



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Teoría de juegos y logística en el sector pesquero

Uxía Fernández Garrote

Enero, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Teoría de juegos y logística en el sector pesquero

Uxía Fernández Garrote

Enero, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento:</b> Estadística e Investigación Operativa
<b>Título:</b> Teoría de juegos y logística en el sector pesquero
<b>Breve descripción do contido</b>
<p>La teoría de juegos es una disciplina matemática que estudia problemas de decisión que involucran a varios agentes. Se divide en dos grandes familias de métodos que en ocasiones se complementan, los juegos cooperativos y los no cooperativos. Mientras que los primeros proporcionan métodos de división de los beneficios de la cooperación entre diversos agentes, los segundos permiten modelar procesos de negociación entre agentes, sus estrategias y con ello también poder describir acuerdos alcanzados. En el presente TFG se pretende comprender y explicar una investigación reciente realizada por investigadores de la Universidad de Vigo en el ámbito de los dispositivos de concentración de peces, que ha conducido a la posibilidad de un incremento en los beneficios de las firmas pesqueras y paralelamente a una contribución beneficiosa para el medio ambiente en términos de la reducción del consumo de carburante y así de las emisiones de CO<sub>2</sub>. La investigación incluye también un análisis empírico del problema.</p>



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>VI</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Teoría de juegos</b>	<b>1</b>
1.1. Juegos cooperativos . . . . .	1
1.1.1. Introducción y algunos modelos de interés . . . . .	1
1.1.2. El valor de Shapley . . . . .	8
1.2. Juegos en forma extensiva . . . . .	11
1.2.1. El equilibrio de Nash . . . . .	13
1.2.2. El equilibrio perfecto en subjuegos . . . . .	16
<b>2. Logística en el sector pesquero</b>	<b>19</b>
2.1. Problema real y modelo teórico . . . . .	19
2.2. Aplicación del valor de Shapley . . . . .	23
2.3. Aplicación de los juegos en forma extensiva . . . . .	28
2.4. Algunos resultados empíricos . . . . .	34
<b>3. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>41</b>



## Resumen

La teoría de juegos es una disciplina matemática que estudia problemas de decisión que involucran a varios agentes. Distinguimos juegos cooperativos y no cooperativos, los cuales se diferencian en la existencia o no de mecanismos para establecer acuerdos vinculantes. Dos conceptos básicos son el valor de Shapley y el equilibrio perfecto en subjuegos, tomados de los juegos cooperativos con utilidad transferible y los juegos en forma extensiva. En este trabajo utilizaremos las herramientas mencionadas anteriormente para comprender y explicar una investigación reciente en el ámbito de los dispositivos de concentración de peces. Esto ha conducido a la posibilidad de un incremento en los beneficios de las firmas pesqueras y paralelamente a una contribución beneficiosa para el medio ambiente en términos de la reducción del consumo de carburante y así de las emisiones de CO<sub>2</sub>. Junto con las consideraciones teóricas se pretende mostrar un análisis empírico de este problema.

## Abstract

Game theory is a mathematical discipline that studies decision problems that involve various agents. We differentiate between cooperative and non cooperative games, which are distinguished by the existence or not of mechanisms for establish binding agreements. Two basic concepts are the Shapley value and the subgame perfect equilibrium, taken from cooperative games with transferable utility and games in extensive form. In this work we will use the tools mentioned above to understand and explain a recent investigation about fish aggregating devices. This leads to a possible increase of fishing firms profits, besides a beneficial contribution for the enviroment in terms of fuel reduction and CO<sub>2</sub> emissions. Along with theoretical considerations, the aim is also to show an empirical analysis of this problem.



# Introducción

La disciplina que se ocupa de la mejora de las ganancias y/o decisiones, mediante algoritmos matemáticos, así como de conseguir un objetivo común o mejor gestión de un problema dado, se llama investigación operativa. Proporciona una aplicación no trivial del método científico a diversos problemas de la vida real que nos permite, mediante la construcción de un modelo, valorar las diversas soluciones teniendo en cuenta, entre otros factores, la existencia de incertidumbre.

Dentro de la investigación operativa, la teoría de juegos es una rama matemática muy relacionada inicialmente con la economía que trata de encontrar una solución en una situación interactiva en la que se pueden tomar varias decisiones, donde la mejor opción de un jugador varía en función de las estrategias del resto. Con el paso del tiempo esta disciplina se ha ido haciendo más popular aplicándose a diversos campos como la biología o psicología. Los problemas que trata de resolver se caracterizan por estar protagonizados por varios agentes, cada cual con su propio objetivo y capacidad racional de tomar decisiones (a veces teniendo en cuenta las del resto y otras no).

Una de las primeras personas relacionada con esta disciplina fue Antoine Augustin Cournot en un estudio relativo a empresas que compiten en un mercado y tienen que decidir su producción. Más adelante sería John von Neumann el que probaría uno de los primeros teoremas, el denominado Teorema Minimax. Robert Aumann, matemático israelí, afirma en una entrevista, realizada en 2005, que "la teoría de juegos trata de tomar una decisión óptima en presencia de otros con diferentes objetivos". Esta cita está presente en el libro de Casas Méndez et al. [3], una de las referencias en las que nos apoyaremos para la realización de este trabajo. Cuando estudiemos estas situaciones denominadas juegos, nos referiremos a los diversos decisores como agentes que aplican posibles estrategias.

Estas situaciones se llevan dando mucho antes de que existiese un procedimiento matemático que pudiese ayudar a resolverlas. Ilustramos esta afirmación recurriendo al hecho histórico de

la conquista de Hernán Cortés a los aztecas en México. Teniendo España menos y más débiles soldados decidió incendiar sus propios barcos para que a su ejército no le quedase otra alternativa que luchar. Ante los ojos de sus rivales este optimismo solo estaba justificado por la seguridad de la victoria por lo que se rindieron en la batalla. Vemos claramente que la estrategia de los mexicanos cambia de manera racional cuando ven la acción de sus contrincantes. Esto es a su vez ejemplo de que múltiples decisiones individuales, aparentemente razonadas dan como conclusión una situación que no sería elegida por ninguno de los jugadores (cualquier ejército preparado preferiría enfrentarse todos juntos que rendirse, sin embargo la mejor decisión individual parece retirarse, lo cual da como resultado la derrota).

Hoy en día vivimos en una sociedad que mira mayoritariamente por el bien individual, sin embargo también se dan situaciones en la vida cotidiana en las que el objetivo se alcanza de mejor manera cooperando entre varios individuos o simplemente en las que el foco de interés no es obtener el mayor beneficio individualmente. Un ejemplo de esto se tiene cuando varias empresas o universidades necesitan un ordenador o máquina de última tecnología. Hacer frente a este gasto individualmente les sería imposible, sin embargo el organizarse con una sola máquina para varias entidades les permite a todos realizar sus estudios y trabajos con mucho menor coste. Esta diversidad de situaciones ilustra por qué la teoría de juegos se divide en dos grandes clases, la que se ocupa de los llamados juegos no cooperativos (JNC) y la que estudia los juegos cooperativos (JC). Estos últimos los estudiaremos en el primer capítulo de este trabajo. De manera general definiremos los JC como aquellas situaciones en las que los agentes consideran la posibilidad de formar coaliciones entre varios de ellos, permitiendo la posibilidad de estudiar si una coalición concreta produciría mejores beneficios a los agentes que la actuación por separado de cada uno de ellos. En los JNC, por el contrario, cada jugador se centra en maximizar sus beneficios sin tener en cuenta los objetivos del resto aunque sí toda la información a su disposición.

Con el paso del tiempo se han ido estudiando situaciones en las que los juegos asociados son cada vez más complejos, más número de personas o entidades asociadas, distintos momentos temporales para tomar decisiones, ... Un modelo habitual para tratar en detalle situaciones de cierta complejidad son los juegos en forma extensiva. Además de permitirnos visualizar la situación con un árbol de decisión también indica que cantidad de información tiene cada agente en el momento de decidir. Este modelo permite definir las estrategias de los jugadores por medio de sus elecciones posibles en los diferentes puntos de decisión.

El objetivo último de definir estos conceptos es poder revisarlos y ver su aplicación en el estudio de Bergantiños et al. [2]. Dicho trabajo explora el problema de las restricciones asociadas

a cada buque en el sector de la pesca del atún. Este problema es modelizado como un juego cooperativo, lo cual supone un enfoque novedoso y así proponen diversas soluciones las cuales, además de reducir el consumo de combustible y gastos de cada empresa, generan un impacto positivo en el medio ambiente, al disminuir las emisiones de  $\text{CO}_2$ . Nos centramos concretamente en atuneros tropicales, los cuales hacen uso de dispositivos de concentración de peces que capturarán más adelante. El éxito de la pesca está relacionado con la posición estratégica del dispositivo, sin embargo esto a veces requiere una cantidad demasiado elevada de combustible. La repartición de este entre distintos buques de distintas empresas es el foco principal en el que se centra la teoría de este estudio. Esto aseguraría a las distintas entidades unas ganancias, de modo que alcancen como mínimo los mismo beneficios que si no compartiesen material.

El uso de la teoría de juegos en este contexto no es una técnica del todo novedosa. Se ha probado con modelos de juegos no cooperativos anteriormente, sin embargo todavía no es una práctica usual en este sector. Esto es debido en parte a la negación de muchas empresas de compartir la localización de sus dispositivos de concentración de peces (DCP) y a que no está asegurado el máximo beneficio. Teniendo en cuenta todo esto nos centraremos en darle una nueva perspectiva a la solución de este problema mediante la teoría de juegos cooperativos. Parte de esta información ha sido recopilada de diversas fuentes como Vitoriano y Ramos [12], Ross [11], López Ramiro [9] y Olivier [4].



# Capítulo 1

## Teoría de juegos

En este capítulo se presentan preliminares necesarios de teoría de juegos.

### 1.1. Juegos cooperativos

Comenzamos hablando de una de las clases más importantes de juegos que son los juegos cooperativos.

#### 1.1.1. Introducción y algunos modelos de interés

Tal y como se dijo en la introducción, en esta sección vamos a trabajar con los denominados juegos cooperativos. En los juegos cooperativos se supone que los agentes disponen de mecanismos que les permiten establecer acuerdos vinculantes. Dichos mecanismos facilitan la formación de coaliciones de jugadores, quienes se pueden asegurar un beneficio independientemente de las acciones de los jugadores ajenos a dicha coalición. Naturalmente, la finalidad de estas coaliciones, por regla general, será mejorar los beneficios que sus miembros pueden obtener de manera individual. A la hora de repartir los beneficios generados por la cooperación, es habitual tener en cuenta aspectos como la eficiencia, la justicia, etc., conceptos que en general se traducirán matemáticamente en forma de axiomas.

Las diferentes hipótesis que cumplen los problemas a representar por un juego y las, consecuentemente, distintas formas de representar los beneficios alcanzables por una coalición, dan lugar a diferentes tipos de juegos cooperativos: juegos sin utilidad transferible (NTU), juegos de negociación y juegos con utilidad transferible (TU), siendo los dos últimos diferentes subclases dentro de los primeros. Una visión general de las diferencias entre ellos se refiere a si cualquier

coalición puede ser relevante (juegos TU y NTU) o sólo la total lo es (juegos de negociación) y si los beneficios de una coalición se pueden repartir de cualquier forma entre sus miembros (juegos TU) o no (juegos de negociación y juegos NTU). Intuitivamente, en un juego NTU, cada coalición o subconjunto  $S$  de jugadores, con  $|S| = s$ , puede obtener distintos vectores de utilidad, que conforman un subconjunto de  $\mathbb{R}^s$ , al que se le exigen ciertas propiedades intuitivas. En cada vector de este subconjunto, la componente  $i$  ( $i \in S$ ) representa un posible beneficio para el jugador  $i$  si se forma la coalición.

A continuación se presentan de manera formal estas tres clases de juegos así como alguna solución clásica propuesta para dichas clases. Para ello se ha seguido en gran parte el libro [3].

### Juegos sin utilidad transferible

**Definición 1.1.** Un juego sin utilidad transferible es un par  $(N, V)$ , donde  $N = \{1, \dots, n\}$  representa un conjunto de jugadores,  $V$  asigna a cada coalición  $S \subseteq N$  un subconjunto  $V(S)$  que deberá cumplir las siguientes condiciones:  $V(S)$  subconjunto de  $\mathbb{R}_S^N$  será comprehensivo, distinto del vacío, cerrado, convexo, acotado superiormente y para cada  $i \in N$ ,  $V(\{i\}) \neq \mathbb{R}$ .

Si  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , se dice comprehensivo cuando para todo  $x \in A$ ,  $y \leq x$  implica que  $y \in A$ .

Por cada  $x \in V(S)$  se supone que existe un cierto resultado,  $r$ , alcanzable por los jugadores de  $S$  si se ponen de acuerdo. Finalmente, para cada  $i \in S$ ,  $x_i$  representa la utilidad o beneficio que el resultado  $r$  proporciona al jugador  $i$ .

Esta clase de juegos es muy general y a continuación nos ocupamos de dos subclases: juegos de negociación y juegos TU.

### Juegos de negociación

Son aquellos en los que los individuos involucrados deben escoger de manera unánime una de las opciones factibles. Si esto no es posible, la única opción válida como solución será la denominada opción de desacuerdo, a la que nos referiremos como  $d$ . Son llamados de esta manera porque será necesario negociar que opción es la escogida en caso de que las preferencias de cada individuo, sobre los resultados alcanzables, son diferentes. Una aplicación de este modelo son los problemas de bancarrota, donde un conjunto de agentes reclaman una cantidad mayor al capital o producto disponible. Parte de esta información la podemos encontrar en en Aguirre Muniozguren [1].

**Definición 1.2.** Un juego de negociación se define como un par  $(F, d)$ , siendo  $F \subseteq \mathbb{R}^N$  no vacío, cerrado, convexo, acotado superiormente y comprehensivo. Siendo  $d$  un punto perteneciente a  $F$ . Definimos  $F_d$  como aquellos  $x \in F$  tal que  $x \geq d$ .

De modo análogo a la definición de juego NTU, en un juego de negociación, el conjunto  $F$  representa los vectores de pagos o utilidades alcanzables, en este caso, por la coalición total, si deciden cooperar. Denotaremos por  $B^N$  el conjunto de juegos de negociación con conjunto  $N$  de jugadores.

En este contexto, una solución será una aplicación que a cada juego de negociación asigne el vector de pagos que represente el desenlace final de la negociación. Este vector de pagos ha de ser factible (ser un elemento de  $F$ ) e individualmente racional (ningún jugador obtendrá menos que en el pago de desacuerdo).

Formalmente, un concepto de solución para juegos de negociación con conjunto  $N$  de jugadores es una aplicación  $f : B^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que para todo  $(F, d) \in B^N$ ,  $f(F, d) \in F$  y  $f(F, d) \geq d$ .

En este trabajo presentamos dos soluciones para juegos de negociación. No sería estrictamente necesario hacerlo para nuestro objetivo final de aplicación al contexto de la pesca, pero las presentamos por ser, históricamente, de las primeras soluciones propuestas para juegos cooperativos.

El enfoque seguido en su definición es el axiomático, es decir, son las únicas que verifican un conjunto de axiomas o propiedades deseables. Comenzamos presentando las propiedades que caracterizan a la solución de Nash.

- **Eficiencia de Pareto** (EFF). Para todo  $(F, d) \in B^N$ ,  $f(F, d) \in P(F)$ , siendo  $P(F) = \{x \in F / \nexists y \in F \text{ con } y \geq x, y \neq x\}$ .  $P(F)$  se denomina frontera de Pareto.

En la Figura 1.1 ilustramos el concepto de frontera de Pareto. Suponiendo un juego de negociación con  $n = 2$  jugadores, representamos las utilidades de los jugadores 1 y 2 en los ejes de abscisas y ordenadas. Suponiendo que el pago de desacuerdo es  $d = (0, 0)$ , la región rayada representa la intersección de  $F$ , región factible del problema, con el primer cuadrante. El arco que bordea a esta región constituye la frontera de Pareto de  $F$  pues contiene todos los puntos en los que una mejora de utilidad para uno de los jugadores manteniendo la factibilidad, implica lo contrario para el otro jugador. Esta idea se extiende de modo análogo al caso de un número arbitrario de jugadores.

Decimos que un juego  $(F, d)$  es simétrico, si el punto de desacuerdo,  $d$ , tiene todas sus componentes iguales y además si  $x$  es un vector de utilidades factible,  $x \in F$ , un vector obtenido reordenando de cualquier forma las componentes de  $x$  también será un vector de utilidades factible.

- **Simetría** (SYM). Para todo  $(F, d) \in B^N$ , si  $(F, d)$  es un juego simétrico se cumple que  $f_1(F, d) = f_2(F, d) = \dots = f_n(F, d)$ , teniendo en cuenta que  $f$  representa una solución en

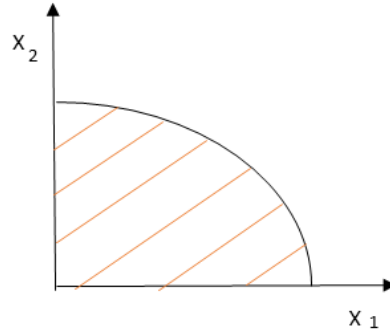


Figura 1.1: Frontera de Pareto.

este tipo de juegos.

- **Independencia de alternativas irrelevantes (IIA).** Para todo par de juegos de negociación  $(F, d), (R, d) \in B^N$ , con  $F \subseteq R$ , si  $f(R, d) \in F$  tenemos que  $f(F, d) = f(R, d)$ .

La interpretación de este axioma es que si tenemos una aplicación solución dentro de un conjunto de posibilidades, y otro conjunto de posibilidades más pequeño al cual pertenece esta asignación concreta, la aplicación solución del conjunto pequeño será la misma que la del mayor.

- **Covarianza de transformaciones afines positivas (CAT).** Para todo juego de negociación  $(F, d) \in B^N$  y todo  $a, b \in \mathbb{R}^N, a > 0^N$ ,  $f(aF + b, ad + b) = af(F, d) + b$ .

Como comentamos al principio de la sección de los juegos de negociación solo existe una solución que cumpla las cuatro propiedades mencionadas anteriormente, la llamada solución de Nash que como cuyo nombre indica fue creada por Jonh Forbes Nash alrededor del año 1950.

**Definición 1.3.** Dado  $(F, d) \in B^N$  denominamos la solución de Nash como aquel valor  $x \in F_d$  que maximiza la función  $g^d : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definida para cada  $x \in \mathbb{R}^N$  como  $g^d(x) := \prod_{i \in N} (x_i - d_i)$ . Nos referiremos a esta solución como  $NA(F, d)$ .

Vemos claramente que la solución busca la máxima ganancia posible para cada jugador respecto al punto de desacuerdo.

**Teorema 1.4.** Toda solución de un problema de negociación  $(F, d)$  de la forma  $\Phi : B^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  cumple los axiomas de *EFF*, *SYM*, *CAT*, *IIA* si y solo si es la solución de Nash de ese problema.

*Demostración.* “ $\Rightarrow$ ” Vamos a probar que cualquier solución de la forma  $\Phi : B^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  que cumpla los 4 axiomas del enunciado, coincidirá con la solución de Nash, es decir, si  $(F, d) \in B^N$ ,  $\Phi(F, d) = NA(F, d)$ .

Sea  $(F_1, d_1) \in B^N$  un problema de negociación arbitrario. Haremos uso de la propiedad de covarianza de transformaciones afines positivas y la siguiente aplicación:

$f^A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que si  $x \in \mathbb{R}^N$   $f_i^A(x) = \frac{-d_i}{u_i - d_i} + \frac{1}{u_i - d_i} \cdot x_i$  para todo  $i \in N$ , siendo  $u_i = NA_i(F_1, d_1)$ .

Procederemos suponiendo  $n=2$  por simplificar la notación. Para  $n$  arbitrario la idea de la demostración es similar. Consideremos entonces el juego  $(F_2, d_2)$  con  $F_2 = f^A(F_1)$  y  $d_2 = f^A(d_1) = (0, 0)$ . Como  $NA$  cumple  $CAT$ ,  $NA(F_2, d_2) = NA(f^A(F_1), f^A(d_1)) = f^A(NA(F_1, d_1)) = f^A(u_1, u_2) = (1, 1)$ .

Sea ahora el juego  $(F_3, d_3)$  con  $F_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x_1 + x_2 \leq 2\}$  y  $d_3 = (0, 0)$ . Como  $(F_3, d_3)$  es un juego simétrico y además  $\Phi$  cumple  $EFF$  y  $SYM$ ,  $\Phi(F_3, d_3) = (1, 1)$ . Es un ejercicio sencillo comprobar que  $F_2$  está contenido en  $F_3$ . Por tanto, como  $(1, 1)$  pertenece a  $F_2$  y  $\Phi$  cumple  $IIA$ ,  $\Phi(F_2, d_2) = (1, 1)$ . Por último, aplicando que  $\Phi$  cumple  $CAT$ ,  $(1, 1) = \Phi(F_2, d_2) = \Phi(f^A(F_1), f^A(d_1)) = f^A(\Phi(F_1, d_1))$  de donde  $\Phi(F_1, d_1) = (f^A)^{-1}(1, 1) = (u_1, u_2) = NA(F_1, d_1)$  lo que concluye la demostración de esta implicación.

“ $\Leftarrow$ ” Que la solución de Nash cumple las cuatro propiedades del enunciado del teorema es inmediato con lo que omitimos los detalles de esta parte de la demostración.

□

En segundo lugar, presentamos la solución de Kalai-Smorodinski propuesta por Ehud Kalai y Meir Smorodinsky en 1975, posteriormente a que Nash diese a conocer su teoría. Esta solución surgió por un desacuerdo con el axioma de independencia de alternativas irrelevantes.

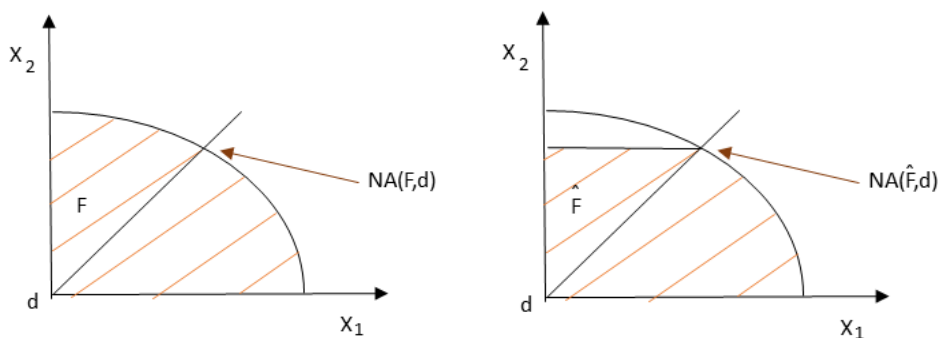


Figura 1.2: Dos problemas de negociación con idéntica solución de Nash.

Como podemos ver en la figura 1,2 tenemos dos problemas de negociación distintos  $(F, d)$  y  $(\hat{F}, d)$ , tal que  $\hat{F} \subset F$ , y  $NA(F, d) \in \hat{F}$ . Por la propiedad de independencia de alternativas irrelevantes de la solución de Nash,  $NA(\hat{F}, d) = NA(F, d)$ , a pesar de que la máxima aspiración del segundo jugador ha disminuido. Este y otros ejemplos similares llevaron a algunos autores a ser críticos con la *IIA* argumentando que la solución de un problema de negociación tendría que tener en cuenta las máximas aspiraciones de los jugadores. La siguiente solución recoge este planteamiento.

**Definición 1.5.** Dado  $(F, d) \in B^N$ , denominamos la solución de Kalai-Smorodinsky como el punto  $KS(F, d) := d + \bar{t}(b(F, d) - d)$  siendo  $\bar{t}$  el mayor número real,  $t$ , que hace que el valor de  $d + t(b(F, d) - d)$  pertenezca al conjunto de las soluciones factibles y  $b(F, d)$  el punto de utopía, cuyas componentes representan la máxima ganancia para cada jugador:  $b_i(F, d) = \max\{a \in \mathbb{R} \text{ tal que existe } x \in F, x \geq d, x_i = a\}$  para todo  $i \in N$ .

Podemos ver esta solución gráficamente para  $n=2$  en las figuras 1,3 y 1,4. Observamos que es la intersección de la frontera de  $F$  con el segmento que une el punto de desacuerdo y el punto de utopía.

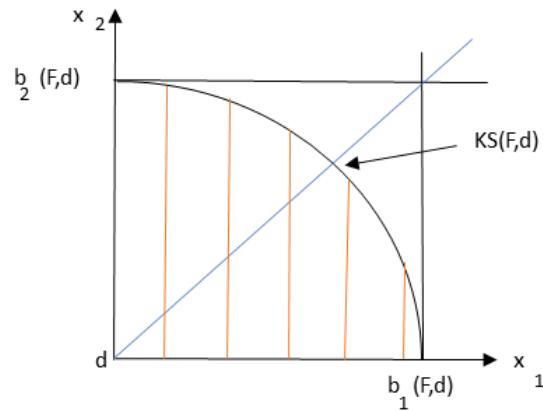


Figura 1.3: Solución de Kalai en un juego con 2 agentes.

La solución de Kalai no satisface el axioma de alternativas irrelevantes definido anteriormente, ya que al reducir la superficie de soluciones factibles, la máxima ganancia que puede obtener el jugador 2 varía y en consecuencia la solución final.

### Juegos con utilidad transferible

En los juegos con utilidad transferible (TU) las ganancias se pueden dividir perfectamente entre los jugadores, que forman una coalición, además se pueden formar coaliciones distintas de la

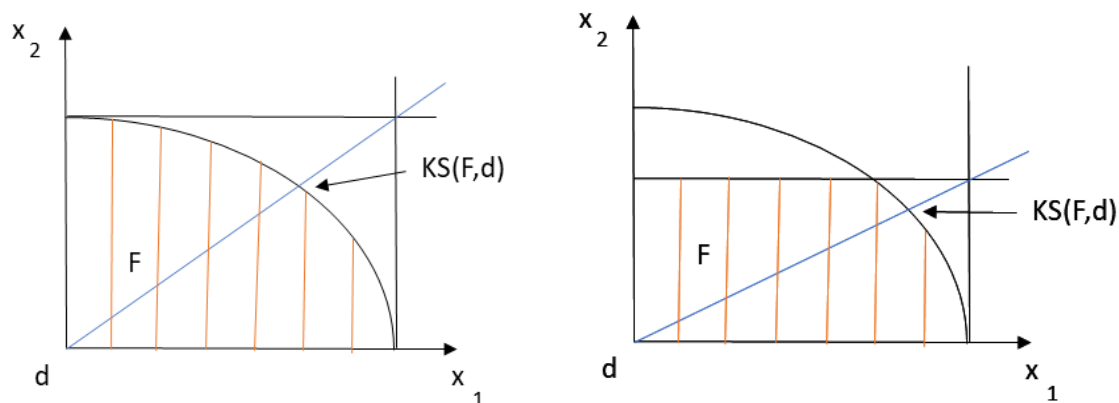


Figura 1.4: Ejemplo de que KS no cumple la independencia de alternativas irrelevantes.

total, es decir, que un jugador no coopere y opte por la opción de desacuerdo no va a implicar que el resto de participantes tengan el mismo final. Cualquier regla que reparta la utilidad alcanzable por la coalición total podría considerarse solución del problema.

**Definición 1.6.** Sea  $N$  un conjunto finito de jugadores, se denomina un juego con utilidad transferible (abreviadamente, juego TU) el par  $(N, v)$ , siendo  $v$  la función característica del juego de la forma  $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $v(\emptyset) := 0$ .

Se denota por  $v(S)$  a las ganancias que produce la coalición  $S$  y  $\mathcal{G}^N$  representará la familia de los juegos TU con conjunto  $N$  de jugadores.

**Ejemplo 1.7.** Un cliente está tratando de hacer una oferta con una inmobiliaria para comprar un piso. Como se trata de un piso medianamente antiguo exige una reforma interior y otra exterior para decidirse finalmente, pero no especifica que tipo de reforma. Esta inmobiliaria trabaja con otras 4 empresas para poner sus inmuebles a punto, quienes aceptan distribuir las ganancias de la venta del piso:

- La primera empresa externa se dedica a hacer piscinas o parques infantiles en los jardines de las casas.
- La segunda reforma porches, barbacoas, o espacios de ocio al aire libre en el exterior.
- La tercera es una empresa de reforma de cocinas totalmente equipadas.
- Por último tenemos una empresa que trabaja con los baños de la casa y añadiendo vestidores a las habitaciones.

Este problema, suponiendo que los jugadores son las empresas externas, expresándolo como un juego de utilidad transferible, nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
v(1) &= v(2) = v(3) = v(4) = 0, \\
v(1,2) &= v(3,4) = 0, \quad v(1,3) = v(1,4) = v(2,3) = v(2,4) = 1, \\
v(1,2,3) &= v(1,3,4) = v(2,3,4) = v(1,2,4) = 1, \\
v(N) &= 1.
\end{aligned}$$

A continuación vamos a definir varias propiedades de los juegos TU para facilitar su estudio.

- Diremos que un juego TU  $(N, v)$  es **monótono** si dados  $T \subseteq R \subseteq N$  esto implica que  $v(T) \leq v(R)$ . Es decir, al añadir participantes nuevos en una coalición, el valor de esta nunca va a disminuir.
- Un juego  $(N, v)$  se denomina **superaditivo** si se cumple que  $v(T \cup R) \geq v(T) + v(R)$ , siendo  $T \cap R = \emptyset$  y  $T, R \subseteq N$ . Por tanto, en un juego superaditivo, el valor de la unión de dos coaliciones disjuntas siempre es mayor o igual que la suma de los valores de dichas coaliciones por separado.

Con el paso del tiempo se han ido desarrollando diversas reglas para conseguir una asignación solución para este tipo de juegos. Se suelen basar en principios de estabilidad y justicia. Este último está implícito en la solución más importante, el valor de Shapley, que trataremos en el apartado siguiente y en el capítulo 2 estudiaremos su puesta en práctica en un problema de logística en el contexto de la pesca.

### 1.1.2. El valor de Shapley

Creado por Lloyd Shapley en 1953 se considera la regla para encontrar soluciones de un problema cooperativo más importante de toda la teoría de juegos. Es de particular importancia para cuando el núcleo de un problema cooperativo es vacío o demasiado amplio para obtener conclusiones.

Si el valor de Shapley se considera una solución justa, los elementos del núcleo se consideran repartos estables, donde si  $(N, v)$  es un juego TU, su núcleo se define como  $C(v) := \{x \in \mathbb{R}^N \text{ tales que } \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ y } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ para toda } S \subseteq N\}$ .

**Definición 1.8.** Sea una aplicación  $\Phi$  de la forma  $\Phi : \mathcal{G}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Definimos el valor de Shapley como:

$$\Phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} \cdot (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \quad \forall v \in \mathcal{G}^N, \forall i \in N.$$

Si a las cantidades  $v(S \cup \{i\}) - v(S)$  las denominamos contribución del jugador  $i$  a la coalición  $S$ , el valor de Shapley del jugador  $i$  no es más que un promedio ponderado de sus contribuciones a las coaliciones a las que se puede unir donde, notemos, los pesos de cada contribución a una coalición dependen del tamaño de dicha coalición.

Es fácil ver que el valor de Shapley puede escribirse también como:

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} (v(B^\pi(i) \cup \{i\}) - v(B^\pi(i)))$$

para todo  $i \in N$ , donde  $\Pi(N)$  es el conjunto de permutaciones de  $N$  y  $B^\pi(i)$  es el conjunto  $\{j \in N \setminus \pi(j) < \pi(i)\}$ , es decir, el conjunto de jugadores que llegan antes que  $i$  cuando se supone que los jugadores acuerdan acudir a cierto lugar en un orden de llegada que viene especificado por la permutación  $\pi$ . Si se supone que todos los posibles órdenes de llegada son igualmente probables y, a su llegada, cada jugador recibe su contribución a la coalición formada por los jugadores que llegan antes que él, el valor de Shapley se puede entonces interpretar como el vector de ganancias medias o esperadas correspondientes a la situación que se acaba de suponer.

Esta solución se caracteriza mediante los siguientes axiomas, es decir, el valor de Shapley es el único resultado que cumpliría todos ellos. Sea entonces un juego TU  $(N, v)$ , pasamos a explicar dichos axiomas.

- **Eficiencia** (EFF):  $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$ , la suma de la asignación del valor de Shapley a todos los jugadores es igual a las ganancias que podría obtener la coalición formada por todos ellos.
- **Jugador nulo** (JN): para cada  $i \in N$  tal que para cada  $S \subseteq N$  se cumpla que  $v(S \cup i) - v(S) = 0$ , es decir, para cada jugador cuya unión a cualquier coalición no produce ningún tipo de beneficio,  $\Phi_i(v) = 0$ .
- **Simetría** (SYMM):  $\Phi_i(v) = \Phi_j(v) \forall i, j \in N$  tal que para todo subconjunto  $S$  de  $N \setminus \{i, j\}$ ,  $v(S \cup i) = v(S \cup j)$ , es decir, si dos jugadores contribuyen lo mismo a cualquier coalición (jugadores simétricos) el valor de Shapley les asigna lo mismo.
- **Aditividad** (AD):  $\Phi(v + p) = \Phi(v) + \Phi(p) \quad \forall v, p \in \mathcal{G}^N$ , es decir, cuando la solución de un juego suma de otros dos coincide con la suma de soluciones de estos por separado, donde  $(v + p)$  es el juego definido como  $(v + p)(S) = v(S) + p(S)$  para todo  $S \subseteq N$ .

El siguiente resultado fue probado por Shapley:

**Teorema 1.9.** *El valor de Shapley es la única solución definida sobre la familia de los juegos TU con conjunto  $N$  de jugadores que cumple los axiomas de EFF, JN, SYMM y AD.*

$v(1)$	5	$v(1, 2)$	10	$v(N)$	21
$v(2)$	5	$v(1, 3)$	11		
$v(3)$	7	$v(2, 3)$	12		

Cuadro 1.1: Función característica de un juego con tres jugadores.

**Ejemplo 1.10.** Consideremos el siguiente juego tripersonal,  $N = \{1, 2, 3\}$ .

Calculemos el valor de Shapley para ver la aportación media de cada individuo a las coaliciones a las que se pueden unir.

Probabilidad de los órdenes	Orden	Contribución del jugador 1	Contribución del jugador 2	Contribución del jugador 3
$\frac{1}{6}$	1 2 3	$v(1)=5$	$v(1, 2) - v(1)=5$	$v(N) - v(1,2)=11$
$\frac{1}{6}$	1 3 2	$v(1)=5$	$v(N) - v(1,3)=10$	$v(1, 3) - v(1)=6$
$\frac{1}{6}$	2 1 3	$v(1, 2) - v(2)=5$	$v(2)=5$	$v(N) - v(1,2)=11$
$\frac{1}{6}$	2 3 1	$v(N) - v(2,3)=9$	$v(2)=5$	$v(2, 3) - v(2)=7$
$\frac{1}{6}$	3 1 2	$v(1, 3) - v(3)=4$	$v(N) - v(1,3)=10$	$v(3)=7$
$\frac{1}{6}$	3 2 1	$v(N) - v(2,3)=9$	$v(2, 3) - v(3)=5$	$v(3)=7$

Cuadro 1.2: Cálculos conducentes al valor de Shapley.

La columna denominada Orden en la tabla 1.2 hace referencia a los posibles distintos órdenes de llegada de los jugadores y, por tanto, a la posición de cada jugador, el cual recibirá su contribución a la coalición de jugadores que llegaron antes que él.

Las ganancias medias que aportará cada jugador serán:

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{6} \cdot (5 + 5 + 5 + 9 + 4 + 9) = \frac{37}{6},$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{6} \cdot (5 + 10 + 5 + 5 + 10 + 5) = \frac{20}{3},$$

$$\Phi_3(v) = \frac{1}{6} \cdot (11 + 6 + 11 + 7 + 7 + 7) = \frac{49}{6}.$$

Comprobamos que el valor de Shapley cumple el axioma de eficiencia en este juego:

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \frac{37+40+49}{6} = 21.$$

En conclusión el valor de Shapley será:  $\Phi(v) = (\frac{37}{6}, \frac{20}{3}, \frac{49}{6})$ .

## 1.2. Juegos en forma extensiva

**Definición 1.11.** Llamamos juego en forma extensiva  $\Gamma$  a la 7-tupla de la forma

$$(A, M, P, U, C, p, h)$$

siendo:

- $(A, M)$ , **árbol finito del juego** compuesto por  $A$ , conjunto de nodos y  $M \subseteq A \times A$ , conjunto de arcos orientados. Los primeros representan los puntos donde se toman las decisiones y los segundos el conjunto de alternativas posibles en cada momento o punto de decisión. El árbol  $(A, M)$  cumple las siguientes características:

- I. Existe únicamente un nodo  $d$ , que satisface que  $(a, d) \notin M, \forall a \in A$ .
- II. Solo existe un camino que vaya desde  $d$  hasta  $a$ , para todo  $a \in A \setminus \{d\}$ .

Decimos que un nodo es terminal cuando no tiene ningún arco a continuación de él, agrupando el conjunto  $Z$  a la totalidad de estos.

- $P = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ , **partición de los jugadores** que indica que participante toma la decisión en cada nodo que no es terminal, incluido los movimientos aleatorios (jugador cero).
- $N = \{1, \dots, n\}$ , totalidad de personas que participan en el juego.
- $U = \{U_1, \dots, U_n\}$ , **partición de la información**, donde cada  $U_i$  es una partición de  $P_i$ . Denominamos  $u \in U_i$  aquellos conjuntos de información para cada participante  $i$ , conteniendo cada  $u$  los nodos del juego donde el jugador  $i$  tiene la misma información sobre lo que ha ido sucediendo en el juego hasta llegar a ese momento.
- $C$ , **partición de elecciones**. Cada participante solo tiene una elección para escoger en cada conjunto de información, siendo una elección un conjunto de modo que para todos los  $a \in u$  (teniendo en cuenta que  $u \in U_i$ ), incluye una alternativa en  $a$ . Definiremos  $C$  como el conjunto de todas las elecciones posibles de los jugadores participantes y  $C_u$  el conjunto de elecciones en  $u$ .

- **$p$ , asignación de probabilidad.** Aplicación que atribuye una distribución de probabilidad,  $p_a$ , definida sobre  $\{(a, \bar{a}) : \bar{a} \in A, (a, \bar{a}) \in M\}$  para cada  $a \in P_0$ .
- $h = (h_1, \dots, h_n)$ , **funciones de utilidad.** Siendo  $Z$  el conjunto de nodos terminales del juego en cuestión,  $h$  indica las funciones de utilidad en  $Z$ . Las preferencias que tiene el jugador  $i$  sobre los posibles resultados finales del juego suponemos que están representadas por la función de utilidad  $h_i$ .

Diremos que un juego es de **información perfecta** cuando hay exactamente 1 nodo no terminal en cada conjunto de información  $u$  para todos los  $i \in N$ ,  $u \in U_i$ . Todos los jugadores conocen, en cada uno de sus nodos de decisión, lo sucedido hasta el momento en el juego. Será de **información imperfecta** cuando suceda el caso contrario.

Un juego se considera de **memoria perfecta** cuando para todo nodo  $a \in v$  situado después de  $c \in C_u$ , todo  $\bar{a} \in v$  está después de  $c$ , aplicado a todos los  $i \in N$  y a los conjuntos de información  $u, v \in U_i$ . Todos los jugadores conocen sus elecciones hasta el momento. De lo contrario será un juego de **memoria imperfecta**.

Se ve de manera directa que cada juego de información perfecta será de memoria perfecta.

**Ejemplo 1.12.** Dos clubes de gimnasia rítmica preparan la competición principal de la temporada. La localización de la misma no se desvela hasta la semana anterior, cuando los ejercicios tienen que estar ya definidos, pudiendo ser en cualquiera de los 4 pabellones habilitados para esto en Galicia, 2 de ellos con vigas en el techo y 2 con un falso techo que deja la superficie lisa. El aparato a utilizar de ambos participantes es la cinta, con la desventaja de que si hacen elementos que requieran demasiada altura en un pabellón con vigas el aparato se quedará enganchado en el techo y no podrán continuar su ejercicio. Si escogen realizar un elemento bajo se aseguran de que esto no suceda pero la puntuación que obtendrán será menor. La gimnasta número 2 es además, ligeramente mejor que la 1 y cuando elige el ejercicio a realizar ha sido informada del elegido por la gimnasta 1.

Esta situación la podemos representar mediante el siguiente árbol, siendo:

- V: el pabellón escogido por la federación no tiene falso techo.
- SV: el pabellón escogido tiene las vigas cubiertas por un falso techo.
- A: la gimnasta realizará el elemento para el que se necesita más altura.

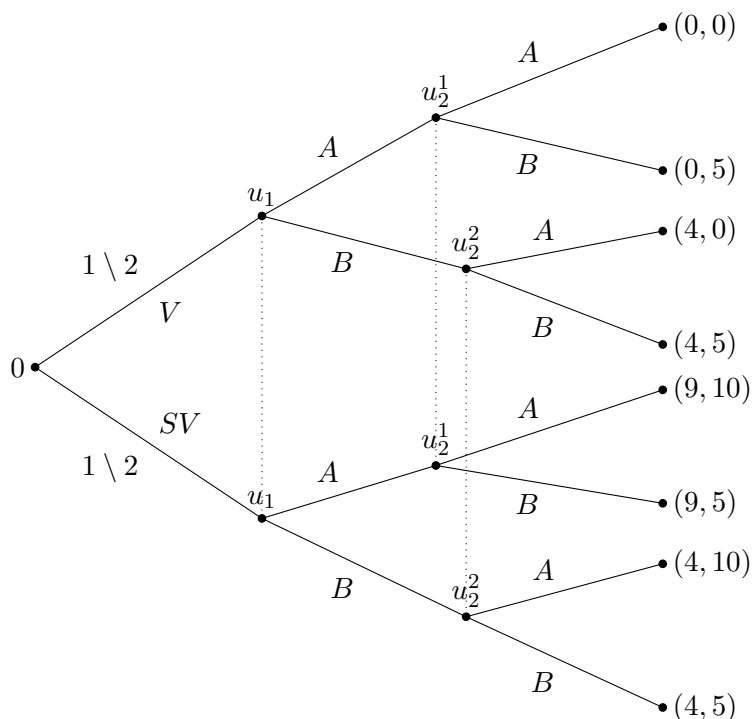


Figura 1.5: Árbol del juego.

- B: el elemento elegido no requiere casi de altura.

La figura 1.5 muestra el árbol para este juego, en el cual los nodos en un mismo conjunto de información se unen con una línea de puntos.

En este ejemplo tenemos un juego de memoria perfecta e información imperfecta.

### 1.2.1. El equilibrio de Nash

Para llegar al resultado principal de este apartado y algunos teoremas relacionados definiremos algunos conceptos que nos serán necesarios primero:

- Una **estrategia pura** de un jugador  $i$  es una aplicación que asigna a cada  $u \in U_i$  una elección  $x_i(u) \in C_u$ . El vector de la forma  $x = (x_1, \dots, x_n)$  se denomina **perfil de estrategias puras**.
- Llamamos **estrategia de comportamiento** del jugador  $i$  a la aplicación que asigna una lotería sobre  $C_u$  a cada  $u \in U_i$ . Dado  $u \in U_i$  y  $c \in C_u$ , denotamos por  $b_i(c)$  la probabilidad

que  $i$  asigna a  $c \in C_u$  cuando está en  $u \in U_i$ . Definimos **perfil de estrategias de comportamiento** como el vector  $b = (b_1, \dots, b_n)$ , siendo cada  $b_i$  una estrategia de comportamiento de  $i$ .  $B_i$  denotará el conjunto de estrategias de comportamiento de  $i$  y  $B$  el conjunto de perfiles de estrategias.

- $H_i : B \rightarrow \mathbb{R}$  será la **función de pago** de  $i$  definida como  $H_i(b) = \sum_{z \in Z} \rho(z, b) h_i(z)$  donde  $\rho(z, b)$  denota la probabilidad de alcanzar el nodo terminal  $z$  si los jugadores usan el perfil de estrategias dado por  $b$ .

**Definición 1.13.** Definimos un equilibrio de Nash de  $\Gamma$  como un perfil de estrategias de comportamiento  $b$  tal que  $H_i(b) \geq H_i(b_{-i}, b'_i)$  siendo  $b \in B$ ,  $b'_i \in B_i$ , para todo  $i \in N$ , donde  $b_i$  denota el vector  $b$  sin la componente  $i$ -ésima.

**Proposición 1.14.** Para todo juego  $\Gamma$  en forma extensiva, un perfil de estrategias puras  $x$  será equilibrio de Nash si y solo si  $H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i)$  para todo  $x'_i$  estrategia pura de  $i$ , para todo  $i \in N$ .

Para poder ilustrar este resultado con ejemplos necesitamos conocer la siguiente definición.

**Definición 1.15.** Un juego de forma estratégica, que se denotará por  $G$ , se expresa como  $G = (X_1, \dots, X_n, H_1, \dots, H_n)$  siendo  $X_i$  el conjunto de estrategias del jugador  $i$  y  $H_i : X = \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación que asigna a cada perfil de estrategias puras el pago que recibirá el jugador  $i$  para todo  $i \in N$ .

**Definición 1.16.** Un equilibrio de Nash para  $G$  un juego en forma estratégica, es un perfil de estrategias  $x \in X$  tal que  $H_i(x) \geq H_i(x_{-i}, x'_i)$  teniendo en cuenta todos los  $x'_i \in X_i$  siendo el perfil  $(x_{-i}, x'_i)$  de la forma  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

**Ejemplo 1.17.** Vamos a estudiar el equilibrio de Nash del ejemplo 1.12. Para ello necesitamos expresar el juego de forma estratégica mediante la siguiente tabla:

	AA	AB	BA	BB
A	4.5 , 5	4.5 , 2.5	4.5 , 7.5	4.5 , 5
B	4 , 5	4 , 2.5	4 , 7.5	4 , 5

Cuadro 1.3: Forma estratégica asociada al ejemplo 1.12.

La primera columna recoge las estrategias del jugador 1, la primera fila las del jugador 2 y los pares de números son los pagos a los jugadores 1 y 2 asociados a los distintos perfiles de estrategias

En este caso tenemos 1 equilibrio de Nash en estrategias puras,  $(A, BA)$ , ya que el pago al jugador 1 es el máximo de su columna y el del jugador 2 es el máximo de la fila.

Vamos a nombrar algunos teoremas relacionados con la existencia o no de soluciones de Nash en juegos en forma extensiva. En los siguientes resultados vamos a denotar la extensión mixta de  $G(\Gamma)$  como  $E(G(\Gamma))$  que es el juego obtenido a partir de  $G(\Gamma)$  cuando los jugadores pueden usar loterías sobre sus conjuntos de estrategias puras y los pagos correspondientes son pagos esperados, siendo  $G(\Gamma)$  el juego en forma estratégica asociado al juego en forma extensiva  $\Gamma$ . Las estrategias de los jugadores en la extensión mixta se llaman estrategias mixtas.

**Teorema 1.18.** *Teorema de Nash*

*La extensión mixta de un juego en forma estratégica finito (esto es, con un conjunto finito de perfiles de estrategias) tiene al menos un equilibrio de Nash. En consecuencia, si  $\Gamma$  es un juego en forma extensiva finito,  $E(G(\Gamma))$  tiene al menos un equilibrio de Nash.*

**Teorema 1.19.** *Teorema de Kuhn*

*Sea  $\Gamma$  un juego en forma extensiva con memoria perfecta y sea  $s_i$  una estrategia del jugador  $i$  en  $E(G(\Gamma))$ . Entonces existe una estrategia de comportamiento  $b_i \in B_i$  tal que, para todo nodo  $a \in A$  y todo perfil de estrategias mixtas del resto de los jugadores  $s'_i$ ,  $\rho(a, (s'_i, s_i)) = \rho(a, (s'_i, b_i))$ . Como consecuencia del teorema de Kuhn, en juegos en forma extensiva con memoria perfecta, para cada estrategia mixta  $s_i$  del jugador  $i$  existe una estrategia de comportamiento  $b_i \in B_i$  de ese jugador que es equivalente en términos de las probabilidades de alcanzar los distintos nodos del juego.*

**Teorema 1.20.** *Existe como mínimo un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento en todos los juegos en forma extensiva con memoria perfecta.*

**Teorema 1.21.** *Todo equilibrio de Nash en un juego  $\Gamma$  con memoria perfecta induce un equilibrio en  $E(G(\Gamma))$ .*

*Demostración.* Se cumple que el conjunto de perfiles de estrategias posibles para un juego en forma extensiva ( $B$ ) está contenido en el conjunto de los posibles en la extensión mixta de dicho juego, que se denota por  $S$  y  $S_i$  es el conjunto de estrategias mixtas o loterías del jugador  $i$ .

Por la definición de equilibrio de Nash de una extensión mixta tenemos que si  $b$  no es equilibrio de Nash de  $E(G(\Gamma))$  entonces existen  $i \in N$  y  $s'_i \in S_i$  tal que:

$$H_i(b) < H_i(b_{-i}, s'_i).$$

Como el juego es de memoria perfecta sabemos por el teorema de Kuhn que existe  $b'_i \in B_i$  que cumple la siguiente igualdad:

$H_i(b_{-i}, s'_i) = H_i(b_{-i}, b'_i)$ , lo que implica que  $H_i(b) < H_i(b_{-i}, b'_i)$ , por lo que  $b$  no puede ser equilibrio de Nash de  $\Gamma$ .

□

### 1.2.2. El equilibrio perfecto en subjuegos

Nos encontramos con situaciones en las que los perfiles que nos da el equilibrio de Nash pueden no autoimponerse en la realidad por lo que, al refinarlo surge el equilibrio perfecto en subjuegos, que estudiaremos en este apartado.

**Definición 1.22.** Un juego  $\Gamma$  se puede descomponer en un nodo  $a \in A \setminus Z$  si no podemos encontrar conjuntos de información que contengan nodos pertenecientes a  $F(a)$  y a  $A \setminus F(a)$  a la vez.  $F(a)$  representa el conjunto de los nodos  $a'$ , para los cuales  $a$  pertenece al camino que conecta  $d$  y  $a'$ .

**Definición 1.23.** Definimos  $\Gamma_a$  como subjuego de  $\Gamma$ , cuando  $\Gamma_a$  es el juego resultante del árbol de  $\Gamma$  que tiene  $a$  como nodo distinguido. Diremos que  $b_a$  es el perfil de estrategias de comportamiento inducido por  $b$  en  $\Gamma_a$ , para todo  $b$  perfil de estrategias de comportamiento en  $\Gamma$ .

**Definición 1.24.** Un equilibrio perfecto en subjuegos en un juego en forma extensiva  $\Gamma$  es un perfil de estrategias de comportamiento  $b \in B$ , siempre que  $b_a$  sea equilibrio de Nash de  $\Gamma_a$ , para todo subjuego  $\Gamma_a$  de  $\Gamma$ .

El siguiente ejemplo ilustra el denominado método de inducción hacia atrás que permite calcular equilibrios perfectos en subjuegos.

**Ejemplo 1.25.** Dado el siguiente juego representado en la figura 1.6 vemos que tenemos un subjuego distinto del juego principal. Se calcula el equilibrio de Nash de ese subjuego. Posteriormente, en el juego inicial se borrará el subjuego analizado, convirtiendo su nodo inicial en terminal y asignándole el pago que obtienen los jugadores si en el subjuego hacen uso del equilibrio de Nash analizado. Para finalizar, se calcula el equilibrio de Nash del juego tras borrar el subjuego y la composición de los dos equilibrios obtenidos proporciona el equilibrio perfecto en subjuegos del juego de partida

Si consideramos el único subjuego distinto del propio juego, es un juego donde sólo interviene el jugador 1 que optimiza su pago eligiendo  $w$ . Se representa en la figura 1.7. Borrando ahora el subjuego se obtiene un nuevo juego representado en la figura 1.8 cuya forma estratégica se muestra en la tabla 1.4.

En la tabla se observa que el equilibrio de Nash de este juego es  $(W, W)$ . Por ende, el equilibrio perfecto en subjuegos para el juego de partida será  $(Ww, W)$ .

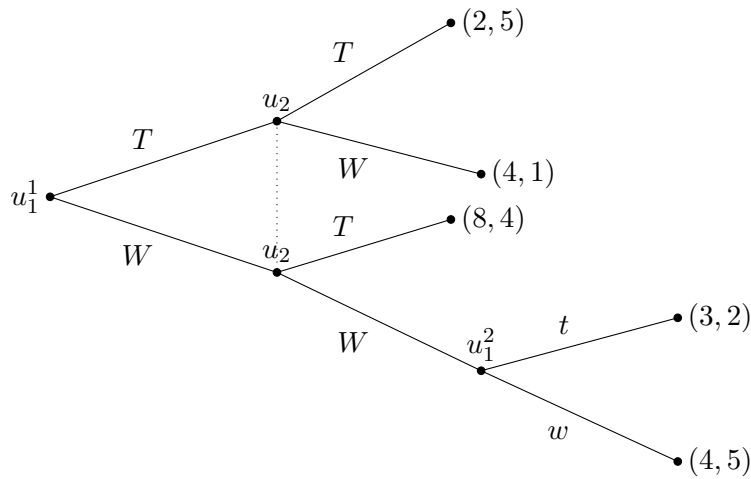


Figura 1.6: Árbol principal del juego.

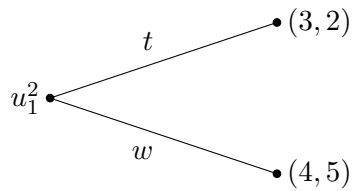


Figura 1.7: Subjuego del árbol principal.

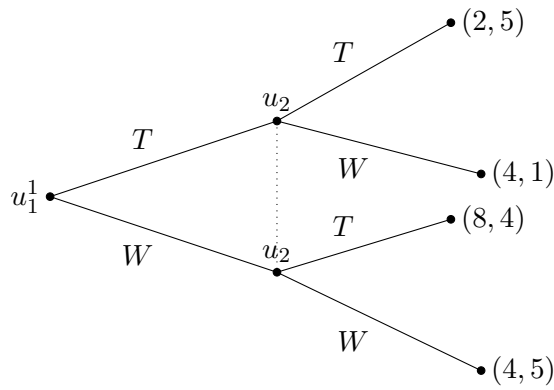


Figura 1.8: Juego obtenido al borrar el subjuego.

	W	T
W	4 , 5	8 , 4
T	4 , 1	2 , 5

Cuadro 1.4: Forma estratégica asociada al juego de partida tras borrar el subjuego.



## Capítulo 2

# Logística en el sector pesquero

### 2.1. Problema real y modelo teórico

En este segundo capítulo, como mencionamos en la introducción, vamos a estudiar la problemática relacionada a día de hoy con la pesca del atún, citando soluciones que se llevaron a cabo y los motivos por los que no se aplican a día de hoy. Además estudiaremos la propuesta mencionada en Bergantiño et al. [2], aplicando definiciones y conceptos que trabajamos en el capítulo anterior, y veremos como los resultados de esta propuesta afectan o no al mercado tropical de las empresas del sector.

La industria del atún tropical es una de las mayores y más importantes del mundo, tanto en volumen como en ingresos. Con la experiencia y el paso del tiempo se comprobó que había ciertos objetos que al flotar en el mar creaban unas condiciones concretas a su alrededor que atraen a distintas especies de peces. Una vez que estos objetos estuvieron regulados se les pasó a llamar dispositivos de concentración de peces (DCP) y su empleo generó un aumento considerable de las capturas y las ganancias para el sector. Para que los DCPs sean útiles se necesita saber su localización en todo momento, para lo que se usaron diferentes tecnologías, que evolucionaron con el paso del tiempo. Una vez que sabemos su situación espacial se debe mandar un buque de pesca a la zona, lo que requiere en la mayoría de casos una gran cantidad de combustible. Tras incrementarse la presencia de esta nueva arte de pesca comenzó la regularización y normalización del uso de los DCPs, siendo una de las principales medidas la de controlar y reducir el número de estos objetos que se le permite usar a cada empresa.

#### **Problema empírico**

Como mencionamos anteriormente, se hace uso de diferentes tecnologías para controlar la

localización de los DCPs trabajando en la gran mayoría de los casos por satélite. Esto dió lugar a pensar que una posible solución sería compartir la ubicación de ellos entre varios buques para así gastar todos menos combustible, lo que supondría además un gran beneficio para el planeta y su contaminación. En el artículo con el que trabajamos se nombra una propuesta de solución, Groba et al. [6], basada en un juego no cooperativo con un equilibrio bayesiano de Nash. Que sea un juego no cooperativo nos indica que los jugadores piensan sus estrategias con el único objetivo de un beneficio propio individual. Este juego es de información incompleta ya que los datos de las ganancias de cada buque no son conocidos por todos los participantes. En este modelo la empresa se compromete a que cada buque no reduzca sus ingresos, respecto de la situación en la que no comparte los DCPs.

Por otra parte el combustible de un buque lo paga la empresa por lo que no compartir no tiene un gasto directo para los pescadores. No obstante, el modelo no cooperativo no consigue maximizar las ganancias agregadas de empresa y pescadores y tampoco es enteramente justo porque no tiene en cuenta explícitamente la contribución de cada actor (empresa y patronos atuneros) al resultado final.

### Modelo teórico

Siguiendo el trabajo de Bergantiños et al. [2] presentamos una nueva propuesta de solución para este mismo problema pero desde el enfoque de un modelo cooperativo, partiendo del modelo de Groba et al. [6].

Comenzamos presentando las suposiciones que se asumen para poder abordar el problema.

- I. Las ubicaciones de los buques y DCPs son conocidas por la empresa en todo momento. Cada buque sabe donde están colocados sus DCP pero no conoce la ubicación de los de los demás barcos pesqueros.
- II. El coste por milla recorrida por cada buque se representa como  $c$  y estos gastos corren a cuenta de la empresa.
- III. No se sabe previamente la cantidad de atún que se va a encontrar en cada DCP, denotando la del DCP  $b$  por  $q(b)$ .
- IV. El precio que recibe cada buque por tonelada de atún es  $p$ .
- V. El atún recogido se vende posteriormente. El precio de venta se representa como  $p_f$ .

A continuación presentamos en una tabla la notación empleada.

$N = \{1, \dots, n\}$	Conjunto de buques atuneros en el problema.
$S \subseteq N$	Coalición formada entre alguno de los buques pesqueros.
$\Pi(N)$	Conjunto de las permutaciones de $N$ .
$B = \{b_1, \dots, b_n\}$	Conjunto de DCPs que se emplean en el problema.
$(x(b), y(b))$	Latitud y longitud de la situación de cada DCP en el océano.
$\alpha(b), b \in B$	Buque que es asignado al DCP $b$ .
$B_i^\alpha = \{b \in B / \alpha(b) = i\}, i \in N$	Conjunto de DCPs que le asignan a cada buque.
$d(S), S \subseteq N$	Mínima distancia que los buques de la coalición recorren para recoger todos los DCPs asignados a $S$ .
$Q : \cup_{i \in S} B_i^\alpha \rightarrow S$	Aplicación que reasigna los DCPs que inicialmente estaban asociados a buques en $S(\cup_{i \in S} B_i^\alpha)$ entre los de la coalición $S$ .
$R(\cup_{i \in S} B_i^\alpha)$	Conjunto de todas las posibles aplicaciones $Q$ .
$B_i^Q = \{b \in \cup_{i \in S} B_i^\alpha / Q(b) = i\}$	DCPs asignados al buque $i$ , por la aplicación $Q$ .
$d^Q(i, \pi)$	Distancia que se traslada el buque $i$ para recoger los DCPs pertenecientes a $B_i^Q$ , siguiendo un orden establecido por $\pi \in \Pi(B_i^Q)$ .
$d^Q(i) = \min\{d^Q(i, \pi) / \pi \in \Pi_{B_i^Q}\}$	Mínima distancia para recoger los DCPs de $B_i^Q$ para un buque $i$ .
$d^Q(S) = \sum_{i \in S} d^Q(i)$	Mínima distancia para recoger los DCPs de $\cup_{i \in S} B_i^\alpha$ para los buques de la coalición $S$ .
$d(S) = \min\{d^Q(S) / Q \in R(\cup_{i \in S} B_i^\alpha)\}$	Mínima distancia que tendrían que recorrer los buques de una coalición teniendo en cuenta todas las posibilidades de aplicaciones de asignación de DCP.

Cuadro 2.1: Notación empleada en el modelo teórico.

Los beneficios de la empresa se obtienen mediante la siguiente ecuación, que tiene en cuenta el gasto del combustible y los ingresos obtenidos por la venta de la pesca del atún, siendo  $pq_i^\alpha$  lo que obtiene cada barco tras recoger la mercancía en los DCPs.

$$(p_f - p) \sum_{i \in N} q_i^\alpha - c \sum_{i \in N} d(i). \quad (2.1)$$

Se cumple también que el precio al que se vende el atún será mayor o igual que el costo del combustible más lo que la empresa le paga a cada buque.

$$p_f q_i^\alpha \geq p q_i^\alpha + c d(i). \quad (2.2)$$

Describiremos a continuación un ejemplo que nos permitirá ilustrar todos estos conceptos y que utilizaremos para trabajar a lo largo de este capítulo.

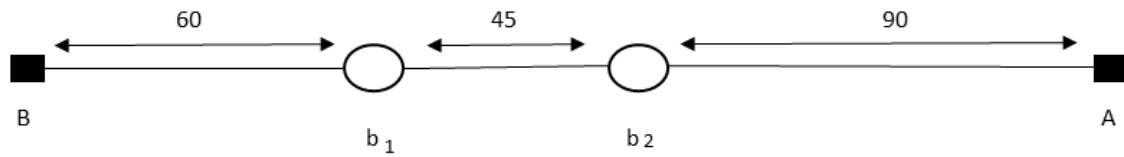


Figura 2.1: Ilustración del ejemplo 2.1.

**Ejemplo 2.1.** Nuestro problema consta de un conjunto de buques y DCPs de una empresa concreta. Están situados en una línea recta tal y como vemos en la figura superior. Al buque  $B$  se le asigna el DCP  $b_2$  y al  $A$  el  $b_1$ , las distancias entre ellos están indicadas en el dibujo. Por lo tanto podemos ordenar los datos de este problema de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll}
 N = \{A, B\} & B' = \{b_1, b_2\} & & \\
 \alpha(b_1) = A & B'_A{}^\alpha = b_1 & d(A) = 90 + 45 = 135 & \\
 \alpha(b_2) = B & B'_B{}^\alpha = b_2 & d(B) = 60 + 45 = 105 & d(A, B) = 60 + 90 = 150 \\
 q(b_1) = 10 & q(b_2) = 12 & q_A^\alpha = 10 & q_B^\alpha = 12 \\
 c = 7 & p = 15 & p_f = 150 & 
 \end{array}$$

Como mencionamos anteriormente el precio del combustible recae sobre la empresa por lo que los buques no tienen a simple vista ningún incentivo para compartir sus DCPs. Sin embargo a la empresa si le compensa reducir al mínimo las distancias navegadas por estos.

## 2.2. Aplicación del valor de Shapley

Tras plantear el problema en el anterior apartado, tratemos de estudiar una posible solución mediante el enfoque cooperativo de este y ayudándonos del valor de Shapley. Suponemos que ambos, empresa y buques, están de acuerdo en negociar un nuevo reparto y dividir posteriormente los beneficios. Plantearemos un juego cooperativo con los datos del problema explicado en el apartado anterior, calcularemos el valor de Shapley del juego y esto nos indicará como repartir los beneficios. Aclaremos primero algunas nociones teóricas. Trabajaremos con los conceptos de juego con utilidad transferible (definición ??) y valor de Shapley (definición ??). En este apartado nos referiremos al par  $(N', v)$  de un juego TU solamente como  $v$ . Además utilizaremos otra notación como:

$x \leq y$ con $x, y \in \mathbb{R}^N$	Para referirnos a cuando $x_i \leq y_i \quad \forall i \in N$ .
$x_S = (x_i)_{i \in S}$	Para toda coalición $S \subseteq N$ .
$B^\pi(i) = \{j \in N / \pi(j) < \pi(i)\}$	Elementos precediendo a $i \in N$ según el orden establecido por $\pi$ .
$\pi_S$	Orden inducido en los elementos de $S$ por el orden $\pi \in \Pi(N)$ .

Cuadro 2.2: Notación.

Denotaremos por  $(N', v^{q^\alpha})$  el juego asociado a un problema de barcos pesqueros de atún.  $N' = N \cup \{f\}$  donde  $N$  representa el conjunto de barcos y  $f$  representa la empresa. Para cada buque  $i \in N$ , definimos  $v^{q^\alpha}(i) = pq_i^\alpha$ . De modo similar, definimos  $v^{q^\alpha}(f)$  mediante la ecuación 2,1, de manera que tenemos:

$$v^{q^\alpha}(S) = \sum_{i \in S} pq_i^\alpha = \sum_{i \in S} v^{q^\alpha}(i). \quad (2.3)$$

Como vemos en esta ecuación, crear una coalición no tiene, beneficios para los buques, ya que sus ganancias son las mismas que si trabajasen individualmente.

En la tabla 2.3 la función característica de la empresa se calcula mediante la ecuación 2,1. Para cuando  $S \not\subseteq N$  hemos utilizado la siguiente ecuación, función característica de una coalición cuando forma parte de ella la empresa.

$$v^{q^\alpha}(S \cup \{f\}) = (p_f - p) \cdot \sum_{i \in N \setminus S} q_i^\alpha + p_f \cdot \sum_{i \in S} q_i^\alpha - c \cdot [d(S) + \sum_{i \in N \setminus S} d(i)] \quad (2.4)$$

Calcularemos todos estos valores para el ejemplo 2,1. para posteriormente comentarlos.

Agentes en la coalición	Función característica
$A$	150
$B$	180
$A, B$	330
$f$	1290
$A, f$	1440
$B, f$	1470
$A, B, f$	2250

Cuadro 2.3: Valores de la función característica para nuestro ejemplo.

Se tiene en cuenta que los DCPs que corresponden a los buques de la coalición están repartidos de manera que la distancia a recorrer sea la mínima posible. Además, cada barco que no pertenece a la coalición recoge los DCP asignados y todos venden el pescado recogido a la empresa.

Agentes	$A$	$B$	$f$
$v^{q^\alpha}$	150	180	1290
$\Phi(v^{q^\alpha})$	360	390	1500

Cuadro 2.4: Posibles ingresos de los agentes.

En la primera fila de esta tabla tenemos los ingresos que obtiene cada agente si no se tiene en cuenta un juego cooperativo, existe únicamente un interés individual. La segunda fila son las ganancias individuales que obtendrían al repartir el dinero mediante el valor de Shapley, un enfoque cooperativo de este problema. Como observamos claramente la cooperación de los agentes nunca disminuye los beneficios. Los valores de Shapley los calculamos ayudándonos de la siguiente tabla.

Las ganancias medias que aportará cada agente serán:

$$\Phi_A(v) = \frac{1}{6} \cdot (2160) = 360,$$

$$\Phi_B(v) = \frac{1}{6} \cdot (2340) = 390,$$

$$\Phi_f(v) = \frac{1}{6} \cdot (9000) = 1500.$$

Probabilidad	Orden	Contribución de $A$	Contribución de $B$	Contribución de $f$
$\frac{1}{6}$	$A B f$	$v(A) = 150$	$v(A, B) - v(A) = 180$	$v(N') - v(A, B) = 1920$
$\frac{1}{6}$	$A f B$	$v(A) = 150$	$v(N') - v(A, f) = 810$	$v(A, f) - v(A) = 1290$
$\frac{1}{6}$	$B A f$	$v(A, B) - v(B) = 150$	$v(B) = 180$	$v(N') - v(A, B) = 1920$
$\frac{1}{6}$	$B f A$	$v(N') - v(B, f) = 780$	$v(B) = 180$	$v(B, f) - v(B) = 1290$
$\frac{1}{6}$	$f A B$	$v(a, f) - v(f) = 150$	$v(N') - v(A, f) = 810$	$v(f) = 1290$
$\frac{1}{6}$	$f B A$	$v(N') - v(B, f) = 780$	$v(B, f) - v(f) = 180$	$v(f) = 1290$

Cuadro 2.5: Operaciones del valor de Shapley.

Estudiaremos, a continuación, algunos resultados teóricos obtenidos al plantear este tipo de problemas desde un enfoque cooperativo.

La proposición 2,2 comprueba que cooperar nunca disminuye las ganancias obtenidas, solo puede mejorarlas.

**Proposición 2.2.** *Para cada problema de barcos atuneros, el valor de Shapley de un jugador  $i$  será mayor o igual que la función característica de ese mismo jugador en todos los problemas atuneros con este enfoque:  $\Phi_i(v^{q^\alpha}) \geq v^{q^\alpha}(i) \quad \forall i \in N' \cup \{f\}$ .*

*Demostración.* Comenzaremos recordando la expresión del valor de Shapley:

$$\Phi_i(v^{q^\alpha}) := \sum_{S \subseteq N' \setminus \{i\}} |S|! \frac{(|N'| - |S| - 1)!}{|N'|!} \cdot (v^{q^\alpha}(S \cup \{i\}) - v^{q^\alpha}(S)). \quad (2.5)$$

Por teoría, sabemos que la primera parte de este sumatorio cuando estamos tratando de un agente concreto  $i$  da como resultado 1. En consecuencia lo único que tendremos que probar será que  $v^{q^\alpha}(S \cup \{i\}) - v^{q^\alpha}(S) \geq v^{q^\alpha}(i)$ , esto es lo mismo que  $v^{q^\alpha}(S \cup \{i\}) \geq v^{q^\alpha}(i) + v^{q^\alpha}(S) \quad \forall S \subseteq (N \cup \{f\}) \setminus \{i\}$  lo cual sabemos que se cumple gracias al lema 2,3.  $\square$

**Lema 2.3.** *Se cumple  $v^{q^\alpha}(S \cup T) \geq v^{q^\alpha}(S) + v^{q^\alpha}(T) \quad \forall S, T \subseteq N \cup \{f\}$  con  $S \cap T = \phi$ .  $v^{q^\alpha}$  es superaditivo para todos los problemas atuneros con enfoque cooperativo.*

*Demostración.* Vamos a dividir esta demostración en tres casos, dependiendo si la empresa forma parte de alguna de las coaliciones o no:

i.  $f \notin S \cup T$ .

$$\text{En este caso, } v^{q^\alpha}(S \cup T) = \sum_{i \in S \cup T} v^{q^\alpha}(i) = \sum_{i \in S} v^{q^\alpha}(i) + \sum_{i \in T} v^{q^\alpha}(i) - \sum_{i \in S \cap T} v^{q^\alpha}(i).$$

Como sabemos por el enunciado  $S \cap T = \phi$ ,

$$v^{q^\alpha}(S \cup T) = \sum_{i \in S} v^{q^\alpha}(i) + \sum_{i \in T} v^{q^\alpha}(i) = v^{q^\alpha}(S) + v^{q^\alpha}(T).$$

II.  $f \in S$ .

Una expresión alternativa a la ecuación 2,4 es

$$v^{q^\alpha}(S \cup \{f\}) = \sum_{i \in S \cup \{f\}} v^{q^\alpha}(i) + c \cdot \left[ \sum_{i \in S} d(i) - d(S) \right]. \quad (2.6)$$

Aplicando a  $S \cup T$  y teniendo en cuenta que  $f \in S$  tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} v^{q^\alpha}(S \cup T) &= \sum_{i \in S \cup T} v^{q^\alpha}(i) + c \cdot [\sum_{i \in (S \setminus \{f\}) \cup T} d(i) - d((S \setminus \{f\}) \cup T)] = \\ &= \sum_{i \in S} v^{q^\alpha}(i) + c \cdot [\sum_{i \in S \setminus \{f\}} d(i) - d(S \setminus \{f\})] + \sum_{i \in T} v^{q^\alpha}(i) + \\ &+ c \cdot [d(S \setminus \{f\}) + \sum_{i \in T} d(i) - d((S \setminus \{f\}) \cup T)] = v^{q^\alpha}(S) + v^{q^\alpha}(T) + \\ &+ c \cdot [d(S \setminus \{f\}) + \sum_{i \in T} d(i) - d((S \setminus \{f\}) \cup T)]. \end{aligned}$$

Sabemos que dados  $S, T \subseteq N$  tal que  $S \cap T = \emptyset$ ,  $d(S \cup T) \leq d(S) + d(T)$ . Por tanto podemos hacer las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} d(S \setminus \{f\}) + \sum_{i \in T} d(i) &\geq d(S \setminus \{f\}) + d(T) \geq d((S \setminus \{f\}) \cup T) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(S \setminus \{f\}) + \sum_{i \in T} d(i) &\geq d((S \setminus \{f\}) \cup T) \Rightarrow \\ \Rightarrow d(S \setminus \{f\}) + \sum_{i \in T} d(i) - d((S \setminus \{f\}) \cup T) &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow c \cdot [d(S \setminus \{f\}) + \sum_{i \in T} d(i) - d((S \setminus \{f\}) \cup T)] &\geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v^{q^\alpha}(S \cup T) &\geq v^{q^\alpha}(S) + v^{q^\alpha}(T). \end{aligned}$$

III.  $f \in T$ .

Es análogo al caso anterior.

□

El siguiente resultado que vamos a ver nos permite dividir el valor final de las ganancias (en caso de plantear el problema como uno cooperativo) en dos sumandos, uno que depende de las toneladas de atún recogidas y otro que tiene en cuenta el ahorro de combustible como consecuencia de repartir DCPs.

**Proposición 2.4.** *Para cada problema de los buques atuneros, el valor de Shapley del juego  $v^{q^\alpha}$  se puede calcular del modo siguiente:*

$$\Phi_i(v^{q^\alpha}) = v^{q^\alpha}(i) + c \cdot \left[ \frac{d(i)}{2} - \Phi_i(v^d) \right] \text{ para cada } i \in N \text{ y}$$

$$\Phi_f(v^{q^\alpha}) = v^{q^\alpha}(f) + c \cdot \left[ \sum_{i \in N} \frac{d(i)}{2} - \Phi_f(v^d) \right].$$

*Demostración.* Definimos un juego cooperativo  $v^d$  tal que  $v^d(S) = 0$  y  $v^d(S \cup \{f\}) = d(S)$ , para todo  $S \subseteq N$ . Vamos a considerar los juegos cooperativos  $v^1$  y  $v^2$ , donde para cada  $S \subseteq N$ ,

$$v^1(S) = \sum_{i \in S} v^{q^\alpha}(i) \text{ y } v^1(S \cup \{f\}) = \sum_{i \in S \cup \{f\}} v^{q^\alpha}(i),$$

$$v^2(S) = 0 \text{ y } v^2(S \cup \{f\}) = \sum_{i \in S} d(i).$$

Teniendo en cuenta para cada  $S \subseteq N$  las ecuaciones 2.3 y 2.6, se tiene que para cada  $S \subseteq N \cup \{f\}$ ,

$$v^{q^\alpha}(S) = v^1(S) + c \cdot [v^2(S) - v^d(S)].$$

Como el valor de Shapley es una función lineal de la función característica, se tiene que para cada  $i \in N \cup \{f\}$ ,  $\Phi_i(v^{q^\alpha}) = \Phi_i(v^1) + c \cdot [\Phi_i(v^2) - \Phi_i(v^d)]$ .

Teniendo en cuenta la Ecuación 2.4 (definición del valor de Shapley), para cada  $i \in N \cup \{f\}$ ,  $\Phi_i(v^1) = v^{q^\alpha}(i)$ . Vamos a calcular ahora  $\Phi_i(v^2)$  para cada  $i \in N \cup \{f\}$ . Consideremos para ello un orden  $\pi$  sobre  $N \cup \{f\}$ . Dado  $i \in N$ ,

$$v^2(B^\pi(i) \cup \{i\}) - v^2(B^\pi(i)) = \begin{cases} d(i) & \text{si } f \in B^\pi(i) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como  $f \in B^\pi(i)$  en la mitad de los órdenes,  $\Phi_i(v^2) = d(i)/2$ . Como el valor de Shapley cumple la propiedad de eficiencia, concretamente,  $\sum_{i \in N \cup \{f\}} \Phi_i(v^2) = v^2(N \cup \{f\})$  y para cada  $i \in N$ ,  $\Phi_i(v^2) = \frac{d(i)}{2}$ , se deduce que  $\Phi_f(v^2) = \sum_{i \in N} \frac{d(i)}{2}$ .  $\square$

En la Proposición 2.5, demostramos que, para el caso de dos buques, los beneficios de la cooperación bajo el valor de Shapley son los mismos para todos los agentes.

**Proposición 2.5.** *Para cada problema de los buques atuneros siendo  $N = \{1, 2\}$  se cumple*

$$\Phi_1(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(1) = \Phi_2(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(2) = \Phi_f(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(f).$$

*Demostración.* Por la Proposición 2.4,

$$\Phi_1(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(1) = c \cdot \left[ \frac{d(1)}{2} - \Phi_1(v^d) \right],$$

$$\Phi_2(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(2) = c \cdot \left[ \frac{d(2)}{2} - \Phi_2(v^d) \right] \text{ y}$$

$$\Phi_f(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(f) = c \cdot \left[ \frac{d(1)}{2} + \frac{d(2)}{2} - \Phi_f(v^d) \right].$$

Utilizando nuevamente la definición 2.5:

$$\Phi_1(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(1) = c \cdot \left[ \frac{d(1)}{2} - \frac{2d(1,2) + d(1) - 2d(2)}{6} \right] = \frac{c}{3} \cdot [d(1) + d(2) - d(1,2)].$$

De manera similar podemos probar:

$$\Phi_2(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(2) = \frac{c}{3} \cdot [d(1) + d(2) - d(1,2)].$$

Para concluir, aplicando la definición 2.5:

$$\Phi_f(v^{q^\alpha}) - v^{q^\alpha}(f) = c \cdot \left[ \frac{d(1)}{2} + \frac{d(2)}{2} - \frac{2d(1,2) + d(1) + 2d(2)}{6} \right] = \frac{c}{3} \cdot [d(1) + d(2) - d(1,2)].$$

□

### 2.3. Aplicación de los juegos en forma extensiva

Como tratamos en el apartado anterior, una de las nuevas propuestas para solucionar el problema de los buques atuneros es aplicar el valor de Shapley. Sin embargo, llegar a este resultado requiere la negociación y cooperación de las empresas y buques participantes, lo cual no es siempre tan sencillo. Una forma no cooperativa de llevar a cabo esta asignación es mediante un juego en forma extensiva, que solo requiere la acción racional de los agentes por separado. Una vez propuesto este juego, estudiaremos el equilibrio perfecto en subjuegos, cuyo pago nos dará la asignación del valor de Shapley que estamos buscando.

Comenzaremos definiendo formalmente el juego no cooperativo.

**Etapla 1: Compartir información sobre los DCPs.** No es obligatorio que los buques compartan la ubicación de sus DCPs. En consecuencia tenemos las siguiente dos posibles acciones para cada uno de ellos, siendo *si* cuando deciden compartir la información y *no* en el caso contrario. Denotaremos por  $a_i^1$  la elección de cada  $i \in N$ , y por  $A_i^1$ :

$$A_i^1 = \{si, no\}.$$

Esto conduce a dos conjuntos, los buques que no se guardan la información y los que sí lo

hacen:

$$N^{si} = \{i \in N / a_i^1 = si\}, \quad N^{no} = \{i \in N / a_i^1 = no\}.$$

**Etapla 2: Reasignación de los DCPs.** Se hace una nueva repartición de los DCPs entre aquellos barcos que hicieron saber su información al resto. Los pescadores restantes continúan con el mismo reparto de dispositivos de concentración de peces que al inicio. El conjunto de acciones de la empresa está dado de la siguiente forma:

$$A_f^2 = \{Q : B \rightarrow N / Q(b) = \alpha(b) \text{ si } b \in \cup_{i \in N^{no}} B_i^\alpha \text{ y } Q(b) \in N^{si} \text{ si } b \in \cup_{i \in N^{si}} B_i^\alpha\}.$$

Cada barco  $i$  es reasignado a los siguientes DCPs, los cuales recorrerá haciendo uso de la menor distancia:

$$B_i^Q = \{b \in B / Q(b) = i\}.$$

Denotamos también la suma total del recorrido de los barcos pertenecientes a  $N^{si}$  como  $d^Q(N^{si})$ .

**Etapla 3: Pesca.** Los barcos pescan en el nuevo DCP asignado. Para cada  $i \in N$  y cada  $b \in B_i^Q$ , se denota por  $q^*(b)$  la cantidad de atún en el DCP  $b$ . Recuérdese que  $q(b)$  denota la cantidad de atún recogida por el barco  $i$  en el DCP  $b$ . Se tiene que  $q(b) \leq q^*(b)$ . En cada DCP  $b$ , el barco  $i$  puede pescar eficientemente y recoger todo el atún en el DCP (concretamente,  $q(b) = q^*(b)$ ) o no pescar eficientemente y recoger sólo una parte del atún (concretamente,  $q(b) < q^*(b)$ ). Por tanto, el conjunto de acciones del barco  $i$  está dado por:

$$A_i^3 = \{(q(b))_{b \in B_i^Q} / 0 \leq q(b) \leq q^*(b) \text{ para todo } b \in B_i^Q\}.$$

**Etapla 4: La empresa paga a los barcos.** Los barcos que deciden no compartir sus DCPs son pagados de acuerdo a la cantidad de atún recogida. Los barcos que deciden compartir sus DCPs son pagados de acuerdo con el valor de Shapley del juego cooperativo inducido por  $N^{si}$ . Formalmente:

Cada  $i \in N^{no}$  recibe  $p \cdot q_i^\alpha$ .

Cada  $i \in N^{si}$  recibe  $\Phi_i(N^{si} \cup \{f\}, v^{q^\alpha, Q})$  donde  $v^{q^\alpha, Q}$  se define como sigue. Para cada  $S \subseteq N^{si}$ ,

- $v^{q^\alpha, Q}(S)$  se define como en la Ecuación 2.3.
- $v^{q^\alpha, Q}(S \cup \{f\})$  se define como en la Ecuación 2.4 reemplazando  $d(S)$  por  $d^Q(S)$ , donde  $d^Q(N^{si})$  se ha definido en la Etapla 2 y  $d^Q(S) = d(S)$  cuando  $S \neq N^{si}$ .

La empresa vende todo el atún recuperado, paga el coste del combustible y paga a los buques como se ha indicado anteriormente. Así, la empresa recibe

$$p_f \cdot \sum_{i \in N} q_i^\alpha - c \cdot \left( \sum_{i \in N^{no}} d(i) + d^Q(N^{si}) \right) - \sum_{i \in N^{no}} p \cdot q_i^\alpha - \sum_{i \in N^{si}} \Phi_i(N^{si} \cup \{f\}, v^{q^\alpha, Q}). \quad (2.7)$$

El primer resultado que vamos a tratar a continuación estudia como si todos los agentes actúan racionalmente (comparten todos ubicación, la empresa los sitúa para que recorran la mínima distancia posible y ellos recogen todo el atún una vez en el DCP) obtenemos un equilibrio perfecto en subjuegos cuyo pago coincidirá con el valor de Shapley del juego estudiado en la sección 2.2.

**Proposición 2.6.** *La siguiente combinación o perfil de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos (SPNE):*

*Etapas 1.* Para cada  $i \in N$ ,  $a_i^1 = sí$ .

*Etapas 2.* La empresa selecciona  $Q$  donde  $Q(b) = \alpha(b)$  si  $b \in \cup_{i \in N^{no}} B_i^\alpha$  y  $d^Q(N^{si}) = d(N^{si})$ .

*Etapas 3.* Para cada  $i \in N$ , cada  $Q$  seleccionado por la empresa en la Etapa 2, y cada  $b \in B_i^Q$ ,  $q(b) = q^*(b)$ .

Además, la asignación de pagos inducida por la combinación de estrategias es el valor de Shapley del juego cooperativo.

*Demostración.* Es obvio que la asignación de pagos inducida por la combinación de estrategias es el valor de Shapley del juego cooperativo. Demostramos ahora que esta combinación es un SPNE. Este juego tiene tres subjuegos, dados por las tres primeras etapas. Procedemos por inducción hacia atrás. A continuación, analizamos primero el subjuego dado por la Etapa 3. Sea  $i \in N$ . Supongamos que el barco  $i$ , en lugar de pescar de modo eficiente ( $q(b) = q^*(b)$  para cada  $b \in B_i^Q$ ), decide hacer algo diferente. Concretamente, el barco  $i$  juega  $(q'(b))_{b \in B_i^Q} \in A_i^3$  tal que  $q'(b) < q^*(b)$  para algún  $b \in B_i^Q$ . De esta forma,  $q_i'^Q = \sum_{b \in B_i^Q} q'(b) < \sum_{b \in B_i^Q} q^*(b) = q_i^Q$ . Consideramos dos casos.

1.  $i \in N^{no}$ . Jugando  $(q^*(b))_{b \in B_i^Q}$  el barco  $i$  obtiene  $p \cdot q_i^Q$ , mientras que jugando  $(q'(b))_{b \in B_i^Q}$  obtiene  $p \cdot q_i'^Q$ , que es menor. De esta forma, el barco  $i$  no mejora si se desvía de la estrategia establecida en la Etapa 3.
2.  $i \in N^{si}$ . Jugando  $(q^*(b))_{b \in B_i^Q}$ , usando argumentos similares a los utilizados en la Proposición 2.4, se prueba que el barco  $i$  obtiene

$$\Phi_i(N^{si} \cup \{f\}, v^{q^\alpha, Q}) = p \cdot \sum_{b \in B_i^\alpha} q^*(b) + c \cdot \left[ \frac{d(i)}{2} - \Phi_i(v^{d^Q}) \right].$$

Jugando  $(q'(b))_{b \in B_i^Q}$ , usando argumentos similares a los utilizados en la Proposición 2.4, se demuestra que el barco  $i$  obtiene

$$p \cdot \left( \sum_{b \in B_i^\alpha \cap B_i^Q} q'(b) + \sum_{b \in B_i^\alpha \setminus B_i^Q} q^*(b) \right) + c \cdot \left[ \frac{d(i)}{2} - \Phi_i(v^{d^Q}) \right].$$

Ya que  $q'(b) \leq q^*(b)$  para todo  $b \in B_i^\alpha \cap B_i^Q$ , el barco  $i$  no mejora si se desvía de la estrategia establecida en la Etapa 3.

Analizamos ahora el subjuego dado por la Etapa 2. Supongamos que la empresa escoge  $Q'$  tal que  $d^{Q'}(N^{si}) > d^Q(N^{si})$ . Por la Ecuación 2.7, la utilidad para la empresa bajo  $Q$  menos la utilidad de la empresa bajo  $Q'$  es la siguiente:

$$c \cdot \left( d^{Q'}(N^{si}) - d^Q(N^{si}) \right) + \sum_{i \in N^{si}} \Phi_i \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{q^\alpha, Q'} \right) - \sum_{i \in N^{si}} \Phi_i \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{q^\alpha, Q} \right). \quad (2.8)$$

De forma análoga a la Proposición 2.4, se puede probar que:

$$\sum_{i \in N^{si}} \Phi_i \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{q^\alpha, Q'} \right) = \sum_{i \in N^{si}} \left( p \cdot q_i^\alpha + c \cdot \left[ \frac{d(i)}{2} - \Phi_i(N^{si} \cup \{f\}, v^{d^{Q'}}) \right] \right)$$

y

$$\sum_{i \in N^{si}} \Phi_i \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{q^\alpha, Q} \right) = \sum_{i \in N^{si}} \left( p \cdot q_i^\alpha + c \cdot \left[ \frac{d(i)}{2} - \Phi_i(N^{si} \cup \{f\}, v^{d^Q}) \right] \right).$$

Por tanto, la expresión 2.8 coincide con:

$$\begin{aligned} & c \cdot \left( d^{Q'}(N^{si}) - d^Q(N^{si}) \right) \\ & + c \cdot \sum_{i \in N^{si}} \left( \Phi_i \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^Q} \right) - \Phi_i \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^{Q'}} \right) \right) \\ & = c \cdot \left( d^{Q'}(N^{si}) - d^Q(N^{si}) \right) \\ & + c \cdot \left( v^{d^Q}(N^{si} \cup \{f\}) - \Phi_f \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^Q} \right) - v^{d^{Q'}}(N^{si} \cup \{f\}) + \Phi_f \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^{Q'}} \right) \right) \\ & = c \cdot \left( \Phi_f \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^{Q'}} \right) - \Phi_f \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^Q} \right) \right). \end{aligned}$$

Como el valor de Shapley es aditivo en la función característica,

$$c \cdot \left( \Phi_f \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^{Q'}} \right) - \Phi_f \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^Q} \right) \right) = c \cdot \left( \Phi_f \left( N^{si} \cup \{f\}, v^{d^{Q'}} - v^{d^Q} \right) \right).$$

Notemos que

$$v^{d^{Q'}}(S) - v^{d^Q}(S) = \begin{cases} d^{Q'}(N^{si}) - d^Q(N^{si}) & \text{si } S = N^{si} \cup \{f\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De esta forma,  $\Phi_f(N^{si} \cup \{f\}, v^{d^{Q'}} - v^{d^Q}) \geq 0$ . Por tanto, la empresa no mejora si se desvía de la estrategia establecida en la Etapa 2.

Analicemos ahora el subjuego dado por la Etapa 1. Sea  $i \in N$ . Jugando *sí*, el barco  $i$  obtiene  $\Phi_i(N \cup \{f\}, v^{q^\alpha})$ . Supongamos que el barco  $i$  juega *no* en lugar de *sí*. Entonces  $N^{no} = \{i\}$  y  $N^{si} = N \setminus \{i\}$ . Por lo tanto, el barco  $i$  obtiene  $p \cdot q_i^\alpha$ . Por la Proposición 2.2, el barco  $i$  no mejora al desviarse de la estrategia establecida en la Etapa 1.  $\square$

El juego no cooperativo tiene más SPNEs. En la siguiente proposición, demostramos que si los buques no comparten sus DCPs, las empresas reasignan los DCPs, minimizando la distancia recorrida, y los buques pescan eficientemente, entonces tenemos un SPNE.

**Proposición 2.7.** *La siguiente combinación de estrategias es un equilibrio perfecto en subjuegos (SPNE):*

*Etapa 1.* Para cada  $i \in N$ ,  $a_i^1 = no$ .

*Etapa 2.* La empresa selecciona  $Q$  donde  $Q(b) = \alpha(b)$  si  $b \in \cup_{i \in N^{no}} B_i^\alpha$  y  $d^Q(N^{si}) = d(N^{si})$ .

*Etapa 3.* Para cada  $i \in N$ , cada  $Q$  seleccionado por la empresa en la Etapa 2, y cada  $b \in B_i^Q$ ,  $q(b) = q^*(b)$ .

Además, la asignación de pagos inducida por la combinación de estrategias es  $(v^{q^\alpha}(i))_{i \in N \cup \{f\}}$ , el vector de valores individuales del juego cooperativo.

*Demostración.* . Es obvio que la asignación de beneficios inducida por la combinación de estrategias es  $(v^{q^\alpha}(i))_{i \in N \cup \{f\}}$ . Obsérvese, además, que las estrategias de las Etapas 2 y 3 coinciden con las del enunciado de la Proposición 2.6. Así, en los subjuegos de las Etapas 2 y 3, tenemos un equilibrio de Nash. Analizamos ahora el subjuego dado por la Etapa 1. Sea  $i \in N$ . Jugando *no*, el barco  $i$  obtiene  $p \cdot q_i^\alpha$ . Supongamos que el buque  $i$  juega *sí* en lugar de *no*. Entonces  $N^{si} = \{i\}$ . Así, el buque  $i$  obtiene  $\Phi_i(\{i, f\}, v^{q^\alpha})$ . Utilizando argumentos similares a los utilizados en la prueba de la Proposición 2.4, podemos demostrar que

$$\Phi_i(\{i, f\}, v^{q^\alpha}) = p \cdot q_i^\alpha + c \cdot \left[ \frac{d(i)}{2} - \Phi_i(\{i, f\}, v^d) \right] = p \cdot q_i^\alpha.$$

Así, el buque  $i$  no mejora desviándose de la estrategia indicada en la Etapa 1.  $\square$

Las proposiciones 2.6 y 2.7 describen, para cualquier problema de atuneros, dos SPNEs del juego no cooperativo. No obstante, dependiendo de la posición de los DCPs y de la asignación

inicial  $\alpha$ , algunos problemas de atuneros podrían tener más SPNEs. En la siguiente proposición, damos dos propiedades del SPNE descrito en la Proposición 2.6, que hacen que este SPNE sea más atractivo.

**Proposición 2.8.** *Para cada problema de los buques atuneros, se cumplen las dos siguientes afirmaciones.*

1. *Cada agente obtiene bajo el SPNE de la Proposición 2.6 al menos lo mismo que bajo el SPNE de la Proposición 2.7.*
2. *Supongamos que en la Etapa 3, todos los buques pescan eficientemente en sus DCPs asignados. Entonces, en cualquier SPNE la empresa selecciona  $Q$ , minimizando las distancias. Además, en cualquier SPNE, para cada buque jugar sí es al menos tan bueno como jugar no.*

*Demostración.* 1. Es consecuencia de la Proposición 2.2.

2. Usando argumentos similares a los utilizados en la demostración de la Proposición 2.6, se puede demostrar que en cualquier SPNE, la empresa selecciona  $Q$ , minimizando las distancias.

Sea  $(a_i^1)_{i \in N}$  la acción de los barcos en la Etapa 1 en cualquier SPNE. Supongamos ahora que el barco  $j$  está jugando *no* y decide jugar *sí*. Formalmente, sea  $(a_i^1)_{i \in N}$  y  $j \in N$  tal que  $a_j^1 = no$ ,  $a_j^1 = sí$  y  $a_i^1 = a_i^1$  para cada  $i \in N \setminus j$ . Entonces,  $N^{sí} = \{i \in N / a_i^1 = sí\} = N^{sí} \cup \{j\}$  y  $N^{no} = \{i \in N / a_i^1 = no\} = N^{no} \setminus \{j\}$ . Se debe de probar que el barco  $j$  jugando *sí* obtiene al menos el mismo resultado que jugando *no*. Jugando *no*, el barco  $j$  obtiene  $p \cdot q_j^\alpha$ . Jugando *sí*, el barco  $j$  obtiene  $\Phi_j(N^{sí} \cup f, v^{q^\alpha}, Q)$ . De modo similar a la demostración de la Proposición 2.6, se prueba que  $\Phi_j(N^{sí} \cup f, v^{q^\alpha}, Q) \geq p \cdot q_j^\alpha$ .

□

Un SPNE predice el comportamiento de los agentes racionales. Cuando existe un único SPNE, podemos predecir cómo se comportarán los agentes racionales. Sin embargo, cuando hay varios SPNEs, debemos compararlos todos. La Proposición 2.8 presenta dos propiedades del SPNE descrito en la Proposición 2.6 que lo hacen más atractivo. La parte 1. dice que todos los buques y la empresa obtienen al menos los mismos resultados bajo el SPNE de la Proposición 2.6 que bajo el SPNE de la Proposición 2.7. Por lo tanto, debería ser relativamente fácil coordinar a todos los agentes para que jueguen el SPNE dado por la Proposición. Por ejemplo, la empresa podría decir a los buques que si todos juegan *sí* en la Etapa 1, entonces los beneficios serán al menos los mismos que los generados al jugar *no*. La parte 2. dice que si todos los buques pescan eficientemente en la Etapa 3, y si los buques juegan racionalmente, deben elegir el *sí* en la Etapa

1. Obsérvese que al elegir *sí*, cada buque obtiene al menos el mismo resultado que al elegir *no*. Analicemos los incentivos para pescar de forma eficiente en la Etapa 3. Cada buque debe pescar en dos tipos de DCPs: los asignados inicialmente al buque y los asignados inicialmente a otros buques pero reasignados en la Etapa 2 a este buque. En los DCPs asignados inicialmente, cada buque tiene incentivos para pescar de forma eficiente. De lo contrario, en la fase 4, la cantidad recibida por el buque sería menor. En el caso de los DCPs reasignados, las cosas son diferentes. La cantidad recibida por el buque en la fase 4 no depende de la cantidad recuperada en esos DCPs. Por lo tanto, pescar de forma eficiente produce el mismo pago que pescar de forma no eficiente. Creemos que este aspecto se queda corto desde un punto de vista teórico. Sin embargo, es de esperar que en la mayoría de los casos prácticos no es así. Normalmente, el número de buques es pequeño (dos o tres). Se enfrentan a la misma situación (con los mismos buques y la misma empresa) durante varias campañas. Esto significa que si un buque no pesca con eficacia, será descubierto y podría ser retirado del grupo de pesca. Así pues, parece que la hipótesis de la parte 2 es bastante realista desde un punto de vista práctico.

## 2.4. Algunos resultados empíricos

Vamos a comprobar la utilidad de las proposiciones mencionadas anteriormente, analizando un problema con datos reales y aplicándole la propuesta de solución que hemos estado estudiando, el valor de Shapley. Los datos que utilizaremos están sacados del estudio de Bergantiños et al.[2] proporcionados por *Marine Instruments*. Nos centraremos en tres enfoques de este problema:

- Sin compartir DCPs.
- Compartiendo DCPs y usando el equilibrio bayesiano de Nash.
- Compartiendo DCPs y usando el valor de Shapley.

Nuestro reparto de DCPs ha sido realizado por proximidad, una forma bastante rápida y eficiente, para que la distancia recorrida por todos los buques sea la menor posible. Hemos omitido algunos datos con menor influencia en los resultados para simplificar el estudio del problema, como tasas y permisos para la pesca, comida y mantenimiento para la tripulación en los días de trabajo,... En la tabla 2.6 están recopiladas las principales variables de interés que tendremos en cuenta:

Cada buque tiene inicialmente asignados 20 DCPs. Denominaremos a los barcos como A, B y C. El barco A recoge del DCP 1 al número 20, el B del 21 al 40 y el C del 41 al 60. En la tabla 2.2 podemos ver que dispositivos recogerá cada barco una vez aplicado el criterio de la mínima

Fechas	09/04/2017 - 23/04/2017	Es el número de días que suele durar un periodo de pesca normal (Groba et al.[7] y [8]). El mes no influye mucho en nuestro estudio (Fonteneau et al. [5] y Maufroy et al. [10] ).
Zona de captura	Nº51 (FAO)	
Número de buques	3	Número muy común para trabajar en la pesca de atún.
Número de DCPs inicialmente	20 DCPs/buque	
Velocidad a la que van los barcos	15 nudos	
Dólares/milla navegada	\$29	
Toneladas de media por DCP	6 toneladas de atún	Los DCPs situados en una muy buena zona suponemos que tienen unas 8 toneladas de pescado.
Precio por cantidad pescada	\$1400/tonelada	
Porcentaje que gana el patrón	10 %	Esto incentiva el interés por proponer un modelo cooperativo.
Conocimientos del patrón	DCPs iniciales	Sabe la asignación inicial de DCPs pero no se puede anteponer al nuevo reparto, así como a la cantidad de pescado en cada uno de ellos.

Cuadro 2.6: Datos del estudio.

distancia recorrida. En consecuencia, los barcos varían el número que tienen asignado, pueden pasar a recoger más, igual o menos DCPs. Con los datos que tenemos el buque A pasa a recoger 23 dispositivos, el B 13 y el C 24 DCPs.

Tras hacer los cálculos con el software MSB de *Marine Instruments*, una plataforma de recepción y visualización de datos de DCP desarrollada por *Marine Instruments* el primer buque recorre una distancia total de 1613 nm en comparación con los 2344 nm que navegaba al inicio. El buque B pasa de trabajar 2481 nm a 897 nm y el C termina recorriendo 1630 nm, mucho menos que los 2442 nm iniciales. La distancia total conjunta de los 3 barcos con la repartición inicial de los DCPs es 7268 nm. Esta misma distancia repartiéndolos de manera efectiva se convierte en 4139 nm.

Buque A	Buque B	Buque C
DCP 1	DCP 16	DCP 9
DCP 2	DCP 17	DCP 10
DCP 3	DCP 18	DCP 11
DCP 4	DCP 21	DCP 12
DCP 5	DCP 22	DCP 33
DCP 13	DCP 23	DCP 34
DCP 14	DCP 24	DCP 35
DCP 15	DCP 43	DCP 36
DCP 16	DCP 44	DCP 37
DCP 17	DCP 45	DCP 38
DCP 18	DCP 46	DCP 39
DCP 19	DCP 47	DCP 40
DCP 20	DCP 48	DCP 49
DCP 25		DCP 50
DCP 26		DCP 51
DCP 27		DCP 52
DCP 28		DCP 53
DCP 29		DCP 54
DCP 30		DCP 55
DCP 31		DCP 56
DCP 32		DCP 57
DCP 41		DCP 58
DCP 42		DCP 59
		DCP 60

Cuadro 2.7: Asignación eficiente de los buques

Como sugerimos un cambio de asignación también varía la cantidad de pescado que recoge cada buque. Pasan de recoger 120 a 138, 120 a 78 y 120 a 144, los buques A, B y C, respectivamente.

Para poder sacar una conclusión de este estudio, hemos tenido que calcular los ingresos que aporta cada opción como solución del problema. En otras palabras, en el estudio aparecen calculados los resultados para el caso en el que no se comparten DCPs, el punto de partida, y las

ganancias que aporta tanto a cada buque como a la empresa hacer una repartición razonable de los DCPs y utilizar el valor de Shapley. Esto está comparado en la tabla 2.8 con los resultados sacados de Groba et al.[6], en los que se sigue un enfoque no cooperativo y se aplica la noción de equilibrio bayesiano de Nash. Todo esto se calcula teniendo en cuenta los datos de la tabla 2.6, las nuevas millas de distancia, el precio por milla, el porcentaje que se queda el patrón, toneladas de pescado, el combustible que se ahorra en distancia,...

	Sin compartir DCPs	Equilibrio bayesiano de Nash			Valor de Shapley		
		Ingresos	Mejora	Porcentaje de mejora	Ingresos	Mejora	Porcentaje de mejora
Buque A	16 800	19 320	2 502	15 %	35 059.9	18 259.9	109 %
Buque B	16 800	16 800	0	0 %	36 453.9	19 653.9	117 %
Buque C	16 800	20 160	3 360	20 %	35 607.9	18 807.9	112 %
Empresa	242 837.2	327 687.5	84 850	35 %	276 845.8	34 008.6	14 %

Cuadro 2.8: Comparación de ingresos.

Observando bien la tabla sacamos las siguientes conclusiones:

- No compartir DCPs nunca mejora los ingresos, cualquiera de los dos enfoques alternativos obtiene mejores resultados tanto para los barcos como la empresa.
- Utilizando el valor de Shapley el beneficio final de la empresa es menor que en el equilibrio bayesiano de Nash pero todos los buques mejoran su rendimiento en más del 100 %.
- Al contrario que con el valor de Shapley, con el equilibrio bayesiano de Nash no todos los buques tienen posibilidad de mejora, esto influye mucho en que no se lleve a cabo en la práctica.

Para no basar los resultados en un único experimento, se realizaron 10 simulaciones variando las posiciones de los DCPs y la posición inicial de los buques aplicando de la misma manera el equilibrio bayesiano de Nash y el valor de Shapley y en todos ellos se llegó a las 3 mismas conclusiones que acabamos de exponer. En el trabajo de Bergantiños et al. [2] aparecen otras tablas de resultados que son de interés.

Como variante final de este estudio vamos a considerar la existencia de DCPs con mayores toneladas de pescado. Esto es debido a que las diferentes ubicaciones, corrientes, estrategias, ...

para colocarlos tienen un impacto directo en la efectividad de estos dispositivos. Vamos a suponer que aquellos especialmente bien colocados recogen 2 toneladas más de pescado, pero realmente esto podría extrapolarse al caso en el que haya muchas más diferencias de peso entre unos y otros.

Como sabemos por definiciones anteriores el beneficio derivado del valor de Shapley se basa en el ahorro conseguido por el menor combustible utilizado al cooperar y en las toneladas que se recogen. Se hizo un experimento teniendo en cuenta estos DCPs mejor localizados (correspondientes sólo a alguno de los atuneros) volviendo a cambiar la parte del valor de Shapley en la que influye la cantidad de atún recogida. Se obtuvo como resultado (respecto de la situación sin cooperación) una mejora de los ingresos para la empresa y los barcos con DCPs mejor localizados (aunque los porcentajes son menores que en el caso de la localización de los DCPs considerada inicialmente), además, aquellos atuneros sin estos DCPs no ven afectadas sus ganancias, por lo que el esfuerzo de los patronos por encontrar mejores localizaciones tiene un impacto directo en su remuneración sin afectar negativamente a aquellos que no lo hacen.

## Capítulo 3

# Conclusiones

Nuestro trabajo ha consistido, fundamentalmente, en la revisión del trabajo de Bergantiños et al. [2], en el que se investiga la posibilidad de mejora en el problema de los buques atuneros tropicales. Ya hay un estudio previo sobre esto (Groba et al. [6]) en el que se apoyan y con el que contrastan sus resultados, pero ahora se propone un reparto más equitativo de los ingresos. El objetivo es comprobar que analizando este problema como uno de cooperación se van a incrementar los beneficios, tanto a nivel de los buques como de la empresa, y hacer el reparto de ingresos de una manera que produzca el interés suficiente para ponerlo en práctica en la realidad. Esto sucede porque al compartir DCPs, disminuye el combustible consumido, lo que se traduce en una reducción de los gastos o aumento de ganancias.

El estudio se ha efectuado primero de manera teórica y luego de forma empírica. Se obtienen primero tres resultados teóricos sobre el valor de Shapley que ilustramos luego mediante un ejemplo. Se observa que la cantidad de combustible utilizada disminuye, lo cual tiene un efecto positivo sobre el medioambiente y las emisiones que genera el sector de la pesca del atún. Además, las ganancias se incrementan teniendo en cuenta la acción de cada barco y al llevar menos combustible hay más espacio de almacenaje y se emplea menos tiempo en la pesca. En conclusión, se obtienen mejoras económicas, medioambientales y temporales.



# Bibliografía

- [1] Aguirre Muniozgueren, A. (2022). *Soluciones Clásicas de Negociación: Nash y Kalai-Smorodinsky*. Grado en Economía. Universidad del País Vasco. Bilbao. [https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/58813/TFG\\_AnneAguirreMuniozgueren.pdf?sequence=1](https://addi.ehu.es/bitstream/handle/10810/58813/TFG_AnneAguirreMuniozgueren.pdf?sequence=1).
- [2] Bergantiños, G., Groba, C. y Sartal, A. (2023). *Applying the Shapley value to the tuna fishery*. European Journal of Operational Research 309 (1), 306-318. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221722010086?via%3Dihub>.
- [3] Casas Méndez, B., Fiestras Janeiro, G., García Jurado, I. y González Díaz, J. (2012). *Introducción a la Teoría de Juegos* (vol. 15). Universidad de Santiago de Compostela: Servizo de Publicacións e Intercambio Científico.
- [4] Chatain, O. (2014). *Cooperative and Non-Cooperative Game Theory*. The Palgrave Encyclopedia of Strategic Management. M. Augier y D. J. Teece (eds.). HEC Paris. [https://works.bepress.com/olivier\\_chatain/9/](https://works.bepress.com/olivier_chatain/9/).
- [5] Fonteneau, A., Chassot, E., y Bodin, N. (2013). *Global spatio-temporal patterns in tropical tuna purse seine fisheries on drifting fish aggregating devices (DFADs): Taking a historical perspective to inform current challenges*. Aquatic Living Resources, 26(1), 37–48. <https://www.alr-journal.org/articles/alr/abs/2013/01/alr130046/alr130046.html>.
- [6] Groba, C., Sartal, A., y Bergantiños, G. (2020). *Optimization of tuna fishing logistic routes through information sharing policies: A game theory-based approach*. Marine Policy, 113, 103795. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0308597X18306699>.
- [7] Groba, C., Sartal, A., y Vázquez, X. H. (2015). *Solving the dynamic traveling salesman problem using a genetic algorithm with trajectory prediction: An application to fish aggregating devices*. Computers and Operations Research, 56, 22–32. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S030505481400269X>.
- [8] Groba, C., Sartal, A., y Vázquez, X. H. (2018). *Integrating forecasting in metaheuristic methods to solve dynamic routing problems: Evidence from the logistic processes of*

- tuna vessels*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 76, 55–66. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0952197618301787>.
- [9] López Ramiro, È. (2016). *An approach to n-person cooperative games*. TFG. Grado en Matemáticas. Universidad de Barcelona. <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/97892/2/memoria.pdf>.
- [10] Maufroy, A., Kaplan, D. M., Bez, N., De Molina, A. D., Murua, H., Floch, L. y Chassot, E. (2016). *Massive increase in the use of drifting fish aggregating devices (dFADs) by tropical tuna purse seine fisheries in the Atlantic and Indian oceans*. ICES Journal of Marine Science, 74(1), 215–225. [https://scholar.google.com/scholar\\_lookup?title=Massive%20increase%20in%20the%20use%20of%20drifting%20fish%20aggregating%20devices%20\(dFADs\)%20by%20tropical%20tuna%20purse%20seine%20fisheries%20in%20the%20Atlantic%20and%20Indian%20oceans&author=A.%20Maufroy&publication\\_year=2016&pages=215-225](https://scholar.google.com/scholar_lookup?title=Massive%20increase%20in%20the%20use%20of%20drifting%20fish%20aggregating%20devices%20(dFADs)%20by%20tropical%20tuna%20purse%20seine%20fisheries%20in%20the%20Atlantic%20and%20Indian%20oceans&author=A.%20Maufroy&publication_year=2016&pages=215-225).
- [11] Ross, D. (Spring 2024 Edition). Game Theory, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward, N. Z. y Uri, N., Metaphysics Research Lab, Stanford University. <https://plato.stanford.edu/entries/game-theory/>.
- [12] Vitoriano, B. y Ramos, A. (2022). *Investigación Operativa*. Materiales Docentes. Universidad Complutense de Madrid. [http://blogs.mat.ucm.es/bvitoriano/wp-content/uploads/sites/69/2022/07/I0\\_Moz2022.pdf](http://blogs.mat.ucm.es/bvitoriano/wp-content/uploads/sites/69/2022/07/I0_Moz2022.pdf).