términos que acabamos de explicar.

9. Llámase probar por *superposicion*, quando se prue-

ba la igualdad de dos cosas, imaginándolas colocadas como llevamos dicho en el artículo anterior.

SEGUNDA LECCION.

DE LAS LÍNEAS.

10. *La línea recta* puede considerarse trazada, por la señal que dexaría un punto que se moviese constantemente hácia un solo y mismo punto, sin desviarse en su tránsito hácia ningun lado de esta única direccion.

Corolario. La línea recta es pues el camino mas corto
Fig. 1. que hay de un punto á otro; A B (fig. 1.) es una línea recta.

11. Dos puntos son suficientes para determinar la posicion de una recta; es decir, que entre dos puntos A y B (fig. 1.) no se puede tirar mas de una línea recta, pues si se tirasen varias se confundirian todas en una misma línea; porque cada línea recta comprehendida entre los dos puntos propuestos, expresa igualmente el camino mas corto de un punto á otro, y este camino mas corto es necesariamente único.

Corolario. De lo dicho se infiere, que si dos líneas rectas llegan á encontrarse, solo podrán tener un punto comun; pues si tuviesen dos se confundirian la una con la otra.

Fig. 2. 12. La línea A B C D E F G (fig. 2.) es una *línea angulosa*, que aunque no es recta se compone de varias porciones A B, B C, C D, D E, E F, F G que lo son.

13. *Línea curva*, es la que puede considerarse descripta por un punto, que al moverse varía continuamente de direccion. Todas las líneas que tienen su origen en el punto A (fig. 3.), y van á fenecer al punto B son líneas curvas. *Fig.* 3.

14. *Línea mixta*, es la que se compone de dos, ó mas porciones, entre las quales á lo menos hay una línea recta y otra curva. La línea a b c d (fig. 4.) es mixta, porque se compone de las porciones a b, y c d que son rectas, y de la porcion b c que es curva. *Fig.* 4.

15. Entre dos puntos qualquiera A y B (fig. 5.) se pueden tirar varias líneas A m B, y A n B curvas, ó varias angulosas como A c e B, y A f B; é igualmente se concibe se pueden tirar tambien varias líneas mixtas, y que qualquiera de ellas es mayor que la línea recta A B. *Fig.* 5.

16. *Prolongar una línea* es hacerla mas larga, ó continuarla: se concibe facilmente que toda línea recta puede prolongarse sin límites. *Prolongar una línea recta indefinidamente*, es prolongarla sin determinar quanto. *Tirar una línea recta indefinida*, es trazar una línea recta de la extension necesaria, baxo el concepto de que es mas conveniente que sobre por larga, que no que falte por corta.

17. Para abreviar se usa con freqüencia el decir *una recta*, en lugar de decir *una línea recta*.

18. Se dice que dos líneas *se confunden* quando el todo, ó parte de una línea se sobrepone á otra, esto es, que hay una porcion de la una comun á la otra.

19. Para facilitar la inteligencia de lo que tenemos que decir acerca de las líneas, supondremos que las figuras sobre las quales se consideran trazadas, son unas

superficies planas. Entiéndese por *superficie plana*, ó *plano*, una superficie sobre la qual se puede aplicar exâctamente una línea recta en todos sentidos.

20. *Perimetro* de una figura es toda la línea, ó conjunto de líneas que cierran el espacio de una figura; esto es su contorno.

Corolario. El perimetro de una figura, es igual á la suma de todos sus lados.

21. Quando el perimetro de una figura es una línea angulosa, esta figura se llama *rectilinea.*

22. La figura se llama *curvilínea*, quando su perimetro se compone de una, ó mas líneas curvas.

23. Se llama figura *mixtilínea*, si su perimetro es una línea mixta.

DEL MODO DE TRAZAR LAS LÍNEAS RECTAS.

24. Problema 1.° *Trazar una línea recta sobre el papel.*

Para trazar una recta sobre el papel, por exemplo
Fig. 1. desde el punto A al punto B (fig. 1.), se aplica una regla sobre estos dos puntos, ó muy cerca de ellos á igual distancia de ambos puntos, y haciendo resbalar sobre el papel la punta de una pluma, ó de un lapiz, que se llevará constantemente junto á la regla, quedará trazada en él la recta desde el punto A al punto B.

25. Problema 2.° *Trazar una recta de mediana extension, sobre una superficie de naturaleza à poder conservar una señal de tiza, ó greda, como por exemplo un tablado.*

Sobre el punto A (fig. 1.) se fixará el extremo de un hilo bramante, cuya extension se frotará bien con greda ó tiza, y tendiéndolo hasta el punto B, de modo que la parte de él que medie entre ambos puntos quede bien estirada, y fixo tambien en el punto B, se suspenderá luego el bramante para arriba, y dexándolo caer de golpe imprimirá sobre la superficie una señal, que será la recta A B que se pide.

26. Problema 3.° *Modo de comprobar si una línea ha sido bien trazada; y el de comprobar si la regla es recta.*

La regla es un instrumento bastantemente conocido, para que nos detengamos en describirla; pero el modo de comprobar si es bien recta merece particular atencion, pues si es defectuosa lo serán tambien quantas líneas se trazen con ella.

Fig. 6. Sea A B (fig. 6.) una línea trazada con el canto M N de la regla M N O P.

Para comprobar si dicha línea ha sido trazada con perfeccion, se arrimará á ella el canto M N de la regla, y si se confunde con él en todos sus puntos, será una prueba de que la línea ha sido bien trazada. Seguro de la exâctitud de esta línea, pasemos á comprobar con ella la regla, del modo siguiente.

Hágase girar esta misma regla sobre su canto M N, de modo que la cara superior de dicha regla caiga de llano sobre el papel, y á la parte superior de la línea trazada A B, en la posicion que indica la regla marcada de puntos m n o p. Hecho esto, júntese el canto m n (que anteriormente era M N), y si tambien puesto así se confunde con la línea, será una prueba de que la regla es buena. Pero si en esta segunda posicion de la regla no se verifica la coincidencia, será esto una prueba de que las líneas trazadas con dicha regla no son rectas; puesto que si estas y el canto de la regla lo fuesen, debia verificarse, que tocándose en dos pun-

tos deberian tambien confundirse en todos los demas, mediante á que por dos puntos solo se puede hacer pasar una sola línea recta (artículo 11).

27. Problema 4.º *Trazar una línea recta sobre el terreno.*

Si la línea recta que se ha de trazar es de mediana extension, se clavará un piquete de madera (a) en el
Fig. 1. punto A (fig. 1.), y otro en el punto B; los que quedarán bien derechos si siguen la direccion de un plomo atado al extremo de un hilo (b): luego se amarra el extremo de un cordel á uno de estos dos piquetes, y haciendo de modo que el cordel quede bien estirado se amarrará al otro piquete. Hecho esto, con un azadon, ó con la punta de otro piquete, se hará un surco ó raya en el terreno en la direccion del cordel, con lo que quedará marcada la recta A B.

Pero si para practicar esta operacion no hubiese cordel, ó si la línea que ha de trazarse fuese de tal extension que no alcance el cordel de un extremo á otro, es preciso recurrir á los jalones (c), con los quales se operará como se expresará á continuacion. Clávese un
Fig. 7. jalon en cada uno de los extremos A y B (fig. 7.) de la recta que se quiere trazar: luego sobre la prolongacion de la recta A B se plantará un jalon en C, y se conocerá que este último jalon está bien alineado con los dos primeros, si aplicando el ojo lo mas cerca posible del jalon C aparece este confundido con los otros dos, de modo que no se vea mas que un solo jalon: despues de bien alineados estos tres puntos, el que hace esta operacion se colocará en B con un jalon en la mano, y observando siempre la direccion B C irá marcando hácia atras hasta llegar al punto A, teniendo cuidado de ir señalando con la punta de un jalon la raya B A, rigiéndose siempre sobre la direccion B. C.

Si se quiere practicar esta última operacion con alguna mas prolixidad, ó si esta línea fuese de crecida

extension, será lo mas conveniente plantar un jalon bien
Fig. 8. derecho en cada uno de los extremos A y B (fig. 8.) de la línea recta A B que se quiere trazar, y plantar varios jalones intermedios C, C &c., los que sucesivamente se irán plantando de modo que aplicando el ojo lo mas cerca posible del jalon A, y mirando al jalon B aparezca el jalon C que se planta confundido con el plantado en B; entonces todos los puntos C, C &c. determinados de esta suerte, se hallarán en la línea recta A B; despues será facil irla trazando de jalon á jalon.

28. Problema 5.° *Trazar una línea recta sobre el terreno, en la direccion de dos puntos muy distantes, ó inaccesibles.*

Fig. 9. Si la recta A B (fig. 9.) que se ha de trazar se ha de sujetar á entrar en la direccion de otros dos puntos C y D muy distantes ó inaccesibles, es preciso que de los dos individuos que para facilitar esta operacion son necesarios, el uno se coloque en un punto A adonde se considere ser conveniente principie dicha línea, y el otro en el punto B, en el qual se juzga convendrá termine la expresada línea. Como que es dificil poder determinar á golpe de ojo, el que estos dos puntos A y B entren en la direccion de los otros dos C y D, habrá que enmendar esta primera posicion que tomaron los dos individuos que practican la operacion, lo que recíprocamente executarán del modo siguiente: El que se halle en el punto A hará mover á derecha é izquierda al que está en el punto B, hasta que lo confunda con el objeto D, y asimismo el situado en B hará mover del mismo modo al que lo está en A, hasta confundirlo con el objeto C: si de la nueva posicion del que está en A resultase que mirando al que está en B, no lo viese ya confundido con el objeto D, le hará mover nuevamente hasta que lo esté: en fin, repitiendo alternativamente del uno al otro esta operacion, se logrará en breve tiempo el que queden situados de

suerte, que el observador situado en A vea al que está en B confundido con el objeto D, al mismo tiempo que este último vea al que está en A confundido con el objeto C; en cuyo caso se estará seguro de que la recta A B está en la misma direccion que la C D. Hecho esto plántese un jalon en A y otro en B, y se pasará á trazar la recta A B, eligiendo para este fin de los métodos expresados el que se juzgue mas conveniente.

Si el que hace la operacion estuviese solo, deberá proceder á ella del modo siguiente: Supóngase que entre los dos objetos M y N (fig. 10.), y en su direccion, se ha de trazar una recta: para ello plantará un jalon en A, y á corta distancia plantará otro en B, el que alineará con el jalon A y el objeto M: pasará luego al jalon A, y verá si la visual A B va á parar al objeto N; si la visual se inclina hácia algun lado, removerá el jalon A ~~hasta~~ ponerla el jalon B ~~en~~; y pasando alternativamente del jalon A al jalon B, los irá removiendo, hasta conseguir que el jalon A se confunda con el jalon B y objeto N, y que dirigiéndo la vista desde el jalon B se confunda este con el jalon A y objeto M: entonces se estará seguro de que la recta A B está en la direccion de los dos objetos M y N. Determinada así la recta A B por medio de los dos jalones A y B, será facil continuarla si se quiere hasta E por exemplo, plantando los jalones C, D y E por la direccion de los dos primeros, conforme acabamos de enseñar.

Fig. 10.

*en la dire. on A. M. mirando seguidamente desde A, si la visual A B. se desvia a un del punto N, y pasando &c.

Escolio. Si no fuese necesario que el trazado de la recta quede permanente sobre el terreno, como por exemplo, quando se quiere formar en batalla un regimiento ó batallon, para lo qual basta que la indicacion de ella subsista solo durante el tiempo que tarde dicho regimiento en pasar de la posicion en que se halla á la de batalla, en la que se le pretende formar: en este caso se excusan los jalones, y se substituye la falta de estos con cierto número de hombres que la Táctica

denomina *guias*, y el proceder que para ello indica esta, es el siguiente.

De la primera ó última compañía de la formacion se sacan dos guias, los que se colocan de modo, que la visual dirigida desde el sitio que ocupa el uno mirando al sitio que ocupa el otro, esté en la direccion que quiere darse á la formacion de batalla: permaneciendo inmóviles estos dos guias, se van colocando competente número de ellos de las demas compañías, sin mas cuidado que el de que estas no discrepen de la direccion de los dos primeros, y de logrado tendremos todos los guias colocados en línea recta: si desde luego marcha el resto del regimiento á formarse en la misma direccion que lo estan sus guias, claro está que el todo quedará exâctamente formado en línea recta.

Ahora bien, si se observa que de la colocacion de dos guias se ha hecho pender la de los demas, y de la formacion del conjunto de estos la del todo del regimiento, deduciremos facilmente que el proceder táctico estriba sobre el principio geométrico sentado (art. 11), de que dos puntos bastan para determinar la posicion de una recta: en efecto, no prescribe la Táctica un movimiento que no se funde sobre algun principio ó principios geométricos, lo que notaremos mas de una vez en este Tratado; pero siendo difuso el hacerlo con demasiada freqüencia, se dexa á la meditacion de los caballeros Cadetes el indagar en lo sucesivo la relacion que la Táctica tiene con la Geometría, y los auxîlios que esta última puede suministrar á la primera: de esta suerte se familiarizarán con ambas ciencias, y se pondrán en estado de discernir la ventaja y desventaja de un método comparado con otro.

29. Hemos detallado los métodos de trazar una línea recta, siempre que el terreno no presente ningun obstáculo en la execucion; mas adelante veremos el de superar estos quando se presentan en el discurso de la operacion, continuando la recta al otro lado de dichos obstáculos.

TERCERA LECCION.

DE LA MEDIDA DE LAS LÍNEAS.

30. En general, la medida comun de las líneas es la línea recta. Medir una línea recta ó curva, ó una distancia qualquiera, es comparar la extension de la línea propuesta, con la extension de una línea recta tomada arbitrariamente por unidad. Así, si se quiere medir la distancia que hay entre el punto A y el punto B (fig. 8.), se tomará segun se quiera cierta medida, como por exemplo la vara castellana, ó de Burgos, por unidad; y tomando una regla de madera, ó de hierro, que tenga una vara de largo, se llevará sucesivamente esta medida por toda la longitud de la recta A B, desde uno de sus extremos hasta el otro. La distancia A B se compondrá de tantas varas, quantas veces haya sido preciso repetir la unidad para recorrer toda su extension. Si por exemplo este número de veces fuese 315, concluiremos que el punto A dista 315 varas del punto B.

Fig. 8.

Puede acaecer que la vara no mida exâctamente la distancia A B; entonces la última porcion restante es una fraccion propia de la vara, que se expresará en pies, pulgadas, líneas, &c.

31. Las líneas medidas sobre el terreno son por lo regular demasiado largas, para poder ser trasladadas sobre el papel en su tamaño natural: de aquí se sigue la necesidad de reducirlas, expresándolas por otras líneas mas pequeñas; lo que se logra facilmente construyendo una *escala de relacion.*

Esta escala es una línea E S (fig. 11.), que se señala sobre el papel para representar la unidad, ó un cierto número de unidades de las que han servido para tomar las medidas: esta línea debe ser bastante pequeña, para que repitiéndola las veces que sea necesario

Fig. 11.

para construir las líneas de representacion, puedan caber estas en el papel sobre el qual debe executarse el trazado. La escala se divide en varias partes iguales para expresar los pies, pulgadas &c., de modo que si se trata de representar sobre el papel dos distancias, la una de seis toesas, y la otra de quatro toesas y un pie, para executarlo se tomará con un compás la distancia E S de la escala, que ahora supondremos representar una toesa, y se llevará seis veces sobre la línea A B, y quatro sobre la C D, añadiendo á esta última la sexta parte de la longitud de la escala E S, por ser un pie la sexta parte de la toesa; con lo que se tendrá la línea A B de seis toesas, y la C D de quatro toesas y un pie.

32. La unidad que se toma por término de comparacion en la medida de las líneas es arbitraria, esto es, que nada importa sea qual fuese la unidad que se elija para executar la medicion, ya sea nacional ó extrangera, siempre que se sepa la relacion en que estas están con el pie de Burgos; pues conocido este dato, será facil reducir á pies ó vara burgalesa qualquiera medicion que se haya executado con otra unidad.

Sin embargo de esta arbitrariedad, hay mediciones cuya unidad está prefixada por real órden, como por exemplo la estatura ó talla del soldado por el pie *de Rey*, ó *de Paris*: la del caballo por quartas de la vara de Burgos: las dimensiones de las piezas de artillería, cureñage y demas útiles de este ramo, en pies de Burgos: las de una fortificacion, edificios y distancias de caminos, por la vara de Burgos: esto no impide que estas últimas se midan tambien por toesas; pero sabiendo que la toesa (Arit. art. 74.) consta de seis pies de Paris, y que este es al de Burgos como 6 es á 7, no puede presentarse dificultad en hacer estas reducciones. Por exemplo, se quiere saber de quantos pies de Burgos constarán las dos líneas A B y C D (fig. 10), suponiendo que la primera es de seis toesas, ó de 36

Fig. 11.

pies de Rey, y la segunda de quatro toesas y un pie, ó de 25 pies de Rey: para la reduccion de la primera diremos $6 : 7 :: 36 : x = 42$ pies de Burgos; y para la de la segunda $6 : 7 :: 25 : x = 29$ pies y 2 pulgadas de Burgos.

Claro está que si fuese inversa la propuesta, esto es, que si baxo el supuesto de ser la extension de la primera línea de 42 pies, y la segunda de 29 pies y 2 pulgadas de Burgos, se quisiesen reducir á pies de Paris estas dos extensiones, forzosamente sería tambien inversa la operacion: así diríamos $7 : 6 :: 42 : 36$ pies de Burgos; y $7 : 6 :: 29\ \frac{1}{6} : 25$ pies de Burgos.

Advertencia. Como es natural esperar del estímulo y aplicacion de los caballeros Cadetes, el que en lo sucesivo no limiten los estudios de su profesion á solo las obras nacionales, ha parecido conveniente poner al fin de este Tratado Tablas de la correspondencia del pie de Burgos con varias dimensiones extrangeras, y de estas con aquel, establecidas sobre las autoridades mas respetables y dignas de confianza. Asimismo, para la inteligencia de un gran número de obras militares, cuyos autores se han conformado con el nuevo sistema de pesos y medidas, es necesario tener noticia de estas y de su correspondencia con nuestras medidas: con este fin se ha dispuesto en seguida de las Tablas de que acabamos de hablar, una breve recapitulacion de todo lo que puede contribuir á dar una idea exâcta de dicho sistema.

33. Problema 6.° *Medir una línea recta sobre el papel.*

Si la longitud de la línea que se quiere medir es mas corta que la longitud de la escala de relacion que se ha construido al intento, se tomará con el compas toda la longitud de la línea, y llevándola sobre la escala se sabrá el número de toesas ó varas, pies &c. que representa.

Si al contrario la línea propuesta es mayor que la

escala, se tomará con el compas la longitud de la escala, y llevando esta abertura de compas desde un extremo de la línea que se quiere medir sucesivamente al otro extremo, acaecerá, ó que la línea contenga exâctamente un cierto número de veces la extension de la escala, ó bien que solo la contenga un cierto número de veces mas un resto de línea menor que la longitud de la escala. En el primer caso, para saber la longitud de la línea, bastará multiplicar el número que expresa las veces que la línea contiene á la escala, por el número de unidades de que consta la expresada escala; el producto dará el número de unidades de que consta la longitud de la línea propuesta: en el segundo caso habrá que añadir á este producto el número de unidades que resulten de la parte de línea sobrante, la que se medirá conforme hemos prescripto debe executarse con una línea menor que la escala.

34. Problema 7.° *Medir sobre el terreno una línea recta, accesible por todas partes.*

Si la recta es de una mediana extension, se executará la operacion con la toesa, ó doble toesa (d), ó bien con otra medida que contenga un número justo de varas ó pies de Burgos, y si puede ser se tomarán dos medidas iguales: se aplica la primera sobre la línea, empezando por un extremo, y la segunda medida se pone á continuacion de la primera, despues se levanta esta última y se vuelve á aplicar á continuacion de la segunda, y operando así sucesivamente se llegará hasta el otro extremo de la línea: al mismo tiempo se llevará cuenta del número de veces que se ha aplicado la medida, y este será el de toesas que mide la línea, ó se multiplicará este número por dos si se ha empleado la doble toesa, ó bien por el número de varas de que consta la medida que se ha empleado en la operacion. Si la línea propuesta no contiene un número exâcto de veces la medida de que se usa, se medirá el resto se-

paradamente, y lo que resulte se añadirá al producto anterior.

Por exemplo, si sirviéndose de la doble toesa se aplicó esta medida 64 veces, resultando un residuo de línea que medido constó de una toesa tres pies y siete pulgadas, diríamos $64 \times 2 = 128$, y á este producto se le añadiria una toesa, tres pies y siete pulgadas; la longitud de la línea sería pues de 129 toesas, 3 pies y 7 pulgadas de Rey, ó de Paris. Asimismo, si midiendo una recta con una medida que tuviese siete varas de largo, y si esta se hubiese aplicado doce veces sobre la línea, sobrando una parte que medida constase de 5 varas, 2 pies y 3 pulgadas, diríamos que la longitud de la expresada línea sería de 89 varas, 2 pies y 3 pulgadas de Burgos.

Si para executar esta misma operacion no hubiese mas que una sola medida, se aplicará esta sobre la linea, teniendo cuidado antes de levantarla de señalar en el terreno con la punta de un piquete, ó de qualquier otro modo, el punto en el qual termina la medida, para tomar dicho punto por principio en la segunda vez que se vuelva á aplicar, y así sucesivamente se verificará la medicion de uno á otro extremo de la línea propuesta.

Quando el terreno es llano se ajustan las medidas sobre el trazado de la línea; pero quando es desigual se ponen en toda su extension de trecho en trecho varios piquetes, y de uno en otro una cuerda muy tirante, y se ajustan las medidas á estas cuerdas.

Quando la línea ó líneas que se quieren medir son de una extension considerable, se facilitará mucho la operacion haciendo uso de la cadenilla (e); en cuya operacion se emplearán dos hombres, de la que cada uno de estos tomará un extremo, y el primero clavará la fixa que corresponde y pende del extremo de la cadenilla que tiene en la mano en el punto A de la línea
Fig. 8. A B (fig. 8.) que se quiere medir, y el segundo marchará hácia B hasta que la cadenilla quede bien estirada,

entonces clavará la fixa que pende del extremo que le corresponde en la direccion A B: verificado esto, el primero que estaba en A desclavará su fixa, y se dirigirá hácia B hasta volver á poner bien tirante la cadenilla, en cuyo caso clavará su fixa sobre la línea: de esta suerte irán alternando sucesivamente de uno en otro hasta llegar al punto B, y se tendrá averiguado el número de veces que la longitud de la línea contiene la extension de la cadenilla, cuyo número multiplicado por el de las varas que tenga la cadenilla, dará el de varas de que consta la longitud de la línea, si en la medicion no ha quedado ningun resto de línea por medir; pero en el caso de haber quedado alguno, es facil averiguar su longitud, que se deducirá en varas por el número de argollas gruesas que mida desde el extremo de la cadenilla, y los pies por el número de eslabones que se cuenten desde la última argolla gruesa.

El peso de la cadenilla imposibilita el que esta pueda nunca ponerse del todo tirante, pues siempre prepondera á baxar hácia su parte media; por tanto, quando la operacion requiera usar de mas prolixidad, será conveniente sostenerla en dicha parte con algunos piquetes cruzados en forma de tixera; y aun para mayor exâctitud se puede repetir dos ó tres veces la misma medicion, y de estas atenerse á la que dé menor dimension, pues será la mas exâcta de todas.

La falta de la cadenilla puede con facilidad suplirse con un cordel, en el que se señalarán las varas con nudos, ó con unos pedacitos de otro cordel mas delgado, ó bien con unas tiras estrechas de cordoban que se introducen entre los cordones de su colchado; y para que este cordel esté menos sujeto á mutaciones, conviene ponerlo antes en aceite hirviendo, y encerarlo despues de seco y de bien estirado.

Sucede con freqüencia en campaña el hallarse destituido de toda clase de instrumentos, ya sea para trazar las líneas, ó bien para medirlas: los jalones se substituyen con piquetes, ó con qualquier palo proxima-

mente recto, de lo que suele abundar la campiña: en quanto á las medidas, para que el Oficial destinado pueda reemplazarlas con facilidad, es conducente retenga en la memoria, que el largo del cañon de un fusil de ordenanza consta de 3 pies 11 $\frac{5}{6}$ pulgadas, la bayoneta de 1 pie 5 $\frac{1}{2}$ pulgadas; y el cañon de la caravina de 2 pies 10 $\frac{1}{3}$ pulgadas, todas medidas de Burgos, pues es dificil no concurra algun soldado que le suministre este auxilio con su arma. Para esta operacion, podrá sin error sensible suponer el largo del cañon del fusil de 4 pies, el de la caravina de 1 vara, y de $\frac{1}{2}$ el largo de la bayoneta del fusil.

Aun careciendo de este auxilio, quedaria el arbitrio de sujetar la medicion, ó el trazado de la obra, al paso; pero para poder verificarlo con alguna aproximacion, es necesario que el que hace esta operacion se haiga de antemano exercitado en establecer una marcha uniforme y constante, é indagado quanto mide su paso: este último recurso es el único medio que hay para executar una medicion disimulada, ya sea en una plaza, ó emplazamiento enemigo ó neutral.

QUARTA LECCION.

DE LA CIRCUNFERENCIA, Y MODO DE DESCRIBIRLA.

35. *El Circulo* es una superficie plana, cuyo perimetro es una línea curva A F B G D E (fig. 12) llamada circunferencia, de la qual todos los puntos distan igualmente de un punto interior C llamado *centro*, situado en el mismo plano del círculo.

Fig. 12.

Esta es la única línea curva, de que nos ocuparemos en este Tratado.

Tambien se suele dar el nombre de *periferia* á la circunferencia.

36. Problema 8.° *Describir, ó trazar una circunferencia sobre el papel.*

La circunferencia se traza con un compas, instrumento tan generalmente conocido, que no nos detendremos en describirlo, y se verifica fixando una de sus puntas en el punto del papel que se elige por centro, y dando con la otra una vuelta al rededor, conservando siempre la misma abertura de compas, quedará descripta con ella la circunferencia.

Fig. 12. 37. La línea C F (fig. 12.) tirada del centro C de la circunferencia á un punto qualquiera F de ella, se llama *radio.*

Corolario I. De la definicion de la circunferencia se deduce con evidencia, que todos los radios de un mismo círculo son iguales, puesto que todos ellos medirán la distancia del centro á distintos puntos de la circunferencia, y que todos los puntos de ella distan igualmente del centro.

Corolario II. Los círculos descriptos con iguales radios, ó aberturas de compas, serán totalmente iguales: puesto que la abertura de compas con que se describen las circunferencias es la misma, no puede haber razon para que difieran.

Corolario III. De lo dicho anteriormente se infiere, que un punto qualquiera, a, colocado dentro del círculo, se hallará á una distancia del centro C menor que el radio C A; y que todo punto s colocado fuera del círculo, se hallará á una distancia del centro C, mayor que el radio C A.

Corolario IV. Es igualmente evidente, que un punto qualquiera situado en el plano del círculo, se hallará dentro ó fuera de la circunferencia, segun que su distancia sea menor ó mayor que el radio.

38. Toda recta E B (fig. 12.) que pasando por el centro C, se termina por ambos extremos en la circunferencia, se llama *diámetro.*

Corolario I. Como que todo diámetro se compone de dos radios, es claro que el diámetro es duplo del radio, y que el radio es la mitad del diámetro.

Corolario II. De componerse todo diámetro de dos radios, y de ser iguales todos los radios de un mismo círculo ó de círculos iguales, se deduce, que todos los diámetros de un mismo círculo, ó de círculos iguales, serán totalmente iguales.

39. Teorema. *Todo diámetro divide al círculo, y á la circunferencia en dos partes iguales.*

Demostracion. Si se concibe que la figura 12 se dobla, de modo que el doblez sea el mismo diámetro E B, todos los puntos de la media circunferencia E A F B caerán sobre todos los puntos de la otra media circunferencia E D G B; pues si no sucediese así, se verificaria que habria puntos de la circunferencia que no distarian igualmente del centro, lo que se opondria á lo establecido (art. 35.): queda pues demostrada la igualdad por superposicion.

Corolario. De las dos porciones desiguales, en que una recta que no pasa por el centro divide al círculo, la mayor será aquella en que se halle el centro.

40. Dase el nombre de *semicircunferencia* á la mitad de la circunferencia; y el de *semicírculo* á la mitad del círculo.

41. Á la mitad de la semicircunferencia, ó quarta parte de la circunferencia, se le da el nombre de *quadrante*; y á la mitad del semicírculo, ó quarta parte del círculo, se da el nombre de *quarto de círculo.*

42. Toda circunferencia se imagina dividida en 360 partes iguales, que se llaman *grados.* El grado se considera dividido en 60 partes iguales, que se llaman *minutos.* Cada minuto en 60 partes iguales, llamadas *segundos*; y se seguirá así dividiendo de 60 en 60, dando á las partes resultantes las denominaciones de *terceros, quartos, quintos* &c.

La señal del grado es esta..... °
La del minuto..... ′
La del segundo..... ″
La del tercero..... ‴
La del quarto..... ⁗

De modo que para indicar 15 grados 28 minutos y 35 segundos, se escribirá 15° 28′ 35″.

Corolario I. De lo que se acaba de establecer resulta, que la semicircunferencia valdrá 180°, el quadrante 90°, y la mitad del quadrante (que es un octavo de la circunferencia) valdrá 45°.

Asimismo cada grado será el $\frac{1}{360}$ de la circunferencia, el minuto el $\frac{1}{21600}$, y el segundo el $\frac{1}{1296000}$ de la misma: luego

Corolario II. Los grados, minutos &c., serán tanto mayores ó menores, quanto mayores ó menores sean las circunferencias á que pertenecen; esto es, que en general las extensiones de igual número de grados, estarán entre sí en razon directa de las circunferencias á que pertenecen.

Fig. 12. 43. Las porciones G B, B F, F A, A E &c. (fig. 12.) de una circunferencia, se llaman *arcos.*

44. Las rectas G B, B F (fig. 12.), cuyos dos extremos coinciden con los del arco, se llaman *cuerdas*, ó *subtensa*, y se dice que la cuerda *subtende* al arco á que corresponde; y recíprocamente, que el arco está *subtendido* por su cuerda.

Corolario. Toda cuerda es menor que su arco (art. 15.); de consiguiente, todo arco es mayor que su cuerda.

45. Teorema. *El diámetro es la mayor cuerda; esto es, la mayor línea recta que se puede tirar dentro del círculo.*

Fig. 13. *Demostracion.* Sea A B (fig. 13.) una cuerda qualquiera, y tirando desde el centro C á sus dos extremos los radios C A y C B, resulta la cuerda A B menor que A C † C B; porque en efecto, siendo la recta A B el camino mas corto que hay entre el punto A y el punto B, será dicha línea mas corta que la línea angulosa A C B (art. 15.); pero por constar esta última línea de los dos radios A C y C B, podremos decir (corolar. 1.° art. 38.) que dicha línea es igual al diámetro: luego queda demostrado que qualquiera cuerda A B es menor que el diámetro; y de consiguiente se podrá decir que el diámetro es la mayor cuerda.

46. Teorema. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, á iguales cuerdas corresponden arcos iguales.*

Fig. 12. *Demostracion.* Si la cuerda B G (fig. 12.) es igual á la cuerda B F, y se imagina que la cuerda B G y su arco se sobreponen, aplicando esta sobre la cuerda B F, es evidente que siendo B un punto comun á las dos cuerdas, caerá entonces el punto G sobre el punto F, por ser ambos puntos extremos de dos rectas iguales;

digo que de verificado esto, todos los puntos del arco B G deben caer sobre los del arco B F, pues si alguno de los puntos del arco B G no cayesen sobre el arco B F, seria prueba de que algun punto de estos dos arcos distaba mas ó menos que los demas del centro, lo que es contra lo establecido (art. 35.): luego deben ajustarse exâctamente.

47. Teorema. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, á iguales arcos corresponden iguales cuerdas.*

Fig. 12. *Demostracion.* Si los arcos B G y B F (fig. 12.) son iguales, se podrán sobreponer, y el punto G caerá sobre el punto F, y como que de un punto á otro solo se puede tirar una recta, es evidente (art. 11.) que las dos cuerdas deben confundirse en una, lo que no podria verificarse á no ser iguales.

48. La figura mixtilínea formada por la cuerda
Fig. 13. A B (fig. 13.) y su arco A D B, se llama *segmento.*

49. La porcion de círculo comprehendida entre dos
Fig. 13, radios qualquiera C A, C B (fig. 13.) y el arco
14, 15. A D B, se llama *sector.*

50. Llámanse *concéntricas* (fig. 14.) todas las circunferencias A B C D, y E F G H que son descriptas desde el mismo centro C; y *excéntricas* las descriptas con distinto centro, como M N O P (fig. 15.) y m n o p, cuyos centros son C, y c.

La porcion de círculo comprehendida entre dos circunferencias concéntricas, se llama *corona.*

51. Problema 9.º *Trazar una circunferencia sobre el terreno.*

Clávese un piquete en el punto en que se determine fixar el centro, y en él se atará el extremo de un cordel,

pero de modo que pueda dar vuelta con facilidad al rededor del expresado piquete: desde dicho punto mídase sobre el cordel el número de varas, pies &c., que deba tener el radio, y en el punto del cordel en que termine esta medicion, se aplicará otro piquete, con la punta del qual, y manteniendo el cordel bien tendido, se irá señalando el terreno hasta dar una vuelta completa al rededor del piquete que está clavado; con lo que quedará trazada la circunferencia.

Si el radio de la circunferencia que se quiere trazar no excede la longitud de la cadenilla, se podrá executar con ella la operacion: para ello, antes de clavar el piquete en el punto céntrico, se introducirá su punta en la argolla del extremo de la cadenilla: será facil sobre esta determinar el largo del radio, y en el punto que termine se aplicará otro piquete, ó una fixa de la cadenilla, con cuya punta se trazará la circunferencia, conforme se acaba de prescribir.

QUINTA LECCION.

DE LOS ÁNGULOS.

Fig. 16, 17 *y* 18.

52. Dos líneas B A y C A (fig. 16, 17 y 18.), que se encuentran en un punto A, forman una abertura B A C, que se llama *ángulo.*

53. El punto A en que terminan, ó se suponen terminadas las líneas C A y B A que forman el ángulo, se llama *vértice.*

54. Las dos líneas A C y A B que forman el ángulo, se llaman *lados del ángulo.*

Fig. 16, 17 y 18. 55. Se llama ángulo *rectilíneo* (fig. 16.) al que está formado por dos lados rectos: ángulo *curvilíneo* (fig. 17.) quando está formado por dos líneas curvas: se le da el nombre de ángulo *mixtilíneo*, quando de sus dos lados el uno es una recta, y el otro una línea curva (fig. 18). En este Tratado solo se hará mencion de los ángulos rectilíneos.

Fig. 16. 56. Para formarse una idea exâcta de un ángulo, es preciso concebir que el lado A C (fig. 16.) se hallaba al principio sobrepuesto sobre el lado A B, y que se le ha hecho girar sobre el punto A para hacerle tomar la posicion A C que tiene en la actualidad (así como una pierna de compas se abre, girando al rededor del tornillo de su cabeza). Dase el nombre de ángulo á la abertura que el lado A C ha contraido en este giro.

Corolario. De lo dicho se infiere, que la magnitud de un ángulo pende únicamente de la mayor ó menor inclinacion recíproca de sus lados, y que ninguna dependencia tiene con la longitud de sus lados.

Fig. 19. En efecto, si se imagina que el lado A C (fig. 19.) del ángulo B A C girando sobre el punto A, se llega á sobreponer sobre la línea A H, es claro que la magnitud del ángulo habrá aumentado respecto al lado A B, puesto que el ángulo B A H es de mayor abertura que el anterior B A C: por la razon inversa disminuirá la magnitud del ángulo, si el lado A C girando sobre el punto A se llega á sobreponer sobre la recta A F. Pero si se imaginan prolongados los lados A C, A B hácia D y E, estos lados, aunque mas largos, conservarán siempre el uno respecto al otro la misma inclinacion. Así es, que el ángulo D A E será igual al ángulo B A C, respecto á que la inclinacion de sus lados es la misma.

Fig. 16, y 19. *Advertencia.* Quando un ángulo está solo (fig. 16.) bastará para designarlo nombrar la letra que está inme-

diata á su vértice: así, en lugar de decir el ángulo B A C, será suficiente decir el ángulo A. Pero como en el punto A (fig. 19.) concurren varias rectas, es necesario designar los ángulos con tres letras, colocando en el medio la que corresponde á su vértice, conforme hemos hecho hasta aquí.

Fig. 20. 57. Hemos visto que el ángulo B A C (fig. 20.) se puede considerar producido por el giro del lado A C sobre el punto A, desde la posicion A B á la posicion A C: en este giro cada punto de la línea A C, el punto C por exemplo, permaneciendo siempre igualmente distante del centro A, describe necesariamente un arco de círculo que aumenta ó disminuye precisamente, en la misma razon que el ángulo aumenta ó disminuye; es pues natural tomar este arco por medida del ángulo. Pero como cada punto de la línea A C describe en este giro un arco diferente, no es el largo del arco el que debe tomarse por medida del ángulo, sino el número de sus grados y partes de grado, que será siempre el mismo para cada arco descripto por cada punto de la línea A C; puesto que todos estos puntos empezando, continuando, y acabando su movimiento al mismo tiempo, deben necesariamente dar un mismo número de pasos: la única diferencia que habrá es, que los puntos mas distantes del centro A dan pasos mayores.

Escolio. Quando una tropa formada en batalla da un quarto de conversion sobre su derecha, ó sobre su izquierda, lo hace con el fin de que quedando en la misma posicion el individuo de la derecha ó de la izquierda, varie la direccion del frente de los demas en un quadrante (art. 41.): para verificar este movimiento todos marchan al toque de caxa, y todos menos el de la derecha ó izquierda describen un quarto de círculo, dando un mismo número de pasos: la sola diferencia que se nota es, que los unos dan mayores pasos que los otros, y tanto mayores quanto mas distan del punto sobre el

qual se gira. Del mismo modo la extension del grado se aumenta en razon directa de la distancia del arco al centro del círculo.

Corolario I. Un ángulo qualquiera B A C (fig. 20.) tiene por medida el número de grados, y partes de grado del arco comprehendido entre sus lados, y descripto desde su vértice como centro.

Aun quando de aquí en adelante se diga, que un ángulo tiene por medida tal arco, debe entenderse que tiene por medida el número de grados y partes de grado de dicho arco.

Corolario II. Luego la operacion de dividir un ángulo en varias partes iguales, se reduce á dividir el arco que le sirve de medida en otras tantas partes iguales, y tirar por los puntos de division líneas al vértice del ángulo.

Fig. 21. 58. Quando una línea recta C A (fig. 21.) cae sobre otra D B, forma con ella dos ángulos D A C, y C A B, llamados *ángulos contiguos.*

Si la recta C A (fig. 21.) cae sobre la D B sin inclinarse mas hácia el lado D que hácia el lado B, en este caso los ángulos contiguos D A C y C A B serán iguales, y cada uno de ellos se llama *ángulo recto*, y á mas se dice que la línea C A cae *perpendicularmente* sobre la línea D B.

Pero si como en la figura 19 la línea C A, al caer sobre D B se inclina mas hácia el lado B que hácia el lado D, en este caso los ángulos contiguos serán desiguales, el C A B será *agudo*, y el C A D *obtuso*, y se dirá que la recta C A cae *obliquamente* sobre la D B.

Corolario. De lo dicho anteriormente se deduce, que todo ángulo agudo es menor que el ángulo recto, y que el ángulo obtuso es mayor que el ángulo recto.

59. Teorema. *Los dos ángulos contiguos que forma una recta al caer sobre otra, valen siempre* 180°.

Fig. 20, *y* 21. *Demostracion.* En efecto, tanto en la figura 20 como en la figura 21, se puede considerar el vértice A como el centro de un círculo, en cuyo caso la recta D B es un diámetro: la medida de los dos ángulos D A C y C A B (fig. 20.) son los arcos D C y C B, que componen juntos la semicircunferencia, ó 180° (art. 42, corolar. 1.).

Corolario I. Un ángulo recto tiene por medida 90°.

Demostracion. Hemos visto (art. 58.) que quando una recta cae perpendicularmente sobre otra, forma con ella dos ángulos contiguos llamados rectos, y acabamos de demostrar, que por regla general la suma de los dos ángulos contiguos valen siempre 180°: luego por ser estos iguales, cada ángulo recto valdrá la mitad de 180°, esto es 90°.

Corolario II. Porque todo ángulo agudo es menor que el ángulo recto, concluiremos, que todo ángulo agudo tiene por medida un arco menor de 90° (art. 58, corol.)

Corolario III. Todo ángulo obtuso vale mas de 90°; fúndase esto en que todo ángulo obtuso es mayor que el ángulo recto (art. 58, corol.).

60. Toda línea que al caer sobre otra forma dos ángulos contiguos iguales ó rectos, se llama *línea perpendicular*, respecto á la línea sobre la qual insiste: la que al caer sobre otra forma los ángulos contiguos desiguales, se llama *línea obliqua*: generalmente se llaman ángulos *obliquos* todos los que valen mas ó menos de 90°, esto es, todos los que no son rectos.

61. Teorema. *La suma de todos los ángulos sucesi-*

vos formados al rededor de un punto, de suerte que el último tenga un lado comun con el primero, valdrá 360° justos.

Fig. 12. *Demostracion.* Es evidente (fig. 12.) que la medida de los ángulos B C F † F C A † A C E † E C G † G C B, serán los arcos B F † F A † A E † E G † G B, esto es, toda la circunferencia, ó 360°.

Corolario I. Podrá decirse que la suma de todos los ángulos sucesivos formados al rededor de un punto, es igual á quatro rectos (art. 59, corolar. 1.)

Corolario II. La suma de todos los ángulos sucesivos formados hácia un lado de la recta E B (fig. 12.), vale siempre 180° ó dos rectos; puesto que la suma de sus medidas es la semicircunferencia E A F B.

62. *Suplemento* de un arco, ó de un ángulo, es lo que le falta para valer 180° ó dos rectos: el ángulo
Fig. 22. a c f (fig. 22.) será suplemento del ángulo f c b, y recíprocamente el ángulo f c b será suplemento del ángulo a c f.

Corolario I. Los ángulos contiguos serán mutuamente suplemento el uno del otro, puesto que el valor del uno es lo que le falta al otro para valer 180°.

Corolario II. Si dos ángulos son iguales, es claro que sus suplementos serán tambien iguales, esto es, que tanto un ángulo como otro tendrán el mismo suplemento: luego si dos ángulos son tales que tengan el mismo suplemento, se podrá decir con evidencia que los dos ángulos son iguales.

Corolario III. Se halla el suplemento de un ángulo, restando su valor de 180°.

63. Se llama *complemento* de un arco, ó de un án-

gulo, á su diferencia con el quadrante, ó con el ángulo recto, ya sea que esta diferencia sea por exceso ó por
Fig. 22. defecto: el ángulo agudo b c d (fig. 22.) tiene por complemento por defecto el ángulo d c e, y recíprocamente el ángulo b c d es complemento por defecto del ángulo d c e: el ángulo b c f tiene por complemento por exceso el ángulo f c e, y este último lo es tambien por defecto del ángulo f c a.

Corolario I. Se hallará el complemento por defecto de un angulo águdo, restando su valor de 90°.

Corolario II. Se hallará el complemento por exceso de un ángulo obtuso, restando 90° del valor de dicho ángulo.

Corolario III. Es evidente que si dado el complemento por defecto de un ángulo agudo, se quiere averiguar el valor de dicho ángulo, es necesario restar el complemento dado de 90°, y que la diferencia será el valor del ángulo que se busca.

Asimismo, dado el complemento por exceso de un ángulo obtuso, se hallará el valor del ángulo sumando el complemento con 90°.

Corolario IV. Dos ángulos iguales tendrán el mismo complemento: luego todos los ángulos que tengan iguales, ó el mismo complemento, serán iguales.

64. Dos ángulos se llaman *opuestos por el vértice*, quando cada uno de ellos está formado por la prolongacion de los dos lados del otro.

65. Teorema. *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Demostracion. Para demostrar la igualdad de los dos
Fig. 23. ángulos opuestos por el vértice A E D y C E B (fig. 23.) formados por las dos rectas A B y C D, bastará considerar que el ángulo A E D tiene por suplemento el

ángulo D E B, y que el ángulo C E B tiene tambien por suplemento el mismo ángulo D E B: luego dichos dos ángulos serán iguales, puesto que tienen el mismo suplemento (art. 62, corolar. II.).

Del mismo modo se demostraria la igualdad de los dos ángulos A E C y B E D, respecto á que ambos ángulos tienen por suplemento al ángulo C E B, ó á su igual A E D.

66. Problema 10. *Hacer un ángulo igual á otro ángulo dado.*

Fig. 24. Sea A el ángulo dado (fig. 24.).

Tírese la recta indefinida a c: luego haciendo centro en el vértice del ángulo A, y con un radio qualquiera, por exemplo con A D, descríbase el arco D F E: con la misma abertura de compas A D hágase centro en el punto a, y descríbase el arco indefinido d f t: tómese luego con el compas la extension de la cuerda E D, y con esta abertura de compas se hará centro en el punto d, y se describirá el arco m n que corte al arco d f t en el punto e: hecho esto, por el punto a y el punto e se tirará la recta a e b, y quedará formado el ángulo b a c, igual al ángulo dado B A C.

Demostracion. Los arcos D F E y d f e son arcos de círculos iguales, por ser descriptos con igual radio: son tambien iguales por estar subtendidos por cuerdas que por construccion son iguales (art. 46.). De ser iguales estos arcos concluiremos, que los ángulos E A D y e a d, de quien son medidas (art. 57, corol. I.), son tambien iguales.

Escolio. Ninguna dificultad puede presentar el executar esta misma operacion sobre el terreno, mediante á tener enseñado como se trazan en él las líneas rectas, y circunferencias ó arcos, que es á lo que en suma se reduce la execucion de dicha operacion.

SEXTA LECCION.

DEL MODO DE MEDIR LOS ÁNGULOS.

67. Los ángulos son de un uso freqüentísimo, tanto en la teoría como en la práctica: de lo primero nos convencerá quanto acerca de ello nos resta que decir en este Tratado: en quanto á lo segundo bastará considerar, que el trazado de las obras de fortificacion, de un campamento, y en general de toda obra militar, estriba sobre los ángulos: por medio de los ángulos se situan las baterías de sitio, segun el modo con que se quieren hacer obrar; por medio de los ángulos se determina la posicion respectiva de los objetos, tanto en los planos como en las cartas; en fin, sería demasiado largo y prolijo detallar aquí todas sus aplicaciones: pasemos pues al modo de medirlos.

Los ángulos trazados sobre el papel se miden con el *semicírculo*, ó *transportador* (f). Para medir los ángulos sobre el terreno hay varios instrumentos, pero siendo el *grafómetro* (g) y la *aguja* (h) los de uso mas general, solo de estos trataremos. Puede verse la descripcion de ellos en las indicaciones dadas del Apéndice.

68. Problema 11. *Medir un ángulo rectilíneo sobre el papel.*

Fig. 16. Sea B A C (fig. 16.) este ángulo.

Sobre qualquiera de sus dos lados se aplicará el diámetro del semicírculo, poniendo este instrumento de plano ó de llano sobre el papel, y sea sobre el lado A B, pero de modo que el centro del semicírculo coincida con el vértice A del ángulo: colocado así este instrumento, nótese el punto en el qual el otro lado A C corta su graduacion, y tomando por principio de ella el de la numeracion que toma su origen desde la direccion

A B, cuéntese el número de grados que comprehende la abertura del ángulo, desde dicho origen hasta la direccion A C.

Si el lado A C corta la graduacion del instrumento en un punto que medie entre la division de un grado á otro, se determinará el número de minutos correspondientes á la abertura del ángulo B A C á golpe de ojo, si se usa del transportador ordinario; pero en las operaciones delicadas se deberá hacer uso del transportador con *nonio*, ó *vernier* (ll), con cuyo instrumento se miden los ángulos con toda la exâctitud necesaria.

Resta solo advertir, que si los lados A B y A C del ángulo B A C son mas cortos que el radio del semicírculo que se emplea en la operacion, será preciso prolongar estos lados lo suficiente, para que puedan cortar la graduacion exterior del instrumento.

69. Problema 12. *Medir un ángulo sobre el terreno.*

Fig. 25. Sea por exemplo el ángulo A B C (fig. 25.) el que se quiere medir con el grafómetro.

Colocado dicho instrumento sobre el tres pies, se plantará sobre el terreno, de suerte que el centro c del instrumento caiga verticalmente sobre el vértice B del ángulo propuesto, y se pondrá en esta situacion por medio del plomo: si se carece de este último, se tomará una piedrecita, ó qualquiera otro cuerpo sensiblemente pesado, y poniéndola en el punto *i* se dexará caer, á ver si lo verifica sobre el punto B, y de no suceder así se moverá el tres pies hasta que se verifique.

Seguidamente se colocará el instrumento *á nivel*, es decir *horizontalmente* (i), esto es, que no tenga inclinacion ni para un lado ni para otro: en las operaciones que no exijan un gran rigor geométrico, el simple golpe de ojo bastará para conseguirlo; y en las que se requiera mas exâctitud, se logrará disponerlo así colocando sobre el limbo ú orilla del instrumento un lapíz.

ú otro cuerpo redondo, y se observará hácia que lado se inclina ó rueda, para levantar el instrumento por dicha parte, hasta que se logre que colocado dicho lapiz ó cuerpo redondo sobre el instrumento en diferentes sentidos, quede inmovil sobre él. Quando tratemos de los *niveles*, se hará mencion de un método aun mas exâcto que el que acabamos de enseñar; pero este basta para el objeto que nos proponemos.

Colocado así el instrumento, diríjase el diámetro a b del grafómetro de modo, que mirando por la abertura longitudinal de la pínula a de la alidada, se vea confundido el hilo vertical de la pínula opuesta b del mismo diámetro, con algun objeto colocado sobre la direccion del lado B C del ángulo; y dado el caso de que mirando así no se descubra, ni el extremo C de dicho lado, ni ningun objeto que esté en dicha direccion, se clavará en ella un jalon en el punto F, y otro en el punto G sobre la direccion del otro lado B A, si tambien fuese necesario por las referidas causas; y la operacion se reducirá entonces á medir el ángulo f c g, en lugar de su igual F B G, ó de C B A. Hecho esto, y colocada la alidada fixa a b por la visual c f, muévase la alidada movible e d, hasta que aplicada la vista á la abertura longitudinal de la pínula d, se vea el hilo vertical de la pínula opuesta e, confundido con el jalon plantado en el punto G; despues de lo qual solo restará que contar sobre la graduacion del instrumento, el número de grados que mide el arco a d del ángulo d c a, igual al ángulo f c g (art. 65.), y este último es igual al ángulo C B A, puesto que uno y otro se hallan baxo las mismas enfilaciones.

La necesidad de medir con exâctitud los ángulos en el grafómetro, ha hecho imaginar el ingenioso modo de servirse para ello del nonio ó vernier, marcándolo en el canto del extremo de la alidada movible de este instrumento, cuya descripcion puede verse en el Apéndice (II).

Modo de executar esta misma operacion con la aguja.

Para executar esta misma operacion con la aguja, se colocarà esta sobre el tres pies, y el centro del ins-
Fig. 26. trumento verticalmente sobre el punto B (fig. 26.) vértice del àngulo que se quiere medir, y del modo que tenemos enseñado: seguidamente, aplicando la vista à la pínula b, se hace girar el instrumento hasta poner su diàmetro a b en la direccion del lado B C del àngulo, y poniendo horizontal el plano del instrumento, deberà confundirse el hilo vertical de la pínula a con el jalon clavado en F: cuéntese el número de grados que mide el arco a n, comprehendido entre el extremo a del diámetro a b del instrumento, y el extremo n de la aguja *imanada* (j), y supóngase que este arco fuese de 30°. Hecho esto muévase el instrumento, haciéndolo girar en la direccion f g, hasta que, aplicando la vista á la pínula b, se confunda el hilo de la pínula a con el jalon clavado en G sobre la direccion del otro lado B A del ángulo; y compruévese si el instrumento despues de esta remocion conserva aun su posicion horizontal, y si no la conservase se le volverá á poner en ella: de lo dicho se deduce el que, por este giro del instrumento el diámetro a b habrá tomado la posicion d e, y véase en este caso en que punto corta la graduacion el extremo n de la aguja imanada, cuya direccion no debe haber sufrido alteracion por mas que se haya movido el instrumento: supóngase ahora que el extremo de esta coincida con la division de los 62° de la graduacion, es evidente que la aguja, quedando inmovil, y coincidiendo antes con la division de 30°, probará que la graduacion ha sufrido una remocion de 32°, é indica que el ángulo f c g, ó su igual F B G es de 32°, esto es, que el diámetro a b del instrumento que en su primera posicion estaba en la direccion B C, ha tenido que girar 32° para tomar la segunda posicion d e, en la direccion del segundo lado B A del ángulo A B C.

Modo de executar esta misma operacion sin grafómetro ni aguja.

Puede suceder el tener que medir un ángulo, y hallarse destituido de grafómetro, aguja, ó de qualquier otro instrumento para medirlo: en este caso se aplicará una hoja de papel sobre una tabla bien lisa, y colocándola en una posicion horizontal y estable, señálese un punto sobre el papel adonde se quiera quede colocado el vértice del ángulo: tómese una regla bien derecha, y colóquese de canto sobre él y junto al punto señalado, y aplicando la vista al canto superior de la regla, muévase esta de modo que sin separarla de dicho punto se dirija la visual al objeto situado al extremo de uno de los lados del ángulo, ó que esté en su direccion, y se tirará una línea de lapiz junto à la regla. Hecho esto, y quedando inmovil la tabla, execútese lo mismo respecto à algun otro objeto que esté en la direccion del otro lado del àngulo, y tírese una segunda línea de lapiz, con lo que quedarà señalado en el papel un àngulo, que serà facil medir con un semicírculo (art. 68).

Conviene advertir que esta es una operacion meramente de aproximacion, practicable solo en el caso de carecer de instrumentos para verificarlo con mas exâctitud.

SÉPTIMA LECCION.

DE LAS LÍNEAS PERPENDICULARES.

70. De la definicion de la línea perpendicular (art. 60.), se infieren como corolarios las conseqüencias siguientes.

Corolario I. Que si una línea cae perpendicularmente sobre otra, formará con ella dos ángulos iguales, ó rectos.

Corolario II. Si una línea al caer sobre otra forma con ella dos ángulos iguales, es evidente que caerá perpendicularmente sobre dicha línea.

Corolario III. Si una recta al caer sobre otra forma con ella un ángulo recto, se podrá concluir, que dicha recta cae perpendicularmente sobre ella.

Fig. 27. *Demostracion.* En efecto, si la línea D C (fig. 27.) forma con la recta A B el ángulo D C A recto, su suplemento D C B (art. 62, corol. III.) será tambien recto: luego la línea D C al caer sobre la A B forma dos ángulos iguales: luego es evidente que cae perpendicularmente sobre ella (corolar. II.).

Corolario IV. Toda línea que forma con otra un ángulo obliquo, no puede ser perpendicular á ella.

Demostracion. Es claro que si la recta C t forma con la A B el ángulo A C t agudo, su suplemento t C B será obtuso (art. 62, corol. III.): luego los dos ángulos que la C t forma con la A B no son iguales (art. 58, corolar.): luego dicha línea no caerá perpendicularmente sobre la otra (corolar. II.).

71. Teorema. *Toda línea que corta perpendicularmente á otra, forma con ella quatro ángulos rectos.*

Fig. 27. *Demostracion.* Por ser D C (fig. 27.) perpendicular á la recta A B, los dos ángulos D C A y D C B son rectos: luego lo serán tambien los A C E y B C E formados por la recta A B y C E, prolongacion de la D C; porque estos dos ángulos son iguales á los dos primeros por opuestos al vértice (art. 65.): luego estos serán tambien rectos: luego la D E, al cortar perpendicularmente la A B, forma con ella quatro ángulos rectos.

Corolario I. Si una recta cae perpendicularmente sobre otra, su prolongacion tambien será perpendicular á ella.

Demostracion. En efecto, si la D C prolongada hasta E, forma con la A B quatro ángulos rectos por cortarla perpendicularmente, se podrá concluir con evidencia, que los ángulos A C E y E C B serán iguales por rectos: luego la C E será perpendicular á la A B (art. 70, corol. II.), que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario II. Quando una línea D E es perpendicular á otra A B, tambien la línea A B es perpendicular á la D E.

Demostracion. De lo dicho en el teorema anterior se deduce, que por ser D E perpendicular á la A B, los dos ángulos A C D y A C E son iguales por ser rectos: luego la recta A C será perpendicular á la D E, y siendo A C perpendicular á la D E, tambien lo será su prolongacion C B, segun acabamos de ver en el corolario anterior.

72. Teorema. *De un punto qualquiera fuera de una recta, no se puede tirar á ella mas que una línea perpendicular.*

Demostracion. Se concibe facilmente, que desde el punto D (fig. 27.) por exemplo, solo se puede tirar sobre la A B una recta D C, que sin inclinarse hácia el punto A ó hácia el punto B, forme dos ángulos iguales D C A y D C B (art. 70, corol. I.); pues si se dixera que tambien la recta D h es perpendicular á la A B, sería preciso concluir que los ángulos D h B y D h A son iguales entre sí y rectos; y de consiguiente, que el ángulo D h B es igual al ángulo D C B, lo que es un absurdo.

Fig. 27.

73. Teorema. *Por un punto de una recta, solo se puede levantar una perpendicular á ella.*

Fig. 27. *Demostracion.* Si la recta D C (fig. 27.) es perpendicular á la A B, los ángulos D C A y D C B serán rectos (art. 70, corol. 1.); y si se dice que desde el punto C se puede levantar otra recta C t, que sea tambien perpendicular á la A B, para convencerse de lo contrario bastará reparar, que el ángulo t C A es agudo, y de consiguiente su suplemento t C B será obtuso: luego los dos ángulos que la C t forma con la A B no son iguales: luego no es perpendicular á ella (art. 70, corol. IV.).

74. Teorema. *De un punto qualquiera fuera de una recta, no se puede tirar á ella línea alguna que no sea mas larga que la perpendicular: es decir, que la perpendicular es la mas corta distancia de un punto á una recta.*

Fig. 28. *Demostracion.* Sea D (fig. 28.) el punto, A B la recta propuesta, y D C la perpendicular. Prolónguese la línea D C hasta el punto H, haciendo C H = C D, y desde los puntos H y D tírense las dos rectas H F y D F á un punto F qualquiera de la recta A B. Es evidente que si se dobla la figura de modo que el doblez sea la recta A B, el que el punto H se sobrepondrá encima del punto D, mediante á la igualdad de C H y C D, y la de los ángulos B C D y B C H (art. 71.): ademas, como que el punto F es comun á las dos rectas H F y D F, estas deben sobreponerse exâctamente la una sobre la otra (art. 11.): luego son iguales. Es igualmente evidente, que la distancia mas corta del punto D al punto H es la recta D H: luego esta será mas corta que la línea angulosa D F H (art. 15.): de consiguiente, la mitad de la recta D H que por construccion es D C, será mas corta que la mitad de la línea angulosa D F H, cuya mitad es D F ó F H, puesto que acabamos de demostrar la igualdad de estas dos líneas.

75. Teorema. *Si de un punto dado fuera de una recta salen dos rectas obliquas que se separen igualmente de la perpendicular, dichas obliquas serán iguales.*

Fig. 28. *Demostracion.* Si del punto D (fig. 28.) fuera de la recta A B salen las dos obliquas D E y D F, que se separan igualmente de la perpendicular D C, digo que dichas dos obliquas son iguales. En efecto, si D E y D F se separan igualmente de la perpendicular D C, tendremos que C E = C F: luego si se dobla la figura, de modo que el doblez quede en la direccion D C, es claro que el punto E caerá sobre el punto F, mediante á la igualdad de las dos porciones de recta C E y C F, y la de los ángulos A C D y D C B, y como que el punto D es comun á las dos rectas D E y D F, estas se deberán sobreponer exâctamente (art 11.): luego serán iguales.

Corolario I. Quando una línea D C cae perpendicularmente sobre la mitad C de la otra línea E F, cada uno de sus puntos distará tanto del punto E como del punto F.

En efecto, es evidente que lo que acabamos de demostrar respecto al punto D, puede demostrarse igualmente de qualquiera otro punto de la línea D C.

Corolario II. De lo dicho se infiere, que solo los puntos de la perpendicular D C, baxada sobre la mitad de la línea E F, pueden distar igualmente de E y de F.

Pues es claro que todo punto que esté á la derecha, ó á la izquierda de la perpendicular, estará mas cerca de uno de estos dos puntos que del otro: luego

Corolario III. Para que una línea sea perpendicular á otra, bastará que pase por dos puntos, de los quales cada uno esté equidistante de dos puntos tomados sobre la expresada recta.

76. Teorema. *De dos obliquas tiradas desde el mismo*

punto á una recta, la mas larga será la que mas se separe de la perpendicular.

Fig. 28. *Demostracion.* Sean D E y D A (fig. 28.) las dos obliquas tiradas desde el punto D á la recta A B. Para convencerse de que en efecto la D A es mas larga que la D E, desde el punto D como centro, y con una abertura de compas igual á la D E, descríbase el arco E z: es evidente que D E = D z, por ser radios del mismo círculo: luego D A será mayor que D z, ó que su igual D E.

77. Problema 13. *Por un punto dado dentro ó fuera de una recta, tirar una perpendicular á ella.*

Tanto en el caso de estar el punto dado D en la Fig. 29. recta A B (fig. 29.), como en el de estar fuera de ella (fig. 30.), fixese una punta del compas en el punto dado D.

Fig. 30.

Con qualquiera abertura de compas, háganse en la A B las dos intersecciones E y F, con la otra punta.

Hecho esto, desde el punto F con qualquiera abertura de compas (mayor que la mitad de E F), descríbase el arco h i, y desde el punto E, con la misma abertura de compas, descríbase tambien el arco m n, que cortará al primero en el punto C.

Finalmente, por los puntos D y C tírese la recta D C, y esta será la perpendicular que se pide.

Demostracion. El punto C dista igualmente de los puntos E y F, y lo mismo le sucede al punto D por construccion: luego la C D será perpendicular á la A B (art. 75, corolar. III.).

Escolio. En fin, si el punto dado estuviese colocado de tal modo, que no se pueda señalar cómodamente mas que uno de los dos puntos E ó F, en qualquiera de Fig. 31, estos casos se prolongará la recta A B (fig. 31 y 32.), y 32.

y luego se seguirá operando conforme queda enseñado. La figura 32 es para el caso en que se quiera levantar una perpendicular al extremo de la recta A B.

78. Problema 14. *Dividir una recta, ó porcion de recta, en dos partes iguales, por medio de una perpendicular.*

Fig. 33. Sea E F (fig. 33.) la porcion de recta que se quiere dividir en dos partes iguales.

Para ello, desde el punto F como centro, y con qualquiera abertura de compas (mayor que la mitad de E F), descríbanse los arcos h i, q r. Desde el punto E como centro, y con la misma abertura de compas, descríbanse los arcos m n, o p, que corten á los anteriores.

Finalmente, por los puntos de interseccion H y G tírese la recta H G, que será perpendicular á la E F, y que la dividirá por mitad en C.

Demostracion. La línea H G tiene por construccion los dos puntos H y G equidistantes de E y de F: luego será perpendicular á la E F (art. 75, corol. III.), y no habrá en ella punto alguno que no esté tambien equidistante de dichos dos puntos E y F (art. 75, corol. I.): luego tendremos C E = C F, y por tanto la porcion de recta E F quedará dividida en dos partes iguales, que es lo que se pretendia executar.

79. Con el semicírculo es facil levantar una perpendicular sobre un punto qualquiera de una recta, aplicando el diámetro del instrumento sobre dicha línea, de modo que el centro del instrumento coincida con el punto dado: hecho esto, señálese un punto junto á la division de los 90° de la graduacion del instrumento, y tírese una recta desde dicho punto marcado, al punto propuesto de la recta dada.

Es evidente que la línea tirada formará con la recta dada dos ángulos de 90° ó rectos: luego será perpendicular á ella (art. 70, corol. II.).

80 La *esquadra* (m) es un instrumento de un uso mas general para levantar y baxar una perpendicular. Si con este instrumento se trata de levantar una per-
Fig. 29. pendicular, desde el punto D (fig. 29.) de la recta A B, se deberá aplicar uno de los dos lados del ángulo recto de dicho instrumento sobre la A B, de modo que el vértice de dicho ángulo de la esquadra coincida con el punto D: hecho esto, desde el punto C, y junto al otro lado del ángulo recto de la esquadra, se tirará una línea, que será la perpendicular pedida, mediante á que formará con la propuesta un ángulo recto (art. 70, corolar. III.).

Si al contrario se quisiese baxar una perpendicular, desde el punto C á la recta A B, se aplicará uno de los dos lados del ángulo recto del instrumento sobre la A B, y se le hará resbalar conservando siempre esta posicion, hasta que el otro lado del ángulo recto de la esquadra coincida con el punto C, y de verificado tírese una línea desde el punto C al punto D, cuya línea caerá perpendicularmente sobre la A B (art. 70, corol. III.).

81. Problema 15. *Comprobar una esquadra.*

El uso freqüente de este instrumento obliga á no admitirlo en la práctica sin asegurarse de antemano de su exâctitud; y esta pende en que el ángulo que formen los dos lados del ángulo de la esquadra sea exâctamente de 90°.

Para hacer esta comprobacion, tírese una recta qual-
Fig. 29. quiera A B (fig. 29.), y en ella señálese arbitrariamente un punto, como D por exemplo: colóquese el vértice del ángulo recto del instrumento sobre dicho punto, y uno de sus lados sobre la A B, desde D hácia A, y por el otro lado de la esquadra tírese la recta D C. Hecho esto, colóquese uno de los expresados lados de la esquadra sobre la porcion de recta D B, haciendo coincidir el vértice del ángulo recto del instrumento con el mismo punto D, y si el otro lado del ángulo recto

de la esquadra se ajusta con la C D, es señal de que la esquadra es buena; pero si se nota alguna diferencia, la mitad de ella será el defecto de la esquadra, y de la perpendicular tirada con ella.

La razon de esto es, que si al ángulo A D z formado con la esquadra, le falta para ser recto la cantidad z D C, quando se coloque este instrumento en la segunda posicion, marcará la línea D t; y de consiguiente, el ángulo B D t = A D z: luego su complemento t D C = C D z (art. 63, corol. IV.): luego el ángulo z D t será doble de la diferencia z D C, ó de su igual C D t.

OCTAVA LECCION.

DE LAS LÍNEAS PARALELAS.

82. Se dice que dos líneas trazadas sobre el mismo plano son *paralelas*, quando distan igualmente por todas partes la una de la otra; es decir, que guardan siempre entre ellas una igual distancia, de modo que todas las perpendiculares que se pueden tirar entre ellas son iguales. Tales son las líneas A B y C D (fig. 34.), que en todos sus puntos se hallan equidistantes la una de la otra, y entre las quales todas las perpendiculares E F, G H, I K &c. son iguales. De lo dicho se deduce la conseqüencia siguiente.

Fig. 34.

Corolario. Dos líneas paralelas nunca pueden llegar á encontrarse, por mas que se prolonguen: de consiguiente nunca podrán llegar á formar ángulo.

Fig. 35. 83. Si una recta E H (fig. 35.) corta á otras dos paralelas A B, C D, dicha línea E H, que llamaremos *secante*, formará con ellas ocho ángulos, á los quales, quando se comparan entre sí dos á dos, se les aplica las denominaciones relativas que á continuacion se verán.

1.° Los ángulos B F E y D G E, se llaman *correspondientes*, ó *externo é interno de un mismo lado*; porque estan formados á un mismo lado de la secante E H, cada uno con su paralela, el uno en la parte exterior y el otro en la interior. Por la misma razon, el ángulo A F E comparado con el ángulo C G F, tomarán la misma denominacion: lo mismo acaecerá al ángulo C G H comparado con A F G, y al ángulo D G H comparándolo con B F G.

2.° Los ángulos A F G y D G F, se llaman *alternos internos*, porque estan formados hácia distintos lados de la secante E H, cada uno con su paralela, y que ambos estan comprehendidos dentro de ellas. El ángulo C G F comparándolo con B F G, tomarán tambien la misma denominacion.

3.° Los ángulos B F E y C G H, se llaman *alternos externos*, porque estan formados hácia distintos lados de la secante E H, cada uno con su paralela, y que ambos estan fuera de ellas. Por la misma razon, los ángulos A F E y D G H tomarán la misma denominacion.

4.° Los ángulos B F G y D G F, se llaman *internos opuestos de un mismo lado*, porque están de la parte de adentro de las paralelas, y hácia el mismo lado de la secante. Por la misma razon, los ángulos A F G y C G F toman la misma denominacion.

5.° Los ángulos B F E y D G H, se llaman *externos opuestos de un mismo lado*, porque estan de la parte de afuera de las paralelas, y hácia el mismo lado de la secante. Por la misma razon, los ángulos A F E y C G H toman esta misma denominacion.

84. Teorema. *Los ángulos* correspondientes, ó externo é interno de un mismo lado, *son iguales.*

Demostracion. Para convencerse de que los ángulos
Fig. 35. *correspondientes* B F E y D G F (fig. 35.) son iguales, bastará recordar que las dos rectas A B y C D, no teniendo entre sí ninguna inclinacion (art. 82.), deben necesariamente inclinarse igualmente sobre la secante E H; porque si la inclinacion de la una diferiese de la de la otra, forzosamente la recta A B se inclinaria sobre la C D, ó bien la C D se inclinaria sobre la A B, y prolongadas podrian encontrarse, y de consiguiente no serian paralelas (art. 82, corolar.): luego si la inclinacion de dichas dos líneas es la misma, los ángulos B F E y D G F, que son los que manifiestan esta inclinacion, deberan ser iguales.

85. Teorema. *Los ángulos* alternos é internos *son iguales.*

Demostracion. Los ángulos *alternos é internos* A F G
Fig. 35. y D G F (fig. 35.) son iguales, porque acabamos de demostrar (art. 84.) que el ángulo B F E = D G F por correspondientes; pero B F E = A F G por opuestos al vértice (art. 65.): luego el ángulo A F G = D G F, que es lo que se pretendia demostrar.

86. Teorema. *Los ángulos* alternos externos *son iguales.*

Demostracion. Los ángulos *alternos externos* B F E y
Fig. 35. C G H (fig. 35.) son iguales, porque el ángulo B F E = A F G, por opuestos por el vértice; y que asimismo A F G = C G H por correspondientes: luego el ángulo B F E = C G H, que es lo que se pretendia demostrar.

87. Teorema. *Los ángulos* internos opuestos de un mismo lado, *son reciprocamente suplemento el uno del otro.*

Demostracion. Para demostrar que el ángulo D G F
Fig. 35. (fig. 35.) es suplemento del ángulo B F G, repárese

que el ángulo D G F = A F G por alternos internos (art. 85.); pero el ángulo B F G tiene por suplemento el ángulo A F G (art. 62, corol. 1.): luego su igual D G F será tambien suplemento del ángulo B F G, y recíprocamente B F G será suplemento del ángulo D G F.

88. Teorema. *Los ángulos* externos opuestos del mismo lado, *son recíprocamente suplemento el uno del otro.*

Fig. 35. *Demostracion.* Digo que el ángulo D G H (fig. 35.) es suplemento del ángulo B F E, porque D G H = B F G por correspondientes (art. 84.); y que B F G es suplemento del ángulo B F E por contiguos: luego su igual D G H será tambien suplemento del ángulo B F E, y recíprocamente el ángulo B F E será suplemento del ángulo D G H.

Corolario. Siempre que dos líneas paralelas estén cortadas por una tercera, cada una de las cinco propiedades demostradas (art. 84, 85, 86, 87 y 88.) se ha de verificar: é inversamente *si dos rectas al encontrarse con una tercera llegan á tener alguna de estas cinco propiedades, debemos concluir, que dichas dos rectas son paralelas entre sí.*

89. Teorema. *Los ángulos formados por dos rectas, son iguales á los ángulos de la misma especie formados por sus paralelas.*

Fig. 36. *Demostracion.* Sea A B C (fig. 36.) el ángulo de que se trata, y D E F el formado por dos rectas paralelas á los lados del anterior.

Para demostrar la igualdad de estos dos ángulos, prolónguese el lado A B hasta cortar el lado E F en el punto G: se ve claramente que el ángulo A B C = A G F por correspondientes (art. 84.); pero por la misma razon tenemos A G F = D E F: luego el ángulo A B C = D E F, que es lo que se pretendia demostrar.

90. Problema 16. *Tirar por un punto dado una recta paralela á otra.*

Fig. 37. Sea A B (fig. 37.) la recta dada, y F el punto. Por este punto tírese una secante en qualquiera direccion, y sea esta la E H: fíxese la punta del compas sobre el punto G, y con un radio igual á G F, descríbase el arco F m.

Póngase nuevamente la punta del compas sobre el punto F, y con la misma abertura de compas descríbase el arco indefinido G n.

Hecho esto, tómese con el compas la distancia F m, y trasládese desde el punto G, haciendo sobre el arco G n la interseccion i; y finalmente desde el punto F al punto i, tírese la recta C D, que será paralela á la A B.

Demostracion. Los arcos F m y G i son iguales por construccion, respecto á que son arcos del mismo círculo, subtendidos por iguales cuerdas (art. 46.): luego los ángulos alternos internos m G F, i F G serán iguales: luego (art. 88, corol.) las líneas A B y C D serán paralelas.

91. Teorema. *Si dos rectas son paralelas entre sí, y una tercera es paralela á una de ellas, lo será tambien á la otra.*

Fig. 38. Si se dice que las dos rectas A B y C D (fig. 38.) son paralelas entre sí, y se supone que la C D es paralela á la E F, concluiremos que la A B es tambien paralela á la E F.

Demostracion. Para demostrar que la A B es paralela á E F, repárese que por ser paralelas A B y C D resultará el ángulo A I L igual al ángulo D J H por alternos internos (art 85.); y por suponerse C D paralela á la E F, será el ángulo externo D J H = F K H

por correspondiente interno (art. 84.): luego el ángulo A I L = F K H; pero estos son los ángulos alternos internos comprehendidos entre las rectas A B y E F: luego (art. 88, corol.) dichas rectas A B y E F serán paralelas.

92. Teorema. *Si dos rectas son paralelas entre sí, otra tercera perpendicular á una de ellas, será tambien perpendicular á la otra.*

Fig. 39. Sean A B y C D (fig. 39.) dos rectas paralelas entre sí, si la E F es perpendicular á la A B; digo que prolongada la E F hasta G, será tambien E G perpendicular á la C D.

Demostracion. Por ser E F perpendicular á la A B, el ángulo A F E será recto (art. 70, corol. I.); y por ser A B paralela á la C D, será el ángulo A F E = C G E por correspondientes (art. 84.): demostrado la igualdad de estos dos ángulos concluiremos, que tambien el ángulo C G E es recto: luego la E G cae perpendicularmente sobre la C D (art. 70, corol. III.), que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario. Siempre que dos rectas sean perpendiculares á una misma recta, serán paralelas entre sí.

Demostracion. Esto se funda, en que toda línea al caer perpendicularmente sobre otra, forma con ella ángulos rectos; de lo que se sigue que todas las rectas que caen perpendicularmente sobre otra, deben formar ángulos correspondientes iguales: luego (art. 88, corol.) dichas rectas deberán ser paralelas.

93. Las líneas perpendiculares, y las paralelas de que hemos hecho mencion, son de un uso tan freqüente en la práctica de los trazados de las obras militares, que nos reservamos el tratar de ellas detenidamente en lo

sucesivo. Las perpendiculares son ademas necesarias en la medicion de las superficies, y de las solideces de los cuerpos, de los trazados de un campamento, &c.

Las paralelas, ademas del gran uso que de ellas se hace en la teoría, para demostrar con facilidad un gran número de proposiciones, son la base del trazado de las obras de fortificacion.

NONA LECCION.

DE LAS LÍNEAS RECTAS, CONSIDERADAS CON RELACION Á LA CIRCUNFERENCIA DEL CÍRCULO.

94. En general se llama *secante*, toda línea como
Fig. 40. F E (fig. 40.) que corta la circunferencia en dos puntos, y que en parte está fuera: llámase *tangente*, la que solo toca á la circunferencia en un punto como A D, que aunque se alargue hasta B no la corta, sino que la toca en el punto D, que se llama de *contacto*.

Corolario. De la definicion de la tangente se deduce, que el radio C D dirigido al punto D, de su contacto con la circunferencia, es perpendicular á dicha tangente.

Demostracion. En efecto, la recta C D es el camino mas corto del centro C al punto D: luego la recta C D es perpendicular á la A B, mediante á tener demostrado (art. 74.), que la perpendicular es la mas corta distancia de un punto á una recta: luego

Corolario II. La tangente tirada á un punto qualquiera D de la circunferencia, cae perpendicularmente sobre el extremo del radio C D, que pasa por dicho punto.

Lo dicho nos proporciona un medio facil de resolver el problema siguiente.

95. Problema 17. *Tirar una tangente á un punto dado de una circunferencia.*

Fig. 40. Sea D (fig. 40.) el punto dado. Tírese el radio C D, y desde su extremo levántese una perpendicular, segun el método dado (art. 77.): dicha recta D A, ó D B será tangente en el punto D (art. 94, corol. II.).

96. Teorema. *La recta que siendo perpendicular á una cuerda la divide por mitad, pasa por el centro del círculo, y divide en dos partes iguales el arco subtendido por dicha cuerda.*

Fig. 41. *Demostracion.* 1.° Sea A B (fig. 41.) la cuerda de que se trata, y D C la perpendicular levantada sobre su mitad D. Es evidente que la línea D C debe pasar por el centro del círculo, mediante á que todos los puntos de dicha línea estan equidistantes de los extremos A y B (art. 75, corol. 1.); y que es igualmente evidente que el centro del círculo dista tambien igualmente de dichos dos puntos (art. 35): luego el centro debe hallarse en dicha línea: luego dicha línea pasa por el centro.

2.° Para demostrar la segunda parte, de que prolongada la C D hasta E, cortará al arco A E B en dos partes iguales: tírense las dos cuerdas A E y E B, las que deberán ser iguales, por ser estas dos obliquas que se separan igualmente de la perpendicular D E (art. 75.): luego los arcos subtendidos A E y E B seran iguales (art. 46.).

Corolario I. De lo dicho se infiere, que el centro del círculo, la mitad del arco, y la mitad de la cuerda que lo subtende, son tres puntos que estan siempre sobre una misma recta: luego siempre que se verifique que una recta pase por dos de estos tres puntos, deberá concluirse que tambien pasa por el tercero.

Corolario II. Como que desde el punto medio de una cuerda no se puede levantar mas que una perpendicular (art. 73.), debemos concluir, que si una recta perpendicular á una cuerda pasa por alguno de estos tres puntos, el que necesariamente dicha recta debe tambien pasar por los dos restantes.

97. De lo establecido en el artículo anterior, se deduce el modo de dividir un arco, ó un ángulo en dos partes iguales.

Problema 18. *Dividir un arco, ó un ángulo en dos partes iguales.*

Fig. 42. Sea A B (fig. 42.) el arco propuesto. Tírese la cuerda A D B, y divídase por mitad por medio de la perpendicular E F, segun el método propuesto (art. 78.): dicha recta E F cortará al arco en el punto G, dividiéndolo en dos partes iguales A G y G B (art. 96, corolar. II.).

Si en lugar del arco A G B, fuese el ángulo A C B el que se tratase de dividir: se hará centro en el vértice C, y con una abertura de compas, como C A por exemplo, se señalarán los dos puntos A y B, sobre los lados del ángulo, y equidistantes del vértice C: luego con una abertura de compas arbitraria, y haciendo centro en el punto A, se describirá un arco pequeño: despues haciendo centro en el punto B, y con la misma abertura de compas, se describirá otro arco pequeño, que cortará al primero en el punto E. Hecho esto, por los puntos E y C tírese la recta E G, que

dividirá al angulo A C B en dos partes iguales en el punto G (art. 96, corol. II.).

Escolio. Es claro que de poderse dividir sucesivamente en dos partes iguales el ángulo A C B; resulta puede tambien dividirse en un número de partes iguales, expresado por los términos de esta progresion geométrica ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : &c.

Pero hasta ahora no se ha podido resolver geométricamente, esto es con solo la regla y el compas, el problema conocido con el nombre de *triseccion del ángulo*, que se reduce á partir un ángulo, ó un arco en tres partes iguales. La misma dificultad se ofrece para dividirlo en cinco partes, ó siete, nueve &c.

98. Problema 19. *Dados tres puntos que no esten en línea recta, hacer pasar por ellos una circunferencia.*

Fig. 43. Sean A, B y C (fig. 43.) los tres puntos dados.

Únanse (ó imagínense unidos) dichos tres puntos con las rectas A B y B C, que serán cuerdas de la circunferencia que se ha de describir.

Divídase la recta A B por mitad, por medio de la perpendicular D E (art. 78.): divídase la B C por mitad, por medio de la perpendicular F G.

El punto O, en el qual se cortan dichas perpendiculares D E y F G, será el centro del círculo, y su radio será la distancia desde el punto O á qualquiera de dichos tres puntos A, B, C.

Demostracion. Porque la perpendicular D E divide por mitad á la cuerda A B, el centro del círculo debe hallarse sobre un punto de dicha perpendicular D E (art. 96, corol. I.). Porque la perpendicular F G divide por mitad á la cuerda B C, concluiremos con igual evidencia, que el centro del círculo se halla sobre algun punto de dicha recta F G; pero este centro no puede hallarse al mismo tiempo sobre las dos rectas D E

y F G, sino en el punto O comun á dichas dos perpendiculares: luego el punto O es el centro del círculo que se busca (art. 11, corol.).

Corolario. Luego por tres puntos no puede pasar mas que una sola circunferencia: esto es, que dados tres puntos, está determinada la circunferencia que debe pasar por ellos. Asimismo, dos circunferencias que se cortan, solo pueden tener dos puntos comunes, porque si tuviesen tres se confundirian en una sola, y no se verificaria el que se cortasen.

99. De lo dicho en el artículo anterior, se infiere facilmente el modo de resolver el problema siguiente.

Problema 20. *Dada una circunferencia, ó un arco, hallar el centro del círculo á que pertenece.*

Fig. 43. Para ello señálense tres puntos A, B y C (fig. 43.) sobre la circunferencia ó arco propuesto, y opérese como en el problema anterior, hasta hallar el punto en que concurren las dos perpendiculares á las dos cuerdas intermedias de los tres puntos señalados: el punto en que se corten dichas dos perpendiculares será el centro del círculo que se pretendia hallar.

100. Teorema. *Dos cuerdas de un mismo círculo que sean paralelas entre sí, interceptan entre ellas arcos iguales.*

Fig. 44. Sean A B y C D (fig. 44.) las dos cuerdas de que se trata: digo que los arcos A C y B D son iguales.

Demostracion. Para demostrarlo, báxese desde el centro E la perpendicular E F sobre la cuerda A B, la que tambien cortará perpendicularmente á la C D (art. 92): luego la E F dividirá en dos partes iguales á los arcos A C B y C F D (art. 96, corol. 11.): esto es, que seran A F = F B, y C F = F D: luego si de los arcos

iguales A F y F B se quitan los iguales C F y F D, quedarán los arcos iguales A C y B D, que son los arcos interceptados por las dos cuerdas paralelas, cuya igualdad era la que se pretendia demostrar.

Corolario. De lo dicho se infiere, que quando una tangente G H sea paralela á una cuerda A B, el punto de contacto F será precisamente el punto medio del arco A F B.

DÉCIMA LECCION.

DE LOS ÁNGULOS CONSIDERADOS RESPECTO AL CÍRCULO.

101. Puede suceder que el vértice de un ángulo no esté colocado sobre el centro del círculo, sino sobre algun punto de la circunferencia, ó dentro del círculo pero sobre qualquiera otro punto que dicho centro, ó en fin fuera del círculo. Conviene á veces saber medir estos ángulos, no con arcos descriptos desde su vértice, sino con los de algun círculo junto al qual, ó dentro del qual estén formados. Vamos á indagar el modo de medirlos en todos los casos propuestos.

102. Llámanse *ángulos inscriptos* los que tienen su vértice sobre algun punto de la circunferencia, y estan formados por dos cuerdas. El formado por una tangente y una cuerda ó un diámetro, toma el nombre de *ángulo de segmento.*

Los ángulos que tienen su vértice fuera del círculo se llaman *circunscriptos.* Quando los ángulos tienen su

vértice dentro del círculo y sobre el centro, se llaman *centrales*: toman el nombre de *excéntricos*, quando tienen su vértice dentro del círculo, pero en qualquiera otro punto que el centro.

103. Se dice que un ángulo *insiste* sobre un arco ó sobre una cuerda, quando sus dos lados se terminan, ó pasan por los extremos de dicho arco ó cuerda.

104. Un arco mirado desde el centro del círculo se llama *cóncavo*, y se llama *convexô* mirándolo de la parte de afuera del círculo.

105. Teorema. *Todo ángulo* inscripto *tiene por medida la mitad del arco sobre que insiste.*

Hemos visto que un ángulo *central* tiene por medida el arco comprehendido entre sus lados, y descripto desde su vértice (art. 57, corol. 1.): luego para hacer ver que el ángulo inscripto, tiene por medida la mitad del arco sobre que insiste, bastará demostrar, que el arco que dicho ángulo comprehenderia entre sus lados si tuviese su vértice en el centro, es la mitad del arco sobre que insiste quedando ángulo inscripto.

Los ángulos inscriptos pueden estar formados de tres modos distintos.

Fig. 45. 1.° Por una cuerda A B (fig. 45.), y un diámetro B C D, como el ángulo A B D.

Fig. 46. 2.° Por dos cuerdas A B y B D (fig. 46.) que comprehendan al centro, como el ángulo A B D.

Fig. 47. 3.° Por dos cuerdas A B y B D (fig. 47.), que no comprehendan al centro, como A B D.

C

Demostracion del 1.er caso. Para demostrarlo, tírese el *Fig.* 45. diámetro E C F (fig. 45.) paralelo á la cuerda A B, que formará el ángulo central E C D, igual al opuesto A B D por correspondientes (art. 84.) pero el ángulo E C D tiene por medida el arco E D (art. 57, cor. 1.):

luego el ángulo inscripto A B D tendrá tambien por medida el mismo arco E D: falta solo demostrar que el arco E D es mitad del arco A D. Para ello repárese que el arco E D es igual al arco B F, por ser estos arcos las medidas de los ángulos centrales E C D y B C F opuestos por el vértice (art. 64.): pero el arco B F es igual al arco A E por estar comprehendidos entre cuerdas paralelas (art. 100.): luego el arco E D será igual al arco A E, y de la igualdad de estos arcos se deduce con evidencia, que el uno de ellos, E D por exemplo, será la mitad del arco total A D: *luego el ángulo inscripto A B D, formado por el diámetro y una cuerda, tiene por medida el arco E D, que es la mitad del arco A D sobre el qual insiste.*

Fig. 46. *Demostracion del 2.° caso.* En el segundo caso (fig. 46.) por el punto B vértice del ángulo A B D, tírese el diámetro B C E, y quedará dividido el ángulo propuesto en dos ángulos inscriptos A B E y E B D, formados ambos por una cuerda y un diámetro, cuyos ángulos acabamos de demostrar tienen por medida la mitad de los arcos A E y E D: luego porque el ángulo A B D es igual al ángulo A B E mas el ángulo E B D, la medida de A B D será la mitad del arco A E mas la mitad del arco E D, ó lo que es lo mismo, la mitad del arco A D: *luego el ángulo inscripto A B D, formado por dos cuerdas que comprehenden al centro, tienen tambien por medida la mitad del arco A D sobre que insiste.*

Fig. 47. *Demostracion del 3.er caso.* Dado el tercer caso (fig. 47), desde el vértice B del ángulo propuesto A B D tírese el diámetro B C E: claro está que el ángulo A B D es igual al ángulo A B E menos el ángulo D B E; y teniendo demostrado que la medida de los ángulos A B E y D B E, formados por un diámetro y una cuerda, son las mitades de los arcos A E y D E, concluiremos con evidencia, que la medida del ángulo

A B D será la mitad del arco A E menos la mitad del arco D E, ó lo que es lo mismo, la mitad del arco A D. Esto es, *que el ángulo inscripto A B D, formado por dos cuerdas que no comprehenden al centro, tiene tambien por medida la mitad del arco A D, sobre que insiste.*

Corolario I. Todos los ángulos inscriptos A B C, A E C y A F C (fig. 48.) que insisten sobre la misma cuerda A C son iguales, supuesto que cada uno de ellos tiene por medida la mitad del arco A G C subtendido por la misma cuerda; y el ángulo A G C tiene por medida la mitad del arco A B E F C.

Fig. 48.

Corolario II. Todos los ángulos inscriptos A B C, A E C y A F C (fig. 49.), que insisten sobre el diámetro son rectos, puesto que su medida será la mitad de la semicircunferencia: esto es, el quadrante ó arco de 90°.

Fig. 49.

106. Problema 21. *Levantar una perpendicular en la extremidad de una recta que no puede prolongarse.*

Sea A B (fig. 50.) la recta, y A el extremo sobre el qual se quiere levantar la perpendicular.

Fig. 50.

Póngase la punta del compas sobre el extremo A, y la otra arbitrariamente en qualquiera punto C, y con dicha abertura de compas descríbase desde C como centro, el arco indefinido E F A G H: tírese el diámetro F C G; y luego del punto F al extremo A la recta A F, que será perpendicular á la recta propuesta A B.

Demostracion. El ángulo inscripto F A G insiste sobre el diámetro, y por consiguiente será recto (art. 105, corol. 11.): luego la F A será perpendicular á la A B.

Para que se verifique la interseccion G del arco con la recta A B, es necesario que el punto C que se elige arbitrariamente por centro del arco, esté sin embargo

mas cerca del extremo A, que del extremo B, pues de lo contrario no se verificaria dicha interseccion.

107. Teorema. *Todo ángulo* de segmento *tiene por medida la mitad del arco que subtende la cuerda.*

Los ángulos de segmento pueden estar formados de tres modos diferentes.

Fig. 46. 1.° Por una tangente T B (fig. 46.), y un diámetro B C E, como el ángulo T B E.

2.° Por una tangente T B (fig. 46.), y una cuerda B D, y comprehendiendo al centro del círculo dentro de la abertura del ángulo, como T B D.

3.° Por una tangente T B (fig. 46.), y una cuerda B A, sin comprehender el centro del círculo dentro de la abertura del ángulo, como T B A.

Fig. 46. *Demostracion del 1.er caso.* En el primer caso, el ángulo T B E de que se trata es recto, pues que (art. 94, corol. 1.) el radio C B, ó lo que es lo mismo el diámetro E B cae perpendicularmente sobre el extremo B de la tangente: luego dicho ángulo será de 90° (art. 60.), y su medida será un quadrante (art. 42, corol 1.), ó la mitad de la semicircunferencia B A E. Esto es, *que el ángulo de segmennto T B E, formado por la tangente T B y el diámetro B E es recto, y tiene por medida la mitad de la semicircunferencia B A E que subtende el diámetro B E.*

Fig. 46. *Demostracion del 2.° caso.* El ángulo T B D, formado por la tangente T B y la cuerda B D, se compone del ángulo del segmento T B E mas del ángulo inscripto E B D: el primero acabamos de ver tiene por medida la mitad de la semicircunferencia B A E, y el segundo hemos visto (art. 105.) tiene por medida la mitad del arco E D: luego la medida del ángulo total T B D, será la mitad de la semicircunferencia B A E, mas la mitad del arco E D, ó lo que es lo mismo, la

mitad del arco B A E D subtendido por la cuerda B D. Esto es, *que el ángulo del segmento T B D, formado por la tangente y una cuerda, y comprehendiendo al centro del círculo dentro de la abertura de dicho ángulo, tiene por medida la mitad del arco B A E D, subtendido por la cuerda B D.*

Fig. 46. *Demostracion del 3.er caso.* El ángulo T B A, formado por la tangente T B y la cuerda B A, que no comprehende al centro del círculo, es igual al ángulo recto T B E menos el ángulo inscripto A B E: luego dicho ángulo tendrá por medida, segun lo que acabamos de decir, la mitad de la semicircunferencia B A E menos la mitad del arco A E; esto es, la mitad del arco B A: luego *el ángulo del segmento T B A, formado por la tangente T B y la cuerda B A, que no comprehende al centro del círculo, tiene tambien por medida la mitad del arco B A subtendido por la cuerda B A.*

108. Teorema. *Todo ángulo* circunscripto *tiene por medida la mitad del arco cóncavo sobre el qual insisten sus lados, alargados si es necesario, menos la mitad del arco convexô que comprehenden dichos lados.*

Los ángulos circunscriptos, pueden ser formados de tres distintos modos.

Fig. 51. 1.° Por dos secantes B A y B C (fig. 51.), como el ángulo A B C.

2.° Por una tangente T B (fig. 51.) y una secante B A, como el ángulo T B A.

3.° Por dos tangentes T B y B Z (fig. 51.) como el ángulo T B Z.

Fig. 51. *Demostracion del 1.er caso.* Para demostrar que el ángulo A B C (fig. 51.) tiene por medida la mitad del arco A C menos la mitad del arco G E, tírese la recta E F paralela á la secante A B; y tendremos, que el ángulo inscripto F E C es igual al propuesto A B C,

por correspondientes (art. 84.). Dicho ángulo inscripto F E C tiene por medida (art. 105.) la mitad del arco F C: luego este arco será tambien medida del ángulo circunscripto A B C. Pero el arco F C es igual al arco A C menos el arco A F, ó menos el arco G E, puesto que A F = G E, por ser arcos comprehendidos entre cuerdas paralelas (art. 100.): luego podremos decir, que la mitad del arco F C es igual á la mitad del arco A C menos la mitad del arco G E. Resulta pues con evidencia, *que el ángulo circunscripto A B C formado por dos secantes, tiene por medida la mitad del arco cóncavo A C sobre que insiste, menos la mitad del arco convexô G E comprehendido entre sus lados.*

Fig. 51. *Demostracion del 2.° caso.* Para demostrar que el ángulo T B A tiene por medida la mitad del arco T A sobre que insiste, menos la mitad del arco T G comprehendido entre sus lados; tírese la recta G H paralela á la tangente T B, y facilmente se verá que el ángulo H G A = T B A por correspondientes (art. 84.): luego la mitad del arco H A, será medida del ángulo inscripto H G A, y tambien lo será del circunscripto propuesto T B A. Pero el arco H A = T A − T H, ó menos su igual T G (art. 100, corol.): luego *la medida del ángulo circunscripto T B A, formado por una tangente y una secante, será la mitad del arco cóncavo T A sobre que insiste, menos la mitad del arco convexô que comprehende entre sus lados.*

Lo mismo se demostraria con el ángulo T B C, formado por la tangente T B y otra qualquiera secante, como B C por exemplo.

Fig. 51. *Demostracion del 3.er caso.* Para demostrar que el ángulo T B Z, formado por las dos tangentes B T y B Z, tiene por medida la mitad del arco T A C Z sobre que insiste, menos la mitad del arco T G E Z, bastará considerar, que este ángulo comprehende á los tres ángulos T B A, A B C y C B Z: luego su medida será

la suma de las medidas de los tres ángulos comprehendidos, esto es, la mitad del arco T A, mas la de A C, mas la de C Z, ó lo que es lo mismo, la mitad del arco T A C Z, menos la mitad del arco T G, menos la de G E, menos la de E Z, ó lo que es lo mismo, menos la mitad del arco T G E Z. Es pues evidente, *que el ángulo circunscripto T B Z formado por dos tangentes, tiene por medida la mitad del arco cóncavo T A C Z sobre que insiste, menos la mitad del arco convexo T G E Z que comprehenden sus lados.*

109. Teorema. *Todo ángulo* excéntrico *tiene por medida la mitad del arco sobre que insiste, mas la mitad del arco comprehendido entre sus lados prolongados.*

Demostracion. Para demostrar que el ángulo excéntrico
Fig. 52. A B C (fig. 52.) tiene por medida la mitad del arco A C sobre que insiste, mas la mitad del arco D E comprehendido entre la prolongacion de sus lados, desde el punto D tírese la recta D F paralela al lado B C, y tendremos el ángulo A B C igual al ángulo A D F por correspondientes (art. 84.). Pero el ángulo inscripto A D F, tiene por medida la mitad del arco A F: luego esta será tambien la medida del ángulo excéntrico A B C. Pero el arco A F = A C + C F, y por ser C F = D E (art. 100.), será A F = A C + D E: luego la mitad del arco A F es igual á la mitad del arco A C mas la mitad del arco D E; por lo que podremos decir con evidencia, que el ángulo excéntrico A B C tiene por medida la mitad del arco A C sobre que insiste, mas la mitad del arco D E comprehendido entre la prolongacion de sus lados.

110. Teorema. *Con respecto á los arcos menores que la semicircunferencia, á menor arco corresponde menor cuerda, y por consiguiente (art. 46.), á menor cuerda corresponderá menor arco.*

Fig. 53. *Demostracion.* Sean (fig. 53.) A F D y A F E los arcos de que se trata. Tírense desde el punto A las cuerdas A D, A E y D B: es evidente que el ángulo A D B será recto, por insistir sobre el diámetro A B (art. 105, corol 11.): luego la cuerda A D caerá perpendicularmente sobre la cuerda D B (art. 70, corol. 3.°): luego la recta A D será mas corta que la porcion de recta A t, y con mayor razon será A D mas corta que A E, que es igual á A t † t E, que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario. Con respecto á los arcos mayores que la semicircunferencia, á mayor arco corresponderá menor cuerda; y á menor cuerda corresponderá mayor arco.

Esto depende, en que pasando un arco de los 180°, mientras mayor es el arco menor es su cuerda.

UNDÉCIMA LECCION.

DEL TRAZADO DE LAS LÍNEAS PERPENDICULARES SOBRE EL TERRENO, Y VARIOS PROBLEMAS CUYA RESOLUCION DEPENDE DE ESTE TRAZADO.

111. Problema 22. *Por un punto dado sobre el terreno dentro ó fuera de una recta, tirar una perpendicular á ella.*

Hemos visto (art. 77, probl. 13.) el modo de executar esta operacion sobre el papel, valiéndose del compas; y no siendo dable emplear este instrumento sobre el terreno, hemos visto (art. 51, probl. 9.) el modo de suplir su falta con un cordel y dos piquetes, tanto en

el trazado de una circunferencia, como en el de un arco; y esta es la única diferencia que existe en la execucion de este problema de el papel al terreno.

En efecto, tanto en el caso de estar el punto D sobre la recta A B (fig. 29.), como en el de estar fuera de ella (fig. 30.), se clavará un piquete sobre el punto D: en dicho piquete se atará el extremo de un cordel, pero de modo que pueda dar vuelta libremente al rededor del expresado piquete; y tomando sobre este cordel para servir de radio una distancia arbitraria, se aplicará en él un piquete, con la punta del qual, y manteniendo el cordel bien tirante, se señalarán sobre la recta A B las dos intersecciones E y F.

Fig. 29. y 30.

Fig. 29. Si el punto D estubiese sobre la recta A B (fig. 29.), se clavará un piquete en el punto E, y otro en el punto F, equidistantes ambos piquetes de dicho punto D; y con una distancia de cordel (mayor que la mitad de E F) se trazarán por el método indicado los dos arcos h i y m n, y en el punto C del concurso se clavará un piquete. Con lo que solo resta que trazar la perpendicular, por el método prescripto (art. 27, probl. 4.).

Fig. 30. Si el punto dado D estubiese fuera de la recta A B (fig. 30.), la operacion sería mas sencilla; pues señaladas las dos intersecciones E y F sobre dicha recta, bastará determinar el punto medio H, lo que se hará tomando con el cordel la distancia E F, y uniendo sus extremos se tendrá la mitad de la expresada distancia, que se llevará desde E hácia F, y en el punto H en que termina se clavará un piquete. Hecho esto, se continuará la operacion como acabamos de indicar.

La execucion de este problema, es idéntica á la prescripta en el problema 13 (art. 77.): luego su demostracion será la misma.

Otra solucion.

Puede evitarse en la práctica de esta operacion, el tener que describir ningun arco: si para ello se señala

en el cordel (con un nudo, ó con qualquiera otra señal) su punto medio; hecho lo qual se operará como sigue.

Fig. 54. En el caso de hallarse el punto D (fig. 54.) sobre la recta A B, señálense en ella dos puntos E y F equidistantes del punto propuesto D, y en cada uno de dichos dos puntos clávese un piquete, y en estos átense los extremos de un cordel que tenga señalado su punto medio: tómese en la mano el nudo ó señal que distinga dicho punto medio, y llévese hácia C, de modo que quede bien tirante de una parte y otra, y aplicándolo así sobre el terreno se tendrá determinado el punto C, en el que se clavará un piquete. Hecho esto, solo restará que trazar la recta D C, que será perpendicular á la A B.

Fig. 55. Si el punto D (fig. 55.) estubiese fuera de la recta A B, clávese un piquete sobre dicho punto, y en él se hará firme el nudo ó señal del cordel: tómese luego con la mano uno de los extremos de dicho cordel, el que se llevará hácia el extremo A, y manteniéndolo bien tirante, se verá en que punto toca la recta A B, y sea E este punto: esto mismo se repetirá hácia el extremo B, y sea F el punto de contacto. Despues de lo qual, solo resta que determinar el punto C, equidistante de los otros dos E y F, segun hemos indicado podia verificarse con el mismo cordel, y trazar la recta D C.

Demostracion. Fúndase el proceder de estas dos operaciones, en que la recta D C (fig. 54 y 55.) tiene dos puntos D y C, que estan equidistantes de otros dos E y F de la recta A B: luego la recta D C es perpendicular á la A B (art. 76, corol. III.).

Fig. 54, *y* 55.

112. Problema 23. *Dividir una recta, ó porcion de recta dada sobre el terreno, en dos partes iguales, por medio de una perpendicular.*

Puede resolverse este problema operando como queda indicado (art. 78, probl. 14.), con solo la diferencia de hacer sobre el terreno con el cordel y piquetes las mismas operaciones que con el compas deben hacerse sobre el papel; por tanto se excusa aquí la repeticion, pero en seguida se expone un modo mas breve de executar esta misma operacion.

Otra solucion.

Fig. 56. Sea A B (fig. 56.) la recta que se quiere dividir. Clávese un piquete en A y otro en B: en A y en B átense los extremos de un cordel que tenga señalado su punto medio, y llévese dicho punto hácia C, hasta que el cordel quede bien tirante por una parte y otra, y en el punto C del terreno clávese un piquete: levántese el cordel, y llévese hácia E su punto medio, y quedando bien tirante por una parte y otra, clávese sobre el terreno otro piquete en el punto E: luego del punto C al punto E tírese la recta C E, que dividirá á la A B en dos partes iguales por el punto F.

Demostracion. La demostracion de este problema, es la misma que la del problema 14 (art. 78.); y se funda en que los puntos C y E distan igualmente de los extremos A y B.

113. Problema 24. *Levantar una perpendicular sobre el terreno, en la extremidad de una recta que no puede prolongarse.*

En el artículo 106, problema 21, hemos visto el modo de resolver este problema sobre el papel; y ninguna dificultad puede ofrecer el executar la misma operacion sobre el terreno. En seguida veremos el de verificarlo, ahorrándose la engorrosa operacion de trazar el arco indefinido que se requiere en la citada resolucion.

Otra solucion.

Fig. 57. Sea A (fig. 57.) el extremo de la recta A B, sobre el qual se quiere levantar una perpendicular.

Sobre el punto A, y sobre otro punto qualquiera B de la recta dada, clávese en cada uno un piquete: tómese un cordel que tenga señalado su punto medio, y fíxese uno de sus extremos en el piquete A, y el otro en el piquete B: llévese hácia C dicho punto medio del cordel, y extendiéndolo igualmente tirante por ambos lados, se clavará un piquete en el punto C: hecho esto, levántese el extremo A del cordel, y llévese en la direccion recta B C, y en el punto D en que termina la distancia C D, que antes era C A, clávese un piquete: el punto D corresponderá perpendicularmente sobre el extremo propuesto A, restará solo trazar la recta A D (art. 28.).

Demostracion. Las rectas C B, C A y C D son iguales por construccion: si desde el punto C como centro, y con el radio C A se describe un círculo, pasará este por los tres puntos B, A y D, y la recta D B será el diámetro: luego el ángulo B A D es un ángulo inscripto, que insiste sobre el diámetro, de consiguiente (art. 105, corol. II.) dicho ángulo será recto: luego la recta D A debe caer perpendicularmente sobre la A B (art. 70, corol. III.), que es lo que se pretendia executar.

114. Problema 25. *De un punto dado sobre el terreno, baxar una perpendicular hácia el extremo de una recta que no puede prolongarse.*

Fig. 58. Sea D (fig. 58.) el punto propuesto, y A B la recta. Clávese un piquete en el punto D, y en él afírmese el extremo de un cordel que tenga señalado su punto medio: tómese con la mano el otro extremo, y véase en que punto dicho extremo corta la recta A B, y

sea B este punto, en el que se clavará otro piquete: hecho esto, clávase un tercer piquete en el punto C, donde quadre sobre el terreno el punto medio del cordel: despues de lo qual levántese el extremo B de dicho cordel, el que se llevará hácia A, y nótese el punto en que corte la recta, y sea A este punto: digo que dicho punto A corresponderá perpendicularmente debaxo del punto D: restará solo trazar la A D.

Demostracion. Es la misma que la del problema anterior (art. 113.).

115. Mas adelante veremos un método mas breve y facil, de levantar y baxar una perpendicular sobre el terreno; que no expondremos aquí, por no anticipar el principio teórico sobre que se funda.

Tambien se levantan y baxan con facilidad las perpendiculares sobre el terreno, con un instrumento llamado *cartabon* (n); que en suma no es otra cosa mas que una esquadra grande, cuyo uso y comprobacion en todo es semejante al prescripto para la esquadra (artículos 80 y 81.).

116. En el artículo 29 prometimos detallar el método de proseguir el trazado de una línea recta, quando el terreno presentase algun obstáculo, y este se verá á continuacion en el problema siguiente.

Problema 26. *Proseguir una línea recta al otro lado de un obstáculo.*

Fig. 59. Sea A B (fig. 59.) la recta que se quiere proseguir al otro lado de la montaña que denota la figura.

Sobre el extremo B levántese la perpendicular B C (art. 113.), y desde el extremo C levántese la C D perpendicular á la B C, la que se prolongará hasta el otro lado D de la montaña; y en dicho punto se levantará la tercera perpendicular D E, que se hará igual

á la B C; y finalmente, levantando una quarta perpendicular sobre el punto E, se tendrá la E F, que será la continuacion de la recta propuesta A B.

Demostracion. Para convencerse de que la recta E F es continuacion de la recta A B, imagínese tirada la B E, y prolongada la C D hácia K y hácia L.

Es evidente que la B E será paralela á la K L, porque sus dos extremos B y E distan igualmente de la K L (art. 82.), y que dos puntos bastan para determinar la posicion de una recta (art. 11.). Pero la recta A B es tambien paralela á la K L, porque la A B y la K C son perpendiculares á la B C (art. 92, corol.): luego A B y B E tienen la misma posicion respecto á la K L: luego la una es continuacion de la otra, esto es, que A B E es una misma línea recta. Del mismo modo se probará que E F es continuacion de la B E ó de la A B E, que es lo que se pretendia demostrar.

117. Dado el modo de levantar, y el de baxar una perpendicular sobre el terreno, parece excusado advertir que el problema 19 (art. 98.), y el problema 20 (art. 99), se resuelven sobre el terreno, por un método semejante al prescripto para su execucion sobre el papel.

DUODÉCIMA LECCION.

DEL TRAZADO DE LAS LÍNEAS PARALELAS SOBRE EL TERRENO, Y NOCIONES GENERALES ACERCA DE LOS TRIÁNGULOS.

118. Para tirar una recta paralela á otra, y que pase por un punto dado sobre el terreno, puede emplearse el método prescripto para executar esta operacion

sobre el papel (art. 90, probl. 16.): de consiguiente, es inutil repetir aquí este procedimiento; pero ha parecido conveniente indicar aquí otros métodos de practicar esta misma operacion, aplicables en su execucion tanto al terreno, como sobre el papel; y aunque todos ellos se reducen á obtener el mismo resultado, tienen sin embargo la ventaja de ofrecer mas facilidad en la execucion los unos que los otros, segun las localidades del terreno, que á veces presenta dificultades, que dexan de serlo empleando otro modo de operar.

Problema 27. *Modo de trazar una línea paralela á otra, que pase por un punto dado sobre el terreno.*

Fig. 60. Sea A B (fig. 60.) la recta, y D el punto dado. Desde dicho punto báxese la D E perpendicular á la A B. Por otro punto qualquiera F, tomado arbitrariamente sobre dicha recta, levántese la perpendicular indefinida F H: desde el punto F como centro, y con una distancia igual á D E, hágase la interseccion m n p, que cortará á la F H en el punto n: hecho esto, por los puntos D y n tírese la recta D n, que será paralela á la A B; porque por construccion, las perpendiculares intermedias D E y F n son iguales (art. 82.).

Otra solucion.

Fig. 61. Sea A B (fig. 61.) la recta, y D el punto propuesto. Tómese la distancia mas corta del punto D á la recta A B, cuya distancia mas corta será la perpendicular baxada de dicho punto á la recta (art. 74.), y tomando esta distancia por radio, se hará centro en un punto qualquiera C tomado sobre la A B, y se describirá el arco n u m. Luego con el mismo radio, y haciendo centro en otro punto qualquiera E de la recta A B, se describirá el arco o z p, con igual radio que el anterior: hecho esto, tírese la recta F G tangente

á los arcos trazados, y dicha recta será paralela á la propuesta A B, y pasará tambien por el punto dado D.

Demostracion. Los puntos u, z tienen por construccion una misma posicion respecto á la A B: luego tanto distará de ella el uno como el otro: es pues evidente que la recta F G pasa por dos puntos equidistantes de la A B; y como dos puntos determinan la posicion de una recta (art. 11.), concluiremos con evidencia, que todos los puntos de la F G distan igualmente de los de la A B: luego estas dos líneas seran paralelas entre sí.

Resta que demostrar, que la F G debe pasar por el punto D: para ello basta considerar, que por ser F G tangente en los puntos u, z, las rectas u C, z E caen perpendicularmente sobre ella (art. 94, corol.). Dichas dos rectas caerán tambien perpendicularmente sobre la A B, por ser esta última paralela á la F G (art. 92.). Pero el punto D dista por construccion de la A B una distancia igual á u C, ó z E: luego la F G debe pasar por el punto D.

Otra solucion.

Supongamos que esté determinada la distancia, á la qual debe pasar la paralela. Sea por exemplo á doce toesas de la recta A B (fig. 62.).

Fig. 62.

Sobre el extremo A levántese la perpendicular A C, á la que se le dará doce toesas de largo, y en el punto donde termine esta distancia se levantará una perpendicular C D, que precisamente ha de ser paralela á la recta A B (art. 92, corol.).

119. Para cerrar un espacio puede bastar una sola línea curva; pero se necesitan á lo menos tres, para cerrarlo con líneas rectas: entonces el espacio comprehendido entre ellas se llama *triángulo rectilíneo*, ó solamente *triángulo*. B A C (fig. 63.) representa un triángulo, porque es un espacio cerrado por tres líneas rectas, ó porque es una figura que no tiene mas que tres ángulos.

Fig. 63.

120. Se llama lado de la figura rectilínea, á cada una de las rectas que forman su perímetro; por lo que se dice, que el triángulo es una figura de tres lados.

Corolario I. De lo dicho en el artículo anterior se infiere, que el triángulo es la figura rectilínea que consta de menos lados.

Corolario II. En qualquiera triángulo A B C (fig. 63.), dos lados qualesquiera A B y B C forman una suma mayor que el tercero A C.

Fig. 63.

En efecto, A C es una línea recta, que va del punto A al punto C: luego será camino mas corto para ir de uno de estos puntos al otro que la línea angulosa A B C (art. 10. Corol.)

121. El triángulo, con respecto á los lados, se llama:

1.° *Equilátero*, quando sus tres lados son iguales entre sí.

2.° *Isósceles*, quando dos lados del triángulo son iguales entre sí.

3.° *Escaleno*, quando tiene sus tres lados desiguales.

122. El triángulo, con respecto á los ángulos, se llama:

1.° *Rectángulo*, quando uno de sus ángulos es recto.

2.° *Obtusángulo*, quando tiene un ángulo obtuso.

3.° *Acutángulo*, quando tiene los tres ángulos agudos.

4.° *Obliquángulo*, quando sus tres ángulos son obliquos (esto es, todo triángulo que no es rectángulo), y puede ser obtusángulo ó acutángulo.

123. En el triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*; y los otros dos lados que forman el ángulo recto, se llaman *catetos*.

124. Teorema. *Los tres ángulos de todo triángulo, valen juntos* 180°, *ó dos ángulos rectos.*

Fig. 63. *Demostracion.* Sea A B C (fig. 63.) el triángulo. Prolónguese indefinidamente el lado A C hácia D, y del punto A tírese la recta A E paralela al lado B C.

Por ser A E paralela á la B C, tendremos que el ángulo D A E = A C B por correspondientes (art. 84.); y el ángulo E A B = A B C por alternos é internos (art. 85.): luego los ángulos A C B y A B C valen juntos, tanto como los ángulos D A E y E A B, esto es, tanto como el ángulo D A B: pero el ángulo D A B es suplemento del ángulo B A C (art. 62, corol. 1.) por contiguos: luego los dos ángulos A C B y A B C, forman juntos el suplemento del ángulo B A C: luego estos tres ángulos valen juntos 180°, ó dos rectos, que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario I. De la demostracion anterior se deduce, que el *ángulo externo* D A B de qualquier triángulo rectilíneo, es igual á la suma de sus dos *internos* opuestos A C B y A B C.

Corolario II. El ángulo externo será mayor que uno de los internos opuestos, en el valor del otro interno.

Esto es, que el ángulo D A B será mayor que el ángulo A C B del valor del ángulo A B C; y que D A B será mayor que A B C del valor del ángulo A C B.

Corolario III. Uno de los ángulos internos opuestos, será menor que el externo en el valor del otro interno.

Esto es, que el ángulo B C A será menor que el ángulo D A B, del valor del ángulo A B C; y que A B C será menor que D A B, del valor de A C B.

Corolario IV. Todo ángulo de un triángulo, es suplemento de la suma de los otros dos.

Corolario V. Conocidos dos ángulos de un triángulo, se hallará el tercero, sumándolos y restando la suma de 180°: la diferencia será el valor del tercer ángulo.

Corolario VI. Conocido un ángulo de un triángulo, se halla el valor de la suma de los otros dos, restando el ángulo conocido de 180°.

Corolario VII. Luego, si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales á dos del otro, sus terceros ángulos seran tambien iguales; puesto que son suplemento de los otros dos.

Corolario VIII. En todo triángulo rectilíneo, solo puede haber un ángulo recto ú obtuso.

En efecto, si fuesen dos los ángulos rectos, juntos valdrian 180°: de consiguiente el tercero no valdria nada, y no habria triángulo. Si se dixese que el triángulo podia tener un ángulo recto y otro obtuso, ó dos obtusos, la suma de ellos valdria mas de 180°, lo que es un absurdo, segun lo acabado de demostrar en el teorema anterior.

Corolario IX. En todo triángulo rectángulo, los ángulos agudos seran complemento el uno del otro, puesto que entre los dos deben valer 90° (corol. VI.).

125. Hemos visto (art. 98.) el modo de hacer pasar una circunferencia, por tres puntos que no esten en línea recta: de lo que concluiremos, que siempre se puede hacer pasar una circunferencia por los tres vértices de un triángulo: lo que se llama *circunscribir* un círculo á un triángulo. Es evidente que en este caso (fig. 64) los lados A B, B C y C A son cuerdas de los arcos, cuyas mitades son medidas de los ángulos inscriptos

Fig. 64.

A C B, B A C y A B C (art. 105.). De aquí se sigue:
1.° Que á mayor ángulo corresponde mayor lado opuesto: é inversamente, que á mayor lado corresponderá mayor ángulo (art. 110.).
2.° Á iguales lados corresponderán iguales ángulos opuestos (art. 46.); y á iguales ángulos corresponderán iguales lados opuestos (art. 47.).

Advertencia. Esto debe entenderse en un mismo triángulo, y no en triángulos distintos.

Corolario I. De aquí se sigue, que como el triángulo equilátero tiene sus tres lados iguales, tambien lo serán sus tres ángulos (art. 121.): cada uno de ellos valdrá pues 60°, que es la tercera parte de 180° (art. 124.).

Corolario II. Si los tres ángulos de un triángulo son iguales, cada uno de ellos valdrá 60°, que es el tércio de 180° (art. 124.); y el triángulo será equilátero (art. 125. *numero 2.°*)

Corolario III. Puesto que el triángulo isósceles tiene dos lados iguales entre sí (art. 121.), los ángulos opuestos á los lados iguales seran iguales.

Corolario IV. Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, los dos lados opuestos seran tambien iguales: luego el triángulo será isósceles.

126. Teorema. *La cuerda de 60° es igual al radio.*

Fig. 65. *Demostracion.* Sea A B (fig. 65.) la cuerda de 60°. Desde el centro C del círculo, tírense los radios C A y C B: resultará el triángulo A C B, en el qual los ángulos C A B y A B C seran iguales, por oponerse á lados iguales (art. 125, corol. III.). Es así que la suma de dichos dos ángulos iguales es = 180° — el ángulo

A C B, que por suposicion es de 60°: luego los dos valdrán 120°, y uno de ellos 60°: esto es, que cada uno de los tres ángulos del triángulo A B C valdrá 60°: por consiguiente el triángulo será equilátero (art. 125, corol. II.): luego A B cuerda de 60° = A C radio, que es lo que se pretendia demostrar.

DECIMATERCIA LECCION.

DE LA IGUALDAD DE LOS TRIÁNGULOS, Y VARIOS PROBLEMAS ÚTILES EN LA PRÁCTICA.

127. Dos triángulos son totalmente iguales en los casos siguientes; y es muy conveniente saber distinguir las condiciones que se requieren, para que quede prefixada esta igualdad.

1.° Dos triángulos son totalmente iguales, quando tienen dos lados, y el ángulo comprehendido iguales: esto es, el formado por dichos lados.

2.° Quando tienen iguales un lado, y los dos ángulos adyacentes: esto es, los dos ángulos cuyos vértices estan en los extremos de dicho lado.

3.° Quando tienen iguales un lado, un ángulo adyacente, y otro ángulo opuesto á dicho lado; con tal que el ángulo adyacente de un triángulo sea igual al adyacente del otro, y el opuesto del uno al opuesto del otro.

4.° Quando tienen los tres lados del uno, iguales á los tres del otro.

De aquí resultan los quatro teoremas, que expresaremos á continuacion.

128. Teorema. *Dos triángulos son totalmente iguales, quando tienen iguales dos lados, y el ángulo comprehendido.*

Fig. 66. *Demostracion.* Sean (fig. 66.) A B C y D E F los dos triángulos propuestos, y en ellos el ángulo B A C = E D F, A B = D E, y A C = D F. Concíbase la figura A B C sobrepuesta sobre la figura D E F, de modo que el lado A B se sobreponga exâctamente sobre su igual D E: puesto que el ángulo B A C es igual al ángulo E D F, el lado A C caerá sobre el lado D F; ademas porque A C = D F, el punto C caerá sobre el punto F: sobrepuesto el punto B sobre E, y el punto C sobre F, es evidente que B C se aplicará exâctamente sobre E F (art. 11, corol.), y que por consiguiente se sobreponen exâctamente: luego dichos dos triángulos son totalmente iguales.

129. Teorema. *Dos triángulos son totalmente iguales, quando tienen iguales un lado, y los dos ángulos adyacentes.*

Fig. 66. *Demostracion.* Sean (fig. 66.) A B C y D E F los dos triángulos propuestos, y en ellos A C = D F el ángulo B A C = E D F, y el ángulo B C A = E F D. Sobrepóngase el lado A C sobre el lado D F, de modo que el punto A caiga sobre el punto D, y el punto C sobre F. El lado A B debe caer sobre el lado D E, por ser el ángulo B A C igual al ángulo E D F: asimismo, por ser el ángulo B C A igual al ángulo E F D, el lado C B se sobrepondrá sobre el lado F E: luego los lados A B y C B se encontrarán en el punto E: luego dichos dos triángulos se sobrepondrán tambien en el punto E, y de sobrepuestos en todos sus puntos concluiremos, que son totalmente iguales.

130. Teorema. *Dos triángulos son totalmente iguales, quando tienen iguales un lado, el ángulo adyacente de un triángulo igual al ángulo adyacente del otro, y el ángulo opuesto de un triángulo igual al ángulo opuesto del otro.*

Fig. 66. *Demostracion.* Sean (fig. 66.) A B C y D E F los dos triángulos propuestos, y en ellos A C = D F, el ángulo B A C = E D F, y el ángulo A B C = D E F. Supuesto que estos dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales á los dos ángulos del otro, el tercer ángulo del uno deberá forzosamente ser igual al tercero del otro (art. 124, corol. VII.): de consiguiente, los triángulos tendrán iguales un lado, y los dos ángulos adyacentes: luego el caso propuesto en este teorema recae en el caso enunciado en el teorema anterior (art. 130.): luego, en este como en aquel, los dos triángulos son totalmente iguales.

131. Teorema. *Dos triángulos son totalmente iguales, quando tienen los tres lados del uno iguales á los tres lados del otro.*

Fig. 66. *Demostracion.* Sean (fig. 66.) A B C y D E F los triángulos propuestos, y en ellos A C = D F, A B = D E y B C = E F. Concíbase la figura A B C aplicada sobre la figura D E F, de modo que el lado A C se sobreponga exâctamente sobre el lado D F: digo que el punto B debe forzosamente caer sobre el punto E; y para convencerse de ello, desde los puntos D y F como centros, y con los radios D E y D F, descríbanse los arcos m n y o p, que se cortan en el punto E: es evidente que porque A B es igual á D E, el punto B debe caer sobre algun punto del arco m n: por la razon de ser B C = E F debe tambien caer sobre algun punto del arco o p: luego dicho punto B caerá sobre el punto E, que es el solo punto comun que estos dos arcos pueden tener hácia el mismo lado de la recta D F: luego los dos triangulos se sobreponen exâctamente, y de consiguiente seran totalmente iguales.

132. De los quatro teoremas anteriores deduciremos los problemas siguientes, que son de suma utilidad en la práctica.

Problema 28. *Medir una línea recta sobre el terreno, accesible solo por sus extremos.*

Fig. 67. Supóngase que se quiere hallar el ancho A B (fig 67.) de una laguna, estanque, ó pantano accesible solo por sus extremos A y B.

Para ello, se tomará arbitrariamente en la campiña un punto C, desde el qual se puedan ver los piquetes plantados en A y B, é ir á estos sin obstáculo: plántese un piquete en C, y prolónguense las líneas A C y B C, haciendo C E = A C, y C D = C B; y desde el punto D al punto E tírese la recta D E, que será igual á la A B que se pretende medir.

Demostracion. El triángulo A B C es totalmente igual al triángulo C D E; porque el ángulo A C B es igual al ángulo D C E, por opuestos por el vértice (art. 65.); asimismo, por construccion el lado A C = C E, y B C = C D: luego estos seran dos triángulos que tienen iguales, dos lados y el ángulo comprehendido: de consiguiente (art. 128.) dichos triángulos seran totalmente iguales.

Otra solucion.

La execucion de la operacion anterior requiere, que el local ofrezca un espacio de terreno suficiente para trazar en él un segundo triángulo C D E; pero si la naturaleza del terreno no lo permite, será preciso operar del modo que vamos á detallar.

Plantado el piquete C, y medidas las dos líneas A C y B C, es necesario medir tambien el ángulo A C B con el grafómetro ó aguja, ó aproximadamente como se tiene enseñado (art. 69.), y con estos tres datos se pasará á construir un triángulo sobre el papel.

Supóngase que para medir el ángulo A C B sobre el terreno se empleó el método indicado en el citado artículo 69, empleando la regla y el papel; y que de

Fig. 68. esta operacion resultó el ángulo d c f (fig. 68.) trasladado al papel.

Sobre el mismo papel márco la escala de relacion m n (art. 31.) de un tamaño arbitrario, para representar el valor de una toesa (suponiendo que la medicion hecha sobre el terreno haya sido hecha con la toesa). Hecho esto, desde el vértice c hácia d, se repetirá tantas veces la distancia m n sobre el lado c d, como toesas midió la distancia A C: luego sobre el lado c f desde c para f, repítase tantas veces la distancia m n, como toesas midió la recta B C en el terreno: supóngase que estas distancias terminaron en el punto a y en el punto b, y desde un punto á otro tírese la recta a b, y véase quantas veces la distancia m n está contenida en la recta a b: este número será el de toesas que mide la recta A B que se pretendia medir en el terreno.

Fig. 67. *Demostracion.* El ángulo A C B (fig. 67.) es igual al ángulo a c b (fig. 68.), por constar del mismo número de grados: ademas, los lados a c y c b del triángulo a b c, constan del mismo número de escalas m n que los lados A C y C B del triángulo A B C contienen á la toesa: luego el lado A B constará de tantas toesas quantas veces el lado a b contenga á la escala m n.

Mas adelante veremos la demostracion rigurosa de esta operacion; así como la de la que se manifestará en la segunda solucion del problema siguiente, quando se trate de la similitud de los triángulos.

133. Problema 29. *Medir una línea, accesible solo por uno de sus extremos.*

Trátese de hallar la distancia que hay desde el pun-
Fig. 69. to A (fig. 69.) situado en la orilla opuesta de un rio, al punto B donde se halla el que desea hacer esta investigacion.

Para ello se clavará un jalon en el punto B, desde

el qual se levantará la recta indefinida B D perpendicular á la A B, y en el punto D clávese otro jalon: divídase la B D en dos partes iguales en el punto C, y en él clávese otro jalon: desde el punto D levántese la recta D E perpendicular á la D B: hecho esto, búsquese sobre la recta D E un punto como F, desde el qual se vea confundido el jalon C con el objeto A, y plántese otro jalon en el punto F: es evidente que los jalones F, C y el objeto A estarán en línea recta. Digo que la distancia F D es igual á la distancia A B, que se pretendia medir.

Demostracion. Los dos triángulos A B C y C D F son totalmente iguales; porque el ángulo en B del primero, y el ángulo en D del segundo son rectos por construccion; y el ángulo A C B del primero, es igual al ángulo D C F del segundo, por opuestos por el vértice (art. 65.): ademas, el lado B C del primero es por construccion igual al lado C D del segundo: luego estos dos triángulos tendran iguales, un lado y los dos ángulos adyacentes; de consiguiente dichos dos triángulos seran totalmente iguales: luego el lado D F será igual al lado A B, que es lo que se pretendia demostrar.

Otra solucion.

Si la naturaleza del terreno no permitiese trazar en él el segundo triángulo C D F, en este caso se hará lo siguiente.

Plantado el jalon en B, y levantada la perpendicular B C, clávese un jalon en el punto C, y mídase la distancia B C: hecho esto, mídase el ángulo A C B, que representado sobre el papel sea el d c e (fig. 70.): desde su vértice c hácia e, repítase la escala de relacion m n tantas veces, quantas toesas ó varas midió el lado C B (fig. 69.), y supóngase que terminó en el punto b, desde el qual se levantará la recta b a perpendicular á la

Fig. 69, y 70.

c e: véase quantas veces la recta b a contiene á la escala, dicho número de veces será el de toesas que contiene la recta A B del terreno que se pretendia medir.

Demostracion. El triángulo a b c representativo del triángulo A B C del terreno, tiene los ángulos a b c y a c b iguales á los ángulos A B C y A C B, y el lado comun c b del mismo número de escalas que el C B de toesas ó varas: mas adelante veremos que segun estos datos, el lado A B debe constar de tantas varas ó toesas, quantas veces el lado a b contiene á la escala.

134. Es muy freqüente en campaña carecer de instrumentos, y aun del tiempo necesario para practicar operaciones sobre el terreno; de modo que es preciso recurrir al golpe de ojo para estimar ciertas distancias; pero este golpe de ojo solo se adquiere con el tiempo y continuo exercicio, del qual deben carecer los principiantes. Por esta razon no parecerá fuera de lugar se inserten aquí dos métodos para suplirle, los que extractaremos de la obra recomendable intitulada Guia del Oficial particular para Campaña, escrita por el General Cesac-Lacuée.

Problema 30. *Modo de medir aproximadamente una distancia, accesible solo por un extremo.*

Si se quiere medir el ancho de un rio, ó qualquiera otra distancia, se tomará un piquete de quatro pies de alto, se le raja por una punta, y se pone en esta otro pequeño de siete á ocho pulgadas de largo: se clava en tierra el palo, y se da al pequeño que se puso en la raja una direccion tal, que siguiéndola con la vista se descubra la orilla opuesta del rio: hecho esto se da vuelta al palo clavado en tierra, sin sacarlo de ella, y se aplica la vista del mismo modo que se hizo la primera vez, y el punto de la campiña donde concluya la visual, manifestará la anchura del rio.

Demostracion. Fúndase esto en que la visual dirigida en la primera y segunda posicion del piquete, parten del mismo punto, y con igual inclinacion respecto al terreno: luego los dos puntos en que van á fenecer, deben estar equidistantes del punto sobre el qual se clavó el piquete, por ser estas distancias radios del mismo círculo.

Otra solucion.

Todavia se ofrece un medio mas facil para conocer la anchura de un rio, ó distancia á que estan dos objetos. Colóquese á la orilla del rio el que quisiere medir su anchura, y con el sombrero puesto de modo que uno de los picos largos esté echado á la cara, y tan encasquetado, que al mirar á la orilla opuesta, venga á rasar el radio visual con el pico del sombrero: hecho esto, dirigiendo á otra parte otra visual del mismo modo, sin levantar ni baxar el sombrero ni la cabeza, el punto donde concluya esta dará á conocer qual es el ancho del rio, ó la distancia que se buscaba.

Demostracion. Este método se funda sobre los mismos principios que el anterior.

Desde luego se conoce que estos métodos no son tan exâctos como los propuestos (art. 133.). En efecto, siempre que el terreno no sea próximamente horizontal, las visuales dexarán de ser radios del mismo círculo, y si el terreno está cuesta abaxo, la distancia hallada será mayor que si estubiese cuesta arriba.

135. Tampoco nos ha parecido ocioso consignar aquí por medio de instruccion, lo que este célebre autor aconseja para adquirir el golpe de ojo, tan necesario en la guerra, y en lo qual nunca podrán ensayarse demasiado temprano los señores Cadetes.

"Para enseñarse á esto, supóngase por exemplo que » se tiene delante en un terreno llano y á muy corta

„distancia, como de cincuenta pasos, un objeto qual-
„quiera, tal como una casa, una piedra, un árbol &c.,
„se valúa el número de pasos á que se está de este
„objeto; y hecho esto, se encamina el que hace la
„operacion hacia él, contando los pasos que hay hasta
„el objeto propuesto; y vista la diferencia que resulta
„entre los verdaderamente medidos y los que se creía
„que habia, se retrocede para exâminar atentamente el
„punto de donde se ha salido; y repitiendo esta ope-
„racion muchas veces y en distintos paráges, se con-
„sigue acostumbrar la vista à medir de una ojeada una
„distancia de cincuenta pasos: despues se mira atras
„ó adelante, à otro punto, al qual se le supone à
„igual distancia: se le compara antes de medirlo, y
„despues con los pasos se verifica el error, si lo hay &c.
„De este modo se aprende à medir bien con la vista,
„primero una distancia de cincuenta pasos, luego una
„de ciento, de doscientos &c.; y despues de estar bien
„exercitado en un terreno llano, se aprende en uno
„que no lo sea. En todas las operaciones de que se ha
„hablado de medir distancias à pasos, para no equi-
„vocarse en la cuenta se pueden llevar en la mano
„algunas marcas ó monedas, y à cada cien pasos echar
„una en la faltriquera, y quando se haya andado toda
„la distancia que se quiere medir, se contarán las mo-
„nedas, y por ellas se sabrá el número de pasos que
„hay."

Fig. 71. 136. Teorema. *Las partes A B y C D (fig. 71.) de dos rectas paralelas, comprehendidas entre otras dos rectas paralelas A C y B D, son iguales.*

Demostracion. Para demostrar que A B = C D, desde los puntos A y C bàxense las dos perpendiculares A E y C F, y se tendrán los dos triángulos A B E y C D F, que son totalmente iguales, porque tienen iguales los lados A E y C F (art. 82.), los ángulos A E B y C F D por rectos, y los ángulos B A E y D C F por formados

por lados paralelos (art. 89.): luego dichos dos triángulos tienen iguales, un lado y los dos ángulos adyacentes: de consiguiente (art. 129.) dichos triángulos serán totalmente iguales: luego el lado A B será igual á su correspondiente C D, que es lo que se pretendia demostrar.

Escolio. Por ser A C y B D porciones de dos rectas paralelas entre sí, y comprehendidas entre otras dos A B y C D tambien paralelas entre sí; concluiremos con evidencia que A C = B D, puesto que acabamos de demostrar, que por estas mismas razones son iguales las porciones de recta A B y C D.

137. Hemos diferido hasta ahora hablar del instrumento llamado *paralelas* (ñ), por pender su construccion del teorema anterior: puede verse su descripcion en el Apéndice de este Tratado; por lo que solo trataremos aquí del modo de comprobarlo.

Problema 31. *Modo de comprobar el instrumento llamado* paralelas.

Fig. 72. Póngase el canto q p (fig. 72.) de dicho instrumento sobre una recta, y tírese otra recta siguiendo el canto m n.

Hecho esto, cámbiese el instrumento, colocando sobre el papel la misma cara de las reglas que en la operacion anterior, pero haciendo que el canto q p coincida con la recta tirada con el canto m n.

Si en este caso se puede hacer coincidir el canto m n con la recta tirada con el otro canto q p, el instrumento será exâcto, y las líneas tiradas con él seran paralelas entre sí.

Pero si se advierte alguna diferencia, su mitad será el error del instrumento, y de las supuestas paralelas tiradas por sus cantos.

DECIMAQUARTA LECCION.

DEL TRAZADO DE LOS ÁNGULOS SOBRE EL PAPEL, Y SOBRE EL TERRENO.

138. En la sexta Leccion hemos manifestado quanto era conveniente, acerca del modo de medir los ángulos trazados sobre el papel, ó sobre el terreno. Para completar quanto tocante á los ángulos nos resta que decir, es necesario detallar el modo de trazar un ángulo de determinado número de grados, tanto sobre el papel como sobre el terreno; y lo hemos demorado hasta ahora, que tenemos demostrado los teoremas, y principios en que se fundan las operaciones que para ello se requieren. En esta Leccion, como en aquella seguiremos la misma progresion descendente, de suponer al que la hace abastecido de los instrumentos necesarios para la execucion; y conducirlo careciendo de estos, hasta el grado de determinar aproximadamente estas operaciones, por el simple golpe de ojo.

139. Problema 32. *Trazar un ángulo sobre el papel, de determinado numero de grados.*

Fig. 73. Tírese la recta indefinida A B (fig. 73.), y sobre esta señálese arbitrariamente un punto C, para servir de vértice al ángulo que se pide: aplíquese sobre la A B el diámetro del semicírculo ó transportador, de modo que su centro caiga sobre el punto C: si el ángulo que se pide es por exemplo de 50°, se contará desde A hácia F, ó desde B hácia E sobre el limbo del instrumento los 50° propuestos; y finalmente por el punto C y el punto F tírese la recta C F, si se quiere que el ángulo A C F quede formado á la izquierda del centro; ó bien se tirará la recta C E, si se quiere que el ángulo B C E quede á la derecha del punto C.

Escolio. Si en lugar de tomar arbitrariamente una recta A B por uno de los dos lados del ángulo, y por vértice un punto qualquiera C de esta línea; las condiciones del problema hubiesen exigido que este ángulo tuviese por lado una recta cuya posicion estuviese trazada, y por vértice un punto dado de dicha recta, y que ademas se quisiese que este ángulo estuviese colocado hácia tal lado de la recta, y que su abertura se dirigiese hácia tal extremo de ella; es facil ver que se podria satisfacer á todas estas condiciones, sin cambiar en nada el procedimiento de esta operacion.

140. Problema 33. *Hacer un ángulo sobre el terreno con el grafómetro, de determinado número de grados.*

Montado el grafómetro sobre el tres pies, sitúese so-
Fig. 25. bre el terreno, de modo que el centro i (fig. 25.) del instrumento caiga verticalmente sobre el punto B, que deba ser vértice del ángulo pedido: lo que se executará por medio del plomo, y póngase horizontal el plano del instrumento (art. 69.).

Hecho esto, aplíquese la vista á la abertura longitudinal de la pínula a de la alidada a b, al través de la qual se procurará ver el hilo de la otra pínula opuesta b del mismo diámetro, y en la direccion de este radio visual, y á una distancia arbitraria se plantará el jalon f F: en fin se une con una recta el punto F, que este jalon determina sobre el terreno, con el punto B vértice del ángulo.

Determinado el punto F, hágase girar la alidada movible d e, hasta que su diámetro haga con el diámetro fixo a b un arco a d del número de grados, minutos &c. propuestos: en fin, por las pínulas d y e se da la direccion d e g, y en un punto qualquiera de ella G se planta el jalon g G, y este punto G se une al punto B con la recta G B, la que con la B F formará el ángulo que se pide F B G ó C B A.

Demostracion. En esta Leccion, como en la sexta, se supone que el terreno es horizontal: mas adelante manifestaremos lo que convenga hacer, quando la naturaleza del terreno sea tal, que no se pueda operar baxo esta hipótesis sin un error sensible.

Baxo este supuesto, las rectas c f y c g seran paralelas á la B F y B G, mediante a que se supone que el terreno es horizontal, y que el instrumento ha sido tambien colocado horizontalmente: ademas, por la colocacion dada al instrumento, el punto c cae perpendicularmente sobre el vértice B del ángulo: asimismo por haberse clavado verticalmente los dos jalones, el punto f caerá perpendicularmente sobre el punto F, y el punto g caerá tambien perpendicularmente sobre G: luego (art. 11) todos los puntos de las c f y c g caerán perpendicularmente sobre todos los puntos de las B F y B G: de consiguiente los dos ángulos f c g y F B G se podrán sobreponer exâctamente el uno sobre el otro: luego seran iguales; y como que el primero consta del número de grados determinado, tambien el ángulo F B G trazado sobre el terreno, constará del mismo número de grados.

Modo de executar esta misma operacion con la aguja.

Colóquese el centro del instrumento, verticalmente so-
Fig. 26. bre el punto B (fig. 26.) que ha de ser vértice del ángulo, y horizontal el plano de dicho instrumento: como en el grafómetro, diríjase una visual por las pínulas fixas a y b, y plántese en esta direccion el jalon f F: nótese con cuidado en que punto la aguja imanada corta la graduacion del instrumento.

Hecho esto, hágase girar el instrumento á derecha ó izquierda, segun se quiera quede formado el ángulo, hasta que la aguja imanada corte á la graduacion del instrumento, en tal punto que forme con el punto en que la cortaba en la posicion anterior, un arco de un número

de grados igual al del ángulo que se pretendia trazar sobre el terreno. Finalmente, por las mismas pínulas a y b, que se supondrán haber tomado la posicion e d, se tirará una visual, y en su direccion se plantará el piquete g G: con esto, y con trazar las rectas B F y B G, quedará trazado el ángulo F B G ó C B A igual al ángulo f c g, segun tenemos demostrado en la resolucion anterior.

141. Por lo que acabamos de decir del grafómetro, y de la aguja en las dos operaciones anteriores, se deduce la facilidad en executar las dos siguientes.

Problema 34. *Hacer un ángulo igual á otro dado sobre el terreno, con el grafómetro ó aguja.*

Fig. 25, y 26. Suponiendo que F B G (fig. 25 y 26.) sea este ángulo, se colocará el instrumento sobre el punto B, y se tomará la abertura f c g, dirigiendo la visual por una alidada al punto f, y por la otra al punto g, si la operacion se verifica con el grafómetro; ó bien dirigiendo primero la visual por las pínulas fixas de la aguja al punto f, y luego al punto g, se contará el número de grados, minutos &c. en que la aguja ha variado en este giro respecto á la graduacion del instrumento: hecho esto, transfiérase el instrumento al punto, y en tal posicion que requieran las condiciones del problema, y plantando un piquete en la direccion de cada una de las visuales dirigidas por ambas alidadas del grafómetro, se tendrá determinado el ángulo, que será igual al primero que se ha medido. Si la operacion se practicase con la aguja, se clavará primero un piquete por la direccion de las pínulas, se hará girar el instrumento de un número de grados, minutos &c. igual al ángulo medido, y de verificado se clavará un piquete en la nueva direccion de la visual dirigida por las pínulas despues del giro.

Problema 35. *Levantar una recta perpendicular á otra dada sobre el terreno, con el grafómetro ó aguja.*

Si es con el grafómetro, se hará coincidir la línea cero del nonio, que llamaremos *magistral*, con la línea de los 90° de la graduacion del instrumento, y dispuesto así á ángulo recto las dos alidadas, es claro que las visuales que por ellas se dirijan marcarán en el terreno dos direcciones, perpendicular la una á la otra. Es pues facil disponer el centro del instrumento verticalmente sobre un punto de la recta dada, y la alidada fixa en su direccion, y plantar un piquete por la direccion de la alidada movible: hecho esto, solo restará trazar una recta desde el piquete al punto dado sobre la recta propuesta.

Si fuese con la aguja, se dispondrá el centro vérticalmente sobre el punto dado de la recta propuesta, y el diámetro de las pínulas en su direccion, y se notará el punto en que el extremo de la aguja imanada corta la graduacion del instrumento: de verificado, hágase girar el instrumento sobre su centro, hasta que el extremo de la aguja imanada corte de nuevo á la graduacion del instrumento, en un punto que forme con el punto en que la cortaba anteriormente un arco de 90°; y por esta nueva direccion de las pínulas plántese un piquete, y trázese desde él al punto dado en la recta propuesta una línea, que será perpendieular á ella, puesto que al insistir sobre ella forma un ángulo recto (art. 70, corol. III.).

142. Problema 36. *Hacer un ángulo sobre el terreno de determinado número de grados, sin mas instrumentos que piquetes y un cordel.*

Puede suceder que no se pueda emplear el grafómetro, ni la aguja en las operaciones que acabamos de detallar, particularmente si son relativas á la construccion de un atrincheramiento (o), en la que con freqüen-

cia se necesita mas presteza que exâctitud; en este caso se recurre al valor conocido de los ángulos. Si por exemplo se quiere un ángulo de 45°, sabiendo que el recto vale 90°, la operacion se reducirá á levantar una
Fig. 74. perpendicular sobre el punto C (fig. 74.) de la recta A B, suponiendo que se quiere el vértice del ángulo en dicho punto, y se tendrá el ángulo recto A C D: restará solo dividir este ángulo en dos partes iguales con la recta C E, para obtener el ángulo A C E de 45°, y el ángulo E C B de 135°; y esta division se hará sobre el terreno segun lo prescripto (art. 97, probl. 18.).

Es evidente, que del mismo modo dividiendo el ángulo de 45° en dos partes iguales, se obtendrá el de 22° 30′, el de su complemento 67° 30′, y los de 112° 30′ y 157° 30′ suplementos de estos últimos. Asimismo, dividiendo en dos partes iguales el ángulo de 22° 30′ se obtendrá el de 11° 15′, y el de su complemento 78° 45′, &c.

Para formar sobre el terreno un ángulo de 60°,
Fig. 75. póngase un piquete en el punto A (fig. 75.), y otro en el punto B: tómese un cordel que tenga dos veces el largo de la recta A B, señálese su punto medio, y fíxense sus extremos en los piquetes: hecho esto, llévese el punto medio del cordel hácia C, hasta quedar igualmente tirante los dos lados, y clávese en C un piquete: los ángulos C A B, A C B y C B A seran de 60°, puesto que el triángulo A C B es equilátero por construccion: luego tambien será equiángulo (art. 125, corol. 1.).

Teniendo el ángulo de 60°, se tendrá tambien el de 30°, el de 15°; y de consiguiente los de 75°, 120°, 150° y 165°, por complementares y suplementares de los anteriores.

Fig. 74. Tambien se puede dividir el quadrante A E D (fig. 74) en tres partes, cada una de 30°, trasladando la distancia A C del radio desde A al punto F, y desde el punto D al punto G; con lo que quedarán los arcos A G, G F y F D cada uno de 30.° En efecto, los

arcos A F y D G son de 60°, puesto que estan subtendidos por cuerdas iguales al radio: de aquí se sigue que A G = 30° por complemento de D G, y D F = 30° por complemento del arco A F; y supuesto que A G y D F suman juntos 60°, quedará F G tambien de 30° por ser el resto del quadrante.

Resta solo que decir, que si el valor del ángulo que se hubiese de trazar no fuese del número de grados y minutos de los que acabamos de tratar, el expediente mas breve será, elegir de estos el que mas se aproxime al propuesto, y de trazado determinar á golpe de ojo la parte en que sea preciso aumentar ó disminuir su abertura, para obtener la del ángulo que se pide. Por exemplo, si se quiere trazar un ángulo de 64°, se trazará el de 60° segun las reglas dadas, y á golpe de ojo se aumentará su abertura de 4°; lo que ayudado de una mediana práctica, no debe producir error en esta clase de operaciones.

143. Finalmente hemos visto (art. 66, escol.) el modo de trazar sobre el terreno un ángulo igual al otro, por lo que se excusa repetirlo aquí.

DECIMAQUINTA LECCION.

DE LAS LÍNEAS PROPORCIONALES, Y DE LA SIMILITUD DE LOS TRIÁNGULOS.

144. Así como hemos comparado los números de la Aritmética, así tambien se comparan las extensiones de la misma especie. Del mismo modo que un número es doble ó triple de otro, así una línea puede ser doble ó triple de otra, una superficie doble ó triple de otra,

una solidez doble ó triple de otra. La teoría de las proporciones que hemos establecido en la Aritmética, se aplicarán á la Geometría, imaginando que en lugar de los números se trata de líneas, de superficies, ó de sólidos; ó antes bien suponiendo que los números comparados, expresan los números de las partes de la extension lineal, superficial y sólida.

Los dos términos que forman una razon, son siempre de la misma especie; pero no es necesario que en una proporcion las dos razones sean de la misma especie. Así, una línea puede estar en la misma razon comparada con otra línea, como una superficie comparada con otra superficie, ó como un sólido con otro sólido; pero no puede decirse que una línea es á una línea, como una línea es á una superficie, ó como una superficie es á un sólido.

145. Teorema. *Si se tienen dos líneas A V y A Z* Fig. 76. (*fig. 76.*) *que formen entre ellas un ángulo qualesquiera V A Z, y que se tomen sobre la primera un número qualquiera de partes iguales A B, B C, C D y D E, y se tiran baxo qualquiera direccion las paralelas B F, C G, D H, E I que encuentren á la segunda en los puntos F, G, H é I; digo que las partes A F, F G, G H y H I del lado A Z, son tambien iguales entre sí.*

Demostracion. De los puntos F, G, H &c. tírense las rectas F K, G L, H M, &c. paralelas á la A V: los triángulos A B F, F K G, G L H, H M I &c., seran totalmente iguales; porque 1.° las líneas F K, G L, H M &c. son todas iguales á la A B, puesto que son iguales á las A B, B C, C D, D E &c. (art. 136.): 2.° los ángulos F K G, G L H, H M I &c. son iguales al ángulo A B F (art. 89.): 3.° los ángulos K F G, L G H, M H I &c., son iguales entre sí, puesto que todos ellos son iguales al ángulo B A F (art. 89.): luego los triángulos de que se trata tienen iguales, un lado y los dos ángulos adyacentes, de consiguiente seran to-

talmente iguales (art. 129.): luego los lados A F, F G, G H, H I &c. de dichos triángulos son iguales entre sí: resulta pues, que la recta A Z queda tambien dividida en partes iguales por las paralelas B F, C G &c.; que es lo que se pretendia demostrar. De lo dicho se sigue:

Corolario I. Que la parte A B es respecto de la A F, lo que B C es respecto de F G, lo que C D respecto de G H &c.: es decir, que A B : A F :: B C : F G :: C D : G H :: D E : H I :: &c.; de consiguiente será (Arit. art. 117.) A E suma de los antecedentes de dichas razones es á A I suma de los conseqüentes, como un antecedente A B es á su conseqüente A F, ó como dos antecedentes A C á dos conseqüentes A G, ó como un número qualquiera de antecedentes B E es á igual número de conseqüentes F I: luego A R : A S :: A B : A F :: A C : A G :: C R : G S :: &c.; de modo que si A R es los dos tercios de A S, tambien A B será los dos tercios de A F, A C de A G, C R de G S &c.

Corolario II. De lo dicho (corol. 1.) se infiere, que
Fig. 77. si de un punto D (fig. 77.) tomado arbitrariamente sobre uno de los lados A B de un triángulo A B C, se tira una línea D E paralela al lado B C, los dos lados A B y A C se hallarán cortados proporcionalmente: esto es, que se tendrá siempre A D : D B :: A E : E C, y A D : A B :: A E : A C. Tambien se podrá decir A C : A E :: C B : E D. Para convencerse de que esta última proporcion es cierta, por el punto E tírese la recta E F paralela al lado A B, y se podrá decir (art. 145.) A C : A E :: C B : F B, pero F B=E D (art. 136.): luego A C : A E :: C B : E D, que es lo que se pretendia probar.

Corolario III. Al contrario, si las líneas A B y A C
Fig. 77. (fig. 77.) se cortan proporcionalmente en los puntos D y E, esto es, de modo que A B : A D :: A C : A E; digo que la recta D E será paralela á la B C.

En efecto, la parte de la línea A C que cortaria la paralela llevada desde el punto D, debe estar contenida en A C, tanto como A D lo está en A B (corol. 11.): pero aquí tenemos supuesto que A E está contenida en A C este mismo número de veces: de consiguiente esta parte no puede ser otra que la A E: luego la D E será paralela á la B C.

De la similitud de los triángulos.

146. De las líneas ó de los lados de dos triángulos, ó en general de dos figuras semejantes, se llaman *homólogos*, los que estan dispuestos del mismo modo en ambas figuras.

En los triángulos, y en general en todas las figuras que constan de un número de lados impar, seran homólogos los lados opuestos á los ángulos iguales.

147. Para que dos figuras sean semejantes, es preciso: 1.° que sus puntas tengan la misma agudeza, esto es, que sus ángulos han de ser iguales: 2.° que consten de igual número de lados: 3.° que los lados dispuestos del mismo modo sean proporcionales.

Sean por exemplo los dos triángulos semejantes A B C y A D E (fig. 78.). Para que lo sean, el ángulo en A del uno debe ser igual al ángulo en A del otro, el ángulo en B igual al ángulo en D, y el ángulo en C igual al ángulo en E: es necesario ademas, que si A B es los dos tercios de A C, sea tambien A D los dos tercios de A E, y si B C es la mitad de A C, es preciso que D E sea la mitad de A E; esto es, que se tenga A B : A C :: A D : A E, y B C : A C :: D E : A E.

Fig. 78.

Escolio. Es facil convencerse de que dos figuras no pueden ser semejantes, si no concurren estas dos circunstancias: En primer lugar, si contemplando dos figuras, se notase desigualdad en las agudezas de una

de estas, comparadas con las de la otra: es consiguiente inferir, que dichas figuras no son semejantes, puesto que es diversa la direccion de su contorno ó perímetro: En segundo lugar, si se advirtiese que un lado de una figura es doble de otro de la misma, y pasando á la comparacion de los dos lados correspondientes á estos en la segunda, se notase que el uno de ellos es triple del otro: desde luego se diria, que el conjunto de las dos líneas de la segunda figura, no se parece al conjunto de las dos líneas correspondientes de la primera: es decir, que se notaria en dichas figuras una diferencia independiente de su tamaño absoluto; y de consiguiente desaparecerá la semejanza, puesto que los lados correspondientes no guardan entre sí la misma proporcion.

148. Dos triángulos son semejantes en los casos siguientes.

1.° *Si los tres ángulos del uno son iguales á los tres ángulos del otro.*

2.° *Si tienen dos ángulos del uno iguales á dos del otro.*

3.° *Si los tres lados del uno son paralelos á los tres lados del otro.*

4.° *Si los tres lados del uno son perpendiculares á los tres lados del otro, cada uno á cada uno.*

5.° *Si tienen dos lados del uno proporcionales á dos lados del otro, é iguales los ángulos formados por dichos lados.*

6.° *Si tienen los tres lados del uno proporcionales á los tres lados del otro.*

De aquí resultan los tres teoremas y corolarios, que á continuacion expresaremos.

149. Se dice que dos triángulos son *equiángulos*, quando los tres ángulos del uno son iguales á los del otro.

150. Teorema. *Dos triángulos son semejantes, si tienen los tres ángulos del uno iguales á los tres ángulos del otro.*

Demostracion. Si dos triángulos A D E y A B C (fig. 78.) son tales, que el ángulo A del primero sea igual al ángulo A del segundo, el ángulo D igual al ángulo B, y el ángulo E igual al ángulo C; digo que se tendrá A D : A B :: A E : A C :: D E : B C. En efecto, si el ángulo A del primero es igual al ángulo A del segundo, se podrán aplicar estos dos triángulos el uno sobre el otro, del modo que está representado en la figura 77. En este caso, puesto que el ángulo en D es igual al ángulo B, las rectas D E y B C serán paralelas (art. 88, corol.): luego, segun lo dicho (art 145, corol. II.), se tendrá A D : A B :: A E : A C :: B C : D E; por consiguiente podremos decir, que quando dos triángulos tienen los tres ángulos del uno iguales á los tres ángulos del otro, los tres lados del uno deben forzosamente ser proporcionales á los tres lados del otro: luego dichos dos triángulos serán semejantes (art. 147.).

Fig. 78.

Corolario I. *Dos triángulos son semejantes, quando los dos ángulos del uno son iguales á dos ángulos del otro.* En efecto, si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, sus terceros ángulos serán tambien iguales (art. 124, corol. VII.): de consiguiente la propuesta entra en el caso del teorema anterior.

Corolario II. *Dos triángulos que tienen sus lados paralelos, son semejantes.* En efecto, si los tres lados de un triángulo son paralelos á los tres lados del otro, los ángulos de dichos triángulos serán iguales (art. 89.): de consiguiente, esta propuesta entra en el caso del teorema anterior.

Corolario III. *Si los tres lados de un triángulo son perpendiculares á los tres lados del otro, cada uno á cada uno, dichos triángulos serán semejantes.* Supuesto que si se le hace dar un quarto de revolucion, ó describir un

quadrante al uno de estos dos triángulos, sus lados quedarán paralelos á los del segundo: luego serán semejantes (corol. II.).

151. Teorema. *Dos triángulos son semejantes, si tienen dos lados del uno proporcionales á dos del otro é iguales los ángulos formados por dichos lados.*

Demostracion. Si los dos triángulos A D E y A B C (fig. 78.) son tales que el ángulo en A del primero sea igual al ángulo en A del segundo, y que al mismo tiempo los lados que comprehenden á estos ángulos sean tales, que se tenga A D : A B :: A E : A C; digo que estos dos triángulos serán semejantes, esto es, que los tres ángulos del uno serán iguales á los tres ángulos del otro, y que sus terceros lados D E y B C estarán en la misma razon que A D y A B, ó que A E y A C.

Fig. 78.

Porque en efecto, se puede aplicar el ángulo A del triángulo A D E sobre el ángulo en A del triángulo A B C, del modo representado por la figura 77; pero puesto que se supone que A D : A B :: A E : A C, las dos rectas A B y A C estan cortadas proporcionalmente en los puntos D y E: luego la D E es paralela á la B C (art. 145, corol. III.), de consiguiente (art. 84.) el ángulo A B C será igual al ángulo A D E, y el ángulo A C B igual al ángulo A E D: luego los tres ángulos de uno de estos triángulos son iguales á los tres ángulos del otro, de consiguiente dichos triángulos serán semejantes (art. 150.).

152. Teorema. *Dos triángulos serán semejantes, si los lados homólogos del uno son proporcionales á los del otro.*

Fig. 78.

Si los dos triángulos A D E y A B C (fig. 78.) son tales, que se tenga A D : A B :: A E : A C :: D E : B C; digo que dichos dos triángulos serán semejantes.

Demostracion. Para convencerse de ello, en el triángulo

A D E se prolongará el lado A D hasta M, haciendo A M = A B, y el lado A E hasta N haciendo A N = A C, y tírese la recta M N. De consiguiente en la proporcion anterior A D : A B :: A E : A C, substituyendo en lugar de los conseqüentes A B y A C sus iguales A M y A N: tendremos A D : A M :: A E : A N: luego los dos triángulos A D E y A M N seran semejantes (art. 151.), y de serlo podremos decir A D : A M :: D E : M N. Pero por la propuesta tenemos A D : A B ó A M :: D E : B C; y como los tres primeros términos de estas dos últimas proporciones son iguales, los quartos M N deberán serlo tambien: luego los dos triángulos A B C y A M N son totalmente iguales (art. 131). Pero tenemos demostrado, que el triángulo A D E es semejante al triángulo A M N, luego lo será tambien al triángulo A B C, que es lo que se pretendia demostrar.

153. Generalmente en toda figura, se llama *base* al lado sobre el qual se considera formada. En los triángulos se llama *altura* á la perpendicular á la base, ó á su prolongacion baxada desde el vértice del ángulo opuesto á la base.

Fig. 79. En el triángulo A B C (fig 79.), si se supone que la recta B C sea la base, la perpendicular A M baxada del vértice del ángulo A, será la altura.

154. Teorema. *Si dos triángulos son semejantes, la base y altura del uno seran proporcionales á la base y altura del otro.*

Fig. 79. Si los dos triángulos A B C y D E F (fig. 79.) son semejantes, digo que se podrá decir: B C base del primero es á E F base del segundo, como A M altura del primero es á D N altura del segundo.

Demostracion. Por la semejanza de los dos triángulos A B C y D E F, se podrá decir A B : D E :: B C : E F. Los triángulos A B M y D E N son semejantes,

puesto que por la propuesta el ángulo en B es igual al ángulo en E; ademas los ángulos A M B y D N E son rectos (art. 153.), de consiguiente dichos dos triángulos seran semejantes (art. 150, corol. 1.): luego podremos decir A B : D E :: A M : D N. Pero la primera razon de esta proporcion, es la misma que la primera razon de la proporcion anterior; de consiguiente las segundas razones seran iguales: luego podremos decir B C : E F :: A M : D N, que es lo que se pretendia demostrar.

155. Teorema. *En todo triángulo rectángulo, el quadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los quadros de los dos catetos.*

Fig. 80. *Demostracion.* Sea A B C (fig. 80.) el triángulo rectángulo en B. Báxese la perpendicular B D desde el ángulo recto sobre la hipotenusa, con lo que quedará dividido el triángulo A B C en otros dos A D B y C D B, que llamaremos triángulos parciales de la izquierda y de la derecha: el de la izquierda tiene el ángulo A D B igual al A B C del total, por ser rectos dichos ángulos, y el ángulo en A es comun á los dos triángulos: de consiguiente estos dos triangulos seran semejantes (art. 150, corol. 1.): el triángulo de la derecha es tambien semejante al total, por tener el ángulo en C comun, y los C D B y C B A iguales por rectos: de aqui resulta, que los triángulos A B C, A D B y C D B son semejantes entre sí, y por lo tanto tendran sus lados homólogos proporcionales (art. 150.): de consiguiente, será A B (hipotenusa del triángulo de la izquierda) es á A C (hipotenusa del total), como A D (cateto mayor del triángulo de la izquierda) es á A B (cateto mayor del total); esto es, A B : A C :: A D : A B.

Es así que en toda proporcion geométrica son iguales los productos de medios y extremos (Aritm. art. 110.): luego A B x A B, ó lo que es lo mismo $AB^2 = AC \times AD$.

De la semejanza del triángulo de la derecha con el total, se deduce la proporcion siguiente: B C (hipotenusa del triángulo de la derecha) es á A C (hipotenusa del total), como D C (cateto menor del triángulo de la derecha) es á B C (cateto menor del total); esto es, B C : A C :: D C : B C; de consiguiente, B C x B C, ó lo que es lo mismo $BC^2 = AC \times DC$.

Si se suman las cantidades de uno y otro lado en estos dos últimos resultados, cuya operacion se reduce á sumar cantidades iguales con iguales, se tendrá $AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times DC = AC \times (AD + DC)$: pero AD + DC = AC; luego podremos decir $AB^2 + BC^2 = AC \times AC = AC^2$: esto es, que el quadrado de la hipotenusa A C del triángulo A B C, es igual á la suma de los quadrados de sus dos catetos A B y B C, que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario I. Si conociendo los valores de los dos catetos, se quiere hallar el de la hipotenusa, no habrá que hacer mas que quadrar los valores de los catetos (expresados en las mismas unidades), sumar dichos quadrados, y extraer la raiz quadrada de dicha suma.

Por exemplo, si un cateto es = 3, y el otro = 4, será la suma de los quadrados 9 + 16 = 25, cuya raiz quadrada 5 será la hipotenusa. Si la suma de los quadrados de los dos catetos no tiene raiz exâcta (que es lo que sucede las mas de las veces), se puede hallar la raiz aproximada por el método enseñado (Aritm. art. 140).

Problema 37. Se proyecta asaltar una plaza, cuya muralla tiene sobre el nivel de la campiña ocho varas de alto, siendo inaccesible por el pie á causa de un foso, que impide acercarse á él á menos de seis varas de distancia: se pregunta ¿qué largo deberán tener las escalas destinadas al asalto?

Es evidente, que baxo el supuesto de ser la muralla perpendicular á la anchura del foso, que la qüestion se reduce, á hallar la hipotenusa de un triángulo, cuyos

catetos son, el uno de ocho varas y el otro de seis: tendremos pues $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$, que será el quadrado de la hipotenusa: luego la hipotenusa, ó el largo de las escalas deberá ser de diez varas.

Corolario II. Si conociendo los valores de la hipotenusa y de uno de los catetos, se quiere hallar el valor del otro, se quadrarán separadamente los valores de la hipotenusa y del cateto conocido, se hallará la diferencia de dichos quadrados, y la raiz quadrada del residuo será el valor del cateto que se trata de determinar.

Por exemplo, si la hipotenusa es de diez varas, y el cateto de seis, tendremos $10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$, que será el quadrado del valor del otro, cuya raiz quadrada 8 será el valor del otro cateto. Si el residuo no tubiese raiz quadrada exâcta, se hallará con quanta aproximacion sea necesaria por el método enseñado (Aritm. art. 140.).

Corolario III. Luego quando se conocen dos lados de un triángulo rectángulo, se puede siempre calcular el tercero.

Corolario IV. Todos los triángulos rectángulos que tengan iguales las hipotenusas y uno de los catetos, tendrán el otro cateto igual, y por lo tanto serán totalmente iguales (art. 131.).

156. Las propiedades de los triángulos que acabamos de exponer son muy interesantes, pues que son la base de todas las partes de las Matemáticas teóricas y prácticas, y por lo tanto conviene tenerlas muy presentes. En las lecciones siguientes detallaremos varios problemas de la mayor importancia en la práctica, y que se fundan sobre las expresadas propiedades.

Solo nos resta que advertir, que la demostracion de las segundas soluciones de los problemas 28 y 29 (art. 132 y 133.) se fundan, la primera en lo establecido

artículo 151, y la del segundo en lo expresado artículo 120 corolario 1: supuesto que hicimos pender la resolucion del primero en la construccion de un triángulo representativo que consta de un ángulo igual, y dos lados proporcionales á los del triángulo del terreno; y la resolucion del segundo en la construccion de un triángulo que consta de un lado proporcional y equiángulo al triángulo del terreno.

DECIMASEXTA LECCION.

APLICACION DE LA LECCION ANTERIOR Á LA PRÁCTICA.

Fig. 81. 157. *Problema* 38. Determinar la distancia A B (fig. 81.) del punto B, en el que se quiere abrir la *trinchera* (p), sobre la línea *capital* (q) de un *revellin* (r), al *ángulo saliente* (s) A del *camino cubierto* (t).

Tírese la línea B C perpendicular á la A B: sobre esta línea llévese un cierto número de partes iguales, que sean por exemplo cada una de 60 varas: en uno de los puntos de division E, clávese un piquete, de modo que E C sea una parte aliquota de B E, como la mitad, tercio ó quarta parte: por el punto C, levántese perpendicular á la B C, la recta C D: sobre esta línea tómese un punto F que esté en la direccion del piquete E y del ángulo saliente A, mídase la C F y se tendrá la A B haciendo la proporcion siguiente C E : E B :: C F : B A, en la qual se conocen los tres términos primeros, será pues facil hallar el quarto (Aritm. art. 112.).

Demostracion. Los dos triángulos A B E y C E F son

semejantes, puesto que el primero es rectángulo en B y el segundo en C: ademas, el ángulo A E B es igual al ángulo C E F por opuestos por el vértice (art. 65): luego seran semejantes (art. 140, corol. 1.): luego sus lados seran proporcionales. De consiguiente, si B E es duplo, triplo, quadruplo de C E, A B será duplo, triplo, quadruplo de C F, que es lo que se pretendia demostrar.

Escolio. Es claro que este problema se reduce á medir una línea accesible solo por uno de sus extremos; de consiguiente el problema 29 (art. 133.) puede tambien resolverse de este modo, y para ello se requiere menor espacio de terreno para la execucion de la operacion. Es igualmente evidente, que empleando este último proceder, se podrá siempre estimar con suficiente aproximacion lo que se dista de una batería, fuerte ó columna enemiga; y sabida esta distancia y el *alcance* (u) del fusil y demas piezas de artillería, se vendrá en conocimiento de si se está situado dentro ó fuera de dicho alcance: asimismo se podrá calcular la distancia á que se debe situar para ofender eficazmente al enemigo.

158. Problema 39. *Medir una línea del todo inaccesible.*

Fig. 82. Sea A B (fig. 82.) una línea que se quiere medir al otro lado de un rio, ó de qualquiera otro obstáculo.

Clávese un piquete en qualquier punto C, y sobre la direccion B C otro en D, así como sobre la direccion A C otro en E: divídase la C D y C E por mitad en los puntos F y K, y en cada uno de ellos clávese un piquete: sobre la direccion A D clávese un piquete en L, y sobre la direccion B E otro en M: divídase por mitad C L en N, y C M en O.

Hecho esto, tírese la recta F N P hasta encontrar á la recta A E en el punto P: asimismo tírese la recta K O R hasta encontrar á la B D en el punto R: mídase la distancia P R que será la mitad de A B, y por consiguiente su duplo será toda la A B.

Demostracion. Porque por construccion C N es mitad de C L, y C F mitad de C D, concluiremos con evidencia, que la recta N F y L D son paralelas (art. 145 corol. III.): luego sus prolongaciones N P y L A lo seran tambien: de consiguiente los triángulos C N P y C L A son semejantes (art. 145, corol. III.); y de la semejanza de estos dos triángulos resulta, que así como el lado C N es mitad del lado C L, debe el lado C P ser mitad del lado C A. Del mismo modo se probará que C R es mitad de C B: luego segun lo dicho, el triángulo C P R es semejante al triángulo C A B (art. 151.): luego, puesto que C P es mitad de C A, y C R mitad de C B, el lado P R deberá ser mitad del lado A B, que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario. De aquí se sigue el modo de tirar una recta paralela á otra del todo inaccesible.

No hay duda que la recta P R es paralela á la inaccesible A B, puesto que los dos triángulos C P R y C A B son semejantes.

159. Problema 40. *Medir una altura accesible por su base.*

Fig. 83. Sea A B (fig. 83.) la altura de una torre que se quiere medir, suponiendo que sea accesible por su base ó pie B.

Tómense dos piquetes, ó palos desiguales C D y E F: réstese el largo del menor del largo del mayor, y suponiendo que el uno sea de quatro pies y el otro de diez, la diferencia E G será de seis pies.

Hecho esto, en qualquier punto F clávese el palo E F bien á plomo sobre el terreno: seguidamente se clavará el palo C D tambien á plomo, y de modo que por los dos extremos C y E se vea el punto A.

Mídase la distancia D F que será igual á C G (art. 136.), y supóngase de cinco pies: mídase tambien la F B, que sumada con la D F dará la D B = C H, que supondremos de quarenta y cinco pies.

Hallados estos datos, entáblese la siguiente proporcion C G ó 5 pies : E G ó 6 pies :: C H ó 45 pies : A H que hallaremos de 54 pies (Aritm. art. 112.): resta solo para obtener la altura A B, agregar á la A H la H B = C D altura del palo menor, que hemos supuesto de 4 pies: luego la altura de la torre será de 58 pies.

Demostracion. La proporcion anterior se funda en la semejanza de los dos triángulos C G E y C H A, que son semejantes por tener el ángulo en C comun, y ser rectángulos el primero en G y el segundo en H (art. 150, corol. 1.): luego sus lados homólogos seran proporcionales.

Otra solucion.

Si la altura A B de la torre está situada en un terreno bien llano, se puede medir por medio de la sombra.

Para esto se planta un palo C D bien á plomo sobre el terreno, y supuesto que sea de 4 pies, mídase con prontitud su sombra y la de la torre, y sea la primera de 2 pies y la otra de 27: con estos datos, se planteará la siguiente regla de tres. La sombra del palo 2 pies : su altura 4 pies :: la sombra de la torre 27 pies : su altura A B = 54 pies.

Demostracion. Esto se funda en la semejanza de los triángulos formados por la altura y sombra de la torre, altura y sombra del palo, y los rayos de luz que pasan por el vértice de la altura de la torre y extremo de su sombra, vértice del palo y extremo de su sombra, cuyos rayos de luz hieren á los objetos en direcciones paralelas: luego los ángulos que forman con los vértices de las alturas de la torre y del palo seran iguales (art. 89.): ademas dichos triángulos son rectángulos, de consiguiente seran equiángulos, y por lo tanto semejantes (art. 150, corol. 1.): luego sus lados homólogos seran proporcionales, que es lo que se pretendia demostrar.

160. Problema 41. *Medir una altura del todo inaccesible.*

Si la altura que se ha de medir no es accesible
Fig. 84. por su pie, como en la del monte y torre A B (fig. 84), el problema se resolverá de esta suerte.

Clávese el piquete mayor, que supondremos de 10 pies, en el punto E; y el menor, que supondremos de 4 pies, en el punto D, de modo que por los extremos N y M se vea el punto A, y mídase la distancia D E de piquete á piquete, y sea ésta de 2 pies.

Vuélvase á clavar el piquete mayor en G y el menor en F, de modo que por sus extremos P y M se vea el punto A: mídase la distancia F G de uno á otro piquete, y sea esta de 14 pies: mídase tambien la F D, que supondremos de 240 pies.

Réstese D E de F G, ó de su igual P R, y se tendrá la diferencia P H de 12 pies.

Con estos datos entáblese la proporcion siguiente. P H de 12 pies : M R de 6 pies (por diferencia de altura de los dos piquetes) :: F D ó P N de 240 pies : x = 120 pies valor de A Z; y añadiéndole Z B = P F de 4 pies, será toda la altura A B de 124 pies.

Demostracion. Para demostrar que P H : M R :: P N : A Z, adviértase que los dos triángulos M S N y M R H son rectángulos en R y en S, y que M S = M R, y tambien por construccion N S = R H; de consiguiente dichos dos triángulos son totalmente iguales (art. 128): luego el ángulo M N S es igual al ángulo M H R, y de serlo resulta que el lado H M es paralelo al lado N M (art. 89.). De lo que se infiere, que los dos triángulos M P H y A P N son semejantes, puesto que tienen un ángulo comun y paralelos los lados opuestos á dichos ángulos (art. 145 corol. II., y art. 151.): luego (art. 154.) podremos decir P H base del triángulo pequeño : su altura M R :: P N base del triángulo mayor : su altura A Z, que es lo que se pretendia demostrar.

Escolio. Este problema sirve para hallar la altura de qualesquiera montaña, las quales es claro, son inaccesibles por el extremo inferior de su altura.

161. Problema 42. *Dado un ángulo sobre el papel, hacer otro sobre el terreno.*

Fig. 85. Sea a b c (fig. 85.) un ángulo trazado sobre el papel, y M N una recta trazada sobre el terreno, sobre la qual, y tomando el punto E por vértice, se quiere formar un ángulo igual al propuesto, con la abertura hácia N y en la parte superior de la línea.

Para ello, de una línea dividida en partes tómense qualesquiera, por exemplo diez, y con este intervalo, desde el vértice b descríbase el arco h f, y supuesto que la cuerda f h transportada sobre la escala se haya hallado de quatro partes, se tomará sobre el terreno la distancia E F de diez varas; y puesto un piquete en E y otro en F, fíxese en E un cordel de diez varas de largo, y otro en F de quatro varas, y en el punto H en que se unen sus extremos clávese otro piquete; con lo que quedará el ángulo H E F igual al ángulo f b h ó a b c.

Demostracion. Los triángulos b h f y E F H son semejantes por tener sus lados proporcionales, puesto que los lados del segundo constan del mismo número de varas, que los lados correspondientes del primero constan de partes de escala: de consiguiente los ángulos del uno seran iguales á los ángulos del otro (art. 152.): luego el ángulo H E F será igual al ángulo a b c, que es lo que se pretendia demostrar.

De lo dicho se infiere facilmente, el que si se carece de vara ó toesa para la execucion de la operacion anterior, se puede tomar sobre el terreno una distancia qualquiera que sirva de unidad, para arreglar por ella el largo de los dos cordeles.

Escolio. Esta operacion es muy importante en la práctica, pues facilmente se viene en conocimiento que por medio de ella, y saber trazar una línea recta sobre el terreno, se podrá trasladar del papel al terreno el trazado de qualquiera obra que conste de ángulos y líneas rectas.

162. Problema 43. *Hallar á que distancia concurrirán dos rectas inclinadas si se prolongan.*

Fig. 86. Sean A B y C D (fig. 86.) las dos rectas. Por los dos extremos de la A B tírense dos paralelas A C y B D, que corten de qualquiera suerte á la C D: mídanse las rectas A C, A B y B D. Con estos datos hágase la proporcion siguiente A C − B D : B D :: A B : B E, que dará por quarto término la distancia que se pide.

Demostracion. Los triángulos A C E y B D E son semejantes, puesto que el ángulo en E es comun á los dos, y que las rectas A C y B D son paralelas (art. 145, corol. 11.): luego podremos decir A C : B D :: A E : B E; y comparando dividiendo (Aritm. art. 116, núm. 5.°) tendremos A C − B D : B D :: A E − B E : B E; pero A E − B E = A B: luego A C − B D : B D :: A B : B E, que es lo que se pretendia demostrar.

Escolio. Este problema tiene una aplicacion muy útil para hallar á que distancia se encuentra la *línea de mira* y la *del tiro*, de que se hablará quando se trate de los fuegos.

163. Problema 44. *Sobre el vértice de un ángulo levantar una recta, que no incline mas hácia un lado que á otro.*

Fig. 87. Sea A (fig. 87.) el ángulo de que se trata. Señálense dos puntos B y C sobre los lados de dicho

ángulo equidistantes del punto A, y desde ellos fórmese la interseccion D, y desde ella al vértice del ángulo tírese la recta A D, que satisface la propuesta.

Demostracion. Los triángulos A D C y A B D son totalmente iguales, porque por construccion los tres lados del uno son iguales á los tres lados del otro (art. 131.): luego el ángulo D A B es igual al ángulo D A C, de consiguiente la recta D A se inclina igualmente hácia los dos lados del ángulo.

Escolio. Si el ángulo B A C representa el ángulo saliente de una obra de fortificacion, la recta D A manifestará exâctamente la prolongacion de su línea capital si la fortificacion es regular, ó aproximadamente si dicha obra fuese irregular.

164. Problema 45. *Medir el ángulo saliente de una obra de fortificacion inaccesible.*

Fig. 88. Sea B A C (fig. 88.) dicho ángulo. Plántese un piquete D sobre la direccion A C, y otro E sobre la direccion A B: mídanse los ángulos A D E y A E D por alguno de los métodos enseñados (art. 69.): súmense sus valores, y réstese esta suma de 180°, y el residuo será el valor del ángulo D A E (art. 124, corol. v.), ó el de su igual B A C (art. 65.).

165. En el artículo 115 prometimos enseñar un método facil y breve de levantar una perpendicular sobre el terreno, que vamos á expresar á continuacion, y se funda en el teorema enunciado (art. 155.).

La práctica de esta operacion consiste en elegir tres números tales, que la suma de los quadrados de los dos sea igual al quadrado del tercero. Por exemplo 3, 4 y 5, en los quales se verifica que el quadrado de 3 que es 9, mas el quadrado de 4 que es 16, hacen 25, que es el quadrado de 5: en seguida se tomará

un cordel de 3 pies, toesas, ó qualquiera otra dimension arbitraria, y otro de 9: sobre este último márquese con un nudo un pedazo de quatro de estas partes, y el restante quedará de cinco.

Hecho esto, *si se pide levantar una perpendicular sobre el extremo A* (*fig.* 89.) *de la recta A B*, se trasladará de A para B el cordel de las tres partes, y se clavará un piquete en A y otro en C. Fig. 89.

En el piquete A se fixará el extremo del cordel de 4 partes, y en C el que corresponde al de 5 partes: llévese el nudo hácia D de modo que el cordel quede bien tirante por un lado y otro, y se clavará un piquete en dicho punto, y la D A deberá caer perpendicularmente sobre la A B.

Demostracion. En el triángulo A D C se verifica que $D C^2 = A D^2 + A C^2$: luego será rectángulo en A (art. 155.), de consiguiente la D A caerá perpendicularmente sobre la A B.

Escolio. Resta solo que decir, que hay otros varios números que satisfacen igualmente á la propuesta: por exemplo 6, 8 y 10; 9, 12 y 15; y otros varios satisfacen á ella.

166. Acabamos de ver que la resolucion de los problemas contenidos en esta Leccion, se reduce á hallar algun lado ó ángulo de un triángulo, del qual se conocen algunos otros lados ó ángulos. Esta clase de operaciones pertenecen á la *Trigonometría*, cuya voz significa *medida de los triángulos.*

La Trigonometría se llama *rectilínea*, si los triángulos que se proponen medir son líneas rectas; y toma el nombre de *esférica* si los triángulos propuestos son arcos de círculo.

La Trigonometría rectilínea se divide en dos partes: la primera es la Trigonometría *práctica*, á la qual se refieren todos los problemas de esta Leccion, y los que

á continuacion se expresarán en esta primera Seccion: la segunda se llama Trigonometría *logarítmica*, de la que trataremos en la tercera Seccion de este Tratado.

DECIMASÉPTIMA LECCION.

DE LOS QUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS.

Fig. 90, 91, 92, 93, 94 y 95.

167. Despues del triángulo, la figura mas sencilla es el *quadrilátero*, ó figura de quatro lados (fig. 90, 91, 92, 93, 94 y 95.).

168. El quadrilátero se llama:

Fig. 90. 1.° *Trapezoyde*, quando no tiene lado alguno paralelo á otro (fig. 90.).

Fig. 91. 2.° *Trapecio*, quando solo tiene un lado paralelo á su opuesto (fig. 91.).

Fig. 92, 93 y 95. 3.° *Paralelógramo*, quando tiene cada uno de los lados paralelos á su opuesto (fig. 92, 93, 94 y 95.).

169. El paralelógramo se divide en

Fig. 92, 93. 1.° *Obliquángulo*, quando sus ángulos son obliquos (fig. 92, y 93.).

Fig. 94, 95. 2.° *Rectángulo*, quando sus ángulos son rectos (fig. 94, y 95.).

170. El paralelógramo obliquángulo se subdivide en

Fig. 92. 1.° *Romboydes*, quando los lados que forman un mismo ángulo son desiguales (fig. 92.).

Fig. 93. 2.° *Rombo*, quando los quatro lados son iguales. (fig. 93).

171. El rectángulo se subdivide en

Fig. 94. 1.° *Quadrilongo*, quando los lados que forman un mismo ángulo son desiguales (fig. 94.).

Fig. 95. 2.° *Quadrado*, quando los quatro lados son iguales (fig. 95). Por esta razon se puede decir, que el quadrado es una figura plana terminada por quatro lados iguales, y quatro ángulos rectos.

172. Hemos visto (art. 143.) lo que se entiende por base de una figura: resta solo decir, que en los paralelógramos se llama *altura* á la perpendicular comprehendida entre dos lados que se suelen llamar *bases*, y se distinguen con las denominaciones de *inferior* y *superior*.

Fig. 93. En el paralelógramo A B C D (fig. 93.), E F es la altura si A B se considera como base, y en este caso A B será la base inferior y D C la superior. Pero si se considera A D y B C como bases, M N será la altura.

En los trapecios se suele entender por *altura* la perpendicular comprehendida entre los dos lados paralelos, que se denominan *base mayor* y *base menor*.

Fig. 91. En el trapecio A B C D (fig. 91.), E F es la altura, A B la base mayor, y D C la base menor.

En los rectángulos, la altura es el lado adyacente á la base.

En los quadrados la base y altura son iguales.

173. En toda figura rectilínea, se llama *diagonal* la recta tirada de un ángulo á otro que no sea el inmediato.

Fig. 91. En el trapecio A B C D (fig. 91.), B D es una diagonal.

174. Á las figuras de mas de quatro lados se les da el nombre de *polígonos*; y en rigor pueden llamarse tambien polígonos el triángulo y quadrilátero.

El polígono de cinco lados se llama *pentágono*.
El de seis, *exágono*.
El de siete, *eptágono*.
El de ocho, *octágono*.
El de nueve, *eneágono*, ó *nonágono*.
El de diez, *decágono*.

No extenderemos á mas la lista de estos nombres, puesto que se puede distinguir un polígono expresando el número de sus lados.

175. Los polígonos se subdividen, en *regulares* quando tienen iguales todos sus lados y ángulos, é *irregulares* quando les falta alguna de estas circunstancias.

Ademas, se llaman *simétricos* los polígonos que tienen sus lados opuestos paralelos.

Fig. 96, y 97. El polígono A B C D E F (fig. 96.) es un polígono *regular*; y el polígono A B C D E FG (fig. 97.) es irregular.

176. Los ángulos de un polígono toman el nombre de *salientes*, quando su vértice está hácia fuera de la figura: la figura 96 tiene todos sus ángulos salientes.

El ángulo *entrante* es aquel cuyo vértice se dirige *Fig. 97.* hácia dentro de la figura: el ángulo F E D (fig. 97.) es un ángulo entrante.

Fig. 96. En los polígonos regulares (fig. 96.), se llaman *ángulos del centro* todos los que tienen su vértice en el centro G: los A G B y B G C &c. son ángulos del centro del polígono.

177. Se dice que un polígono está *inscripto* á un círculo, ó que el círculo está *circunscripto* al polígono, quando los vértices de todos los ángulos estan en la circunferencia.

Se dice que un polígono está *circunscripto* á un círculo, ó que el círculo está *inscripto* en el polígono, quando todos los lados son tangentes á la circunferencia.

Fig. 96. El exágono A B C D E F A (fig. 96.) está inscripto en el círculo; y el exágono M N O P Q R M está circunscripto á dicho círculo.

Fig. 96. 178. La recta G A (fig. 96.), tirada desde el centro al vértice de un ángulo del polígono regular, se llama *radio mayor*, y es el radio del círculo circunscripto.

Fig. 96. 179. La perpendicular G Z (fig. 96.), tirada desde el centro al lado del polígono regular, se llama *aporema*.

180. Teorema. *Todo polígono puede dividirse por medio de diagonales tiradas desde el vértice de uno de sus ángulos, en tantos triángulos, menos dos, quantos lados tenga dicho polígono.*

Fig. 97. La inspeccion de la figura 97 basta para conocer que la proposicion es generalmente cierta.

Corolario I. Luego es evidente, que para obtener la suma de todos los ángulos interiores de un polígono qualquiera, es menester multiplicar 180° por el número de lados, menos dos, que tenga el polígono.

Fig. 97. *Demostracion.* La inspeccion de la figura 97 basta para que se venga en conocimiento, de que la suma de los ángulos interiores del polígono A B C D E F G A, es la misma que la de los triángulos A B C, A C D, A D E, A E F y A F G; pero la suma de los tres ángulos de cada uno de estos triángulos es de 180° (art. 124.): luego será necesario multiplicar 180° por cinco número de triángulos, que es el de los lados del polígono menos dos; que es lo que se pretendia demostrar.

Fig. 97. *Escolio.* En la figura 97, el ángulo D E F, para ser comprehendido en el teorema anterior debe contarse, no por la parte D E F exterior del polígono, sino por la parte interior D E F compuesta de los ángulos A E D y A E F.

Corolario II. Es pues facil saber quanto vale cada ángulo interior de un polígono regular, puesto que acabamos de ver (corol. 1.) lo que valen juntos todos los ángulos interiores de un polígono; con cuyo dato solo restará dividir dicho resultado por el número de lados del polígono.

Por exemplo, se quiere saber quanto vale el ángulo

interior de un pentágono regular: como que esta figura consta de cinco lados, multiplicaré 180° por cinco menos dos, es decir por tres, lo que dará 540° por el valor de los cinco ángulos interiores; y puesto que todos ellos son iguales (art. 175.), cada uno de ellos valdrá la quinta parte de 540°, esto es 108°. Por un raciocinio semejante concluiremos, que el ángulo interior del exágono regular es de 120°: la del eptágono de $128° 34\frac{2}{7}'$: la del octágono de 135°: &c.

181. Teorema. *Todo polígono regular se puede inscribir en un círculo*: es decir, *que se puede hacer pasar una circunferencia por los vértices de los ángulos de un polígono regular.*

En efecto, si se dividen en dos partes iguales todos los ángulos A B C, B C D, C D E &c. (fig. 96.) de un polígono regular, con las líneas tiradas desde el vértice de cada uno de estos ángulos á lo interior del polígono, es evidente que todas estas líneas formarán con los lados del polígono, unos triángulos iguales entre sí é isósceles, y que por consiguiente todas deben ir á cortarse en un mismo punto G, que estará equidistante de los vértices A, B, C, D, E, F de cada uno de estos ángulos del polígono. Luego si del punto G, que es el centro de la figura, y con una de las líneas G A, G B, G C, G D, G E, G F tomada indiferentemente por radio, se describe una circunferencia, esta pasará infaliblemente por todos los vértices de los ángulos del polígono.

Fig. 96.

Demostracion. Para convencerse de que todos los triángulos de que acabamos de hacer mencion son iguales entre sí, bastará considerar que todos ellos comprehenden entre sus lados un lado del polígono regular: luego tienen un lado igual (art. 175.). Los ángulos adyacentes á estos lados son iguales cada uno á cada uno en diferentes triángulos, é iguales entre sí en el mismo triángulo; puesto que son respectivamente la mitad de

los ángulos del polígono, cuyos ángulos son iguales (art. 175.): luego todos los triángulos expresados son iguales entre sí é isosceles. Pero las líneas que dividen en dos partes iguales la una al ángulo en A y la otra al ángulo en B, van á cortarse en un punto qualquiera G: asimismo, la línea que divide en dos partes iguales al ángulo en C, forma con las líneas B G y B C un triángulo isósceles igual al triángulo G A B, y ademas dicha línea debe ser igual al lado B G comun á los dos triángulos: luego el punto G es tambien la interseccion de esta línea y del lado B G. Del mismo modo se demostrará, de contiguo en contiguo, que las líneas que dividen en dos partes iguales los demas ángulos del polígono, van tambien á encontrarse al mismo punto G. Pues que todos los triángulos isósceles G A B, G B C, G C D &c. son iguales, las líneas G A, G B, G C, G D &c. serán iguales. Pero todas estas líneas miden la distancia del punto G á cada uno de los vértices de los ángulos de un polígono: luego el punto G está equidistante de los vértices A, B, C, D &c.: luego se podrá hacer pasar por ellos una circunferencia (art. 35.), que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario. Luego para circunscribir un círculo á un polígono regular, la operacion se reducirá á hacer pasar una circunferencia por los vértices de tres de sus ángulos.

182. Teorema. *En un polígono regular, todas los apotemas son iguales.*

Demostracion. Para demostrar que las apotemas G Z y G V (fig. 96.) son iguales, basta considerar que estas líneas, cayendo perpendicularmente sobre los lados A B y B C del polígono, deben dividirlos por medio (art. 96, corol. 1.); de consiguiente, las líneas B Z y B V seran iguales; por esta razon y por ser el lado

Fig. 96.

G B comun á los dos triángulos G B Z y G B V, dichos triángulos tendran dos lados homólogos iguales; pero los triángulos A G B y B G C son iguales por tener los tres lados del uno iguales á los tres del otro (art. 131.): luego el ángulo G B A será igual al ángulo G B C: luego los dos triángulos G B Z y G B V seran totalmente iguales, por tener iguales dos lados y el ángulo comprehendido (art. 128.): luego G Z=G V, que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario. De lo dicho se infiere, que para inscribir un círculo á un polígono regular, la operacion se reduce á describir desde el centro G y con un radio igual á G Z ó G V una circunferencia, que tocará á los lados del polígono en los puntos Z, V &c.

183. Teorema. *El valor del ángulo del centro de un polígono regular es igual á 360° partidos por el número de sus lados.*

Demostracion. Es evidente, que si del centro del polígono regular se tiran líneas á todos los ángulos, estas líneas comprehenderán entre ellas ángulos iguales, puesto que estos ángulos tendrán por medida arcos subtendidos por cuerdas iguales: luego *para obtener el valor del ángulo del centro del polígono regular, es preciso partir 360° por el número de sus lados.* La razon es, que estos ángulos iguales tienen juntos por medida la circunferencia entera.

Por exemplo, en el exágono cada ángulo del centro será de 60°: en el eptágono de 51° $25\frac{5}{7}'$: en el octágono de 45°, &c.

Corolario. De lo dicho se deduce, que el lado del exágono regular es igual al radio.

Fig. 96. En efecto, acabamos de ver que el lado A B (fig. 96) del exágono regular subtende un arco de 60°; luego es igual al radio (art. 126.).

184. Teorema. *La diagonal divide á todo paralelógramo en dos triángulos totalmente iguales.*

Fig. 92. *Demostracion.* Sea A B C D (fig. 92.) el paralelógramo. Tirada la diagonal A C, resultarán los triángulos A B C y A C D, cuyos dos triángulos tienen el lado A C comun, el lado D C igual al lado A B por paralelos comprehendidos entre paralelas (art. 168 núm. 3, y art. 136); y por la misma razon los lados A D y B C seran iguales entre sí: luego los dos triángulos A B C y A C D seran totalmente iguales, que es lo que se pretendia demostrar.

Corolario I. Luego en todo paralelógramo, los lados opuestos seran iguales entre sí, y lo propio le sucede á los ángulos.

Corolario II. Todo quadrilátero que tiene los lados opuestos iguales, es paralelógramo.

Fig. 92. *Demostracion.* Sea A B C D (fig. 92.) el quadrilátero, en el que se supone que A B=C D y B C=A D. Por lo sentado (art. 136.), dicho quadrilátero tendrá paralelos los lados opuestos: luego dicho quadrilátero será paralelógramo (art. 168, núm. 3.).

Corolario III. Los rectángulos de igual base y altura son totalmente iguales, puesto que tienen todos sus lados y ángulos iguales.

DECIMAOCTAVA LECCION.

DE LAS FIGURAS SEMEJANTES.

185. Hemos visto (art. 147.) que para que dos figuras de un mismo número de lados A B C D E y a b c d e (fig. 98.) sean semejantes, se requiere que á mas de tener los ángulos A=a, B=b, C=c, D=d, E=e, tengan tambien proporcionales los lados homólogos, esto es, que A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: E A : e a.

Fig. 98.

Estas condiciones son indispensables en todas las figuras de mas de tres lados: solo en los triángulos basta para que sean semejantes que tengan los tres ángulos del uno iguales á los tres del otro (art. 150.), ó que los lados homólogos del uno sean proporcionales á los del otro (art. 152.).

186. Teorema. *Si desde los vértices de dos ángulos homólogos de dos polígonos semejantes, se tiran diagonales á los vértices de los demas ángulos, estas diagonales dividirán á los dos polígonos en un mismo número de triángulos semejantes.*

Fig. 98.

Sean A B C D E y a b c d e (fig. 98.) los dos polígonos semejantes, y considérese que desde el vértice de los ángulos homólogos A y a se hayan tirado las diagonales A C, A D &c., y las a c, a d &c.: es evidente que por ser semejantes estos polígonos constarán del mismo número de triángulos (art. 180): pasemos pues á demostrar la semejanza de estos triángulos.

Demostracion. Porque segun la propuesta el ángulo B es igual al ángulo b, y el lado A B : a b :: B C : b c, los dos triángulos A B C y a b c tendran un ángulo igual comprehendido entre dos lados proporcionales, y de consiguiente seran semejantes (art. 151.): luego el

ángulo B C A es igual al ángulo b c a, y A C : a c :: B C : b c. Si de los ángulos iguales B C D y b c d se quitan los ángulos iguales B C A y b c a, los ángulos que quedan A C D y a c d seran iguales; pero B C : b c :: C D : c d, y puesto que acabamos de demostrar que B C : b c :: A C : a c, se tendrá C D : c d :: A C : a c: luego los dos triángulos A C D y a c d son tambien semejantes, pues que tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados proporcionales.

Se probará del mismo modo la similitud de los dos triángulos A D E y a d e, y de qualquiera otros triángulos que se siguiesen, si estos polígonos tubiesen mayor número de lados.

187. Teorema. *Si los triángulos en que un polígono se divide con las diagonales son semejantes á los correspondientes en que se divide otro; estos dos polígonos seran semejantes.*

Fig. 98. Sean A B C D E y a b c d e (fig. 98.) los dos polígonos de que se trata.

Demostracion. Los ángulos B y E son iguales á los ángulos b y e, puesto que los triángulos son semejantes, y por esta misma razon los ángulos parciales B C A, A C D, C D A y A D E son iguales á los ángulos b c a, a c d, c d a y a d e: luego los ángulos totales B C D y C D E son iguales á los ángulos totales b c d y c d e, cada uno á su correspondiente. Ademas, la similitud de dichos triángulos da esta serie de razones iguales A B : a b :: B C : b c :: A C : a c :: C D : c d :: A D : a d :: D E : d e :: A E : a e; y tomando de esta serie mas que las razones que comprehenden los lados de los polígonos, se tendrá A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: A E : a e: luego estos dos polígonos, ademas de tener los ángulos iguales tendran los lados homólogos proporcionales, de consiguiente seran semejantes.

188. Teorema. *Los perímetros de las figuras semejantes, sean regulares ó no, estan entre sí en la misma razon que lo estan los lados, diagonales y demas líneas homólogas de dichas dos figuras.*

Es decir, que la suma de los lados de la figura A B C D E (fig. 98.) contienen á la suma de los lados de la figura a b c d e tantas veces, quantas el lado A B contiene al lado a b, ó quantas la diagonal A C contiene á la diagonal a c. *Fig. 98.*

Demostracion. En efecto, en el artículo anterior hemos visto, podíamos decir A B : a b :: B C : b c :: C D : c d :: D E : d e :: E A : e a. De lo que se deduce podremos decir AB+BC+CD+DE+EA, ó ABCDEA perímetro de una de las figuras y sumas de los antecedentes, es á a b+b c+c d+d e+e a, ó a b c d e a perímetro de la otra y suma de los conseqüentes, como un antecedente A B es á un conseqüente a b (Aritm. art. 117.), ó como qualquiera número de antecedentes A B+B C+C D ó A B C D es á igual número de conseqüentes a b+b c+c d ó a b c d; y como tenemos demostrado (art. 187.) que A B : a b :: A C : a c :: A D : a d, concluiremos tambien que los lados y perímetros son proporcionales á las diagonales, y en los polígonos regulares á los radios y apotemas &c. De modo que la figura cuyo perímetro sea duplo, triplo &c. del perímetro de otra, tendrá lados, diagonales, apotemas &c., duplo, triplo &c. de los de la otra.

189. Es evidente que todos los círculos son figuras semejantes, puesto que pueden considerarse como polígonos regulares de una infinidad de lados: de lo que se deduce (art. 188.) que los radios, diámetros, arcos de un mismo número de grados, y las cuerdas de los arcos de igual número de grados seran líneas homólogas: luego

Corolario I. Las circunferencias de dos círculos estan

entre sí como los radios, como los diámetros, como los arcos de un mismo número de grados, como las cuerdas de arcos de un mismo número de grados.

Corolario II. De lo dicho se deduce, que si dado el diámetro y circunferencia de un círculo, se da ademas el diámetro de otro, y se pidiese su circunferencia, diríamos: el diámetro del primero es á su circunferencia, como el diámetro del segundo es al quarto término de la proporcion, que será la circunferencia que se busca.

190. Hasta ahora no se ha podido averiguar la razon exâcta del diámetro á la circunferencia. La indagacion de esta razon, conocida baxo el nombre de la *quadratura del círculo*, se considera ya casi por imposible encontrar su solucion. Sin embargo, basta en la práctica saber, que el diámetro es á la circunferencia como 7 : 22; y aun es mas aproximada la razon que resulta suponiendo que el diámetro es la unidad, y que la circunferencia vale 3'141592653 6; pero en esta última razon bastará tomar las tres primeras cifras 3'14 para obtener los resultados con menos de un milésimo de error. Haciendo uso de las cinco primeras cifras, será la circunferencia 3'1416 con menos de tres millonésimos de error.

Advertencia. Conviene retener de memoria el número 3'1416, por el mucho uso que se hace de la relacion del diámetro con la circunferencia.

191. Problema 46. *Dado el valor del diámetro ó del radio de un círculo, hallar el de su circunferencia.*

Exemplo. Se quiere saber el valor de la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro es de 8 varas.

Resolucion. Entáblese la proporcion siguiente 1 : 3'1416

:: 8 varas : $x = \frac{3'1416 \times 8}{1} = 3'1416 \times 8 = 25'1328$ varas, que será la extension de la circunferencia.

Si en lugar de darse el diámetro se diese el radio, duplando su valor se tendrá el diámetro (art. 38, corol. 1.), y de consiguiente el problema se resolveria del mismo modo.

Demostracion. Esta se funda en lo establecido (art. 189, corol. 11.).

192. Problema 47. *Dado el valor de la circunferencia de un círculo, hallar el de su diámetro y el de su radio.*

Exemplo. Se quiere hallar el valor del diámetro de la circunferencia de 36 pies.

Resolucion. Para ello no se necesita mas que invertir el órden de la proporcion establecida en el problema anterior, diciendo $3'1416 : 1 :: 36$ pies : $x = \frac{36}{3'1416} =$ 11'46 pies, valor del diámetro.

El valor del radio se hallará tomando la mitad del valor del diámetro.

193. Problema 48. *Hacer una figura semejante á otra.*

Para construir una figura semejante á otra, como por exemplo la A B C D E (fig. 98.), y que tenga por lado homólogo á la A B una línea dada: se llevará esta línea dada sobre la A B desde A hasta m, y por el punto m se tirará la m n paralela al lado B C, y que encuentre á la A C en n: por el punto n se tirará la n p paralela á la C D, y que encuentre á la A D en p: en fin, por el punto p se tirará la p q paralela á la D E, y se tendrá el polígono A m n p q semejante al polígono A B C D E.

Fig. 98.

Demostracion. Porque los lados homólogos de estos dos polígonos son paralelos, los triángulos A B C, A C D y A D E seran semejantes á sus correspondientes A m n, A n p y A p q (art. 145 corol. II, y 152.): luego dichos polígonos seran tambien semejantes (art. 187.).

194. Para representar una figura grande por medio de otra pequeña semejante á ella, que se llama *plano*, se suele hacer uso de la escala. Hemos visto (art. 31) que la escala es una recta, cuya extension representa un cierto número de pies, varas, toesas, leguas &c. de la figura grande, segun la relacion que tiene el tamaño del plano con el tamaño de la figura que representa.

195. Es evidente, que si cada partecilla de la escala representa un pie, cada dimension del plano debe contener tantas partecillas de la escala, quantos pies efectivos tiene en la figura grande, la dimension homóloga.

196. Con el plano acompañado de la escala, no solo se puede formar una idea exâcta de la disposicion y proporciones de la figura representada, sino que tambien se concibe su tamaño natural. En efecto, viendo quantas partecillas de la escala contiene una abertura de compas igual á la dimension a del plano, se sabe de quantos pies consta la dimension A correspondiente de la figura grande.

197. La representacion ó plano se dice que es de *punto mayor*, quando las partecillas de la escala que representan los pies, varas &c. son grandes; y se dice que es de *punto menor* quando las partecillas son pequeñas.

198. Antes de entrar en el por menor del modo de levantar un plano, es necesario detallar el de construir la escala.

Problema 49. *Construir la escala de un plano.*

Daremos dos soluciones de este problema, advirtiendo de antemano que la primera es aplicable á los planos de punto menor, y la segunda á los de punto mayor; y tomaremos por unidad la vara de Castilla ó burgalesa.

Primera solucion.

Fig. 99. Sea A B (fig. 99) una recta indefinida sobre la qual se quiere formar una escala de varas, y represente a b el tamaño que se le quiere dar á la partecilla que ha de representar el tamaño de dicha vara: desde el punto b hácia B, repítase diez veces dicha extension hasta el punto c, y la distancia b c desde c hácia B dos, tres &c. veces: hecho esto, divídase la parte a b en tres partes iguales: es evidente que cada una de ellas representará un pie. Sobre el punto b póngase un cero, y desde b hácia c sígase la numeracion 1, 2, 3 &c., hasta quedar el número 10 sobre el punto c: sobre el punto d póngase el número 20, y sobre el punto e el número 30, con lo que se tendrá una escala de 30 varas.

Segunda solucion.

Fig. 100. Sea A B (fig. 100.) la recta indefinida sobre la qual se quiere construir la escala: sobre esta línea repítase quatro, cinco, ó mayor número de veces el tamaño a b tomado para representar la vara, la parte a e es entonces mayor ó menor, segun el número de varas de largo que se le ha dado. Hecho esto, por todos los puntos de division a, b, c, d, e de esta escala, se levantarán las perpendiculares a f, b g, c h, d k, e l, á las quales se les dará un largo arbitrario, terminándolas por la línea f l paralela á la escala a e. Despues se divide la d e en tres partes iguales, y la e l en doce: por los puntos de division 1′, 2′, 3′, 4′ &c. de esta última línea se tiran paralelas á la a e: en fin, por el punto e y el punto 2 de la parte k l, se tira la recta e 2, á la qual se tiran por los puntos 1 y k las paralelas 1 p y k r.

De lo dicho se infiere, que si la parte k l de la escala representa una vara, cada una de las tres partes de la k l representará un pie: que la parte m n de la primera paralela á la f l comprehendida entre k d y k r vale una pulgada: que la parte t u de la segunda paralela vale dos: que la parte x y de la tercera paralela vale tres, y así de las demas.

Demostracion. Los triángulos m k n, t k u, x k y son semejantes, puesto que tienen un ángulo comun en k, y que sus terceros lados m n, t u, x y son paralelos: luego seran equiángulos (art. 89.); de consiguiente sus lados seran proporcionales (art. 150.): luego podremos decir k m : k d :: m n : d r, pero por construccion $k\,m = \frac{k\,d}{12}$: luego es claro que $m\,n = \frac{d\,r}{12}$; pero si d r representa un pie, m n deberá representar el de una pulgada. Del mismo modo se demostrará que t u $= 2\,m\,n$, que $x\,y = 3\,m\,n$, &c.

Fig. 100. Problema 50. *Se quieren tomar sobre la escala* (*fig.* 100.) *una dimension equivalente á* 2 *varas* 2 *pies y* $\frac{6}{7}$ *pulgadas.*

Para ello se tomará con el compas y sobre la sexta paralela, la línea $q\,o = q\,s + s\,i + i\,o = 2$ varas $+ \frac{6}{7}$ pulgadas $+ 2$ pies.

Escolio. Si se quisiese construir la escala de toesas, la parte k l tomada para representarla se hubiera dividido en seis partes, de las quales una representaria un pie de Rey (Arítm. art. 74.): en lo demas la construccion sería la misma.

DECIMANONA LECCION.

DEL MODO DE LEVANTAR UN PLANO.

199. Problema 51. *Levantar un plano de una extension de terreno dada.*

Fig. 101. Supongamos que A, B, C, D, E, F, G, H, I y K (fig. 101.) sean varios objetos remarcables, de los quales se quiera representar sus posiciones respectivas sobre un plano.

Se empezará dibuxando aproximadamente sobre un papel estos objetos, en la posicion que á golpe de ojo se juzgue tener; y para este efecto se recorrerán los diferentes lugares que sea necesario, para tomar un ligero conocimiento del terreno. Este primer diseño que se llama un *croquis*, servirá para marcar las diferentes medidas que se tomen en el discurso de la operacion.

En seguida se medirá una base A B, cuyo largo no ha de ser menor de la décima ó novena parte de dos de los objetos mas distantes que se puedan ver desde sus dos extremos: ademas, la eleccion de esta base se ha de hacer en términos, que desde sus dos extremidades se puedan ver el mayor número de objetos posibles: entonces, con un instrumento propio para medir los ángulos, con el grafómetro por exemplo, se medirán en el punto A los ángulos E A B, F A B, G A B, C A B y D A B, formados en el punto A con la línea A B y las líneas que se imaginarán llevadas desde este punto á los objetos E, F, G, C y D, que supondremos pueden avistarse desde los extremos A y B de la base. Asimismo, en el punto B se medirán los ángulos E B A, F B A, G B A, C B A y D B A, formados en el punto B con la base A B y las líneas que se imaginan tiradas desde dicho punto á los mismos objetos que anteriormente llevamos dicho.

Si hubiese objetos como H é I, que no se hayan podido avistar de los extremos A y B de la base: en este caso será preciso transportarse á los dos lugares E y F que se acaban de observar, y desde los quales se puedan ver estos dos puntos H é I, y considerando E F como una base, se medirán los ángulos H E F, I E F y H F E, I F E que forman con esta nueva base las líneas dirigidas desde sus extremos á los objetos H é I. Finalmente, si hubiese qualquier otro objeto como K que no pueda ser visto, ni desde las extremidades de la base A B, ni de las de E F: se tomará nuevamente por base qualquiera otra línea, como F G que une estos dos puntos observados, y del mismo modo se mediran desde sus extremos los ángulos K F G y K G F.

Hechas todas estas operaciones, y despues de haber determinado y construido la escala del plano que se propone levantar, se tirará sobre dicho plano una recta a b, que se hará de tantas partes de la escala quantas varas, toesas ó pies se hayan hallado en la A B, segun se haya verificado esta medicion. Despues, en el punto a con el semicírculo se hará un ángulo b a e, de tantos grados y minutos quantos se hayan hallado en el ángulo B A E: asimismo, en el punto b se hará un ángulo e b a, de igual número de grados y minutos que el ángulo E B A: las dos líneas a e y b e que forman estos ángulos con la a b, se cortarán en un punto e, que representará sobre el plano la posicion del objeto E sobre el terreno; porque por esta construccion el triángulo a b e será semejante al triángulo A B E, puesto que se han hecho dos ángulos del uno iguales á dos ángulos del otro (art. 15[illegible] corol. 1.). Se obrará precisamente del mismo modo para determinar los puntos f, g, d y c, que deben representar los objetos ó puntos F, G, D y C. Para tener luego los puntos h, i, k, se tirarán las líneas e f y f g, que se considerarán como bases; y se determinará la posicion de los puntos h é i respecto de la e f, y la del

punto k respecto de la f g, del mismo modo que se ha determinado la de los demas puntos respecto de la a b. Bien entendido que todas las líneas que se tiren en estas diferentes operaciones, seran trazadas solamente de lapiz, porque no tienen mas uso que el de determinar los puntos c, d, e, f &c., y quando estos se han hallado se borra lo demas.

No nos pararemos en demostrar en detall, que los puntos c, d, e, f, g, h, i, k estan colocados entre sí del mismo modo que los objetos C, D, E, F, G, H, I, K lo estan entre sí: basta considerar que los puntos c, d, e, f, g estan (por construccion) colocados respecto de la a b, como los puntos C, D, E, F, G lo estan respecto de la A B, puesto que los triángulos c a b, d a b, e a b &c. han sido construidos semejantes á los triángulos C A B, D A B, E A B &c., y dispuestos del mismo modo: así la dificultad, si cabe alguna, solo puede recaer sobre los puntos h, i, k; pero por construccion los puntos h, i estan colocados respecto de la e f, como los puntos H, I lo estan respecto de la E F: luego, puesto que estas dos últimas líneas estan colocadas del mismo modo respecto de las líneas a b y A B, los puntos h, i estarán tambien colocados respecto a b, de la misma suerte que los puntos H, I lo estan respecto á la A B. Así, las distancias respectivas de los puntos a, b, c, d, e, f &c. medidas sobre la escala del plano, daran á conocer las distancias verdaderas de los objetos A, B, C, D, E, F &c.

Facilmente se ve, sin que sea necesario insistir en ello, que este método puede servir para rectificar puntos cuya situacion sobre un plano fuese dudosa: así como para añadir puntos que se hubiesen omitido.

Modo de executar esta misma operacion con la aguja.

Tambien se puede emplear la aguja para determinar la posicion de los objetos E, F, G &c.: pero entonces

se observará en el punto A, no los ángulos E A B, F A B &c., sino los ángulos que las líneas A E, A F &c. y la misma base A B forman con la direccion de la aguja imanada, y seguidamente se hace lo mismo en el punto B. Despues, para marcar los objetos sobre el plano, se tira por el punto a una línea que represente la direccion de la aguja imanada, y se tiran las líneas a b, a c, a f &c., de modo que formen con aquella los ángulos observados en el punto A. Fixando despues el tamaño que se le quiere dar á la base a b, se obrará en el punto b del mismo modo que se acaba de executar en el punto a. En quanto á los otros puntos H, I que no se avistaban desde los puntos A y B, se determinarán con respecto á la E F, del mismo modo que se han determinado los demas con respecto á la A B. En fin, se señalarán estos puntos en h y en i, determinándolos con relacion á la e f, del mismo modo que los demas puntos e, f &c. han sido determinados respecto á la a b.

Siempre que se pueda, se excusará usar de este instrumento en operaciones en que se pretenda situar puntos muy distantes; y si, podrá servir con utilidad para situar los pequeños detalles, los contornos de un camino, de un rio &c. Quando los puntos principales se han determinado con exáctitud, se pueden representar estos detalles con una atencion menos escrupulosa, porque los objetos que entonces se representan distan menos entre sí, y el error que se puede cometer en los ángulos no puede ser sino de pequeña consideracion.

Modo de executar esta misma operacion con la plancheta.

Quando se quiere hacer uso del instrumento llamado *plancheta* (v) para levantar el plano de un terreno, se tomará una base a m (fig. 102.) como en las operaciones anteriores. Luego se colocará el instrumento de modo que el punto E de la base del plano caiga

Fig. 102.

verticalmente sobre el extremo a de la base del terreno: esto se logrará con la *tenaza y el plomo* (x): seguidamente se dispone el instrumento horizontalmente. Hecho esto, plántese un jalon ó *banderola* (y) en el punto m: se aplica la alidada L M llamada *blok* sobre el papel, y se dirige de modo que tocando su canto el punto E se vea la banderola m al traves de las dos pínulas: entonces se tira á lo largo de la regla del blok una línea E F, á la qual se le dan tantas partes de la escala del plano, quantas varas, toesas ó pies se hayan hallado entre el punto a, desde el qual se observó al principio, y el punto m, desde el qual se observará en la segunda estacion. Despues se hace girar la regla al rededor del punto E, hasta que se encuentre mirando al traves de las pínulas alguno de los objetos G, H, L; y á medida que se vayan hallando se tirará á lo largo de la regla una línea indefinida: recorriendo así todos los objetos que se pueden ver desde el punto a, se transportará el instrumento al punto m, dexando clavada en a una banderola. En dicho punto m se dispondrá el instrumento horizontalmente, y de modo que el punto F del plano caiga verticalmente sobre el punto m del terreno, y de suerte que puesto el blok sobre la base E F se vea la banderola clavada en a al traves de sus pínulas: entonces se hacen en el punto F las mismas operaciones respecto á los objetos G, H, L, que se han hecho en la estacion anterior. Las líneas F G, F H, F L que en este segundo caso van, ó se imaginan ir á estos objetos, encontrarán á las primeras en los puntos g, h, l, que son la representacion de los objetos G, H, L.

Demostracion. De lo dicho se infiere, que todas las operaciones que hemos indicado para levantar un plano, consisten y se fundan en formar sobre el papel una figura semejante á la que existe sobre el terreno, haciendo en el plano triángulos semejantes á los que forman las visuales en la campiña, proporcionando el tamaño de los lados al de una escala.

200. Problema 52. *Modo de levantar un plano con la planeheta, en el que sea preciso establecer varios puntos de estacion.*

Un plano por lo regular no puede levantarse desde una sola estacion, á menos que el terreno no sea de poca extension, y que sea pais llano: por lo tanto, es necesario las mas de las veces transportar la plancheta á diversos sitios, para poder marcar comodamente en ella todos los puntos necesarios.

Supongamos pues, que para levantar un plano sea necesario hacer estacion en los tres puntos A, B, C (fig. 103.), pues desde el punto A no pueden descubrirse varios puntos, que solo se avistan desde B y C. Supongamos ademas, que concluidas todas las operaciones que desde el punto A debian executarse sobre la plancheta al tenor del artículo anterior, se han marcado tambien desde el punto B todas las direcciones de dicho punto, no solo á los objetos vistos desde el punto A, sino tambien á los objetos mas notables vistos desde el punto C; y que se quiere transportar la plancheta á dicho punto.

Fig. 103.

Para ello, se debe de antemano clavar una banderola en el punto C, y observar con la alidada la direccion del extremo B de la base a B del plano al punto C, y tírese en el plano una línea indefinida por dicha direccion. Midase luego en el terreno la distancia B C, y tomando en la escala graduada del plano una equivalente, llévese desde el punto B al punto c, que marcará en el plano la situacion del punto C de la nueva estacion en el terreno: verificado esto levántese la plancheta, y dexando una banderola clavada en el punto B del terreno, transpórtese la plancheta al punto C, sobre el que se dispondrá la plancheta de modo que el punto c del plano caiga verticalmente sobre él. Hecho esto, colóquese el canto del blok en la direccion de la base C b, y muévase el instrumento hasta avistar la banderola B enfilada segun la direccion C b; en cuyo

caso se estará seguro de que la plancheta queda *orientada*, esto es, que este instrumento se halla situado de modo, que todas las visuales trazadas en él quedan paralelas á las direcciones de unos objetos á otros en el terreno: es decir, que la línea a b del plano por exemplo, está así dispuesta paralelamente á la línea A B del terreno, puesto que las líneas B c y b C se hallan en la misma direccion; y que los ángulos a B c y a b C son iguales (por ser el mismo ángulo trazado sobre la plancheta), resulta con evidencia que a b es paralela á la a B, ó á su prolongacion A B (art. 88, corol.).

De hallarse colocada la plancheta en C de modo que todas las líneas trazadas en ella, guardan como antes el paralelismo con las direcciones de unos puntos á otros sobre el terreno; deduciremos claramente, que convinando desde este punto las observaciones con las hechas en el punto B, se podrán situar otros varios objetos; y que si ademas desde el punto C fuese necesario ligar estas operaciones con otras que hayan de executarse desde otra nueva estacion, todo se reduciría á proceder en el punto C, del mismo modo que se executó en el punto B; y ligando así las bases de una en otra, se concluirá de levantar un plano por complicado que sea.

201. De lo dicho en el artículo anterior se infiere, que para este procedimiento es preciso, que la naturaleza del terreno permita el medir varias bases consecutivas, lo que la mayor parte de las veces no es asequible; ya porque algun obstáculo lo impide, ó porque lo escabroso y cortado del terreno no permite medir con exâctitud esta serie de bases; ya sea tambien para emplear menos tiempo en estas distintas operaciones. En este caso se nos presenta el medio mas sencillo de colocar la plancheta en qualquier punto del terreno, aunque no esté ligado con mediciones á otro, orientando en él la plancheta; esto es, que quede situado este instrumento de modo, que todas las líneas anteriormente trazadas en él conserven

el paralelismo con las direcciones de unos objetos á otros en el terreno. Este medio consiste en orientar la plancheta respecto á la direccion de la línea *norte-sur* de una aguja; entre las quales las hay destinadas al-intento, y que por esto se distinguen con el nombre de *declinatorio* (z): véase el Apéndice, adonde se detalla su mecanismo, y enterados de su construccion pasemos á su aplicacion en la práctica.

Problema 53. *Modo de establecer arbitrariamente un nuevo punto de estacion, en la operacion de levantar un plano, usando el declinatorio.*

Para ello, supongamos que despues de marcados los
Fig. 103. puntos m, y r (fig. 103.) en la plancheta, correspondientes á los puntos M y R del terreno, se quiera transferir este instrumento del punto C á otro, desde el qual no se puede, ó no se quiere medir la distancia al expresado punto C. En este caso, antes de mover la plancheta colóquese sobre ella el declinatorio, y muévase este suavemente hasta que el extremo *norte* de la aguja imanada coincida con la línea marcada en la parte media y del mayor largo del fondo de la caxa: colocado así el declinatorio se trazará sobre el papel una línea de lapiz por el canto exterior de la caxa, que marcará la direccion *norte-sur* de la aguja imanada, puesto que el lado de la caxa por el qual se trazó es paralelo á la línea media del fondo de ella; y sea esta línea la que demuestra la flecha, cuya punta señala el *norte*.

Hecho esto, levántese la plancheta y llévese á qualquier otro punto, por exemplo al punto D, y en dicho punto se dispondrá horizontalmente el instrumento, y se colocará de nuevo el lado mas largo de la caxa del declinatorio al lado de la línea *norte-sur* marcada anteriormente en el plano, y de modo que la punta de la flecha de ella corresponda hácia el extremo *norte* de la aguja imanada: luego se dará un movimiento suave y

giratorio á la plancheta, hasta disponerla de modo que dicho extremo *norte* de la aguja imanada coincida exâctamente con el extremo *norte* de la línea del fondo de la caxa del declinatorio: logrado esto, se estará seguro de que la plancheta está bien orientada, puesto que las líneas trazadas en ella guardan la misma posicion que antes, respecto á la línea *norte-sur* de la aguja.

Orientada así la plancheta, solo resta señalar en el plano el punto D del terreno; para lo qual nos valdremos de los puntos m y r marcados en él; pues colocando el canto de la regla del blok junto al punto m, y observando la direccion de este punto al punto M del terreno, se tirará por dicho canto una línea de lapiz en el plano: seguidamente colóquese el canto de la regla del blok junto al punto r, y observando la direccion r R se tirará una segunda línea de lapiz, que cortará á la primera en un punto que indicará en el plano la posicion del punto D del terreno. Determinado así este punto, será facil combinar las observaciones que posteriormente se hagan en él, con las hechas anteriormente desde el punto C, y con las que en seguida deban hacerse desde otro punto qualquiera.

Modo de executar esta misma operacion sin declinatorio.

Hemos hecho pender la solucion anterior del declinatorio, y de las visuales dirigidas desde dos puntos marcados en el plano á sus correspondientes en el terreno. Para haber de verificarlo sin este instrumento es indispensable que se tengan de antemano marcados en el plano la situacion de tres puntos del terreno, y que estos queden en tres distintas direcciones, avistándolos desde el nuevo punto de estacion que se quiere establecer.

Fig. 104. Sean pues A, B y C (fig. 104.) tres puntos del terreno situados en la plancheta en a, b y c; y que situada la plancheta en el punto D del terreno, se quiere marcar dicho punto en su correspondiente posicion en el plano.

Para lograrlo execútese lo siguiente: en un papel suelto se trazará un triángulo totalmente igual al triángulo a b c de la plancheta, el que se recortará: luego se pondrá otro papel qualquiera E F G H sobre la plancheta, y en él se marcará arbitrariamente un punto qualquiera x, desde el qual con el blok se tirarán las tres visuales x m, x n, x p á los objetos A, B, C.

Hecho esto, se tomará el triángulo recortado, y se dispondrá sobre dicho papel, en una posicion semejante al triángulo que forman los objetos A, B y C, aplicando el vértice b de dicho triángulo sobre la línea x n se irá removiendo hácia arriba ó hácia abajo, hasta que el vértice a quadre sobre la línea x m y el vértice c sobre la x p, y márquense sobre ellas estos puntos de coincidencia. Seguidamente tómese con un compas la distancia a x, y con esta como radio hágase centro en el punto a de la plancheta y descríbase el arco d e: luego tómese la distancia c x, y con ella como radio haciendo centro en el punto c de la plancheta, descríbase el arco g h, que cortará al primero en el punto u, que representará en el plano el punto D del terreno.

Logrado esto será facil orientar la plancheta: para ello bastará colocar el canto de la regla del blok junto á los puntos u, y b, y remover suavemente la plancheta, hasta que por la alidada se aviste el objeto B.

Demostracion. Para demostrar que el punto u conserva en la plancheta una posicion respecto á los tres a, b, c marcados en ella, semejante en todo á la que el punto D del terreno tiene con los objetos A, B, C, bastará considerar que segun la propuesta de este problema se da por sentado, que el triángulo a b c de la plancheta es semejante al triángulo A B C del terreno, puesto que se suponen levantados por el método enseñado, art. 199. probl. 51. soluc. 3. Ademas, respecto á que desde el mismo punto u de la plancheta se avista confundido el punto a con el objeto A, el

punto b con el objeto B, y el punto c con el objeto C, no queda duda de que la plancheta queda orientada; esto es, que todas las líneas del plano quedan paralelas á las direcciones de los objetos en el terreno: luego el lado a c será paralelo á la A C. Pero por construccion los ángulos a u c y A D C se han hecho iguales, puesto que sus vértices corresponden verticalmente el uno debaxo del otro, y que sus lados estan trazados baxo las mismas enfilaciones. Es pues evidente, que los triángulos a u c y A D C son semejantes por equiángulos, mediante á que tienen un ángulo igual y paralelos los lados opuestos (art. 89, y art. 150.): luego podremos decir a u : A D :: u c : D C :: a c : A C; pero por la semejanza de los dos triángulos a b c y A B C, tenemos a c : A C :: a b : A B :: b c : B C; luego a u : A D :: u c : D C :: a c : A C :: a b : A B :: b c : B C, que es lo que se pretendia demostrar.

202. Los sitios mas cómodos para medir en ellos la base que ha de servir para levantar un plano, son los llanos; pero estos en un pais algo escabroso suelen ser precisamente los menos al propósito para poder descubrir desde ellos el mayor y principal número de objetos: así es, que en lugar de hacer estacion en los puntos mas dominantes y proporcionados para principiar las operaciones, se elige al contrario el parage mas adequado para poder medir en él la base con mas facilidad. Síguese de esto una complicacion y un retardo en la execucion, tanto mayor quanto el terreno es mas extenso: es pues muy interesante enterarse del modo de executarlo sin esta medicion preliminar, y tambien muy facil su inteligencia.

Problema 54. *Modo de levantar un plano sin medir ninguna base, por complicado que sea.*

Supóngase que se quiere levantar el plano de un pais muy cortado. Para ello, antes de todas cosas se

hará un reconocimiento del terreno, para poder elegir con acierto dos puntos, desde los quales se descubra el mayor número de objetos, y situados estos en el plano poder por una serie de operaciones situar los demas, que desde la primera estacion no pudieron descubrirse.

Hecha esta eleccion, transpórtese la plancheta á uno de los dos puntos elegidos para dar principio á las operaciones, y plántese una banderola en el segundo: seguidamente se dispondrá la plancheta horizontalmente, y en ella se marcará con la tenaza el punto correspondiente del terreno. Despues se aplicará el canto de la regla del blok sobre dicho punto marcado, y dirigiendo la visual á la banderola tírese una línea de lapiz por esta direccion: sobre su extension señálese arbitrariamente un punto, que se supondrá representar en el plano el punto del terreno sobre el qual se plantó la banderola: la porcion de esta línea comprehendida entre punto y punto será la base del plano, y representará la distancia comprehendida entre el punto del terreno sobre el qual se halla situada la plancheta y el punto sobre el qual está clavada la banderola.

En estos dos puntos se harán las observaciones que sean necesarias para situar los objetos que desde ellos se descubran, segun tenemos enseñado (art. 199.): despues de situados estos, se continuará haciendo desde ellos las observaciones conducentes para situar las que nuevamente se vayan descubriendo, hasta concluir el plano propuesto.

Claro está que de este modo se conseguirá levantar un plano semejante al terreno; faltando solo que averiguar la razon en que estan las dimensiones del primero con las del segundo. Para indagarlo exâmínese, si en el local del terreno cuyo plano se ha levantado se hallan dos objetos, cuya distancia recíproca sea facil medir; circunstancia que rara vez dexa de concurrir; y que aun dado este caso le es facil al que executa la operacion superar esta dificultad, plantando dos ban-

derolas en parage proporcionado, y observándolas desde dos puntos del terreno marcados ya en el plano se situarán igualmente estas en el expresado plano. Mídase luego en el terreno la distancia entre las dos banderolas, ó entre los dos objetos, y se tendrá averiguado el número de varas ó toesas que compone la tal distancia: tómese con el compas la línea que en el plano representa esta distancia, y divídase en el mismo número de partes iguales, de las quales una representará el largo de la vara ó toesa, dato con el qual queda determinada la escala de relacion del plano, y de consiguiente sabida la razon en que estan sus dimensiones con las del terreno.

Se conocerá desde luego la utilidad de este método, si se atiende á la ventaja que resulta de no tener que detenerse en medir base alguna; siendo aun mas importante la de no tener que considerar en la eleccion de puntos de estacion, sino su mayor comodidad para descubrir mayor número de objetos, lo que abrevia infinito la conclusion de las operaciones.

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

VIGÉSIMA LECCION.

CONTINUACION DE LA LECCION ANTERIOR.

203. Explicado el modo de levantar un plano, añadiremos aquí unas cortas advertencias, para acabar de poner á los alumnos en estado de levantar un plano.

Primera. Antes de tirar qualquiera línea sobre la plancheta, se ha de mirar con todo cuidado si la base del plano está bien orientada con la del terreno.

Segunda. Quando se levante un plano se han de

señalar en él todos los objetos que sean dignos de atencion, como caminos, calzadas, casas, molinos, barrancos, alturas, rios, desfiladeros &c., segun el fin con que se forma el plano.

Tercera. Siempre será conducente al levantar un plano, formar una relacion, en la que se anoten los nombres de los lugares, profundidad de los rios, vados practicables, anchura de los desfiladeros, y otras varias circunstancias locales, segun el objeto que se propone el que levanta el plano; y para no detenernos sobre esta materia, se encarga á los caballeros Cadetes lean con atencion el tercer tomo de la obra ya citada, intitulada Guia del Oficial para Campaña, la qual enseña detenidamente el modo de formar esta relacion.

Quarta. Será muy conveniente, que el plano original que se levante sea de escala grande, para que así se hagan mas sensibles los errores que puedan cometerse, quedando árbitro de reducirlo á escala menor quando se ponga en limpio.

Quinta. En el plano de qualquiera territorio ó plaza, se pone una escala de varas ó toesas; y en el de un reyno ó provincia, una de leguas marítimas, ó de veinte en grado.

Sexta. Si se quiere señalar en el plano una curva irregular, como la orilla de un rio, la direccion de un camino, el perimetro de una laguna, bosque &c., se
Fig. 105. tirará sobre el terreno la recta A M (fig. 105.), y sobre ella se levantarán muchas perpendiculares, como A a, B b, C c &c.; y pasando la recta al plano, se divide en partes semejantes, y levantando sobre ella perpendiculares de igual número de partes de escala, á las que se hallaron de varas ó toesas en el terreno, se describirá una curva por los extremos de estas perpendiculares; y quedará figurada la margen del rio como está en el terreno.

Séptima. Para levantar el plano de una fortificacion, se elige para dar principio á las operaciones el lugar mas cómodo, sea sobre el terraplen de la muralla, ó

bien por la parte de afuera de las obras, segun las ventajas que se hallan, ó las circunstancias que obligan á preferir una práctica á otra, y se trazan sobre el papel radios dirigidos á todos los ángulos de la fortificacion. Luego se pasa á otros puntos de estacion, midiendo las distancias intermedias de unos á otros para operar en ellos del mismo modo, con el fin de lograr con las intersecciones de los radios dirigidos sobre los mismos objetos, su posicion respectiva sobre la plancheta. Dando vuelta así al recinto, y volviendo al punto en que se dió principio á las operaciones, se conseguirá levantar el plano.

Problema 55. *Supongamos que se trata de levantar el plano de la fortificacion representada* (*fig.* 106.).

Fig. 106.

Si se cree conducente para distinguir mejor los vértices de los ángulos de las diferentes obras, plantar señales en ellos, se empezará por colocarlas: despues de esto, si se elige sobre el *terraplen* (w) el punto A para hacer en él la primera estacion, se establecerá en él la plancheta, y de su punto correspondiente a (fig. 107) se trazarán sobre el papel unas líneas en la direccion de los ángulos B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, y una línea en la direccion del punto O, en el que se habrá colocado de antemano una banderola. Solo se medirán las distancias A N, A M, A P, y por la direccion A O la distancia A O: se tomarán una despues de otra las mismas medidas sobre la escala del plano, y desde el punto a se llevará la medida que convenga al radio correspondiente al del terreno: entonces se tendrá sobre el papel los puntos p, n, m, o, &c. que se hallarán colocados los unos respecto á los otros, como lo estan los puntos P, N, M, O, &c. que representan.

Fig. 107.

Antes de dexar esta estacion, y sin alterar en nada la posicion de la plancheta, se trazará sobre ella la línea Norte-sur de la aguja imanada, conforme se tiene enseñado (art. 201.).

Se irá al punto P, y estableciendo en él la plancheta, de modo que P y p se hallen en la misma vertical, y que p a caiga sobre P A, se hará una operacion semejante para obtener sobre el papel, con la interseccion de los radios dirigidos sobre los mismos ángulos, la posicion de los vértices b, c, d, e, h, i, k, l correspondientes á los B, C, D, E, H, I, K, L del *baluarte* (A).

Hecho esto, tírense las líneas c d, b e, i k, h l; ademas mídase la distancia P F, y colóquese el punto f á semejante distancia del punto p, con lo que se podrán tirar las líneas f e, f h: mídase seguidamente el ancho del *parapeto* (B), y por los puntos d é i tírense las paralelas d g y g i: con lo que se tendrá la figura del baluarte.

Operando del mismo modo en los puntos O, Q, R, S &c., y midiendo solamente las distancias á que estan entre sí, se determinará sobre la plancheta la posicion de los ángulos del recinto, y se tendrá un plano exâcto.

Tratemos ahora de ver como se liga el plano de las obras exteriores con el del recinto. Para ello transpórtese la plancheta al punto X del camino cubierto adonde se orientará, valiéndose para ello de los dos puntos K y J del terreno, marcados k y j en el plano, ó bien de tres, con lo que se marcará el punto correspondiente x en dicho plano, segun lo establecido ya (art. 201. probl. 53. 1. y 2. soluc.). En el punto X, y desde su correspondiente x se trazarán líneas de direccion á los puntos Y, Z, A′, B′, C′, y midiendo las distancias X Y, X Z, X A′, X B′, X C′, tómese una despues de la otra las mismas medidas sobre el plano, y del punto x se llevará la medida que convenga al radio correspondiente al del terreno; con esto y con medir el ancho del camino cubierto, se podrán trazar en el terreno las líneas angulosas y X Z y E′ A′ B′ C′ que determinan este camino.

La línea que determina el pie de la *esplanada ó glasis* (C) es por lo regular paralela á la del camino

cubierto: si así no fuese, será facil trazarla conforme se ha practicado con aquella.

Otra solucion.

Se hace indispensable exponer aquí el modo de levantar esta especie de planos, empezando por la parte exterior de la plaza; pues en la guerra y en un sitio es el único método practicable.

Supongamos pues que se trate de levantar el plano de la fortificacion representada (fig. 106.).

Se establecerá la plancheta en el punto D′ (fig. 106), y de su correspondiente d′ (fig. 107.) se trazarán sobre la plancheta radios en la direccion de los ángulos C, D, G, E′, F′: se medirá la distancia D′ G′, para determinar sobre el papel la extension de su correspondiente d′ g′ que se tomará por base.

Se operará del mismo modo en el extremo G′ de esta base: despues en el punto K′, y seguidamente en el punto L′ &c.; teniendo cuidado de medir las bases sucesivas G′ K′, K′ L′ &c., para dar el mismo número de partes de escala á sus correspondientes g′ k′, k′ l′, &c. en el plano. Habiendo operado así en cada uno de los extremos de estas bases, se exâminará en que puntos se verifica la interseccion de las líneas dirigidas de los puntos de estacion d′ y g′ sobre los mismos objetos (lo que se conocerá facilmente, teniendo la precaucion de marcar del mismo modo las líneas dirigidas sobre los mismos objetos); y de reconocida esta posicion sobre la plancheta, se trazarán las líneas c d, d g, g i, i k, k j, d′ h′, g′ f′, g′ e′, e′ a′, a′ b′, que marcarán sobre el papel las mismas cosas que las del terreno que representan.

Se exâminarán del mismo modo los radios dirigidos de los demas puntos de estacion k′ y l′ &c. sobre los mismos objetos; y habiendo reconocido su posicion sobre el papel, se trazarán las líneas de las quales estos puntos

son los extremos. Entonces se tendrá sobre el papel la posicion y dimensiones del frente de la fortificacion, tanto de su recinto como de sus obras exteriores: lo que basta para determinar el sitio adonde es preciso abrir la trinchera, ó dirigir qualquier otro ataque.

Octava. Si al contrario se ofrece trazar sobre el terreno el plano de una fortificacion, se operará como sigue.

Problema 56. *Trazar sobre el terreno un proyecto de fortificacion.*

Trátese, por exemplo, de trazar sobre el terreno el plano de la fortificacion representada por la figura 106.

Determinado el punto G, y la direccion del lado G T sobre el terreno, se establecerá la plancheta en el punto G que debe representar su correspondiente g (fig. 107.): se dispondrá g t en la direccion G T, y se fixará estableménte la plancheta: entonces en la direccion G D y G I se hará colocar un piquete en D y otro en I, á la distancia marcada sobre el plano entre g y d, y entre g é i: se hará clavar otro piquete J y otro piquete T en la direccion de la línea g i, y del lado exterior g t, á la distancia á que estan los puntos correspondientes j y t, respecto del ángulo saliente G.

Hecho esto, colóquese la plancheta en el punto I, de suerte que su correspondiente i caiga verticalmente sobre él, y que I G convenga perfectamente con la direccion de su correspondiente i g: verificado esto, y quedando fixa la plancheta, se clavará en K un piquete por la direccion de la línea i k, que diste de I de la extension indicada en el plano por dicha línea i k.

Logrado esto, establézcase nuevamente la plancheta en el punto K, de modo que el punto k del plano corresponda verticalmente sobre él, y que la línea I K quede en la direccion de su correspondiente i k. Hecho esto, el punto J marcado ya sobre el terreno se deberá hallar en la direccion de la k j. Seguidamente se

pondrá un piquete en la direccion de la línea K T en el punto V, y distante de K la extension que en el plano manifiesta la k v: en esta direccion debe encontrarse el extremo T del lado exterior G T, que ha sido ya marcado con un piquete. Hecho esto, se medirá la distancia desde el punto T al punto V, para ver si resulta de la extension que manifiesta el plano, entre los extremos v y t de su correspondiente V y T; no siendo dable sea otro el resultado, si se ha tenido cuidado de ajustar exâctamente los puntos y líneas del terreno con sus correspondientes sobre el papel.

Luego se colocará la plancheta en el punto T, y disponiéndola del modo que tenemos expresado, se determinará el punto W, &c.

Si se continua de esta suerte, se obtendrá con la mayor exâctitud el trazado de todos los baluartes, y de consiguiente la línea *magistral* (D) de la fortificacion proyectada. En quanto á las partes interiores de la muralla, es muy facil su trazado, puesto que la mayor parte son paralelas á la línea magistral; y estas no se marcan sino al paso que se van formando.

Nada diremos del modo de trazar las obras exteriores del recinto y el camino cubierto, porque es igualmente facil, y que no puede ofrecer ninguna dificultad su trazado.

Nona. La operacion de señalar en un plano la direccion verdadera de la línea Norte-sur (lo que se llama *orientar, ó arrumbar un plano*) puede verificarse con el declinatorio, executándolo del modo que dexamos propuesto (art. 201, probl. 53.); pero en aquella clase de operaciones no hemos hecho mencion de la *variacion de la aguja* (1), porque este dato no era necesario para su resolucion; pero en esta es preciso contar con él en los parages en que la direccion de la aguja imanada difiera ó varíe de la verdadera direccion Norte-sur; puesto que esta última direccion es la que ha de servir para orientar un plano. Es evidente, que teniendo señalado en el plano con el declinatorio la direccion de la aguja

imanada, y sabiendo de quantos grados y minutos varía esta hácia el Este, ó hácia el Oeste de la verdadera, será facil corregirla y obtener la verdadera.

Si se carece de este instrumento, ó si se quiere prescindir de la prolixidad que requiere el orientar con toda exâctitud un plano, cuya circunstancia es rara vez necesaria en la práctica, podrá operarse del modo siguiente. Tómese una aguja comun ó de coser, que se clavará perpendicularmente sobre qualquier punto de la plancheta, y disponiendo la base del plano en la direccion de la base del terreno, se marcará la sombra que hace la aguja en punto del mediodia, y esta será la línea *meridiana* ó Norte-sur.

Hecho esto, si se corta esta línea con otra perpendicular á ella, quedarán determinados con sus dos extremos los puntos Este y Oeste. La punta que señala el Norte se marcará con una flor de lis, conforme se demuestra en la figura 107.

Décima. Finalmente, es claro que si se carece de plancheta, se podrá suplir su falta con un pedazo de tabla lisa, para poder aplicar sobre él un papel para levantar el plano; y que valiéndose de una mesa, banco, ó de qualquiera otra industria, se podrá verificar la operacion. Solo resta ver en el Apéndice (E) el modo de suplir la falta del blok, con una regla y un hilo.

204. Problema 57. *Modo de copiar un plano con igual escala.*

El modo mas facil de copiar un plano, y el de verificarlo con mas limpieza, es *calcándolo*. Se reduce esta operacion á aplicar sobre un cristal el plano que se quiere copiar, en parage donde reciba bastante luz por detras, y se pone un papel sobre este plano, y trasluciéndose por él toda la figura, será facil entonces señalar con un lapiz todos sus puntos y contornos.

Para facilitar esta operacion, se usa un cristal grande con marco de madera, llamado *calcador*; cuya descripcion puede verse en el Apéndice (F).

Pero si se careciese de este instrumento debe apelarse al método de dividir el plano en quadrículas, conforme vamos á referir; prefiriendo esta práctica á quantas pueden substituirse en su lugar, ya sea sacando la copia con un papel dado de aceite, ó bien con un papel dado de cisco ó piedra negra, como usan algunos; pues de este modo es quasi imposible no padezca algo la copia ó el original en punto á limpieza, que es precisamente una circunstancia de las mas recomendables en un plano.

Divídase la base inferior del plano en un número arbitrario de partes iguales, y por los puntos de division levántense perpendiculares, que se prolongarán hasta la base superior. En seguida divídase tambien su altura en qualquier número de partes iguales, y por los puntos de division tírense paralelas á la base, de un lado á otro del plano: es evidente, que de este modo quedará dividida la superficie del plano en porcion de quadrículas pequeñas.

Hecho esto, constrúyase en el papel en que se ha de sacar la copia, una quadrícula igual á la total del plano, y divídase esta en igual número de quadrículas parciales que aquel, por medio de igual número de perpendiculares y paralelas á la base. Despues de lo qual, se irán situando los puntos principales del plano en su correspondiente quadrícula de la copia; y para verificarlo con toda prolixidad, se usará de dos compases: con el primero se tomará la distancia mas corta de dicho punto á la base mas próxima de su quadrícula, y con el segundo compas la distancia mas corta á la altura mas próxima, y con estas dos distancias será facil trasladar la situacion de dicho punto á su correspondiente casilla en la copia. De un modo semejante se pasará de los puntos principales á los pequeños detalles:

285. Problema 58. *Sacar una copia de un plano, con escala mayor ó menor que la de dicho plano.*

Divídase el plano en quadrículas, conforme á lo prevenido en el artículo anterior: construyase sobre el papel en el qual se ha de sacar la copia, la escala arreglada al tamaño que quiere dársele. Por medio de dicha escala formese un quadrilátero semejante al del plano original, esto es, que tenga una base y altura de igual número de partes de su escala, que la base y altura del plano tienen de la suya. Luego, dividiendo la base y altura de la copia en el mismo número de partes iguales, en las que estan divididas las del plano, se levantarán por los puntos de division las perpendiculares y paralelas á la base: con lo qual se conseguirá dividir la superficie del quadrilátero de la copia en un número igual de quadrículas semejantes á las del plano.

Despues de esto, para situar en ella un punto qualquiera del plano original, se tomarán las distancias mas cortas de dicho punto á la base y altura mas próxima de su quadrícula, y se trasladarán estas dos dimensiones á la escala del plano, y se verá de quantas varas, pies &c. constan: seguidamente se tomarán estas dos dimensiones en la escala de la copia, y con ella se situará el punto en su correspondiente quadrícula, que quedará así en una situacion semejante á la que tenia en el plano.

Se continuará así con los demas puntos, con lo que se conseguirá sacar una copia semejante al plano, puesto que las distancias respectivas de un punto á otro estarán en la misma razon que lo está una parte de la escala del plano con una parte de la escala de la copia.

VIGÉSIMA PRIMA LECCION.

DEL NIVELAMIENTO.

206. Aunque la superficie de la tierra parece plana, se sabe por repetidas observaciones que es curva: esta es la causa por qué, quando desde tierra se avista una embarcacion que se dirige al puerto, lo primero que se descubre es lo mas alto de su arboladura ó palos, y seguidamente el casco ó cuerpo de la nave: recíprocamente, los que se hallan dentro de la embarcacion, al avistar la tierra descubren primero las torres ó montes mas altos, y antes que lo restante del pais; lo que no sucedería si la superficie intermedia entre el objeto avistado y el observador fuese plana, pues baxo esta hipótesis todos los objetos deberian avistarse al mismo tiempo.

207. Divídese el nivel en *verdadero* y *aparente*.

Dos puntos estarán en un mismo nivel verdadero, si distan igualmente del centro de la tierra; y así A y B (fig. 108.) estan en un mismo nivel verdadero, porque A C = B C, y por la misma razon la línea curva A B está á nivel, puesto que es parte de la circunferencia de la tierra.

Fig. 108.

Dos objetos estan en un mismo nivel aparente, quando se hallan en una misma línea recta horizontal; sin embargo de que no se hallen equidistantes del centro de la tierra, como A y E, que aunque la distancia A C es menor que E C, se hallan dichos puntos en la línea horizontal A E, que tambien se llama *línea del nivel aparente*.

208. *Nivelar* es determinar quanto mas dista un objeto del centro de la tierra que otro; y así quando dos puntos A y E parecen en una misma línea ó plano

horizontal, no por eso estan en un mismo nivel, antes la diferencia entre ellos es la parte E B.

Para hallar pues el nivel verdadero de dos objetos, ademas de lo que el uno se levanta sobre el plano horizontal del otro, se deberá considerar la diferencia E B entre el nivel aparente y el verdadero; pero este cálculo se puede omitir, porque en las distancias cortas como de 200 á 250 varas, la diferencia entre la tangente y el arco es tan pequeña, que puede tomarse el nivel aparente por el verdadero; y en una distancia larga sucederá lo mismo, si se divide en partes de 200 á 250 varas, y cada una se nivela separadamente.

209. Para nivelar se usa de un instrumento llamado *nivel*. En este Tratado haremos mencion del *nivel de agua* (G), del *nivel de peso* (H), y del *nivel de aire* (I), cuyas descripciones pueden verse en el Apéndice.

210. Problema 59. *Hallar la diferencia del nivel entre dos puntos.*

La teoría del nivel de agua se funda, en que la superficie de las aguas tiene todas sus partes en un mismo nivel: de consiguiente, dirigiendo la visual por las dos líneas que demuestran el canto de la superficie del líquido en los dos tubos de los vídrios del nivel, se estará seguro de que todos los puntos situados en la direccion de dicha visual estarán á nivel.

Fig. 109. Si los puntos C y B (fig. 109.) estan á distancia de 200 á 250 varas, se pondrá el instrumento en C, y un hombre en B que sostenga una percha ó regla larga D B en situacion perpendicular: el que dirige la operacion observará desde P, en que parte la línea de las superficies P Q y R S prolongada toca la percha D B, y hará señal al hombre que la tiene para que señale el punto E. Con este fin se pone en la percha un pedazo de tabla ó carton de doce pulgadas de base y otro tanto de altura, cuya superficie se divide por

medio con una línea horizontal en dos rectángulos iguales; el superior se pinta de negro y el inferior de blanco, y la línea de division de estos dos colores sirve de señal: esta tabla puede moverse por toda la longitud de la regla, y puede afirmarse adonde convenga por medio de un hilo bramante que pasa por dos agujeros practicados en los extremos de la percha, y hechos firmes los extremos del cordel en la tablilla. Hecho esto, mídase la distancia E B, y réstese de la altura del instrumento P K: la diferencia será la cantidad que dista mas del centro de la tierra el punto B que el punto K; porque si las perpendiculares P K y E B fuesen iguales, la línea que pasase por K B sería paralela á la horizontal P E, y de consiguiente los puntos K y B se hallarian tambien en una línea horizontal, y tendrian el mismo nivel aparente, que á dicha distancia no se distingue del verdadero: luego la diferencia entre P K y E B, da la del nivel verdadero de los puntos K y B.

Segundo caso.

Si los puntos que se han de nivelar distan mas de 200, ó de 250 varas, como por exemplo A y B (fig. 109.), que supondremos distar 400 ó 500 varas.

Fig. 109.

En este caso, no se pondrá el instrumento en el extremo A, porque si desde dicho punto se observase el punto E, resultaria diferencia entre el nivel aparente y el verdadero, por ser A B mayor de las 200 ó 250 varas que hemos préfixado; puesto que á mayor distancia se hace sensible la diferencia entre estas dos clases de niveles: por tanto se procederá de esta suerte.

En A y en B se pondrán dos perchas bien perpendiculares, y en el centro C de la direccion A B el instrumento: verificado esto, mírese desde S por la superficie S R Q P, y obsérvese el punto G en que la visual toca á la percha F A: mirando de la misma

suerte desde P, se observará del mismo modo el punto E de la horizontal P E (lo que se llama *nivelada doble ó compuesta*, para distinguirla de la anterior que se llama *nivelada simple*), y midiendo las alturas E B y G A, se restará la menor de la mayor, y se tendrá la diferencia del nivel de los puntos A y B.

Tercer caso.

Si la distancia que se ha de nivelar es mucho mayor, como por exemplo la G H (fig. 110.), que supondremos ser de 2400 varas, será preciso emplear seis niveladas dobles, cada una de ellas de 400 varas, y desde luego se pueden señalar con las perchas G, J, K, L, M, N y H: ó bien empezando poniendo una percha en G y otra en J á la distancia de 400 varas, se iran apuntando en una columna las alturas que se hallen subiendo, y en otra las que se encuentren baxando; y concluido se restará la suma de una columna de la otra, para tener la diferencia del nivel que se busca: por exemplo

Fig. 110.

SUBIDAS.	BAXADAS.
Pies.	Pies.
1 G = 8 1/2	4 C = 2
A 2 = 1	6 E = 1
3 B = 1 1/4	F H = 7
5 D = 3	
suma = 13 3/4	suma = 10

Colóquese el instrumento en el punto 7 equidistante de los extremos de la G J, y obsérvense los puntos 1 y 2:

mídase la altura 1 G y sea esta de 8 $\frac{1}{2}$ pies, que se apuntará en la primera columna, y se señalará en la percha A J el punto 2: supuesto que la percha J diste igualmente ó con corta diferencia de K tanto como de G, póngase el instrumento en 8, señálense los puntos A y B, mídase la altura A 2, y sea de un pie, que tambien se pondrá en la primera columna: déxese señalado el punto B, y pásese el instrumento al 9, donde se observarán los puntos 3 y 4, mídase la altura 3 B, y sea de 1 $\frac{1}{4}$ pies, que igualmente se pondrá en la primera columna: pásese el instrumento al punto 10, y obsérvense los puntos C y D, y porque la altura 4 C que supondremos de 2 pies se halló baxando, se apuntará en la segunda columna, y dexando marcado el punto D pásese el nivel al punto 11: obsérvense los puntos 5 y 6, y porque la altura 5 D es de 3 pies y que se halló subiendo, se pondrá en la primera columna: déxese marcado el punto 6, y pásese el instrumento al punto 12, y obsérvense los puntos E y F, y porque la altura 6 E es de un pie y porque se halló baxando, se apuntará en la segunda columna, así como la altura F H de 7 pies.

Concluida esta operacion, súmese la primera columna y será 13 $\frac{3}{4}$ pies, y restando de ellos la suma de la segunda 10 pies, se hallará que el punto H está 3 pies 9 pulgadas mas elevado que el punto G.

Claro está, que si el terreno fuese todo cuesta arriba sin ninguna baxada, se formaria una sola columna de todas las alturas, y de esta suma se restaria la altura F H: que por el contrario, si el terreno fuese todo cuesta abajo sin ninguna subida, se formaria una sola columna de todas las baxadas, y de esta suma se restaria la altura 1 G.

211. El nivel de peso, llamado tambien *nivel de albañil*, sirve unicamente para nivelar distancias muy cortas, como por exemplo, para conocer si estan bien horizontales las hiladas de piedra ó ladrillo en la cons-

truccion de un muro, el piso de un edificio, de un terraplen &c.

La descripcion de este instrumento puede verse en el Apéndice (H). Solo nos resta manifestar los principios teóricos sobre los quales se funda el uso que en la práctica se hace de este instrumento.

Las dos reglas iguales unidas á ángulo recto, forman un triángulo isósceles con la tercera regla sobre la qual se señaló el punto medio: de consiguiente, si los cantos de los dos extremos de las reglas unidas insisten sobre dos puntos del terreno que esten situados horizontalmente, la tercera regla que constituye la base del triángulo quedará horizontal: de que se sigue que el hilo pendiente del vértice del ángulo superior del triángulo, cuyo hilo denota siempre la direccion vertical, deberá entonces coincidir con el punto medio de la base del expresado triángulo: lo contrario sucederá quando los dos cantos de la regla insistan sobre puntos que no esten horizontales ó á nivel.

De lo dicho se infiere, que este modo de nivelar se reduce á colocar sobre el terreno los cantos de las dos reglas; y si el hilo del plomo cae sobre el punto medio de la tercera regla, será una prueba de que el terreno está á nivel en aquella direccion; y para poder asegurar de que lo esté en todas direcciones, es necesario repetir esta operacion en varios puntos y en distintas direcciones; y para coger mas puntos á un tiempo, será conducente aplicar sobre el terreno una regla de 9 á 12 pies de largo, y sobre esta aplicar el nivel: si en alguna de estas direcciones no se verifica la coincidencia del hilo con el punto medio de la regla que sirve de base al triángulo, la parte hácia la qual se separe el hilo indicará la parte hácia donde el terreno está inclinado.

212. En quanto al nivel de aire, cuya descripcion puede verse en el Apéndice (I), solo nos resta que decir, que un instrumento de esta especie, y de 6 á 7

pulgadas de largo, es muy al propósito para disponer horizontalmente el plano de qualquiera instrumento en las operaciones trigonométricas, quando el caso requiere esta prolixidad: para lo qual se colocará este nivel sobre el plano del instrumento en diversas direcciones, y si en todas ellas la globulita del aire subsiste en el punto medio del tubo, será una prueba de que el instrumento está horizontal. Este es el método que anunciamos en el artículo 69.

Advertencia. Quanto hemos dicho acerca del modo de levantar un plano en las Lecciones decima nona y vigésima, ha sido establecido baxo la hipótesis de que todos los objetos se hallaban situados en el mismo nivel, ó próximamente tal; pero se ofrece con freqüencia tener que observar objetos por medio de ángulos situados en planos inclinados al horizonte: es pues necesario, antes de formar el plano, reducir el valor de estos ángulos al que hubieran debido tener observados en un mismo plano horizontal. Pero para poder hacer esta reduccion, es preciso que los alumnos adquieran los conocimientos debidos de la Trigonometría rectilínea logarítmica, que se explican en la tercera Seccion de este Tratado; al fin de la qual hallarán la solucion de este problema (art. 342.).

SEGUNDA SECCION.

VIGÉSIMA SEGUNDA LECCION.

DE LAS SUPERFICIES PLANAS.

213. Hasta aquí solo nos hemos ocupado de medir y cotejar las longitudes de las líneas, comparativamente á su unidad. Actualmente vamos á considerar las superficies como terminadas por líneas: buscaremos la relacion que estas guardan entre sí, y el modo de medirlas.

214. Por superficie de una figura se entiende el espacio comprehendido entre las líneas que la terminan, y segun que estas sean rectas ó curvas será *rectilínea*, *curvilínea* ó *mixtilínea* la superficie.

En esta Seccion trataremos unicamente de las *superficies planas* (art. 19.), y aun nos limitaremos á verificarlo solo de las figuras rectilíneas, y del círculo.

215. Todas las figuras totalmente iguales, esto es, todas las figuras iguales y semejantes (art. 7.) seran iguales en superficie: esto es, seran iguales. Pero dos figuras pueden ser iguales, y tener una forma enteramente distinta.

216. Así como para representar con números las longitudes de las líneas se toma como unidad una línea recta de una extension determinada (art. 30.); para representar con números las extensiones de las superficies, será menester tomar por unidad una superficie de una extension determinada.

Á la línea que se toma por unidad para expresar en números las longitudes de las demas líneas, se le da el nombre de *unidad lineal*; y á la superficie que se toma como unidad para expresar la extension de las demas superficies, se le dará el nombre de *unidad superficial.*

217. La superficie de la qual tenemos una idea mas clara, y que de consiguiente conviene tomar por unidad, es el quadrado; porque componiéndose de quatro lados iguales y de quatro ángulos rectos, se evidencia: en primer lugar, que la relacion de sus lados es la mas sencilla de todas; y en segundo lugar, el ángulo recto es el que se nos representa con mas facilidad, por la costumbre en que estamos de ver los objetos á plomo, ó de verlos caer por una direccion vertical. Así, los Geómetras han convenido en tomar por unidad superficial la de un quadrado, cuyo lado es la unidad lineal: de lo dicho han formado la expresion de *quadratura de una superficie, ó de una figura*; por la qual entienden la determinacion ó evaluacion de esta figura en quadrados.

218. *La toesa quadrada, ó toesa superficial*, es un quadrado cuyo lado es una toesa lineal. *La vara quadrada ó superficial*, es un quadrado cuyo lado es de una vara lineal. *El pie quadrado ó superficial*, es un quadrado cuyo lado es de un pie lineal, &c.

219. Por esta razon, la magnitud de las superficies se expresa por medidas ó unidades quadradas. Así, quando se dice que la superficie de un triángulo es de 24 pies, se entiende que son 24 pies quadrados. Esto equivale á decir, que dicho triángulo contiene veinte y quatro veces á la superficie de un quadrado, cuyo lado es un pie. Por consiguiente, si el triángulo es un piso que se ha de enladrillar con ladrillos quadrados cuyo lado es un pie lineal, se necesitarán 24 ladrillos justos,

aunque sea menester romper algunos de ellos y acomodar sus pedazos, por la diversidad de la figura.

Se suele dar el nombre de *área* á la extension de una superficie; y así, en el exemplo anterior se dirá que el área del triángulo es de 24 pies.

220. Problema 6o. *Medir en partes quadradas la superficie de un rectángulo.*

Fig. 111. Sea A B C D (fig. 111.) el rectángulo que se quiere medir, y a b c d el quadrado que debe servir de unidad ó de medida.

Para ello, es necesario indagar quantas veces el lado A B contiene al lado a b: asimismo buscar quantas veces el lado B C contiene a b; y entonces multiplicando estos dos números el uno por el otro, se tendrá el número de quadrados tales como a b c d, que la superficie A B C D puede contener. Por exemplo, si A B contiene a b quatro veces, y si B C contiene a b seis veces, se multiplicará 6 por 4, y el producto 24 indicará que el rectángulo A B C D contiene 24 veces al quadrado a b c d.

Demostracion. Si por los puntos de division E, F, G, se tiran paralelas á la base B C, se tendran quatro rectángulos iguales, de los quales cada uno contendrá tantos quadrados tales como a b c d, quantas partes iguales á a b hay en la base B C: luego será preciso repetir los quadrados contenidos en uno de estos rectángulos, tantas veces quantos rectángulos pueda haber; es decir, tantas veces quantas el lado A B contenga a b; y como el número de los quadrados contenidos en cada rectángulo es el mismo que el número de partes de B C, se evidencia que multiplicando el número de partes de B C por el número de partes iguales de A B, se tendrá el número de quadrados tales como a b c d que el rectángulo A B C D puede contener.

Escolio. Aunque en el raciocinio que acabamos de hacer hemos supuesto, que los lados A B y B C contenian un número exâcto de medidas a b, no por esto dexa de extenderse este raciocinio al caso en que la medida a b no estubiese contenida exâctamente. Por exemplo, si la base B C contuviese seis medidas y media, cada rectángulo contendrá seis quadrados y medio; y si la altura A B contuviese quatro medidas y media, habria quatro rectángulos y medio cada uno de seis quadrados y medio: será pues preciso multiplicar $6\frac{1}{2}$ por $4\frac{1}{2}$, es decir, el número de medidas de la base B C por el número de medidas de la altura A B.

Corolario I. De lo dicho se infiere, que para valuar la superficie A B C D se ha de repetir la superficie G B C H ó el número de quadrados que contiene, tantas veces quantas su lado G B está contenido en el lado A B: así el multiplicando es realmente una superficie, y el multiplicador es un número abstracto que no hace mas que expresar quantas veces se debe repetir el multiplicando.

Sin embargo, se dice con mucha freqüencia, que *para hallar la superficie de un rectángulo, es necesario multiplicar su base por su altura*; pero esto debe considerarse como una expresion abreviada, por la qual se da á entender el número de quadrados correspondientes á las partes de la base, y el número de partes de la altura.

Corolario II. La superficie de todo quadrado será igual al quadrado de su lado (art. 172.).

Corolario III. Las superficies de varios quadrados estarán entre sí como los quadrados de sus lados: esto es, como los números que resultan elevando al quadrado (Aritm. art. 86.) los valores de sus lados expresados en las mismas unidades.

Corolario IV. Por consiguiente, si dos dimensiones lineales estan entre sí como L : l, las correspondientes dimensiones quadradas (esto es, las superficies de los quadrados cuyos lados sean dichas dimensiones) estarán entre sí como $L^2 : l^2$.

Por exemplo: por quanto el pie lineal es á la pulgada lineal como 12 : 1, el pie superficial será á la pulgada como $12^2 : 1^2$; esto es, que el pie superficial contendrá 144 pulgadas superficiales: por la misma razon, la pulgada superficial contendrá 144 líneas superficiales, &c. Por quanto la vara contiene 3 pies, la vara superficial contendrá 9 pies superficiales.

Asimismo, por quanto el pie lineal de Paris es al de Burgos como 7 : 6, los correspondientes pies superficiales estarán entre sí como 49 : 36.

221. Para no equivocarse en las reducciones de las unidades superficiales de especies mayores á menores, ó de estas á aquellas (Aritm. art. 76.), se debe tener muy presente la diferencia que existe entre las unidades lineales y superficiales, y no regirse por lo establecido (Aritm. art. 74.) referente á distancias, puesto que allí solo tratamos de unidades lineales; y si hubiéramos de establecer aquí las superficiales, diríamos que porque la legua consta de 8000 varas, la legua superficial ó quadrada constará de 64000000 varas quadradas: que porque la legua marina consta de 6660 varas y la milla de 2220, la legua marina superficial y la milla constan de 44355600 varas quadradas la primera, y de 4928400 la segunda; y que la toesa consta de 36 pies superficiales de Paris.

222. Teorema. *Un rectángulo y un paralelógramo obliquángulo de igual base y altura, son iguales.*

Demostracion. Imagínese la base inferior del paralelógramo obliquángulo colocada sobre la del rectángulo (fig. 112, y 113.) como A B C D, E B C F y la base

Fig. 112, *y* 113.

superior E F del paralelógramo obliquángulo formará una misma recta con la base superior del rectángulo A D, por suponerse el uno y el otro de igual altura. Establecido esto, ó el lado E F del paralelógramo obliquángulo caerá dentro de la base superior del rectángulo como en la figura 112, ó fuera como en la figura 113. En ambos casos (fig. 112, y 113.) los triángulos rectángulos A B E, D C F tendrán iguales las hipotenusas B E, C F, y los catetos A B, D C, por lados opuestos de unos mismos paralelógramos (art. 184, corol. 1.). Por consiguiente dichos triángulos son totalmente iguales (art. 155, corol. IV.).

Demostrado esto, en el caso de la figura 112 agréguese á ambos triángulos el trapecio E B C D, y las sumas, que son el rectángulo A B C D, y el paralelógramo obliquángulo E B C F seran iguales.

En el caso de la figura 113, quítese de ambos triángulos A B E, D C F el triángulo D I E, y los resultados que son los trapecios A B I D, C I E F seran iguales. Agréguese á ambos trapecios el triángulo B I C, y las sumas que son el rectángulo A B C D y el paralelógramo obliquángulo E B C F seran iguales.

Corolario I. De lo que acabamos de decir y de lo visto (art. 220, escol.) resulta que la superficie de todo paralelógramo se hallará multiplicando la base por la altura.

Corolario II. Luego todos los paralelógramos de igual base y altura son iguales.

Corolario III. Síguese de lo dicho (corol. 1.), que para que dos paralelógramos sean iguales en superficie, basta que el producto de la base del uno multiplicada por la altura sea igual al producto de la base del segundo multiplicada por su altura.

Corolario IV. Luego quando dos paralelógramos son

iguales en superficie, sus bases son reciprocamente proporcionales á sus alturas: es decir, que la base y la altura del uno pueden considerarse como los extremos de una proporcion, de la qual la base y altura del otro forman los medios; porque considerándolos así el producto de los medios es igual al producto de los extremos: luego habrá proporcion (Aritm. art. 114.).

Corolario V. En general, las superficies de los paralelógramos estarán entre sí como los productos de las bases por las alturas.

Esto es evidente, puesto que la medida de todo paralelógramo es el producto de su base por su altura.

Corolario VI. Luego es facil deducir, que quando dos paralelógramos tienen igual altura, sus superficies estarán entre sí como sus bases; y que quando tienen bases iguales, estarán entre sí como sus alturas.

En efecto, la razon de los productos no cambiará, si se omite en cada uno el factor comun (Aritm. art. 118).

223. Teorema. *Si un triángulo y un paralelógramo tienen igual base y altura, el triángulo será mitad del paralelógramo.*

Fig. 114. *Demostracion.* Sea el triángulo A B C (fig. 114.), cuya base es B C y la altura A E. Tírese la recta A D paralela á la base B C, y por el punto C la C D paralela al lado A B; y resultará formado el paralelógramo A B C D. Dicho paralelógramo se compone de los triángulos iguales A B C, C A D (art. 184.). Por consiguiente el triángulo propuesto A B C será mitad del paralelógramo A B C D de igual base y altura. De esto y de lo establecido (art. 222, corol. II.) resulta que el triángulo será mitad de todos los paralelógramos de igual base y altura.

Corolario I. De aquí y de lo establecido (art. 222,

corol. 1.) se sigue, que la superficie del triángulo se hallará multiplicando la base por la altura, y tomando la mitad del producto.

Corolario II. Respecto á que lo mismo es tomar la mitad del producto que multiplicar el uno de los factores por la mitad del otro (Aritm. art. 29, núm. 2.°), tambien se hallará la superficie del triángulo multiplicando la base por la mitad de la altura, ó la altura por la mitad de la base.

Corolario III. Todos los triángulos de igual base y altura son iguales.

Corolario IV. Las superficies de los triángulos estarán entre sí como las mitades de los productos de sus bases por sus alturas; y como las mitades estan entre sí como los todos, estarán tambien entre sí las superficies de los triángulos como los productos de sus bases por sus alturas.

Corolario V. Luego (art. 222, corol. VI.) quando dos triángulos tienen igual altura, sus superficies estarán entre sí como sus bases; y que quando tienen bases iguales, estarán entre sí como sus alturas.

224. Teorema. *La superficie de un trapecio es igual al producto de la altura por la semisuma de sus bases, ó bien se hallará multiplicando la altura por una línea tirada paralelamente á las bases y equidistante de ellas.*

Fig. 91. *Demostracion.* 1.° Sea A B C D (fig. 91.) el trapecio. Tírese la diagonal D B, con lo que quedará dividido en dos triángulos A B D, B D C, de los quales E F es la altura comun. Para obtener la superficie del triángulo A B D, se ha de multiplicar la mitad de A B por la E F, y para obtener la del triángulo B D C, se ha de multiplicar la mitad de D C tambien por E F

(art. 223, corol. II.): luego la superficie del trapecio vale la mitad de A B multiplicada por E F, mas la mitad de D C multiplicada por E F; es decir, la mitad de A B + D C multiplicada por E F, que es lo que se pretendia demostrar.

2.° Para demostrar la segunda parte: por el medio G del lado A D se tirará la G H paralela á la A B: esta línea G H será la mitad de la suma de las dos líneas A B y D C. Porque, sea I el punto adonde la G H corta á la diagonal D B, los triángulos D B A, D I G son semejantes, puesto que tienen el ángulo en D comun y sus lados opuestos paralelos entre sí (art. 145, corol. II.), manifiestan que así como D G es la mitad de A D, así G I es mitad de A B. Pero G H siendo paralela á la A B y á la D C, B C (art. 145, corol. II.) está cortada del mismo modo que A D: se probará del mismo modo que I H es mitad de D C, considerando los triángulos semejantes B D C y B I H.

225. Problema 61. *Hallar la superficie de qualquiera figura plana rectilinea.*

Divídase la figura propuesta en triángulos, por medio de las diagonales tiradas del vértice de un ángulo á los de los demas. Hállese la superficie de cada triángulo (art. 223, corol. II.); y sumando las superficies de todos ellos, se tendrá la superficie de la figura: *véase la figura 97.*

226. Problema 62. *Hallar la superficie de qualquiera polígono regular.*

Como que todo polígono regular tiene todos sus lados iguales (art. 175.), y que todas las apotemas son iguales (art. 182.), si se considera compuesto de triángulos que tienen su vértice en el centro, se tendrá la superficie *multiplicando uno de sus lados por la mitad de la apotema, y multiplicando este producto* por el número

de los lados; ó lo que es lo mismo, *multiplicando su perímetro por la mitad de la apotema*: véase la fig. 96.

227. Teorema. *La superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio.*

Demostracion. El círculo se puede imaginar como un polígono regular de un número de lados infinito (art. 189.); é imaginando que desde el centro salen radios á todos los puntos de la circunferencia, quedará dividido el círculo en un sin número de triángulos que tienen su vértice en el centro. La superficie de cada uno de estos triángulos será igual al producto de la mitad del radio (que es la altura de todos ellos) por el arco muy pequeño que le sirve de base; y por lo tanto (art. 226.) la superficie de todos los triángulos ó del círculo será igual á su perímetro (que es la circunferencia) multiplicado por la mitad del radio.

Corolario. Tambien se hallará la superficie del círculo multiplicando la circunferencia por el radio y tomando la mitad del producto, ó multiplicando el radio por la mitad de la circunferencia (Aritm. art. 29, núm. 2.°).

228. Problema 63. *Dado el diámetro ó el radio de un círculo, hallar su superficie.*

Hallamos (art. 191, probl. 46.) que la circunferencia correspondiente al diámetro de 8 varas, ó al radio de 4, es de 25'1328 varas: luego la superficie del círculo de 8 varas de diámetro que se busca será 25'1328 × 2 = 50'2656 varas quadradas.

229. Teorema. *La superficie de un sector de círculo es igual al arco que le sirve de base multiplicado por la mitad del radio.*

Demostracion. Puesto que el círculo puede ser consi-

derado como un polígono regular de una infinidad de lados (art. 227.), un sector de círculo puede considerarse como una porcion de este polígono regular, y su superficie como compuesta de una infinidad de triángulos que tienen sus vértices en el centro y por altura el radio. Luego la superficie de un sector de círculo es igual al arco que le sirve de base multiplicado por la mitad del radio.

Escolio. Es evidente que en un mismo círculo, las extensiones de los arcos son proporcionales al número de sus grados: de consiguiente es claro, que quando se conozca el largo de la circunferencia se podrá tener la de un arco de tal número de grados que se quiera, haciendo esta proporcion: 360° *es al número de grados del arco cuya extension se busca, como la extension de la circunferencia es á la del mismo arco.*

Corolario. Es evidente que para obtener la superficie del segmento A D B G (fig. 42.) es preciso calcular la de su sector C A G B C y de ella restar la del triángulo A B C.

VIGÉSIMA TERCIA LECCION.

DE LA COMPARACION DE LAS SUPERFICIES Y DE LOS PLANOS.

230. Teorema. *Las superficies de los triángulos semejantes estan entre sí como los quadrados de sus dimensiones homólogas.*

Demostracion. Sea A la altura, B la base, S la superficie, y L una dimension qualquiera de uno de los triángulos; y a, b, s, l, las dimensiones correspondientes del otro triángulo.

Por la semejanza de los triángulos seran A : a :: L : l, y tambien B : b :: L : l; y multiplicando los términos correspondientes de las dos proporciones anteriores (Aritm. art. 118.), será $A \times B : a \times b :: L^2 : l^2$.

Es así (art. 223, corol. 2v.) que $A \times B : a \times b :: S : s$. Luego $S : s :: L^2 : l^2$, que es lo que se trataba de demostrar.

231. Teorema. *Las superficies de qualesquiera figuras semejantes estan entre sí como los quadrados de sus dimensiones homólogas.*

Demostracion. Si dos figuras son semejantes, tirando en una y en otra diagonales entre los ángulos correspondientes, quedarán ambas divididas en triángulos (art. 180.), y los lados de los triángulos de la una seran proporcionales con los lados de los triángulos de la otra (art. 147.). Por consiguiente, los triángulos A, B, C, &c., en que resulta dividida la primera figura, seran semejantes á los a, b, c &c., en que resulta dividida la segunda (art. 152.). Por lo que se acaba de demostrar (art. 230.) es $L^2 : l^2 :: A : a$, representando L y l dos dimensiones homólogas de los triángulos A y a.

Si H y h son dos dimensiones homólogas de las figuras, deberá ser (art. 147.)..... $L : l :: H : h$.

Por consiguiente (Aritm. art. 119.)..... $L^2 : l^2 :: H^2 : h^2$.

Se halló antes..... $L^2 : l^2 :: A : a$.

Luego..... $H^2 : h^2 :: A : a$.

Esta misma demostracion se aplica á todos los triángulos, y por lo tanto será.....
$$\begin{cases} H^2 : h^2 :: A : a. \\ H^2 : h^2 :: B : b. \\ H^2 : h^2 :: C : c. \end{cases}$$

Luego por la igualdad de razones (Aritm. art. 117.) $H^2 : h^2 :: (A+B+C+\&c.) : (a+b+c+\&c.)$; esto es, el

quadrado de la dimension H de la primera figura es al quadrado de la dimension homóloga h de la segunda, como la suma de los triángulos de que se compone la primera figura es á la suma de los triángulos de que se compone la segunda, que es lo que se queria demostrar.

Corolario. Las superficies de los círculos estan entre sí como los quadrados de sus radios ó de sus diámetros.

Esto se funda en que los círculos son figuras semejantes (art. 189.), y que los radios y los diámetros son líneas homólogas. Por la misma razon se dirá lo mismo de los sectores, y de los segmentos del mismo número de grados.

232. Teorema. *Las superficies de las figuras curvilíneas semejantes estan entre sí como los quadrados de sus dimensiones homólogas.*

Demostracion. Toda figura curvilínea se puede imaginar dividida en una infinidad de trapecios por medio de otra infinidad de líneas paralelas que atraviesen la figura; y cada trapecio se puede imaginar dividido en dos triángulos: luego las superficies de las figuras semejantes, aunque sean curvilíneas, estarán entre sí como los quadrados de sus dimensiones homólogas (art. 231).

233. De lo dicho (art. 188, y 231.) se deduce, que los perímetros de las figuras semejantes siguen la razon simple de sus dimensiones homólogas; pero que sus superficies siguen la razon de los quadrados de sus dimensiones homólogas. De consiguiente, si se tienen tres figuras semejantes, tales que la segunda tenga un lado duplo del lado homólogo de la primera, y la tercera un lado triplo del lado homólogo en la primera; concluiremos que el perímetro de la segunda es duplo del de la primera, que el perímetro de la tercera es triplo del de la primera, y que la superficie de la segunda

es quadrupla de la superficie de la primera, y que la superficie de la tercera contiene nueve veces la superficie de la primera.

DE LOS PLANOS.

234. Se puede considerar un plano (art. 19.) como descripto por el movimiento de una línea recta que se mueve paralelamente á sí mismo, ó por el movimiento de una línea recta que gira al rededor de un punto sin elevarse ni baxar durante este giro.

Á los planos de que vamos á tratar no le suponemos ningun tamaño ni figura determinada: suponemos que se extienden indefinidamente en todos sentidos; y las figuras que les daremos aquí solo son para ayudar la imaginacion, y facilitar su inteligencia.

235. De la definicion del plano (art. 19.) se infiere, que si una recta tiene dos puntos en un plano estará toda ella en dicho plano.

Fig. 115. 236. Teorema. *Dos líneas rectas A B, C D (fig. 115) que se cortan, estan en el mismo plano.*

Demostracion. Si se imagina que la recta A B se mueva paralelamente á sí misma á lo largo de la recta C D, es evidente que engendrará un plano que contendrá á las rectas A B, C D: luego dichas dos líneas estan en un mismo plano.

237. *Por una misma línea recta se puede hacer pasar una infinidad de planos diferentes.*

Fig. 116. *Demostracion.* Sea A B (fig. 116.) la recta de que se trata. Es claro que del punto A se pueden tirar una infinidad de rectas, como A C, A D, A E. Luego si se imagina que la línea A B se mueve paralelamente

á sí misma sucesivamente á lo largo de las líneas A C, A D, A E, es evidente que engendrará los diferentes planos B C, B D, B E, y que todos ellos pasarán por la misma línea A B: luego por una misma línea recta se puede hacer pasar una infinidad de planos diferentes.

238. Teorema. *Tres puntos, que no estan en línea recta, determinan la posicion de un plano.*

Fig. 116. *Demostracion.* Si consideramos (fig. 116.) una infinidad de planos diferentes B C, B D &c., que pasan por una misma línea recta A B, y que de consiguiente tienen los puntos A y B comunes á todos ellos: es claro que solo uno de ellos podrá pasar por el punto C: luego los tres puntos A, B, C, determinan la posicion del plano B C: del mismo modo los tres puntos A, B, D determinan la posicion del plano B D, &c.: luego bastan tres puntos que no esten en línea recta para determinar la posicion de un plano.

Corolario. De lo dicho se infiere que dos planos no pueden tocarse en tres puntos, sin confundirse en uno, á menos que dichos tres puntos no esten en línea recta.

239. Teorema. *Si dos planos se cortan, su interseccion será una línea, y esta línea debe ser recta.*

Demostracion. Esto se funda en que, como ninguno de los dos planos tiene espesor (art. 3.), su interseccion solo puede ser extensa en longitud: luego esta interseccion es una línea; pero todos los puntos de esta línea son comunes á los dos planos: luego todos estos puntos estan en línea recta (art. 19.).

Fig. 117. 240. Teorema. *Una línea recta A B (fig. 117.) perpendicular á un plano M N, es perpendicular á todas las rectas B C, B D &c., que se pueden tirar por su pie en el mismo plano M N.*

Demostracion. Línea perpendicular á un plano, es aquella que no se inclina hácia ningun lado respecto á dicho plano. Luego si entre las líneas B D, B E &c. hubiese una á la qual A B no fuese perpendicular, A B se inclinaria pues hácia dicha línea, y de consiguiente hácia el plano: luego no sería perpendicular al plano.

Fig. 117. 241. Teorema. *Quando una línea recta A B (fig. 117) es perpendicular á dos rectas C B, D B, en su punto de interseccion B, dicha línea cae perpendicularmente sobre el plano en que estan las otras dos rectas expresadas.*

Demostracion. Para demostrarlo, imagínese que la C B gira al rededor de la A B que es perpendicular á ella. Es claro que esta línea C B describirá un plano (art. 234.) al qual A B será perpendicular. Pero este plano es el de las dos líneas C B, D B. Porque, puesto que la línea A B es perpendicular no solo á la D B sino tambien á la C B, dicha línea C B girando al rededor de A B, se confundirá necesariamente en una de estas posiciones con la D B: luego la línea D B debe hallarse en el plano trazado por la C B: luego A B es perpendicular al plano de las dos líneas C B, D B, que es lo que se pretendia demostrar.

Fig. 117. 242. Teorema. *De un mismo punto A (fig. 117.) fuera del plano M N no se puede baxar sino una sola perpendicular A B sobre dicho plano.*

Demostracion. Si se quisiese tirar una segunda perpendicular como A C, se tendrian dos perpendiculares baxadas desde el mismo punto A sobre una misma recta B C, lo que es un absurdo (art. 72.).

Fig. 118. 243. Teorema. *Desde un mismo punto A (fig. 118.) tomado en un plano M N, no se puede levantar mas que una sola perpendicular A B sobre dicho plano.*

Demostracion. En efecto, si se pretende que desde el mismo punto A se puede levantar una segunda perpendicular A D sobre el plano M N, se podrá hacer pasar un plano por las dos líneas A B, A D que venga á cortar al plano M N en la recta A C. Es evidente que entonces se tendrian en el mismo plano A B D C dos perpendiculares A B, A D levantadas desde el mismo punto A sobre una misma recta A C, lo que es un absurdo (art. 73.).

Corolario. De lo establecido (art. 242, y 243.) se deduce, que la distancia de un punto qualquiera á un plano se mide por la perpendicular tirada desde dicho punto al plano propuesto.

Fig. 119. 244. Teorema. *Dos líneas rectas A B, C D (fig. 119) perpendiculares á un mismo plano M N seran paralelas entre sí.*

Demostracion. Para demostrarlo, únanse los dos pies B y D de estas perpendiculares por la línea B D: es evidente que las dos líneas A B, C D seran perpendiculares á la línea B D (art. 240.): luego seran paralelas entre sí (art. 92, corol.).

Fig. 120. 145. Teorema. *Un plano A B C D (fig. 120.) es perpendicular á otro plano M N, quando pasa por una recta E F perpendicular á este.*

Demostracion. Un plano es perpendicular á otro plano, quando encuentra á este último sin inclinarse hácia ningun lado. Luego es evidente que el plano A B C D, pasando por la línea E F perpendicular al plano M N no puede tener inclinacion hácia ningun lado respecto á dicho plano: luego el plano A B C D es perpendicular al plano M N, que es lo que se pretendia demostrar.

Fig. 121. 246. Teorema. *Si dos planos C D, E F (fig. 121.)*

que se cortan son perpendiculares á un tercer plano M N, su interseccion A B será tambien perpendicular á dicho plano M N.

Demostracion. Si se imagina una perpendicular levantada sobre el plano M N en el punto B, adonde la interseccion de los dos planos C D, E F encuentra al plano M N; es evidente que esta perpendicular, no pudiendo inclinarse mas hácia un lado que hácia otro (art. 240.), debe hallarse enteramente en el plano E F, que es perpendicular al plano M N; y que por la misma razon debe tambien hallarse por entero en el plano C D, el que igualmente es perpendicular al plano M N: dicha perpendicular será pues la misma línea de interseccion de los dos planos C D, E F, que es lo que se pretendia demostrar.

247. Teorema. *Un ángulo plano* (es decir, la abertura de dos planos A N, N D (fig. 122.) que se terminan, ó se suponen terminados, en su comun seccion M N), *tiene la misma medida que el ángulo rectilíneo E I H, formado por las perpendiculares E I, H I, tiradas en estos planos á un mismo punto I de su interseccion.* Fig. 122.

Demostracion. En efecto, si se imagina que los dos planos A N, N D se hallaban sobrepuestos el uno encima del otro, de modo que el punto E coincidiendo con el punto H, las perpendiculares E I, H I no formaban sino una misma y única línea; y se supone que el plano N D, quedando inmovil, se hace girar el plano A N sobre la recta M N como sobre una visagra para formar el ángulo plano A M D. Es evidente que durante el movimiento del plano A N, la línea E I permanecerá siempre perpendicular á la recta M N, y que el punto E describe un arco de círculo que expresa lo que el plano A N ha girado separándose del plano N D, para formar el ángulo plano A M D: luego este arco

es la medida del ángulo plano A M D; pero este arco es tambien la medida del ángulo rectilíneo E I H (art. 56.); y esto es lo que se pretendia demostrar.

Corolario I. De lo dicho se sigue, que las propiedades que resultan de la inclinacion de los planos, son las mismas que las de las líneas rectas que se encuentran: luego

Corolario II. Un plano que insiste sobre otro, forma dos ángulos planos contiguos, que juntos valen 180° (art. 247, y 59.).

Corolario III. Quando dos planos se cortan, los ángulos planos opuestos por el vértice son iguales (art. 247, y 65.).

Corolario IV. La suma de todos los ángulos planos formados por qualquiera número de planos, que pasen todos por una misma línea recta, será de 360° (art. 247, y 61.).

Corolario V. Todo plano que corte perpendicularmente á otro formará con el quatro ángulos rectos (art. 247, y 71).

Corolario VI. Si un plano forma con otro un ángulo recto, le será perpendicular (art. 247, y 70 corol. III.).

Corolario VII. Si un plano corta á otros planos que sean paralelos entre sí (*es decir, á planos que nunca pueden llegar á encontrarse por mas que se prolonguen*), forma con ellos ángulos correspondientes iguales, ángulos alternos internos iguales, &c. (art. 247, y 84, 85, 86, 87, 88.).

248. Teorema. *Si dos ó más planos paralelos estan cortados por otro plano, las líneas rectas formadas por sus intersecciones seran todas paralelas.*

Demostracion. Porque en efecto, es evidente que si estas intersecciones no fuesen paralelas, podrian encontrarse si se prolongasen: luego los planos en los quales estan formadas se encontrarian, lo que es contra lo supuesto: luego dichas intersecciones son paralelas, que es lo que se pretendia demostrar.

VIGÉSIMA QUARTA LECCION.

DE LOS SÓLIDOS EN GENERAL.

249. Todo espacio encerrado por todos lados por superficies que se encuentran, se llama *volumen*, *cuerpo* ó *sólido*.

250. Quando todas las caras que rodean un cuerpo son planas, el sólido se llama *poliedro*. Si todas las caras de un poliedro son polígonos regulares, iguales, semejantes y dispuestos del mismo modo, dicho poliedro es *regular*; é *irregular* quando les falta alguna de estas circunstancias.

Es claro que en general no puede existir poliedro alguno que á lo menos no tenga quatro caras; porque es imposible encerrar un espacio por todos lados con menor número de planos.

Las denominaciones particulares de los poliedros son semejantes á las de los polígonos (art. 174.). Así, se llama *tetraedro* al sólido que se compone de quatro caras, *exâedro* al sólido de seis caras, *octaedro* al de ocho, &c.

Los cuerpos terminados por superficies curvas, ó en partes planas y partes curvas, tienen nombres relativos

á la naturaleza de estas superficies, ó al modo por el qual se imaginan engendradas. Su número es infinito, pero en este Tratado solo nos ocuparemos del *cilindro*, *cono* y *esfera*.

251. Por *base* de un sólido se entiende aquella de sus caras sobre que se imagina formado. Quando el sólido tiene dos caras iguales y paralelas, se suelen comprehender con el nombre de bases una y otra, distinguiendo la una de la otra con los nombres de *superior* é *inferior*.

252. Por *altura* de un sólido de bases paralelas se entiende la distancia de la una á la otra: esto es, la perpendicular baxada de la una á la otra, ó á su prolongacion.

Si el sólido remata en punta, se entiende por altura la perpendicular baxada desde la punta ó cúspide del sólido á la base opuesta ó á su prolongacion.

Fig. 123, 124, 125, y 126. 253. *Prisma* es un sólido cuyas bases son paralelas, y del qual las demas caras son unos paralelógramos. *Véanse las figuras* 123, 124, 125, 126.

El prisma se puede considerar engendrado por el movimiento progresivo del plano B D F (fig. 123.), que caminase manteniéndose siempre paralelamente á sí mismo á lo largo de la recta A B. Fig. 123.

Las líneas tales como A B que son el encuentro de dos paralelógramos consecutivos, se llaman *aristas*.

El prisma es *recto*, quando las aristas son perpendiculares á la base: entonces son iguales á la altura. Fig. 124, y 126. *Véanse las figuras* 124 *y* 126.

Al contrario, el prisma es *oblicuo* quando dichas aristas se inclinan sobre la base. *Véanse las figuras* 123 *y* 125. Fig. 123, y 125.

Los prismas toman su nombre de las figuras que le sirven de bases: quando la base es un triángulo se llama *triangular* (fig. 123.), quando es un quadrilátero se llama *quadrangular* (fig. 124.) &c. Fig. 123, y 124.

Quando la base del prisma es un paralelógramo se llama *paralelepípedo*, rectángulo ú obliquángulo, segun el paralelógramo de su base.

Quando la base del prisma es un quadrado, y la
Fig. 126. arista A B (fig. 126.) es perpendicular á él, é igual á uno de sus lados, toma el nombre de *cubo* ó *exâedro regular*.

El cubo es pues un sólido comprehendido entre seis quadrados iguales: en seguida veremos que este es el sólido que se toma por unidad para la medicion de las solideces.

254. Se llama *exe* del prisma á la recta que se termina en los centros de sus dos bases opuestas, como
Fig. 123. L M (fig. 123.).

255. Quando la base del prisma es un círculo se
Fig. 127, llama *cilindro* (fig. 127, y 128.).
y 128. El cilindro es *recto* quando el exe C F es perpendicular á la base (fig. 127.). Llámase obliquo quando dicho exe C F (fig. 128.) se inclina respecto á la base.

El cilindro recto se puede considerar engendrado por la revolucion del paralelógramo rectángulo F C D E al rededor de su exe C F.

Corolario. De lo dicho (art. 253, y 255.) sobre el modo por el qual se puede considerar engendrado el prisma y el cilindro, se deduce, que en qualquier parte que se corten estos sólidos paralelamente á su base, la seccion será siempre un plano perfectamente igual á su base.

256. *Pirámide* es un sólido comprehendido entre varios planos, de los quales uno que se llama *base* es
Fig. 129, un polígono qualquiera, y los demas que son unos trián-
130, 131. gulos tienen por base los lados de este polígono, y todos ellos van á terminarse á un mismo punto, que se llama *vértice* de la pirámide. *Véanse las figuras* 129, 130 *y* 131.

La perpendicular A M tirada del vértice al plano que le sirve de base, se llama altura de la pirámide.

Se llama exe de la pirámide á la recta que va desde su vértice al centro de la base (art. 254.).

La pirámide se llama recta ú obliqua, segun que el exe es perpendicular ú obliquo á la base.

Fig. 131. *Corolario.* En la pirámide recta (fig. 131.) el exe y la altura son la misma cosa.

Las pirámides toman el nombre de la figura que les sirve de base, y así se llama la pirámide *triangular*, *quadrangular* &c., segun que su base es un triángulo, un quadrilátero &c.

Se dice que una pirámide es *regular*, quando el polígono que le sirve de base es regular, y que su exe
Fig. 131. pasa por el centro de dicho polígono (fig. 131.).

La perpendicular A G tirada desde el vértice A sobre uno de los lados de la base D E, se llama apotema.

Fig. 132, *y* 133. 257. *Cono* es un sólido (fig. 132, y 133.) que puede considerarse como una pirámide cuya base es un círculo.

El cono es *recto* ú *obliquo*, segun que su exe cae ó no cae perpendicularmente sobre su base.

El cono recto se puede considerar formado por el
Fig. 132. movimiento del triángulo rectángulo A C D (fig. 132.), girando al rededor del lado A C.

258. Se llama *pirámide truncada* á la que le falta una porcion en que está comprehendido el vértice.

Fig. 134. Llámase *cono truncado* (fig. 134.) el que le falta una porcion en que está comprehendido el vértice.

259. *Esfera* ó *globo* es el sólido engendrado por la revolucion de un semicírculo A B D (fig. 135.) al rededor de su diámetro A D.

Por esta razon se puede decir, que la esfera es un

sólido terminado por una superficie curva, cuyos puntos se hallan á igual distancia de un punto C llamado centro.

La recta C B, terminada en el centro y superficie de la esfera, se llama *radio*; y la recta A D, que pasando por el centro se termina por ambos lados en la superficie, se llama *diámetro*.

Corolario. Todos los radios de una misma esfera son iguales entre sí, y á los del círculo generador; y lo propio le sucederá á los diámetros que constan de dos radios.

260. Teorema. *Si un plano corta á la esfera, la seccion será un círculo.*

Fig. 135. *Demostracion.* Sea a n b m a (fig. 135.) la seccion de la esfera; y como todos los puntos de su superficie distan igualmente de su centro C (art. 259.), tirada la perpendicular C c, resultarán iguales los triángulos rectángulos C c n, C c m &c., que tienen el cateto C c comun y las hipotenusas C n, C m &c. iguales (art. 155, corol. IV.): luego seran iguales las c n, c m &c., y por consiguiente la seccion a n b m a será un círculo.

261. Teorema. *El círculo mayor resulta quando el plano pasa por el centro de la esfera.*

Fig. 135. *Demostracion.* Sea a b (fig. 135.) el diámetro de un círculo qualquiera, y haciendo pasar un plano por dicha a b y el centro C, resultará el círculo A B D E, del qual A B es un diámetro y a b una cuerda: luego A D es mayor que a b (art. 45.); y por consiguiente el círculo A G D F A cuyo diámetro es el de la esfera es siempre mayor que otro qualquiera a n b m a cuyo diámetro no pasa por dicho centro.

Por esta razon se llaman *círculos máximos* los que tienen su centro en el de la esfera; y los demas se llaman *círculos menores.*

Corolario I. Todos los círculos máximos son concéntricos.

Corolario II. Todos los círculos máximos tienen por radio el de la esfera, y por consiguiente son iguales.

262. Teorema. *El círculo máximo divide á la esfera en dos partes iguales.*

Fig. 135. *Demostracion.* De la rotacion del quadrante A B (fig. 135.) sobre el radio B C, resultará la mitad de la esfera que está terminada por el círculo máximo A G D F A; y de la rotacion del quadrante A E sobre el radio C E resulta la otra mitad, terminada por el mismo círculo máximo A G D F A: luego dicho círculo máximo divide á la esfera en dos mitades.

263. Á la mitad de la esfera se le dá con mucha propiedad el nombre de *semiesfera* ó *hemisferio.*

264. Exe de la esfera se llama al diámetro de la esfera que cae perpendicularmente sobre el plano de qualquiera de sus círculos: B E es el exe de la esfera respecto al círculo máximo A G D F A (fig. 135.).

Fig. 135. Los puntos B y E, en que el exe D E corta á la esfera, se llaman *polos* del círculo A G D F A.

265. Los dos extremos de qualquiera diámetro de la esfera se llaman *puntos diametralmente opuestos.*

266. Se llama *casquete* á la porcion de la superficie de la esfera comprehendida entre un círculo qualquiera y su polo mas inmediato.

267. Se llama *zona* á la porcion de la superficie de la esfera comprehendida entre dos círculos paralelos.

268. Se llama *segmento esférico* á la porcion de es-

fera comprehendida entre el plano de un círculo y su polo mas inmediato.

269. Quanto llevamos dicho desde el artículo 259 es muy interesante para la cabal inteligencia de la parte geográfica, en que se funda la inteligencia y formacion de las cartas y planos geográficos; parte tan esencial como indispensable en la instruccion de un militar.

VIGÉSIMA QUINTA LECCION.

DE LA MEDIDA Y COMPARACION DE LAS SUPERFICIES DE LOS SÓLIDOS.

270. Las superficies de los prismas y de las pirámides se componen de paralelógramos, de triángulos y de polígonos rectilíneos: por tanto pudiéramos dispensarnos de tratar aquí del modo de medirlas, puesto que hemos enseñado (Leccion vigésima segunda) los medios de medir las partes que las componen. Pero de lo que nos resta que decir sobre este punto, se pueden sacar algunas conseqüencias, que no solo servirán á simplificar las operaciones que exîgen estas medidas, sino que tambien serán útiles para valuar las superficies de los cilindros, de los conos, y aun de la esfera.

271. Teorema. *La superficie de todo prisma, no entrando las dos bases* (á cuya clase de superficie se le da el nombre de superficie lateral), *es igual al producto de una de sus aristas por el perímetro de una seccion* Fig. 125. *b d f h k* (*fig.* 125.) *hecha con un plano, al qual dicha arista sea perpendicular.*

Demostracion. En efecto, porque ya que se supone que la arista A B es perpendicular al plano b d f h k, las demas aristas que son todas paralelas á esta serán

tambien perpendiculares al plano b d f h k: luego recíprocamente las rectas b d, d f, f h, h k &c., serán perpendiculares cada una á la arista que corta: considerando pues las aristas como las bases de los paralelógramos que rodean al prisma, las líneas b d, d f, f h &c., serán sus alturas: luego para obtener la superficie del prisma será preciso multiplicar la arista A B por la perpendicular b d, la arista C D por la perpendicular d f, y así de las demas, y sumar todos estos productos; pero como todas las aristas son iguales, se obtendrá el mismo resultado multiplicando solo una de ellas, por exemplo A B por la suma de todas las alturas, es decir, por el perímetro b d f h k.

Quando el prisma es recto, la seccion b d f h k no difiere de la base B D F H K, y la arista A B es entonces la altura del prisma: luego

Corolario. *La superficie lateral de un prisma recto es igual al producto del perímetro de la base multiplicado por la altura.*

272. Teorema. *La superficie lateral de un cilindro recto, es igual al producto de la altura de dicho cilindro, por la circunferencia de su base.*

Demostracion. Esto se funda en que se puede considerar el círculo como un polígono regular de una infinidad de lados (art. 189.): luego se puede considerar el cilindro como un prisma cuya superficie consta de un número infinito de paralelógramos: luego para hallar su superficie lateral, será necesario multiplicar su altura por la circunferencia de su base.

En quanto al *cilindro obliquo* se ha de multiplicar su altura A B (fig. 128.) por el perímetro de la seccion b g d h, haciendo esta seccion conforme enseñamos (art. 271.). El método para determinar la longitud de esta seccion se funda en principios mas extensos que los que hasta ahora hemos sentado. En la práctica es preciso

Fig. 128.

contentarnos con medirla mecanicamente, envolviendo el cilindro con un hilo ú otra cosa equivalente, que es menester sujetar en un plano, al qual la longitud A B del cilindro sea perpendicular.

273. Teorema. *La superficie lateral de una pirámide regular es igual al producto del perímetro de su base por la mitad de la apotema.*

Fig. 131. *Demostracion.* Sea la pirámide representada por la *figura* 131. Es evidente que su superficie lateral se compone de triángulos que tienen la misma altura: de consiguiente, para hallar la superficie de todos ellos es necesario multiplicar la suma de todas sus bases, esto es, el perímetro B C D E F B por la mitad de la apotema A G (art. 223, corol. II.).

Si la pirámide fuese irregular *se deberá buscar separadamente la superficie de cada uno de los triángulos que la componen, y sumarlas todas.*

274. Teorema. *La superficie convexâ de un cono recto es igual al producto de la circunferencia de su base por* Fig. 132. *la mitad del lado A B del mismo cono* (*fig.* 132.).

Demostracion. Fúndase lo dicho en que la circunferencia de un círculo puede considerarse como un polígono de una infinidad de lados (art. 189.), por lo que se deduce que el cono no es mas que una pirámide regular, cuya superficie lateral debe medirse segun las reglas dadas (art. 273.).

No trataremos del modo de hallar las superficies del cono obliquo, por pender su investigacion de otros principios. Solo daremos el de obtenerla con aproximacion. Para lo qual, pártase la circunferencia de la base en un número suficiente de arcos, para que se pueda considerar cada uno, sin error substancial, como una línea recta. Hecho esto, se calculará la superficie como la de una pirámide que conste de tantos triángulos quantos arcos hubiese.

275. Teorema. *La superficie lateral convexâ de un cono recto truncado, de bases paralelas, es igual al producto del lado del tronco, por la circunferencia de la seccion hecha á iguales distancias de las dos bases opuestas.*

Fig. 134. *Demostracion.* La superficie del cono truncado (fig. 134.) puede considerarse como el conjunto de una infinidad de trapecios E F f e, cuyos lados E e, F f van á rematar en el vértice A; pero la superficie de cada uno de estos trapecios es igual á la mitad de la suma de las dos bases opuestas E F, e f, multiplicada por la distancia que hay entre ellas (art. 224.), cuya distancia no se distingue de cada uno de los lados E e, F f ó B b: luego para sacar la suma de todos estos trapecios se ha de multiplicar la mitad de la suma de todas las bases opuestas, como E F, e f, esto es, la mitad de la suma de las dos circunferencias B G D H, b g d h por la línea B b, altura comun de todos estos trapecios.

Si por el medio M del lado B b se imagina trazada la circunferencia M N O P paralela á las bases, es evidente que la porcion de arco M N es la semisuma de los arcos E F, e f (art. 124, núm. 2.°); de consiguiente toda la circunferencia M N O P será igual á la semisuma de las circunferencias B G D H, b g d h: luego substituyendo valores podremos decir que la superficie lateral del cono truncado es igual al producto de la circunferencia M N O P por el lado B b, que es lo que se pretendia demostrar.

276. Teorema. *La superficie de la esfera es igual al producto de la circunferencia de uno de sus círculos máximos multiplicada por el diámetro.*

Fig. 135. *Demostracion.* Si consideramos la semicircunferencia B A E (fig. 135.) dividida en una infinidad de arcos, como d e siendo este arco infinitamente pequeño, se confundirá con su cuerda.

Tírense por los extremos del arco d e las paralelas d f, e g, y por i mitad de d e, la i h, y todas ellas perpendiculares al diámetro B E: asimismo tírese el radio i C: este radio será perpendicular á d e considerado como una cuerda puesto que la divide por medio (art. 96.). Si suponemos que la semicircunferencia B A E da la vuelta al rededor de B E, engendrará la superficie de la esfera, y cada uno de sus arcos d e engendrará la superficie de un cono truncado, que será un elemento de la superficie de la esfera.

Si del punto e se levanta la e k perpendicular á la d f, se tendrán los dos triángulos e k d, o C i semejantes (art. 150, corol. III.); luego tendremos d e : e k = u p :: i C : i o; y porque las circunferencias son proporcionales á sus radios (art. 189, corol. I.), será d e : u p :: la circunferencia del radio i C : la circunferencia del radio i o; luego (Aritm. art. 110.) d e × circunferencia i o = u p × circunferencia i C. Ahora bien, repárese que la superficie convexâ del cono truncado que el arco d e engendra por su revolucion, se mide segun lo dicho (art. 275.) multiplicando el lado d e de dicho tronco por la circunferencia correspondiente al diámetro i o, y que aquí acabamos de demostrar que dicho producto es igual á la porcion de exe u p multiplicada por la circunferencia correspondiente al radio de la esfera i C, esto es, por un círculo máximo. Pruébese lo mismo de todos los sólidos que componen la esfera, y tendremos *que su superficie es el producto de su exe B E por la circunferencia de su círculo máximo.*

Corolario I. La superficie de la esfera es quadrupla de la de uno de sus círculos máximos.

Esto se deduce, de que para hallar la superficie de un círculo máximo, segun lo dicho (art. 227.) debe multiplicarse la circunferencia por la mitad del radio, y para obtener la de la esfera es necesario multiplicar dicha circunferencia por el diámetro que es quadruplo de la mitad del radio.

Corolario II. La superficie de la esfera es los dos tércios de la superficie total del cilindro circunscripto.

En efecto, si nos figuramos un cilindro que ciña la esfera tocándola, y cuya altura sea igual al diámetro de dicha esfera, se podrá inferir *que la superficie de la esfera es igual á la superficie lateral del cilindro circunscripto*; porque (art. 272.) la superficie de dicho cilindro es igual al producto de la circunferencia de la base multiplicada por la altura; pero la circunferencia de la base es la de un círculo máximo de la esfera, y la altura es igual al diámetro: luego dicha superficie lateral del cilindro será igual á la superficie de quatro círculos máximos (corol. 1.). Pero la superficie total del cilindro, comprehendidas sus dos bases, es igual á la de sus círculos máximos: luego esta será á la de la esfera como 6 : 4, ó como 3 : 2, que es lo que se queria probar.

277. Problema 64. *Hallar la superficie del globo terráqueo, suponiendo que este sea exâctamente una esfera.*

Resolucion. Un grado de círculo máximo de la tierra consta de 20 leguas marinas (Aritm. art. 74.): luego la circunferencia constará de 7200. Con este dato será facil hallar el diámetro terrestre (art. 192.) diciendo $3'1416 : 1 :: 7200 \text{ leguas} : x = 2291'825$ valor de dicho diámetro; cuyo valor multiplicaré por 7200 que lo es de la circunferencia (art. 276.), y el producto 16501140 expresará el número de leguas quadradas que componen la superficie de la tierra, baxo la hipótesis propuesta.

278. Llámase *ángulo sólido* un espacio sólido terminado en punta por muchos ángulos planos que concurren en un punto comun. La punta de una pirámide es un ángulo sólido, y lo es tambien la esquina de un cubo ó de un prisma. En general se necesitan á lo menos tres ángulos planos para formar un ángulo sólido.

279. Llámanse *sólidos semejantes* aquellos que estan

terminados por un mismo número de superficies semejantes y cuyos ángulos sólidos son iguales unos con otros, cada uno al suyo; esto es, quando los ángulos planos, que forman cada ángulo sólido del primero, son iguales en número y cantidad á los que forman el ángulo sólido correspondiente del segundo.

280. Teorema. *Las superficies de los sólidos semejantes estan entre sí como los quadrados de sus líneas homólogas.*

Demostracion. Para convencerse de ello basta recordar que si los sólidos son semejantes (art. 279.) deberán componerse de planos semejantes, cuyas superficies (art. 231.) estan entre sí como los quadrados de sus lados ó líneas homólogas, cuyas líneas son líneas homólogas de los sólidos, y proporcionales á todas las demas líneas homólogas.

281. Teorema. *Las superficies de dos esferas estan entre sí como los quadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Demostracion. Esto se funda en que la superficie de una esfera es quadrupla de la de su círculo máximo (art. 276, corol. 1.): las superficies de dos esferas estan entre sí como el quadruplo de sus círculos máximos, ó simplemente como sus círculos máximos; esto es (art. 231, corol.), como los quadrados de los radios ó de los diámetros.

282. Si los sólidos que se quieren comparar no son semejantes, para averiguar la razon que hay entre sus superficies, es preciso calcular la de cada uno separadamente, pero en medidas de la misma especie; y comparar el número de medidas que cabe en la una con el número de medidas que cabe en la otra, esto es, por exemplo el número de pies quadrados de la una con el número de pies quadrados de la otra.

VIGÉSIMA SEXTA LECCION.

DE LA MEDIDA Y COMPARACION DE LAS SOLIDECES DE LOS CUERPOS.

283. Para representar en número las solideces de los cuerpos, se hace preciso escoger por unidad ó término de comparacion la solidéz de un cuerpo determinado.

Los Geometras han convenido en tomar por *unidad de solidéz* la de un cubo cuyo lado es la unidad lineal. Es evidente que cada una de las seis caras de dicho cubo es un quadrado, que representa la unidad superficial (art. 253, y 216.).

284. La *toesa cúbica* es un cubo cuyo lado es de una toesa lineal. La *vara cúbica* es un cubo cuyo lado es una vara lineal. El *pie cúbico* es un cubo cuyo lado es un pie lineal &c.

285. Por esta razon, quando se dice, por exemplo, que la solidéz de un prisma es de 10 pies cúbicos, se entiende que contiene 10 pies cúbicos, de modo que si dicho prisma fuese hueco, se llenaria echando en él 10 veces el agua contenida en un cubo hueco de un pie de largo.

286. Problema 64. *Medir la solidéz de un paralelepípedo rectángulo en unidades cúbicas.*

Fig. 136. Sea A B C D E F G H (fig. 136.) el paralelepípedo rectángulo de que se trata, y sea x el cubo que ha de servir de unidad en esta medicion.

Averígüese quantas veces la base E F G H contiene

á la base del cubo e f g h: averígüese tambien quantas veces la altura A H contiene á la altura a h, y multiplíquese el número de partes quadradas de E F G H por el número de partes de A H, el producto expresará quantas veces el cubo x está contenido en el paralelepípedo propuesto; es decir, quantas varas cúbicas ó pies cúbicos &c. mide el sólido propuesto, segun que el lado a h del cubo x sea de una vara, ó de un pie.

Demostracion. En efecto, se ve que se pueden colocar en la superficie E F G H tantos cubos x, quantos quadrados e f g h hay en la base E F G H. Todos estos cubos juntos formarán un paralelepípedo, cuya altura H L será igual á a h; pero es evidente que se podrán colocar en el sólido A B C D E F G H tantos paralelepípedos como aquel, quantas veces la altura H L cupiese en A H: luego se ha de repetir dicho paralelepípedo, ó el número de cubos que se pueden colocar en E F G H tantas veces quantas partes hay en A H; ó como el número de dichos cubos es el mismo que el número de los quadrados que caben en la base, se ha de multiplicar el número de los quadrados que caben en la base por el número de las partes de la altura, y el producto expresará el número de cubos que caben en el paralelepípedo propuesto.

caben

Corolario. Luego para hallar la superficie de un paralelepípedo rectángulo *es preciso multiplicar la superficie de su base por la altura.*

solidez

Escolio. Pero aquí es preciso prevenir lo mismo que prevenimos (art. 2.o, corol. 1.) respecto de las superficies. Así como no se puede decir, hablando con propiedad, que se multiplica una línea por una línea, tampoco se puede decir que se multiplica una superficie por una línea. Esto es lo mismo, conforme lo acabamos de ver, que tomar un sólido (que consta de tantos cubos quantos quadrados hay en su base) tantas veces quantas su

altura cabe en la del sólido total; es decir, tantas veces quantas cabe en el sólido que se quiere medir.

287. Teorema. *Las solideces de los paralelepípedos rectángulos estan entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas.*

Demostracion. Sean S la superficie de la base, A la altura, y L una dimension lineal qualquiera del primer paralelepípedo; y s, a, l, las cantidades correspondientes del segundo; y resultará (art. 231.) $S : s :: L^2 : l^2$, y tambien segun lo visto (art. 185.) $A : a :: L : l$; y multiplicando los términos correspondientes de estas dos proporciones (Aritm. art. 118.) tendremos $S \times A : s \times a :: L^2 \times L : l^2 \times l$; esto es, $S \times A : s \times a :: L^3 : l^3$.

Es así que $S \times A$ es la solidéz del primer paralelepípedo (art. 286, corol.), y $s \times a$ la del segundo: luego las solideces de dichos paralelepípedos estarán entre sí como sus dimensiones homólogas elevadas al cubo.

Corolario. De lo dicho se infiere, que por quanto el pie lineal es á la pulgada lineal como 12 : 1, el pie cúbico será al pie lineal como $12^3 : 1$; esto es, que el pie cúbico contendrá 1728 pulgadas cúbicas; por la misma razon la pulgada cúbica contendrá 1728 líneas cúbicas. Por quanto la vara contiene 3 pies, la vara cúbica contendrá 27 pies cúbicos.

Así, por quanto el pie lineal de Paris es al de Burgos como 7 : 6, los correspondientes pies cúbicos estarán entre sí como 343 : 216.

288. Para no equivocarse en las reducciones de las unidades cúbicas ó de solidéz de especie mayores ó menores, y de estas á aquellas, conviene tener presente lo que llevamos dicho (art. 287, corol.; y art. 221.)

Tambien es necesario tener presente que todas las dimensiones lineales de que se haga uso en la medicion de las solideces sean de la misma especie; esto es, que

se use la vara de Burgos, pie &c.; ó bien la toesa, pies de Paris &c., pero sin mezclar estas unidades en la misma medicion.

289. Teorema. *Dos paralelepípedos ó en general dos prismas ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro de la misma base y altura, ó de bases y alturas iguales, sean rectos ú obliquos, son iguales en solidéz, aunque sean diferentes las figuras de sus bases.*

Demostracion. De lo dicho sobre las superficies (art. 219, y 220.) se sigue que sobre las bases de estos cuerpos se podrán colocar tantos cubos iguales á la unidad, quantas unidades quadradas tiene dicha base, puesto que por la propuesta se suponen las bases de ambos sólidos de igual superficie. No es menos evidente que el número de tongadas de cubos iguales á la unidad, que se pueden arreglar en la capacidad de estos cuerpos, es igual al número de unidades lineales que tiene la altura, la que asimismo se supone igual en ambos sólidos. Es igualmente claro (art. 255, corol.) que cada una de estas tongadas debe constar del mismo número de cubos iguales á la unidad que la primera tongada: de consiguiente el número de unidades cúbicas contenidas en ambos sólidos será igual, esto es, que sus solideces seran iguales.

Corolario. La solidéz de un prisma ó cilindro qualquiera *se hallará multiplicando la superficie de su base por la altura* (art. 289, y 286 corol.).

290. Teorema. *La solidéz de toda pirámide es el tercio de la de un prisma de la misma base y altura que ella.*

Demostracion. Redúcese la demostracion de esta proposicion á probar que una pirámide triangular es el tercio de un prisma de la misma base y altura que ella; porque siempre nos podemos figurar un prisma como

compuesto de otros tantos prismas triangulares, y una pirámide como el conjunto de otras tantas pirámides triangulares quantos triángulos nos podemos figurar en el polígono que sirve de base al uno y al otro.

Pero la verdad de esta proposicion en órden á la pirámide triangular se puede manifestar del modo siguiente. Sea A B C D E F (fig. 137.) un prisma triangular: figurémonos tiradas en las caras A E, C E de dicho prisma las dos diagonales B D, B F, y que por estas diagonales pase un plano B D F: este plano separará del prisma una pirámide de la misma base y altura que el prisma, pues tiene su vértice en el punto B de la base superior, y tiene por base la misma base inferior D E F del prisma. B D E F (fig. 138.) representa esta pirámide separada, y B A C F D (fig. 139.) representa lo que queda del prisma.

Fig. 137, 138, 139.

Podemos figurar esta resta como trastornada, y puesta sobre la cara A D F C (fig. 139.); con lo qual se ve que es una pirámide quadrangular, cuya base es el paralelógramo A D F C, y el vértice el punto B: luego si imaginamos tirada en la base A D F C la diagonal C D, podremos imaginar la pirámide total A D F C B compuesta de dos pirámides triangulares A D C B, C F D B que tendran por bases los dos triángulos iguales A C D, C D F, y por vértice comun el punto B, y que por consiguiente seran iguales (art. 289.). Pero de estas dos pirámides la una, es á saber, la pirámide A D C B se puede suponer que tiene por base el triángulo A B C, esto es, la base superior del prisma, y por vértice el punto D, que ha sido de la base inferior. Es, pues, igual esta pirámide con la pirámide D E F B (fig. 138.) pues tiene una misma base y altura que ella: luego las tres pirámides D E F B, A D C B, C F D B (fig. 138, y 139.) son iguales unas con otras; y ya que juntas componen el prisma, hemos de inferir que *cada una es el tercio del prisma A B C D E F* (fig. 137.) *de igual base y altura que él.*

Corolario I. Como un cono puede considerarse como una pirámide cuya base tiene una infinidad de lados, y el cilindro como un prisma cuya base tiene tambien una infinidad de lados, hemos de inferir que *un cono recto ú obliquo es el tercio de un cilindro de igual base é igual altura que él.*

Corolario II. Luego, *para obtener la solidéz de una pirámide ó de un cono qualquiera, se ha de multiplicar la superficie de la base por el tercio de la altura.*

291. Por lo que mira al *trozo de pirámide ó de cono,* quando son paralelas las dos bases opuestas, lo que hay que hacer *para obtener su solidéz, consiste en hallar la altura de la pirámide quitada, y entonces es facil calcular la solidéz de la pirámide entera y de la pirámide quitada, y por consiguiente la del trozo.*

292. Teorema. *Para obtener la solidéz de una esfera se ha de multiplicar su superficie por el tercio del radio.*

Demostracion. Porque, podemos considerar la superficie de la esfera como el conjunto de una infinidad de planos infinitamente pequeños, cada uno de los quales sirve de base á una pequeña pirámide, cuyo vértice está en el centro de la esfera y cuya altura es por consiguiente el radio. Una vez que cada una de estas pequeñas pirámides es igual (art. 290, corol. II.) al producto de su base por el tercio de su altura, esto es por el tercio del radio, seran todas juntas iguales al producto de la suma de todas sus bases por el tercio del radio; esto es, iguales al producto de la superficie de la esfera por el tercio del radio.

Corolario I. Ya que la superficie de la esfera es quadrupla de la superficie de uno de sus círculos máximos (art. 276, corol. I.), *para obtener la solidéz de una esfera,*

se debe multiplicar el tercio del radio por quatro veces la superficie de un círculo máximo, ó quatro veces el tercio del radio por la superficie de uno de los círculos máximos, ó finalmente los $\frac{2}{3}$ del diámetro por la superficie de un círculo máximo.

Corolario II. Hemos visto que para sacar la solidéz de un cilindro, se ha de multiplicar la superficie de la base por la altura. Si se trata, pues, del cilindro circunscripto á la esfera, se puede decir que *su solidéz es igual al producto de la superficie de uno de los círculos máximos de la esfera por el diámetro*; pero la de la esfera (corol. 1.) es igual al producto de la superficie de un círculo máximo por los $\frac{2}{3}$ del diámetro: luego la solidéz de la esfera no es sino los $\frac{2}{3}$ de la del cilindro circunscripto.

293. Problema 65. *Hallar la solidéz del globo terráqueo.*

Resolucion. Si la superficie de la tierra (art. 277.) es de 16501140 leguas quadradas, y su diámetro de 2291^{l} 825, el tercio del radio ó sexta parte del diámetro será de 381'971, ó proximamente de 382 leguas: luego la solidéz del globo se hallará (art. 292.) multiplicando 16501140 por 382, que segun esto constará de 6303435480 leguas cúbicas.

294. Habiendo dado las reglas para medir las solideces de los cuerpos regulares, solo nos resta que decir, que si en la práctica se ofreciese medir las de un sólido irregular, todo se reducirá á medirlo parcialmente descomponiéndolo en sólidos regulares, ó que proximamente se puedan considerar como tales.

295. Quando en la medicion de un sólido resultan todas las medidas tomadas unos números denominados

ó de una sola denominacion, no puede caber duda en el resultado: por exemplo, si se quiere averiguar la solidéz de un paralelepípedo cuya base conste de quatro pies de ancho y tres de largo, y que la altura de dicho paralelepípedo fuese de cinco pies, es claro (art. 222, corol. 1.) que la base constaria de doce pies quadrados, y la solidéz (art. 286, corol.) de sesenta pies cúbicos.

Pero quando estas dimensiones son unos números complexôs, como por exemplo, si el ancho de la base de dicho paralelepípedo fuese de 4 pies 6 pulg., su largo de 3 pies 2 pulg., y la altura de este sólido de 5 pies 3 pulg. En este caso y otros semejantes es necesario reducir todas estas dimensiones á la mínima, y que aun de reducidas queden todas ellas reducidas á la misma: de consiguiente diremos que el ancho de la base será 54 pulgadas, su largo de 38, y la altura del sólido de 63: con estos datos concluiremos que la base constará de 2052 pulgadas quadradas, ó bien (art. 220, corol. IV.) partiendo este resultado por 144, de 14 pies quadrados y 36 pulgadas quadradas: asimismo multiplicando 2052 por 36 diremos que la solidéz constará de 129402 pulgadas cúbicas, ó bien (art. 287, corol.) partiendo este resultado por 1728, de 74 pies cúbicos y 1530 pulgadas cúbicas.

Si para la resolucion de esta medicion quisiéramos emplear el método enseñado (Aritm., nona Leccion) para multiplicar complexôs, hallaríamos que la superficie de la base constaria de 14 pies y 4 pulgadas, y la solidéz de 75 pies y 3 pulgadas; y si dixéramos que el primer resultado eran pies y pulgadas quadradas, y el segundo pies y pulgadas cúbicas, hallaríamos que estos resultados diferian notablemente de los primeros. Esta divergencia depende, en que para poder emplear la multiplicacion de los números complexôs, es necesario tener un conocimiento anticipado de la subdivision de las unidades quadradas y cúbicas en otra clase de uni-

dades, sin cuyo conocimiento no puede operarse con ellos, y sí emplear el primer método que hemos indicado, que puede bastar, mientras que en el Suplemento de este Tratado se expresa quanto conduce á la medicion de las superficies y solideces, empleando los complexós; cuyo método es de la mayor utilidad, por lo breve y facilmente con que se hallan los resultados.

TERCERA SECCION.

VIGÉSIMA SÉPTIMA LECCION.

DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

296. *Trigonometría plana logarítmica* es la ciencia que enseña á resolver los triángulos rectilíneos, empleando los logaritmos de los valores de sus lados y de unas líneas que tienen relacion con los ángulos, y se designan con el nombre de *líneas trigonométricas.*

297. Se dice *que se resuelve un triángulo* quando del conocimiento de los lados ó ángulos que lo determinan (art. 127.) se deducen los valores de los lados y ángulos desconocidos.

298. Aunque en la explicacion de las líneas trigonométricas solo se tratará de arcos, se supone que las mismas líneas pertenecen á los ángulos medidos por dichos arcos.

299. *Seno* de un arco es la perpendicular baxada desde el fin del arco sobre el diámetro que pasa por su principio.

Fig. 140. Por exemplo el seno del arco A B (fig. 140.) es B D. El seno del arco A E de 90° es el radio C E. El seno del arco A E F, mayor que el quadránte, es F H.

Corolario I. El seno de un arco es mitad de la cuerda de un arco duplo, puesto que B D es mitad de B G

(art. 96, corol. II.) que es la cuerda del arco B A G, duplo de B A.

Corolario II. De esto y de lo establecido anteriormente (art. 46, y 47.) se sigue que en un mismo círculo, ó en círculos iguales, á iguales arcos corresponden iguales senos, y á iguales senos corresponden iguales arcos menores que el quadrante.

Corolario III. El seno de un arco es igual al de su suplemento. El seno del arco F K es F H; pero el seno del arco A E F suplemento de F K hemos visto (art. 299.) es el mismo F H.

Corolario IV. Los senos de los arcos aumentan desde el de 0°, que es cero, hasta el de 90°, que es igual al radio; y disminuyen desde el de 90°, que es igual al radio, hasta el de 180°, que es cero.

Corolario V. Como la cuerda de 60° es igual al radio (art. 126.) su mitad, que es el seno de 30° (corol. I.), será mitad del radio: esto es, *que el seno de 30° es mitad del radio ó del seno de 90°.*

Escolio. Esto basta para convencerse de que los senos aumentan en una razon muy distinta de la de los arcos, puesto que el arco de 90° es triplo del arco de 30°, y el seno de 90° solo es duplo del seno de 30°.

300. *Coseno* de un arco es el seno del complemento del arco de que se trata.

Fig. 140. Por exemplo, el coseno de A B (fig. 140.) será B L, seno del complemento B E. El coseno del arco A E de 90° es cero. El coseno del arco A E F, mayor que el quadrante, es F L, seno de F E.

Corolario I. De esto y de lo dicho (art. 299, corol. IV.) se sigue, que los cosenos disminuyen desde el de 0°, que es igual al radio, hasta el de 90°, que es cero.

Corolario II. Las C E, D B son paralelas, por perpendiculares á la C A (art. 92, corol.): por consiguiente seran iguales las L B, C D, que miden sus distancias (art. 82.): esto es, que el coseno de un arco es igual á la distancia del centro al seno.

Corolario III. Todo arco mayor que el quadrante tiene el mismo coseno que su suplemento.

En efecto, hemos visto que el coseno del arco A E F es F L, que tambien lo es de su arco suplementar F K.

Corolario IV. Conocidos los valores de los senos de todos los arcos, desde 0° hasta 90°, se conocerán sus cosenos; puesto que el seno de 30° es coseno de 60°, el seno de 60° es coseno de 30°, el seno de 40° es coseno de 50°, &c.

Corolario V. El coseno de 60° será mitad del radio (art. 299, corol. v.).

301. *Tangente trigonométrica* es la que tocando al arco en su principio se termina en la prolongacion del diámetro que pasa por su fin.

Fig. 140. Por exemplo la A M (fig. 140.) es tangente del arco A B. La tangente del arco A E de 90° será infinita, respecto á que por mas que se prolongue la A M nunca encontrará á su paralela C E. La tangente del arco A E F, mayor que el quadrante, es la línea A R.

Corolario. Es evidente que las tangentes aumentan desde la de 0°, que es cero, hasta la de 90°, que es infinita; y que en los arcos mayores que el quadrante disminuyen desde la de 90°, que es infinita, hasta la de 180°, que es cero.

302. Teorema. *La tangente de 45° es igual al radio.*

Fig. 140. *Demostracion.* Si el ángulo M C A (fig. 140.) vale

45°, el ángulo C M A valdrá tambien 45°, por ser su complemento (art. 124, corol. IX.). Por consiguiente, el triángulo M C A será isósceles (art. 125, corol. IV.); y la tangente A M será igual al radio C A.

303. *Cotangente* de un arco es la tangente del complemento del arco de que se trata.

Fig. 140. Por exemplo, la E P (fig. 140.) es la cotangente del arco A B. La cotangente del arco A E es cero. La cotangente del arco A E F, mayor que el quadrante, es la línea E N.

Corolario I. De esto y de lo dicho (art. 301, corol.) se sigue que las cotangentes disminuyen desde la de 0°, que es infinita, hasta la de 90°, que es cero; y que en los arcos mayores que el quadrante aumentan desde 90°, que es cero, hasta la de 180°, que es infinita.

Corolario II. Tambien resulta (art. 302.) que la cotangente de 45° es igual al radio.

304. *Secante trigonométrica* es la recta que sale del centro, pasa por el fin del arco, y se termina en la tangente que pasa por el principio.

Fig. 140. Por exemplo, C M (fig. 140.) es la secante del arco A B. La secante del arco A E de 90° es infinita. La secante del arco A E F, mayor que el quadrante, es la C R.

Corolario. Las secantes aumentan desde la de 0°, que es igual al radio, hasta la de 90°, que es infinita; y en los arcos mayores que el quadrante disminuyen desde la de 90°, que es infinita, hasta la de 180°, que es igual al radio.

305. *Cosecante* de un arco es la secante del complemento de dicho arco.

Corolario. De esto y de lo dicho (art. 304, corol.) se sigue que las cosecantes disminuyen desde la de 0°, que es infinita, hasta la de 90°, que es igual al radio; y que en los arcos mayores que el quadrante las cosecantes aumentan desde la de 90°, que es igual al radio, hasta la de 180°, que es infinita.

306. *Seno verso* de un arco es la porcion de diámetro comprehendida entre el seno y el principio de dicho arco.

Fig. 140. Por exemplo, D A (fig. 140.) es el seno verso del arco A B. El seno verso del arco A E de 90° es el radio C A. El seno verso del arco A E F, mayor que el quadrante, es H A.

307. *Coseno verso* de un arco es el seno verso del
Fig. 140. complemento de dicho arco. Por exemplo la L E (fig. 140.) será el coseno verso del arco A B.

308. Teorema. *El coseno de un arco es al seno como el radio es á la tangente.*

Fig. 140. *Demostracion.* Las perpendiculares B D, M A (fig. 140) son paralelas entre sí (art. 92, corol.); y por lo tanto los triángulos C D B, C A M seran semejantes (art. 145, corol. 11.), y tendran sus lados homólogos proporcionales: esto es, que C D : D B :: C A : A M; y por ser C D igual al coseno L B (art. 300, corol. 11.), será L B coseno de A B, á su seno D B, como C A radio, es á A M tangente del mismo arco.

309. Teorema. *El coseno de un arco es al radio como el radio es á la secante de dicho arco.*

Fig. 140. *Demostracion.* En los triángulos C D B, C A M (fig. 140.) por ser semejantes tendremos C D : C B :: C A : C M, por consiguiente C D ó su igual L B coseno del arco A B, es al radio C B, como el radio C A es á la secante C M del mismo arco.

310. Teorema. *La tangente de un arco es al radio como el radio es á la cotangente del mismo arco.*

Fig. 140. *Demostracion.* Los triángulos rectángulos C A M, C E P (fig. 140.) tienen los ángulos M C A, E P C iguales por alternos internos; luego seran equiángulos (art. 124, corol. VII.): luego seran semejantes (art. 150.), y tendrán sus lados homólogos proporcionales: esto es, que será A M : C E :: C A : E P, que es lo que se pretendia demostrar.

311. En las Tablas de las líneas trigonométricas se supone el radio igual á la unidad con ceros; y en las que sirven para determinar los logaritmos de dichas líneas, es diez el número de ceros: esto es, que el radio se supone = 10000000000; y por tanto (Aritm. art. 131) su logaritmo será de diez de característica, con ceros en la mantisa: luego es evidente que conociendo los valores de los senos de todos los arcos, desde 0° hasta 90°, se conocerán sus cosenos por lo visto (art. 300, corol. IV.): conociendo los senos y cosenos, se podrán conocer las tangentes de todos los arcos (art. 308.), y las secantes (art. 309.), y asimismo las cotangentes por lo dicho (art. 310.).

Por dichos métodos se obtienen los valores de dichas líneas expresadas en partes del radio con toda la aproximacion que se requiere: sobre lo que no nos detendremos, mediante á que las Tablas estan ya construidas, y que lo que importa es el saberse servir de ellas.

En este Tratado solo se hará uso de las Tablas que contienen los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes.

VIGÉSIMA OCTAVA LECCION.

DISPOSICION Y USO DE LAS TABLAS DE LOS LOGARITMOS DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS.

312. Las Tablas que contienen los valores de las líneas trigonométricas en partes del radio, se suelen denominar *Tablas de las líneas trigonométricas naturales.*

De los valores de las líneas trigonométricas en partes del radio se deducen los logaritmos correspondientes. Por exemplo, por quanto el seno de 30° es 5000 000 000 (art. 299, corol. v.), su logaritmo será el de dicho número, que es 9'6989700.

313. De lo dicho (art. 301, corol.: art. 302: art. 303, corol. I. y II.; y art. 311.) se sigue que los logaritmos de las tangentes de los arcos menores que el quadrante, que pasan de 45°, los de las cotangentes de los arcos que no llegan á dicha cantidad, deben tener 10 ú 11 de característica. En las Tablas suele omitirse la decena, que es facil de suplir.

314. Aunque en la forma de dichas Tablas cabe alguna variedad, por lo regular se disponen en términos que en las cabezas de las hojas y en la primera columna de la izquierda se expresan los valores de los arcos ó ángulos desde 0° hasta 45°; y en el pie de las hojas y en la última columna de la derecha se expresan los valores de los arcos desde 45° hasta 90°. Con esto se logra el expresar los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los arcos, desde 0° hasta 90°, sin repetir mas logaritmos que los de las líneas correspondientes á los 45°; y á mas, quando se trata de hallar los logaritmos de varias líneas trigonométricas pertenecientes á un mismo arco ó

ángulo, dichos logaritmos se encuentran en una misma línea. Para hacerse cargo de esto, basta observar (teniendo las Tablas á la vista) que el logaritmo del seno de un arco segun la numeracion superior y la de la izquierda es logaritmo del coseno correspondiente á la numeracion inferior y la de la derecha.

315. Por consiguiente, si se pide el logaritmo de la línea trigonométrica de un arco ó ángulo menor que 45°, se buscará segun la numeracion superior y la de la izquierda; y si el arco ó ángulo pasa de 45°, se buscará en la numeracion inferior y la de la derecha.

316. Si dado el logaritmo de una línea trigonométrica se quiere saber el arco ó ángulo correspondiente, se busca en las Tablas dicho logaritmo, ó los dos logaritmos próximos, mayor y menor, entre que está comprehendido. El ángulo correspondiente será el que está escrito en frente de dicho logaritmo, si se halló exâctamente en la Tabla; y sino, dicho ángulo estará comprehendido entre los ángulos de las Tablas correspondientes á los logaritmos que comprehenden al propuesto.

317. Se podrá suponer en los mas casos que dicho ángulo es el correspondiente al logaritmo de las Tablas que se diferencie menos del logaritmo dado.

318. Se tendrá presente, que si el logaritmo dado es de seno, y la columna en que se halla tiene título de senos arriba y el de cosenos abajo, se debe buscar el ángulo segun la numeracion superior y la de la izquierda; pero si la columna en que se halla el tal logaritmo tiene el título de senos abaxo y el de cosenos arriba, se debe buscar el ángulo segun la numeracion inferior y la de la derecha. Lo contrario se executaria si el logaritmo perteneciese á un coseno. Esto mismo se tendrá presente por lo que respecta á los logaritmos de las tangentes y cotangentes.

319. Para los cálculos que exigen grande exâctitud, se han construido Tablas que manifiestan los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á los 90° del quadrante, de 10″ en 10″ como las citadas de Callet (Aritm. art. 146.), y aun las hay calculadas de 1″ en 1″.

320. Aunque se haga uso de las Tablas que solo manifiestan los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á los arcos de 1′ en 1′, es facil el hallar los logaritmos correspondientes á los ángulos intermedios, y los ángulos correspondientes á los logaritmos comprehendidos entre los de las Tablas, buscando la parte proporcional á la diferencia del arco ó logaritmo propuesto con el arco ó logaritmo mas próximo de las Tablas, por un método semejante al indicado (Aritm. art. 146, y 150.).

Sin embargo se tendrá presente que dicho método es erróneo quando se trata de senos y tangentes de arcos que no llegan á 2°, ó de cosenos y cotangentes de arcos que no distan 2° del quadrante, porque en tal caso las diferencias correspondientes á tres logaritmos sucesivos son muy desiguales, lo que es contrario á la suposicion en que se funda el método expresado. Por esta razon se suelen poner en las Tablas de 1″ en 1″ los logaritmos de senos y tangentes de los primeros grados, que corresponden á los cosenos y cotangentes de los últimos grados del quadrante.

Para facilitar los cálculos se suelen expresar en las mismas Tablas las diferencias de los logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes á cada 10″, ó á cada 100″ de diferencia en los arcos ó ángulos.

321. En las Tablas solo se escriben los valores de los arcos menores que el quadrante, y por tanto, si se pide la línea trigonométrica de un ángulo obtuso, se buscará la de su suplemento.

Por exemplo, si se pide el logaritmo del seno de 120° se tomará el de su suplemento 60°, se buscará

en las Tablas el seno correspondiente, que será el mismo de 120°.

322. Si conociendo el logaritmo de una línea trigonométrica se quiere saber el valor del ángulo obtuso á que pertenece, se determinará por las Tablas el ángulo agudo correspondiente á dicho logaritmo, y su suplemento será el ángulo obtuso que se trata de determinar.

Por exemplo, si el ángulo agudo á que corresponde la línea trigonométrica es 60°, el obtuso que se trata de determinar valdrá 120°.

323. Respecto á que el radio es seno de 90°, coseno de 0°, y tangente y cotangente de 45°, nunca hay necesidad de buscar en las Tablas el logaritmo de dichas líneas trigonométricas, que es diez de característica con un número de ceros igual al de las cifras que tienen las mantisas de los otros logaritmos.

324. Por consiguiente, si el primer término de una proporcion es el radio, bastará sumar los logaritmos de los términos segundo y tercero, y quitar diez unidades de la característica, para obtener el logaritmo correspondiente al quarto término.

325. Si el radio es uno de los términos medios, el complemento aritmético del logaritmo del primero sumado con el logaritmo del otro medio, dará el logaritmo correspondiente al quarto término de la proporcion.

Es evidente que dexar de sumar el logaritmo del radio, que es 10 de característica, equivale á restar la decena que era preciso rebaxar del resultado, por haber tomado el complemento aritmético del logaritmo del primer término.

VIGÉSIMA NONA LECCION.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS RECTÁNGULOS EMPLEANDO LOS LOGARITMOS, CON SU APLICACION Á VARIOS PROBLEMAS.

326. Teorema. *En todo triángulo rectángulo el radio es al seno de un ángulo, como la hipotenusa es al cateto opuesto á dicho ángulo.*

Fig. 141. *Demostracion.* Sea el triángulo propuesto A B C (fig. 141.), y supóngase que la parte A D de la hipotenusa A C represente el radio de las Tablas: entonces si se imagina tirado el arco D E, la perpendicular D F será el seno del ángulo D A E ó C A B; pero porque D F es paralela á la C B los triángulos A F D, A B C serán semejantes (art. 145, corol. II.); luego A D : D F :: A C : B C; esto es, R : sen. C A B :: A C : C B, que es lo que se pretendia demostrar.

Del mismo modo se probará que R : sen. A B C :: A C : A B.

327. Teorema. *En todo triángulo rectángulo el radio es á la tangente de un ángulo, como el cateto adyacente es al cateto opuesto á dicho ángulo.*

Fig. 142. *Demostracion.* Si en el triángulo A B C (fig. 142.) la parte A D de la hipotenusa A C representa el radio de las Tablas, y se imagina trazado el arco D E, la perpendicular E T representará la tangente del ángulo E A D ó B A C; entonces por la semejanza de los triángulos A E T, A B C, se tendrá A E : E T :: A B : B C; es decir, R : tang. B A C :: A B : B C, que es lo que se pretendia demostrar.

328. Problema 66. *Resolver trigonometricamente el problema* 40 (art. 159.).

Fig. 83. Sea A B (fig. 83.) la altura de la torre que se quiere medir, suponiendo que sea accesible por su pie B.

En un punto qualquiera D se plantará el grafometro, suponiendo que el centro del instrumento venga á quadrar en el punto C elevado 4 pies sobre el terreno: dispóngase vertical el plano del instrumento, lo que se logrará con el plomo; y en seguida se dispondrá horizontal el diámetro del instrumento, lo que tambien se logrará facilmente con el hilo del plomo, poniendo el hilo en la division de los 90°, y viendo si coincide ó pasa por el centro del instrumento, puesto que si el radio del instrumento que pasa por los 90° se dispone vertical, el diámetro que le es perpendicular quedará horizontal.

Hecho esto, obsérvese el ángulo A C H, y supóngase se halló de 50° 11′ 40″, y mídase la base D B = C H que supondremos se halló de 45 pies: es evidente que en el triángulo rectángulo C H A se conoce el ángulo en C, su lado adyacente C H, y que se desea conocer el lado A H que se le opone: por lo tanto, recordando lo dicho (art. 327.), diremos R : tang. A C H :: C H : A H, y substituyendo valores hallaremos como sigue el valor de A H (art. 324.)

Logarit. tang. de 50° 11′ 40″... $10^{c}0791813$
Logarit. de 45..... $1^{c}6532125$

$1^{c}7323938 = 54$ pies.

Ahora bien, si á la altura A H de 54 pies se le agrega la H B = C D de 4 pies, tendremos la altura total A B de 58 pies.

Si importase saber la extension de la C A supuesto observado el ángulo en C y medida la C H ó su igual D B, recordando (art. 124, corol. IX.), hallaríamos que

el ángulo en A debe ser de 39°..... 48'..... 20'' : luego diríamos (art. 326.) sen. C A B : R :: C H : A C, y substituyendo valores hallaríamos el valor del quarto término como sigue (art. 325.).

Comp. arit. Log. sen. 39° 48' 20''=... 0'1936951
Log. 45=..... 1'6532125

1'8469076=70'3 pies.

329. Problema 67. *Resolver trigonometricamente el problema* 29 (art. 133.).

Fig. 69. Para ello supóngase que despues de clavado un piquete en un punto qualquiera, como B (fig. 69.), y de levantada una perpendicular sobre la A B desde dicho punto, se coloque el grafómetro en otro punto qualquiera como C, y que desde él se mide el ángulo A C B, y seguidamente la distancia C B. Es evidente que en el triángulo rectángulo C B A se conoce el ángulo recto B, el agudo C y el lado adyacente C B: luego podremos decir (art. 327.) R : tang. A C B :: C B : A B; buscando pues el valor del quarto término de esta proporcion, tendremos averiguado el ancho A B del rio que se pretendía medir.

330. Lo dicho basta para dar á conocer las aplicaciones de los dos interesantes teoremas que quedan establecidos (art. 326, y 327.), y convencerse de que con la aplicacion de ellos puede resolverse todo triángulo rectángulo, siempre que se conozca el valor de uno de los ángulos agudos y un lado, ó bien dos lados del triángulo.

TRIGÉSIMA LECCION.

DE LA RESOLUCION DE LOS TRIÁNGULOS RECTILÍNEOS OBLIQUÁNGULOS, EMPLEANDO LOS LOGARITMOS.

331. Teorema. *En todo triángulo obliquángulo los senos de los ángulos son proporcionales con los lados opuestos.*

Fig. 143. *Demostracion.* En efecto, si se inscribe el triángulo ABC (fig. 143.) en un círculo, cada uno de sus lados será la cuerda de un arco doble de aquel que sirve de medida al ángulo opuesto á dicho lado (art. 105.), y por consiguiente la mitad de cada lado será igual al seno del ángulo que se le opone (art. 299, corol. 1.). Luego se tendrá $\frac{BC}{2} = \text{sen. A}$; $\frac{AC}{2} = \text{sen. B}$; $\frac{AB}{2} = \text{sen. C}$. Luego $\frac{BC}{2} : BC :: \frac{AC}{2} : AC :: \frac{AB}{2} : AB$; de consiguiente, sen. A : B C :: sen. B : A C :: sen. C : A B, que es lo que se pretendia demostrar.

332. Este teorema sirve para resolver un triángulo: 1.° *Quando se conocen dos ángulos y un lado.* 2.° *Quando se conocen dos lados y un ángulo opuesto á uno de estos lados.*

333. Antes de establecer los dos teoremas que con el anterior completan los necesarios para la resolucion de los triángulos rectilíneos obliquángulos, conviene saber que *la mayor de dos cantidades cuya suma es conocida, igualmente que su diferencia, es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia; y la menor es igual á lo que queda despues de restar la mitad de la diferencia de la mitad de la suma.*

Si me consta, por exemplo, que la suma de dos

cantidades es 57, y su diferencia 17, inferiré que las dos cantidades son 37 y 20; añadiendo por un lado la mitad de 17 á la mitad de 57, y restando por otro lado la mitad de 17 de la mitad de 57.

Con efecto, una vez que la suma contiene la mayor y la menor de las dos cantidades, si á la suma se le agregara la diferencia, se transformará en el duplo de la cantidad mayor: luego la mayor de las dos cantidades vale la mitad del total, esto es, la mitad de la suma de las dos cantidades, mas la mitad de su diferencia.

Si al contrario se restase de dicho total la diferencia, quedará el duplo de la cantidad menor, la qual por consiguiente valdrá la mitad de la resta; esto es, la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

Corolario. Puesto que la mayor de las dos cantidades es igual á la semisuma de la mayor y menor mas la mitad de la semidiferencia.

Es claro, que siempre que un número ó cantidad agregada á la semisuma de otras dos cantidades lleguen á formar juntas un resultado igual á la mayor de las dos cantidades expresadas, podremos concluir que dicho número ó cantidad que se agregó, es la semidiferencia de dichas dos cantidades.

Fig. 144, *y* 145. 334. Teorema. *En todo triángulo rectilíneo A B C (fig.* 144, *y* 145.) *si desde uno de los ángulos se baxa una perpendicular al lado opuesto, siempre se verificará la siguiente proporcion. El lado A C sobre el qual ó sobre cuya prolongacion cae la perpendicular, es á la suma A B + B C de los otros dos lados, como la diferencia A B — B C de dichos dos lados es á la diferencia de los segmentos A D y D C, ó á su suma, segun caiga la perpendicular dentro ó fuera del triángulo.*

Demostracion. 1.° Si la perpendicular cae dentro del
Fig. 144. triángulo como en la figura 144. Desde el centro B y con un radio igual al lado B C, trácese la circunfe-

rencia C E G F, prolónguese el lado A B hasta E, é imagínense tiradas las rectas E F, C G. Se tendrán formados dos triángulos A E F, A C G semejantes, puesto que el ángulo en A es comun á ambos, y que el ángulo A E F del uno es igual al ángulo A C G del otro, por ser ángulos inscriptos que insisten sobre el mismo arco F G (art. 105, corol. I.): luego dichos dos triángulos son equiángulos (art. 124, corol. VII.): luego serán semejantes (art. 150.): por consiguiente podremos decir A C : A E :: A G : A F.

Pero A E = A B + B E = A B + B C; A G = A B − B C; y A F = A D − D F = A D − D C por ser D F = D C (art. 96, corol II.): luego en la proporcion anterior diremos A C : A B + B C :: A B − B C : A D − D C.

2.° Si la perpendicular cae fuera del triángulo como en la figura 145. Despues de describir la circunferencia C F E G, desde B como centro y con el radio B C, tírense las rectas C E, G F; con lo que quedarán formados los triángulos A C E, A F G, cuya semejanza es facil demostrar de un modo análogo á lo practicado en el número anterior: luego podremos decir A C : A E :: A G : A F.

Fig. 145.

Pero A E = A B + B E = A B + B C; A G = A B − B G = A B − B C; y A F = A D + D F = A D + D C por ser D F = D C (art. 96, corol. II.); luego en la proporcion anterior diremos A C : A B + B C :: A B − B C : A D + D C, con lo que se completa quanto habia que demostrar.

Luego, conociendo los tres lados de un triángulo se podrá obtener por este teorema el valor de los segmentos formados por la perpendicular tirada desde uno de los ángulos al lado opuesto; porque entonces es conocida la suma A C (fig. 144.) de dichos segmentos; y el teorema que acabamos de demostrar nos suministra el modo de averiguar su diferencia, porque en este caso los tres primeros términos de esta proporcion son conocidos: se conocerá, pues, cada uno de dichos seg-

Fig. 144.

Fig. 145. mentos por lo dicho (art. 333.). En la figura 145 es conocida la diferencia de los segmentos A D y D C, que es el lado mismo A C, y la proporcion determina el valor de la suma.

335. Este teorema sirve para resolver un triángulo, *dados sus tres lados, conocer sus tres ángulos.*

Para ello, se supondrá tirada una perpendicular desde uno de dichos ángulos, de lo que resultarán dos
Fig. 144. triángulos A D B, C D B (fig. 144.).

Por la proporcion antecedente se calculará uno de los segmentos, por exemplo C D, y entonces en el triángulo C D B se conocerán los dos lados C D y B C ademas del ángulo recto, y se sacará facilmente el ángulo C, por lo dicho (art. 326.).

Exemplo. Supongamos que el lado A B sea de 142 pies, el lado B C de 64, y el lado A C de 184; y que se pide el ángulo C.

Se calculará la diferencia de los dos segmentos por esta proporcion 184 : 142 + 64 :: 142 — 64 : A D — D C, ó 184 : 206 :: 78 : A D — D C, que vale 87'32; luego (art. 333.) el segmento menor vale la mitad de 184 menos la mitad de 87'32, quiero decir vale 48'34.

Esto supuesto, en el triángulo rectángulo C D B se buscará el ángulo C B D, el qual, una vez hallado, dará á conocer el ángulo C; y para hallar dicho ángulo C B D, se hará esta proporcion (art. 326.) B C : C D :: R : sen. C B D; esto es, 64 : 48'34 :: R : sen. C B D.

Comp. aritm. Logar. de 64.. 8'1938200
Logar. 48'34..... 1'6843066

9'8781266=49° 3'.

Luego el ángulo C es de 40° 57' (art. 124, corol. IX.).

El caso de resolver un triángulo, conocidos que sean sus tres lados, puede ocurrir á menudo, quando se han de calcular muchos triángulos enlazados unos con otros.

Fig. 146. 336. Teorema. *En todo triángulo rectilíneo A B C (fig. 146.) la suma de qualesquiera de sus dos lados B C, A C, es á la diferencia de estos mismos dos lados, como la tangente de la semisuma de los dos ángulos B A C, A B C opuestos á dichos lados, es á la tangente de la semidiferencia de estos mismos ángulos.*

Demostracion. Para demostrarlo, desde el punto C tomado por centro, y con el intervalo del lado menor A C tomado por radio, descríbase una circunferencia; prolónguese el lado B C hasta E, y tírense las dos cuerdas A E, A D, y la D F paralela á la A E. Es evidente que los triángulos A B E, F B D son semejantes, puesto que A E es paralela á la F D (art. 145, corol. II.; y art. 150.); luego tendremos B E : B D :: A E : F D.

Facilmente se viene en conocimiento de que en esta proporcion por ser C E = A C, será B E = B C + A C suma de los dos lados propuestos; y tambien porque C D = A C, será B D = B C — A C diferencia de estos mismos lados. Resta pues por demostrar, 1.° que A E es la tangente de la semisuma de los ángulos B A C, A B C; 2.° que F D es la tangente de la semidiferencia de estos dos mismos ángulos.

1.° A E = tang. $\frac{BAC+ABC}{2}$. Para convencerse de ello, repárese que el ángulo E A D es recto, por ser ángulo inscripto que insiste sobre el diámetro (art. 105, corol. II.); luego A E es perpendicular á la A D; de consiguiente si tomamos á la A D por radio, será A E la tangente del ángulo inscripto A D E (art. 301.), pero el ángulo A D E es mitad del ángulo central A C E que insiste sobre el mismo arco (art. 105.) y este último ángulo A C E por ser externo del triángulo A C B es igual á la suma de los dos internos opuestos B A C, A B C (art. 124, corol. 1.); luego el ángulo A D E que es mitad de A C E será = $\frac{BAC+ABC}{2}$

luego A E tangente de dicho ángulo = tang. $\frac{BAC+ABC}{2}$.

2.° F D = tang. $\frac{BAC-ABC}{2}$. Tomado A D por radio, la F D será tangente del ángulo D A F ó D A B; vamos á probar que dicho ángulo D A B es igual á la semidiferencia de los ángulos B A C, A B C. Para ello adviértase que por ser isósceles el triangulo A C D, el ángulo C A D = C D A (art. 125, corol. III,); pero tenemos demostrado (núm. 1.°) que A D E ó A D C = $\frac{BAC+ABC}{2}$; luego tambien C A D es igual á la semisuma de los dos ángulos propuestos; pero si á dicho ángulo C A D se le agrega el ángulo D A B juntos componen el mayor de los dos ángulos propuestos B A C; luego (art. 333, corol.) D A B = $\frac{BAC-ABC}{2}$, y si F D es la tangente del ángulo D A B, será F D tang. $\frac{BAC-ABC}{2}$.

Luego B C + A C : B C — A C :: tang. $\frac{BAC+ABC}{2}$: tang. $\frac{BAC-ABC}{2}$, que es lo que se pretendia demostrar.

337. Sirve esta proposicion para resolver un triángulo quando *se conocen dos lados, y el ángulo comprehendido entre ellos.* Porque si por exemplo se conoce el ángulo en C (fig. 146.), tambien se conocerá la suma de los dos ángulos A y B, con restar el ángulo en C de 180°. Luego tomando la mitad del residuo, y buscando su tangente en las Tablas, tendremos con los dos lados A C, B C, supuestos conocidos, tres términos conocidos en la proporcion que acabamos de demostrar. Se podrá pues calcular el quarto término, el qual manifestará la diferencia de los dos ángulos A y B.

Fig. 146.

Siendo entonces conocida la semisuma y la semidiferencia de estos ángulos, se hallará el mayor (art. 333.) añadiendo la semidiferencia á la semisuma, y el menor restando la semidiferencia de la semisuma. Finalmente, siendo conocidos estos dos ángulos, se hallará facilmente el tercer lado por el teorema demostrado (art. 331.).

Exemplo. Supongamos de 110 pies el lado B C, A C de 50, y el ángulo en C de 126°; se piden los dos ángulos A y B, y el lado A B.

Resto 126° de 180°, y restan 54° para la suma de los dos ángulos A y B, y por consiguiente su semisuma es 27°.

Hago esta proporcion; 110 + 50 : 110 — 50 :: tang. 27° : tang. $\frac{A-B}{2}$, ó 160 : 60 :: tang. 27° : tang. $\frac{A-B}{2}$.

Comp. aritm. Log. 160.....	7'7958800
Logar. 60.....	1'6989700
Logar. tang. 27°.....	9'7071659
Suma ó Logar. tang. semidif.....	9'2020159

Cuyo logaritmo en las Tablas corresponde á 9°... 2'... 51".

Añadiendo esta semidiferencia á la semisuma 27°, y restándola despues de esta misma semisuma, tendremos lo que aquí sale

27°... 00'.... 00"	27°... 00'.... 00"
+ 9..... 02..... 50	— 9..... 02..... 50
ang. A..36..... 02..... 50	ang. B..17..... 57..... 10

Finalmente, para hallar el lado A B se hará esta proporcion; sen. A : B C :: sen. C : A B (art. 331.); esto es, sen. 36°... 02'.... 50" : 110 :: sen. 126° : A B.

Practicando lo que en los exemplos propuestos, saldrá que A B vale 151 pies y 2 pulgadas.

TRIGÉSIMA PRIMA LECCION.

APLICACION DE LA LECCION ANTERIOR EN LA RESOLUCION DE VARIOS PROBLEMAS.

338. Problema 68. *Resolver trigonometricamente el problema* 41 (art. 160.).

Fig. 84. Sea A B (fig. 84.) la altura de la torre que se quiere medir, suponiendo que no sea accesible por su pie B.

En un punto qualquiera, por exemplo en F, plántese el grafómetro, colocando el centro del instrumento verticalmente sobre dicho punto, y disponiendo tambien vertical el plano del grafómetro conforme se indicó (art. 328.), se observará el ángulo A P Z.

Seguidamente se colocará y dispondrá del mismo modo el grafómetro en qualquier otro punto, como D, tomado sobre la direccion B F, y se observará el ángulo A N Z.

Mídase tambien la distancia D F.

Hecho esto, es evidente que en el triángulo A N P se conoce el lado N P por igual á la D F, el ángulo A P N por observado, el ángulo A N P por suplemento del observado A N Z (art. 59, coral. 1.); por consiguiente se conocerá tambien el ángulo N A P. Con estos datos será facil determinar en el triángulo A N P el lado A N, haciendo (art. 331.) sen. N A P : N P :: sen. A P N : A N.

+ (art. 124, corolario 5º)

Hallado el valor de A N, en el triángulo rectángulo A N Z se conocerá la hipotenusa A N y el ángulo observado A N Z, con cuyos datos determinaremos el valor de A Z, diciendo (art. 326.) R : sen. A N Z

:: A N : A Z; restará solo para obtener A B añadir á la A Z el valor de Z B altura del instrumento sobre el nivel de la campiña.

339. Problema 69. *Resolver trigonometricamente el problema* 39 (art. 158.).

Fig. 82. Sea A B (fig. 82.) una línea inaccesible que quiere medirse.

Supongamos que se tome la P R por base, y que desde el punto P con un grafómetro se midan los ángulos A P R, B P R, y desde el punto R los P R B, A R P. Si se imaginan tiradas las rectas A R, y B P, es evidente que en el triángulo A R P se conoce un lado y dos ángulos; luego será facil determinar el valor del lado A R, haciendo la proporcion siguiente sen. P A R : P R :: sen. A P R : A R (art. 331.).

Asimismo en el triángulo B P R, se conocen un lado P R y los dos ángulos B P R y P R B; con cuyos datos obtendremos el valor del lado R B.

Determinados los valores de las rectas A R y R B, en el triángulo A R B se conocerán dos de sus lados A R, R B, y ademas el ángulo A R B comprehendido entre dichos dos lados, puesto que si del ángulo P R B se resta el ángulo P R A, se obtendrá el valor de A R B. Con estos datos será facil determinar en el triángulo A R B el lado A B por lo visto (art. 336.).

340. Problema 70. *Resolver trigonometricamente el problema* 51 (art. 199.).

En dicho artículo y en la primera solucion de este problema, hemos manifestado el modo de resolverlo midiendo una ó mas bases en el terreno, y observando con el grafómetro desde los dos extremos de cada una los ángulos que forman las visuales dirigidas desde ellos á un mismo objeto con dicha base: despues de lo qual y con estos datos, se forma en el plano un trián-gulo

pequeño semejante al que en el terreno forman la base y las dos visuales dirigidas desde sus extremidades al mismo objeto. Aunque este método es exâcto en la teoría, carece en la práctica de toda la precision que se requiere particularmente en distancias muy crecidas; y la razon es, que los errores que se pueden cometer en
Fig. 101. la construccion del triángulo a e b (fig. 101.) por exemplo, por pequeños que sean, pueden influir sensiblemente sobre las conseqüencias que de ellos se deducen respecto á la figura A E B del terreno, que es siempre incomparablemente mayor.

De estos errores estan libres las operaciones trigonométricas, á cuyo arbitrio debe recurrirse siempre que se requiera la mayor exâctitud posible en los resultados, y que para verificarlo se pueda emplear el tiempo necesario. Veamos pues en este caso el modo de operar.

Dexamos dicho (art. 199.) que debe empezarse sacando un croquis: sobre este se irán anotando las dimensiones de las bases que se miden, y tirando en él líneas imaginarias para representar los ángulos que estan formados con las visuales dirigidas á los objetos, anotando sus valores cerca de sus vértices conforme se vaya midiendo con el grafómetro. Pero aun está menos sujeto á equivocaciones el formar una relacion de las observaciones del modo siguiente.

Fig. 101. *Observaciones hechas en el punto A* (fig. 101.).

La alidada fixa dirigida sobre el punto B, se encontró E A B = 59° 30′, F A B = 25° 30′, G A B = 12° 45′, C A B = 31° 30′, D A B = 13° 00′.

La base A B se halló ser de 280 toesas.

Observaciones hechas en el punto B.

La alidada fixa dirigida sobre el punto A, se encontró E B A = 18° 30′, F B A = 37° 45′, G B A = 68° 15′, C B A = 15° 00′, D B A = 27° 45′.

Observaciones hechas en el punto E.

La alidada fixa dirigida sobre el punto F, se encontró H E F = 89° 30′, I E F = 34° 45′.

Observaciones hechas en el punto F.

La alidada fixa dirigida sobre el punto E, se encontró H F E = 24° 45′, I F E = 65° 30′.

La alidada fixa dirigida sobre el punto G, se encontró K F G = 59° 30′.

Observaciones hechas en el punto G.

La alidada fixa dirigida sobre el punto F, se encontró K G F = 58° 50′.

Formada esta relacion, es luego facil plantear todas las operaciones logarítmicas que se requieren para la resolucion de los triángulos que deben suministrar los datos necesarios para la formacion del plano en parage y tiempo acomodado. Solo queda que advertir, que en lugar de las letras con que en este exemplo hemos distinguido los objetos, se podrán substituir el nombre que los lugares, aldeas, ó caserios tengan en el terreno, ó bien con otras indicaciones de mero convenio.

Pasemos á indicar el modo de resolver los lados de estos triángulos, para lo qual tomaremos por exemplo el punto E, que se quiere situar en el plano. Es evidente que en el triángulo E A B se conoce el lado A B de 280 toesas, el ángulo E A B de 59° 30′, y E B A de 18° 30′; será pues facil hallar los valores de los lados A E y B E (art. 331.).

Hecho esto, tómese en la escala del plano una distancia que represente 280 toesas, y trácese la a b: asimismo tómese sobre dicha escala un número de partes correspondiente al de toesas de la A E, y haciendo centro en el punto a se describirá una interseccion; y volviendo á tomar sobre la escala otro número de partes equivalente al de toesas de la B E, hágase centro en el punto b y descríbase otra interseccion, que cortará á la primera en el punto e, que indicará en el plano la posicion del punto E en el terreno.

Del mismo modo se determinarán en él la posicion de los puntos F, G, C, D, y se marcarán en el plano en f, g, c, d.

Para situar los puntos H, I, K sin apelar al método de construccion, es necesario calcular las bases E F, F G. Para lo qual es claro que en el triángulo E A F se conocen los lados A E y A F por tenerlos ya calculados, y es facil hallar el valor del ángulo comprehendido E A F restando el valor de F A B del de E A B, por consiguiente se calculará el valor de E F por lo establecido (art. 336.); y asimismo el de F G en el triángulo F B G. El valor de estas dos últimas líneas servirán no solo para situar respecto á ellas los puntos H, I, K, conforme se situaron los demas respecto á la A B, sino que tambien servirán para poder comprobar si los puntos e, f, g, b estan bien en el plano segun sus distancias respectivas.

341. Se presenta con suma freqüencia en el trazado de las obras de fortificacion, tener que inscribir un polígono regular en un círculo dado; ó bien tener que buscar el radio de un círculo, dado el lado del polígono. Son varias las construcciones que para cada caso suministra la Geometría, pero trigonometricamente pueden resumirse todas ellas á dos generales, que vamos á explicar en los dos problemas siguientes. Exceptuaremos solamente el exâgono, puesto que tenemos visto (art. 126) que la cuerda de 60° es igual al radio: luego quando en un círculo se quiera inscribir un exâgono, es evidente que el valor del ángulo del centro será de 60° (art. 183.): luego sus lados seran cuerdas de 60°, y por consiguiente iguales al radio. Así es, que para inscribir un exâgono en un círculo, basta tomar con un compas la distancia del radio, y llevarla seis veces consecutivas sobre la circunferencia, y por los puntos marcados tirar seis rectas, que formarán el perímetro del exâgono. Si al contrario se diese un exâgono regular, y se quiere circunscribirle un círculo, se tomará por radio el lado del polígono, y haciendo centro en el del polígono, se describirá una circunferencia que pasará por todos los vértices de los ángulos del polígono (art. 181.).

Problema 71. *Dado el valor de un lado del polígono regular, hallar el del radio del círculo circunscripto.*

Pártase 360° por el número de lados del polígono, y se tendrá al quociente el valor del ángulo del centro del polígono (art. 183.).

Ahora bien, si se concibe que desde el centro del polígono se tiran unas líneas rectas á los vértices de sus ángulos interiores, toda su superficie (fig. 96.) quedará dividida en triángulos, que estarán formados por un lado del polígono y dos radios del círculo circunscripto, de consiguiente dichos triángulos serán isósceles; ademas, siendo el ángulo del centro el que se opone al lado del polígono, es claro que cada uno de los otros dos ángulos se hallará, restando de 180° el valor del ángulo del centro, y tomando la mitad del residuo (art. 125, corol. III.).

Fig. 96.

Luego en cada uno de estos triángulos se conocerán sus tres ángulos y el lado del polígono opuesto al ángulo del centro; será pues facil hallar el valor del radio que se opone á uno de los otros dos ángulos, diciendo (art. 331.) el seno del ángulo del centro es al lado del polígono, como el seno de uno de los otros ángulos del triángulo es al quarto término, que será el valor del radio.

Exemplo. Dado un pentágono cuyo lado es de 186 toesas, hallar de que extension deberá ser el radio del círculo circunscripto.

Parto 360° por el número de lados del polígono propuesto: el quociente dará 72° por el valor del ángulo del centro. Resto 72° de 180°, y del residuo 108° tomo la mitad, y tendré 54° por el valor de cada uno de los demas ángulos del triángulo; con cuyos datos entablo la proporcion siguiente; sen. 72° : 180 :: sen. 54° : R; y operando por logaritmos

Comp. arit. Log. sen. 72°.. 0'0217937
Logar. 180..... 2'2552725
Logar. sen. 54°..... 9'9079576

Suma log. R=..... 2'1850238=153'12 toesas.

Problema 72. *Dado el valor del radio del círculo, hallar el de un lado del polígono inscripto.*

Como en el problema anterior, se hallará el valor del ángulo del centro; con cuyo valor se determinará el de cada uno de los otros dos del triángulo formado por un lado del polígono y dos radios del círculo.

Hecho esto, es evidente que en dicho triángulo se conocerán dos de sus lados por radios del círculo, y los tres ángulos: se obtendrá pues el valor del lado del polígono entablando la proporcion siguiente: el seno de uno de los ángulos opuestos al radio, es al valor del radio, como el seno del ángulo del polígono, es al quarto término que será el valor del lado del polígono inscripto.

Exemplo. Dado un círculo cuyo radio es de 291 $\frac{1}{4}$ toesas, hallar que extension tendrá el lado del decágono inscripto en él.

Parto 360° por el número de lados del polígono propuesto: el quociente dará 36° por el valor del ángulo del centro. Resto 36° de 180,° y del residuo 144° tomo la mitad, y tendré 72° por el valor de cada uno de los demas ángulos del triángulo; con cuyos datos entablo la proporcion siguiente; sen. 72° : 291'25 :: sen. 36° : x, y operando por logaritmos

Comp. arit. log. sen. 72°... 0'0217937
Logar. 291'25..... 2'4642659
Logar. sen. 36°..... 9'7692187

2'2552783=180 toesas.

Valor del lado del decágono inscripto.

342. Prometimos (art. 212, advert.) dar la solucion del problema siguiente.

Problema 73. *Modo de reducir los valores de los ángulos observados en planos inclinados al horizonte, á los que deberian tener si se hubiesen observado estando los objetos en un plano horizontal.*

Fig. 147. Sean A, B, C (fig. 147.) tres puntos diversamente elevados sobre el horizonte, siendo A D, B F, C E sus alturas respectivas, de modo que F D E sea un plano horizontal: se ha medido el ángulo B A C; pero como el plano al qual se quieren referir estos objetos es F D E, se imagina que B está colocado en F, A en D, y C en E, y se pide el ángulo F D E.

En la estacion que se haga para medir el ángulo B A C se medirán tambien los ángulos B A D, C A D, que forman los radios visuales A B, A C, con el hilo del plomo en el punto A; lo que se executa conforme hemos explicado en la execucion del problema 66 (art. 328.).

Hecho esto, concíbase que A B y A C prolongadas, si es necesario, encuentran el plano horizontal F D E, en los puntos G é I; en los triángulos A D G, A D I rectángulos en D, si se considera A D como una unidad, será facil hallar los valores de los lados A G, D G, A I y D I expresados en unidades A D, ó en partes de ella, segun lo establecido (art. 326, y 327.). Con estos quatro datos se conocerá, 1.° en el triángulo A G I los lados A G y A I, y el ángulo comprehendido G A I; de consiguiente se podrá calcular el lado G I por lo dicho (art. 337.). 2.° En el triángulo G D I se conocerán los lados D G y D I, y el lado G I que se acaba de calcular: luego se podrá calcular el ángulo G D I por lo dicho (art. 335.).

Se operará de un modo semejante para reducir el ángulo observado en el punto B; y quando en un triángulo se tengan reducidos así dos de sus ángulos, será

inutil hacer un cálculo semejante para reducir el tercero, porque los tres ángulos del triángulo reducido debiendo valer 180° (art. 124.), será facil hallar el tercero.

Habiendo reducido así los ángulos, será facil reducir las distancias, ó una de ellas (porque basta el reducir una de ellas en cada triángulo). En efecto, si se imagina la horizontal B O, en el triángulo B A O rectángulo en O se conoce B A que ha sido medido, el ángulo recto y el ángulo B A O; se obtendrá pues (art. 326.) facilmente B O ó F D.

Exemplo. Se halló el ángulo B A C de 62° 37′; el ángulo B A D de 88° 5′; y el ángulo C A D de 78° 17′.

Busco primero los valores de A G, D G, A I y D I; y para hallar el de A G deduzco del triángulo A D G (art. 326.) la proporcion siguiente sen. A G D : R :: A D : A G, y substituyendo valores sen. 1° 55′ : R :: 1 : A G; que operando por logaritmos y aproximando hasta centésimos el resultado (Aritm. art. 152.) me dará A G = 29'90. Se hallará el valor de D G en el mismo triángulo diciendo (art. 327.) R : tang. G A D :: A D : D G, y substituyendo valores R : tang. 88° 5′ :: 1 : D G, que operando del mismo modo me dará D G = 29'88.

En el triángulo rectángulo A D I hallaré por un proceder semejante A I = 4'92 y D I = 4'82.

Entonces en el triángulo A G I conociendo ademas el ángulo B A C ó G A I de 62° 37′, calcularé (art. 336, y 337.) la semidiferencia de los dos ángulos A G I, A I G, entablando la siguiente proporcion A G + A I : A G — A I :: tang. 58° 41′ media suma de estos dos ángulos es á un quarto término; substituyendo valores hallaré que esta semidiferencia es 49° 42′; lo que dará el ángulo A G I de 8° 59′ por lo dicho (art. 333.), con cuyo valor será facil hallar el lado G I de 27'98 (art. 331, y 332.).

En el triángulo D G I se conocerán los lados D G, D I, G I; luego por lo dicho (art. 334, y 335.) se hallará el ángulo G D I = 62° 27′, que es el valor del ángulo B A C reducido al plano horizontal: que es lo que se pretendia executar.

343. Es principio constante en la guerra dirigir en quanto es posible los ataques á una plaza ó puesto fortificado por la direccion de la línea capital (q) de sus ángulos salientes. Hemos visto en el artículo 163 el modo de hallar la prolongacion de esta línea, practicando para ello operaciones reducidas á tomar distancias iguales sobre las dos caras ó lados del ángulo saliente: basta este enunciado para conocer que este método de resolver el problema no es practicable en el caso de haber de verificarlo respecto á un puesto poseido por el enemigo; y siendo su indagacion tan interesante como se deduce de lo dicho, es indispensable manifestar aquí su solucion; pero antes estableceremos el teorema siguiente.

Fig. 148. 344. Teorema. *La línea A D* (*fig.* 148.) *que corta en dos partes iguales un ángulo B A C de un triángulo, corta el lado opuesto B C, en dos partes B D, y D C proporcionales á los lados correspondientes A B y A C; es decir, de modo que se tenga B D : D C :: A B : A C.*

Demostracion. Si del punto B se tira la B E paralela á la A D, y que encuentre á la prolongacion de C A en E, las líneas C E, C B hallándose entonces cortadas proporcionalmente (art. 145, corol. II.), se tendrá B D : D C :: A E : A C.

Pero es facil ver que A E es igual al lado A B; porque siendo A D paralela á B E, el ángulo B E A es igual al ángulo D A C por correspondientes (art. 84), y el ángulo E B A es igual al ángulo B A D por alternos internos (art. 85.): luego, puesto que segun la propuesta los ángulos D A C y B A D son iguales por

ser mitades de B A C, los ángulos B E A y E B A serán iguales: luego los lados opuestos A E y A B son tambien iguales (art. 125, corol. IV.): luego la proporcion anterior B D : D C :: A E : A C, se cambia en esta B D : D C :: A B : A C.

Apliquemos ahora este teorema al problema siguiente.

345. Problema 74. *Determinar sobre el terreno los puntos de la prolongacion de un baluarte, ó de un ángulo saliente de una obra de fortificacion enemiga.*

Fig. 88. Sea B A C (fig 88.) el ángulo propuesto.

En la direccion de la línea B A plántese un piquete en un punto qualquiera E sobre dicha direccion, y por la de C A otro en D. Mídase el lado D E. En el punto D obsérvese el ángulo A D E, y desde el punto E el ángulo A E D.

Hecho esto, en el triángulo A D E se conocerán los valores de los ángulos, y el del lado D E; con cuyos datos se calcularán los lados A D y A E, puesto que el enemigo impediria el acercarse al punto A: entonces como la capital divide el ángulo B A C y á su opuesto por el vértice D A E en dos partes iguales tendremos (art. 344.) A D : A E :: D F : F E, y componiendo con el conseqüente (Aritm. art. 116, núm. 4.) A D + A E : A E :: D F + F E : F E, pero D F + F E = D E; luego podremos decir A D + A E : A E :: D E : F E, en cuya proporcion se conocen los tres primeros términos, de consiguiente será facil hallar el valor del quarto F E. Resta pues llevar esta distancia sobre el terreno desde el piquete E hácia D, y marcando el punto F nos indicará un punto de la prolongacion de la línea capital del ángulo saliente B A C, que es lo que se pretendia executar.

No insistiremos mas sobre la aplicacion de los principios trigonométricos en la práctica, bastando lo dicho para conocer su utilidad.

APÉNDICE,

que comprehende la descripcion de los instrumentos, y útiles necesarios para la execucion de las operaciones de la Trigonometría: comprehende asimismo las definiciones de algunas voces necesarias para la inteligencia de este Tratado.

(a) Los *piquetes* son unos palos rectos, toscamente trabajados, de 30 á 36 pulgadas de alto, y de 2 á 3 de grueso, con punta en uno de sus extremos (fig. 1.).

Fig. 1.

(b) Todo cuerpo tiende á moverse de arriba para baxo, impelido por una fuerza llamada *gravedad* ~~ó peso~~; y se dirige al centro de la tierra, adonde llegaria si algun obstáculo no lo retuviese sobre la superficie de ella. Síguese de este fenómeno, que quando se ata un cuerpo sensiblemente pesado al extremo de un cordon, y queda sostenido en un punto qualquiera b (fig. 2.) de su longitud, de modo que pueda tomar libremente la posicion que el cuerpo que lo sostiene tiende á darle, y quando este cuerpo ha quedado inmovil, el hilo b a se halla dirigido hácia el centro de la tierra: esta direccion se llama en Geometría direccion *vertical*, y en la práctica *plomo* ó *á plomo*, sin duda porque el cuerpo que por lo regular se ata al hilo ó cordel es un plomo.

Fig. 2

(c) *Jalon* es un palo derecho de 6 á 8 pies de largo, y de una pulgada de grueso: uno de sus extremos es puntiagudo para poderse clavar con facilidad en el terreno, para lo qual es lo mas usual calzarlos de hierro: en el otro extremo se practica una hendidura longitudinal destinada á recibir un papel blanco extendido para hacerlos mas sensibles á la vista desde lexos (fig. 3.).

Fig. 3.

(d) La toesa es un palo recto y redondo, ó quadrado, de 6 pies de Rey de largo, y de pulgada y media de grueso; cuya extension se divide primero en seis partes iguales, una de ellas corresponderá á un pie, y cada una

de estas se dividirá en dos partes iguales, de las quales es claro que una corresponderá á medio pie ó á 6 pulgadas: el pie que corresponde á cada uno de sus dos extremos se dividirá en 12 pulgadas. Los pies, medios pies y pulgadas, se indicarán en lo largo de la toesa con unas tachuelas de cobre, ó con una raya negra al rededor del palo de la toesa: conviene que los extremos de la toesa estén herrados, para que no varíe sensiblemente su extension (fig. 4.).

Fig. 4.

La *doble toesa* no difiere de la toesa sino en que es de doble longitud que la simple toesa: constará pues de 12 pies de Rey (fig. 5.).

Fig. 5.

(e) La *cadena* ó *cadenilla* es una medida compuesta de varios eslabones de alambre grueso de hierro ó metal, de un pie de Burgos de largo cada uno, incluso el de las pequeñas argollas que las unen. La cadenilla tiene por lo regular de 6 á 10 varas de largo; las hay tambien hasta de 20 varas: en fin, este largo es arbitrario. Cada vara se distingue por una argolla mayor que las que unen los demas eslabones. De cada una de las argollas de los dos extremos de la cadenilla pende una *fixa*, que es una barreta de hierro de media vara de largo: uno de sus extremos termina en ojo que queda engarzado en la argolla de la cadenilla, y el otro en punta para poderse clavar en el terreno.

Fig. 6.

Puede suplirse la falta de la cadenilla con un cordel, cuya extension se divide en varas ó toesas, señalando las divisiones con un nudo, ó con unos pedacitos de otro cordel mas delgado, ó unas tiras estrechas de cordovan que se introducen entre los cordones de su colchado; y para que este cordel esté menos sujeto á mutaciones conviene ponerlo antes en aceite hirviendo, y encerarle despues de seco y de bien estirado (fig. 6.).

ó transportador

(f) El *semicírculo* es un instrumento de metal, ó de talco, de 3 á 4 pulgadas de diámetro.

El semicírculo se traza sobre una hoja de laton delgada, ó sobre una de talco bien transparente: desde el punto C (fig. 7.) como centro estan descriptas las cinco semicircunferencias e f g, k l m, n o p, q r s, y a b d: la corona intermedia entre la primera y segunda semicircunferencia está dividida en 180 partes iguales, una de ellas corresponderá pues á un grado: en la corona intermedia entre la primera y segunda

Fig. 7.

tercera y segunda semicircunferencia se hallan prolongadas las divisiones de cinco en cinco grados: en la corona comprehendida entre la tercera y quarta semicircunferencia se hallan prolongadas las divisiones de diez en diez grados, y escrito en ella la numeracion de la graduacion, empezando por la izquierda y acabando á la derecha: en la corona comprehendida entre la quarta y quinta semicircunferencia se hallan igualmente prolongadas las divisiones de diez en diez grados, pero en esta última la numeracion está colocada en un órden contrario á la anterior, pues empieza á la derecha y acaba á la izquierda.

Quando este instrumento es de laton, la parte comprehendida entre la semicircunferencia a b d y el diámetro a c d está en claro, ó en hueco.

Los transportadores de que se hace uso en las operaciones delicadas, tienen una regla que se denomina *alidada*, movible sobre el centro: la alidada lleva consigo un *nonio* (ll), y en su extremo hay una punta muy aguda perpendicular á su plano, y en disposicion que le falte poco para llegar al plano sobre que se pone el instrumento.

Fig. 8. (g) El *grafómetro* es un semicírculo de metal: los mas cómodos en la práctica son los de 8 á 12 pulgadas de diámetro. La division de la graduacion es la misma que la del semicírculo, pero con la diferencia de que la corona interior es la que está dividida de grado en grado, como puede verse en la figura 8. En su centro c tiene una regla a b movible al rededor de dicho punto llamada *alidada* ó *dioptra*, y en los extremos de esta alidada hay dos pínulas a d, b c, que son unas planchetas de laton del mismo ancho que la regla de la alidada, y estan colocadas verticalmente sobre esta: la figura 8 y la 9 demuestran las dos pínulas a d y b c: la pínula a d tiene en sólido la mitad inferior de su altura, y vaciada ó hueca la superior; y la pínula b c tiene al contrario en sólido su mitad superior, y hueca la parte inferior: la parte hueca tanto de una pínula como de la otra tiene un hilo colocado verticalmente en su parte media, y la parte sólida tanto de la una como de la otra tiene una abertura longitudinal en la misma direccion que el hilo, para que aplicando la vista en ella pueda verse el hilo de la pínula opuesta; y para que con mas facilidad puedan distinguirse los objetos, se practican unos

Fig. 9.

circulitos de algun mas diámetro que el ancho de la expresada abertura, tanto en los dos extremos de esta como en su parte media. El diámetro fixo d e tiene tambien dos pínulas m n en todo semejantes á las de la alidada.

En la parte inferior de este instrumento, y debaxo de su centro c, hay una esfera k que se mueve en todos sentidos dentro del cubo l m n o, que se aprieta por medio del tornillo q, quando se quiere fixar el instrumento en determinada posicion.

El pie de este cubo está taladrado lo conveniente en su parte inferior para que pueda entrar en el piton r que sale del zoquete de madera triangular que está montado sobre el tres pies s, t, v, movibles en x, y, z, los quales pueden fixarse por medio de tres tornillos para sostener el instrumento en la posicion que quiera dársele.

alidada Hay grafómetros, que en lugar de pínulas tienen á lo largo de la alidada movible un anteojo, y otro en la alidada fixa: son preferibles estos, particularmente en las operaciones en que los objetos distan mucho unos de otros.

Por lo regular quasi todos los grafómetros tienen una aguja (h) colocada en medio de su superficie é inferior á ella, para no impedir el giro de la alidada, ó anteojo movible.

En los extremos de la alidada movible se halla la graduacion del *nonio* ó *vernier* (ll); y es de advertir, que el punto de esta graduacion que marca cero se llama *index*, y la línea de division que pasa por él toma el nombre de *línea magistral.*

Fig. 10. (h) La *aguja* es una circunferencia a b c d e f a (fig. 10.) trazada sobre laton, y dividida su graduacion de un modo semejante á la del grafómetro: como que esta es una circunferencia entera constará de 360°. Su diámetro es por lo regular de 7 á 8 pulgadas. En el centro g de esta circunferencia hay un pequeño estilo de acero de 3 á 4 líneas de alto y colocado perpendicularmente á dos diámetros a d, h i, que se cortan formando ángulos rectos. Sobre la punta de este estilo se coloca *horizontalmente* (i) una aguja *imanada* (j) l m, la que con este fin tiene un capillo de piedra ágata, ó de cristal, en su parte media, de modo que colocada sobre el estilo, tiene toda la libertad que necesita para ceder á la fuerza *magnética* (k) que la dirige hácia los dos *puntos cardinales* (l) Norte y Sur. Con el fin de señalar esta di-

reccion, se marcan los extremos del diámetro que corresponden á la division de 360° y á la de 180°, el primero con la palabra Norte, ó letra N, y el segundo con la palabra Sur, ó letra S. Los extremos del diámetro que coinciden con las divisiones de 90° y con la de 270° se marcan, el primero con la palabra Este, y el segundo con la de Oeste, ó simplemente con una E y una O, que son los otros dos puntos cardinales restantes.

La aguja está colocada dentro de una caxa redonda de laton. Esta caxa lleva exteriormente dos pínulas semejantes á las del grafómetro, y colocadas de firme á los extremos del diámetro a b, y verticales al plano del instrumento; la circunferencia de la caxa está graduada: esta aguja dispuesta de este modo es preferible á las que mas comunmente se usan de caxa quadrada, pues tiene la ventaja de que pasando la visual por el centro del instrumento no necesita de hacerse la correccion, que es necesario hacer sirviéndose de las otras, en las quales la visual pasa por el canto de la caxa, y no por el centro del instrumento.

(i) Hemos visto en la nota (b) lo que es direccion vertical; pues toda línea recta perpendicular á ella se llama *horizontal*, y quando un plano está colocado en esta direccion se dice que está *horizontalmente*: deriva esta voz de *horizonte*: llámase *horizonte aparente* la línea circular que separa la parte visible del cielo de aquella que se oculta á la vista de un observador que desde un punto extiende sus miradas al rededor de sí.

(j) *Imanada*: es decir, tocada ó frotada con la piedra imán.

(k) *Magnética*: se da este nombre á la virtud que tiene el imán de atraer el hierro y el acero, de asirse á ellos fuertemente: de atraer ó repulsar otro imán, segun que se presentan por los extremos *amigos* ó *enemigos*: de dirigir uno de sus extremos hácia el *Norte* y el otro opuesto hácia el *Sur*; cuya última propiedad es de la que se saca mas utilidad en la práctica.

(l) *Puntos cardinales*, son quatro puntos del horizonte que dividen su circunferencia en quatro partes iguales: distan

pues 90° uno del otro. De estos puntos, los dos llamados Norte ó Septentrion, y Sur ó Mediodia que diametralmente se le opone, estan proxîmamente determinados por la direccion de la aguja: dícese proxîmamente porque la aguja solo en pocos puntos de la tierra se dirige exâctamente al punto del verdadero Norte, y á la cantidad en que se desvía de esta direccion en los demas puntos de la tierra se llama *variacion de la aguja*: Situado el punto Norte y Sur es facil situar los dos puntos cardinales restantes Este ú Oriente, y Oeste ú Occidente: el primero de estos dos se situa á la derecha de la línea Norte-Sur, suponiendo que dando la espalda al Sur se está mirando al Norte; y el Oeste se situa á la izquierda, diametralmente opuesto al Este: estos dos últimos puntos deben estar diametralmente opuestos, y el diámetro que pasa por ellos debe formar ángulos rectos con el diámetro que pasa por los puntos Norte y Sur.

El Sol nace ó sale hácia la parte del Este ú Oriente, y se pone ó se oculta hácia la parte del Oeste ú Occidente.

(11) El *nonio* ó *vernier*, es una segunda graduacion señalada á lo ancho, y en el extremo de la alidada: comprehende un espacio igual á 11° de los señalados sobre el limbo del instrumento, y este espacio se divide en 12 partes iguales, que valen cada una 55′, y estan colocados al lado del index.

Supongamos, por exemplo, que midiendo un ángulo, el index señala exâctamente 38° sobre el limbo, el ángulo será precisamente de 38°, y la última division de la alidada corresponderá directamente á los 49° del limbo; pero ninguna de las divisiones intermedias de la alidada se ajustará con perfeccion con los grados correspondientes del limbo: en efecto, la primera division de la alidada diferirá en 5′ del 39°: la segunda diferirá del 40° en 10′: la tercera diferirá en 15′ del 41°, &c.

Supongamos ahora que el index pase del 39°; entonces, si la primera division de la alidada se ajusta con el 39° del limbo, el ángulo será de 38° 5′: si la segunda division de la alidada se ajusta con el 40° del limbo, el ángulo constará de 38° 10′: si la tercera division de la alidada se ajusta con el 41° del limbo, el ángulo será de 38° 15′, &c. Así, el número de grados de un ángulo se cuenta sobre el limbo, y el de los minutos de este mismo ángulo se cuenta sobre

las divisiones de la alidada que distinguen estos minutos de 5 en 5.

Si ninguna de estas divisiones se ajusta exâctamente sobre un grado del limbo, es preciso valuar la diferencia que se halle entre las dos que mas se aproxîmen; y aunque es difícil hacerlo exâctamente, es tambien cierto que el mayor error no puede pasar de dos minutos, aun para el ojo menos exercitado.

(m) La *esquadra* es un instrumento de madera ó laton, que sirve para trazar ángulos rectos: los de madera se reducen á una figura de tres lados, de los quales dos forman un ángulo recto; es decir, que estos dos lados son recíprocamente perpendiculares el uno al otro: los de laton se reducen á dos reglas, cuyos lados forman tambien un ángulo recto (fig. 11.).

Fig. 11.

(n) El *cartabon* ó *esquadra* se reduce á dos reglas de madera de dos ó tres varas de largo cada una, y unidas á ángulo recto: sirve para el trazado de las perpendiculares sobre el terreno (fig. 12.).

Fig. 12.

(ñ) El instrumento llamado *paralelas*, se reduce á dos reglas A B y C D (fig. 72, Lám. 2.) unidas la una á la otra por medio de las dos barretas de laton A C y B D totalmente iguales, y colocadas de modo que el punto A diste del punto B tanto como el punto C diste del punto D, y quedando la recta A B paralela á la C D.

Mediante á que dichas barretas estan hechas firmes sobre las reglas por medio de unos pernetes que las atraviesan en sus cabezas, permitiéndoles girar al rededor de ellos, dichas reglas pueden mudar su posicion respectiva desde la de estar unidas á la de quedar A C, B D perpendiculares á la C D.

Es evidente, que sea qual fuese la posicion que puedan tomar estas dos reglas así unidas, se ha de verificar siempre que la recta A B = C D, y que A C = B D: luego siempre la recta A B será paralela á la C D (art. 136.).

Ademas, se supone que los dos cantos de las reglas sean respectivamente paralelas á las rectas A B y C D: luego los cantos de una regla seran paralelos á los cantos de la otra (art. 91.).

(o) *Atrincheramiento*: se da este nombre á todo obstáculo que sirve para cubrirse de los enemigos y defenderse con ventaja de sus ataques: los hay *naturales* y *artificiales*.

Los naturales son los rios, pantanos, bosques, ó malezas impenetrables, las peñas, escarpados, y generalmente todos los accidentes del terreno que oponen dificultades á los hombres que las quieren superar.

Los artificiales son los que se construyen en los parages accesibles del terreno, como son los atrincheramientos de tierra ó mampostería, las inundaciones, los cortes de árboles &c.; en fin, todo lo que exîge el socorro del arte.

(p) *Trinchera*: es un camino hecho con el fin de acercarse á las obras de fortificacion del enemigo quando se le asedia; y para poderlo hacer á cubierto de sus fuegos se le da varias direcciones sujetas á reglas, y se executa excavando el terreno unos tres pies, y colocando las tierras precedentes de esta excavacion hácia el lado de la Plaza ó Fuerte, formando con ellas un parapeto de tres ó quatro pies sobre el terreno de la campiña, los que unidos á los tres de excavacion ponen á cubierto al soldado.

(q) *Línea capital*: es una línea recta tirada desde el vértice del *ángulo saliente* (s) de una obra de fortificacion al centro de ella.

(r) *Revellin*: es una obra de fortificacion de mampostería ó de tierra, de forma quasi triangular: el fin con que se construyen, colocacion y ventajas, se detallarán en el Tratado de fortificacion.

(s) *Ángulo saliente* en la fortificacion es aquel cuyo vértice se dirige hácia la campiña, ó hácia el frente ó lado del enemigo.

(t) *Camino cubierto* es un espacio de cinco á seis toesas de ancho, que rodea el foso de una Plaza, de un Fuerte ó de un atrincheramiento por el lado de la campiña.

(u) *Alcance* de un fusil, cañon ó de qualquiera otra pieza de artillería, es la distancia á la qual pueden estas armas arrojar la bala.

(v) *Plancheta.* La plancheta es una tabla de madera bien lisa y llana, de forma quadrada ó quadrilonga A B C D (fig. 13.), que por lo regular tiene de 24 á 30 pulgadas de base sobre 18 á 24 de altura, montada sobre un tres pies como el grafómetro. Sobre esta tabla se extiende un pliego de papel que se sujeta por medio de un marco que rodea la plancheta.

Fig. 13, *y* 14.

Para hacer uso de la plancheta es necesario tener una alidada llamada *blok* (fig. 14.). Esta alidada ó regla de cobre tiene una pínula bastante alta en cada uno de sus dos extremos, y la parte media de su ancho adonde estan las aberturas coincide con uno de los bordes de esta regla. Las pínulas estan unidas á los extremos de la regla por medio de visagra para poderlas acostar sobre la alidada, ó levantarlas perpendicularmente. Quando se opera se fixa por medio de un dado giratorio cada pínula en la situacion perpendicular.

Es ventajoso en la práctica que una de las pínulas del blok sea mas alta que la otra. Como los objetos sobre los quales es preciso dirigir el blok estan mas ó menos elevados, ó inferior al plano de la plancheta, se operará con suma facilidad dirigiendo la visual al objeto desde la pínula baxa á la mas alta si el objeto está elevado: lo contrario se practica quando el objeto está mas baxo que la plancheta.

(x) *Tenaza* es un instrumento compuesto de dos barretas iguales a b y c d (fig. 15.) de una línea de grueso y de dos á tres de ancho, unidas á esquadra de b á d. El fin á que se destina este instrumento es para colocar con facilidad y exâctitud un punto de la plancheta verticalmente sobre un punto qualquiera del terreno. Para ello, en el extremo c de la barreta c d se coloca un plomo f pendiente de un hilo ó cordon delgado, é introduciendo el canto de la plancheta dentro de la abertura de las dos barretas a b y c d, de modo que la primera asiente sobre la parte superior de la plancheta, y su extremo a sobre el punto del plano que se quiere ajustar á otro del terreno, es evidente que por la igualdad de las dos barretas expresadas, el extremo c de la barreta c d demostrará en la parte inferior de la plancheta la posicion del extremo d, y que el plomo f manifestará en el terreno un punto verticalmente inferior al de la plancheta. Será pues facil encontrar la coincidencia vertical de un punto qualquiera del plano con otro qualquiera del terreno.

Fig. 15.

(y) *Banderola* es un jalon, que tiene en su extremo superior arbolada de firme una bandera pequeña, por lo regular de lanilla roja, para hacer mas perceptible la posicion de este jalon en la operacion de levantar un plano.

(z) *Declinatorio*: instrumento de suma utilidad en la operacion de levantar un plano con la plancheta. Este instrumento se reduce á una pequeña aguja colocada dentro de una caxa rectangular, que por lo regular tiene seis pulgadas de largo, tres de ancho y una de alto. La aguja imanada en este instrumento no está rodeada de ningun círculo de metal dividido en grados, como en las agujas que se usan para levantar los planos, y no señala sino los puntos de Norte y Sur (fig. 16.).

Fig. 16.

La línea trazada sobre el fondo de la caxa del declinatorio, y que va á terminarse por ambos extremos al punto medio de cada uno de los lados pequeños de la caxa, dentro de la qual está encerrada la aguja imanada, es la línea norte-sur de la caxa. Esta es paralela á cada uno de los lados grandes de esta caxa, de modo que quando el declinatorio está dispuesto horizontalmente, y que la aguja imanada se para sobre esta línea, cada uno de los lados mayores de la caxa estará orientado en la direccion magnética de la aguja imanada.

(w) *Terraplen*: es una masa de tierras que circuye á la Plaza por todos los parages accesibles: sobre su parte superior llamada *adarve* se coloca la artillería y tropas destinadas á la defensa.

(A) *Baluarte*: es una gran masa de tierra revestida de mampostería ó de tepes, dispuesto en ángulo saliente sobre los ángulos del recinto de una Plaza fortificada á la moderna. La figura de un baluarte es casi la de un pentágono un poco alargado: se compone de dos *caras* que forman un ángulo saliente hácia la campaña, y de dos *flancos* que unen las caras al recinto: su abertura hácia la Plaza forma el quinto lado, y se llama la *gola* del baluarte.

(B) *Parapeto*: es, en general, una elevacion de tierra ó de mampostería, que sirve para guarecer al soldado del fuego del enemigo, y que le procura la ventaja de tirar sobre él á cubierto.

(C) *Glasis, esplanada ó espalto*: es una especie de terreno dispuesto con una inclinacion muy suave, de 20 á 25 toesas de ancho, que termina las fortificaciones de una Plaza del lado de la campiña, y que se extiende desde lo alto del parapeto del camino cubierto hasta el nivel de la campiña.

(D) *Línea magistral*: es una línea que se imagina pasar por el cordon del revestimento de la Plaza, la qual señala el trazado principal de la fortificacion, y desde el qual se empieza á contar los anchos de cada una de las partes que la componen.

(E) *Modo de suplir la falta del blok.* La falta del blok (v) se suple facilmente con una regla qualquiera A B E F (fig. 17.), sobre cuyo plano se coloca verticalmente de firme otra reglita pequeña ó liston de madera de 12 á 14 pulgadas de alto C D, cuyo liston estará atravesado por una clavija ó tornillo M N que pueda introducirse mas ó menos en el agujero O. Hecho esto se amarra un hilo en el punto A canto y esquina de la regla, y dando vuelta con él á la clavija se viene á hacer firme en el punto B canto opuesto de la regla. Luego por medio de la clavija se dispone el triángulo filar A M B de modo que quede bien perpendicular al plano de la regla A B, es decir, de la recta A B.

Fig. 17.

Para servirse de este instrumento, se coloca de plano la regla A B sobre la plancheta, y se dispone de modo que dirigiendo la visual por el hilo B M se vea el hilo M A confundido con el objeto: entonces es claro que el objeto estará en la direccion B A, y para marcar el radio visual á dicho objeto solo restará trazar una línea de lapiz por el canto A B de la regla.

Este instrumento no solo suple la falta del blok, sino que facilita mucho las operaciones quando los objetos á los quales se dirigen las visuales estan mas baxos ó mas altos que el plano de la plancheta.

Puede tambien servir de nivel para orientar la plancheta, adaptando otra clavija sobre el liston C D, y hácia el lado opuesto de la primera, y atando en ella un hilo del qual penda un pequeño plomo. Desde la clavija se señalará sobre el liston C D una raya vertical, y desde el pie de dicha raya se marcará otra sobre la regla A B que vaya á fenecer perpendicularmente sobre el canto E F de dicha regla.

Hecho esto, y suspendido el hilo del plomo en un punto de su clavija que diste del liston C D, tanto como de él dista el canto E F de la regla. Es evidente, que si puesto el blok sobre la plancheta no coincide la direccion del hilo del plomo con la raya vertical marcada sobre el liston C D, será una prueba de que la plancheta tiene inclinacion hácia A F ó hácia B E, segun que el hilo propenda hácia F ó hácia E. Asimismo, si la punta del plomo no coincide con el punto del canto de la regla E F en que la raya trazada lo corta, será tambien una prueba de que la plancheta se inclina hácia la parte E F, si la punta del plomo cae hácia fuera de la regla del blok: en el caso contrario, será una prueba de que la plancheta inclina hácia la A B. De modo que así y de una vez se nivelan á un tiempo dos direcciones que se cortan perpendicularmente.

(F) *Calcador*: es un vidrio ó cristal hecho firme en el quadro de madera A B C D (fig. 18.), cuyo quadro está unido á otro A B E F por medio de dos visagras en el lado A B: este último sirve de base, y sobre él se eleva el primero, que para poderse sostener en una situacion inclinada está unido á un tercer quadro C D G H por medio de dos visagras que unen los lados C D.

Fig. 18.

(G) El *nivel de agua* consiste en un tubo A B (fig. 19) de laton ó de hoja de lata de tres ó quatro pies de largo, y de pulgada ó pulgada y media de diámetro, torcido á ángulo recto en sus extremos A M y B N, en donde se aplican dos tubos de vidrio claro y transparente bien unidos al resto del tubo con betun ó pez, para impedir que el agua se salga por la union: en medio del tubo tiene otro C que sirve de caxa ó encaxe á un palo P L de quatro y medio pies de largo, sobre el qual se fixa el instrumento, y dicho palo se clava en tierra. Tambien se suele colocar el nivel sobre un tres pies.

Fig. 19.

(H) El *nivel de peso* consiste en dos reglas iguales M N, M P (fig. 20.) unidas á ángulo recto en M: estas dos reglas se unen con una tercera X Z, que formará con ellas el triángulo isósceles M X Z, cuya base X Z se divide por medio con una línea T V, y del vértice del ángulo M pende un hilo M R con un plomo en su extremo. *Véase su teoría* (art. 211.).

Fig. 20.

(I) El *nivel de aire*, ó *de viento*, consiste en un tubo de vidrio A B (fig. 21.) de 15 á 12 pulgadas de largo, lleno de algun licor que no esté expuesto á congelarse, como por exemplo el espíritu de vino, y se llenará todo de este líquido á excepcion de una ó dos gotas, cuyo pequeño espacio lo llenará la globulita de aire. Este tubo debe quedar herméticamente bien cerrado por todas partes, para que por ninguna de ellas pueda salir el aire ni el licor. Este tubo está guarnecido de metal para su resguardo, menos en la parte superior de su mediania, esto es, en C, y colocado sobre una plancheta de laton, y en sus dos extremos tiene dos pínulas perpendiculares á dicha plancheta: ademas en la longitud A B se marca una línea que pase por el punto C equidistante de sus dos extremos. *Véase su teoría* (art. 212.).

Fig. 21.

NOTA.

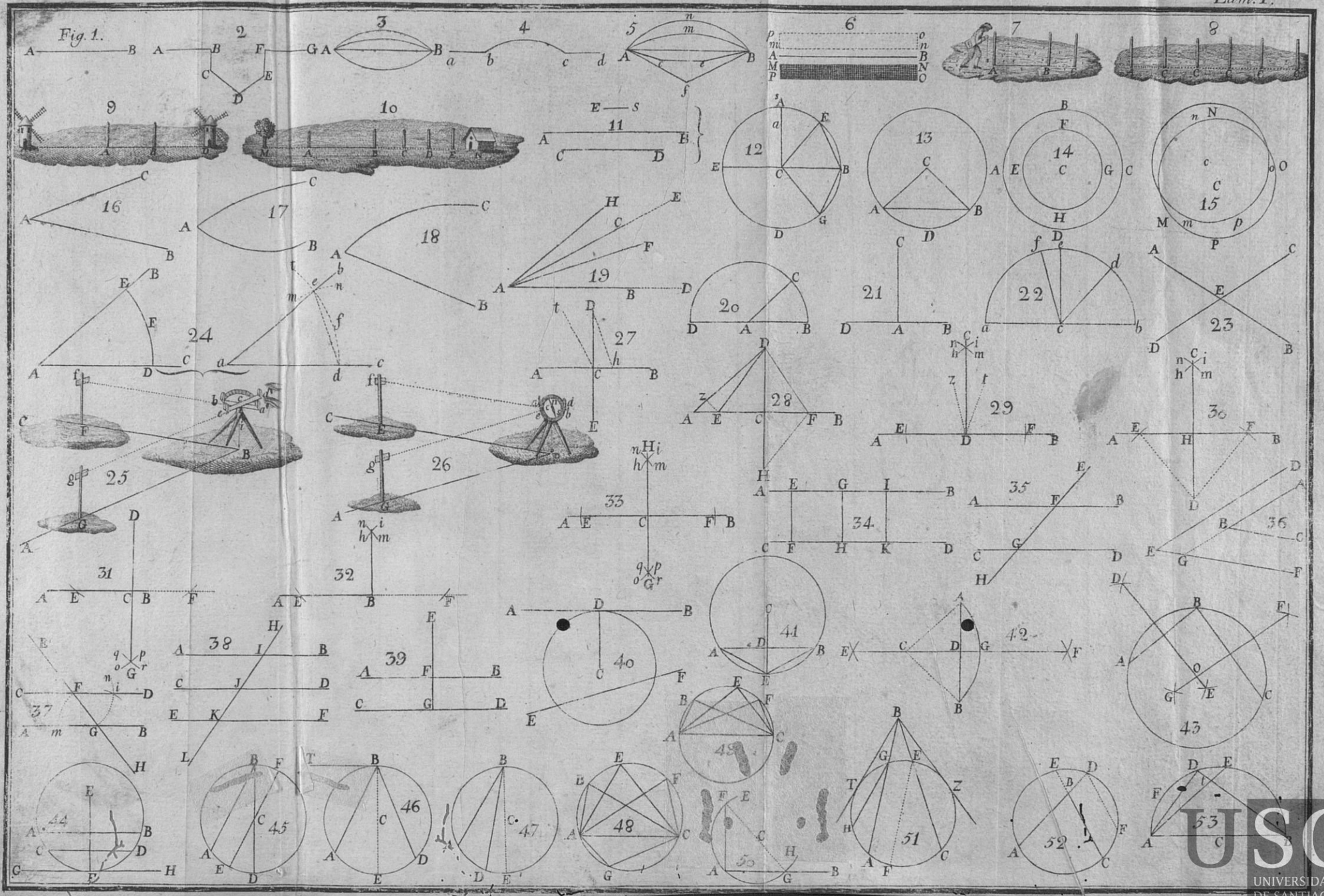
*El primer cuidado de los alumnos será enmendar las siguientes erratas en el Tratado, ó señalar el lugar en que se hallen con una indicacion arbitraria, por exemplo una estrellita *.*

ERRATAS.

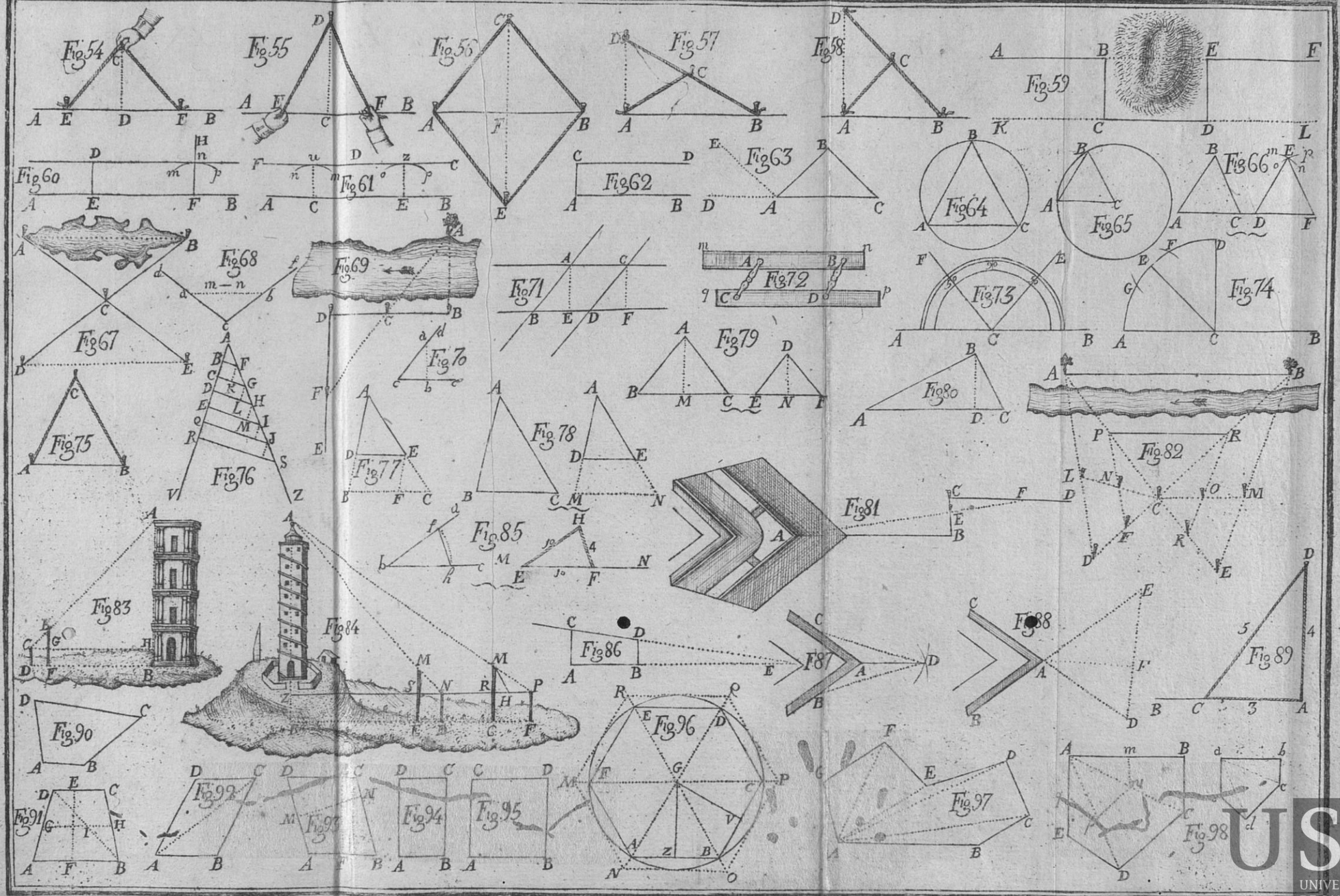
Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
10	17 y 18	removerá el jalon A hasta ponerlo en la direccion B N, y pasando &c.	removerá el jalon A y pondrá el jalon B en la direccion A M, mirando seguidamente desde A si la visual A B se desvía aún del punto N, y pasando &c.
15	32	empledo	empleado
16	27	se pone	se ponen
31	1	el ángulo C B E	el ángulo C E B
33	21	i del instrumento	c del instrumento
36	27	(art. 55.)	(art. 60.)
45	29	de afuera	de adentro
51	11	(art. 77.)	(art. 77, escol.)
53	1	al arco A B	al ángulo A C B
56	28	comprehenda	comprehendan
57	8	(art. 93.)	(art. 100.)
63	6	(art. 70, corol. 1.)	(art. 70, corol. III.)
64	25	medio C	medio H
id.	28	el punto C	el punto H
65	32	(art. 69, corol. II.)	(art. 75, corol. III.)
67	16	(art. 28.)	(art. 27.)
id.	23	(art. 96, corol. II.)	(art. 105, corol. II.)
68	12	levantar y baxar una perpendicular	levantar una perpendicular.
72	21	(art. 10.)	(art. 10, corol.)
75	18	(art. 121.)	(art. 125, núm. 2.°)
83	23	(art. 124.)	(art. 133.)
91	22	y señálese su punto medio	señálese su punto medio
101	12	decir A B^2	decir A B^2 +
id.	15	á la suma de sus dos catetos	á la suma de los quadrados de sus dos catetos.

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
103	2	(art. 149, corol. 1.)	(art. 150, corol. 1.)
104	4	(art. 149, corol. 1.)	(art. 150, corol. 1.)
id.	11	Problema 28 (art. 133.)	Problema 29 (art. 133.)
id.	28	divídase la C D y C E	divídanse la C D y C E
105	6	(art. 145, corol. 11.)	(art. 145, corol. III.)
id.	32	igual C G	igual á la C G
114	10	A B C D E F	A B C D E F G
116	9	de 127° 34 2/7	de 128° 34 2/7
117	28 y 29	todos los apotemas	todas las apotemas
119	5	A B C y A C B	A B C, y A C D
id.	8	los lados A B	los lados A D
id.	10	y A C B	y A C D
127	19	2 varas 2 pies y 6 pulgadas	2 varas 2 pies y 5 pulgadas
id.	21	2 varas + 6 pulgadas	2 varas + 5 pulgadas
138	6	el ángulo A D B	el ángulo A D C
142	21	se trazará sobre el papel una línea.	se trazarán sobre el papel unas líneas
143	35	angulosa V X Z	angulosa Y X Z
160	33	(Aritm. art. 89.)	(Aritm. art. 86.)
168	9	(art. 236, corol. IV.)	(art. 223, corol. V.)
169	29	que la primera	que la segunda
171	19	en tres puntos, á menos	en tres puntos sin confundirse en uno, á menos
178	19	eke	exe
180	20	iguales las C n, C m	iguales las c n, c m
id.	27	qual A B es un diámetro	qual A D es un diámetro
id.	28	es menor que a b	es mayor que a b
183	31	altura A B	longitud A B
187	14	es igual á la de sus círculos máxîmos	es igual á la de seis de sus círculos máxîmos
189	20	se llenaría echando en él 20	se llenaría echando en él 10
190	23	que cupieren	que caben
id.	25	la superficie	la solidéz
id.	29	(art. 220, escol.)	(art. 220, corol. 1.)
192	9 y 10	(art. 220, y 213.)	(art. 219, y 220.)
id.	19	(art. 25, corol.)	(art. 255, corol.)
193	37	que él	que ella
212	16 y 17	menos la mitad de la semidiferencia	mas la semidiferencia
214	16	el lado A C de 148	el lado A C de 184

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
218	22 y 23	A N Z (art. 124, corol. IV.); por consiguiente se conocerá tambien el ángulo N A P	A N Z (art. 59.); por consiguiente se conocerá tambien el ángulo N A P (art. 124, corol. v.)
227	24	del modo	de modo
228	22	(art. 343.)	(art. 344.)
229	11	gravedad ó peso	*bórrese* ó peso
230	32	El semicírculo es	El semicírculo ó transportador es
id.	40	la primera	la segunda
231	1	y segunda	y tercera
232	17	pínula movible	alidada movible
234	13	opuesta	opuesto
id.	23	que valen	que vale
235	21	(fig. 71, Lám. 2.)	(fig. 72, Lám. 2.)
236	21	recta	recta
id.	26	se construyen	se construye
238	28	dispuestos	dispuesto

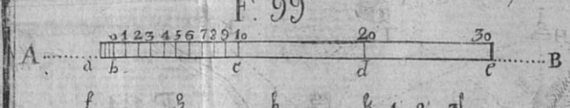


USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

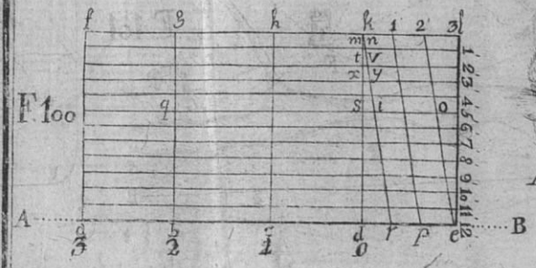


USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

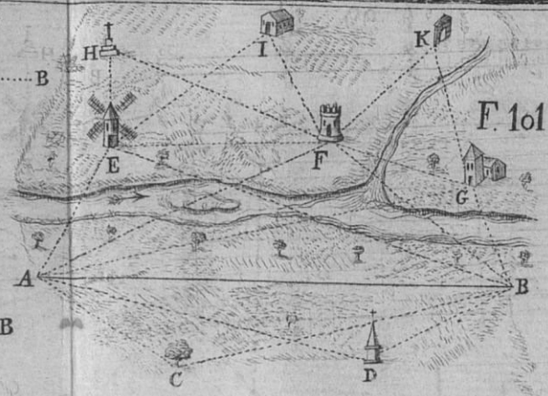
F. 99

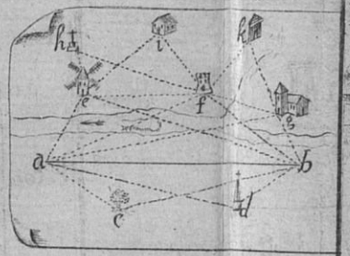


F. 100

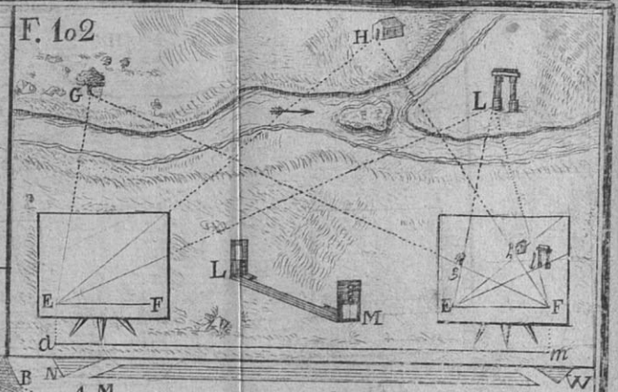


F. 101

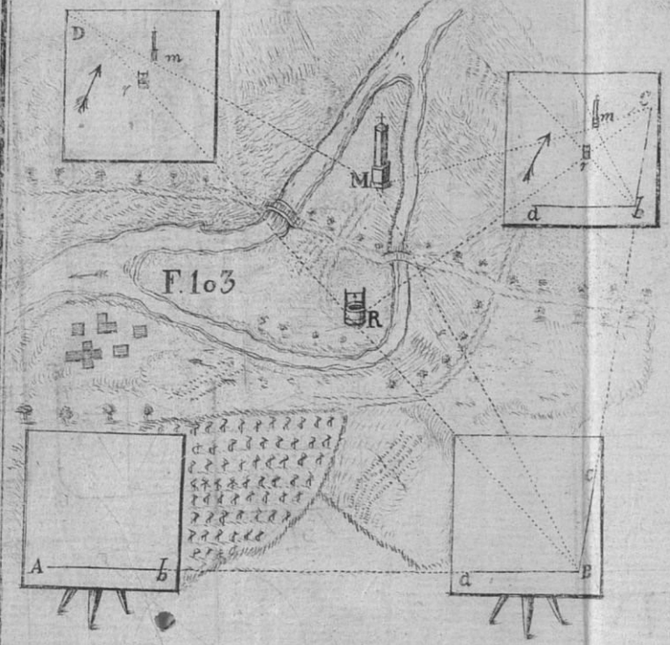




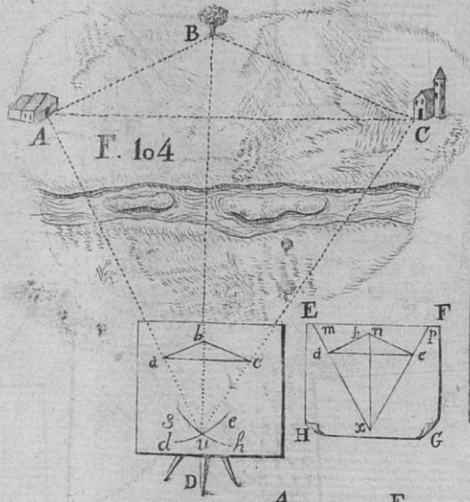
F. 102



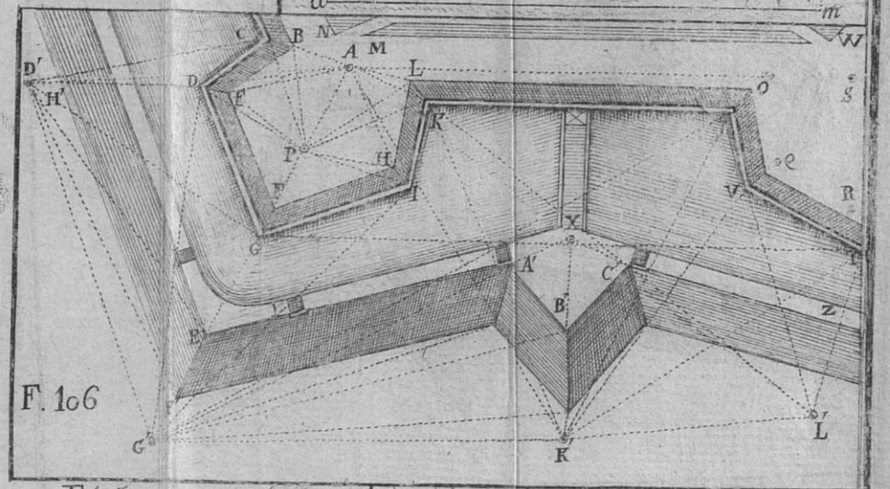
F. 103



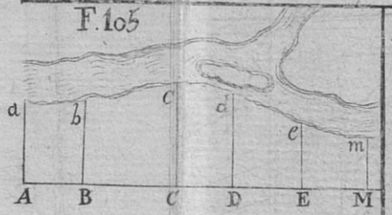
F. 104



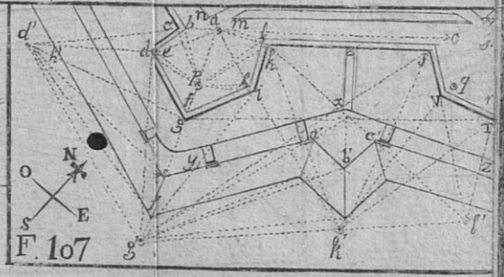
F. 106



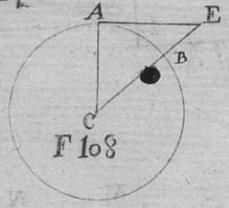
F. 105



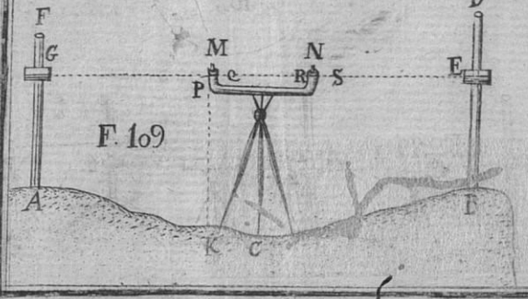
F. 107



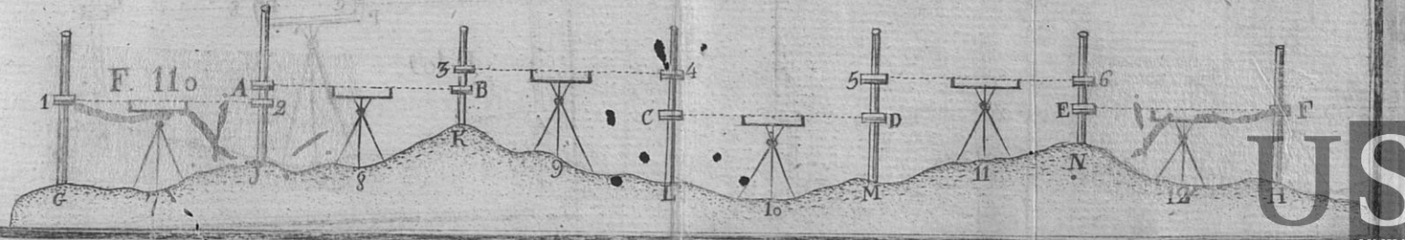
F. 108



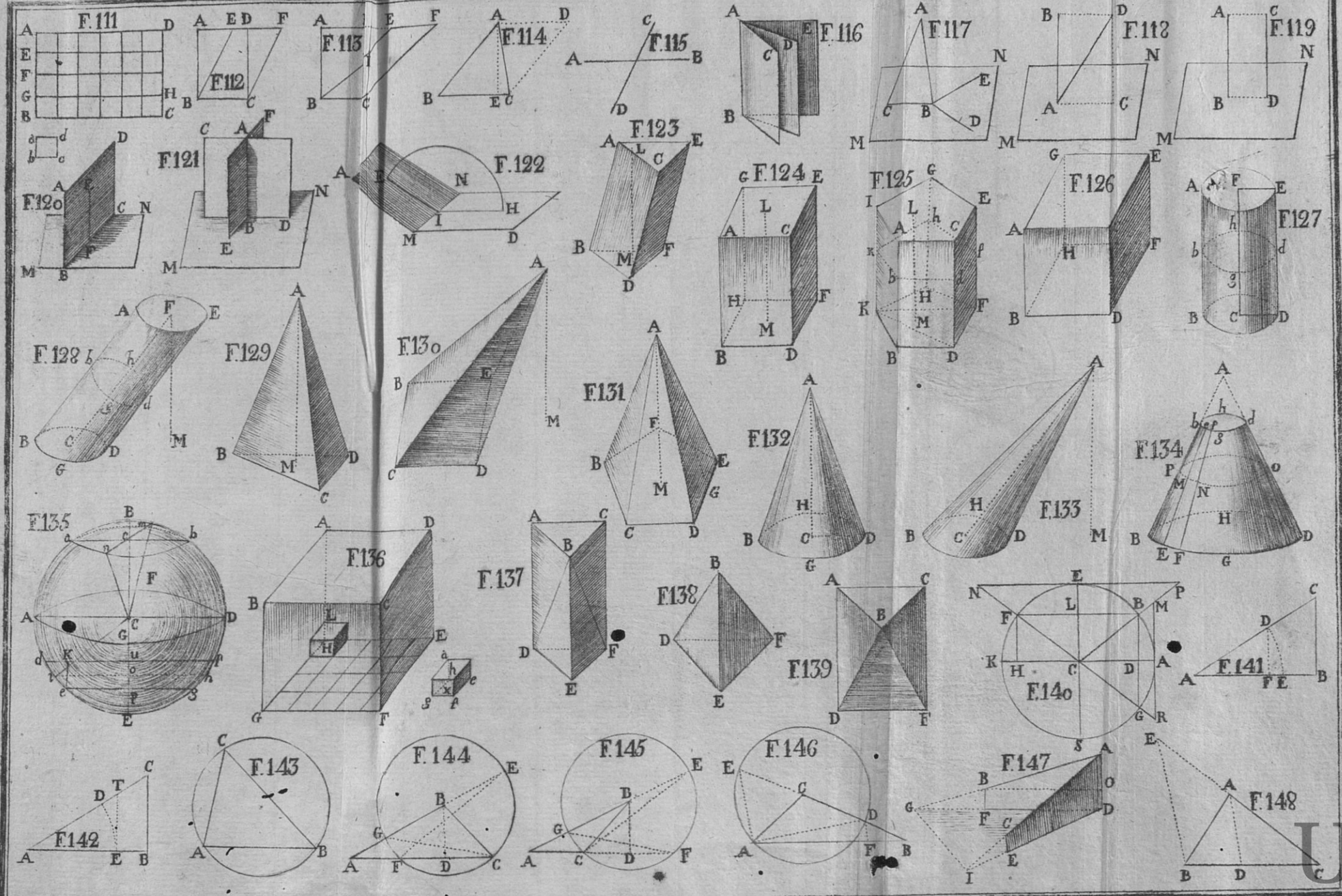
F. 109



F. 110



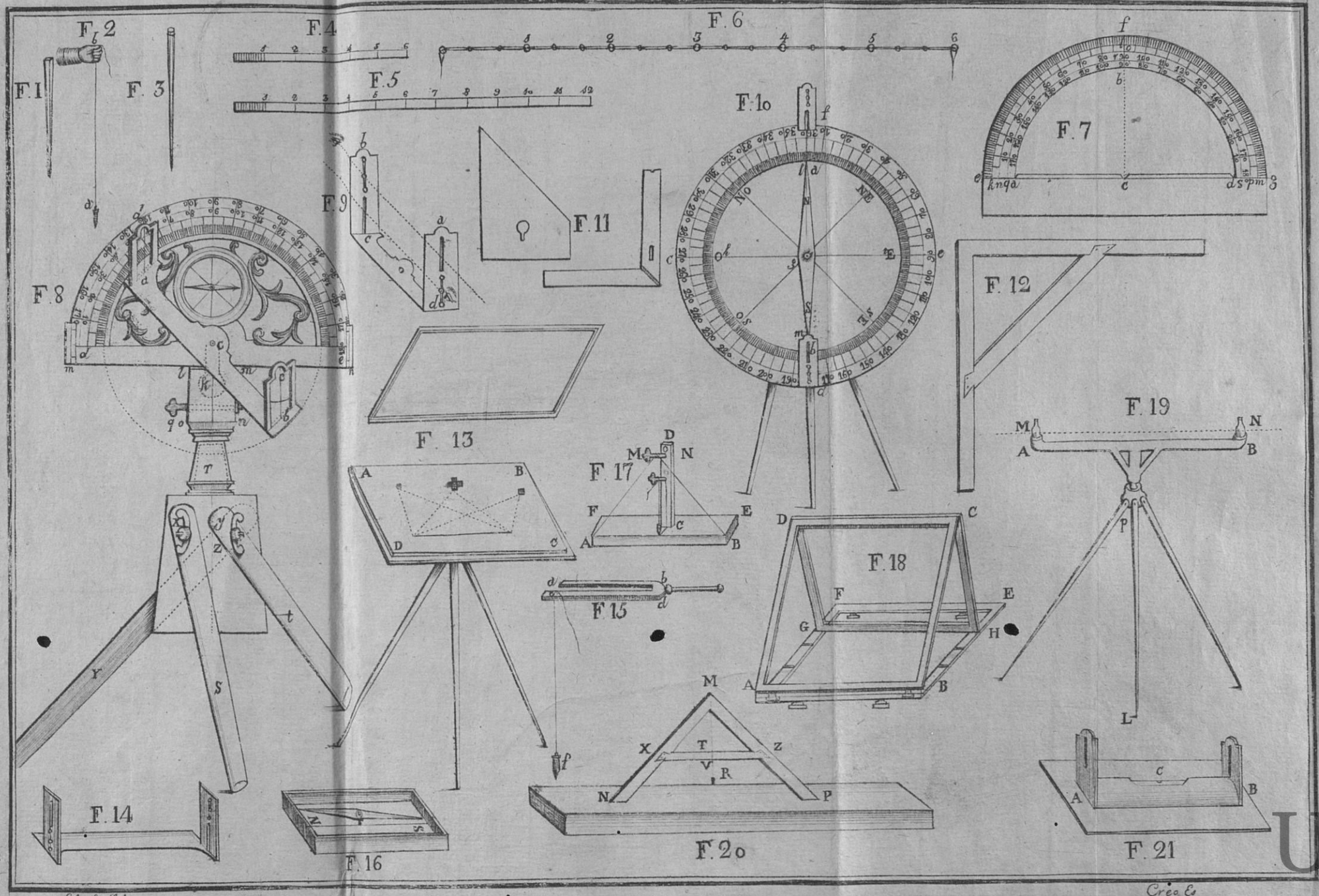
USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



Laborde D.

Creo. E.

USC UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



USC
UNIVERSIDADE
DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

BIBLIOTECA
USC
XEROX

b23816803

USC
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA