

revista de **e**EDUCACIÓN

Nº 370 OCTUBRE-DICIEMBRE 2015



Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros

Assessing the didactic – mathematical knowledge of prospective primary school teachers on elementary algebraic reasoning

Juan D. Godino
Miguel R. Wilhelmi
Teresa Neto
Teresa F. Blanco
Ángel Contreras
Carmen Díaz-Batanero
Antonio Estepa
Aitzol Lasa



Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros

Assessing the didactic – mathematical knowledge of prospective primary school teachers on elementary algebraic reasoning

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-370-303

Juan D. Godino
Miguel R. Wilhelmi
Teresa Neto
Teresa F. Blanco
Ángel Contreras
Carmen Díaz-Batanero
Antonio Estepa
Aitzol Lasá

Universidad de Granada

Resumen

Diferentes estudios sugieren la necesidad de incorporar desde edades tempranas el razonamiento algebraico elemental, que en las propuestas curriculares clásicas se inicia en la Educación Secundaria Obligatoria. En este trabajo se analizan los resultados de aplicar un cuestionario de evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental a una muestra de estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria. El objetivo es la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica

⁽¹⁾ Investigación realizada como parte de los proyectos: EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España). También ha sido financiada por el FCT/MEC (Portugal) mediante los fondos nacionales (PIDDAC) y co-financiada por fondos FEDER a través de COMPETE - Programa Operacional Factores de Competitividad, en el ámbito del proyecto PEst-C/CED/UI0194/2013.

elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, que garantice finalmente procesos de estudio efectivos en la educación primaria. La muestra está compuesta por 597 estudiantes de las Universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela en España y de Aveiro en Portugal. En estas universidades, los grupos se constituyen homogéneos *ad extra* y heterogéneos *ad intro*. Se propone pues la selección intencional de grupos completos en cada universidad. El cuestionario consta de 25 ítems que evalúan tanto conocimientos algebraicos como conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en Educación Primaria. El análisis cuantitativo de los resultados ha permitido explorar las características psicométricas del instrumento (índices de dificultad, discriminación, fiabilidad y validez). La comparación de los programas de formación en matemáticas y su didáctica entre las distintas universidades participantes revela el énfasis psicopedagógico del Plan de estudios vigente y muestra una formación disciplinar deficiente, que, en particular, no incluye el bloque de razonamiento algebraico. Los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

Palabras clave: formación de maestros, evaluación, conocimiento algebraico, conocimiento didáctico, estudio comparado.

Abstract

Different studies suggest the need to introduce elementary algebraic reasoning at an early age, which in current curricular proposals is only taught in Secondary Education. In this paper, the responses to a questionnaire evaluating prospective primary school teachers' didactic-mathematical knowledge regarding elementary algebraic reasoning are analysed. The aim is to provide a diagnosis of prospective primary school teachers' knowledge regarding elementary algebra and its teaching. The results will be used to develop a training programme for teachers, which ultimately ensures an effective study process in primary education. The sample consisted of 597 students from the Universities of Granada, Jaén, Public University of Navarra, Santiago de Compostela in Spain, and the University of Aveiro in Portugal. The questionnaire comprises 25 items that assess algebraic and pedagogical content knowledge in primary education. Taking into account that in these universities the groups are *ad extra* homogeneous and *ad intro* heterogeneous, entire groups were intentionally selected at each university. The quantitative analysis of the results enabled the estimation of the instrument psychometric properties (difficulty and discrimination indexes, reliability and validity). The comparison of the training programmes in mathematics and the

way in which the subject is taught in the different universities reveals that current curriculum emphasizes on the psycho-pedagogical area. It also reveals an unsatisfactory disciplinary training that does not include algebraic reasoning. Results show significant differences among universities in the participants' level of knowledge in the various didactic - mathematical knowledge components. We conclude that it is necessary to improve the teachers' education programmes so they can progressively foster their pupils' algebraic reasoning. To achieve this goal these programmes should include specific training activities on elementary algebraic reasoning.

Keywords: primary school teachers, assessment, algebraic knowledge, didactical knowledge, comparative study

Introducción

La formación matemática y didáctica de los profesores es un campo de investigación y desarrollo que se viene consolidando en educación matemática por ser un factor clave en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En España, esta formación tiene lugar en las Facultades de Ciencias de la Educación y está condicionada por un contexto normativo cambiante y por la escasez de recursos humanos, tecnológicos y temporales. La implantación del Grado en Maestro en Educación Primaria (GMEP), en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), y la relativa consolidación de la investigación en los departamentos de didácticas específicas están abriendo, no obstante, nuevas posibilidades para la mejora de los planes y programas formativos de los maestros.

En este artículo se presentan resultados de un proyecto de investigación sobre "Evaluación y desarrollo de conocimientos matemáticos y didácticos en la formación inicial en Magisterio en el campo del razonamiento algebraico elemental". Se trata de aportar nuevos conocimientos, propuestas instruccionales y recursos metodológicos para la mejora de la formación inicial en matemáticas y su didáctica para la Educación Primaria, teniendo en cuenta el contexto educativo español y la perspectiva de los nuevos planes de estudio.

Nuestro trabajo tiene una clara relación con el estudio TEDS-M² (Estudio internacional sobre formación inicial en matemáticas de los maestros) (Tatto et al., 2008; INEE, 2012; Sanz & Martín, 2014), aunque restringido a un aspecto específico de la formación matemático-didáctica de los futuros maestros, el “razonamiento algebraico elemental”, y a una muestra de cinco instituciones universitarias de formación de profesores, cuatro españolas (Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago) y una portuguesa (Aveiro).

El razonamiento algebraico, como herramienta de modelización matemática, es aplicable a los distintos bloques de contenido (aritmética, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad); asimismo, los procesos de generalización y simbolización y las nociones de relación, variable, ecuación y función, constituyen herramientas imprescindibles en el trabajo matemático, tanto profesional, como en la matemática escolar. En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) se propone el álgebra desde Preescolar como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad.

También en las nuevas orientaciones curriculares de España (MECD, 2014) se señala la conveniencia de desarrollar el pensamiento algebraico en Educación Primaria; en concreto, se indica que hay que “*conseguir que todo el alumnado, al acabar la Educación Primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones*” (p. 19387). Así, la iniciación al álgebra forma ya parte de los núcleos de continuidad, es decir, “*aquellos aspectos centrales de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que presumiblemente serán estables en el tiempo*” (Wilhelmi, 2014, 33).

Ahora bien, si la matemática escolar debe contemplar el álgebra como un nuevo contenido trasversal con los demás bloques temáticos, los

⁽²⁾ TEDS-M ha sido el primer estudio comparativo a nivel internacional y a gran escala, en educación superior, centrado en la formación inicial de los profesores de matemáticas de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria. Los datos de TEDS-M fueron recogidos en 2008, por lo que la situación que describen se refiere a los planes de estudio y condiciones existentes en ese momento. Con posterioridad a esa fecha se han producido cambios importantes en los planes de estudios universitarios españoles para la formación de maestros.

profesores deben participar de esta nueva visión ampliada y adquirir las competencias básicas en el razonamiento algebraico elemental. En trabajos previos (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014) hemos presentado unos primeros resultados de este componente del proyecto orientado al estudio de los problemas didácticos que plantea la formación en álgebra y su didáctica en GMEP.

En Godino et al. (2015) presentamos el diseño de un cuestionario para evaluar aspectos relevantes de los conocimientos matemáticos y didácticos (CDM) de los maestros en formación sobre razonamiento algebraico elemental (RAE). La aplicación del cuestionario CDM-RAE a muestras representativas de maestros en formación permite conocer efectivamente el estado de sus conocimientos didáctico – matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental y disponer de criterios para diseñar acciones formativas basadas en dicho estado.

En este trabajo se describen los conocimientos matemáticos y didácticos sobre RAE de los estudiantes del GMEP y se relacionan con los programas de formación que están recibiendo. Es decir, se afronta el problema de diagnosticar la competencia matemática y didáctica en RAE de los futuros maestros según la enseñanza programada.

Para ello, tras esta introducción general, se describe el marco teórico en el que se basa la construcción del cuestionario, así como las variables tenidas en cuenta. A continuación se describe el contexto y la muestra de estudiantes a los que se aplica el cuestionario. Luego, se presentan los resultados globales y parciales del estudio cuantitativo, indicando algunas propiedades psicométricas del instrumento y distinguiendo los conocimientos algebraicos y didácticos. Finalmente, se sintetizan las conclusiones y se discuten las implicaciones del estudio.

Marco teórico

El marco teórico en el que se apoya esta investigación tiene dos componentes: 1) Naturaleza del razonamiento algebraico en educación primaria (Carraher & Schliemann, 2007; Cai & Knuth, 2011); y 2) Conocimiento didáctico – matemático del profesor de matemáticas (Godino, 2009). Estos componentes fundamentan el instrumento de evaluación usado en esta investigación.

Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2014) proponen un modelo de RAE estructurado en cuatro niveles de algebrización. Este modelo tiene en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0, no se incorpora en la actividad matemática ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico. Los niveles intermedios 1 y 2, que suponen unos niveles progresivos de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica, aunque retienen aspectos aritméticos.

En cuanto a la modelización adoptada para el conocimiento³ didáctico – matemático del profesor se tiene en cuenta dos tipos de variables: contenido algebraico y contenido didáctico. Para la variable *contenido algebraico* se consideran tres valores o categorías, en las cuales a su vez se pueden distinguir diversas subcategorías:

- *Estructuras* (relación de equivalencia; propiedades de las operaciones, ecuaciones, ...)
- *Funciones* (patrones aritméticos, patrones geométricos; función lineal, afín, cuadrática, ...)
- *Modelización* (problemas de contexto resueltos mediante el planteo de ecuaciones o relaciones funcionales)

Para la variable *contenido didáctico* (referido a un contenido algebraico, sea propio del nivel de primaria o más avanzado) se consideran las categorías siguientes:

- *Faceta epistémica*: reconocimiento de objetos y procesos algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades; generalización, modelización); reconocimiento de niveles de algebrización.
- *Faceta cognitiva*: significados personales de los alumnos (conocimiento, comprensión y competencia sobre contenidos algebraicos elementales); conflictos de aprendizaje sobre objetos y procesos algebraicos.
- *Faceta instruccional*: recursos para la enseñanza del álgebra en primaria (situaciones – problema, medios técnicos), y su adecuación al currículo escolar.

⁽³⁾ En este trabajo usamos la noción de conocimiento en un sentido ampliado, incluyendo comprensión y competencia sobre los temas abordados.

Método

Instrumento

El instrumento para la recogida de datos es el cuestionario CDM-RAE (ver anexo) que está constituido por un conjunto de 10 tareas, cada una de las cuales está formada por ítems que evalúan aspectos del contenido algebraico y del contenido didáctico – algebraico. El proceso de construcción de dicho cuestionario, la discusión de su validez y fiabilidad ha sido realizado en Godino et al. (2015).

En la tabla I se presenta la clasificación de los distintos ítems del cuestionario según las categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre RAE. Este instrumento no pretende evaluar todas las categorías de conocimientos didácticos y matemáticos propuestas por el modelo CDM-RAE, ya que está diseñado para recabar información escrita de los estudiantes en un tiempo limitado (2h aproximadamente).

Se debe tener en cuenta que las categorías de CDM - RAE no son disjuntas o excluyentes; así, un mismo ítem puede estar en más de una categoría. Por ejemplo, el ítem 10a), “Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones”, involucra al contenido “funciones”, pero también a “modelización”. Asimismo, se pide que el estudiante enuncie una variante de problema con un fin instruccional específico, de tal manera que el futuro docente debe movilizar conocimiento sobre un “recurso instruccional”. Aún más, el ítem también involucra un conocimiento especializado del contenido matemático en sí mismo, esto es, la faceta epistémica en sus componentes situacional y regulativo (concepto de función y sus representaciones). Por esta razón, se incluyen algunos ítems en más de una celda en la tabla I.

TABLA I. Contenidos evaluados por cada ítem del cuestionario

CONTENIDO DIDÁCTICO	CONTENIDO ALGEBRAICO					
	Estructuras (E)		Funciones (F)		Modelización (M)	
	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado
Epistémico (Niveles de algebraización)	<u>EPI-E1</u> 2b; 4b	<u>EPI-E2</u> 7b;7c	<u>EPI-F1</u> 10b	<u>EPI-F2</u> 5c; 6b	<u>EPI-M1</u>	<u>EPI-M2</u> 9b
Cognitivo (Significados personales)	<u>COG-E1</u> 1a; 1b 2a; 3b; 4c	<u>COG-E2</u>	<u>COG-F1</u> 6c	<u>COG-F2</u>	<u>COG-M1</u>	<u>COG-M2</u>
Instruccional (Situaciones y recursos)	<u>INS-E1</u> 8b	<u>INS-E2</u> 8b	<u>INS-F1</u> 8b	<u>INS-F2</u> 5b; 8b; 10a	<u>INS-M1</u> 9c); 10a	<u>INS-M2</u> 8b
Contenido algebraico (solo conocimiento común o avanzado)	<u>ALG-E1</u> 4a; 3a	<u>ALG-E2</u> 7a	<u>ALG-F1</u> 5a; 10b;	<u>ALG-F2</u> 6a; 8a; 9a	<u>ALG-M1</u>	<u>ALG-M2</u> 9a

Fuente: Godino et al. (en prensa)

Variables dependientes

El primer foco de atención consiste en definir la variable cuantitativa “grado de corrección de las respuestas a los 25 ítems del cuestionario”. Se ha considerado conveniente valorar positivamente las respuestas parcialmente correctas, por lo que la puntuación asignada a cada ítem ha sido:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta.
- 1 punto si es parcialmente correcta,
- 2 puntos si es correcta.

Además de la variable “puntuación total”, suma de puntuaciones en el conjunto de los 25 ítems (0 a 50 puntos), se definen variables cuantitativas relativas al “conocimiento matemático común y avanzado” y al “contenido didáctico”, que representan la suma por filas o columnas de las variables dadas en la tabla I.

a) Relativas al conocimiento matemático común y avanzado

A1_ALG: evalúa conocimientos de “álgebra” que son propios del nivel de educación primaria (conocimiento común) o de los primeros cursos

de secundaria (conocimiento avanzado). Esta escala incluye los ítems, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a, 10b.

A2_EST: evalúa conocimientos relacionados con propiedades de las estructuras algebraicas que se usan en la resolución de ecuaciones. Incluye los ítems, 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c, 7a, 7b, 7c, 8b.

A3_FUN: evalúa conocimientos relacionados con patrones geométricos y funciones. Incluye los ítems, 5a, 5b, 5c, 6a, 6c, 8a, 8b, 9a, 10a, 10b.

A4_MOD: evalúa conocimientos relacionados con la modelización algebraica (usando ecuaciones o funciones). Incluye los ítems, 8b, 9a, 9b, 9c, 10a.

b) Relativas al contenido didáctico

CD1_EPI: evalúa conocimientos relativos a la faceta epistémica del CDM-RAE, incluyendo los ítems, 2b, 4b, 5c, 6b, 7b, 7c, 9b, 10b.

CD2_COG: evalúa conocimientos relativos a la faceta cognitiva, incluyendo los ítems, 1a, 1b, 2a, 3b, 4c, 6c.

CD3_INS: evalúa conocimientos relativos a la faceta instruccional, incluyendo los ítems, 5b, 8b, 9c, 10a.

Las distintas variables dependientes consideradas se componen de un número de ítems diferente que puntúan 0, 1 o 2, por lo que su rango de variación es distinto. Para facilitar la comparación e interpretación de las puntuaciones obtenidas hemos hecho un cambio de escala en todas ellas reduciéndolas al intervalo [0, 10].

Para asegurar la fiabilidad en el proceso de codificación de las respuestas de los estudiantes se elaboró un protocolo de criterios a seguir con ejemplos ilustrativos de los tipos de respuestas; asimismo se discutieron conjuntamente algunos casos de dudosa interpretación.

Variables explicativas

Con el fin de interpretar los resultados de la evaluación de los conocimientos de los estudiantes se tienen en cuenta las siguientes variables explicativas:

- Tasa de admisión al Grado en Maestro en Educación Primaria (razón entre el número de plazas ofertadas y el número de solicitudes de admisión).

- Nota de corte en el examen de selectividad para ser admitido.
- Momento en el que se aplicó la prueba: 1: se aplicó al comienzo de la formación; 2: se aplicó al final de la formación.

Descripción del contexto y la muestra

La población de interés en esta investigación son los estudiantes españoles del Grado en Maestro en Educación Primaria (GMEP) (MECD, 2007). El cuestionario ha sido aplicado a varios grupos de estudiantes de las universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela, que cursan el GMEP bajo los nuevos planes de estudios. También ha sido aplicado a una muestra de estudiantes de la universidad de Aveiro, lo cual permite hacer un estudio comparado. Tanto en España como en Portugal los planes de estudios universitarios han sido revisados en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES).

El número de créditos asignados al área de Didáctica de la Matemática en las directrices curriculares españolas es de 18 (Plan 2010), que son los que se imparten en las universidades de Jaén, Pública de Navarra y Santiago; en Granada se imparten 22. A pesar de que la carrera de Magisterio ha pasado de 3 a 4 años y que, por tanto, el número de créditos totales ha pasado de 180 a 240, el perfil de estos estudios continúan teniendo un fuerte componente psico-pedagógico. La moda del porcentaje de créditos asignados a la formación en matemáticas y su didáctica es del 7,5%, que sigue siendo prácticamente el mismo que en el Plan de 1991-2010 (6,7% según el estudio de Rico, Gómez & Cañadas, 2014).

No es posible incluir en este artículo un análisis detallado de los contenidos de matemáticas y su didáctica impartidos en las cinco universidades similar al realizado por Rico et al. (2014), pero sí hemos constatado que el bloque de álgebra no figura de manera explícita en los programas de las correspondientes asignaturas. Se pone el énfasis en el estudio de números, medida, geometría y análisis de datos. En la Universidad de Aveiro, a pesar de que la carrera está organizada en 3 cursos se incluyen varias materias que contemplan profundizar en la formación matemática de los futuros maestros, pero el conocimiento algebraico se trata de manera escueta en el marco de la materia Didáctica de la Matemática y Tecnología Educativa.

En las Universidades de Granada y Aveiro el cuestionario se aplicó el último curso en que los estudiantes reciben formación en matemáticas y su didáctica. En las restantes universidades el cuestionario se aplicó al comienzo de la formación matemática, pero dado que posteriormente no se contempla una formación explícita sobre RAE los resultados son indicativos en todos los casos del estado de sus conocimientos profesionales sobre RAE con el cual se enfrentarán al ejercicio de la profesión.

El cuestionario se aplicó a grupos de clase completos ya que la finalidad era, no solo recabar información evaluativa sobre el estado de los conocimientos de los estudiantes, sino también usar la actividad de resolución de las tareas como dispositivo para una acción formativa posterior. El informe aquí presentado se refiere solo a los resultados evaluativos.

En la tabla II mostramos el tamaño de muestra en cada universidad y los valores de tres posibles variables explicativas de las diferencias en las puntuaciones entre las universidades.

TABLA II. Distribución de la muestra según universidades y variables explicativas

Universidad	Frecuencia	Porcentaje	Nota de corte		Tasa admisión	Momento de aplicación
			Media 2011-2014	Desviación típica		
Aveiro	66	11,06	6,542	0,227	0,191	2
Granada	91	15,24	5,920	0,146	0,333	2
Jaén	230	38,53	5,000	0,000	0,531	1
Pública de Navarra	129	21,61	7,070	0,233	0,316	1
Santiago	81	13,57	6,740	0,289	0,158	1
TOTAL	597	100,00				

Fuente: Elaboración propia. Los datos relativos a la nota de corte y el cupo de acceso han sido extraídos de los siguientes sitios: Aveiro (Direcção Geral de Ensino Superior, DGES): <http://www.acessoensinosuperior.pt/detcursopi.asp?codc=9853&code=0300> Granada – Jaén (Junta de Andalucía): <http://www.juntadeandalucia.es/economiainnovacionyciencia/sguit> Pública de Navarra (Universidad Pública de Navarra): <http://www.unavarra.es/estudios/acceso-y-matricula/grados/notas-de-corte> Santiago (Comisión Interuniversitaria de Galicia): <http://ciug.cesga.es/notascorte.html>

Análisis de datos

Para el análisis de los ítems se han aplicado técnicas estadísticas descriptivas (promedios, dispersiones, gráficos de cajas). Tras la

comprobación de la normalidad de las puntuaciones totales y de las subescalas se han aplicado pruebas inferenciales paramétricas para la comparación de grupos que incluye el Análisis de la Varianza. Finalmente se realiza un análisis factorial para explorar la estructura de las respuestas de los participantes a los ítems.

Resultados del estudio cuantitativo

En este apartado se estudian, en primer lugar, algunas características psicométricas del cuestionario CDM-RAE. Este estudio, que complementa al realizado en Godino et al. (2015), es necesario ya que el tamaño de la muestra es notablemente superior (597 estudiantes) y permite ajustar mejor algunos de los indicadores. Seguidamente analizamos los resultados obtenidos sobre el nivel de conocimientos sobre álgebra y didáctica del álgebra, relacionando dichos conocimientos con las oportunidades de aprendizaje ofrecidas en las distintas universidades.

Algunas propiedades psicométricas del instrumento

Análisis de ítems

La tabla III incluye los índices de dificultad de los ítems del cuestionario calculados para toda la muestra. Este índice no es el porcentaje de respuestas correctas ya que se han asignado puntuaciones de 0, 1 y 2, según el grado de corrección de las respuestas. Se ha calculado la media de puntuaciones de cada ítem y para facilitar la interpretación se ha transformado dicha puntuación media al intervalo [0 – 100]. Como se indica en la tabla III la puntuación media ha sido de 32.5 (error típico, 1.43) (en una escala de 0 a 100), lo cual indica que dichos conocimientos se pueden calificar de insuficientes. De hecho, únicamente 5 ítems tienen un índice de dificultad superior a 50, contra los 21 con índice inferior a este nivel; además, 11 ítems tienen un índice de dificultad inferior a 30 (al menos 7 de cada 10 respuestas es incorrecta).

TABLA III. Índice de dificultad de los ítems del cuestionario CDM-RAE ($n=597$)

ITEM. Descriptor	Índice de dificultad		Discriminación: Diferencia de medias ($P_{33} - P_{66}$)	
	M	Error típico	t	p
1a. Igualdad resultado aritmético. Explicación	80.7	1.40	6.08	.000
1b. Igualdad resultado aritmético. Interpretación	55.4	1.90	11.64	.000
2a. Igualdad equivalencia. Explicación	69.0	1.64	8.39	.000
2b. Igualdad equivalencia. Propiedades	15.5	1.20	6.08	.000
3a. Suma tres números. Generalización	48.0	1.61	10.08	.000
3b. Suma tres números. Tipo de justificación	30.7	1.73	8.44	.000
4a. Suma incompleta. Resolución y explicación	42.3	1.95	10.64	.000
4b. Suma incompleta. Solución algebraica	3.8	0.65	4.16	.000
4c. Suma incompleta. Solución escolar	10.2	1.14	5.27	.000
5a. Patrón hexagonal. Dos términos	57.6	1.66	8.84	.000
5b. Patrón hexagonal. Generalización algebraica	15.0	1.25	7.98	.000
5c. Patrón hexagonal. Tipos de objetos algebraicos	6.1	0.87	5.39	.000
6a. Patrón cuadrados. Solución general	42.4	1.76	14.35	.000
6b. Patrón cuadrados. Técnicas posibles	30.8	1.60	14.14	.000
6c. Patrón cuadrados. Solución escolar	31.9	1.58	11.63	.000
7a. Coste comida. Resolución	32.7	1.84	10.86	.000
7b. Coste comida. Solución aritmética	12.1	1.30	7.63	.000
7c. Coste comida. Solución algebraica	10.0	1.17	7.24	.000
8a. Interpretación de expresiones	22.6	1.27	11.27	.000
8b. Enunciado de problemas	20.9	1.30	10.16	.000
9a. Gráficas funciones. Justificación	75.0	1.54	8.29	.000
9b. Gráficas funciones. Reconocimiento objetos	30.5	1.41	10.79	.000
9c. Gráficas funciones. Currículo	43.0	1.52	6.49	.000
10a. Funciones lineales. Enunciados	16.2	1.35	8.46	.000
10b. Funciones lineales. Reconocimiento álgebra	10.6	1.10	7.61	.000
DIFICULTAD MEDIA	32.5	1.43	35.85	.000

Fuente: Elaboración propia

En la segunda columna se incluye el índice de discriminación de los ítems como la diferencia de medias entre el grupo de bajo rendimiento (percentil 33) y el grupo de rendimiento superior (percentil 66) resultando todos los ítems con una adecuada discriminación ($p < .001$).

Fiabilidad y validez

El coeficiente de fiabilidad obtenido para la escala (Alfa de Cronbach), aplicada a la muestra de 597 estudiantes, ha sido de .783 ($> .7$), que es *acceptable* (Hair, Anderson, Tatham & Black, 2010; George & Mallery, 2003).

Para obtener un indicio de validez de constructo del instrumento, se realiza un análisis factorial de componentes principales y *rotación varimax* (Kaiser, 1958) tras la verificación de la adecuación de los datos a este tipo de análisis. Se obtiene una solución de 8 factores. En la tabla 4 se presenta la matriz de componentes rotados, en la que se han suprimido aquellas cargas factoriales por debajo de .33 para una mejor interpretación de los resultados.

Cada factor está ligado a los ítems que componen cada tarea, lo cual refuerza la idea de la estrecha relación existente entre los conocimientos matemáticos y los conocimientos didácticos específicos implicados en la actividad matemática correspondiente. Se ha puesto de manifiesto que existe una correspondencia alta entre factor y tarea en los 8 factores, excepto en el 4 y en el 5.

El factor 4 concuerda básicamente con la tarea 4 (patrón hexagonal) con excepción del ítem 2b que también está incluido en este factor; el ítem 2b pide identificar las propiedades implicadas en la igualdad usada como equivalencia. El componente 5 ha agrupado ítems correspondientes a tres tareas: tarea 8 (interpretación de expresiones algebraicas y enunciado de problemas), tarea 3 (suma de tres números consecutivos, tipos de justificación que pueden dar los estudiantes), ítem 2a (explicación del uso de la igualdad como equivalencia). Una explicación posible de la agrupación es que en los tres ítems (2a, 3 y 8) el estudiante debe analizar una tarea, justificar una respuesta o interpretar un significado, es decir, tareas metamatemáticas que suponen no sólo un elevado grado de abstracción sino también de recursos didácticos para el análisis de la actividad matemática involucrada.

El resto de factores pueden ser descritos como sigue:

- Factor 1: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la actividad matemática de reconocimiento de patrones geométricos.
- Factor 2: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la modelización de problemas con estructura aritmético – algebraica.
- Factor 3: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la interpretación de funciones lineales.
- Factor 6: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la modelización funcional lineal.
- Factor 7: Conocimientos didácticos – matemáticos ligados al uso de la igualdad como equivalencia.

- Factor 8: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados al reconocimiento de propiedades aritmético – algebraicas del sistema de numeración decimal.

Estos resultados apoyan la idea de que la preparación en didáctica de las matemáticas debe ser específica de los contenidos matemáticos, mediante una *didáctica en acción* (Wilhelmi, 2005) que parta de las necesidades en el progreso matemático y didáctico de los futuros docentes.

TABLA IV. Matriz de componentes rotados

ÍTEM. Descriptor	Componente							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1a. Igualdad resultado aritmético. Explicación							,842	
1b. Igualdad resultado aritmético. Interpretación							,719	
2a. Igualdad equivalencia. Explicación					,364		,474	
2b. Igualdad equivalencia. Propiedades				,463				
3a. Suma tres números. Generalización					,505			
3b. Suma tres números. Tipo de justificación					,700			
4a. Suma incompleta. Resolución y explicación								,678
4b. Suma incompleta. Solución algebraica								,647
4c. Suma incompleta. Solución escolar								,708
5a. Patrón hexagonal. Dos términos				,514				
5b. Patrón hexagonal. Generalización algebraica				,802				
5c. Patrón hexagonal. Tipos de objetos algebraicos				,750				
6a. Patrón cuadrados. Solución general	,770							
6b. Patrón cuadrados. Técnicas posibles	,806							
6c. Patrón cuadrados. Solución escolar	,791							
7a. Coste comida. Resolución		,824						
7b. Coste comida. Solución aritmética		,771						
7c. Coste comida. Solución aritmética		,687						
8a. Interpretación de expresiones					,521			
8b. Enunciado de problemas					,541			
9a. Gráficas funciones. Justificación			,712					
9b. Gráficas funciones. Reconocimiento objetos			,700					
9c. Gráficas funciones. Currículo			,809					
10a. Funciones lineales. Enunciados						,844		
10b. Funciones lineales. Reconocimiento álgebra						,844		

Método de extracción: Análisis de componentes principales. Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser. Fuente: Elaboración propia

Análisis comparativo de los conocimientos de los estudiantes

En tabla V incluimos las medias y desviaciones típicas de la variable “Puntuación total”, así como el tamaño de muestra en las distintas universidades. Para facilitar la comparación e interpretación de la puntuación total y las puntuaciones parciales hemos cambiado la escala al intervalo [0, 10]. En la figura I comparamos las distribuciones de frecuencias de la puntuación total en las cinco universidades mediante gráficos de cajas.

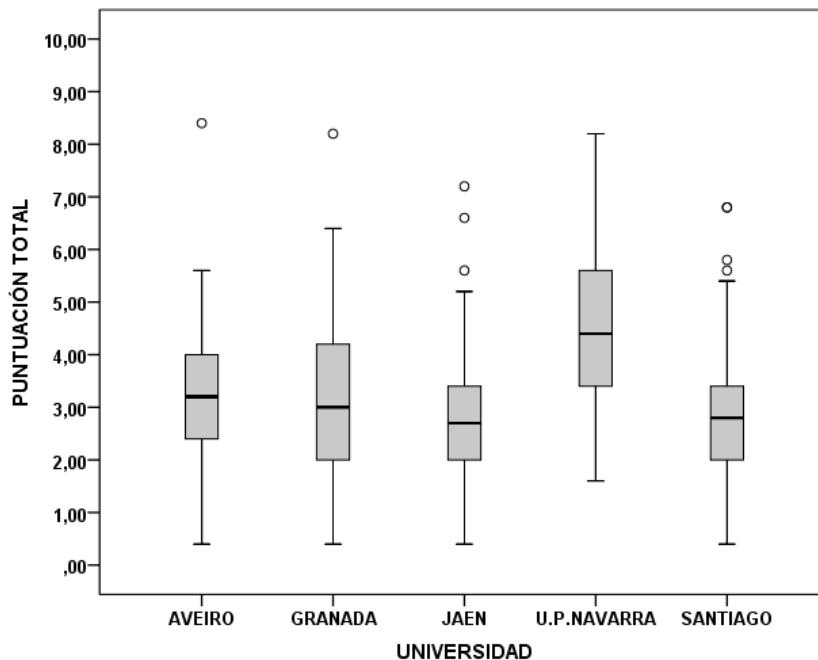
TABLA V. Puntuaciones medias y desviaciones típicas de la puntuación total según universidades

Universidad	n	M	DT
Aveiro	66	3.17	1.44
Granada	91	3.25	1.34
Jaén	230	2.77	1.08
Pública de Navarra	129	4.43	1.46
Santiago	81	2.85	1.32
TOTAL	597	3.25	1.43

Fuente: Elaboración propia

En todos los casos la puntuación media es inferior a 5. Sin embargo, existen diferencias significativas en las puntuaciones medias de las distintas universidades ($F= 37.05$, $p=.000$) destacando la Universidad Pública de Navarra (figura I). Además, a diferencia del resto de universidades, en la Pública de Navarra no se identifican valores atípicos superiores y, por lo tanto, si se suprimieran éstos en las otras universidades las diferencias de medias se acrecentarían.

FIGURA I. Comparación de la puntuación total mediante gráficos de cajas



Fuente: Elaboración propia

El coeficiente de correlación entre las puntuaciones medias de las universidades y la nota de corte para el acceso a la respectiva Facultad es de .27 mientras que con la tasa de admisión es de -.07. En ambos casos la relación no es estadísticamente significativa al nivel de confianza del 95%. Tampoco se han encontrado diferencias estadísticas significativas en las puntuaciones medias entre el grupo de sujetos que respondieron al cuestionario en el último curso de su formación ($M = 3.20$; $DT = 1.45$; Aveiro y Granada) y los que lo hicieron al comienzo ($M = 3.26$; $DT = 1.39$; Jaén, Pública de Navarra y Santiago). La prueba t de comparación de muestras independientes resultó ser no significativa ($t = 0.46$; $p = .644$). Una explicación plausible para este resultado es que los contenidos algebraicos no son estudiados de manera explícita en ninguna de las universidades.

Análisis de las variables parciales: conocimientos algebraicos y didácticos

El análisis de la varianza para estudiar las diferencias de medias en las variables puntuación total y las variables parciales entre las diferentes universidades (todas ellas transformadas al intervalo [0, 10]), permite afirmar que las diferencias son significativas en todas las variables, ya que el *p*-valor es.000 en todos los casos (tabla VI).

TABLA VI. Estadísticos descriptivos y comparación de medias entre las universidades

Variable	M	DT	F	p
A1_ALG: Conocimiento común y avanzado en algebra	4.14	1.91	18.54	.000
A2_EST: Conocimiento de ecuaciones y relaciones	3.32	1.60	33.78	.000
A3_FUN: Conocimiento sobre funciones	2.98	1.73	26.77	.000
A4_MOD: Conocimiento sobre modelización	3.71	2.24	8.54	.000
CD1_EPI: Conocimiento sobre aspectos epistémicos	1.49	1.42	29.23	.000
CD2_COG: Conocimiento sobre aspectos cognitivos	4.63	2.05	26.56	.000
CD3_INS: Conocimiento sobre aspectos instruccionales	2.38	2.00	21.84	.000
TOTAL: Puntuación total	3.25	1.44	37.05	.000

Fuente: Elaboración propia

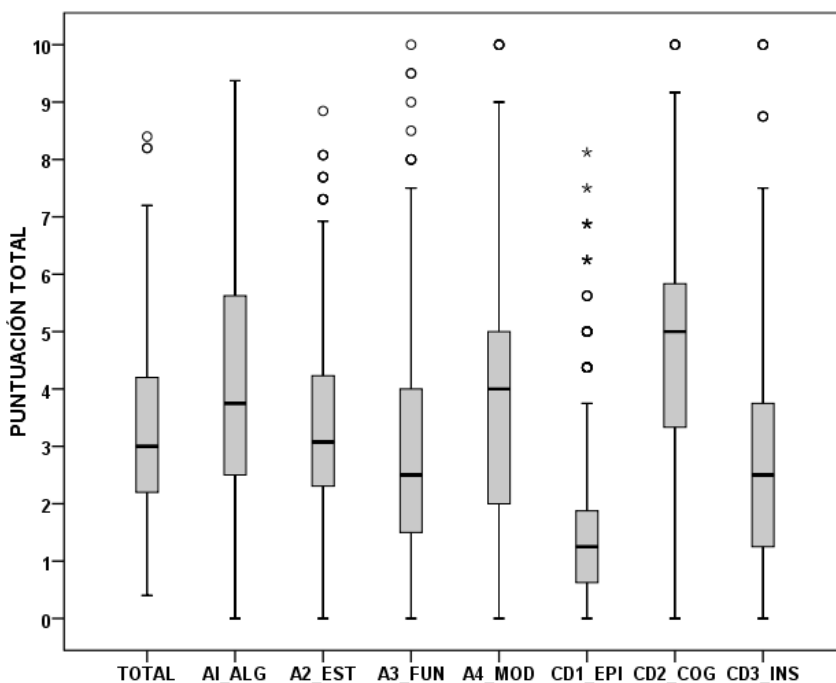
Aunque todas las puntuaciones son inferiores a 5 destaca las dificultades encontradas por los estudiantes para responder a las cuestiones de índole epistémica (CD1_EPI), esto es, aquellas que requieren un conocimiento especializado del contenido algebraico.

En la figura II mostramos las distribuciones de frecuencias mediante diagramas de cajas de la puntuación total junto con las 7 variables parciales.

Se observa en la figura II que en todas las variables, excepto en A1_ALG, hay valores atípicos. Si se suprimieran de los cálculos los valores de los promedios serían incluso inferiores de los reseñados en la tabla IV. Este hecho refuerza la tesis de la deficiencia de los conocimientos didáctico-matemáticos y la necesidad de acciones concretas para subsanar las deficiencias evidentes.

La figura III nos ayuda a analizar las diferencias en los conocimientos de los estudiantes según las variables parciales construidas. Sobre el mismo gráfico se representan las medias de las puntuaciones obtenidas en las 7 variables según las cinco universidades. Se puede observar que la tendencia en cada universidad se mantiene, si una universidad sube al pasar de una variable a otra las demás también suben o si alguna universidad baja al pasar de una variable a otra las otras también bajan, ya que se cortan muy pocas veces la línea poligonal del gráfico de línea de cada universidad, hecho que le da coherencia y rigor al estudio.

FIGURA II. Comparación de las distribuciones de las distintas variables mediante gráficos de cajas



Fuente: Elaboración propia

Asimismo, se observa en relación a estas variables el comportamiento diferenciado en la Universidad Pública de Navarra que tiene una puntuación superior en todas, sin intersección alguna con el diagrama de

líneas del resto de universidades. Este hecho es consistente con la comparación de la puntuación total mostrada mediante los gráficos de cajas, contribuyendo a la validez interna de los resultados.

Análisis de los conocimientos de índole algebraica

El análisis de los conocimientos de índole algebraica lo hacemos teniendo en cuenta las variables:

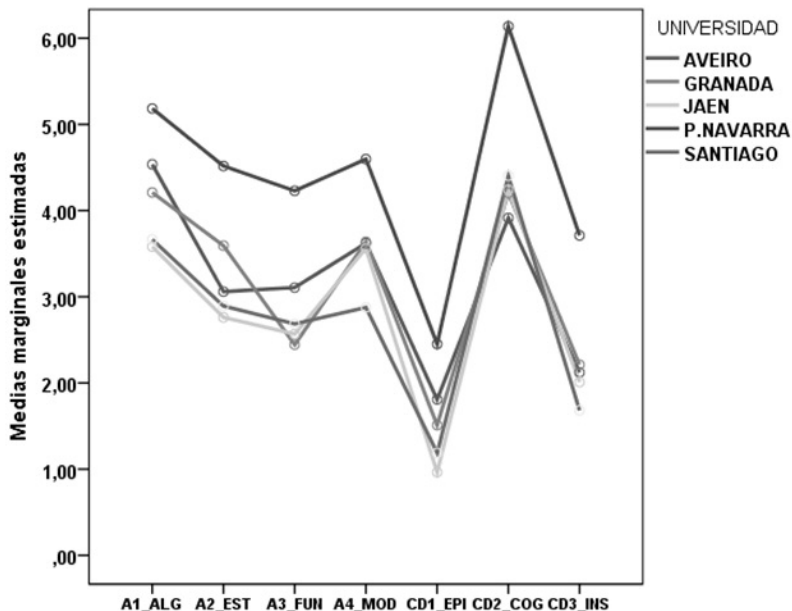
- A1_ALG: Conocimiento común y avanzado en algebra.
- A2_EST: Conocimientos sobre ecuaciones y relaciones.
- A3_FUN: Conocimientos sobre funciones.
- A4_MOD: Conocimientos sobre modelización.

En todas estas variables se obtiene una puntuación media insuficiente. La que mejor resultado ha obtenido ha sido A1_ALG (4.14 puntos) probablemente debido a que los ítems que la componen son de tipo procedimental, donde el estudiante debe realizar una serie de cálculos y ofrecer un resultado.

Le sigue A4_MOD (3.71 puntos), donde los ítems que componen esta variable se refieren a modelos sencillos estudiados en bachillerato, es la que está más dispersa (mayor desviación típica), aunque de manera uniforme (tiene pocos valores atípicos).

La siguiente en puntuación es A2_EST (3.32 puntos). Esta variable comprende las estructuras, relaciones y propiedades del armazón matemático, que no son dominadas por todos los estudiantes. Por último, la que ha obtenido menor puntuación ha sido A3_FUN (2.18 puntos), que tiene muchos valores atípicos por arriba, lo que permite afirmar que algunos estudiantes la dominan, mientras la mayoría, tienen carencias constatadas.

FIGURA III. Medias de las puntuaciones en las variables parciales



Fuente: Elaboración propia

Análisis de los conocimientos de índole didáctica

El análisis de los conocimientos de índole didáctica lo hacemos teniendo en cuenta las variables:

- CD1_EPI: Conocimientos sobre aspectos epistémicos.
- CD2_COG: Conocimientos sobre aspectos cognitivos.
- CD3_INS: Conocimientos sobre aspectos instruccionales.

Las puntuaciones medias en estas variables también pueden ser calificadas de insuficientes. La que mejor puntuación ha tenido es (CD2_COG (4.63 puntos), siendo la segunda en puntuación si tenemos en cuenta las 7 variables. Está distribuida muy uniformemente, ya que

tiene muy pocos valores atípicos, el 50% de los estudiantes están entre una puntuación (4-6) y el otro 50% se distribuyen uniformemente en los dos bigotes (gráfico de la caja).

Las otras dos variables son las que han obtenido la puntuación más baja, aun considerando las 7 variables analizadas. De ellas la puntuación más baja ha sido la de CD1_EPI (1.49 puntos). Si observamos el gráfico de la caja el 75% de los estudiantes tienen una puntuación inferior a 2, quedando el otro 25% entre 2 y 8, lo que proporciona muchos valores atípicos. Una posible explicación puede ser que las preguntas de los ítems que la componen no son usuales en la educación preuniversitaria, por lo que los estudiantes no tienen costumbre a responder a este tipo de cuestiones.

Por último, CD3_INS (2.38 puntos) es la segunda en las puntuaciones inferiores, indica una falta acusada de práctica instruccional en nuestros estudiantes. El 75% de los estudiantes tiene una puntuación inferior a 4, sin embargo el 25% restante tiene puntuación entre 6 y 10 con pocos valores atípicos. Es reseñable destacar aquí que no se perciben diferencias teniendo en cuenta el momento de realización del cuestionario en las distintas universidades, lo que sugiere una deficiencia no paliada a través de la formación.

Síntesis e implicaciones para la formación de maestros

Con este trabajo se aporta información significativa sobre el estado de los conocimientos de una muestra importante de futuros maestros en Educación Primaria acerca del razonamiento algebraico elemental (RAE). De esta manera, se completa otros estudios previos sobre la naturaleza del RAE (Godino et al., 2014) y la construcción de instrumentos de medida de los mismos (Godino et al., 2015).

En términos generales hemos desvelado importantes carencias en los conocimientos de los futuros maestros que se están formando actualmente en España en el marco del Plan de Estudios establecido en 2010 (MEC, 2007), de acuerdo con las directrices emanadas del Espacio Europeo de Educación Superior (Plan Bolonia). A pesar de que el Grado en Maestro en Educación Primaria ha incluido un cuarto año (lo que ha supuesto pasar de 180 créditos ECTS a 240), esto no ha modificado sustancialmente el perfil generalista y psico-pedagógico de la formación

de maestros. No se cuestiona la orientación actual del maestro-tutor, que tiene a cargo principalmente la docencia disciplinar en Lengua, Matemáticas y Conocimiento del Medio Natural y Social, sino la necesidad urgente de garantizar una formación en las distintas disciplinas que permita al docente afrontar con garantía los retos epistemológicos a los que debe hacer frente.

Los bajos resultados obtenidos por los estudiantes portugueses, con un plan de estudios bastante diferente al de las universidades españolas, permite apoyar la hipótesis según la cual el desarrollo de los conocimientos didáctico - matemáticos sobre RAE requiere una atención especial.

Rico et al. (2014, p. 58) informan que los resultados del estudio TEDS-M muestran la necesidad de poner un mayor énfasis en los temas de didáctica de la matemática y proporcionar una mejor cobertura para los temas de las matemáticas escolares: esto debería tenerse en cuenta para el futuro en los niveles institucional y formador. En este trabajo se aportan datos experimentales que sustentan estos análisis. Así, la situación continúa siendo claramente deficiente tras la implantación de los nuevos programas basados en las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior, al menos en lo que respecta al bloque de contenido algebraico.

El estudio secundario de los resultados del TED-M realizado por Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez & Rico (2014) sobre conocimiento didáctico acerca de los números por parte de los futuros maestros de primaria españoles formados según el plan de 1991 destaca carencias en dichos conocimientos, "*que es necesario corregir en los nuevos programas*" (p. 296). Desafortunadamente los resultados de nuestro estudio, aunque centrado en el conocimiento didáctico - matemático sobre álgebra y realizado mediante la aplicación de un instrumento propio, no permite ser optimista en cuanto a la mejora de la formación de los maestros en el marco de los nuevos programas.

En este trabajo hemos tratado de explicar las diferencias en las puntuaciones medias entre las cinco universidades participantes mediante su posible relación con la nota de corte para acceso a los estudios y por la tasa de admisión. Aunque las correlaciones son diferentes de cero (positiva con la nota de corte y negativa con la tasa de admisión), sin embargo tales relaciones no han sido significativas. En futuras replicaciones de este trabajo sería necesario recabar información de otras posibles variables explicativas, como la nota de acceso de cada estudiante, o una medida del rendimiento académico en matemáticas en cursos previos.

Por otro lado, desde el punto de vista metodológico, hay que observar que las muestras han sido tomadas de manera intencional. Esto no resta representatividad de los grupos en las universidades participantes, ya que los estudiantes se distribuyen en los mismos de manera aleatoria, de tal manera que es posible asumir su representatividad con relación a las universidades. Sin embargo, otra mejora del estudio, en su faceta evaluativa del estado de los conocimientos sobre RAE de los futuros maestros de primaria, sería incluir una muestra más amplia de universidades, controlando explícitamente la distribución aleatoria y representativa de las muestras seleccionadas.

Por último, la variable CD3_INS, referida conocimientos sobre aspectos instruccionales de los futuros maestros, muestra puntuaciones muy bajas. Estos hechos sugieren la necesidad de integrar en la actividad matemática estrategias pedagógicas y didácticas que posibiliten a los estudiantes del GMEP la previsión de comportamientos de sus alumnos y de respuestas de intervención para la gestión y control de los procesos de estudio. Estas actividades están en muchos casos condicionadas por el número de estudiantes por grupo, que impiden la aplicación de metodologías más participativas y colaborativas, acordes con los presupuestos fundacionales del nuevo Espacio Europeo de Educación Superior.

Como líneas de futuro trabajo dentro del problema de evaluación de conocimientos didáctico – matemáticos sobre álgebra y su didáctica, y en el marco del modelo CDM-RAE, podemos mencionar el diseño de ítems relativos a las facetas,

- Afectiva, esto es, conocimientos de los futuros maestros sobre actitudes, motivación, emociones y creencias y su influencia en el aprendizaje del álgebra elemental.
- Ecológica, aspectos curriculares y conexiones con otros contenidos.
- Mediacional, uso de recursos tecnológicos en la enseñanza del álgebra.

Esta última faceta está estrechamente relacionada con los modelos TPACK⁴, que identifican los tipos de conocimientos que el docente

⁽⁴⁾ Del inglés, Technological Pedagogical Content Knowledge (Conocimiento Técnico-Pedagógico del Contenido). El enfoque TPACK extiende la noción teórica introducida por Shulman (1986) del “conocimiento del contenido pedagógico” (PCK). Una descripción sucinta del TPACK está disponible en la página Web (<http://www.tpack.org/>), donde se tiene acceso a bibliografía especializada.

necesita dominar para integrar la tecnología de una forma eficaz en la enseñanza que imparte.

Referencias bibliográficas

- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- George, D. y Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 11.0 Update*, 4.^a ed. Boston: Allyn & Bacon.
- Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática-BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.
- Godino, J. D., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. D. (en prensa). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, en prensa.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L (2014) Spanish preservice primary school teachers' pedagogical knowledge of numbers: results from TEDS-M / Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación: Culture and Education*, 26 (2), 265-297.
- Hair, J.F., Anderson, W.C., Tatham, R.L., Black, W.C. (2010). *Multivariate data analysis : a global perspective*, 7th ed. Upper Saddle River (NJ) : Pearson Prentice Hall.

- INEE. (2012). TEDS-M. *Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor.
- Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, 23(3), 187-200.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (BOE 01/03/2014).
- MECD (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 312, de 29 de diciembre, 53747- 53750.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de Primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Sanz, I., Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). Salamanca: SEIEM.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Wilhelmi, M. R. (2005). Papel de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores de secundaria. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 8(1), 159-179.
- Wilhelmi, M. R. (2014). Matemáticas y su didáctica en Magisterio. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* 66, 28-35.

Anexo: Cuestionario CDM-RAE

1. Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria:

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \square + 5$$

Un alumno responde que el número es el 12,

- Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
- ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

2. Se ha pedido a un alumno que indique si la expresión “ $13 + 11 = 12 + 12$ ” es verdadera o falsa.

El alumno responde lo siguiente:

Es verdadera porque restamos uno al doce y lo sumamos al otro doce, y se obtiene lo que está ahí (en el lado izquierdo).

- Explica el razonamiento que pudo seguir el alumno para plantear su respuesta.
- ¿Qué propiedades de la adición moviliza el alumno que justifica su respuesta?

3. Un alumno formuló la siguiente conjetura: “*Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número*”

- ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?
- ¿Qué tipo de justificación piensas podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?

4. Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el número que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

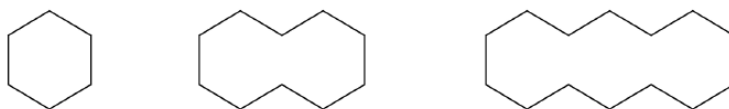
$$\begin{array}{r} A \ B \ C \\ A \ B \ C \\ + A \ B \ C \\ \hline 2 \ A \ C \ C \end{array}$$

- ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C? ¿Cómo sabes que son correctos?

Explica tu razonamiento

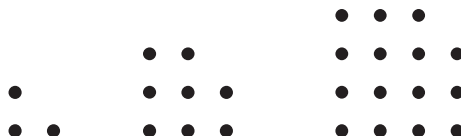
- b) ¿Se puede resolver la tarea usando algún procedimiento algebraico? ¿Cómo sería esa resolución y qué nociones algebraicas se usarían?
- c) ¿Qué tipo de respuesta y justificación piensas podría dar un alumno de primaria a este problema?

5. Considera la siguiente secuencia de figuras.



- a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.
- b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?
- c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

6. Observa la siguiente secuencia de tres figuras formadas por puntos:



- a) Determinar el número de puntos que tendrá la figura que estuviera en la vigésimo quinta (25^a) posición de esta secuencia, suponiendo que se continúa con la misma regla de formación de las figuras. Justifica la respuesta.
- b) Indicar las técnicas o diferentes maneras mediante las cuales se puede resolver el problema.
- c) ¿Consideras que esta tarea se puede proponer a alumnos de tercer ciclo de primaria? ¿Cómo podrían abordar la solución?

7. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo

ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días.

- ¿Cuánto dinero recibió?
- ¿Se puede resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos? ¿Cómo?
- ¿Se puede resolver el problema usando conocimientos algebraicos? ¿De qué manera?

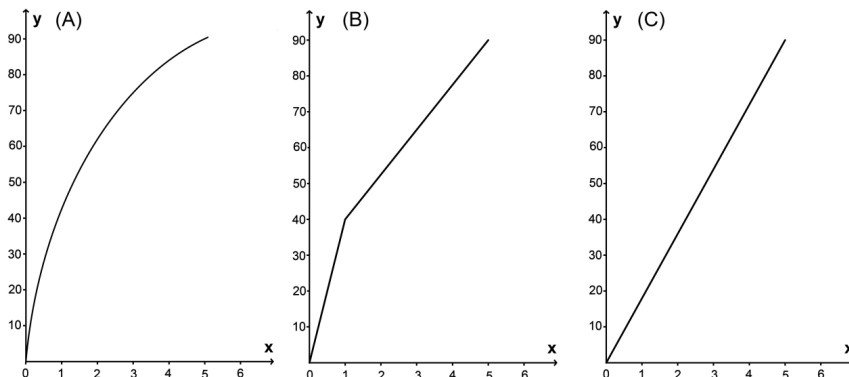
8. Analiza las siguientes expresiones y contesta:

- $4x + 5 = 25$
- $y = 2x + 1$
- $P = 2c + 2l$

- Describe la interpretación que haces de cada una de las expresiones anteriores.
- Enuncia tres problemas que se puedan proponer a alumnos de primaria cuya solución lleve a plantear estas expresiones.

9. Para llenar con agua un recipiente de una capacidad máxima de 90 litros se usa un grifo cuyo caudal es constante e igual a 18 litros por minuto.

- Indica cuál de las tres representaciones gráficas corresponde a la situación descrita, siendo que en el eje de las X se representa el tiempo en minutos y en el eje de las Y el volumen de agua en litros.



Respuesta: _____; Justificación:

- b) ¿Qué conocimientos matemáticos o de otro tipo se usan para resolver esta tarea?
- c) ¿Consideras que esta tarea es adecuada para ser propuesta a niños de educación primaria? En tal caso, de qué ciclo. Justifica tus respuestas.

10. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:
En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa.

¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?

- a) Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones lineales. Supón que en una bolsa caben 4 kg.
- b) Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.

Dirección de contacto: Juan D. Godino. Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071 Granada. España. E-mail: jgodino@ugr.es

Assessing prospective primary school teachers' didactic-mathematical knowledge on elementary algebraic reasoning¹

Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-370-303

Juan D. Godino
Miguel R. Wilhelmi
Teresa Neto
Teresa F. Blanco
Ángel Contreras
Carmen Díaz-Batanero
Antonio Estepa
Aitzol Lasa

Universidad de Granada

Abstract

Different studies suggest the need to introduce elementary algebraic reasoning at an early age, which in current curricular proposals is only taught in Secondary Education. In this paper, the responses to a questionnaire evaluating prospective primary school teachers' didactic-mathematical knowledge regarding elementary algebraic reasoning are analysed. The aim is to provide a diagnosis of prospective primary school teachers' knowledge regarding elementary algebra and its teaching. The results will be used to develop a training programme for teachers,

⁽¹⁾ The research reported in this article was carried out as part of the following projects: EDU2012-31869 and EDU2013-41141-P, Ministry of Economy and Competitiveness (MINECO, Spain). It has been also sponsored by FCT/MEC through national funds (PIDDAC) and co-sponsored by FEDER through COMPETE - Programa Operacional Fatores de Competitividade within the PEst-C/CED/UI0194/2013 project.

which ultimately ensures an effective study process in primary education. The sample consisted of 597 students from the Universities of Granada, Jaén, Public University of Navarra, Santiago de Compostela in Spain, and the University of Aveiro in Portugal. The questionnaire comprises 25 items that assess algebraic and pedagogical content knowledge in primary education. Taking into account that in these universities the groups are *ad extra* homogeneous and *ad intro* heterogeneous, entire groups were intentionally selected at each university. The quantitative analysis of the results enabled the estimation of the instrument psychometric properties (difficulty and discrimination indexes, reliability and validity). The comparison of the training programmes in mathematics and the way in which the subject is taught in the different universities reveals that current curriculum emphasizes on the psycho-pedagogical area. It also reveals an unsatisfactory disciplinary training that does not include algebraic reasoning. Results show significant differences among universities in the participants' level of knowledge in the various didactic - mathematical knowledge components. We conclude that it is necessary to improve the teachers' education programmes so they can progressively foster their pupils' algebraic reasoning. To achieve this goal these programmes should include specific training activities on elementary algebraic reasoning.

Keywords: teacher training, evaluation, algebraic knowledge, didactical knowledge, comparative study

Resumen

Diferentes estudios sugieren la necesidad de incorporar desde edades tempranas el razonamiento algebraico elemental, que en las propuestas curriculares clásicas se inicia en la Educación Secundaria Obligatoria. En este trabajo se analizan los resultados de aplicar un cuestionario de evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental a una muestra de estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria. El objetivo es la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, que garantice finalmente procesos de estudio efectivos en la educación primaria. La muestra está compuesta por 597 estudiantes de las Universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela en España y de Aveiro en Portugal. En estas universidades, los grupos se constituyen homogéneos *ad extra* y heterogéneos *ad intro*. Se propone pues la selección intencional de grupos completos en cada universidad. El cuestionario consta de 25 ítems que evalúan tanto conocimientos algebraicos como conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en Educación Primaria. El análisis cuantitativo de los resultados ha permitido explorar las características psicométricas del instrumento (índices de dificultad, discriminación, fiabilidad y validez). La comparación de los programas de formación en matemáticas y su didáctica entre las distintas universidades participantes revela el énfasis psicopedagógico del Plan de estudios vigente y

muestra una formación disciplinar deficiente, que, en particular, no incluye el bloque de razonamiento algebraico. Los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

Palabras clave: formación de maestros, evaluación, conocimiento algebraico, conocimiento didáctico, estudio comparado.

Introduction

Teacher training in mathematics and didactics is essential for the improvement of both teaching and learning. Therefore, it is a field of research and development that has been included in mathematics education. In Spain, this training occurs in the Faculty of Education and it is affected by a changing regulatory environment, as well as by the lack of human, technological and time resources. However, the implementation of a Teacher's Degree in Primary Education (TDPE) in compliance with the framework of the European Higher Education Area (EHEA) and the development of research in the departments of specific didactics are opening new possibilities for improvement and development of teacher training programmes.

This paper presents the results of a research project on "Evaluation and development of prospective primary school teachers' didactic-mathematical knowledge on elementary algebraic reasoning". The objective is to contribute with new knowledge, teaching resources and methodological proposals for the improvement of initial training in mathematics, and its teaching at the level of Primary Education, taking into account the Spanish educational context as well as the new curricula.

This paper is closely related to the TEDS-M² study (Teacher Education and Development Study in Mathematics) (Tatto et al., 2008; INEE, 2012;

⁽²⁾ TEDS-M was the first large-scale international comparative study in higher education, focusing on initial training of primary and early secondary education mathematics teachers. The TEDS-M data were collected in 2008, so the situation described relates to the curriculum and conditions at that time. Since then Spanish universities have undergone significant changes in the curriculum for teacher training.

Sanz & Martín, 2014). Although, it is limited to a specific aspect of the didactic-mathematical training of prospective teachers, «elementary algebraic reasoning», using a sample of five institutions specialised in teacher training: four of them Spanish universities (Granada, Jaén, Public University of Navarra, Santiago) and a Portuguese university (Aveiro).

Algebraic reasoning, perceived as mathematical modelling tool, is applicable to different content blocks (arithmetic, geometry, measurement, data analysis and probability). Additionally, generalisation and symbolisation processes, as well as the concepts of relation, variable, equation and function are indispensable tools in mathematics, both at a professional and at a school level. The Principles and Standards for School Mathematics of the National Council of Mathematics Teachers (NCTM, 2000) recommend the introduction of algebra in Preschool as one of five content blocks: Numbers and Operations, Geometry, Measurement, Data Analysis, and Probability.

The new Spanish curricular guidelines (MECD, 2014) encourage the development of algebraic thinking in Primary Education; namely with the intent to “achieve that all students, after completing primary education, are able to describe and analyse situations of change, find patterns and mathematical laws in numerical, geometric and functional contexts, evaluating their usefulness in prediction-making»(p. 19387). Thus, introduction to algebra is now part of the continuing nuclei, i.e., «the central aspects of mathematics teaching and learning which presumably remain unchanged over time» (Wilhelmi, 2014, 33).

Keeping this in mind, if algebra is to be included in mathematics at school as a new transversal content, teachers should embrace this new broadened vision and acquire basic skills in elementary algebraic reasoning. In previous papers, (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014) we have presented preliminary results regarding this part of the project which focuses on the study of didactical problems in algebra and its didactics at the level of training in the TDPE.

In Godino et al. (2015) we present the design of a questionnaire used to evaluate relevant aspects of prospective teachers' didactic-mathematical knowledge (DMK) regarding Elementary Algebraic Reasoning (EAR). The use of the DMK-EAR questionnaire with a sample of prospective teachers provides an insight into the status of their didactic-mathematical knowledge in elementary algebraic reasoning, as well as criteria for the development of tailored training programmes.

This paper describes the mathematical and didactical knowledge of TDPE students about EAR and its relation with the training programmes they are attending; i.e. there is an approach to the issue of diagnosing prospective teachers' didactic-mathematical knowledge on EAR based on the existing training programmes.

Therefore, following this general introduction, there is a description of the theoretical framework supporting the development of the questionnaire, as well as the variables taken into account. Subsequently, there is a characterisation of the context and student sample answering the questionnaire. Then, there is a presentation of the global and partial results of the quantitative study, indicating some psychometric properties of the instrument and distinguishing algebraic and didactical knowledge. Finally, the conclusions and a discussion of the implications of the study are presented.

Theoretical Framework

This research is based on two theoretical framework components: 1) Nature of algebraic reasoning in primary education (Carraher & Schliemann, 2007; Cai & Knuth, 2011); and 2) didactic-mathematical knowledge of the Maths Teacher (Godino, 2009). These components support the evaluation instrument used in this research.

Godino, Ake, Gonzato & Wilhelmi (2014) present a model of EAR structured into four algebraisation levels. This model takes into account the objects and processes involved in mathematical activity. At level 0 there are no algebraic traits in mathematical activity, whereas level 3 is clearly algebraic. The intermediate levels 1 and 2, considered as progressive algebraisation levels, showcase some objects and processes which are algebraic in nature.

Regarding the modelling tool adopted for the teacher's didactic-mathematical knowledge³, two types of variable were taken into account: algebraic content and didactical content. In terms of the *algebraic content* three values or categories with different subcategories were taken into consideration:

⁽²⁾ TEDS-M was the first large-scale international comparative study in higher education, focusing on initial training of primary and early secondary education mathematics teachers. The TEDS-M data were collected in 2008, so the situation described relates to the curriculum and conditions at that time. Since then Spanish universities have undergone significant changes in the curriculum for teacher training.

- *Structures* (equivalence relation; properties of operations, equations,...)
- *Functions* (arithmetic patterns, geometric patterns; linear, affine, quadratic functions,...)
- *Modelling tool* (context problems solved via equations or function relationships)

Regarding the variable *didactical content* (based on an algebraic content, associated with primary school level or higher) the following categories were considered:

- *Epistemic*: recognition of objects and algebraic processes (representations, concepts, procedures, properties, generalisation, modelling); recognition of algebraisation levels.
- *Cognitive*: personal meanings inferred by the students (knowledge, understanding and competence in elementary algebraic contents); learning conflicts at the level of algebraic objects and processes.
- *Instructional*: Resources for teaching algebra in primary school (situation-problem, technical resources), as well as its adaptation to the school curriculum.

Method

Instrument

The instrument used for data collection was the DMK-EAR questionnaire (see Appendix) composed of a set of 10 tasks, each of which consists of items that evaluate different aspects of algebraic and didactic-algebraic content. The description of the questionnaire development process and the discussion of its validity and reliability are available in Godino et al. (2015).

Table I shows a classification of the different items of the questionnaire according to the categories of didactic-mathematical knowledge on EAR. This instrument will not evaluate all categories of didactic-mathematical knowledge proposed by the DMK-EAR model, as it is designed to obtain the information provided by the students in writing within a limited period of time (2h approximately).

One should take into account that the DMK-EAR categories are not disjoint or exclusive; thus, the same item may appear in more than one category. For example, item 10a), «Name a variable of the problem that enables the study of functions», involves the content «functions» but also «modelling». Additionally, the student is asked to state one problem variant with a specific didactic purpose, leading prospective teachers to apply knowledge about an «instructional resource.» Moreover, the item also involves specialised knowledge of the mathematical content itself, i.e. the epistemic facet in its situational and regulatory components (concept of function and its representations). For this reason, in table I, some items are included in more than one cell.

TABLE I. Contents evaluated by each item of the questionnaire

DIDACTICAL CONTENT	ALGEBRAIC CONTENT					
	Structures (S)		Functions (F)		Modelling (M)	
	Primary	Advanced	Primary	Advanced	Primary	Advanced
Epistemic (Algebraisation levels)	<u>EPI-E1</u> 2b; 4b	<u>EPI-E2</u> 7b;7c	<u>EPI-F1</u> 10b	<u>EPI-F2</u> 5c; 6b	<u>EPI-M1</u>	<u>EPI-M2</u> 9b
Cognitive (Personal meanings)	<u>COG-E1</u> 1a; 1b 2a; 3b; 4c	<u>COG-E2</u>	<u>COG-F1</u> 6c	<u>COG-F2</u>	<u>COG-M1</u>	<u>COG-M2</u>
Instructional (Situations and resources)	<u>INS-E1</u> 8b	<u>INS-E2</u> 8b	<u>INS-F1</u> 8b	<u>INS-F2</u> 5b; 8b; 10a	<u>INS-M1</u> 9c); 10a	<u>INS-M2</u> 8b
Algebraic Content (only common or advanced knowledge)	<u>ALG-E1</u> 4a; 3a	<u>ALG -E2</u> 7a	<u>ALG -F1</u> 5a; 10b;	<u>ALG -F2</u> 6a; 8a; 9a	<u>ALG -M1</u>	<u>ALG -M2</u> 9a

Source: Godino et al. (2015)

Dependent variables

The first objective is to define the quantitative variable «degree of accuracy of the answers given to the 25 items of the questionnaire». Partially correct answers were assessed positively, so the score assigned to each item was:

- 0 points, if the answer is incorrect.
- 1 point, if it is partially correct,
- 2 points, if it is correct.

In addition to the variable «total score», i.e. sum of scores obtained in all 25 items (0-50 points), quantitative variables are defined regarding «common and advanced mathematical knowledge» and «didactical content», representing the sum by rows or columns of the variables provided in Table I.

a) Concerning common and advanced mathematical knowledge

A1_ALG: Assess knowledge of «algebra» characteristic in Primary school (common knowledge) or Secondary school (advanced knowledge). This scale includes items 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a, and 10b.

A2_EST: Evaluates knowledge related to properties of the algebraic structures used in equation solving. It includes items 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c, 7a, 7b, 7c, and 8b.

A3_FUN: Includes knowledge related to geometric patterns and functions. It includes items 5a, 5b, 5c, 6a, 6c, 8a, 8b, 9a, 10a, and 10b.

A4_MOD: Evaluates knowledge related to algebraic modelling (using equations or functions). It includes item, 8b, 9a, 9b, 9c, and 10a.

b) Concerning didactical content

CD1_EPI: Incorporate knowledge on the epistemic facet of the DMK – EAR and includes items 2b, 4b, 5c, 6b, 7b, 7c, 9b, and 10b.

CD2_COG: Contain knowledge on the cognitive facet and includes items 1a, 1b, 2a, 3b, 4c, and 6c.

CD3_INS: Assess knowledge on the instructional facet and includes items 5b, 8b, 9c, and 10a.

The different dependent variables comprise a number of different items scoring 0, 1 or 2, so its variation range is distinct. To ease the comparison and interpretation of the scores they were convert to the interval [0, 10].

To ensure reliability of the student response coding process, a criteria protocol was developed with illustrative examples of the type of response. Additionally, ambiguous interpretation was discussed within the research group.

Explanatory variables

To interpret the results of the evaluation of student knowledge, the following explanatory variables were taken into account:

Admission rate to the Teacher's Degree in Elementary Education (ratio between the number of places available and the number of applications for admission)

Cut-off score in the admission exam.

Period of time at which the test was done: 1. it was applied at the beginning of the training process; 2. it was applied at the end of the training process.

Context and sample description

The target population of this research are Spanish students of the Teacher's Degree in Primary Education (TDPE) (MECD, 2007). The questionnaire has been used with several groups of students from the Universities of Granada, Jaén, Public University of Navarra, Santiago de Compostela, attending the TDPE under the new curriculum. The questionnaire has also been used with a sample of students from the University of Aveiro, which allows for a comparative study. Both Spanish and Portuguese curricula have been reviewed within the framework of the European Higher Education Area (EHEA).

The number of credits assigned to Mathematics Education in the Spanish curriculum guidelines is 18 (Plan 2010) for the Universities of Jaén, Public of Navarra and Santiago; in Granada the number is 22. Although the teaching course has gone from 3 to 4 years and that, therefore, the total number of credits has increased from 180 to 240, these studies continue to have a strong psychological and pedagogical component. The percentage of credits allocated to training in mathematics and its didactics is 7.5%, which is similar to the 1991-2010 Plan (6.7% according to the study Rico, Gomez & Cañadas, 2014).

In this study, it was not possible to include a detailed analysis of the contents of mathematics and its didactics offered in the five universities, as was done by Rico et al. (2014). However, we found that algebra does not appear explicitly in the syllabus of the corresponding subjects. Emphasis is on the study of numbers, measurement, geometry and data

analysis. On the other hand, at the University of Aveiro the course, which is divided into 3 years, includes several subjects that seek to intensify the mathematical training of prospective teachers. However, algebraic knowledge is, only briefly discussed in the subject Didactics of Mathematics and Educational Technology.

In the Universities of Granada and Aveiro, the questionnaire was given to last-year students. In the remaining universities the questionnaire was given to students in the beginning of the degree. Nevertheless, given that throughout the remainder of these courses there is no explicit training in EAR, results show the students' professional knowledge about EAR, i.e. that which they will be using throughout their career.

The questionnaire was used with entire classes not only to gather information enabling the evaluation of student knowledge, but also to use the task solving activity as a device for further training. The present study refers only to the evaluation results.

Table II shows the sample size in each university and the values of three possible variables explaining the different scores obtained in each university.

TABLE II. Sample distribution according to university and explanatory variables

University	Number of students	Percentage	Cut-off score		Admission rate	Moment it was used
			Average 2011-2014	Standard deviation		
Aveiro	66	11.6	6.542	0.227	0.191	2
Granada	91	15.4	5.920	0.146	0.333	2
Jaén	230	38.53	5.000	0.000	0.531	1
Pública de Navarra	129	21.61	7.070	0.233	0.316	1
Santiago	81	13.57	6.740	0.289	0.158	1
TOTAL	597	100.00				

Source: Authors. The data relating to the cut-off and access quota were taken from the following sites:
 Aveiro (Direção Geral de Ensino Superior, DGES): <http://www.aceessoensinosuperior.pt/detcursopi.asp?codc=9853&code=0300>
 Granada – Jaén (Junta de Andalucía): <http://www.juntadeandalucia.es/economiainnovacionciencia/squit>
 U. Public of Navarra (Universidad Pública de Navarra): <http://www.unavarra.es/estudios/acceso-y-matricula/grados/notas-de-corte>
 Santiago (Comisión Interuniversitaria de Galicia): <http://ciug.cesga.es/notascorte.html>

Data analysis

For the analysis of the items, descriptive statistics techniques (mean, dispersion, and box plots) were used. After checking the accurateness of the total scores and subscales, parametric inferential tests were computed to compare groups, including Analysis of Variance. Finally, a factor analysis was performed to explore the structure of the participants' responses to the items.

Results of the quantitative study

In this section some psychometric characteristics of the DMK-EAR questionnaire are discussed. This study, which adds to the study of Godino et al. (2015), is crucial because the sample size is significantly larger (597 students) and it allows for a better adjustment of some indicators. Next, there is an analysis of the results concerning the level of knowledge on algebra and didactics of algebra, relating such knowledge to the existing learning opportunities offered by the several universities.

Some psychometric properties of the instrument

Item Analysis

Table III presents the difficulty indices of the items included in the questionnaire calculated on the entire sample. This index does not correspond to the percentage of correct responses as scores of 0, 1 and 2 were ascribed based on the degree of correction. The average of scores for each item was calculated and, to make the analysis simpler, they were converted to interval [0-100]. As indicated in Table III, the mean score was 32.5 (standard error 1.43) (on a scale of 0 to 100), indicating that the level of knowledge is insufficient. In fact, only 5 items have a difficulty index above 50, whereas the difficulty index of 21 items is below this level; in addition, 11 items have a difficulty index below 30 (at least 7 out of 10 answers is incorrect).

TABLE III. Difficulty index of the items in the DMK-EAR questionnaire (n=597)

ITEM. Descriptor	Difficulty index		Discrimination: Mean difference (P ₃₃ - P ₆₆)	
	M	Standard error	t	p
1a. Equality arithmetic result. Explanation	80.7	1.40	6.08	.000
1b. Equality arithmetic result. Interpretation	55.4	1.90	11.64	.000
2a. Equality equivalence. Explanation	69.0	1.64	8.39	.000
2b. Equality equivalence. Properties	15.5	1.20	6.08	.000
3a. Sum three numbers. Generalisation	48.0	1.61	10.08	.000
3b. Sum three numbers. Type of reasoning	30.7	1.73	8.44	.000
4a. Partial sum. Solve and explain	42.3	1.95	10.64	.000
4b. Partial sum. Algebraic solution	3.8	0.65	4.16	.000
4c. Partial sum. School solution	10.2	1.14	5.27	.000
5a. Hexagonal pattern. Two terms	57.6	1.66	8.84	.000
5b. Hexagonal pattern. Algebraic generalisation	15.0	1.25	7.98	.000
5c. Hexagonal pattern. Type of algebraic objects	6.1	0.87	5.39	.000
6a. Square pattern. General solution	42.4	1.76	14.35	.000
6b. Square pattern. Possible techniques	30.8	1.60	14.14	.000
6c. Square pattern. School solution	31.9	1.58	11.63	.000
7a. Food cost. Resolution	32.7	1.84	10.86	.000
7b. Food cost. Arithmetic solution	12.1	1.30	7.63	.000
7c. Food cost. Algebraic solution	10.0	1.17	7.24	.000
8a. Interpreting expressions	22.6	1.27	11.27	.000
8b. Problem statement	20.9	1.30	10.16	.000
9a. Graphic functions. Explanation	75.0	1.54	8.29	.000
9b. Graphic functions. Object recognition	30.5	1.41	10.79	.000
9c. Graphic functions. Curriculum	43.0	1.52	6.49	.000
10a. Linear functions. Statements	16.2	1.35	8.46	.000
10b. Linear functions. Algebra recognition	10.6	1.10	7.61	.000
AVERAGE DIFFICULTY LEVEL	32.5	1.43	35.85	.000

Source: Authors

In the second column, the discrimination index of the items is included, namely the difference in means between the low performance group (percentile 33) and the high performance group (percentile 66) resulting in the proper discrimination of all items. ($p < .001$).

Reliability and validity

The reliability coefficient obtained for the scale (Cronbach's alpha), applied to the sample of 597 students was .783 (> 0.7), considered *acceptable* (Hair, Anderson, Tatham & Black, 2010; George & Mallery, 2003).

In order to obtain proof of the construct validity of the instrument, a factor analysis of main components and *varimax rotation* (Kaiser, 1958) were performed, after verification of the adequacy of the data to this type of analysis. Eight factors were obtained in result. Table 4 shows the rotated component matrix, in which all factor loadings below.33 were eliminated to enable a better analysis of the results.

Each factor is linked to the items included in each task, thus reinforcing the idea that there is a close relationship between mathematical knowledge and specific didactical knowledge involved in the corresponding mathematical activity. There is a high correlation between factor and task in the 8 factors, except 4 and 5.

Factor 4 basically matches task 4 (hexagonal pattern) except for item 2b, which is also included in this factor; item 2b requests identification of properties involved in the equality used as equivalence. Component 5 assembled items from three tasks: Task 8 (interpretation of algebraic expressions and problem statement), Task 3 (sum of three consecutive numbers, types of explanation which may be given by students), item 2a (explanation of the use of equality as equivalence). A possible explanation for this grouping is that in the three items (2a, 3 and 8) the student is expected to analyse a task, support their answer or interpret its meaning, i.e. meta-mathematical tasks involving not only a high degree of abstraction but also a wide range of didactical resources for the analysis of the corresponding mathematical activity.

The remaining factors can be described as follows:

- Factor 1: Didactic–mathematical knowledge related to the mathematical activity of recognising geometric patterns.
- Factor 2: Didactic–mathematical knowledge related to the modelling of problems with arithmetic – algebraic structure.
- Factor 3: Didactic–mathematical knowledge related to the interpretation of linear functions.
- Factor 6: Didactic–mathematical knowledge related to linear functional modelling.
- Factor 7: Didactic–mathematical knowledge related to the use of equality as equivalence.
- Factor 8: Didactic–mathematical knowledge related to the knowledge of arithmetic – algebraic properties of the decimal system.

These results support the idea that learning in didactics of mathematics should be separated from other mathematical contents through a *teaching in action* (Wilhelmi, 2005) that is based on the needs arising from prospective teachers' mathematical and didactical progress.

TABLE IV. Rotated component matrix

ITEM. Descriptor	Component							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1a. Equality arithmetic result. Explanation							.842	
1b. Equality arithmetic result. Interpretation							.719	
2a. Equality equivalence. Explanation					.364		.474	
2b. Equality equivalence. Properties				.463				
3a. Sum three numbers. Generalisation					.505			
3b. Sum three numbers. Type of reasoning					.700			
4a. Partial sum. Solve and explain								.678
4b. Partial sum. Algebraic solution								.647
4c. Partial sum. School solution								.708
5a. Hexagonal pattern. Two terms				.514				
5b. Hexagonal pattern. Algebraic generalisation				.802				
5c. Hexagonal pattern. Type of algebraic objects				.750				
6a. Square pattern. General Solution	.770							
6b. Square pattern. Possible techniques	.806							
6c. Square pattern. School solution	.791							
7a. Food cost. Solution		.824						
7b. Food cost. Arithmetic solution		.771						
7c. Food cost. Algebraic solution		.687						
8a. Interpreting expressions					.521			
8b. Problem Statement					.541			
9a. Graphic functions. Explanation			.712					
9b. Graphic functions. Object recognition			.700					
9c. Graphic functions. Curriculum			.809					
10a. Linear functions. Statements						.844		
10b. Linear functions. Algebra recognition						.844		

Method: Analysis of main components. Rotation method: Varimax with Kaiser normalisation. Source: Authors

Comparative analysis of students' knowledge

Table V presents the means and standard deviations of the variable «Total Score» and the sample size in the different universities. To facilitate comparison and interpretation of the total and partial scores, the scale was changed to the interval [0, 10]. In figure I there is a comparison of the frequency distributions of the total score obtained in the five universities using box plots.

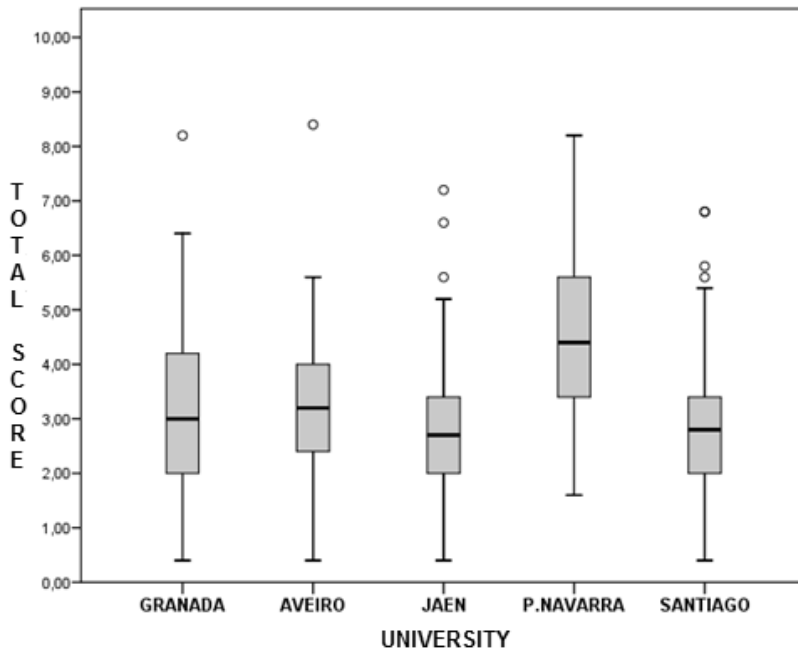
TABLE V. Average scores and standard deviations of the total score per university

University	n	M	DT
Aveiro	66	3.17	1.44
Granada	91	3.25	1.34
Jaén	230	2.77	1.08
Pública de Navarra	129	4.43	1.46
Santiago	81	2.85	1.32
TOTAL	597	3.25	1.43

Source: Authors

In all cases, the average score is below 5. However, there are significant differences in the mean scores obtained in the different universities ($F = 37.05$, $p = .000$) namely the Public University of Navarra (Figure I). Moreover, unlike other universities, in Public of Navarra there is no register of outliers, therefore, if they were suppressed in the other universities differences in means would enhance.

FIGURE I. Comparison of the total score using box plots



Source: Authors

The correlation coefficient between the average scores of the universities and the cut-off grade to enter the corresponding Faculty is .27, whereas correlation with the admission rate is -.07. In both cases, the relationship is not statistically significant at a 95% confidence level. Additionally, there were no statistically significant differences in average scores between the group of subjects who answered the questionnaire in their last year of training ($M = 3.20$; $SD = 1.45$; Aveiro and Granada) and those who answered it in the beginning ($M = 3.26$, $SD = 1.39$; Jaén, Public University of Navarra and Santiago). The result of the t test comparing independent samples was not significant ($t = 0.46$; $p = .644$). A plausible explanation for this result is that the algebraic contents are not explicitly studied in any of the universities.

Analysis of partial variables: algebraic and didactical knowledge

The analysis of variance used to study the differences in means in the total score variables and the partial variables between different universities (all transformed to the interval [0, 10]), suggests that there are significant differences in all variables, as the p -value is $<.001$ in all cases (Table VI).

TABLE VI. Descriptive statistics and comparison of means between universities

Variable	M	SD	F	p
A1_ALG: Common and advanced knowledge in algebra	4.14	1.91	18.54	<.001
A2_EST: Knowledge of equations and relations	3.32	1.60	33.78	<.001
A3_FUN: Knowledge of functions	2.98	1.73	26.77	<.001
A4_MOD: Knowledge of modelling	3.71	2.24	8.54	<.001
CD1_EPI: Knowledge of epistemic aspects	1.49	1.42	29.23	<.001
CD2_COG: Knowledge of cognitive aspects	4.63	2.05	26.56	<.001
CD3_INS: Knowledge of instructional aspects	2.38	2.00	21.84	<.001
TOTAL: Total score	3.25	1.44	37.05	<.001

Source: Authors

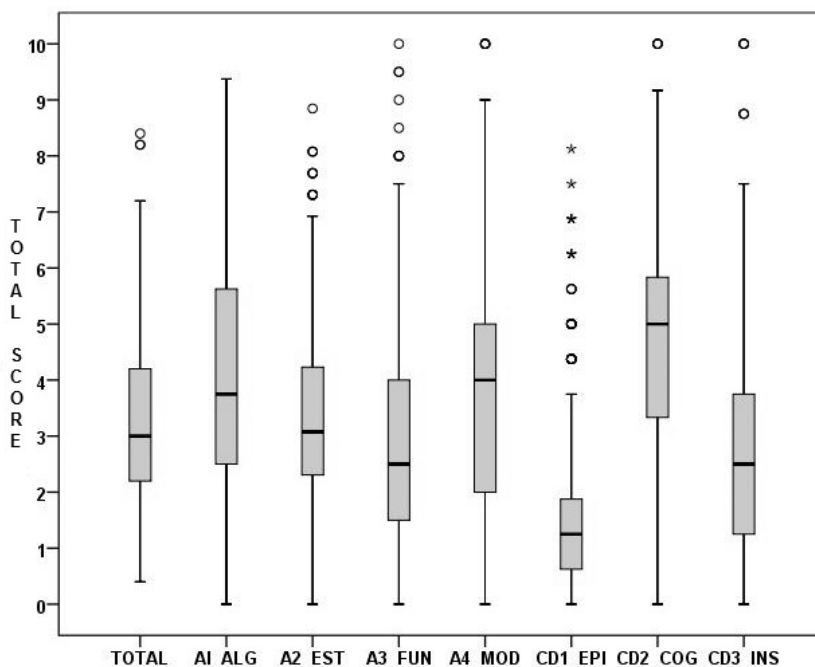
Scores below 5 highlight the difficulties faced by students answering questions of epistemic nature (CD1_EPI), i.e. those that require specialised knowledge of algebraic content.

Figure II shows the frequency distribution of the total score and the 7 partial variables using box plots. Figure II shows there are outliers for all variables, except for A1_ALG. If they were suppressed from the calculations the mean values would be even lower than those presented in Table IV. This finding supports the thesis indicating deficient didactic-mathematical knowledge and the need to take concrete measures to address the existing weaknesses.

Figure III enables the analysis of the differences in student knowledge, according to constructed partial variables. The same graph presents the means of scores obtained for the 7 variables according to the five

universities. There is an existing trend in each university, i.e. if a university's score increases when moving from one variable to another the remaining universities' scores also increase. Similarly, if a university's score decreases when moving from one variable to another the others also decrease, given that the polygonal line of the line graph for each university rarely intersects, a fact that confers coherence and rigour to the study.

FIGURE II. Comparison of the distribution of the different variables using box plots



Source: Authors

When analysed, these variables show a differentiated behaviour at the Public University of Navarra, which presents higher score in all variables, in addition to no intersection being registered with the line graph of the remaining universities. This fact is consistent with the comparison of the

total score displayed in the box plots, contributing to the internal validity of the results.

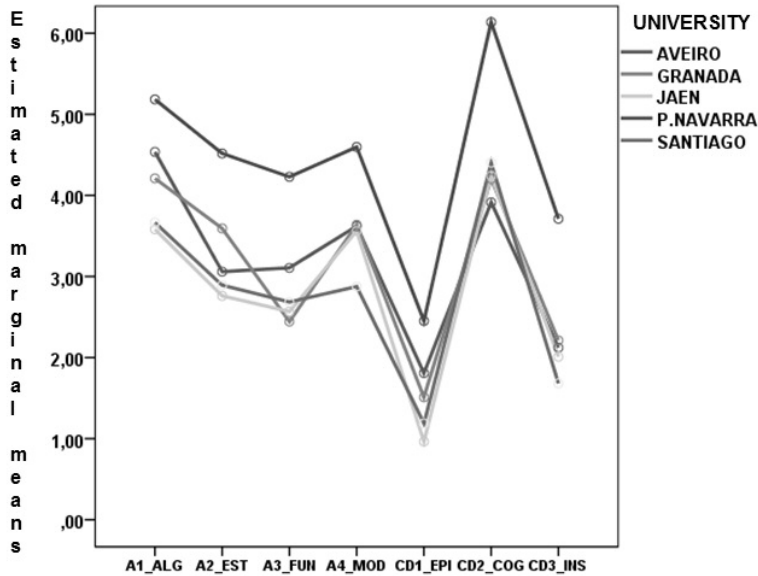
Analysis of algebraic knowledge

The analysis of the level of algebraic knowledge was done according to the following variables:

- A1_ALG: Common and advanced knowledge in algebra.
- A2_EST: Knowledge of equations and relations.
- A3_FUN: Knowledge of functions
- A4_MOD: Knowledge of modelling.

The mean score obtained in the mentioned variables was insufficient. The best result was obtained in A1_ALG (4.14 points) probably because its items are of a procedural nature, i.e. the student must carry out a series of calculations and come up with a result. Following is A4_MOD (3.71 points), which shows the highest degree of dispersion (highest standard deviation), although it is an even dispersion (few outliers). The items in this variable refer to simple models studied in secondary school. Then follows the score in A2_EST (3.32 points). This variable includes the structures, relationships and properties of mathematical framework, which are not mastered by all students. Finally, the lowest score was obtained in A3_FUN (2.18 points), which has many high outliers, justifying the conclusion that some students master the subject whereas the majority has clear difficulties.

FIGURE III. Means of scores obtained in the partial variables



Source: Authors

Analysis of didactical knowledge

The analysis of the level of didactical knowledge was carried out according to the following variables:

- CD1_EPI: Knowledge of epistemic aspects
- CD2_COG: Knowledge of cognitive aspects.
- CD3_INS: Knowledge of instructional aspects.

The mean scores obtained in these variables are also insufficient. The best score was obtained in CD2_COG (4.63 points), with the second best score if we consider all 7 variables. It is evenly distributed, showing few outliers: 50% of students are within a score (4-6) and the remaining 50% are evenly distributed in the two whiskers (box plot).

The other two variables obtained the lowest score, even considering the seven variables. The lowest score was obtained in CD1_EPI (1.49 points). Keeping in mind the box plot, 75% of students have scored less than 2 and 25% have scored between 2 and 8, which results in many outliers. One possible explanation is that the questions of the items included are not common in pre-university education, so students are not used to answering such questions.

Lastly, CD3_INS (2.38 points) is second in the lower scores, indicating our students' lack of instructional practice. 75% of students have scored less than 4, the remaining 25% were rated between 6 and 10, with few outliers. There are no differences at the level of the period in which the questionnaire was administered in the universities, suggesting that the existing difficulties are not resolved throughout their training path.

Summary and implications for teacher training

This paper provides meaningful information regarding the level of knowledge of a significant sample of prospective primary education teachers on elementary algebraic reasoning (EAR). Therefore, it supports previous studies on the nature of EAR (Godino et al., 2014) and the development of measurement instruments (Godino et al., 2015).

Overall, we unveiled major weaknesses in the knowledge of prospective teachers who are currently studying in Spain under the Curriculum established in 2010 (MEC, 2007), in accordance with the guidelines of the European Higher Education Area (Bologna plan). Although the Teacher's Degree in Primary Education has included a fourth year (which meant going from 180 to 240 ECTS), it has not substantially altered the general and psycho-educational profile of teacher training. There is no intention to question the current orientations for the teacher-tutor, who is mainly responsible for teaching Language, Mathematics and Natural and Social sciences, but to highlight the urgent need to ensure training in the various subjects thus enabling the teacher to successfully face the existing epistemological challenges.

The low scores obtained by the Portuguese students studying under a plan of studies which is quite different from the Spanish one, supports the belief that the development of didactic-mathematical knowledge on EAR requires special attention.

Rico et al. (2014, p 58) state that the results of the TEDS-M study point out the need to place greater emphasis on the topics taught in didactics of mathematics and broaden the topics taught in school mathematics: this should be taken into account in the future at both institutional and training levels. In this paper there is experimental data supporting these studies. As a result, the present situation is clearly unsatisfactory, at least regarding algebraic content, despite the implementation of new programmes based on the guidelines of the European Higher Education Area.

The subsequent analysis of the TED-M results by Gutierrez-Gutierrez Gomez & Rico (2014), regarding didactical knowledge on numbers of prospective Spanish primary education teachers trained according to the 1991 plan, highlights weaknesses at the level of such knowledge, which «should be corrected in forthcoming programmes» (p. 296). The results of our study, although it is centred on didactic-mathematical knowledge regarding algebra using our own instrument, prevent us from being optimistic about the improvement of teacher training with the new programmes.

In this paper we have tried to explain the differences in mean scores obtained in the five participating universities by means of its potential relationship with the cut-off required for admission and the admission rate. Although the correlations differ from zero (positive with the cut-off point and negative with the admission rate), they were not significant. In future developments of this study, information should be gathered regarding other potential explanatory variables, namely the students' admission grade, or the measurement of academic achievement in mathematics in previous courses.

On the other hand, from a methodological point of view, it is worth mentioning that the samples were chosen purposefully. This does not decrease the representativeness of the groups in the participating universities, as students are distributed randomly, so it is possible to assume their representativeness with respect to the universities attended. However, a future development of this study, concerning the evaluation of prospective primary teachers' level of knowledge on EAR, should include a wider range of universities explicitly controlling the random and representative distribution of selected samples.

Lastly, the variable CD3_INS, based on prospective teachers' knowledge of instructional aspects, shows very low scores. This hints

towards the need to include didactical and pedagogical strategies in mathematics to enable TDPE students to predict their pupils' behaviour and come up with interventions for the management and control of the study process. In many cases, these activities depend on the number of students per group, which prevents the use of more participatory and collaborative methods, consistent with the basic assumptions of the new European Higher Education Area.

As future lines of work in the evaluation problem of didactic – mathematical knowledge on algebra and its didactics, and under the DMK-EAR model, we can mention the design of items relating to the facets:

- *Affective*, that is, knowledge of future teachers on attitudes, motivation, emotions, beliefs and their influence on the learning of elementary algebra.
- *Ecological*, curricular aspects and links to other contents.
- *Mediational*, using technological resources in teaching algebra.

This last aspect is closely related to the TPACK⁴ models that identify the types of knowledge that teachers need to master to integrate technology in an effective way in their teaching.

References

- Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.
- Carraher, D. W. & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

⁴ Technological Pedagogical Content Knowledge. The TPACK approach extends the theoretical notion introduced by Shulman (1986) of «pedagogical content knowledge» (PCK). A brief description of TPACK is available on the website (<http://www.tpack.org/>), where there is access to specialized literature.

- George, D. & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 11.0 Update*, 4.^a ed. Boston: Allyn & Bacon.
- Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática-BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.
- Godino, J. D., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. & Wilhelmi, M. D. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.1, 127 - 150.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. & Rico, L (2014) Spanish preservice primary school teachers' pedagogical knowledge of numbers: results from TEDS-M / Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación: Culture and Education*, 26 (2), 265-297.
- Hair, J.F., Anderson, W.C., Tatham, R.L., & Black, W.C. (2010). *Multivariate data analysis : a global perspective*, 7th ed. Upper Saddle River (NJ) : Pearson Prentice Hall.
- INEE. (2012). TEDS-M. *Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor.
- Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, 23(3), 187-200.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (BOE 01/03/2014).
- MECD (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 312, de 29 de diciembre, 53747- 53750.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

- Rico, L., Gómez, P. & Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de Primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Sanz, I., & Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). In M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). Salamanca: SEIEM.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Wilhelmi, M. R. (2005). Papel de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores de secundaria. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 8(1), 159-179.
- Wilhelmi, M. R. (2014). Matemáticas y su didáctica en Magisterio. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* 66, 28-35.

Appendix: DMK-EAR questionnaire

1. Consider the following question posed to a pupil of the first cycle of primary education:

What number should be placed in the box so that equality is true?

$$8 + 4 = \underline{\quad} + 5$$

A pupil answers that the number is 12,

- Explain the possible reasoning that led the pupil to give that answer.
- Which interpretation of the sign = is being done by the pupil?

2. A pupil was asked to indicate whether the expression « $13 + 11 = 12 + 12$ » is true or false.

The pupil answers the following:

It is true because we subtract one to twelve and add it to the other twelve, the result is what is there (on the left).

- a) Explain the reasoning that could lead the pupil to come up with this response.
- b) Which properties of addition led the pupil to justify their response?

3. A pupil made the following hypothesis: *«I add three consecutive natural numbers. If I divide the result by three I always get the second number»*

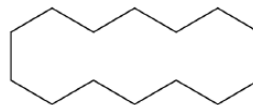
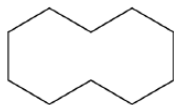
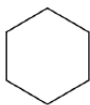
- a) Is the statement valid for all natural numbers? Why?
- b) In your opinion, what kind of justification could a primary school pupil give to this hypothesis?

4. Carefully analyse the following sum, and determine the number representing each letter. Consider that each letter has a different value.

$$\begin{array}{r}
 A \ B \ C \\
 A \ B \ C \\
 + A \ B \ C \\
 \hline
 2 \ A \ C \ C
 \end{array}$$

- a) What are the numerical values of A, B and C? How do you know they are correct? Explain your reasoning.
- b) Can you solve the task using an algebraic procedure? What would that resolution be and which algebraic concepts would be used?
- c) What kind of response and justification do you think an elementary school student could give to this problem?

5. Consider the following sequence.



- a) Represent the next two terms of the sequence and indicate the number of segments needed to build each one of them. Explain how you did it.

- b) How would you change the statement of the task to hint a resolution procedure which involved algebraic knowledge?
- c) What would be the algebraic knowledge involved?

6. Consider the following sequence of three shapes defined by dots:



- a) Determine the number of dots that the shape placed on the twenty-fifth (25th) position of this sequence will have, assuming it continues with the same rule of formation. Support your answer.
- b) Indicate techniques or different ways to solve the problem.
- c) Do you consider that this task could be proposed to students in the 3rd cycle of primary school? How could they reach a solution?

7. A pupil received a certain amount of money to eat for 40 days from his parents. However, he found places where he could save 4 euro a day on food. Thus, the initial budget lasted 60 days.

- a) How much Money did he receive?
- b) Can you solve the problem using only arithmetic procedures? How?
- c) Can you solve the problem using algebraic knowledge? How?

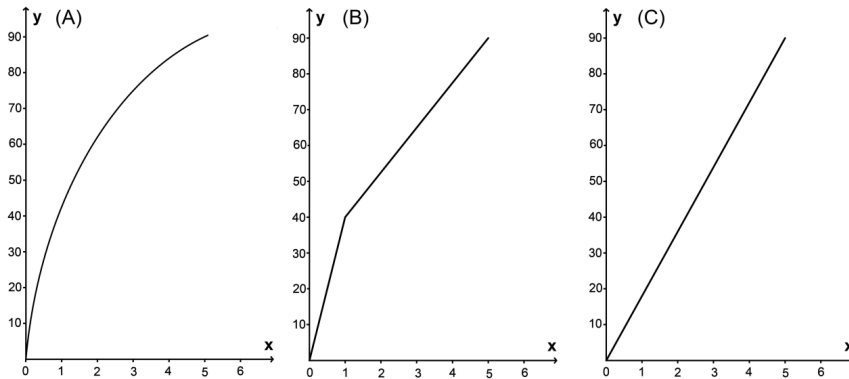
8. Analyse the following expressions and answers:

1. $4x + 5 = 25$
2. $y = 2x + 1$
3. $P = 2c + 2l$

- a) Describe your interpretation of each of the above expressions.
- b) Come up with three problems that may be proposed to elementary students and whose solution leads to these expressions.

9. To fill a container with a maximum capacity of 90 litres with water a faucet whose flow is constant and equal to 18 litres per minute is used.

- a) Indicate which of the three graphical representations corresponds to the situation described above, being that the X axis represents time in minutes and the Y axis the volume of water in litres.



- b) What mathematical knowledge or other type of knowledge is used to solve this task?
- c) Do you consider that this task could be given to primary school children? If so, what cycle? Support your answers.

10. A teacher presents the following problem to his pupils:

At a store they sell each kilo of pears for 2€ and charge 10 cents per bag.

How much would a bag with 4 kg of pears cost?

- a) Come up with a variant of the problem which could be used to introduce linear functions. Suppose each bag carries 4 kg.
- b) Solve the problem you stated and name the algebraic skills used.

Contact address: Juan D. Godino. Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071 Granada. España. E-mail: jgodino@ugr.es

La *Revista de Educación* es una publicación científica del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte español. Fundada en 1940, y manteniendo el título de *Revista de Educación* desde 1952, es un testigo privilegiado de la evolución de la educación en las últimas décadas, así como un reconocido medio de difusión de los avances en la investigación y la innovación en este campo, tanto desde una perspectiva nacional como internacional. La revista es editada por la Subdirección General de Documentación y Publicaciones, y actualmente está adscrita al Instituto Nacional de Evaluación Educativa de la Dirección General de Evaluación y Cooperación Territorial.



NIPO línea: 030-15-016-X
NIPO ibd: 030-15-017-5
ISSN línea: 1988-592X 0034-8082
ISSN papel: 0034-8082

www.mecd.gob.es/revista-de-educacion