



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Inmersións e submersións

Antón Rodríguez Otero

2020/2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# **Inmersións e submersións**

Antón Rodríguez Otero

Xullo, 2021

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía</b>
<b>Título: Inmersións e submersións</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
O estudo do comportamento local das aplicacións diferenciables de rango constante entre variedades diferenciables leva a ver que estas aplicacións actúan localmente como proxeccións dun produto sobre un factor seguidas de inclusións nun produto; isto da unha interpretación xeométrica de aplicacións entre variedades debida ao comportamento local das súas aplicacións lineais tanxentes. Neste traballo estudaranse as inmersións, que localmente poden pensarse como inclusións nun produto, e as submersións, que localmente son como proxeccións; as primeiras dan lugar a subvariedades, as segundas a variedades cocientes.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice xeral

<b>Resumo</b>	<b>VII</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Variedades diferenciables . . . . .	1
1.2. O espazo vectorial tanxente . . . . .	5
<b>2. Inmersións e submersións</b>	<b>9</b>
2.1. Inmersións . . . . .	9
2.2. Submersións . . . . .	16
2.3. O teorema do rango constante . . . . .	23
<b>3. Subvariedades e variedades cocientes</b>	<b>29</b>
3.1. Subvariedades . . . . .	29
3.2. Variedades cocientes . . . . .	41
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>



## Resumo

No estudo do comportamento das aplicacións entre variedades diferenciáveis xoga un papel importante o coñecemento das propiedades das aplicacións tanxentes. Isto leva a considerar as inmersións e as submersións. As inmersións, e o caso particular dos embebecimentos regulares, son esenciais no estudo das subvariedades e as submersións son necesarias para estudar as variedades cocientes. Analizamos diferentes formas de considerar as subvariedades e tamén estudamos variedades cocientes, en particular as que se poden obter por accións propiamente discontinuas de grupos. Tamén incluimos varios exemplos.

## Abstract

In the study of the behaviour of smooth maps between differentiable manifolds, the knowledge of the properties of the tangent application at each point plays a crucial role. This leads us to consider immersions and submersions. Immersions, together with the particular case of embeddings, are essential in the study of submanifolds while submersions are necessary to study quotient manifolds. We analyze different ways of considering submanifolds and also regard quotient manifolds, particularly those obtained by properly discontinuous actions of groups. Concrete examples are also presented.



# Introdución

Se  $M$  e  $N$  son variedades diferenciáveis de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, unha aplicación  $f: M \rightarrow N$  é unha aplicación diferenciábel  $C^\infty$  (que só chamaremos aplicación diferenciábel) se arredor de cada punto ten unha expresión local  $C^\infty$  definida nun aberto de  $\mathbb{R}^m$  con valores nun aberto de  $\mathbb{R}^n$ . A aplicación tanxente de  $f$  nun punto de  $M$  é unha aplicación  $f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  entre espazos tanxentes ás variedades que xoga o mesmo papel que a diferencial dunha aplicación nun punto dun aberto de  $\mathbb{R}^m$ . As propiedades da aplicación tanxente traducen o comportamento local da aplicación  $f: M \rightarrow N$ . Así, se  $f_{*p}$  é inxectiva en cada punto  $p \in M$  entón  $f$  é unha inmersión, e compórtase localmente como unha inclusión nun produto  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ; e se  $f_{*p}$  é sobrexectiva en cada  $p \in M$  entón  $f$  é unha submersión, e localmente é como unha proxección  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

No primeiro capítulo introdúcense as nocións básicas da teoría de variedades diferenciábeis (variedades topolóxicas, cartas, estruturas diferenciábeis, aplicacións diferenciábeis, difeomorfismos entre variedades, vectores tanxentes) que son necesarios para abordar os seguintes capítulos.

No segundo capítulo danse condicións equivalentes das definicións de inmersión e submersión en cada punto, e estúdanse algunhas propiedades. O rango dunha aplicación  $f: M \rightarrow N$  nun punto  $p \in M$  é o rango da aplicación linear tanxente  $f_{*p}$ , polo que se  $f$  é unha inmersión nun punto o seu rango é a dimensión de  $M$  e se  $f$  é unha submersión nun punto entón o seu rango é a dimensión de  $N$ . Pois ben, se  $f$  é unha inmersión ou unha submersión en  $p$  entón existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  tal que  $f$  ten o mesmo rango en tódolos puntos de  $U$ , polo que o conxunto de puntos nos que  $f$  é unha inmersión ou unha submersión é un aberto en  $M$ . Estudamos o teorema de rango constante entre variedades diferenciábeis, que da unha xeneralización das propiedades características das inmersións e as submersións: unha aplicación de rango constante entre variedades diferenciábeis actúa localmente como a composición da proxección dun produto sobre un factor e unha inclusión deste factor noutro produto. O teorema de rango global, co que finaliza este capítulo, afirma que para unha aplicación diferenciábel de rango constante definida nunha variedade segundo numerable, o carácter sobrexectivo da aplicación implica que

é unha submersión, e como o carácter inxectivo implica que é unha inmersión tense que toda inmersión (ou submersión) bixectiva definida nunha variedade diferenciable segundo numerable é un difeomorfismo.

As inmersións dan lugar ás subvariedades e as submersións ás variedades cocientes. O terceiro capítulo comenza coa definición de subvariedades inmersas, embebidas e regulares dunha variedade diferenciable. Discútese as relacións entre estes tipos de subvariedades, onde está fortemente implicada a topoloxía da subvariedade (que pode ser máis fina que a topoloxía relativa). Analízanse propiedades como as que dan lugar a subvariedades regulares dunha variedade diferenciable a partir do teorema do rango constante e próbase a forma débil do teorema de Whitney para as variedades compactas: toda variedade diferenciable compacta é difeomorfa a unha subvariedade regular da variedade diferenciable  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Estúdase tamén a restrición de campos de vectores tanxentes a subvariedades.

Unha variedade cociente  $M'$  dunha variedade diferenciable  $M$  é un conxunto cociente  $M' = M/\sim$  cunha estrutura de variedade diferenciable tal que a proxección natural  $\pi: M \rightarrow M'$  é unha submersión. Agora, tense unicidade tanto da topoloxía (é necesariamente a topoloxía cociente) como da estrutura diferenciable posibles para que  $M'$  sexa unha variedade cociente de  $M$ . Considéranse en particular os cocientes de variedades que se obteñen como espazos de órbitas  $M/G$  dunha acción dun grupo  $G$  sobre unha variedade diferenciable  $M$ , como é o caso do espazo proxectivo complexo  $\mathbb{C}P^n$  (cociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  pola acción de  $\mathbb{C}^*$ , e tamén de  $\mathbb{S}^{n+1}$  pola acción de  $\mathbb{S}^1$ , que da lugar a fibración de Hopf). Un caso especialmente interesante é o de espazos de órbitas  $M/G$  obtidos por accións “propriadamente discontinuas” (aquí a dimensión de  $M/G$  coincide coa de  $M$ ) dos que analizamos a relación coas cubertas; como casos particulares aparecen o espazo proxectivo real  $\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{S}^n/O(1)$ , o toro  $n$ -dimensional  $T^n \approx \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ , a faixa de Moebius como un cociente  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ , e a botella de Klein como cociente  $\mathbb{R}^2/G$ , onde  $G$  é o conxunto  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  cunha certa operación non conmutativa. Tamén se estuda a proxectabilidade de campos de vectores diferenciables sobre  $M$  aos seus cocientes.

Para a elaboración deste traballo utilizáronse principalmente os libros de Boothby [1], Brickell e Clark [2], John M. Lee [5], Jeffrey M. Lee [3] e Warner [9]; a presentación das inmersións e das submersións polas propiedades equivalentes que as definen séguese de Pham Mau Quan [8] e algunhas nocións relacionadas coas variedades cocientes do libro de Margalef-Roig e Outerelo Domínguez [6].

# Capítulo 1

## Preliminares

En xeometría diferencial, as variedades son espazos topolóxicos que se comportan localmente como espazos euclidianos e están provistos dunha estrutura adicional (que se chama estrutura diferenciable) que permite trasladar a estes espazos as nocións fundamentais do cálculo diferencial e integral.

### 1.1. Variedades diferenciables

Un espazo topolóxico Hausdorff  $M$  dise que é unha *variedade topolóxica de dimensión  $m$*  se todo punto de  $M$  está contido nunha veciñanza aberta homeomorfa a un aberto de  $\mathbb{R}^m$ , é dicir, se  $M$  é un espazo localmente euclidiano  $m$ -dimensional.

O carácter localmente euclidiano permite introducir cartas sobre  $M$ . Unha *carta* sobre  $M$  é un par  $(U, \varphi)$ , onde  $U$  é un aberto en  $M$  e  $\varphi$  é un homeomorfismo de  $U$  nun aberto en  $\mathbb{R}^m$ ; dise que  $U$  é un *aberto coordinado* e  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  un *sistema de coordenadas*, onde as funcións  $x^i: U \rightarrow \mathbb{R}$  son as compoñentes de  $\varphi$  (isto é,  $x^i = r^i \circ \varphi$ , sendo  $r^i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  a proxección canónica  $i$ -ésima) e denomínanse *funcións coordinadas*.

Para converter unha variedade topolóxica  $M$  nunha variedade diferenciable utilizaranse as cartas. Unha familia  $\mathcal{A}$  de cartas sobre  $M$  tal que os seus abertos coordinados recubren  $M$  dise que é un *atlas* sobre  $M$ , e dise que o atlas  $\mathcal{A}$  é un *atlas diferenciable* se dúas cartas calquera  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  en  $\mathcal{A}$  son *compatibles*, no sentido de que os *cambios de cartas*  $\psi \circ \varphi^{-1} = \psi|_{U \cap V} \circ (\varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V)}$  e  $\varphi \circ \psi^{-1} = \varphi|_{U \cap V} \circ (\psi^{-1})|_{\psi(U \cap V)}$  son aplicacións de clase infinito

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} & \\ \varphi(U \cap V) & & \psi(U \cap V) \\ & \xleftarrow{\varphi \circ \psi^{-1}} & \end{array}$$

Un *atlas completo* sobre  $M$  é un atlas diferenciable que non está contido en ningún outro atlas diferenciable sobre  $M$ , e cada atlas diferenciable  $\mathcal{A}$  de  $M$  está contido nun único atlas completo  $\mathcal{A}_0$  sobre  $M$ , que está formado por tódalas cartas de  $M$  que son compatibles con tódalas cartas de  $\mathcal{A}$ .

Diremos que dous atlas diferenciables  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sobre unha variedade topolóxica  $M$  son *equivalentes* se están contidos nun mesmo atlas completo (o que dá lugar a unha relación de equivalencia no conxunto de tódolos atlas diferenciables sobre  $M$ ), e a clase de equivalencia  $[\mathcal{A}]_\infty$  definida por  $\mathcal{A}$  (tamén o único atlas completo  $\mathcal{A}_0$  na clase) dise que é unha *estrutura diferenciable* sobre  $M$ .

Se  $M$  é unha variedade topolóxica de dimensión  $m$ , un par  $(M, [\mathcal{A}]_\infty)$  é unha *variedade diferenciable* de dimensión  $m$ , aínda que se denotará simplemente por  $M$  sobreentendendo a estrutura diferenciable da variedade; calquera atlas nesta clase tamén se di que é un atlas *de*  $M$  e calquera carta  $(U, \varphi)$  no correspondente atlas completo é unha carta *da* variedade diferenciable  $M$ .

Se  $(U, \varphi)$  é unha carta de  $M$  e  $p \in U$  diremos que  $(U, \varphi)$  é unha *carta centrada en*  $p$  se  $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ , e que é unha *carta cúbica* se  $\varphi(U) = Q_m(\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$  para algún  $\varepsilon > 0$ . Para cada punto  $p$  dunha variedade diferenciable  $M$  hai unha carta cúbica de  $M$  centrada en  $p$ .

### • 1.1. Espazos vectoriais reais como variedades diferenciables

Sexa  $V$  un espazo vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión finita  $m \geq 1$ . Un isomorfismo  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  define unha topoloxía  $\tau_\varphi$  en  $V$  coa que  $\varphi$  é un homeomorfismo, así que  $V$  é unha variedade topolóxica de dimensión  $m$  e  $\mathcal{A}_\varphi = \{(V, \varphi)\}$  é un atlas diferenciable sobre  $V$ . Se  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  é outro isomorfismo entón as topoloxías  $\tau_\varphi$  e  $\tau_\psi$  coinciden e os atlas diferenciables  $\mathcal{A}_\varphi$  e  $\mathcal{A}_\psi$  son equivalentes (xa que  $\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \psi^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  son aplicacións lineais e polo tanto  $C^\infty$ ), así que definen a mesma estrutura diferenciable sobre  $V$ , que se converte nunha variedade diferenciable de dimensión  $m$ .

En particular,  $\mathbb{R}^m$  é unha variedade diferenciable de dimensión  $m$  coa estrutura diferenciable definida polo atlas  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^m, \text{id}_{\mathbb{R}^m})\}$ , e dicimos que  $\text{id}_{\mathbb{R}^m} = (r^1, \dots, r^m)$  é o sistema de coordenadas identidade de  $\mathbb{R}^m$ . O atlas completo da variedade diferenciable  $\mathbb{R}^m$  está formado por todos os pares  $(U, \varphi)$  onde  $U$  é un aberto en  $\mathbb{R}^m$  e  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$  é un difeomorfismo  $C^\infty$ .

O espazo vectorial de matrices reais  $M_{n \times m}(\mathbb{R})$  tamén ten unha estrutura de variedade diferenciable de dimensión  $nm$ . Un atlas desta variedade diferenciable é  $\{(M_{n \times m}, \varphi)\}$  onde

$\varphi$  é o isomorfismo

$$a = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} \in M_{n \times m} \mapsto \varphi(a) = (a_1^1, \dots, a_m^1, \dots, \dots, a_1^n, \dots, a_m^n) \in \mathbb{R}^{nm}.$$

### • 1.2. Subvariedades abertas

Calquera subconxunto aberto  $W$  dunha variedade diferenciable  $M$  distinto do baleiro, coa topoloxía relativa, é unha variedade diferenciable da mesma dimensión que  $M$ . Se  $\mathcal{A}$  é un atlas de  $M$  entón  $\mathcal{A}_W = \{(U \cap W, \varphi|_{U \cap W}) \mid U \cap W \neq \emptyset, (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$  é un atlas diferenciable sobre  $W$  que define unha estrutura diferenciable sobre  $W$  (independente do atlas  $\mathcal{A}$  de  $M$ ) coa que dicimos que é unha *subvariedade aberta* de  $M$ .

En particular calquera subconxunto aberto  $W$  non baleiro de  $\mathbb{R}^m$  é unha variedade diferenciable de dimensión  $m$  e  $\mathcal{A}_W = \{(W, \text{id}_W)\}$  é un atlas de  $W$ .

O grupo linear xeral  $\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{a \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \det(a) \neq 0\}$  é unha subvariedade aberta da variedade de matrices  $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ , e polo tanto é unha variedade diferenciable de dimensión  $n^2$ , coa estrutura diferenciable definida polo atlas  $\{(\text{GL}(n, \mathbb{R}), \varphi)\}$ , onde

$$\begin{aligned} \varphi: \text{GL}(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \varphi(\text{GL}(n, \mathbb{R})) \subset \mathbb{R}^{n^2} \\ a = (a_j^i)_{1 \leq i, j \leq n} &\longmapsto (a_1^1, \dots, a_n^1, \dots, \dots, a_1^n, \dots, a_n^n). \end{aligned}$$

### • 1.3. Variedades produto

Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente. Se  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  é un atlas de  $M$  e  $\mathcal{B} = \{(V_\gamma, \psi_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$  é un atlas de  $N$ , entón  $\mathcal{A} \star \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_\gamma, \varphi_\alpha \times \psi_\gamma)\}_{(\alpha, \gamma) \in A \times \Gamma}$  é un atlas no espazo produto  $M \times N$ , que converte a este espazo topolóxico na variedade diferenciable  $(M \times N, [\mathcal{A} \star \mathcal{B}]_\infty)$  de dimensión  $m + n$ , que se denomina *variedade produto* de  $M$  e  $N$ .

### • 1.4. Aplicacións diferenciables

Supoñamos que  $M$  e  $N$  son variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación. Se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  son cartas de  $M$  e  $N$ , respectivamente, tales que  $f(U) \subset V$ , chámase *expresión local de  $f$*  respecto de  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  á aplicación

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

e tamén se di que é unha *expresión local de  $f$  en  $p$*  se  $p \in U$ .

Diremos que  $f: M \rightarrow N$  é unha *aplicación diferenciable* se para cada punto de  $M$  existe unha expresión local de  $f$  nese punto que é  $C^\infty$  como aplicación entre espazos euclidianos. Como consecuencia de que os cambios de cartas das variedades diferenciables  $M$  e  $N$  son  $C^\infty$  séguese que se  $f$  é diferenciable calquera expresión local de  $f$  é  $C^\infty$ .

Unha aplicación diferenciable  $f: M \rightarrow N$  é un *difeomorfismo* se  $f$  é bixectiva e  $f^{-1}: N \rightarrow M$  tamén é diferenciable. Se existe un difeomorfismo  $f: M \rightarrow N$  dise que as variedades diferenciables  $M$  e  $N$  son difeomorfas.

**Observación 1.5.** Sexa  $M$  unha variedade diferenciable.

- Se  $X$  é un conxunto e  $f: M \rightarrow X$  é unha aplicación bixectiva entón  $X$  ten unha única estrutura de variedade diferenciable (única topoloxía e única estrutura diferenciable) coa que  $f$  é un difeomorfismo.
- Se  $X$  é un espazo topolóxico e  $f: M \rightarrow X$  é un homeomorfismo entón existe unha única estrutura diferenciable sobre  $X$  coa que  $f$  é un difeomorfismo.

### • 1.6. A álgebra $\mathcal{F}(M)$ das funcións diferenciables reais

Considerando en  $\mathbb{R}$  a carta identidade  $(\mathbb{R}, \text{id}_{\mathbb{R}})$  é fácil ver que unha aplicación  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciable se, e só se, para cada punto  $p$  de  $M$  existe unha carta  $(U, \varphi)$ ,  $p \in U$ , tal que a expresión local  $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é  $C^\infty$  (ou, equivalentemente, se toda expresión local desta forma é  $C^\infty$ ). O conxunto  $\mathcal{F}(M)$  ten estrutura de espazo vectorial sobre  $\mathbb{R}$  e de anel. Co produto por escalares reais e a suma e o produto de funcións é unha álgebra asociativa, conmutativa e unitaria.

### • 1.7. Funcións meseta

Se  $M$  é unha variedade diferenciable e  $W$  unha veciñanza aberta dun punto  $p \in M$  entón existen unha veciñanza compacta  $K$  de  $p$  contida en  $W$  e unha *función meseta* para  $K \subset W$ , isto é, unha función diferenciable  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) \leq 1 & \quad \forall x \in M, \\ f(x) = 1 & \quad \forall x \in K, \end{aligned}$$

e con soporte compacto  $\text{sop } f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}} \subset W$  ([7, p. 69]).

Como consecuencia da existencia de funcións meseta tense que se  $h: W \rightarrow \mathbb{R}$  é una función diferenciable definida no aberto  $W \subset M$  entón  $h$  pódese estender localmente arredor de cada punto  $p \in W$ , é dicir, existe unha veciñanza aberta  $V$  de  $p$  con clausura compacta  $\bar{V} \subset W$ , e existe unha función diferenciable  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $g|_V = h|_V$  e  $g|_{M \setminus W} = 0$ .

## 1.2. O espazo vectorial tanxente

Un *vector tanxente* a unha variedade diferenciable  $M$  nun punto  $p \in M$  é unha aplicación  $v: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfai as seguintes propiedades

- (a)  $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$  (linearidade),  
 (b)  $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$  (regra do produto),

para cada  $f, g \in \mathcal{F}(M)$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

O conxunto de todos os vectores tanxentes a  $M$  en  $p$  denótase  $T_p(M)$  e adquire unha estrutura de espazo vectorial sobre  $\mathbb{R}$  da seguinte forma: Se  $v, w \in T_p(M)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a suma  $v + w$  e o produto por un escalar  $\lambda v$  defínense por

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f),$$

$$(\lambda v)(f) = \lambda v(f),$$

así que  $v + w$  e  $\lambda v$  tamén son vectores tanxentes a  $M$  en  $p$ . O espazo vectorial real  $T_p(M)$  é o *espazo tanxente* a  $M$  en  $p$ .

### • 1.8. A aplicación linear tanxente

Se  $M$  e  $N$  son variedades diferenciables e  $f: M \rightarrow N$  é unha aplicación diferenciable, a *aplicación tanxente* a  $f$  en  $p$  é a aplicación linear  $f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)$  definida por

$$f_{*p}(v)(h) = v(h \circ f), \quad v \in T_p(M), \quad h \in \mathcal{F}(N).$$

Se  $f: M \rightarrow N$  e  $g: N \rightarrow L$  son aplicacións diferenciables entón  $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$  para cada  $p \in M$  (*regra da cadea*). A aplicación tanxente á identidade  $\text{id}_M: M \rightarrow M$  en  $p \in M$  é a identidade en  $T_p(M)$ . Como consecuencia tense que se  $f: M \rightarrow N$  é un difeomorfismo entón  $f_{*p}$  é un isomorfismo para cada  $p \in M$  e  $(f^{-1})_{*f(p)} = (f_{*p})^{-1}$ .

**Observación 1.9.** Se  $W$  é unha subvariedade aberta de  $M$  entón a inclusión  $i: W \hookrightarrow M$  é unha aplicación diferenciable e, se  $p \in W$ , a aplicación tanxente  $i_{*p}: T_p(W) \rightarrow T_p(M)$  está dada por  $i_{*p}(v)(h) = v(h|_W)$  para cada  $h \in \mathcal{F}(M)$ , e é un isomorfismo natural que identifica os espazos tanxentes  $T_p(W)$  e  $T_p(M)$  ([5, p. 56]), e que permite aplicar sen ambigüedad cada  $v \in T_p(M)$  ás funcións diferenciables definidas nunha veciñanza aberta calquera do punto  $p$ .

### • 1.10. Unha base de $T_p(M)$

Se  $p \in M$ , cada sistema de coordenadas  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  definido nunha veciñanza  $U$  de  $p$  que é un aberto coordenado dá lugar a unha aplicación

$$\theta_p^\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p(M),$$

tal que se  $a \in \mathbb{R}^m$  a súa imaxe é o vector tanxente a  $M$  en  $p$  definido por

$$\begin{aligned} \theta_p^\varphi: \mathcal{F}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \theta_p^\varphi(f) = d(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))(a). \end{aligned}$$

Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canónica de  $\mathbb{R}^m$  denotamos

$$(\partial_{x^i})_p = \theta_p^\varphi(e_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

e tamén

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_p = (\partial_{x^i})_p(f) = D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), \quad f \in \mathcal{F}(M).$$

Pois ben, a aplicación  $\theta_p^\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow T_p(M)$  é un isomorfismo de espazos vectoriais ([5, p. 61]), logo  $\{(\partial_{x^1})_p, \dots, (\partial_{x^m})_p\}$  é unha base de  $T_p(M)$ . Polo tanto,  $T_p(M)$  é un espazo vectorial real da mesma dimensión que a variedade diferenciable  $M$ . Ademais, cada  $v \in T_p(M)$  pódese escribir como

$$v = \sum_{i=1}^m v(x^i) (\partial_{x^i})_p.$$

**Observación 1.11.** Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$  e unha aplicación diferenciable  $f: M \rightarrow N$ , e consideremos unha expresión local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  de  $f$  en  $p \in M$ . Se  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$  e  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ , entón para cada  $i = 1, \dots, m$  tense

$$\begin{aligned} f_{*p}(\partial_{x^i})_p &= \sum_{j=1}^n f_{*p}(\partial_{x^i})_p(y^j) (\partial_{y^j})_{f(p)} = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i} \right)_p (\partial_{y^j})_{f(p)} \\ &= \sum_{j=1}^n D_i(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) (\partial_{y^j})_{f(p)}, \end{aligned}$$

é dicir, tense o diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} (\partial_{x^i})_p & & T_p(M) & \xrightarrow{f_{*p}} & T_q(N) & & (\partial_{y^j})_{f(p)} \\ \uparrow & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \\ e_i & & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))} & \mathbb{R}^n & & e_j \end{array}$$

co que a matriz de  $f_{*p}$  respecto ás bases  $\{(\partial_{x^1})_p, \dots, (\partial_{x^m})_p\}$  e  $\{(\partial_{y^1})_{f(p)}, \dots, (\partial_{y^n})_{f(p)}\}$  de  $T_p(M)$  e  $T_{f(p)}(N)$ , respectivamente, é  $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ .

**Definición 1.12.** Sexa  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable entre variedades diferenciables,  $p$  un punto de  $M$  e  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  unha expresión local de  $f$  en  $p$ . O rango de  $f$  en  $p$  é

$$\text{rang}_p(f) = \text{rang}(f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_{f(p)}(N)) = \text{rang} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)).$$

O teorema da función inversa en  $\mathbb{R}^n$  vai xogar un papel moi importante no estudo das propiedades locais das aplicacións diferenciables.

**Teorema 1.13** (Teorema da función inversa en  $\mathbb{R}^n$ ). *Sexan  $G$  un aberto en  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in G$  e  $F: G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  unha aplicación  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Se  $\text{rang}(D_i F^j(x_0)) = n$  entón existen abertos  $A$  e  $B$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subset G$ , tales  $x_0 \in A$ ,  $F(x_0) \in B$ ,  $F|_A: A \rightarrow B$  é bixectiva, e  $F^{-1}: B \rightarrow A$  tamén é  $C^r$ .*



## Capítulo 2

# Inmersións e submersións

### 2.1. Inmersións

**Lema 2.1.** *Sexan  $G$  un aberto en  $\mathbb{R}^m$ ,  $a \in G$  e  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $m \leq n$ ) unha aplicación  $C^r$  tal que  $\text{rang}(D_i f^j(a)) = m$ . Entón existen abertos  $U \subset G \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $a \in U$ ,  $0 \in W$ , e unha aplicación  $h: U \times W \rightarrow V$  que é un difeomorfismo  $C^r$  tal que o seguinte diagrama é conmutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 x & & U \xrightarrow{f|_U} V \\
 \downarrow & & \downarrow i \quad \nearrow h \\
 (x, 0) & & U \times W
 \end{array}$$

*Demostración.* Se poñemos  $f = (f^1, \dots, f^n)$ , pola hipótese,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} D_1 f^1(a) & \dots & D_m f^1(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f^n(a) & \dots & D_m f^n(a) \end{pmatrix} = m,$$

e podemos supoñer, usando un automorfismo de  $\mathbb{R}^n$  que permuta as coordenadas, que a submatriz formada polas primeiras  $m$  filas ten determinante non nulo.

Definimos a aplicación  $F: G \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$F(x, y) = f(x) + (0, y) = (f^1(x), \dots, f^m(x), f^{m+1}(x) + y^1, \dots, f^n(x) + y^{n-m}),$$

que tamén é  $C^r$ ,  $F(a, 0) = f(a)$ , e ademais

$$\det DF(a, 0) = \det \begin{pmatrix} D_1 f^1(a) & \dots & D_m f^m(a) & & \\ \dots & \dots & \dots & & 0 \\ D_1 f^n(a) & \dots & D_m f^m(a) & & \\ & \star & & & I_{n-m} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Polo teorema da función inversa, existen abertos  $A$  e  $B$  en  $\mathbb{R}^m$  tales que  $(a, 0) \in A$ ,  $F(a, 0) = f(a) \in B$ , e  $F|_A: A \rightarrow B$  é un difeomorfismo  $C^r$ .

Dado que  $(a, 0) \in A \subset G \times \mathbb{R}^{n-m}$ , existen conxuntos abertos  $U \subset G$  e  $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$  tales que  $(a, 0) \in U \times W \subset A \subset \mathbb{R}^n$ . Ademais,  $V = F(U \times W)$  é un aberto en  $\mathbb{R}^n$  contido en  $B$ , e tense o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & V \\ \downarrow i & \nearrow h & \\ U \times W & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f(x) = h(x, 0) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (x, 0) & & \end{array}$$

□

**Teorema 2.2.** *Sean  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $m \leq n$ , e  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable,  $p \in M$ ,  $q = f(p)$ . As seguintes condicións son equivalentes:*

- (i) *A aplicación tanxente  $f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_q(N)$  é inxectiva.*
- (ii) *Existen abertos  $U \subset M$ ,  $V \subset N$ ,  $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $p \in U$ ,  $0 \in W$ , e un difeomorfismo  $h: U \times W \rightarrow V$  tal que a inxestión  $i: x \in U \mapsto (x, 0) \in U \times W$  fai conmutativo o seguinte diagrama*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & V \\ \downarrow i & \nearrow h & \\ U \times W & & \end{array}$$

- (iii) *Existen cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $(V, \psi)$  de  $N$ ,  $q \in V$ ,  $p \in U$ ,  $q = f(p)$ , e unha veciñanza aberta  $W$  de  $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$  tal que a expresión local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  de  $f$  en  $p$  é*

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) = \varphi(U) \times W \subset \mathbb{R}^n, \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

*Demostración.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Sexan  $(U^*, \varphi)$  e  $(V^*, \psi)$  cartas de  $M$  e  $N$ , respectivamente tales que  $p \in U^*$ ,  $q \in V^*$  e  $f(U^*) \subset V^*$ , e consideremos a expresión local

$$\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U^*) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V^*) \subset \mathbb{R}^n.$$

De acordo coa observación 1.11, e pola hipótese (i),  $\text{rang } D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \text{rang } f_{*p} = m$  e, polo tanto, polo lema 2.1, existen conxuntos abertos  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$  e  $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}^{n-m}$ , tales que

$$\varphi(p) \in \tilde{U} \subset \varphi(U^*), \quad \psi(q) \in \tilde{V} \subset \psi(V^*), \quad 0 \in W,$$

e existe un difeomorfismo  $\tilde{h}: \tilde{U} \times W \rightarrow \tilde{V}$  tal que se ten o diagrama conmutativo

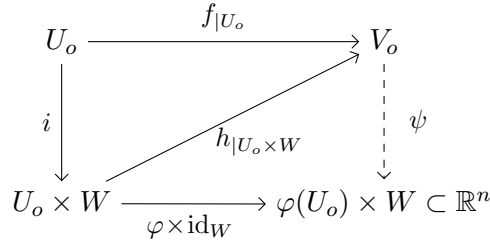
$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\hat{f}} & \tilde{V} \\ \tilde{i} \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \\ \tilde{U} \times W & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & \hat{f}(x) = \tilde{h}(x, 0) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (x, 0) & & \end{array}$$

Entón  $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$  é un aberto en  $M$  contido en  $U^*$ ,  $p \in U$  e  $V = \psi^{-1}(\tilde{V})$  é un aberto en  $N$  contido en  $V^*$  e o seguinte diagrama vai permitir definir o difeomorfismo  $h: U \times W \rightarrow V$  tal que  $h \circ i = f|_U$ ,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & V \\ \downarrow i & \nearrow h & \searrow \psi|_V \\ U \times W & & \tilde{V} \\ \downarrow \varphi|_U \times \text{id}_W & \nearrow \tilde{h} & \\ \tilde{U} \times W & & \end{array}$$

poñendo  $h = \psi|_V^{-1} \circ \tilde{h} \circ (\varphi|_U \times \text{id}_W)$ , xa que  $(h \circ i)(x) = h(x, 0) = \psi|_V^{-1} \tilde{h}(\varphi(x), 0) = \psi|_V^{-1}(\psi f \varphi^{-1})(\varphi(x)) = f(x)$  para cada  $x \in U$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) A partir da hipótese (ii) podemos tomar unha carta  $(U_o, \varphi)$  de  $M$  tal que  $p \in U_o \subset U$  e  $f(U_o) \subset V$  e considerar  $V_o = h(U_o \times W)$ , que é un aberto en  $N$  contido en  $V$ . Tense o difeomorfismo  $h|_{U_o \times W}: U_o \times W \rightarrow V_o$  e a inclusión  $i: x \in U_o \mapsto (x, 0) \in U_o \times W$ ,

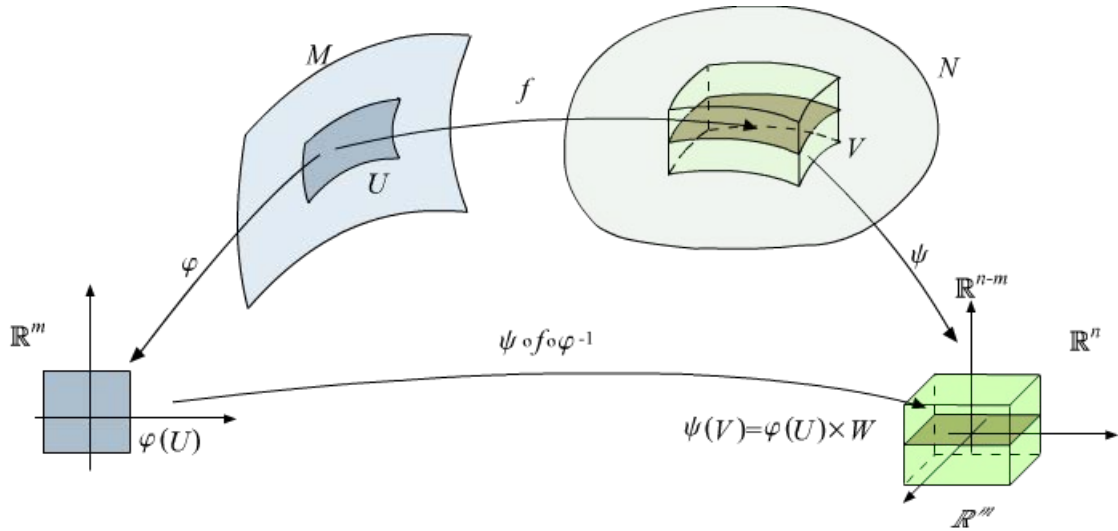


así que se poñemos  $\psi = (\varphi \times \text{id}_W) \circ ((h_{U_o \times W})^{-1})$ , entón  $\psi$  é un difeomorfismo, logo  $(U_o, \varphi)$  e  $(V_o, \psi)$  son cartas de  $M$  e  $N$  respectivamente,  $p \in U_o$ ,  $f(U_o) \subset V_o$  e definen a expresión local

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U_o) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(U_o) = \varphi(U_o) \times W \subset \mathbb{R}^n$$

de  $f$ , que está dada por

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) = ((\varphi \times \text{id}_W) \circ ((h_{U_o \times W})^{-1}))(f(\varphi^{-1}(x))) = (\varphi \times \text{id}_W)(\varphi^{-1}(x), 0) = (x, 0).$$



(iii)  $\Rightarrow$  (i) A existencia dunha expresión local como a da hipótese (iii) implica que

$$\text{rang}(f_{*p}) = \text{rang } D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \text{rang} \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = m \leq n,$$

e polo tanto  $f_{*p}$  é inyectiva. □

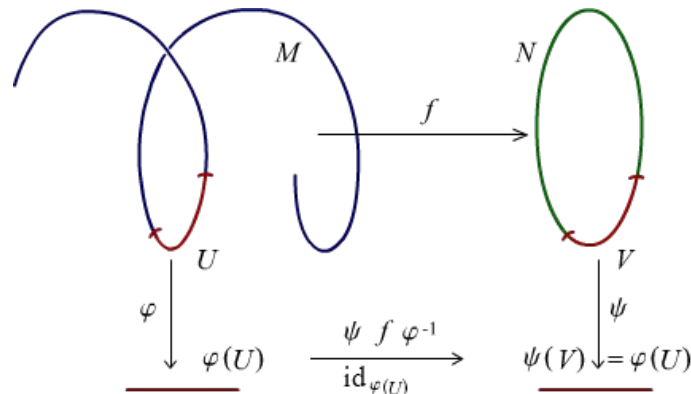
**Definición 2.3.** Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable. Dise que  $f$  é unha *inmersión* en  $p \in M$  se  $\text{rang}_p(f) = m$ , é dicir, se se verifican as condicións equivalentes do teorema 2.2. Dise que  $f: M \rightarrow N$  é unha *inmersión* se é unha inmersión en todos os puntos de  $M$ .

**Definición 2.4.** Dise que unha aplicación diferenciable  $f: M \rightarrow N$  é un *difeomorfismo local* en  $p \in M$  se existen veciñanzas abertas  $U$  de  $p$  e  $V$  de  $f(p)$  tales que  $f|_U: U \rightarrow V$  é un difeomorfismo. Se  $f$  é un difeomorfismo local en cada punto  $p \in M$  dise que  $f$  é un *difeomorfismo local*.

**Observación 2.5.** Unha aplicación  $f: M \rightarrow N$  é un difeomorfismo se, e só se,  $f$  é bixectiva e un difeomorfismo local en cada punto  $p \in M$ . Como un caso particular do teorema 2.2, téñense inmediatamente condicións equivalentes a ser difeomorfismo local nun punto, dadas no seguinte teorema.

**Teorema 2.6** (Teorema da función inversa para variedades). *Se  $f: M \rightarrow N$  é unha aplicación diferenciable,  $p \in M$ ,  $q = f(p)$ , as seguintes propiedades son equivalentes:*

- (i) *A aplicación tanxente  $f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_q(N)$  é bixectiva.*
- (ii)  *$f$  é un difeomorfismo local en  $p$ .*
- (iii) *Existe unha expresión local de  $f$  en  $p$  que é a identidade nun aberto de  $\mathbb{R}^m$ , (onde  $m = \dim M = \dim N$ ).*



**Definición 2.7.** Unha inmersión inxectiva  $f: M \rightarrow N$  dise que é un *embebemento regular* se tamén é un embebemento topolóxico (isto é,  $f$  define un homeomorfismo de  $M$  no subespazo topolóxico  $f(M)$  de  $N$ ).

**Exemplo 2.8.** Se  $W$  é unha subvariedade aberta dunha variedade diferenciable  $M$  entón a inclusión  $i: W \rightarrow M$  é un embebemento regular, xa que é un embebemento topolóxico e para cada  $p \in M$ , a aplicación tanxente  $i_{*p}: T_p(W) \rightarrow T_p(M)$  é un isomorfismo (1.9). Ademais,  $i$  é un difeomorfismo local.

**Exemplo 2.9.** Se  $M \times N$  é a variedade produto (1.3) das variedades diferenciables  $M$  e  $N$  de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $(p, q) \in M \times N$ , entón as inxeccións

$i_q: M \rightarrow M \times N$  e  $j_p: N \rightarrow M \times N$ , dadas por  $i_q(x) = (x, q)$  e  $j_p(y) = (p, y)$ , son embebecimientos regulares. En efecto, son embebecimientos topolóxicos, e son inmersións, xa que se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  son cartas de  $M$  e  $N$ , respectivamente, tales que  $p \in U$ ,  $q \in V$ , entón  $i_q$  e  $j_p$  teñen expresións locais da forma

$$\begin{aligned} x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\longmapsto (x, \psi(q)) \in \varphi(U) \times \psi(V) \subset \mathbb{R}^{m+n}, \\ y \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n &\longmapsto (\varphi(p), y) \in \varphi(U) \times \psi(V) \subset \mathbb{R}^{m+n}, \end{aligned}$$

que son  $C^\infty$ , e ademais  $\text{rang}_p(i_q) = m = \dim M$  e  $\text{rang}_q(j_p) = n = \dim N$ .

**Exemplo 2.10.** A aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t) = (\sin 2\pi t, \sin \pi t)$  é unha inmersión non inxectiva. A súa restrición ao intervalo  $I = (-1, 1)$  é unha inmersión inxectiva pero non un embebecemento. O conxunto  $f(\mathbb{R}) = f(I)$  é a lemniscata. (véxase o exemplo 3.5).

**Observación 2.11.** Dado que toda aplicación inxectiva e continua  $f$  dun espazo compacto  $M$  nun espazo Hausdorff  $N$  é un embebecemento (xa que é pechada, pois leva conxuntos pechados, logo compactos, en compactos que polo tanto son pechados, así que  $f$  define un homeomorfismo de  $M$  no subespazo topolóxico  $f(M)$  de  $N$  porque ten inversa continua), tense inmediatamente que no caso en que a variedade diferenciable  $M$  sexa compacta, toda inmersión inxectiva  $f: M \rightarrow N$  é un embebecemento regular.

O seguinte resultado amosa que a diferenza entre inmersión e embebecemento regular ten natureza global posto que cada inmersión é localmente un embebecemento regular.

**Proposición 2.12.** *Se  $f: M \rightarrow N$  é unha inmersión entón para cada  $p \in M$  existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  tal que  $f|_U: U \rightarrow N$  é un embebecemento regular.*

*Demostración.* Sexan  $f: M \rightarrow N$  unha inmersión e  $p \in M$ . Entón, polo apartado (ii) do teorema 2.2, existen abertos  $U \subset M$  e  $V \subset N$ , onde  $p \in U$  e  $f(p) \in V$ , e unha veciñanza aberta  $W$  de  $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ , e existe un difeomorfismo  $h: U \times W \rightarrow V$  tal que se consideramos a aplicación  $i_0: x \in U \mapsto (x, 0) \in U \times W$  entón  $f|_U: U \rightarrow N$  pode escribirse como a composición  $j \circ h \circ i_0$ ,

$$\begin{array}{ccccc} & & & & f|_U \\ & & & & \curvearrowright \\ U & \xrightarrow{\quad} & V & \xrightarrow{j} & N \\ & \searrow i_0 & \nearrow h & & \\ & & U \times W & & \end{array}$$

e como a inxección  $i_0$  nun produto (exemplo 2.9), o difeomorfismo  $h$ , e a inclusión  $j$  da subvariedade aberta  $V$  en  $N$  (exemplo 2.8) son inmersións e embebecimientos topolóxicos tense que  $f|_U$  tamén o é.  $\square$

A caracterización local das inmersións permite obter o seguinte resultado de factorización de aplicacións diferenciables.

**Teorema 2.13** (Lema de factorización). *Sexan  $M$ ,  $N$  e  $L$  variedades diferenciables de dimensións  $m$ ,  $n$  e  $l$ , respectivamente, e supoñemos que  $f: M \rightarrow N$  é unha inmersión inxectiva. Sexa  $L$  unha variedade diferenciable e  $g: L \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable que se factoriza a través de  $(M, f)$ , isto é,  $g(L) \subset f(M)$ , e consideramos a única aplicación  $g_0: L \rightarrow M$  tal que  $f \circ g_0 = g$ .*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{g} & N \\ & \searrow g_0 & \uparrow f \\ & & M \end{array}$$

- (a) *Se  $f$  é un embebecimento regular entón  $g_0$  é continua.*  
 (b) *Se  $g_0$  é continua entón é diferenciable.*

*Demostración.* Como  $g(L) \subset f(M)$  pódese considerar a aplicación  $\tilde{g}: L \rightarrow f(M)$  definida por  $g$ , e por ser  $f$  inxectiva tense a aplicación bixectiva  $\tilde{f}: M \rightarrow f(M)$  definida por  $f$ . Polo tanto  $g_0: L \rightarrow M$  está definida como a composición

$$L \xrightarrow{\tilde{g}} f(M) \xrightarrow{\tilde{f}^{-1}} M.$$

(a) Se  $f$  é un embebecimento entón  $\tilde{f}$  é un homeomorfismo de  $M$  no subespazo  $f(M)$  de  $N$ , e por ser  $g$  diferenciable entón é continua e tamén o é  $\tilde{g}$  de  $L$  no subespazo topolóxico  $f(M)$  de  $N$ . Polo tanto  $g_0 = \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{g}$  é continua.

(b) Se  $p \in L$  e  $q = g_0(p)$  atopemos unha expresión local  $C^\infty$  de  $g_0$  en  $p$ . Por ser  $f$  inmersión, o teorema 2.2 garante que podemos tomar cartas  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  de  $M$  e  $N$ , respectivamente,  $q \in U$ , tales que definen unha expresión local de  $f$  en  $q$  da forma

$$x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} (x, 0) \in \psi(V) = \varphi(U) \times W \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \in W \subset \mathbb{R}^{n-m}.$$

Como  $g_0: L \rightarrow M$  é continua, existe unha carta  $(G, \zeta)$  de  $L$ ,  $p \in G$ , tal que  $g_0(G) \subset U$ , así que basta ver que  $\varphi \circ g_0 \circ \zeta^{-1}: \zeta(G) \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \varphi(U)$  é  $C^\infty$ . Por ser  $g: L \rightarrow N$  diferenciable, a expresión local  $\psi \circ g \circ \zeta^{-1}$  é  $C^\infty$ , e tense

$$\psi \circ g \circ \zeta^{-1} = \psi \circ (f \circ g_0) \circ \zeta^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ g_0 \circ \zeta^{-1}),$$

logo

$$\varphi \circ g_0 \circ \zeta^{-1}: z \in \zeta(G) \mapsto ((\varphi \circ g_0 \circ \zeta^{-1})(z), 0) \in \varphi(U) \times W,$$

e polo tanto  $\varphi \circ g_0 \circ \zeta^{-1}$  tamén é  $C^\infty$ . □

## 2.2. Submersións

**Lema 2.14.** *Sexan  $G$  un aberto en  $\mathbb{R}^m$ ,  $a \in G$  e  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $m \geq n$ ) unha aplicación  $C^r$  tal que  $\text{rang}(D_i f^j(a)) = n$ . Entón existen abertos  $U \subset G \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ ,  $a \in U$ ,  $0 \in W$ , e unha aplicación  $h: U \rightarrow V \times W$  que é un difeomorfismo  $C^r$  tal que o seguinte diagrama é conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f|_U} & V \\ & \searrow h & \nearrow \pi_1 \\ & & V \times W \end{array}$$

*Demostración.* Poñendo  $f = (f^1, \dots, f^n)$ , por hipótese

$$\text{rang} \begin{pmatrix} D_1 f^1(a) & \dots & D_m f^1(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 f^n(a) & \dots & D_m f^n(a) \end{pmatrix} = n,$$

e podemos supoñer que a submatriz formada polas  $n$  primeiras columnas ten determinante non nulo (en caso contrario bastaría permutar as coordenadas mediante un automorfismo de  $\mathbb{R}^m$ ).

Definimos a aplicación  $H: G \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m$  por

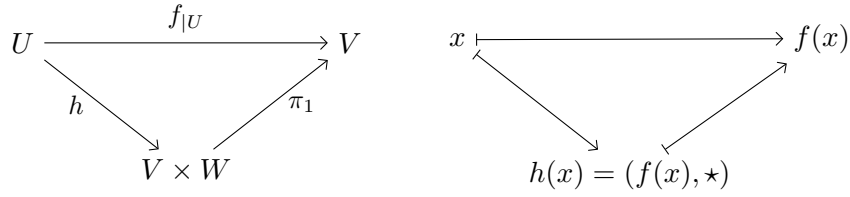
$$H(x) = \underbrace{(f^1(x), \dots, f^n(x))}_{f(x)}, x_{n+1} - a_{n+1}, \dots, x_m - a_m$$

que é tamén  $C^r$ ,  $H(a) = (f(a), 0)$  e

$$\det DH(a) = \det \begin{pmatrix} D_1 f^1(a) & \dots & D_n f^1(a) & & \\ \dots & \dots & \dots & \star & \\ D_1 f^n(a) & \dots & D_n f^n(a) & & \\ & & 0 & & I_{m-n} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Polo teorema da función inversa, existen veciñanzas abertas  $A$  e  $B$  en  $\mathbb{R}^m$  de  $a$  e  $H(a) = (f(a), 0)$ , respectivamente, de xeito que  $H|_A: A \rightarrow B$  é un difeomorfismo  $C^r$ .

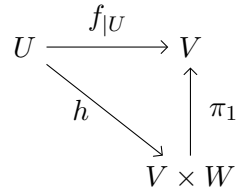
Se  $V \subset \mathbb{R}^n$  e  $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$  son abertos tales  $(f(a), 0) \in V \times W \subset B$  entón o conxunto  $U = H^{-1}(V \times W) \subset A$  é un aberto en  $\mathbb{R}^m$ , e tomando  $h = H|_U$ , tense o seguinte diagrama conmutativo



□

**Teorema 2.15.** *Sean  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensión  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $m \geq n$ , e  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable,  $p \in M$ ,  $q = f(p)$ . As seguintes condicións son equivalentes:*

- (i) *A aplicación tanxente  $f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_q(N)$  é sobrexectiva.*
- (ii) *Existen abertos  $U \subset M$ ,  $V \subset N$ ,  $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ ,  $p \in U$ ,  $0 \in W$ , e un difeomorfismo  $h: U \rightarrow V \times W$  tal que o seguinte diagrama é conmutativo:*



e  $\varphi(p) = (\psi(q), 0)$ .

- (iii) *Existen cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $(V, \psi)$  de  $N$ ,  $p \in U$ ,  $q \in V$ , e un aberto  $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ ,  $0 \in W$ , tal que a expresión local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  de  $f$  en  $p$  é da forma*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) = \psi(V) \times W \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad m \geq n,$$

$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto (x_1, \dots, x_n).$$

*Demostración.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Sean  $(U^*, \varphi)$  e  $(V^*, \psi)$  cartas de  $M$  en  $p$  e de  $N$  en  $q = f(p)$ , respectivamente, tales que  $f(U^*) \subset V^*$  e que definen a expresión local

$$\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U^*) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V^*) \subset \mathbb{R}^n.$$

Por hipótese e en virtude á observación 1.11,  $\text{rang } D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \text{rang } f_{*p} = n$ . Así, o lema 2.14 garante a existencia de abertos  $\tilde{U} \subset \varphi(U^*) \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{V} \subset \varphi(V^*) \subset \mathbb{R}^n$  e  $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$  tales que

$$\varphi(p) \in \tilde{U} \subset \varphi(U^*), \quad \psi(q) \in \tilde{V} \subset \psi(V^*), \quad 0 \in W,$$

e existe un difeomorfismo  $\tilde{h}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \times W$  que fai conmutativo o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{U} & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \tilde{V} \\
 & \searrow \tilde{h} & \uparrow \pi_1 \\
 & & \tilde{V} \times W
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{\quad} & \tilde{f}(x) \\
 & \searrow & \uparrow \\
 & & (\tilde{f}(x), 0)
 \end{array}$$

con  $\tilde{h}(\varphi(p)) = ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)), 0) = (\psi(q), 0)$ . Poñendo  $U = \varphi^{-1}(\tilde{U})$  e  $V = \psi^{-1}(\tilde{V})$  temos  $p \in U \subset U^* \subset M$  e  $q \in V \subset V^* \subset N$ . Finalmente,  $h = (\psi|_V \times \text{id}_W)^{-1} \circ \tilde{h} \circ \varphi|_U$  é un difeomorfismo  $h: U \rightarrow V \times W$  tal que  $\pi_1 \circ h = f|_U$  como se ve no diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U & \xrightarrow{f|_U} & V \\
 & \swarrow \varphi|_U & & \searrow h & \uparrow \pi_1 \\
 \tilde{U} & & & & \tilde{V} \times W \\
 & \searrow \tilde{h} & & \swarrow \psi|_V \times \text{id}_W & \\
 & & \tilde{V} \times W & & 
 \end{array}$$

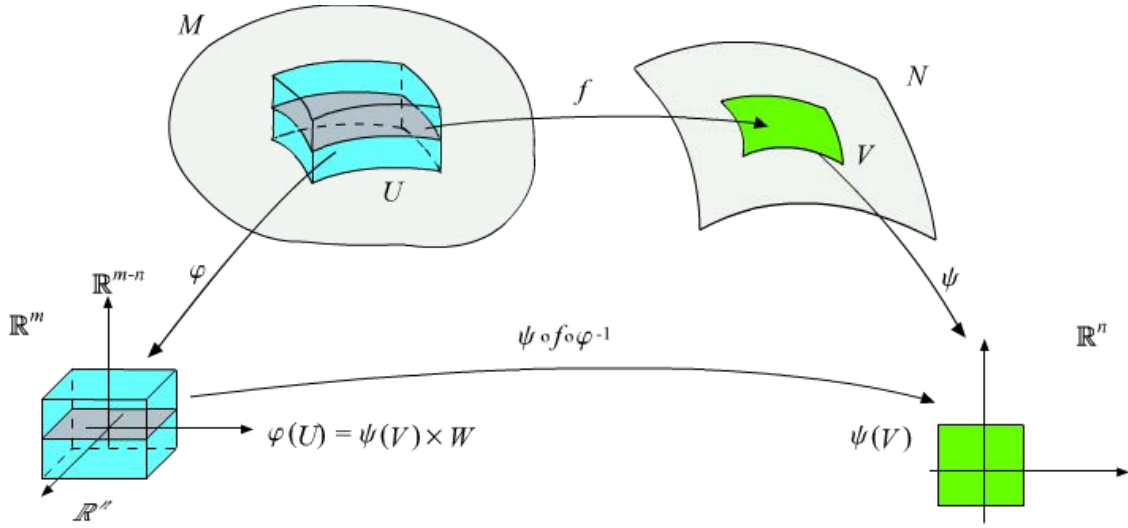
En efecto,  $(\pi_1 \circ h)(x) = \pi_1((\psi \times \text{id}_W)^{-1}(\tilde{h}(\varphi(x)))) = \pi_1((\psi \times \text{id}_W)^{-1}(\psi(f(x)), -)) = f(x)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Dando por certa a hipótese (ii), tomamos a carta  $(V_o, \psi)$  con  $q \in V_o \subset V$  e consideramos o aberto  $U_o = h^{-1}(V_o \times W) \subset U$ .

$$\begin{array}{ccc}
 U_o & \xrightarrow{f|_{U_o}} & V_o \\
 \varphi \downarrow & \searrow h|_{U_o} & \uparrow \pi_1 \\
 \psi(V_o) \times W & \xleftarrow{\psi \times \text{id}_W} & V_o \times W
 \end{array}$$

A aplicación  $\varphi = (\psi \times \text{id}_W) \circ h|_{U_o}$  é un difeomorfismo por ser composicións dos difeomorfismos  $\psi \times \text{id}_W: V_o \times W \rightarrow \psi(V_o) \times W$  e  $h|_{U_o}: U_o \rightarrow V_o \times W$ . Polo tanto,  $(U_o, \varphi)$  e  $(V_o, \psi)$  son cartas de  $M$  e  $N$  respectivamente,  $p \in U_o$ ,  $f(U_o) \subset V_o$ , que definen unha expresión local  $f$  en  $p$  do tipo que buscábamos,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U_o) = \psi(V_o) \times W \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V_o) \subset \mathbb{R}^n$ , e

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) &= (\psi \circ f)((\psi \times \text{id}_W) \circ h|_{U_o})^{-1}(x) \\
 &= \psi\left((f \circ h|_{U_o}^{-1})(\psi^{-1}(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}, \dots, x_m)\right) \\
 &= \psi(\psi^{-1}(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$



(iii)  $\Rightarrow$  (i) A existencia dunha expresión local como a da hipótese (iii) implica que

$$\text{rang}(f_{*p}) = \text{rang } D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \text{rang} \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix} = n,$$

e polo tanto  $f_{*p}$  é sobrexectiva. □

**Definición 2.16.** Se  $M$  e  $N$  son variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $f: M \rightarrow N$  é unha aplicación diferenciable e  $p \in M$ , dise que  $f$  é unha *submersión en  $p$*  se  $\text{rang}_p(f) = n$ , é dicir, se se verifican as condicións equivalentes do teorema 2.15. Dise que  $f: M \rightarrow N$  é unha *submersión* se o é en cada punto de  $M$ .

**Exemplo 2.17.** Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $M \times N$  a variedade produto. Se  $(p, q) \in M \times N$  entón as proxeccións  $\pi_1: M \times N \rightarrow M$  e  $\pi_2: M \times N \rightarrow N$  son submersións, xa que se  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  son cartas de  $M$  e  $N$ , respectivamente, tales que  $p \in U$  e  $q \in V$ , téñense as seguintes expresións locais de  $\pi_1$  e  $\pi_2$  en  $(p, q)$ :

$$\begin{aligned} (x, y) \in \varphi(U) \times \psi(V) \subset \mathbb{R}^{m+n} &\longmapsto x \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m, \\ (x, y) \in \varphi(U) \times \psi(V) \subset \mathbb{R}^{m+n} &\longmapsto y \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

que son aplicacións  $C^\infty$ , e ademais  $\text{rang}_{(p,q)}(\pi_1) = m = \dim M$  e  $\text{rang}_{(p,q)}(\pi_2) = n = \dim N$ .

**Exemplo 2.18 (A proxección do fibrado tanxente).** Se  $M$  é unha variedade diferenciable de dimensión  $m$  o seu *fibrado tanxente*  $T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(M)$  (unión disxunta) ten unha estrutura natural de variedade diferenciable de dimensión  $2m$  e a proxección definida

por

$$\begin{aligned}\pi: T(M) &\rightarrow M \\ v &\mapsto p \quad \text{se } v \in T_p(M)\end{aligned}$$

é unha submersión. En efecto,  $T(M)$  ten unha topoloxía e unha estrutura diferenciable tal que se  $\mathcal{A}_0 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)) \mid \alpha \in A\}$  é o atlas completo de  $M$  entón cada  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  é un subconxunto aberto de  $T(M)$  e cada aplicación

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \\ v = \sum_{i=1}^m v_i (\partial_{x_\alpha^i})_p &\longmapsto (x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^m(p), v_1, \dots, v_m)\end{aligned}$$

é un difeomorfismo. En particular, o conxunto

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 = \{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha) \mid \alpha \in A\}$$

é un atlas da variedade diferenciable  $T(M)$ , e a expresión local de  $\pi$  respecto das cartas  $(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)$  e  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  é

$$\varphi_\alpha \circ \pi \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}: (x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_m) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow (x_1, \dots, x_m) \in \varphi_\alpha(U_\alpha),$$

o que amosa que  $\pi$  é diferenciable e unha submersión, de acordo coa caracterización (iii) no teorema 2.15.

**Observación 2.19.** Sexa  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación continua. Se  $V$  é un subconxunto aberto de  $N$  e  $\sigma: V \rightarrow M$  é unha aplicación continua tal que a composición  $f \circ \sigma: V \rightarrow N$  é a inclusión  $V \hookrightarrow N$  entón  $\sigma$  é unha *sección local de  $f$* . Se ademais  $V = N$ , a aplicación  $\sigma: N \rightarrow M$  é unha *sección de  $f$* .

**Exemplo 2.20 (Campos de vectores).** Un campo de vectores sobre unha variedade diferenciable  $M$  é unha sección da proxección  $\pi$  do fibrado tanxente de  $M$ , isto é, unha aplicación  $X: M \rightarrow T(M)$  tal que  $\pi \circ X = \text{id}_M$ . En particular, o campo de vectores trivial  $0: p \in M \mapsto 0_p \in T_p(M)$  ten unha expresión local respecto das cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha)$  no exemplo 2.18 que é

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ 0 \circ \varphi_\alpha^{-1}: (x_1, \dots, x_m) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow (x_1, \dots, x_m, 0, \overset{(m)}{\dots}, 0) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m,$$

que da a caracterización (iii) de inmersión no teorema 2.2.

**Observación 2.21.** Se  $X$  é un campo de vectores sobre unha variedade diferenciable  $M$  entón para cada carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$ , e para cada  $p \in U$ , tense que cada  $X_p \in T_p(M)$  pódese escribir (1.10)

$$X_p = \sum_{i=1}^m \lambda^i(p) (\partial_{x^i})_p, \quad \lambda^i(p) = X_p(x^i),$$

onde para cada  $i = 1, \dots, m$ , a aplicación  $\lambda^i: U \rightarrow \mathbb{R}$  é a compoñente  $i$ -ésima de  $X$  en  $(U, \varphi)$ , e

$$X|_U = \sum_{i=1}^m \lambda^i \partial_{x^i}$$

dise que a *expresión local de  $X$  en  $(U, \varphi)$* . Agora ben, a expresión local da aplicación  $X: M \rightarrow T(M)$  respecto das cartas  $(U, \varphi)$  e  $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$  (onde a segunda obtense da primeira como no exemplo 2.18) está dada por

$$(\tilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1})(x) = (x^1(\varphi^{-1}(x)), \dots, x^m(\varphi^{-1}(x)), \lambda^1(\varphi^{-1}(x)), \dots, \lambda^m(\varphi^{-1}(x))).$$

Así que o campo de vectores  $X$  é un campo de vectores diferenciable, isto é, a aplicación  $X: M \rightarrow T(M)$  é diferenciable se, e só se, para cada punto  $p \in M$  hai unha carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $p \in U$  (equivalentemente para cada carta de  $M$ ) tal que as compoñentes de  $X$  nesta carta son funcións diferenciables.

Pois ben, cada campo de vectores diferenciable  $X: M \rightarrow T(M)$  é unha inmersión, xa que  $(\pi \circ X)_{*p} = (\text{id}_M)_{*p}$  para cada  $p \in M$ , logo  $\pi_{*X_p} \circ X_{*p} = \text{id}_{T_p(M)}$ , polo que cada  $X_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_{X_p}(T(M))$  é inxectiva.

**Proposición 2.22.** *Sexa  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable. Entón  $f$  é unha submersión se, e só se, cada punto de  $M$  pertence á imaxe dunha sección local diferenciable de  $f$ .*

*Demostración.* Supoñamos en primeiro lugar que  $f$  é unha submersión. Sexan  $p \in M$ ,  $q = f(p)$  e  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  cartas do tipo das do apartado (iii) do Teorema 2.15. Así, a expresión local de  $f$  nestes sistemas de coordenadas é

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, hai un  $m$ -cubo  $Q_m(\varepsilon)$  de lado  $\varepsilon$  centrado en  $\varphi(p) = (a_1, \dots, a_m)$  que está contido en  $\varphi(U)$ . Polo tanto, a súa imaxe pola expresión local de  $f$  será o  $n$ -cubo  $\tilde{Q}_n(\varepsilon)$  centrado en  $\psi(q) = (a_1, \dots, a_n)$  obtido proxectando as  $n$  primeiras compoñentes de  $Q_m(\varepsilon)$ . A aplicación  $\sigma: \psi^{-1}(\tilde{Q}_n(\varepsilon)) \rightarrow \varphi^{-1}(Q_m(\varepsilon)) \hookrightarrow M$  definida pola expresión local

$$\varphi \circ \sigma \circ \psi^{-1}: (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{Q}_n(\varepsilon) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, a_{n+1}, \dots, a_m) \in Q_m(\varepsilon)$$

é unha sección local diferenciable de  $f$  e  $(\varphi \circ \sigma \circ \psi^{-1})(a_1, \dots, a_n) = \varphi(p) \in Q_m(\varepsilon)$  polo que a súa imaxe contén a  $p$ .

Reciprocamente, supoñamos que cada punto  $p \in M$  pertence á imaxe dunha sección local diferenciable  $\sigma: V \rightarrow M$  de  $f$ . Sexa  $p \in M$  e unha sección local diferenciable de  $f$  tal que  $p \in \sigma(V)$ , así que  $f \circ \sigma$  é a inclusión  $\mathbf{i}: V \rightarrow N$ . Isto implica que se  $q \in V$  é tal que  $\sigma(q) = p$ , pola regra da cadea tense  $f_{*p} \circ \sigma_{*q} = \mathbf{i}_{*q}$ , que é un isomorfismo, xa que  $V$  é unha subvariedade aberta de  $N$  (observación 1.9), do que se deduce que  $f_{*p}$  é sobrexectiva.  $\square$

**Observación 2.23.** A esfera  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \|x\| = 1\}$  é unha variedade diferenciable de dimensión  $n$  (verémolo no exemplo 3.15 sin necesidade de construír de xeito explícito unha estrutura diferenciable). Utilizaremos a proposición anterior para probar (exemplo 3.30) que a proxección radial  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$  é unha submersión vendo que cada punto de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  está na imaxe dunha sección (global) diferenciable.

**Proposición 2.24.** *Toda submersión  $f: M \rightarrow N$  é unha aplicación aberta.*

*Demostración.* Dado un subconxunto aberto  $U$  de  $M$  vexamos que para calquera  $q \in f(U)$  podemos atopar unha veciñanza aberta de  $q$  contida en  $f(U)$ . En efecto, se  $p \in U$  é tal que  $f(p) = q$  entón existe unha sección local diferenciable  $\sigma: V \rightarrow M$  de  $f$  tal que  $\sigma(q) = p$ . O conxunto  $\sigma^{-1}(U)$  é unha veciñanza aberta de  $q$  porque  $\sigma$  é continua, e ademais está contido en  $f(U)$  por ser  $\sigma$  unha sección local de  $f$ : se  $y \in \sigma^{-1}(U)$  entón  $\sigma(y) \in U$ , logo  $y = f(\sigma(y)) \in f(U)$ .  $\square$

**Observación 2.25.** Xa que toda submersión  $f: M \rightarrow N$  é unha aplicación continua e aberta, se ademais é sobrexectiva entón é unha identificación. Como consecuencia, se  $g: N \rightarrow L$  é unha aplicación, tense que  $g$  é continua se, e só se,  $g \circ f$  é continua. O seguinte teorema dá unha propiedade característica da diferenciabilidade das aplicacións definidas na imaxe dunha submersión sobrexectiva.

**Teorema 2.26.** *Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables e  $f: M \rightarrow N$  unha submersión sobrexectiva. Se  $L$  é unha variedade diferenciable, unha aplicación  $g: N \rightarrow L$  é diferenciable se, e só se,  $g \circ f: M \rightarrow L$  é diferenciable.*

*Demostración.* Se  $g$  é diferenciable entón  $g \circ f$  tamén o é en canto que composición de aplicacións diferenciables.

Por outra parte, supoñamos que  $g \circ f$  é diferenciable. Se  $q \in N$ , como  $f$  é sobrexectiva, existe  $p \in M$  tal que  $f(p) = q$ . Pola proposición 2.22 existe unha sección local diferenciable  $\sigma: V \rightarrow M$  de  $f$  con  $\sigma(q) = p$ . Daquela, como  $f \circ \sigma = \mathbf{i}: V \hookrightarrow N$ ,

$$g|_V = g \circ (f \circ \sigma) = (g \circ f) \circ \sigma$$

é diferenciable por composición de aplicacións diferenciables. En conclusión,  $g$  é diferenciable por selo nunha veciñanza de cada punto.  $\square$

### 2.3. O teorema do rango constante

Como consecuencia das expresión locais nun punto das inmersións e submersións (apartado (iii) dos teoremas 2.2 e 2.15) tense que se unha aplicación  $f: M \rightarrow N$  é unha inmersión ou unha submersión en  $p \in M$  entón existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  na que  $f$  conserva o rango, isto é,  $f|_U$  é unha inmersión ou unha submersión en  $p$ , respectivamente, e polo tanto o conxunto de puntos nos que  $f$  é unha inmersión ou unha submersión é un aberto en  $M$ .

Unha xeneralización das expresións locais das inmersións e submersións vén dada polo teorema do rango constante en variedades diferenciáveis, que tamén é consecuencia do teorema da función inversa.

**Teorema 2.27** (Teorema do rango constante). *Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $p \in M$ . Sexa  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable de rango constante  $r$  nunha veciñanza de  $p$ . Entón existe unha carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  centrada en  $p$  e existe unha carta  $(V, \psi)$  de  $N$  centrada en  $f(p)$  tales que  $f(U) \subset V$ , coas que a expresión local de  $f$  está dada por*

$$\begin{aligned} \psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \overset{(n-r)}{\dots}, 0). \end{aligned}$$

*Demostración.* Sexan  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  e  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  cartas de  $M$  e  $N$  centradas en  $p$  e  $f(p)$ , respectivamente, tales que  $f(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$  e que o rango de  $f$  é  $r$  en tódolos puntos de  $\tilde{U}$ . Consideramos a aplicación

$$F = (F_1, \dots, F_n) = \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}: \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \tilde{\psi}(\tilde{V}) \subset \mathbb{R}^n,$$

que ten rango constante  $r$  en  $\tilde{\varphi}(\tilde{U})$  e  $F(0) = 0$ . En particular,  $\text{rang}_0(F) = r$ , polo que existe unha submatriz  $r \times r$  de  $DF(0)$  con determinante distinto de 0. Compoñendo  $F$  con automorfismos lineales de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  para permutar convenientemente as coordenadas pódese supoñer que a submatriz superior esquerda de  $DF(0)$  é non singular,

$$\left( D_i F_j(0) \right)_{1 \leq i, j \leq r} = \begin{pmatrix} D_1 F_1(0) & \dots & D_r F_1(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1 F_r(0) & \dots & D_r F_r(0) \end{pmatrix}.$$

A aplicación  $\alpha_0: \tilde{\varphi}(\tilde{U}) \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por

$$\alpha_0(x) = (F_1(x), \dots, F_r(x), x_{r+1}, \dots, x_m), \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \tilde{\varphi}(\tilde{U}),$$

é unha aplicación  $C^\infty$  e tense que a súa matriz jacobiana en 0 é da forma

$$D\alpha_0(0) = \begin{pmatrix} D_i F_j(0) & \star \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix},$$

onde  $I_{m-r}$  é a matriz identidade  $(m-r) \times (m-r)$ . Xa que  $\det D\alpha_0(0) \neq 0$ , polo teorema da función inversa existen abertos conexos  $U_0$  e  $A_0$  en  $\mathbb{R}^m$  tales que  $0 \in U_0$ ,  $\alpha_0(0) = 0 \in A_0$ ,  $U_0 \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$  e  $\alpha = \alpha_0|_{U_0}: U_0 \rightarrow A_0$  é un difeomorfismo. Podemos supoñer, facendo máis pequenos estes abertos, que  $A_0 = Q_m(\delta) = (-\delta, \delta)^m$  é un cubo.

Agora, cada  $x \in A_0$  pódese escribir

$$(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = \alpha(y) = (F_1(y), \dots, F_r(y), y_{r+1}, \dots, y_m), \quad y \in U_0,$$

logo, para cada  $x \in A_0$ ,

$$\begin{aligned} (F \circ \alpha^{-1})(x) &= (F \circ \alpha^{-1})(\alpha(y)) = (F_1(y), \dots, F_r(y), F_{r+1}(y), \dots, F_n(y)) \\ &= (x_1, \dots, x_r, F_{r+1}(\alpha^{-1}(x)), \dots, F_n(\alpha^{-1}(x))). \end{aligned}$$

Se poñemos  $G_{r+i}(x) = (F_{r+i} \circ \alpha^{-1})(x)$  para cada  $x \in A_0$ ,  $1 \leq i \leq n-r$ , pódese escribir

$$(F \circ \alpha^{-1})(x) = (x_1, \dots, x_r, G_{r+1}(x), \dots, G_n(x)), \quad x \in A_0,$$

e para cada  $x \in A_0$  tense que a matriz  $D(F \circ \alpha^{-1})(x)$  exprésase

$$D(F \circ \alpha^{-1})(x) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \star & D_{r+j}G_{r+i}(x) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, j \leq n-r.$$

Temos usado ata agora que  $\text{rang}_0(F) = r$ , pero pola hipótese o rango de  $F$  é constante en  $U_0 \subset \tilde{\varphi}(\tilde{U})$ , e como  $\alpha$  é un difeomorfismo,  $F \circ \alpha^{-1}$  ten rango constante  $r$  en  $A_0 = \alpha(U_0)$ . Polo tanto, as compoñentes  $D_{r+j}G_{r+i}(x)$  da matriz  $D(F \circ \alpha^{-1})(x)$  anúlanse en cada punto  $x \in A_0$ , logo as funcións  $G_{r+1}, \dots, G_n$  non dependen máis que de  $x_1, \dots, x_r$ , xa que o conxunto  $A_0$  é un cubo.

Imos construír agora un difeomorfismo axeitado definido nunha veciñana aberta do punto  $0 \in \tilde{\psi}(\tilde{V}) \subset \mathbb{R}^n$ . O conxunto

$$V_0 = \{(z_1, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n) \in \tilde{\psi}(\tilde{V}) \mid (z_1, \dots, z_r, 0, \overset{(m-r)}{\dots}, 0) \in A_0\}$$

é un aberto en  $\mathbb{R}^n$  xa que é a imaxe inversa do aberto  $A_0$  en  $\mathbb{R}^m$  pola aplicación continua

$$(y, z) \in \tilde{\psi}(\tilde{V}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow (y, 0) \in \mathbb{R}^m,$$

e  $0 = \tilde{\psi}(f(p)) \in V_0$ . Se poñemos

$$g_{r+i}(x_1, \dots, x_r) = G_{r+i}(x_1, \dots, x_r, 0, \overset{(m-r)}{\dots}, 0), \quad 1 \leq i \leq n-r,$$

entón

$$(F \circ \alpha^{-1})(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, g_n(x_1, \dots, x_r)),$$

e a aplicación  $\beta: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por

$$\beta(z_1, \dots, z_r, z_{r+1}, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_r, z_{r+1} - g_{r+1}(z_1, \dots, z_r), \dots, z_n - g_n(z_1, \dots, z_r)),$$

é inxectiva. Ademais, a súa matriz jacobiana en cada  $z \in V_0$  ten a expresión

$$D\beta(z) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ \star & I_{n-r} \end{pmatrix},$$

así que é non singular para cada  $z \in V_0$ , e polo teorema da función inversa,  $\beta$  é un difeomorfismo de  $V_0$  no conxunto  $B_0 = \beta(V_0)$ , que é aberto en  $\mathbb{R}^n$ .

Agora, a aplicación  $H = \beta \circ F|_{U_0} \circ \alpha^{-1}: A_0 \rightarrow B_0$  está dada por

$$H(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = \beta(x_1, \dots, x_r, g_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, g_n(x_1, \dots, x_r)),$$

e pola definición de  $\beta$  tense que

$$H: (x_1, \dots, x_m) \in A_0 \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in B_0.$$

Tiñamos que o aberto  $A_0$  é un cubo  $Q_m(\delta) = (-\delta, \delta)^m$ , e se tomamos  $\eta > 0$  tal que  $(-\eta, \eta) \subset B_0$  e  $\varepsilon = \min\{\delta, \eta\}$ , podemos supoñer que  $A_0 = Q_m(\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m$  e que  $B_0 = Q_n(\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)^n$ , e o seguinte diagrama, onde  $\alpha$  e  $\beta$  son difeomorfismos, é conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_0 \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{F|_{U_0}} & V_0 \subset \mathbb{R}^n \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ Q_m(\varepsilon) & \xrightarrow{H} & Q_n(\varepsilon) \end{array}$$

Se poñemos  $U = \tilde{\varphi}^{-1}(U_0) \subset \tilde{U}$ ,  $V = \tilde{\psi}^{-1}(V_0) \subset \tilde{V}$ ,  $\varphi = \alpha \circ \tilde{\varphi}|_U$ ,  $\psi = \beta \circ \tilde{\psi}|_V$ , téñense as cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$  centrada en  $p$  e  $(V, \psi)$  de  $N$  centrada en  $f(p)$ , e o diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U \subset M & \xrightarrow{f|_U} & V \subset N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \varphi(U) = Q_m(\varepsilon) & \xrightarrow{H} & \psi(V) = Q_n(\varepsilon) \end{array}$$

e  $H = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é a expresión local de  $f$  que queremos obter.  $\square$

Da proba do anterior teorema séguese o corolario que enunciámos a continuación.

**Corolario 2.28.** *Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente. Se  $f: M \rightarrow N$  é unha aplicación diferenciable de rango constante  $r$  nunha veciñanza de  $p \in M$  entón existe unha carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  centrada en  $p$  e existe unha carta  $(V, \psi)$  de  $N$  centrada en  $q = f(p)$ , con  $f(U) \subset V$ ,  $\varphi(U) = Q_m(\varepsilon)$  e  $\psi(V) = Q_n(\varepsilon)$  para algún  $\varepsilon > 0$ , e tales que a expresión local de  $f$  nestas cartas está dada por*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: (x_1, \dots, x_m) \in Q_m(\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \underbrace{\dots}_{n-r}, 0) \in Q_n(\varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)^n.$$

**Observación 2.29.** Do teorema do rango constante tamén se seguen en particular as caracterizacións locais das inmersións e submersións descritas no apartado (iii) de cada un dos teoremas 2.2 e 2.15.

**Observación 2.30.** Como consecuencia do teorema 2.27 tense o seguinte teorema do rango global ([5, p. 83, Theorem 4.14]). A hipótese de que a variedade  $M$  sexa segundo numerable requírese para a demostración dos apartados (b) e (c) e ademais faremos uso do concepto de conxunto denso en ningunha parte. Isto dise dos conxuntos cuxa clausura ten interior baleiro. Usaremos tamén o *teorema de categorías de Baire* [4, p.106], de acordo co cal unha unión numerable de conxuntos densos en ningunha parte nun espazo Hausdorff localmente compacto (ou nun espazo métrico completo) ten interior baleiro.

**Teorema 2.31.** *Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e sexa  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable de rango constante  $r$  e supoñemos que  $M$  é segundo numerable.*

- (a) *Se  $f$  é inxectiva entón é unha inmersión.*
- (b) *Se  $f$  é sobrexectiva entón é unha submersión.*
- (c) *Se  $f$  é bixectiva entón é un difeomorfismo.*

*Demostración.* (a) Supoñamos que  $f$  non é unha inmersión, isto é, que  $r < m$ . Dado  $p \in M$ , polo teorema do rango constante, existe unha carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  centrada en  $p$  e unha carta  $(V, \psi)$  de  $N$  centrada en  $f(p)$  con  $f(U) \subset V$  e coas que a expresión local  $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  de  $f$  é da forma

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \underbrace{\dots}_{n-r}, 0).$$

Entón,  $f$  non sería inxectiva porque para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno para que o punto  $(0, \dots, 0, \varepsilon)$  pertenza a  $\varphi(U)$  tense que  $\tilde{f}(0, \dots, 0, \varepsilon) = (0, \dots, 0)$ .

(b) Supoñamos que  $f$  é sobrexectiva pero non unha submersión, logo  $r < n$ . Para cada  $p \in M$ , polo teorema do rango constante, existe unha carta  $(\tilde{U}_p, \varphi_p)$  de  $M$  centrada en  $p$  e unha carta  $(V_p, \psi_p)$  de  $N$  centrada en  $f(p)$  con  $f(\tilde{U}_p) \subset V_p$  e coas que a expresión local de  $f$  é da forma

$$(\psi_p \circ f \circ (\varphi_p)^{-1})(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Sexa  $U_p$  a imaxe recíproca por  $\varphi_p$  dunha bóla aberta en  $\mathbb{R}^n$  centrada en  $\varphi_p(p) = 0$  e tal que  $f(\overline{U}_p) \subset V_p$ . Entón  $f(\overline{U}_p)$  é un conxunto compacto contido no subconxunto  $\{(y_1, \dots, y_n) \in V_p \mid y_{r+1} = \dots = y_n = 0\}$  de  $N$ , polo que é pechado en  $N$  e non contén ningún subconxunto aberto. En consecuencia, é denso en ningunha parte de  $N$ . Como  $M$  é segundo numerable, o recubrimento aberto  $\{U_p\}_{p \in M}$  admite un subrecubrimento numerable  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Deste xeito,  $\{f(U_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  é un recubrimento numerable de  $f(M)$  formado por conxuntos densos en ningunha parte na variedade  $N$ , que é un espazo Hausdorff localmente compacto. Entón, o teorema de categorías de Baire asegura que  $f(M)$  ten interior baleiro en  $N$ , polo que non pode ser  $N$ , logo  $f$  non podería ser sobrexectiva.

(c) Neste caso, por (a),  $f$  é unha inmersión e, por (b), unha submersión. En consecuencia, a aplicación tanxente  $f_{*p}$  é bixectiva para cada  $p \in M$ , o que equivale a que  $f$  sexa un difeomorfismo local en cada punto (polo teorema da función inversa para variedades 2.6) e como  $f$  é bixectiva, é un difeomorfismo.  $\square$

**Corolario 2.32.** *Sexa  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable, onde  $M$  é segundo numerable.*

(a) *Se  $f$  é unha inmersión bixectiva entón é un difeomorfismo.*

(b) *Se  $f$  é unha submersión bixectiva entón é un difeomorfismo.*

*Demostración.* Basta ter en conta o teorema anterior e que tanto as inmersións como as submersións teñen rango máximo en cada punto.  $\square$



## Capítulo 3

# Subvariedades e variedades cocientes

### 3.1. Subvariedades

Xa introducimos as subvariedades abertas en 1.2 e agora imos considerar varias definicións de subvariedade dunha variedade diferenciable  $M$ . O termo xenérico de subvariedade vai ser equivalente ao máis descritivo de subvariedade immersa, e que a topoloxía sexa a herdada pola de  $M$  define as subvariedades embebidas; as subvariedades regulares aparecerán como subespazos de  $M$  que se definen localmente por unha restrición de sistemas de coordenadas axeitadas da variedade.

**Definicións 3.1.** Sexa  $M$  unha variedade diferenciable de dimensión  $m$  e  $E \subset M$ .

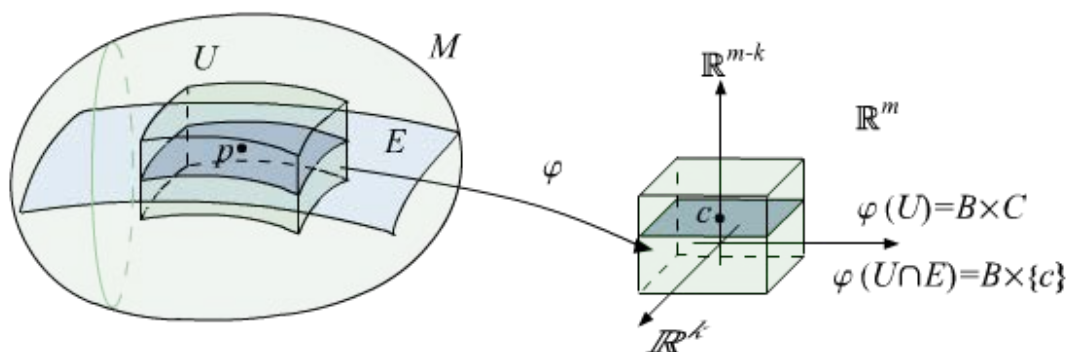
(1) Se  $E$  é unha variedade diferenciable diremos que é unha *subvariedade immersa* de  $M$  (ou simplemente unha *subvariedade* de  $M$ ) se a inclusión  $i: E \rightarrow M$  é unha inmersión.

(2) Se  $E$  é unha subvariedade immersa de  $M$  e ademais é un subespazo topolóxico de  $M$  (equivalentemente, a inclusión  $i: E \rightarrow M$  é un embebecemento regular) diremos que  $E$  é unha *subvariedade embebida* de  $M$ .

(3) Se  $E$  é un subespazo topolóxico de  $M$  diremos que é unha *subvariedade regular* de  $M$  se para algún  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq m$ ,  $E$  ten a *propiedade de  $k$ -subvariedade* de  $M$ , isto é, se para cada punto  $p \in E$ , existe unha carta  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $p \in U$ , tal que

$$\begin{aligned}\varphi(U) &= B \times C, \quad B \text{ aberto en } \mathbb{R}^k, \quad C \text{ aberto en } \mathbb{R}^{m-k}, \\ \varphi(U \cap E) &= B \times \{c\}, \quad c \in C.\end{aligned}$$

e dise que  $(U, \varphi)$  é unha carta de  $M$  *adaptada* a  $E$ .

Propiedade de  $k$ -subvariedade

**Observacións 3.2.** (1) Tamén se define unha subvariedade inmersa de  $M$  como un par  $(E, f)$ , onde  $E$  é unha variedade diferenciable e  $f: E \rightarrow M$  unha inmersión inxectiva. Neste caso, coa topoloxía e a estrutura diferenciable que fai que a bixección  $E \rightarrow f(E)$  definida por  $f$  sexa un difeomorfismo (véxase a observación 1.5), o conxunto  $f(E)$  convértese nunha subvariedade inmersa de  $M$ , coa definición 3.1 (1), difeomorfa a  $E$ , e distintos pares deste tipo poden definir a mesma subvariedade inmersa. En efecto, dous pares  $(E_1, f_1)$  e  $(E_2, f_2)$  tales que  $f_1: E_1 \rightarrow M$  e  $f_2: E_2 \rightarrow M$  son inmersións inxectivas son *equivalentes* se existe un difeomorfismo  $h: E_1 \rightarrow E_2$  tal que o seguinte diagrama é conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 & \xrightarrow{f_1} & M \\
 \downarrow h & & \nearrow \\
 E_2 & \xrightarrow{f_2} & M
 \end{array}$$

e pares equivalentes dan lugar a un único par distinguido  $(E, \mathfrak{i})$  na mesma clase, onde  $E \subset M$  e a inclusión  $\mathfrak{i}: E \hookrightarrow M$  é unha inmersión.

(2) Se  $E$  é unha variedade diferenciable e  $f: E \rightarrow M$  é unha inmersión inxectiva que tamén é un embebemento topolóxico, (isto é,  $f$  é un embebemento regular), entón a subvariedade  $f(E)$  de  $M$  difeomorfa a  $E$  (por  $f: E \rightarrow f(E)$ ) é unha subvariedade embebida de  $M$  de acordo coa definición 3.1 (2).

(3) Se  $(U, \varphi)$  é unha carta de  $M$  adaptada a un subconxunto  $E$  de  $M$  e  $p \in U \cap E$ , pódese modificar (compoñendo con difeomorfismos apropiados entre abertos de  $\mathbb{R}^m$  definidos por traslacións e homotecias) nunha carta cúbica de  $M$  centrada en  $p$  (isto é,  $\varphi(p) = (0, \binom{m}{k}, 0)$ ) adaptada a  $E$ , tal que

$$\varphi(U) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m, \quad \varphi(U \cap E) = (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \{(0, \binom{m-k}{k}, 0)\}, \quad (\text{para algún } \varepsilon > 0),$$

así que a existencia destas cartas para os puntos de  $E$  equivalen á propiedade de  $k$ -subvariedade de  $E$ .

(4) Polas definicións xa se ten inmediatamente que as subvariedades embebidas dunha variedade diferenciable  $M$  son subvariedades inmersas. En xeral, a topoloxía dunha subvariedade inmersa  $E$  de  $M$  é máis fina que a topoloxía relativa xa que a inclusión  $\mathbf{i}: E \rightarrow M$  é continua; soamente se as dúas topoloxías coinciden, a subvariedade inmersa  $E$  é unha subvariedade embebida de  $M$ . Por outra parte, dos teorema 3.9 e 3.10 concluírase que as subvariedades embebidas coinciden coas subvariedades regulares.

**Proposición 3.3.** *Se  $M$  é unha variedade diferenciable de dimensión  $m$ , as subvariedades de  $M$  de dimensión  $m$  son exactamente as subvariedades abertas.*

*Demostración.* Se  $W$  é unha subvariedade aberta de  $M$  de dimensión  $m$  entón a inclusión é un embebedemento regular (exemplo 2.8) e polo tanto  $W$  é unha subvariedade embebida (e inmersa) de  $M$ . Reciprocamente, se  $E$  é unha subvariedade inmersa de  $M$  de dimensión  $m$  entón a inclusión  $\mathbf{i}: E \hookrightarrow M$  é unha inmersión entre dúas variedades diferenciables da mesma dimensión, logo é un difeomorfismo local e polo tanto unha aplicación aberta, así que  $E$  é aberto en  $M$  (e todo aberto en  $E$  é aberto en  $M$  e na topoloxía relativa de  $E$ ).  $\square$

Como consecuencia inmediata do teorema 2.13, tense o seguinte lema de factorización.

**Lema 3.4** (Lema de factorización). *Sexan  $M$  e  $L$  variedades diferenciables,  $E$  unha subvariedade de  $M$  e  $g: L \rightarrow M$  unha aplicación diferenciable tal que  $g(L) \subset E$ . Sexa  $g_0: L \rightarrow M$  a aplicación dada por  $g_0(x) = g(x)$  para cada  $x \in L$ .*

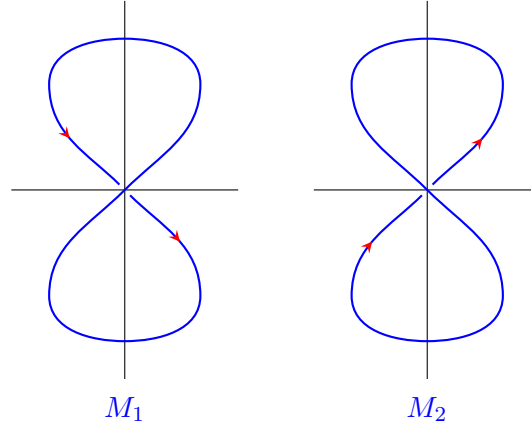
$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{g} & M \\ & \searrow g_0 & \uparrow \mathbf{i} \\ & & E \end{array}$$

- (a) *Se  $g_0$  é continua entón é diferenciable.*  
 (b) *Se  $E$  é unha subvariedade embebida de  $M$  entón  $g_0$  é diferenciable.*

Un subconxunto  $E$  dunha variedade diferenciable  $M$  pode admitir máis dunha estrutura de variedade diferenciable coa que é unha subvariedade de  $M$ , como se ve no seguinte exemplo.

**Exemplo 3.5.** Sexa  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(t) = (\text{sen } 2\pi t, \text{sen } \pi t)$ . O conxunto  $X = f(\mathbb{R})$  é a lemniscata ou “figura 8” (exemplo 2.10). Se consideramos os intervalos  $I = (-1, 1)$  e

$J = (0, 2)$  entón as aplicacións  $\alpha_1 = f|_I: I \rightarrow X$  e  $\alpha_2 = f|_J: J \rightarrow X$  son bixectivas. Para cada  $i = 1, 2$ , sexa  $M_i$  o conxunto  $X$  coa estrutura de variedade diferenciable para a que  $\alpha_i$  é un difeomorfismo. Entón  $M_1$  e  $M_2$  son dous espazos topolóxicos distintos que non son subespazos topolóxicos de  $\mathbb{R}^2$  e son subvariedades inmersas distintas de  $\mathbb{R}^2$ .



Non obstante, fixada a topoloxía nun subconxunto  $E$  de  $M$ , do lema de factorización séguese que  $E$  vai poder ter como moito unha estrutura diferenciable coa que sexa subvariedade de  $M$ .

**Proposición 3.6.** *Sexa  $M$  unha variedade diferenciable. Se  $E$  é un espazo topolóxico que está contido en  $M$  (como conxunto) entón existe ao suma unha estrutura diferenciable sobre  $E$  coa que é unha subvariedade de  $M$ . En particular, se  $E$  é un subespazo topolóxico de  $M$  entón existe ao sumo unha estrutura diferenciable sobre  $E$  coa que é unha subvariedade embebida de  $M$ .*

*Demostración.* Sexan  $[\mathcal{A}]_\infty$  e  $[\mathcal{B}]_\infty$  dúas estruturas diferenciables sobre  $E$  tales que  $E_a = (E, [\mathcal{A}]_\infty)$  e  $E_b = (E, [\mathcal{B}]_\infty)$  son subvariedades de  $M$ ; isto é, as inclusións  $i: E_a \rightarrow M$  e  $j: E_b \rightarrow M$  son inmersións.

$$\begin{array}{ccc}
 E_a & \xrightarrow{i} & M \\
 & \searrow \text{id}_E & \uparrow j \\
 & & E_b
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E_b & \xrightarrow{j} & M \\
 & \searrow \text{id}_E & \uparrow i \\
 & & E_a
 \end{array}$$

Polo lema 3.4 aplicado a ambos os diagramas anteriores, a identidade  $\text{id}_E: E_a \rightarrow E_b$  é un difeomorfismo. Entón  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  son equivalentes, así que inducen a mesma estrutura diferenciable no espazo topolóxico  $E$ . En particular, se  $E$  é un subespazo topolóxico de  $M$  entón  $i$  e  $j$  son embebedementos regulares.  $\square$

**Exemplo 3.7.** Se  $M$  e  $N$  son variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente entón, para cada  $q \in N$ , o subespazo  $M \times \{q\}$  de  $M \times N$  é unha subvariedade

embebida de  $M \times N$ , xa que a inxección  $i_q: x \in M \mapsto (x, q) \in M \times N$  é un embebeamento regular (exemplo 2.9).

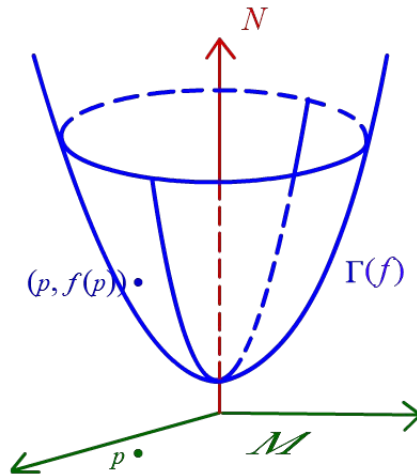
**Exemplo 3.8. (O grafo dunha aplicación diferenciable).** Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensión  $m$  e  $n$ , respectivamente. O grafo dunha función diferenciable  $f: M \rightarrow N$  é unha subvariedade embebida de dimensión  $m$  da variedade diferenciable  $M \times N$ , xa que a aplicación  $\gamma_f: M \rightarrow M \times N$  dada por

$$\gamma_f(x) = (x, f(x))$$

é un embebeamento regular cuxa imaxe é o grafo de  $f$ ,

$$\Gamma(f) = \{(p, q) \in M \times N \mid p \in M, q = f(p)\} = \gamma_f(M).$$

En efecto, como  $(\pi_1 \circ \gamma_f)(p) = p$ , onde  $\pi_1: M \times N \rightarrow M$  é a proxección, pola regra da cadea a composición  $(\pi_1)_{*(p, f(p))} \circ (\gamma_f)_{*p} = (\text{id}_M)_{*p}$  é un isomorfismo, e entón,  $\gamma_f$  é unha inmersión por ser  $(\gamma_f)_{*p}$  inxectiva para cada  $p \in M$ . Ademais,  $\gamma_f$  é un embebeamento topolóxico porque  $\pi_1|_{\Gamma(f)}$  é a inversa de  $x \in M \rightarrow \gamma_f(x) \in \Gamma(f)$ , que é continua, logo  $\gamma_f$  é un embebeamento regular.



Os dous teoremas seguintes amosan que as subvariedades embebidas de dimensión  $k$  están totalmente caracterizadas pola propiedade de  $k$ -subvariedade.

**Teorema 3.9.** *Sexa  $E$  un subconxunto dunha variedade diferenciable  $M$  de dimensión  $m$ . Se  $E$  é unha subvariedade regular de  $M$  entón admite unha (única) estrutura diferenciable coa que é unha subvariedade embebida de  $M$ .*

*Demostración.* Supoñamos que  $E \subset M$  é unha subvariedade regular da variedade diferenciable  $M$  de dimensión  $m$ , de modo que  $E$  ten a propiedade de  $k$ -subvariedade para algún  $k$ ,  $1 \leq k \leq m$ . En primeiro lugar, vexamos que é unha variedade topolóxica de dimensión  $k$ . Coa topoloxía relativa,  $E$  é Hausdorff por ser un subespazo topolóxico de  $M$ . Ademais, é localmente euclidiano de dimensión  $k$ . En efecto, sexa  $p \in E$  e  $(U, \varphi)$  unha carta de  $M$  adaptada a  $E$ , isto é,

$$\varphi(U) = B \times C, \quad B \text{ aberto en } \mathbb{R}^k, \quad C \text{ aberto en } \mathbb{R}^{m-k}, \quad \varphi(U \cap E) = B \times \{c\}, \quad c \in C.$$

Entón  $U_o = U \cap E$  é aberto en  $E$  e definimos

$$\varphi_o = \pi_1 \circ \varphi|_{U_o}: U_o \subset U \xrightarrow{\varphi} B \times C \xrightarrow{\pi_1} B,$$

que é un homeomorfismo xa que ten inversa continua  $\varphi_o^{-1}(x) = (\varphi^{-1} \circ \mathbf{j})(x) = \varphi^{-1}(x, c)$ , sendo  $\mathbf{j}: x \in \mathbb{R}^k \rightarrow (x, c) \in \mathbb{R}^n$ . Daquela,  $(U_o, \varphi_o)$  é unha carta sobre  $E$  en  $p \in U_o$  e podemos concluír que  $E$  é unha subvariedade topolóxica.

Agora, imos dotar a  $E$  dunha estrutura diferenciable construíndo un atlas a partir das cartas de  $M$  adaptadas a  $E$ . Sexan

$$\mathcal{C} = \{(U, \varphi) \mid (U, \varphi) \text{ é unha carta de } M \text{ adaptada a } E\}$$

e

$$\mathcal{A} = \{(U_o, \varphi_o) \mid U_o = U \cap E, \varphi_o = \pi_1 \circ \varphi|_{U_o}, (U, \varphi) \in \mathcal{C}\}.$$

O conxunto  $\mathcal{A}$  é un atlas sobre  $E$  pois claramente

$$E = \bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{C}} U_o,$$

porque, pola propiedade de  $k$ -subvariedade, para cada  $p \in E$  existe unha carta adaptada de  $M$  en  $p$ . Ademais, dúas cartas calquera  $(U_o, \varphi_o)$  e  $(V_o, \psi_o)$  en  $\mathcal{A}$  son compatibles, porque se  $U_o \cap V_o \neq \emptyset$ , a aplicación  $\psi_o \circ \varphi_o^{-1}$  é  $C^\infty$  por ser composición de aplicacións  $C^\infty$

$$\psi_o \circ \varphi_o^{-1}: x \xrightarrow{\mathbf{j}} (x, c) \xrightarrow{\psi_o \circ \varphi_o^{-1}} (\psi_o \circ \varphi_o^{-1})(x, c) \xrightarrow{\pi_1} (\pi_1 \circ \psi_o \circ \varphi_o^{-1} \circ \mathbf{j})(x),$$

polo que  $\mathcal{A}$  é un atlas diferenciable.

Por outra parte, a inclusión  $\mathbf{i}: E \hookrightarrow M$  é diferenciable porque para cada  $p \in E$  existe unha expresión local do seguinte xeito

$$\begin{aligned} \psi_o \circ \varphi_o^{-1}: \varphi_o(U_o) = B \subset \mathbb{R}^k &\rightarrow B \times C = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto (\varphi \circ \mathbf{i} \circ \varphi_o^{-1})(x) = \varphi(\varphi_o^{-1}(x, c)) = (x, c) \end{aligned}$$

de onde ademais é inmediato ver que  $i_{*p}$  é inxectiva para todo  $p \in E$  porque

$$\text{rang}_p(i) = \text{rang } D(\varphi \circ i \circ \varphi_o^{-1})(\varphi_o(p)) = \text{rang} \begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix} = k,$$

polo que  $i$  é unha inmersión. Finalmente, como  $E$  é un subespazo topolóxico de  $M$  concluímos que  $E$  é unha subvariedade embebida de  $M$ .  $\square$

**Teorema 3.10.** *Sexan  $M$  e  $E$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $k$ , respectivamente. Se  $E$  é unha subvariedade embebida de  $M$  entón  $E$  ten a propiedade de  $k$ -subvariedade de  $M$  e polo tanto é unha subvariedade regular de  $M$ .*

*Demostración.* Nas condicións do enunciado, por ser  $E$  unha subvariedade embebida, a inclusión  $i: E \hookrightarrow M$  é unha inmersión. Entón, polo teorema do rango para cada  $p \in E$  existen cartas  $(U_o, \varphi_o)$  de  $E$  e  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  de  $M$  tales que a expresión local da inclusión é da forma

$$\tilde{\varphi} \circ i \circ \varphi_o^{-1}: (x_1, \dots, x_k) \in \varphi_o(U_o) \longrightarrow (x_1, \dots, x_k, 0, \overset{(m-k)}{\dots}, 0) \in \tilde{\varphi}(\tilde{U}) = \varphi_o(U_o) \times W,$$

onde  $p \in U_o$  e  $W$  é unha veciñanza aberta de  $0 \in \mathbb{R}^{m-k}$ . Por ser  $E$  un subespazo topolóxico de  $M$ , podemos tomar un aberto  $G$  en  $M$  tal que  $U_o = G \cap E$ . Entón  $\tilde{\varphi}(U \cap G)$  é un aberto en  $\mathbb{R}^m$  tal que  $\tilde{\varphi}(p) = (\varphi(p), 0) \in \tilde{\varphi}(U \cap G)$ , e polo tanto existen abertos  $B$  en  $\mathbb{R}^k$  e  $C$  en  $\mathbb{R}^{m-k}$  tales que

$$\tilde{\varphi}(p) = (\varphi(p), 0) \in B \times C \subset \tilde{\varphi}(U \cap G) \subset \tilde{\varphi}(U) = \varphi_o(U_o) \times W.$$

Pois ben, se poñemos  $U = \tilde{\varphi}^{-1}(B \times C)$  e  $\varphi = \tilde{\varphi}|_U: U \rightarrow B \times C$  entón  $(U, \varphi)$  é unha carta de  $M$  tal que  $p \in U$  e  $\varphi(U \cap E) = B \times \{0\}$ , con  $0 \in C$ . Polo tanto,  $E$  ten a propiedade de  $k$ -subvariedade de  $M$ .  $\square$

**Observación 3.11.** Calquera subvariedade inmersa compacta  $E$  dunha variedade diferenciable é necesariamente unha subvariedade embebida de  $M$ , xa que ao ser a inclusión  $i: E \hookrightarrow M$  continua tamén é pechada (observación 2.11), logo é un embebecemento e polo tanto a topoloxía de  $E$  é necesariamente a topoloxía relativa.

Imos ver agora un resultado que, coa súa consecuencia (o teorema do valor regular), é útil para obter exemplos de variedades diferenciables como subvariedades regulares de espazos euclidianos.

**Teorema 3.12.** *Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable. Se  $f$  ten rango constante  $k$  en todo punto de  $M$  e  $q \in f(M)$  entón o conxunto de nivel  $E = f^{-1}(q)$  é unha subvariedade regular pechada de  $M$  de dimensión  $m - k$ .*

*Demostración.* Vexamos que o subespazo topolóxico  $E = f^{-1}(q)$  de  $M$  ten a propiedade de  $(m - k)$ -subvariedade de  $M$ . Se  $p \in E$ , entón como  $f$  ten rango constante  $k$  nunha veciñanza de  $p$ , o corolario do teorema do rango 2.28 garante que existen cartas  $(U, \varphi)$  de  $M$  en  $p$  e  $(V, \psi)$  de  $N$  en  $q$  centradas en  $p$  e  $q$ , respectivamente,  $f(U) \subset V$ , e tales que a expresión local de  $f$  é da forma

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: (x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \psi(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^n,$$

e polo tanto,

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap E) &= \varphi(U \cap f^{-1}(q)) = (-\varepsilon, \varepsilon)^m \cap (\varphi \circ f^{-1})(\psi^{-1}(0_n)) \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^m \mid x_1 = \dots = x_k = 0\} = \{0_k\} \times B, \end{aligned}$$

e así  $B = (-\varepsilon, \varepsilon)^{m-k}$ ,  $c = 0_k \in C = (-\varepsilon, \varepsilon)^k$  son tales que

$$\varphi(U) = C \times B, \quad \varphi(U \cap E) = \{c\} \times B.$$

Logo,  $E$  ten a propiedade de  $(m - k)$ -subvariedade de  $M$ , polo que é unha subvariedade regular de  $M$  de dimensión  $m - k$ . Ademais,  $E$  é pechado en  $M$  porque  $f$  é continua e  $\{q\}$  é pechado no espazo Hausdorff  $N$ .  $\square$

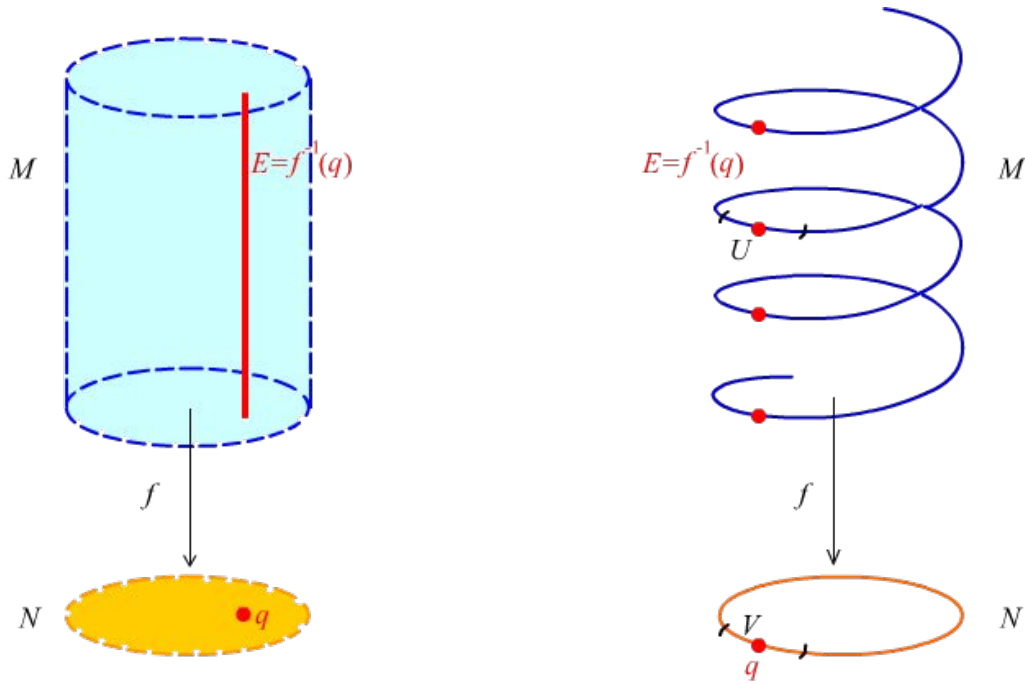
**Definición 3.13.** Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $m \geq n$ , e sexa  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable. Un punto  $p \in M$  chámase *punto regular* de  $M$  se  $f$  é unha submersión en  $p$ , e un punto  $q \in N$  dise que é un *valor regular* de  $f$  se  $f$  é unha submersión en todo punto  $p \in M$  tal que  $f(p) = q$ .

**Teorema 3.14** (Teorema do valor regular). *Sexan  $M$  e  $N$  variedades diferenciables de dimensións  $m$  e  $n$ , respectivamente,  $m \geq n$ ,  $f: M \rightarrow N$  unha aplicación diferenciable e supoñamos que  $q \in f(M)$  é un valor regular de  $f$ . Entón*

- (1) *se  $m > n$ ,  $E = f^{-1}(q)$  é unha subvariedade regular pechada de  $M$  de dimensión  $m - n$ ;*
- (2) *se  $m = n$ ,  $E$  é un subespazo discreto de  $M$ .*

*Demostración.* Ambos os dous resultados son consecuencia do teorema anterior.

(1) Se  $p \in E$  como o rango de  $f$  é  $n$  (máximo), tense que existe unha veciñanza aberta  $U_p$  de  $p$  tal que o rango de  $f$  é tamén  $n$ . Así,  $L = \bigcup_{p \in E} U_p$  é unha subvariedade aberta de  $M$ , en particular unha variedade diferenciable de dimensión  $m$  que contén a  $E$ . Pois ben, a aplicación  $f|_L: L \rightarrow N$  é unha aplicación diferenciable que ten rango constante  $n$  (en tódolos puntos de  $L$ ). Polo teorema 3.12,  $E$  é unha subvariedad regular de  $L$  (e polo tanto de  $M$ ) de dimensión  $m - n$ .



(2) Se  $m = n$  e  $p \in E$  entón  $f$  é un difeomorfismo local en  $p$ , logo existen veciñanzas abertas  $U$  de  $p$  e  $V$  de  $q$  tales que  $f_U: U \rightarrow V$  é un difeomorfismo. Basta agora observar que  $U \cap E = \{p\}$  polo que todos os puntos de  $E$  son abertos na topoloxía relativa de  $E$ , así que  $E$  é un subespazo discreto de  $M$ .  $\square$

O resultado anterior permítenos obter facilmente subvariedades regulares como o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.15.** (A esfera  $S^n$  como subvariedade regular de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). A aplicación  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(p) = \|p\|^2 = p_1^2 + \dots + p_{n+1}^2, \quad p = (p_1, \dots, p_{n+1}),$$

é diferenciable e

$$\text{rang}_p(f) = \text{rang}(2p_1, \dots, 2p_{n+1}) = 1,$$

para cada  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , logo cada  $q \in \mathbb{R}^+ = f(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  é un valor regular de  $f$ , polo que o conxunto de nivel

$$f^{-1}(q) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 = q\}$$

é una subvariedade regular de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimensión  $n$ . Obtense en particular desta forma a esfera  $S^n = f^{-1}(1)$  como variedade diferenciable de dimensión  $n$  e como subvariedade regular de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Exemplo 3.16.** A aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$  é diferenciable (basta aplicar o lema 2.13, de factorización, tendo en conta que  $\mathbb{S}^1$  é unha subvariedade regular de  $\mathbb{R}^2$ ). Ten rango 1 en cada punto de  $\mathbb{R}$ , logo é unha submersión (tamén un difeomorfismo local) e os conxuntos de nivel de  $f$ , en particular  $f^{-1}((1, 0)) = \mathbb{Z}$ , son subespazos discretos de  $\mathbb{R}$ .

**Observación 3.17.** Non todas as subvariedades regulares son conxuntos de nivel de aplicacións de rango constante, pero localmente son desta forma: un subconxunto  $E$  dunha variedade diferenciable  $M$  de dimensión  $m$  é unha subvariedade regular de dimensión  $k$  se, e só se, cada punto  $p$  de  $E$  ten unha veciñanza  $U \subset M$  tal que  $U \cap E = f^{-1}(q)$ , sendo  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  unha submersión, con  $f(p) = q$ .

En efecto, supoñamos que  $E$  é unha subvariedade regular de  $M$  de dimensión  $k$ . Entón para cada  $p \in E$  existe unha carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  adaptada a  $E$ ,  $\varphi(U \cap E) = B \times \{c\}$ . Se definimos

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$$

como  $f = \pi_2 \circ \varphi$ , onde  $\pi_2: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  é a segunda proxección, a expresión local de  $f$  é unha restrición da proxección  $\pi_2$ , logo é unha submersión e  $U \cap E = f^{-1}(c)$ . Reciprocamente, se para cada punto  $p$  de  $E$  existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  e unha submersión  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  tal que  $U \cap E$  é un conxunto de nivel de  $f$ , o teorema 3.12 garante que  $E$  é unha subvariedade regular de  $U$  (e de  $M$ ) de dimensión  $m - (m - k) = k$ .

**Observación 3.18.** H. Whitney demostrou en [10] que se  $M$  é unha variedade diferenciable segundo numerable de dimensión  $m$  entón existe un embebecemento regular de  $M$  en  $\mathbb{R}^{2m+1}$ , e en [11] mellorou este resultado probando que é difeomorfa a unha subvariedade regular de  $\mathbb{R}^{2m}$ .

Imos ver unha forma débil do teorema de Whitney para o caso das variedades compactas. Na demostración empréganse aplicacións definidas localmente como son os sistemas de coordenadas para construír un embebecemento regular, que é unha aplicación definida en toda a variedade. É un proceso de globalización, que é característico no estudo das variedades diferenciables.

**Teorema 3.19.** *Sexa  $M$  unha variedade diferenciable compacta de dimensión  $m$ . Entón existe un embebecemento regular  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* Para cada  $p \in M$  consideramos unha carta  $(U_p, \varphi_p)$  de  $M$ , onde  $\varphi_p = (x^1, \dots, x^m)$  e  $p \in U_p$ . Como cada  $x_p^j: U \rightarrow \mathbb{R}$  é unha función diferenciable, existen funcións diferenciables  $g_j$  de  $M$  en  $\mathbb{R}$  que estenden cada  $x_p^j$  nalgunha veciñanza aberta de  $p$  contida en  $U_p$ , polo que existe un aberto  $W_p$  en  $M$ ,  $p \in W_p \subset U_p$ , tal que  $g^j|_{W_p} = x_p^j|_{W_p}$

para todo  $j = 1, \dots, m$ . Agora, para cada  $p \in M$  existe unha función meseta  $h_p: M \rightarrow \mathbb{R}$  para  $K_p \subset W_p$  (1.7), onde  $K_p$  é unha veciñanza compacta de  $p$ ; se  $V_p$  é o interior de  $K_p$  entón a familia de conxuntos  $\{V_p \mid p \in M\}$  é un recubrimento aberto do espazo compacto  $M$  e, polo tanto, un número finito  $V_1, \dots, V_l$  destes abertos cubren  $M$  e hai funcións meseta diferenciables  $h_i: M \rightarrow \mathbb{R}$  que son tales que  $h_i|_{V_i} = 1$  e  $h_i|_{M \setminus W_i} = 0$  para  $1 \leq i \leq l$ . Polo tanto,  $M$  pode escribirse como unha unión finita de abertos  $V_1 \cup \dots \cup V_l$ , estando cada  $V_i$  contido nun aberto coordinado  $U_i$  cun sistema de coordenadas  $\varphi_i = (x_i^1, \dots, x_i^m)$ , e existen funcións diferenciables  $g_i^1, \dots, g_i^m: M \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g_i^j|_{V_i} = x_i^j|_{V_i}$  ( $1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m$ ).

Se  $n = ml + l$  definimos unha aplicación  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$f(x) = (h_1(x), \dots, h_l(x), g_1^1(x), \dots, g_1^m(x), \dots, g_l^1(x), \dots, g_l^m(x)),$$

que é diferenciable xa que o son as restricións das súas compoñentes a cada un dos abertos  $V_i$  que recubren  $M$ . Agora, dado  $p \in M$  supoñamos que  $p \in V_i \subset U_i$ . Entón o rango de  $f$  en  $p$  é

$$\text{rang}_p(f) = \text{rang } D(f \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(p)) = \text{rang} \left( \left( \frac{\partial(r^k \circ f)}{\partial x_i^j} \right)_p \right)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = m,$$

xa que a anterior matriz  $n \times m$  ten como submatriz a matriz identidade

$$\left( \left( \frac{\partial(r^k \circ g_i)}{\partial x_i^j} \right)_p \right)_{1 \leq j, k \leq m} = \left( \left( \frac{\partial x_i^k}{\partial x_i^j} \right)_p \right)_{1 \leq j, k \leq m}.$$

Polo tanto  $f$  é unha inmersión en cada punto de  $M$ .

Ademais,  $f$  é inxectiva. En efecto, sexan  $p, q \in M$  tales que  $f(p) = f(q)$  e supoñamos que  $p \in V_i$ . Entón  $h_i(q) = h_i(p) = 1$ , logo  $q \in V_i$ , xa que como  $h_i|_{M \setminus W_i} = 0$ , o punto  $q$  debe pertencer a  $W_i$ ; ademais  $g_i^j(p) = g_i^j(q)$  para todo  $i, j$ , e como  $g_i^j|_{V_i} = x_i^j|_{V_i}$  para  $1 \leq j \leq m$ , tense que  $x_i^j(p) = x_i^j(q)$ , logo  $\varphi_i(p) = \varphi_i(q)$ , así que  $p = q$ .

Xa que  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é unha inmersión inxectiva definida na variedade compacta  $M$ , a aplicación  $f$  é un embebecemento regular (véxase a observación 2.11).  $\square$

### • 3.20. Campos de vectores tanxentes a unha subvariedade

Se  $E$  é una subvariedade (inmersa ou embebida) dunha variedade diferenciable  $M$  e  $i: E \rightarrow M$  é a inclusión entón a aplicación tanxente  $i_{*p}: T_p(E) \rightarrow T_p(M)$  é inxectiva para cada  $p \in E$ , e o espazo tanxente  $T_p(E)$  pódese identificar co subespazo vectorial  $i_{*p}(T_p(E))$  de  $T_p(M)$ , que se di que é o *subespazo de  $T_p(M)$  tanxente a  $E$* . Un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  non sempre pode restrinxirse a un campo de vectores sobre a subvariedade, porque para cada punto  $p \in E$  o vector tanxente  $X_p \in T_p(M)$  non pertence

necesariamente a  $i_{*p}(T_p(E))$ . Dise que  $X$  é *tanxente a  $E$*  se  $X_p \in i_{*p}(T_p(E))$  para cada  $p \in E$ .

Se  $X$  é un campo de vectores sobre  $M$  tanxente a  $E$  entón está ben definido o campo de vectores  $\hat{X} = X|_E: E \rightarrow T(E)$  dado por

$$i_{*p}(\hat{X}_p) = X_p \in i_{*p}(T_p(E)) \subset T_p(M),$$

que se di que é a *restrición* de  $X$  a  $E$ .

**Proposición 3.21.** *Sexa  $M$  unha variedade diferenciable e  $E$  unha subvariedade inmersa de  $M$ . Se  $X$  é un campo de vectores diferenciable sobre  $M$  tanxente a  $E$  entón a restrición  $\hat{X}$  de  $X$  a  $E$  é un campo de vectores diferenciable sobre  $E$ .*

*Demostración.* De acordo coa observación 2.21 basta probar que dado un punto  $p \in E$  hai unha carta de  $E$  tal que as compoñentes de  $\hat{X}$  nesta carta son funcións diferenciables. Se supoñemos que as dimensión de  $E$  e  $M$  son  $k$  e  $m$ , respectivamente, pola caracterización local da inmersión  $i: E \rightarrow M$  (teorema 2.2) existen cartas  $(U, \varphi)$  de  $E$  e  $(V, \psi)$  de  $M$ ,  $p \in U$ , e existe unha veciñanza aberta  $W$  de  $0 \in \mathbb{R}^{m-k}$ , tal que a expresión local de  $i$  respecto de  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  está dada por

$$\begin{aligned} \psi \circ i \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k &\longrightarrow \psi(V) = \varphi(U) \times W \subset \mathbb{R}^m, \\ (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Imos ver que as compoñentes de  $\hat{X}$  en  $(U, \varphi)$  son funcións diferenciables utilizando que o son as do campo de vectores diferenciable  $X$  en  $(V, \psi)$ . Temos pois que se  $\psi = (y^1, \dots, y^m)$  entón  $X|_V = \sum_{j=1}^m \lambda^j \partial_{y^j}$ , onde cada  $\lambda^j: V \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciable, e temos que probar que se a expresión local de  $\hat{X}$  en  $(U, \varphi)$  é  $\hat{X}|_U = \sum_{j=1}^k \mu^j \partial_{x^j}$ , onde  $\varphi = (x^1, \dots, x^k)$ , entón cada  $\mu^j: U \rightarrow \mathbb{R}$  tamén é diferenciable. Agora, dado que

$$y^j \circ i|_U = \begin{cases} x^j & \text{se } 1 \leq j \leq k, \\ 0 & \text{se } k < j \leq m, \end{cases}$$

verifícase (véxase a observación 1.11)

$$i_{*q}(\partial_{x^j})_q = \sum_{l=1}^m \left( \frac{\partial(y^l \circ i)}{\partial x^j} \right)_q (\partial_{y^l})_q = \sum_{l=1}^k \left( \frac{\partial x^l}{\partial x^j} \right)_q (\partial_{y^l})_q = (\partial_{y^j})_q, \quad q \in U,$$

e polo tanto  $i_{*q}(T_q(E))$  é o subespazo de  $T_q(M)$  xerado por  $\{(\partial_{y^1})_q, \dots, (\partial_{y^k})_q\}$ . Como

$$X_q = \sum_{j=1}^m \lambda^j(q) (\partial_{y^j})_q \in i_{*q}(T_q(E)), \quad q \in U,$$

tense que  $\lambda_{|U}^j = \lambda^j \circ \mathbf{i}_U = 0$  se  $j > k$ . Así, para cada  $q \in U$ ,

$$X_q = \sum_{j=1}^k \lambda^j(q) (\partial_{y^j})_q = \sum_{j=1}^n \lambda^j(q) \mathbf{i}_{*q} (\partial_{x^j})_q = \mathbf{i}_{*q} \left( \sum_{j=1}^n \lambda^j(q) (\partial_{x^j})_q \right),$$

e como  $\hat{X}_q = \sum_{j=1}^n \mu^j(q) (\partial_{x^j})_q$  e  $\mathbf{i}_{*q}(\hat{X}_q) = X_q$  séguese que cada compoñente  $\mu^j$  de  $\hat{X}$  en  $(U, \varphi)$  é  $\mu_j = \lambda_j \circ \mathbf{i}_U$ , logo diferenciable.  $\square$

**Exemplo 3.22.** Se unha subvariedade embebida  $E$  de  $M$  é, como en (1) do teorema 3.14, a imaxe inversa por unha aplicación diferenciable  $f: M \rightarrow N$  dun valor regular  $q \in f(M)$  entón  $f \circ \mathbf{i}: E \rightarrow N$  é unha aplicación constante, así que  $f_{*p} \circ \mathbf{i}_{*p} = (f \circ \mathbf{i})_{*p} = 0$  para cada  $p \in E$ , logo  $\mathbf{i}_{*p}(T_p(E)) \subset \ker(f_{*p})$  e xa que a dimensión de  $E$  é  $\dim M - \dim N = \dim \ker(f_{*p})$ , tense que o subespazo de  $T_p(M)$  tanxente a  $E$  é o núcleo de  $f_{*p}: T_p(M) \rightarrow T_q(N)$ . No caso particular en que  $N = \mathbb{R}$ , un vector  $v \in T_p(M)$  está no subespazo tanxente a  $E$  se, e só se,  $v(f) = 0$ .

En particular, a esfera  $\mathbb{S}^n$  é unha subvariedade regular de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que é a imaxe inversa do valor regular  $1 \in \mathbb{R}$  pola aplicación  $f: p \in \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \|p\|^2 \in \mathbb{R}$  (exemplo 3.15). No sistema de coordenadas identidade  $\text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}} = (r^1, \dots, r^{n+1})$  pódese escribir  $f = \sum_{j=1}^{n+1} (r^j)^2$ , polo que un campo de vectores diferenciable  $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i \partial_{r^i}$  sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  é tanxente a  $\mathbb{S}^n$  se, e só se,  $X_p(f) = 0$  para cada  $p \in \mathbb{S}^n$ , isto é, se, e só se, se anula a restrición a  $\mathbb{S}^n$  da aplicación  $\sum_{j=1}^{n+1} r^j \lambda^j$ . Se  $k$  é a parte enteira de  $n/2$  entón

$$X = -r^2 \partial_{r^1} + r^1 \partial_{r^2} - r^4 \partial_{r^3} + r^3 \partial_{r^4} + \dots - r^{2k} \partial_{r^{2k-1}} + r^{2k-1} \partial_{r^{2k}}$$

é un campo de vectores diferenciable sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  que é tanxente a  $\mathbb{S}^n$ .

## 3.2. Variedades cocientes

Se  $M$  é unha variedade diferenciable e  $\sim$  unha relación de equivalencia no conxunto  $M$  entón o conxunto cociente  $M/\sim$  en xeral non ten unha estrutura de variedade diferenciable. Como as submersións son aplicacións continuas e abertas (proposición 2.24) e se además son sobrexectivas entón son identificacións, e os espazos imaxes de identificacións son espazos cocientes parece lóxico que a proxección natural dunha variedade diferenciable sobre unha variedade cociente sexa unha submersión. Isto motiva a seguinte definición.

**Definición 3.23.** Unha relación de equivalencia  $\sim$  nunha variedade diferenciable  $M$  dise que é unha *relación de equivalencia regular* se o conxunto cociente ten unha estrutura de variedade diferenciable (topoloxía Hausdorff e estrutura diferenciable) tal que a proxección natural  $\pi: M \rightarrow M/\sim$  é unha submersión.

**Exemplo 3.24.** En  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , definimos unha relación de equivalencia  $\sim$  por  $p \sim q$  se existe  $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $q = \lambda p$ . Se o espazo cociente  $\mathbb{R}^n/\sim$  admitise unha estrutura de variedade diferenciable tal que a proxección natural  $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\sim$  fose unha submersión, entón, polo teorema 3.14, as imaxes inversas dos puntos de  $\mathbb{R}^n/\sim$  (neste caso as clases de equivalencia) serían todos subconxuntos discretos ou todas subvariedades regulares pechadas de  $\mathbb{R}^n$ . Pero as clases son subvariedades regulares (non pechadas) de dimensión 1 e o subespazo discreto  $\{0\}$ . Polo tanto, a relación de equivalencia  $\sim$  non é regular. Obsérvese que, coa topoloxía cociente,  $\mathbb{R}^n/\sim$  non é nin Hausdorff nin localmente euclidiano.

Imos ver agora que se  $\sim$  é unha relación de equivalencia regular entón a estrutura de variedade diferenciable no conxunto cociente é única.

**Proposición 3.25.** *Sexa  $\sim$  unha relación de equivalencia regular nunha variedade diferenciable  $M$ . Entón  $M/\sim$  ten unha única topoloxía (a topoloxía cociente) e unha única estrutura diferenciable tal que a proxección natural  $\pi: M \rightarrow M/\sim$  é unha submersión.*

*Demostración.* En primeiro lugar, a única topoloxía posible en  $M/\sim$  de maneira que  $\pi$  sexa unha submersión é a topoloxía cociente xa que toda submersión sobrexectiva é unha identificación, logo un subconxunto  $E$  de  $M/\sim$  será aberto se, e só se,  $\pi^{-1}(E)$  é aberto en  $M$ .

Supoñamos agora que  $[\mathcal{A}_1]_\infty$  e  $[\mathcal{A}_2]_\infty$  son estruturas diferenciables sobre o espazo cociente  $M/\sim$  tales que  $\pi_1: M \rightarrow (M, [\mathcal{A}_1]_\infty)$  e  $\pi_2: M \rightarrow (M, [\mathcal{A}_2]_\infty)$  son submersións, e consideremos o diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & (M, [\mathcal{A}_1]_\infty) & \\
 \nearrow \pi_1 & \uparrow \text{id}_{M/\sim} & \\
 M & & \\
 \searrow \pi_2 & \downarrow \text{id}_{M/\sim}^{-1} & \\
 & (M, [\mathcal{A}_2]_\infty) & 
 \end{array}$$

Dado que as aplicacións  $\text{id}_{M/\sim} \circ \pi_1 = \pi_2$  e  $\text{id}_{M/\sim}^{-1} \circ \pi_2 = \pi_1$  son diferenciables e  $\pi_1$  e  $\pi_2$  son submersións sobrexectivas, do teorema 2.26 séguese que  $\text{id}_{M/\sim}: (M, [\mathcal{A}_1]) \rightarrow (M, [\mathcal{A}_2])$  e a súa inversa son diferenciables e polo tanto os cambios de cartas dos atlas  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  son aplicacións de clase infinito, co que as estruturas diferenciables  $[\mathcal{A}_1]$  e  $[\mathcal{A}_2]$  son a mesma.  $\square$

**Definición 3.26.** Sexa  $M$  unha variedade diferenciable e  $\sim$  unha relación de equivalencia regular en  $M$ . O espazo topolóxico cociente  $M/\sim$  coa única estrutura diferenciable tal que a proxección natural

$$\begin{aligned}\pi: M &\longrightarrow M' \\ p &\longmapsto [p]\end{aligned}$$

é unha submersión dise que é unha *variedade cociente* de  $M$ .

Imos ver agora que toda submersión define unha relación de equivalencia regular.

**Proposición 3.27.** *Se  $f: M \rightarrow N$  é unha submersión entón a relación de equivalencia  $\sim$  en  $M$  definida por*

$$p \sim q \iff f(p) = f(q)$$

*é regular, e a aplicación*

$$h: [p] \in M/\sim \longmapsto f(p) \in f(M)$$

*é un difeomorfismo.*

*Demostración.* Se  $f$  é unha submersión entón é unha aplicación aberta (proposición 2.24) e polo tanto  $f(M)$  é unha subvariedade aberta de  $N$ , e tense o seguinte diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ M/\sim & \xrightarrow{h} & f(M) \end{array}$$

O conxunto cociente  $M/\sim$  admite unha única topoloxía e unha única estrutura tal que a aplicación bixectiva  $h$  é un difeomorfismo. Ademais  $\pi = h^{-1} \circ f$  é unha composición de submersións e polo tanto unha submersión, logo  $\sim$  é unha relación de equivalencia regular e  $M/\sim$  é difeomorfa á subvariedade aberta  $f(M)$  de  $N$ .  $\square$

**Corolario 3.28.** *Se  $f: M \rightarrow N$  é unha submersión sobrexectiva entón  $N$  é difeomorfa a unha variedade cociente de  $M$ .*

**Exemplo 3.29.** Para  $n \geq 2$ , consideramos a subvariedade aberta  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . A relación de equivalencia  $\sim$  en  $M$  definida por  $p \sim q$  se  $\|p\| = \|q\|$  é unha relación de equivalencia regular. En efecto, basta ter en conta que a aplicación (véxase o exemplo 3.15)  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  dada por

$$f(p) = \|p\|^2 = p_1^2 + \cdots + p_n^2, \quad p = (p_1, \dots, p_n),$$

é unha submersión sobrexectiva e  $p \sim q$  se, e só se,  $f(p) = f(q)$ , e aplicar a proposición 3.27.

Ademais, observamos que se  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , a clase de equivalencia de  $p$  é a esfera  $(n-1)$ -dimensional (centrada na orixe) de radio  $r = \|p\|$

$$[p] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = \|p\|\} = \mathbb{S}^{n-1}(r) = f^{-1}(r^2),$$

e o difeomorfismo  $h$  definido na variedade cociente que fai conmutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\sim & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^+ \end{array}$$

está dado por  $h(\mathbb{S}^{n-1}(r)) = r^2$ .

**Exemplo 3.30.** A aplicación sobrexectiva  $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por

$$f(p) = \frac{p}{\|p\|}$$

é diferenciable polo lema 2.13 (de factorización), xa que o é como aplicación con valores en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Agora, se  $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  entón a aplicación  $\sigma: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  dada por

$$\sigma(x) = \|p\|x$$

é unha sección diferenciable de  $f$  e  $\sigma(p/\|p\|) = p$ , isto é,  $p$  está na imaxe dunha sección de  $f$ . Logo  $f$  é unha submersión (proposición 2.22), e define unha relación de equivalencia en  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  de modo que cada clase de equivalencia é unha semirecta  $[p] = \{tp \mid t \in \mathbb{R}, t > 0\}$ . Tense un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \\ \pi \swarrow & & \searrow f \\ (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim & \xrightarrow{h} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

onde o difeomorfismo  $h$  dado por  $h([p]) = p/\|p\|$  identifica cada semirecta coa súa intersección coa esfera, o que permite obter a esfera  $\mathbb{S}^n$  como variedade cociente de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

**Exemplo 3.31.** Como se observa no exemplo 3.16, a aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) = e^{i2\pi x}$  é unha submersión, e tamén é sobrexectiva, e define en  $\mathbb{R}$  a relación de equivalencia dada por  $x \sim y$  se, e só se,  $x - y \in \mathbb{Z}$ , logo  $[x] = x + \mathbb{Z}$ , e tense o diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R} & \\
 \pi \swarrow & & \searrow f \\
 \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim & \xrightarrow{h} & \mathbb{S}^1
 \end{array}$$

onde  $h$  é o difeomorfismo dado por  $h(x + \mathbb{Z}) = e^{i2\pi x}$ .

Imos ver unha forma de obter variedades cocientes a partir de grupos que actúan sobre variedades diferenciables como grupos de transformacións.

**Definición 3.32.** Sexa  $M$  unha variedade diferenciable e  $G$  un grupo. Chamaremos *acción diferenciable* (pola esquerda) de  $G$  sobre  $M$  a unha aplicación

$$\mu: G \times M \rightarrow M$$

que satisfai

- (i) se  $e$  é o elemento neutro de  $G$  entón  $\mu(e, p) = p$  para todo  $p \in M$ ,
- (ii) se  $a, b \in G$  entón  $\mu(a, \mu(b, p)) = \mu(ab, p)$  para todo  $p \in M$ ,

e tal que, para cada  $a \in G$ , a aplicación

$$\mu_a: p \in M \mapsto \mu_a(p) = \mu(a, p) \in M$$

é diferenciable.

É habitual escribir  $a \cdot p$  ou  $ap$  en vez de  $\mu(a, p)$ . De modo análogo podería definirse unha acción pola dereita.

**Observación 3.33.** As condicións (i) e (ii) de acción pódense escribir

- (i)  $\mu_e = \text{id}_M$ ,
- (ii)  $\mu_a \circ \mu_b = \mu_{ab}$  para cada  $a, b \in G$ ,

e polo tanto para cada  $a \in G$  tense  $\mu_a \circ \mu_{a^{-1}} = \mu_{aa^{-1}} = \mu_e = \text{id}_M$ , logo cada  $\mu_a$  é un difeomorfismo de  $M$  en  $M$ , isto é, unha *transformación* de  $M$ . Tamén se di que  $G$  é un *grupo de transformacións* de  $M$ .

**Observación 3.34.** Unha acción  $\mu: G \times M \rightarrow M$  define a relación de equivalencia  $\sim$  en  $M$  dada por

$$p \sim q \iff q = \mu_a(p) \text{ para algún } a \in G,$$

e para cada  $p \in M$  a clase de equivalencia  $[p] = \{\mu_a(p) = ap \mid a \in G\}$  denótase  $Gp$  e chámase *órbita* de  $p$ .

O correspondente conxunto cociente  $M/\sim$  denótase  $M/G$  e considerado coa topoloxía cociente dise que é o *espazo de órbitas* da acción. Neste caso a proxección natural  $\pi: M \rightarrow M/G$ , amais de continua é unha aplicación aberta, xa que para cada aberto  $U$  en  $M$  o conxunto  $\pi(U)$  é un aberto no espazo de órbitas; en efecto,

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{p \in U} Gp = \bigcup_{a \in G} \mu_a(U)$$

é un aberto em  $M$  xa que as aplicacións  $\mu_a: M \rightarrow M$  son homeomorfismos.

**Exemplo 3.35.** O espazo de órbitas dunha acción diferenciable non é necesariamente unha variedade diferenciable. Consideremos por exemplo a acción natural  $\mu$  do grupo linear xeral  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  sobre  $M = \mathbb{R}^n$ , que está dada por

$$\mu(a, p) = ap = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^1 p_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i^n p_i \end{pmatrix}.$$

Se  $p, q \in \mathbb{R}^n$  son distintos de 0 sempre existe un automorfismo de  $\mathbb{R}^n$  que leva  $p$  en  $q$ , logo o espazo de órbitas  $M/G$  redúcese a  $\{0, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ , que non é nin Hausdorff nin localmente euclidiano.

**Exemplo 3.36.** O grupo ortogonal  $O(n) = \{a \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid a^t a = I_n\}$  identifícase co grupo de automorfismos de  $\mathbb{R}^n$  que deixan invariante o produto escalar euclidiano. A acción  $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  do exemplo anterior pode restrinxirse a unha acción diferenciable

$$\tilde{\mu}: O(n) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Dous puntos  $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  están na mesma órbita da acción se, e só se,  $q = ap$  para algún  $a \in O(n)$ , e isto equivale a que  $\|p\| = \|q\|$ . Polo tanto a órbita de  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  é  $O(n)p = \mathbb{S}^{n-1}(r)$ , onde  $r = \|p\|$  e o espazo de órbitas  $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/O(n)$  é unha variedade diferenciable difeomorfa a  $\mathbb{R}^+$ , como se ve no exemplo 3.29.

**Exemplo 3.37. (O espazo proiettivo complexo  $\mathbb{C}P^n$ ).** O espazo vectorial  $\mathbb{C}^{n+1}$  ten unha estrutura natural de variedade diferenciable difeomorfa a  $\mathbb{R}^{2n+2}$  pola aplicación

$$(x_1 + iy_1, \dots, x_{n+1} + iy_{n+1}) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$$

Sobre a subvariedade aberta  $M = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  consideramos a acción diferenciable do grupo multiplicativo dos números complexos  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  dada por

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (z, p) &\longmapsto zp = (zp_1, \dots, zp_{n+1}). \end{aligned}$$

Para a relación de equivalencia  $\sim$  definida por  $\mu$  tense que  $p \sim q$  se  $q = zp$  para algún  $z \in \mathbb{C}^*$ , e  $[p] = \mathbb{C}^*p$ . O espazo de órbitas é o espazo proxectivo complexo  $\mathbb{C}P^n = M/\mathbb{C}^* = M/\sim$ , e tense a proxección natural

$$\pi: p \in M = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \mapsto \pi(p) = \mathbb{C}^*p \in \mathbb{C}P^n,$$

que é una aplicación aberta, por ser a proxección sobre un espazo de órbitas (observación 3.34). Ademais, o conxunto  $R = \{(p, q) \in M \times M \mid p \sim q\}$  definido pola relación de equivalencia  $\sim$  é pechado en  $M \times M$ , xa que se consideramos a aplicación continua  $f: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  dada  $f(p, q) = \sum_{i,j=1}^{n+1} |p_i q_j - p_j q_i|^2$  entón  $R = f^{-1}(\{0\})$ . Polo tanto  $\mathbb{C}P^n$  é un espazo Hausdorff. Agora, para obter un atlas sobre  $\mathbb{C}P^n$  definimos, para cada  $j = 1, \dots, n+1$ , o conxunto aberto no espazo de órbitas

$$U_j = \{[p] \mid p_j \neq 0\} = \pi(\{p \in M \mid p_j \neq 0\}),$$

xunto co homeomorfismo

$$\varphi_j: [p] = [p_1, \dots, p_{n+1}] \in U_j \mapsto \varphi_j([p]) = \frac{1}{p_j}(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n},$$

así que  $\mathcal{A} = \{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_{n+1}, \varphi_{n+1})\}$  é un atlas sobre  $\mathbb{C}P^n$ . Ademais, se  $i < j$  tense que

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{z_i}(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, 1, z_j, \dots, z_n),$$

para cada  $z \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$ , isto é  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $z_i \neq 0$ ; tanto esta aplicación como a súa inversa  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  son aplicacións de clase infinito entre subconxuntos abertos de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Polo tanto o atlas  $\mathcal{A}$  é un atlas diferenciable que converte a  $\mathbb{C}P^n$  nunha variedade diferenciable de dimensión  $2n$ .

Ademais, a proxección natural  $\pi: M \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é unha submersión. Para comprobalo tomamos un punto arbitrario  $p_0 \in M$  e unha carta  $(U_j, \varphi_j)$  de  $\mathbb{C}P^n$  tal que  $[p_0] \in U_j$ . Entón a expresión local

$$\varphi_j \circ \pi: (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \pi^{-1}(U_j) \longrightarrow \left( \frac{p_1}{p_j}, \dots, \frac{p_{j-1}}{p_j}, \frac{p_{j+1}}{p_j}, \dots, \frac{p_{n+1}}{p_j} \right) \in \varphi_j(U_j) = \mathbb{C}^n,$$

é de clase infinito e a súa matriz jacobiana ten rango máximo. Logo  $\mathbb{C}P^n = M/\mathbb{C}^*$  é unha variedade cociente de  $M = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

Por outra parte, a esfera unidade en  $\mathbb{R}^{2n+2}$  pode considerarse como

$$\mathbb{S}^{2n+1} = \{p \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|p\| = 1\} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\},$$

e a restricción  $\tilde{\pi} = \pi|_{\mathbb{S}^{2n+1}}: \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  é sobrexectiva, continua e pechada, logo é unha identificación, e tamén é diferenciable; ademais a submersión  $\pi: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  coincide coa composición

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{2n+1} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{C}P^n \\ p & \longmapsto & \frac{p}{\|p\|} \longmapsto \pi(p) \end{array}$$

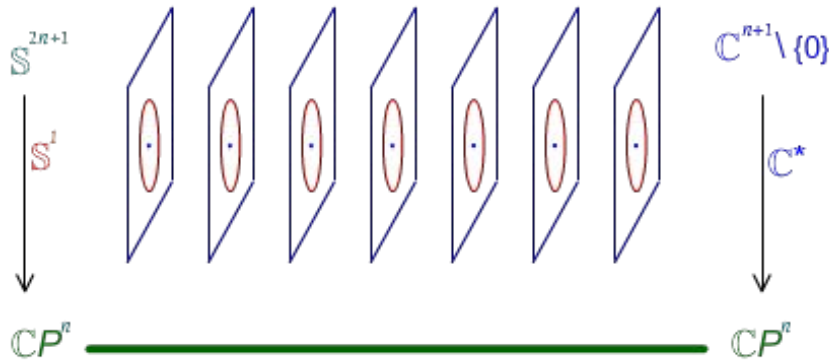
polo que  $\tilde{\pi}$  tamén é unha submersión. A relación de equivalencia inducida en  $\mathbb{S}^{2n+1}$  pola de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  coincide coa definida pola restrición da acción  $\mu$ .

$$\tilde{\mu}: (z, p) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \longmapsto zp \in \mathbb{S}^{2n+1}.$$

A órbita de  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$  para a acción  $\tilde{\mu}$  é  $\mathbb{S}^1 p = \{zp \mid z \in \mathbb{S}^1\} = \tilde{\pi}^{-1}(\pi(p)) \approx \mathbb{S}^1$ , e  $\mathbb{C}P^n$  é difeomorfo ao espazo de órbitas  $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$ . Dise que

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$$

é unha *fibración de Hopf*, e para cada  $p \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , a órbita  $\mathbb{S}^1 p$  está contida na órbita  $\mathbb{C}^* p$  da acción  $\mu$  de  $\mathbb{C}^*$  sobre  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ .



**Exemplo 3.38.** (**O espazo proxectivo real  $\mathbb{R}P^n$** ). Dunha maneira análoga ao anterior exemplo, a acción

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (a, p) & \longmapsto & ap = (ap_1, \dots, ap_{n+1}) \end{array}$$

dá lugar ao espazo proxectivo real  $P^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ , que é unha variedade diferenciable de dimensión  $n$ . Esta acción pode restrinxirse a unha acción do subgrupo multiplicativo  $O(1) = \{1, -1\}$  de  $\mathbb{R}^*$  sobre a esfera unidade  $\mathbb{S}^n$ ,

$$O(1) \times \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n,$$

e obtense que  $\mathbb{R}P^n \approx \mathbb{S}^n/O(1)$ . Neste caso as órbitas de cada  $p \in \mathbb{S}^n$  para a acción de  $O(1)$  e de  $\mathbb{R}^*$  son  $O(1)p = \{p, -p\}$  e  $\mathbb{R}^* p = \{ap \mid a \in \mathbb{R}^*\}$ , respectivamente.

Como xa se notou no exemplo 3.35, o espazo de órbitas dunha acción diferenciable non admite necesariamente unha estrutura de variedade diferenciable. Imos agora a limitarnos ao caso de espazos de órbitas  $M/G$  que teñen a mesma dimensión que  $M$  de modo que a proxección natural  $M \rightarrow M/G$ , ao ser unha submersión, é un difeomorfismo local.

**Definición 3.39.** Se  $M$  é unha variedade diferenciable e  $G$  un grupo, unha acción diferenciable  $\mu: G \times M \rightarrow M$  dise que é unha *acción propiamente discontinua* (e que  $G$  actúa *propiamente discontinuamente* sobre  $M$ ) se cumpre as seguintes condicións:

- (a) Se  $p \in M$  entón existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  tal que  $U \cap \mu_a(U) = \emptyset$  para todo  $a \in G$ ,  $a \neq e$ .
- (b) Se  $p, q \in M$  son tales que  $Gp \neq Gq$  entón existen veciñanzas abertas  $U$  e  $V$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, tales que  $U \cap \mu_a(V) = \emptyset$  para todo  $a \in G$ .

**Observación 3.40.** De modo xeral, unha acción  $\mu: G \times M \rightarrow M$  dise que é *libre*, e que  $G$  *actúa libremente* (ou sen puntos fixos) sobre  $M$  se ten a propiedade de que se  $ap = p$  para algún  $p \in M$  entón  $a = e$ . Pois ben, a condición (a) da definición 3.39 implica esta propiedade, xa que se  $p \in M$  entón existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  tal que para cada  $a \in G$  distinto de  $e$  tense que  $U \cap aU = \emptyset$ , logo  $p \notin aU$  e polo tanto  $p \neq ap$ .

A condición (a) é ademais necesaria para que  $M/G$  sexa unha variedade cociente de  $M$  da mesma dimensión que  $M$  xa que neste caso a proxección natural  $\pi: M \rightarrow M/G$  é un difeomorfismo local, logo para cada  $p \in M$  existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  tal que  $\pi|_U: U \rightarrow \pi(U)$  é bixectiva. Así, dado  $a \in G$  distinto de  $e$  debe ser  $U \cap \mu_a(U) = \emptyset$ , xa que se  $q \in U \cap \mu_a(U)$  entón existe  $q' \in U$  tal que  $q = aq'$ , logo  $q$  e  $q'$  están na mesma órbita, así que  $\pi(q') = \pi(q)$  e como  $\pi|_U$  é inxectiva tense que  $q' = q = aq'$ , logo  $a = e$  porque a acción é libre.

A condición (b) da definición 3.39 vai permitir asegurar que o espazo cociente  $M/G$  sexa un espazo Hausdorff.

**Observación 3.41.** Se  $M$  e  $\tilde{M}$  son dúas variedades diferenciables conexas, unha aplicación diferenciable  $\pi: M \rightarrow \tilde{M}$  dise que é unha *proxección de recubrimento* se cada punto de  $\tilde{M}$  ten unha veciñanza aberta  $\tilde{U}$  tal que  $\pi^{-1}(\tilde{U}) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  é unha unión disxunta de abertos en  $M$  tales que cada restricción  $\pi|_{U_{\alpha}}: U_{\alpha} \rightarrow \tilde{U}$  é un difeomorfismo. Tamén se di que  $M$  é unha *variedade de recubrimento* de  $\tilde{M}$  e que a tripla  $(M, \pi, \tilde{M})$  é unha *cuberta*.

Se  $\pi: M \rightarrow M'$  é unha aplicación de recubrimento entón é necesariamente un difeomorfismo local, logo é unha submersión, e ademais é unha aplicación sobrexectiva. Polo tanto  $\tilde{M}$  é difeomorfa a unha variedade cociente de  $M$  (corolario 3.28). Imos ver agora que se  $M/G$  é o espazo de órbitas de  $M$  por unha acción propiamente discontinua entón  $M$  é unha variedade de recubrimento de  $M/G$ .

**Teorema 3.42.** *Sexan  $G$  un grupo,  $M$  unha variedade diferenciable de dimensión  $m$  e  $\mu: G \times M \rightarrow M$  unha acción propiamente discontinua. Entón o espazo de órbitas  $M/G$  é unha variedade cociente de  $M$  de dimensión  $m$ . Se  $\pi: M \rightarrow M/G$  é a proxección natural e o espazo  $M$  é conexo entón  $(M, \pi, M/G)$  é unha cuberta.*

*Demostración.* Imos ver primeiro que o espazo topolóxico cociente  $M/G$  é Hausdorff. Sexan  $Gp, Gq \in M/G$ ,  $Gp \neq Gq$ . Pola condición (b) da acción  $\mu$  existen veciñanzas abertas  $U$  e  $V$  de  $p$  e  $q$ , respectivamente, tales que  $U \cap \mu_a(V) = \emptyset$  para todo  $a \in G$ . Entón  $\pi(U)$  e  $\pi(V)$  son abertos en  $M/G$  tales que  $\pi(p) = Gp \in \pi(U)$ ,  $\pi(q) = Gq \in \pi(V)$ , e son disxuntos xa que en caso contrario existe  $x \in M$  tal que  $Gx \in \pi(U) \cap \pi(V)$ , logo existen  $p' \in U$  e  $q' \in V$  tales que  $Gp' = Gx = Gq'$ , así que  $p'$  e  $q'$  están na mesma órbita, logo para algún  $a \in G$  é  $p' = aq' \in U \cap \mu_a(V)$ , o que contradí que  $U \cap \mu_a(V) = \emptyset$ . Polo tanto  $M/G$  é un espazo Hausdorff.

Da propiedade (a) de  $\mu$  na definición 3.39 vaise seguir que  $M/G$  é un espazo localmente euclidiano de dimensión  $m$ . En efecto, se  $p \in M$  entón existe unha veciñanza aberta  $U$  de  $p$  tal que

$$U \cap \mu_a(U) = \emptyset \quad \text{para todo } a \in G, a \neq e, \quad (\star)$$

e pódese reducir  $U$  para que sexa o dominio dunha carta  $(U, \varphi)$  da variedade diferenciable  $M$ . En primeiro lugar observamos que  $\pi|_U: U \rightarrow \pi(U) \subset M/G$  é bixectiva xa que se para  $p', q' \in U$  tense que  $\pi(p') = \pi(q')$  entón  $p'$  e  $q'$  están na mesma órbita, logo  $q' = ap' \in U \cap \mu_a(U)$  para algún  $a \in G$ , polo que  $a = e$  por  $(\star)$  e  $p' = q'$ .

$$\begin{array}{ccc} M & & U \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi|_U \quad \nearrow \varphi \\ M/G & & \pi(U) \quad \searrow \hat{\varphi} \quad \varphi(U) \end{array}$$

Como  $\pi$  é continua e aberta, a aplicación bixectiva  $\pi|_U: U \rightarrow \pi(U)$  é un homeomorfismo e polo tanto tamén o é a composición  $\hat{\varphi} = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}: \pi(U) \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , así que o espazo de órbitas  $M/G$  é unha variedade topolóxica de dimensión  $m$ .

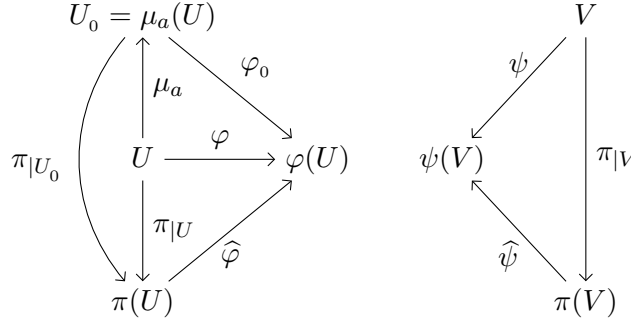
Se  $\mathcal{A}$  é un atlas diferenciable sobre  $M$  tense así a colección de cartas

$$\hat{\mathcal{A}} = \{(\pi(U), \hat{\varphi}) \mid (U, \varphi) \in \mathcal{A}, \varphi = \hat{\varphi} \circ \pi|_U, U \cap \mu_a(U) = \emptyset \forall a \neq e\},$$

que é un atlas sobre  $M/G$ . Vexamos que é un atlas diferenciable, para isto consideramos cartas  $(\pi(U), \hat{\varphi})$  e  $(\pi(V), \hat{\psi})$  en  $\hat{\mathcal{A}}$  onde  $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$  e  $\varphi = \hat{\varphi} \circ \pi|_U$ ,  $\psi = \hat{\psi} \circ \pi|_V$ , e débese comprobar que o cambio de cartas é de clase infinito.

Supoñamos que  $Gp = Gq \in \pi(U) \cap \pi(V)$ , onde  $p \in U$ ,  $q \in V$ , e sexa  $a \in G$  tal que  $q = ap$ . Entón o difeomorfismo  $\mu_a: M \rightarrow M$  leva a veciñanza aberta  $U$  de  $p$  no aberto  $U_0 = \mu_a(U)$  que contén a  $q$ , e  $\varphi_0 = \varphi \circ \mu_a^{-1}: U_0 \rightarrow \varphi(U)$  é un difeomorfismo, co que  $(U_0, \varphi_0)$  tamén é unha carta de  $M$  e  $q \in U_0 \cap V$ . Logo

$$\widehat{\varphi} = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1} = \varphi \circ \mu_a^{-1} \circ (\pi|_{U_0})^{-1} = \varphi_0 \circ (\pi|_{U_0})^{-1},$$



Polo tanto o cambio de cartas pódese escribir

$$\widehat{\psi} \circ \widehat{\varphi}^{-1} = \widehat{\psi} \circ \pi|_U \circ \varphi^{-1} = \widehat{\psi} \circ \pi|_{U_0} \circ \mu_a \circ \varphi^{-1} = \widehat{\psi} \circ \pi|_{U_0} \circ \varphi_0^{-1} = \psi \circ (\pi|_V)^{-1} \circ \pi|_{U_0} \circ \varphi_0^{-1} = \psi \circ \varphi_0^{-1},$$

que é o cambio de cartas  $\psi \circ \varphi_0^{-1}: \varphi_0(U_0 \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  da variedade diferenciable  $M$  e polo tanto é de clase infinito. Así,  $\widehat{\mathcal{A}}$  define unha estrutura diferenciable que converte a  $M$  nunha variedade diferenciable.

Ademais para cada punto  $p \in M$  hai unha carta  $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$  tal que  $U \cap \mu_a(U) = \emptyset$  e  $p \in U$ , e que define a carta  $(\pi(U), \widehat{\varphi}) \in \widehat{\mathcal{A}}$ , dando lugar á expresión local de  $\pi$  en  $p$ ,

$$\widehat{\varphi} \circ \pi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1} \circ \pi|_U \circ \varphi^{-1} = \text{id}_{\varphi(U)}.$$

Logo  $\pi$  é un difeomorfismo local e polo tanto unha submersión e  $M/G$  é unha variedade cociente de  $M$ .

Finalmente, os abertos en  $M/G$  da forma  $\widehat{U} = \pi(U)$  que son dominios das cartas no atlas  $\widehat{\mathcal{A}}$  son tales que

$$\pi^{-1}(\widehat{U}) = \bigcup_{a \in G} \mu_a(U),$$

que é unha unión disxunta de abertos en  $M$  tales que cada  $\pi|_{\mu_a(U)} = \pi|_U \circ \mu_a^{-1}: \mu_a(U) \rightarrow \widehat{U}$  é un difeomorfismo. Como consecuencia,  $(M, \pi, M/G)$  é unha cuberta.  $\square$

### • 3.43. Proxección dun campo de vectores

Observemos en primeiro lugar que cada aplicación diferenciable  $f: M \rightarrow N$  define unha aplicación  $f_*: T(M) \rightarrow T(N)$  por  $f_*(v) = f_{*p}(v)$  se  $v \in T_p(M)$ , e  $f_*$  tamén é diferenciable,

xa que calquera expresión local  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$  de  $f$ , que é  $C^\infty$ , da lugar á expresión local de  $f_*$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ f_* \circ \tilde{\varphi}^{-1}: \varphi(U) \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^n \\ (x, a) &\longmapsto (\psi f \varphi^{-1}(x), D(\psi f \varphi^{-1}(x)(a))), \end{aligned}$$

que tamén é  $C^\infty$ .

Agora, se  $f: M \rightarrow N$  é unha submersión sobrexectiva, un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  dise que é un campo de vectores *proyectable* se  $f_{*p}(X_p) = f_{*p'}(X_{p'})$  para cada  $p, p' \in M$  tales que  $f(p) = f(p')$ . Neste caso está ben definido o campo de vectores *proxección* de  $X$  sobre  $N$ , que está dado por

$$\tilde{X}: q \in N \rightarrow (f_*X)_q = f_{*p}(X_p) \text{ se } f(p) = q.$$

Tense o diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ X \downarrow & & \downarrow \tilde{X} \\ T(M) & \xrightarrow{f_*} & T(N) \end{array}$$

co que se o campo de vectores  $X$  é diferenciable,  $\tilde{X} \circ f = f_* \circ X$  tamén o é, e polo teorema 2.26,  $\tilde{X}$  tamén é un campo de vectores diferenciable.

Imos considerar agora o caso da proxección  $\pi$  dunha variedade diferenciable  $M$  sobre o espazo de órbitas  $M/G$  dunha acción cando  $M$  e  $M/G$  teñen a mesma dimensión.

**Proposición 3.44.** *Se  $M/G$  é unha variedade diferenciable que é o espazo de órbitas dunha acción diferenciable  $\mu: G \times M \rightarrow M$  tal que  $M$  e  $M/G$  teñen a mesma dimensión entón un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  é proyectable sobre  $M/G$  se, e só se,  $X$  é invariante por todas as transformacións  $\mu_a: M \rightarrow M$  (isto é,  $(\mu_a)_{*p}(X_p) = X_{ap}$  para todo  $p \in M$ ,  $a \in G$ ).*

*Demostración.* Supoñamos que  $X$  é invariante por cada transformación  $\mu_a$ . Se  $p, q \in M$  son tales que  $\pi(p) = \pi(q)$  entón  $q = ap$  para algún  $a \in G$ , e como  $\pi \circ \mu_a = \pi$ ,  $X$  é proyectable, xa que

$$\pi_{*q}(X_q) = \pi_{*ap}(X_{ap}) = \pi_{*ap}((\mu_a)_{*p}(X_p)) = (\pi \circ \mu_a)_{*p}(X_p) = \pi_{*p}(X_p).$$

Reciprocamente, sexa  $X$  un campo de vectores sobre  $M$  que é proyectable sobre  $M/G$ . Se  $p \in M$  e  $a \in G$  tense

$$\pi_{*ap}(X_{ap}) = \pi_{*p}(X_p) = (\pi \circ \mu_a)_{*p}(X_p) = \pi_{*ap}((\mu_a)_{*p}(X_p)),$$

e polo tanto  $X_{ap} = (\mu_a)_*p(X_p)$ , xa que  $\pi_{*ap}: T_{ap}(M) \rightarrow T_{ap}(M/G)$  é un isomorfismo xa que é linear e sobrexectiva e  $M$  e  $M/G$  teñen a mesma dimensión.  $\square$

**Observación 3.45.** Un campo de vectores  $X = \sum_{i=1}^m \lambda^i \partial_{r^i}$  sobre  $\mathbb{R}^m$  é invariante por unha transformación  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  se  $f_*p(X_p) = X_{f(p)}$  para cada  $p \in \mathbb{R}^m$ , isto é, se  $f_*p(\sum_{i=1}^m \lambda^i(p)(\partial_{r^i})_p) = \sum_{i=1}^m \lambda^i(f(p))(\partial_{r^i})_{f(p)}$ , que pola observación 1.11 (e tendo en conta que neste caso  $\varphi = \psi = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$ ) equivale a que

$$Df(p) \begin{pmatrix} \lambda^1(p) \\ \vdots \\ \lambda^m(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^1(f(p)) \\ \vdots \\ \lambda^m(f(p)) \end{pmatrix}$$

para todo  $p \in \mathbb{R}^m$ .

**Exemplo 3.46.** A acción diferenciable dada no exemplo 3.38 é unha acción propiamente discontinua: as únicas transformación de  $\mathbb{S}^n$  que define a acción natural  $\mu: O(1) \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  son  $\mu_1 = \text{id}_{\mathbb{S}^n}$  e  $\mu_{-1} = -\text{id}_{\mathbb{S}^n}$ , e téñense as propiedades na definición 3.39:

(a) para cada  $p \in \mathbb{S}^n$ , a bóla aberta  $U = B_{\mathbb{S}^n}(p, 1)$  relativa a  $\mathbb{S}^n$  de centro  $p$  e radio 1 é tal que  $U \cap -U = \emptyset$ ;

(b) se  $p, q \in \mathbb{S}^n$  son tales que  $\pm p \neq \pm q$ , e  $\varepsilon = \min\{\|p - q\|, \|p + q\|\}/2$ , tomando  $U = B_{\mathbb{S}^n}(p, \varepsilon)$  e  $V = B_{\mathbb{S}^n}(q, \varepsilon)$  tense que  $U \cap V = U \cap (-V) = \emptyset$ .

Do teorema 3.42 séguese a existencia dunha estrutura de variedade diferenciable no espazo de órbitas  $\mathbb{S}^n/O(1) \approx \mathbb{R}P^n$ , que é a mesma que a do exemplo 3.38 (a do espazo proxectivo real) pola unicidade de estrutura de variedade diferenciable que fai que a proxección natural sexa unha submersión (proposición 3.25).

Sexa agora  $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i \partial_{r^i}$  un campo de vectores diferenciable sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$  tanxente a  $\mathbb{S}^n$  e sexa  $\hat{X} = X|_{\mathbb{S}^n}$  a súa restrición a  $\mathbb{S}^n$ . Entón  $\hat{X}$  é proxectable sobre o espazo proxectivo  $\mathbb{R}P^n$  se, e só se, é invariante por  $\mu_{-1} = -\text{id}_{\mathbb{S}^n}$  o que equivale a que  $\lambda^i(-p) = -\lambda^i(p)$  para cada  $i = 1, \dots, n+1$  e cada  $p \in \mathbb{S}^n$ . Por exemplo, para  $n = 2k - 1$ , o campo de vectores

$$X = -r^2 \partial_{r^1} + r^1 \partial_{r^2} - r^4 \partial_{r^3} + r^3 \partial_{r^4} + \dots - r^{2k} \partial_{r^{2k-1}} + r^{2k-1} \partial_{r^{2k}}$$

é un campo de vectores diferenciable sobre  $\mathbb{R}^{2k}$  tal que a súa restrición  $\hat{X}$  a  $\mathbb{S}^{2k-1}$  é proxectable sobre o espazo proxectivo  $\mathbb{R}P^{2k-1}$  e a súa proxección non se anula en ningún punto.

**Exemplo 3.47. (O toro  $n$ -dimensional).** A aplicación  $\mu: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\mu(a, p) = a + p$  é unha acción diferenciable, xa que para cada  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ , a aplicación

$$\mu_a: (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (a_1 + p_1, \dots, a_n + p_n) \in \mathbb{R}^n$$

é diferenciable (é un difeomorfismo). E tamén é unha acción propiamente discontinua:

(a) se  $p \in \mathbb{R}^n$  entón a bóla aberta  $U = B(p, 1/2)$  en  $\mathbb{R}^n$  é tal que  $U \cap \mu_a(U) = B(p, 1/2) \cap B(a+p, 1/2) = \emptyset$  se  $a \in \mathbb{Z}^n$ ,  $a \neq 0$ ;

(b) se  $\mathbb{Z}^n + p \neq \mathbb{Z}^n + q$  entón existe  $r > 0$  tal que  $B(p, r) \cap (\mathbb{Z}^n + q) = \emptyset$  (porque  $\mathbb{Z}^n + q$  é pechado en  $\mathbb{R}^n$ ) e se  $U = B(p, r/2)$  e  $V = B(q, r/2)$  entón  $U \cap \mu_a(V) = \emptyset$  para todo  $a \in \mathbb{Z}^n$ .

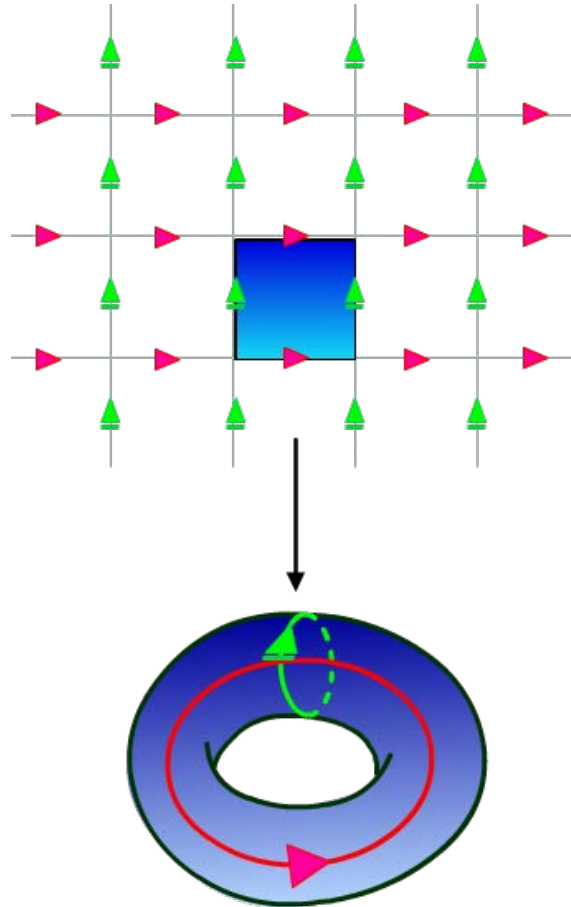
O espazo de órbitas pode identificarse co  $n$ -toro  $T^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ , xa que a aplicación

$$f: (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (e^{i2\pi p_1}, \dots, e^{i2\pi p_n}) \in \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$$

é unha submersión (véxase o exemplo 3.31 para o caso  $n = 1$ ) e define a relación de equivalencia  $\sim$  dada por  $p \sim q$  se  $f(p) = f(q)$ , que equivale a que sexa  $p_i - q_i = a_i \in \mathbb{Z}$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , isto é,  $q = \mu_a(p)$ , polo que  $\mathbb{R}^n / \sim = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  (observación 3.34). Pola proposición 3.27, como ademais  $f$  é sobrexectiva, tense que a aplicación

$$h: [p] = \mathbb{Z}^n + p \in \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \mapsto f(p) = (e^{i2\pi p_1}, \dots, e^{i2\pi p_n}) \in T^n$$

é un difeomorfismo.



Se  $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i \partial_{r_i}$  é un campo de vectores sobre  $\mathbb{R}^n$  entón  $X$  é proxectable sobre o toro  $T^n$  se, e só se, é invariante por  $\mu_a$  para cada  $a \in \mathbb{Z}^n$ , é dicir, se, e só se,

$$D\mu_a(p) \begin{pmatrix} \lambda^1(p) \\ \vdots \\ \lambda^n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^1(a+p) \\ \vdots \\ \lambda^n(a+p) \end{pmatrix},$$

que equivale a que  $\lambda(p) = \lambda(a+p)$  para todo  $p \in \mathbb{R}^n$  e  $a \in \mathbb{Z}^n$ , xa que  $D\mu_a(p)$  é a matriz identidade en  $\mathbb{R}^n$ . Por exemplo, se  $n = 2$  o grupo de transformacións  $\{\mu_a \mid a \in \mathbb{Z}^2\}$  está xerado por  $\{\mu_{(1,0)}, \mu_{(0,1)}\}$  e, polo tanto, en termos do sistema de coordenadas identidade  $\text{id}_{\mathbb{R}^2} = (x, y)$ , un campo de vectores diferenciable  $X = \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y$  sobre  $\mathbb{R}^2$  é proxectable sobre o toro  $T^2$  se, e só se,  $X$  é invariante por  $\mu_{(1,0)}$  e por  $\mu_{(0,1)}$ , o que equivale a que as funcións diferenciables  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sexan tales que

$$\lambda_1(x, y) = \lambda_1(x+1, y) = \lambda_1(x, y+1), \quad \lambda_2(x, y) = \lambda_2(x+1, y) = \lambda_2(x, y+1),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , o que sucede en particular no caso de que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sexan funcións constantes.

**Exemplo 3.48. (A faixa de Mœbius).** A aplicación

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, (x, y)) &\longmapsto (a+x, (-1)^a y) \end{aligned}$$

é unha acción diferenciable ( $\mu_a: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (a+x, (-1)^a y$ ) é unha transformación de  $\mathbb{R}^2$  para cada  $a \in \mathbb{Z}$ ), e é unha acción propiamente discontinua:

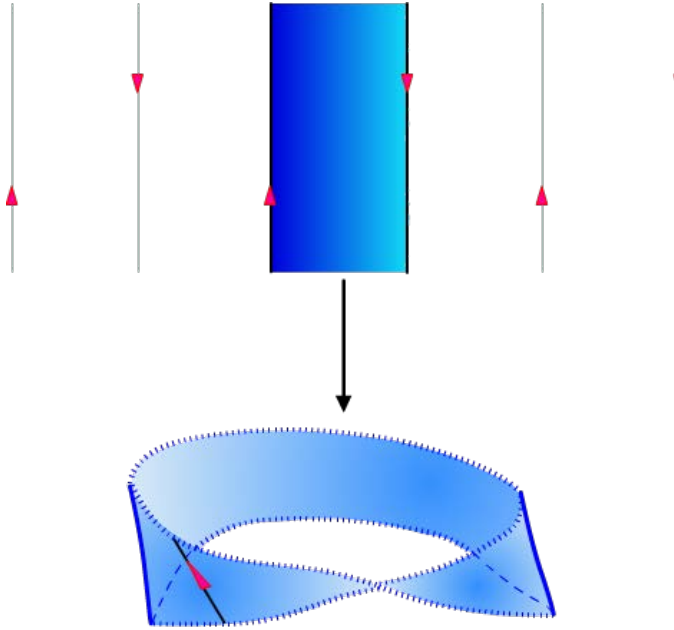
(a) se  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  entón  $U = B((x, y), 1/2)$  é unha veciñanza aberta de  $(x, y)$  tal que  $U \cap \mu_a(U) = B((x, y), 1/2) \cap B((a+x, (-1)^a y)) = \emptyset$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ ;

(b) se  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  son tales que  $\mathbb{Z}(x, y) \neq \mathbb{Z}(x', y')$ , entón  $(x, y)$  non pertence ao pechado  $\mathbb{Z}(x', y')$ , logo existe  $r > 0$  tal que  $B((x, y), r) \cap \mathbb{Z}(x', y') = \emptyset$  e as veciñanzas abertas  $U = B((x, y), r/2)$  de  $(x, y)$  e  $V = B((x', y'), r/2)$  de  $(x', y')$  cumpren  $U \cap \mu_a(V) = \emptyset$  para todo  $a \in \mathbb{Z}$ .

Cada órbita para esta acción interseca o subconxunto  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $0 < x < 1$  e  $y \in \mathbb{R}$  entón a órbita de  $(x, y)$  ten soamente este punto  $(x, y)$  en  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  e se  $x = 0$  entón a órbita ten exactamente os dous puntos  $(0, y)$  e  $(1, -y)$ . Polo tanto, como a relación de equivalencia definida pola acción  $\mu$  (observación 3.34) fai que  $(x, y) \sim (x', y')$  se  $(x', y') = \mu_a(x, y)$  para algún  $a \in \mathbb{Z}$ , e esta relación restrínxese a  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  facendo que as únicas relacións non triviais son as da forma  $(0, y) \sim (1, -y)$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ , séguese que o conxunto cociente de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  por esta relación de equivalencia inducida é a faixa de Mœbius  $\mathcal{M} = ([0, 1] \times \mathbb{R})/\sim$ . Tense o seguinte diagrama conmutativo, onde as aplicacións verticais son as proxeccións naturais sobre os cocientes,

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] \times \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^2 \\
 \pi_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \mathcal{M} & \xrightarrow[h]{\approx} & \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}
 \end{array}$$

e a aplicación bixectiva  $h$  converte a  $\mathcal{M}$  nunha variedade diferenciable difeomorfa ao espazo de órbitas da acción.



Neste caso, a transformación  $\mu_1 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + 1, -y) \in \mathbb{R}^2$  xera o grupo de transformacións  $\{\mu_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{a \in \mathbb{Z}}$ , así que un campo de vectores  $X = \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y$  sobre  $\mathbb{R}^2$  é proxeccionable sobre  $\mathcal{M}$  se, e só se,  $X$  é invariante por  $\mu_1$  (pola proposición 3.44) isto é se, e só se, (observación 3.45),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y) \\ \lambda_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x + 1, -y) \\ \lambda_2(x + 1, -y) \end{pmatrix},$$

(que equivale a que para cada  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  sexa

$$\lambda_1(x + 1, -y) = \lambda_1(x, y), \quad \lambda_2(x + 1, -y) = -\lambda_2(x, y).$$

Exemplos de campos de vectores diferenciables sobre  $\mathbb{R}^2$  proxeccionables sobre a faixa de Möbius son os da forma  $s \partial_x + ty \partial_y$ , onde  $s, t \in \mathbb{R}$  (como  $\partial_x$  e  $y \partial_y$ ).

**Exemplo 3.49. (A botella de Klein).** O conxunto  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ten unha estrutura de grupo non abeliano coa seguinte operación: se  $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in G$  é

$$a \cdot b = (a_1 + (-1)^{a_2} b_1, a_2 + b_2),$$

e tense unha acción diferenciable

$$\begin{aligned} \mu: G \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a_1, a_2), (x, y)) &\longmapsto (a_1 + (-1)^{a_2} x, a_2 + y). \end{aligned}$$

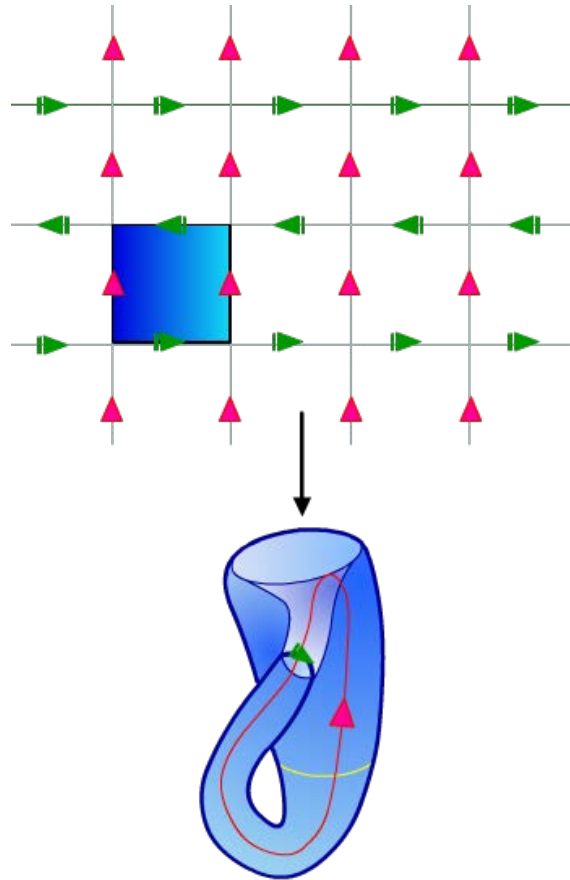
Esta acción é propiamente discontinua:

(a) se  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  e  $U = B((x, y), 1/2)$  entón

$$B((x, y), 1/2) \cap B((a_1 + (-1)^{a_2} x, a_2 + y), 1/2) = U \cap \mu_a(U) = \emptyset$$

para cada  $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ ;

(b) se  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  e  $G(x, y) \neq G(x', y')$  entón existe  $r > 0$  tal que  $B((x, y), r)$  está contido en  $\mathbb{R}^2 \setminus G(x', y')$  e se  $U = B((x, y), r/2)$  e  $V = B((x', y'), r/2)$  tense que  $U \cap \mu_a(V) = \emptyset$  para todo  $a \in G$ .



Neste caso, obtense que cada órbita ten exactamente un, dous ou catro puntos no cadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ , de maneira que ao restrinxir a relación de equivalencia en  $\mathbb{R}^2$  definida por  $\mu$  ao subconxunto  $[0, 1] \times [0, 1]$  obtense a relación de equivalencia  $\sim$  xerada polas relacións  $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$  e  $(0, y) \sim (1, y)$  para  $0 \leq x, y \leq 1$ , que dá lugar á botella de Klein  $\mathcal{K} = [0, 1]/\sim$ , que polo tanto ten unha estrutura de variedade diferenciable difeomorfa ao espazo de órbitas  $\mathbb{R}^2/G$ .

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \hookrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \pi_{\mathcal{K}} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{K} & \xrightarrow{\approx} & \mathbb{R}^2/G \end{array}$$

Observamos que o grupo de transformacións  $\{\mu_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{a \in G}$  está xerado polas transformacións  $\rho = \mu_{(1,0)}$  e  $\sigma = \mu_{(1,1)}$ , que verifican  $\rho\sigma\rho = \sigma$ , así que o grupo  $G$  é isomorfo ao grupo con dous xeradores  $\rho, \sigma$  e a relación  $\rho\sigma\rho\sigma^{-1} = 1$ , que é o grupo fundamental da botella de Klein. Pola proposición 3.44, un campo de vectores  $X = \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y$  sobre  $\mathbb{R}^2$  é proxeccionable sobre a botella de Klein se, e só se,  $X$  é invariante por  $\rho: (x, y) \mapsto (x + 1, y)$  e por  $\sigma: (x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)$ , que pola observación 3.45 equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y) \\ \lambda_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(x + 1, y) \\ \lambda_2(x + 1, y) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(x, y) \\ \lambda_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(1 - x, y + 1) \\ \lambda_2(1 - x, y + 1) \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\lambda_1(x + 1, y) = \lambda_1(x, y) = -\lambda_1(1 - x, y + 1), \quad \lambda_2(x + 1, y) = \lambda_2(x, y) = \lambda_2(1 - x, y + 1),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Por exemplo, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , o campo de vectores diferenciable  $t \partial_y$  sobre  $\mathbb{R}^2$  é proxeccionable sobre a botella de Klein.

# Bibliografía

- [1] Boothby, W.M. *An Introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, 2nd ed., Academic Press, Orlando, Florida, 1986.
- [2] Brickell, F. and Clark, R.S. *Differentiable Manifolds: An Introduction*, Van Nostrand, London, 1970.
- [3] Lee, Jeffrey M., *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence RI, 2009.
- [4] Lee, John M., *Introduction to Topological Manifolds, 2nd ed*, Springer, New York, 2011.
- [5] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds, 2nd ed*, Springer, New York, 2013.
- [6] Margalef-Roig, J.; Outerelo Domínguez, E. *Differential Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [7] Matsushima, Y. *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York, 1972.
- [8] Pham Mau Quan, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969.
- [9] Warner, F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, New York, 1983.
- [10] Whitney, H. *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. **37** (1936), 645–680.
- [11] Whitney, H. *Self intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space*, Ann. of Math. **45** (1944), 220–246.