



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE BIFURCACIÓN

PABLO PÉREZ BLACH

Septiembre, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE BIFURCACIÓN

PABLO PÉREZ BLACH

Septiembre, 2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análisis Matemático
Título: Introducción a la teoría de bifurcación
Breve descripción do contido:
Si consideramos el retrato de fases de un sistema dinámico que depende de los parámetros, cuando estos varían, el retrato de fases también lo hace. Hay dos posibilidades: o el sistema permanece topológicamente equivalente al original, o su topología cambia. La aparición de un retrato de fases no equivalente topológicamente al original tras una variación de parámetros se conoce como bifurcación. Este trabajo se dedica a dar una introducción de la teoría de bifurcación.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen	VI
Introducción	IX
1. Nociones básicas	1
1.1. Introducción a los sistemas dinámicos	1
1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas dinámicos	5
1.3. Resultados clásicos	7
2. Teoría de Bifurcación	11
2.1. Motivación	11
2.2. Introducción	12
2.3. Formas topológicas normales	15
3. Bifurcaciones de codimensión 1 en sistemas dinámicos continuos	19
3.1. Bifurcación de tipo fold	20
3.1.1. Bifurcaciones tipo fold degeneradas	27
3.2. Bifurcación de Hopf	36
4. Bifurcación aplicada: umbral láser simple	47
4.1. Introducción y fundamentos	47
4.2. Modelo matemático	48

4.3. Análisis de bifurcación	49
4.4. Justificación de la bifurcación en base a la forma normal	51
Bibliografía	53

Resumen

¿Qué ocurre cuando una mínima variación en un parámetro desemboca en un cambio drástico en el comportamiento de un sistema? Esta pregunta es la que motiva el estudio de la teoría de bifurcación. En este trabajo se hace una presentación accesible de dicha teoría, centrada en bifurcaciones locales de sistemas dinámicos continuos representados por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs).

En primer lugar, se dan nociones básicas sobre sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales, necesarias para entender el fenómeno de bifurcación. Posteriormente, con un ejemplo motivador, se muestra cómo pequeñas variaciones en parámetros pueden generar comportamientos cualitativamente distintos, lo que justifica la necesidad de desarrollar un marco teórico adecuado. Sobre esta base, se analizan, teórica y gráficamente, distintos tipos de bifurcaciones (como la de tipo *fold*, *transcrítica*, *pitchfork* y de *Hopf*). Finalmente, se retoma el ejemplo inicial para aplicar la teoría desarrollada. El trabajo busca combinar el desarrollo formal de la teoría con su aplicación, para así poder comprender fenómenos del mundo real.

Abstract

What happens when a minimal variation in a parameter leads to a drastic change in the behavior of a system? This question is what motivates the study of bifurcation theory. This work presents an accessible overview of this theory, focused on local bifurcations in continuous dynamical systems represented by ordinary differential equations (ODEs).

Firstly, basic concepts of dynamical systems and differential equations are introduced, which are necessary to understand the phenomenon of bifurcation. Subsequently, using a motivating example, it is shown how small variations in parameters can lead to qualitatively different behaviors, highlighting the need to develop an appropriate theoretical framework. On this basis, different types of bifurcations (such as *fold*, *transcritical*, *pitchfork*, and *Hopf*) are analyzed both theoretically and graphically. Finally, the initial example is revisited to apply the developed theory. The work aims to combine the formal development of the theory with its application in order to understand real-world phenomena.

Introducción

Modelar fenómenos que evolucionan con el tiempo en diversas áreas como la biología, la física, la economía o la ingeniería, es el objetivo principal de la teoría de sistemas dinámicos [6]. Muchas veces, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) se usan para realizar estos estudios, ya que pueden proporcionar información esencial sobre comportamientos de soluciones o predicciones futuras [4]. En particular, puede darse el caso de que estas EDOs presenten una dependencia paramétrica. Es aquí donde la teoría de bifurcación, mediante herramientas analíticas y geométricas, intenta dar explicación a cómo pequeñas modificaciones en los parámetros pueden provocar grandes cambios en el comportamiento cualitativo del sistema [2].

Gracias a la teoría de bifurcación, se pueden identificar umbrales críticos donde se va a dar un cambio significativo en el comportamiento del sistema, lo que puede tener grandes consecuencias en contextos de la vida cotidiana.

La teoría de bifurcación ha sido desarrollada rigurosamente desde mediados del siglo XX. Autores como Guckenheimer and Holmes [3], Wiggins [2], y Kuznetsov [1] son los que han formalizado la teoría de clasificación local de bifurcaciones mediante herramientas como las formas normales o los diagramas de bifurcación.

Este trabajo busca presentar de manera accesible y progresiva las bases de la teoría de bifurcaciones en sistemas dinámicos continuos, centrándose en el análisis a nivel local de sistemas representados por ecuaciones diferenciales ordinarias. Para poder cumplirlo, aparte del fundamento teórico, se presentan y analizan distintos tipos de bifurcaciones locales, acompañadas de su forma normal y diagrama de bifurcación. A lo largo del trabajo se combinarán desarrollos formales con representaciones gráficas que puedan ayudar a facilitar la comprensión. Como objetivo secundario, se fija buscar una aplicación en contextos reales de la teoría desarrollada.

El trabajo se organiza en cuatro capítulos, descritos brevemente a continuación:

- **Capítulo 1: Nociones básicas**

Capítulo dedicado a introducir los conceptos fundamentales sobre sistemas dinámicos y ecuaciones diferenciales para poder entender posteriormente el fenómeno de bifurcación.

- **Capítulo 2: Teoría de Bifurcación**

Consta de un apartado motivacional, donde se presenta al lector un sistema sencillo dependiente de parámetros el cual sugiere la presencia de una bifurcación. Por otro lado, se da un desarrollo del marco teórico de la teoría de bifurcación, desde la definición más básica del propio concepto, hasta conceptos más complejos como el de forma normal.

- **Capítulo 3: Bifurcaciones de codimensión 1 en sistemas dinámicos continuos**

Se estudian distintos tipos de bifurcaciones locales de codimensión 1: fold, transcítica, pitchfork o de Hopf. Además, en todas ellas se hará un estudio detallado para construir la forma normal y se incluirán los diagramas de bifurcación para poder visualizar qué está ocurriendo y ayudar a la comprensión.

- **Capítulo 4: Bifurcación aplicada: umbral láser simple**

Se retoma el ejemplo motivacional dado en el Capítulo 2 y se ponen en práctica la teoría y resultados desarrollados. El sistema analizado estudia el umbral crítico a partir del cual un sistema láser empieza a producir luz láser.

La referencia principal en la creación y desarrollo de este trabajo ha sido la obra de Kuznetsov [1]. Para los capítulos dos y tres, se ha complementado con otras fuentes claves de la literatura como son Wiggins [2], Guckenheimer y Holmes [3], Perko [4] y con obras elaboradas con un enfoque más introductorio o didáctico, como Alonso [8] y Aguirre [9]. Por último, para el desarrollo del ejemplo aplicado estudiado en el capítulo cuatro, la teoría y el modelo se han extraído de las referencias Strogatz [6] y Haken [7]. Además, han sido de gran utilidad las notas de clase y conocimientos adquiridos durante el grado en las asignaturas de *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* [10], *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* [11] y *Diferenciación de Funciones de Varias Variables Reales* [12].

Capítulo 1

Nociones básicas

1.1. Introducción a los sistemas dinámicos

La noción de sistema dinámico formaliza matemáticamente procesos deterministas, es decir, procesos biológicos, económicos, químicos, físicos o de otro ámbito que, siguiendo ciertas reglas que dirigen la evolución del sistema, se puede predecir tanto estados pasados como futuros [1].

Antes de definir formalmente un sistema dinámico, introducimos unas nociones básicas.

Sea X un conjunto de valores, el conjunto de puntos $x \in X$ que caracterizan todos los posibles estados de un sistema se conoce como **espacio de estados** o **espacio de fases** del sistema. Además, cualquier elemento $x \in X$ no solo servirá para describir la situación actual del sistema, sino también para poder predecir su evolución.

La evolución de un sistema dinámico implica un cambio en el estado del sistema con un **tiempo** particular $t \in T$, donde T es un conjunto de números dotado de una estructura algebraica como la suma en \mathbb{R} o en \mathbb{Z} . Dependiendo del conjunto de definición de T se pueden considerar dos tipos de sistemas dinámicos:

- *Sistemas dinámicos continuos*: $T = \mathbb{R}$, que será el caso en el que nos centraremos en este trabajo.
- *Sistemas dinámicos discretos*: $T = \mathbb{Z}$.

El **operador de evolución**, definido de la forma:

$$\varphi_t : X \rightarrow X,$$

para algún $t \in T$, determina las reglas de evolución que va a seguir el sistema dinámico. Es el encargado de modificar cualquier estado inicial conocido $x_0 \in X$ en un estado evolucionado $x_t = \varphi_t(x_0) \in X$. En el caso continuo, la familia de operadores de evolución $\{\varphi_t\}_{t \in T}$ se denomina **flujo**.

Con estas nociones básicas, podemos introducir el concepto formal de sistema dinámico:

Definición 1.1 (Sistema dinámico). Un *sistema dinámico* es una terna (T, X, φ_t) , donde T es el conjunto de tiempo, X es el espacio de estados y $\varphi_t : X \rightarrow X$ es una familia de operadores de evolución parametrizada por $t \in T$ que verifica dos propiedades:

1. $\varphi_0 = id$,
2. $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s, \forall t, s \in T$.

Observación 1.2. En 1 se indica que un sistema no cambia su estado repentinamente y la propiedad 2 muestra que la evolución del sistema en $t + s$ unidades temporales es exactamente igual que si el sistema primero avanza s unidades temporales y posteriormente avanza t .

Relacionado directamente con los sistemas dinámicos, es necesario definir los objetos geométricos por excelencia asociados a ellos: las órbitas y el retrato de fases.

Definición 1.3 (Órbita). Una *órbita* con punto inicial x_0 es un subconjunto ordenado del espacio de estados X definido como:

$$\gamma(x_0) = \{\varphi_t(x_0), \forall t \in T \mid \exists \varphi_t(x_0)\}.$$

En el caso de sistemas dinámicos continuos se tratan de curvas en X parametrizadas por t y orientadas en la dirección de crecimiento en t .

Por cada punto de X pasará una única órbita que podrá ser de tres tipos: un punto, una curva abierta simple o una curva cerrada simple. Veamos los tipos de órbitas más simples y habituales:

Definición 1.4 (Equilibrio). Un punto $x_0 \in X$ es un *punto de equilibrio* (o *singularidad*) si:

$$\varphi_t(x_0) = x_0 \quad \forall t \in T.$$

En cualquier otro caso, diremos que x_0 es un **punto regular**.

Observación 1.5. Una consecuencia directa que se puede deducir es que los sistemas que ya están en equilibrio, siempre se mantendrán en equilibrio. De esta forma, el comportamiento más simple que puede tener un sistema es el de equilibrio.

Definición 1.6 (Ciclo). Un *ciclo* es una órbita periódica L_0 sin puntos de equilibrio tal que $\forall x_0 \in L_0$ se verifica que $\varphi_t(x_0) = \varphi_{t+T_0}(x_0)$ para algún $T_0 > 0, T_0 \in T$ y $\forall t \in T$.

Al mínimo valor de T_0 que verifica esta propiedad se le llama *periodo* del ciclo L_0 . Por tanto, todo punto perteneciente al ciclo regresará a su posición inicial tras un tiempo T_0 . En el caso en el que nos centramos de sistemas dinámicos continuos, el ciclo L_0 es una curva cerrada.

Definición 1.7 (Ciclo límite). Se denominará *ciclo límite* a todo ciclo *aislado* de un sistema dinámico continuo, es decir, un ciclo para el cual exista un entorno abierto que contenga completamente al ciclo y que no contenga ninguna otra órbita periódica cerrada.

A partir de todo esto podemos definir el *retrato de fases*, que será esencial en el estudio de las bifurcaciones en próximos capítulos.

Definición 1.8 (Retrato de fases). Llamaremos *retrato de fases* del sistema dinámico a la representación de la unión disjunta del conjunto de órbitas del espacio de estados orientadas en el sentido de crecimiento de la variable temporal t .

Introducimos ahora el concepto de conjunto invariante y su estabilidad, pues nos servirá a la hora de clasificar los distintos elementos del retrato de fases.

Definición 1.9 (Conjunto invariante). Un subconjunto $S \subset X$ se denomina *conjunto invariante* de un sistema dinámico (T, X, φ_t) si para todo $x_0 \in S$ se tiene $\varphi_t(x_0) \in S, \forall t \in T$.

Observación 1.10. Se puede deducir de la definición que $\varphi_t(S) \subset S$ para todo $t \in T$. Trivialmente, un ejemplo de conjunto invariante de un sistema dinámico son sus propias órbitas

Consideramos entonces el sistema dinámico (T, X, φ_t) , con X un espacio métrico completo¹. Sea S_0 un conjunto invariante cerrado:

Definición 1.11 (Estable en el sentido de Lyapunov). Se dice que S_0 es *estable en el sentido de Lyapunov* si para cualquier entorno abierto $U \supset S_0$ se puede encontrar un entorno abierto $V \subset U, V \supset S_0$ tal que $\varphi_t(x) \in U$ para todo $x \in V$ y todo $t \geq 0$.

Definición 1.12 (Asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov). Se dice que S_0 es *asintóticamente estable en el sentido de Lyapunov* si es *estable en el sentido de Lyapunov* y además verifica que:

$$\exists U_0 \supset S_0, U_0 \text{ abierto} : \forall x \in U_0 \Rightarrow d(\varphi_t(x), S_0) := \inf_{y \in S_0} \|\varphi_t(x) - y\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Así, a la hora de representar un estado asintótico de un sistema dinámico, el conjunto invariante debe ser estable, es decir, debe atraer a las órbitas cercanas. Esto nos lleva a definir los conceptos de *atractor* y *repulsor*:

¹Un espacio métrico (X, d) , con d la distancia con la norma euclidiana asociada $d(x, y) = \|x - y\|, x, y \in X$, se dice completo si toda sucesión de Cauchy de X converge en X .

Definición 1.13 (Atractor). Dado un conjunto invariante S , se dice que es un *atractor* si existe un entorno $U_S \supset S$ tal que si $x \in U_S$, entonces $\varphi_t(x) \rightarrow S$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Definición 1.14 (Repulsor). Dado un conjunto invariante S , se dice que es un *repulsor* si existe un entorno $U_S \supset S$ tal que si $x \in U_S$, entonces $\varphi_t(x) \rightarrow S$ cuando $t \rightarrow -\infty$.

Finalmente, considerando el espacio de estados $X = \mathbb{R}^n$, con las siguientes definiciones respecto a la equivalencia entre los sistemas dinámicos, buscaremos una forma de estudiar, clasificar y comparar comportamientos que tengan entre sí.

Definición 1.15 (Topológicamente conjugado). El sistema dinámico $(T, \mathbb{R}^n, \varphi_t)$ será *topológicamente conjugado* al sistema dinámico $(T, \mathbb{R}^n, \psi_t)$ si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

$$h(\varphi_t(x_0)) = \psi_t(h(x_0)), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in T.$$

Observación 1.16 (Homeomorfismo). Recordamos que un *homeomorfismo* es una función biyectiva donde tanto la propia función como su inversa son continuas.

Definición 1.17 (Topológicamente equivalente). El sistema dinámico $(T, \mathbb{R}^n, \varphi_t)$ será *topológicamente equivalente* al sistema dinámico $(T, \mathbb{R}^n, \psi_t)$ si existe un homeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que lleva las órbitas de un sistema en las órbitas del otro, conservando la orientación en la dirección temporal.

Observación 1.18. Nótese que en la conjugación topológica, el homeomorfismo h debe mantener la parametrización temporal de las trayectorias, mientras que en la equivalencia topológica esto no es necesario.

Definición 1.19 (Localmente topológicamente equivalente). El sistema dinámico $(T, \mathbb{R}^n, \varphi_t)$ será *localmente topológicamente equivalente* cerca de un punto de equilibrio x_0 al sistema dinámico $(T, \mathbb{R}^n, \psi_t)$ cerca del punto de equilibrio y_0 si existe un homeomorfismo $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ un entorno de x_0 , que verifica:

- $y_0 = h(x_0)$,
- Manteniendo la dirección temporal, lleva las órbitas del primer sistema en U a las órbitas del segundo sistema en $V = h(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Observación 1.20. Remarcar que si U es un conjunto abierto en el entorno de x_0 , entonces V será abierto en un entorno de y_0 .

1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas dinámicos

En esta sección, nos centraremos en sistemas dinámicos continuos representados por ecuaciones diferenciales, ya que será el objeto principal de análisis en el estudio de las bifurcaciones que se desarrollan en este trabajo. Nos encargaremos de dar ciertas nociones básicas sobre ambos conceptos y cómo combinarlos para poder introducir la teoría de bifurcación en base a ellos.

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un **campo vectorial**, la EDO **autónoma** asociada a ese campo es:

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Se supone que el campo es de clase k , $f \in C^k$, para algún k lo suficientemente grande. Enunciamos ahora el resultado más importante sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias, el cual nos asegura la existencia y unicidad de solución para estos sistemas.

Teorema 1.21 (de Existencia y Unicidad de soluciones). *Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo*

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y localmente lipschitziana² en el abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces existe una única función:

$$\begin{array}{ccc} x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (t, x_0) & & x(t, x_0) \end{array}$$

que es suficientemente regular en (t, x) y además satisface para cada $x_0 \in U$:

I) $x(0, x_0) = x_0$,

II) Existe un intervalo $\mathbf{I} = (-\delta, \delta)$, donde $\delta > 0$, tal que para todo $t \in \mathbf{I}$:

$$x(t, x_0) \in U \quad \text{y} \quad x'(t, x_0) = f(x(t, x_0)).$$

Observación 1.22. La función $x = x(t, x_0)$ es una función que depende del tiempo y se le llama solución partiendo del punto x_0 .

Esta solución, que existe y es única, define para cada $x_0 \in U$ dos objetos geométricos: la *curva solución* y la *órbita*, que es la proyección de la curva solución en el espacio de fases:

1. **Curva solución:** $Cr(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in \mathbf{I}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

2. **Órbita:** $Or(x_0) = \{x : x = x(t, x_0), t \in \mathbf{I}\} \subset \mathbb{R}^n$.

²La función f se considera **localmente lipschitziana** si dado $x_0 \in U$ existe $k_0 > 0$ y un entorno abierto $V_0 \subset U$ de x_0 verificando que para cada par de puntos $x, y \in V_0$ se tiene $\|f(x) - f(y)\| \leq k_0 \|x - y\|$

La *curva solución* está parametrizada por el tiempo t mientras que la *órbita* es el conjunto de puntos del espacio de fases recorrido por esta curva, pudiendo haber varias parametrizaciones para dicha órbita. La parametrización más típica es mediante $x(t, x_0)$, pero también puede considerarse otro punto de la misma órbita, por ejemplo $x_1 = x(t_1, x_0)$, obteniendo así una nueva parametrización $x(t, x_1)$.

A la EDO autónoma (1.2) se le puede asociar un sistema dinámico continuo $(\mathbb{R}, U, \varphi_t)$, en donde $\varphi_t(x_0)$ representará la solución con condición inicial $x(0) = x_0$:

$$\varphi_t(x_0) = x(t, x_0).$$

Hemos definido ya la noción de punto de equilibrio para sistemas dinámicos generales, pero en un sistema dinámico continuo, por ejemplo (1.1), decimos que un punto x_0 es un *punto de equilibrio* si $f(x_0) = 0$, de donde claramente se deduce que $f(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi_t(x_0) = x_0$.

Siguiendo ahora con el sistema (1.2), ahora pedimos que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sea clase 1, $f \in C^1$. Consideraremos también $x_0 = 0 \in U$ un punto de equilibrio y sea $A = Df(x_0)$ la matriz Jacobiana del sistema evaluada en el punto de equilibrio x_0 . Podemos así considerar solo la parte lineal:

$$x' = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

para obtener el **sistema lineal asociado** a (1.2). Calculando los autovalores λ de la matriz Jacobiana, que se obtienen al hacer $\det(A - \lambda I) = 0$, podemos hacer un esquema con las representaciones básicas de los retratos de fases en torno al origen de un sistema en \mathbb{R}^2 :

Naturaleza	Autovalores	Tipo de retrato de fases	Estabilidad
\mathbb{R}	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Nodo repulsor	Inestable
\mathbb{R}	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Nodo atractor	Estable
\mathbb{R}	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	Punto de silla	Inestable
\mathbb{R}	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo impropio repulsor	Inestable
\mathbb{R}	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo impropio atractor	Estable
\mathbb{C}	$Re(\lambda_{1,2}) > 0$	Foco inestable (espiral saliente)	Inestable
\mathbb{C}	$Re(\lambda_{1,2}) < 0$	Foco estable (espiral entrante)	Estable
\mathbb{C}	$Re(\lambda_{1,2}) = 0$	Centro (órbitas cerradas)	Neutro

Cuadro 1.1: Clasificación de retratos de fases del sistema (1.3) en \mathbb{R}^2 según los autovalores del Jacobiano.

Ahora denotamos por n_- , n_+ y n_0 al número de autovalores de la matriz A evaluada en el equilibrio (teniendo en cuenta multiplicidades), con parte real negativa, positiva o nula respectivamente. Dentro de los puntos de equilibrio, separamos el caso especial cuando $n_0 = 0$:

Definición 1.23 (Hiperbólico). Un punto de equilibrio x_0 se denomina *hiperbólico* si $n_0 = 0$, es decir, todos los autovalores del Jacobiano tienen parte real no nula.

A la hora de estudiar la estabilidad de estos puntos nos aprovechamos de una serie de teoremas que enunciamos a continuación:

Teorema 1.24 (Hartman-Grobman). Consideramos un sistema de la forma

$$x' = f(x), \quad x \in X, \quad (1.4)$$

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in C^1(X, \mathbb{R}^n)$. Si $x_0 \in X$ es una singularidad hiperbólica, entonces existen $U \subset X$ entorno de x_0 , V entorno del origen y $h : U \rightarrow V$ un homeomorfismo tal que el sistema (1.4) es topológicamente conjugado a su sistema linealizado (1.3).

Teorema 1.25 (método de la primera aproximación). Si $x_0 \in X$ es una singularidad de f , entonces se verifica que:

- Si todos los autovalores de $A = Df(x_0)$ tienen parte real negativa, $n_0 = n_+ = 0$, entonces x_0 es asintóticamente estable.
- Si algún autovalor de $A = Df(x_0)$ tiene parte real positiva, $n_+ \neq 0$, entonces x_0 es inestable.

Observación 1.26. Es fácil de deducir que si además x_0 es hiperbólico, entonces las condiciones necesarias se convierten también en condiciones suficientes.

Observación 1.27. Supongamos que x_0, y_0 son dos puntos de equilibrio hiperbólicos del sistema (1.4). Entonces los retratos de fases del sistema en entornos lo suficientemente pequeños de x_0 y de y_0 son localmente topológicamente equivalentes si y sólo si ambos puntos de equilibrio tienen el mismo número de autovalores con parte real negativa y el mismo número con parte real positiva. Es decir, el número de autovalores n_- y n_+ de x_0 e y_0 han de coincidir.

Observación 1.28. Lo interesante en la teoría de bifurcación viene cuando se rompe la hiperbolicidad del equilibrio, y es de gran importancia tener presente que, en estos casos no podemos asegurar que la estabilidad en torno al equilibrio del sistema no lineal coincida con el linealizado.

1.3. Resultados clásicos

Esta sección es única y exclusivamente para presentar tres resultados clásicos e imprescindibles del análisis matemático y que además serán muy útiles y usados en la teoría de bifurcación.

Tanto estos resultados como sus demostraciones se pueden encontrar en [5].

Teorema 1.29 (de la Función Implícita). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un abierto, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación tal que:*

1. $F \in C^1(\Omega)$,
2. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$,
3. $\det D_y F(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$.

Entonces existen respectivas bolas $B[\bar{x}, \alpha]$ y $B[\bar{y}, \beta]$ de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m y una aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi : B[\bar{x}, \alpha] &\rightarrow B[\bar{y}, \beta] \\ x &\mapsto \varphi(x), \end{aligned}$$

continua en $B[\bar{x}, \alpha]$ y de clase 1 en $B[\bar{x}, \alpha]$ cumpliendo:

1. $\varphi(\bar{x}) = \bar{y}$,
2. $F(x, \varphi(x)) = 0$, para todo $x \in B[\bar{x}, \alpha]$,
3. Si $x \in B[\bar{x}, \alpha]$ e $y \in B[\bar{y}, \beta]$ son tales que $F(x, y) = 0$, entonces $y = \varphi(x)$,
4. $D\varphi(x)$ se puede obtener aplicando la regla de la cadena sobre la aplicación idénticamente nula:

$$\begin{aligned} B[\bar{x}, \alpha] &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto F(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Así,

$$D\varphi(x) = -(D_y F(x, \varphi(x)))^{-1} \cdot D_x F(x, \varphi(x)).$$

Además, si F es de clase p en Ω , entonces φ es de clase p en $B[\bar{x}, \alpha]$.

Observación 1.30. Con $D_y F$ hacemos referencia a la matriz jacobiana parcial de la aplicación F respecto de y_1, \dots, y_m , que será una matriz $m \times m$ que tiene por fila i -ésima las derivadas parciales de F_i con respecto a y_1, \dots, y_m .

Observación 1.31. Este teorema nos proporciona una condición suficiente para garantizar que a partir de una expresión de la forma $F(x, y) = 0$, con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, es posible despejar las variables y_1, \dots, y_m en función de las variables x_1, \dots, x_n .

Teorema 1.32 (de la Función Inversa). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \Omega$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación tal que:

1. $f \in C^1(\Omega)$,
2. $f(\bar{x}) = \bar{y}$,
3. $\det Df(\bar{x}) \neq 0$ (es decir, $Df(\bar{x})$ es un isomorfismo).

Entonces existen α, β positivos y:

$$g : B[\bar{y}, \beta] \rightarrow B[\bar{x}, \alpha],$$

continua en $B[\bar{y}, \beta]$ y de clase 1 en $B(\bar{y}, \beta)$ tal que:

1. $g(\bar{y}) = \bar{x}$,
2. $(f \circ g)(y) = y$, para todo $y \in B[\bar{y}, \beta]$,
3. Si $x^* \in B[\bar{x}, \alpha]$, $y^* \in B[\bar{y}, \beta]$ verifican que $f(x^*) = y^*$, entonces $g(y^*) = x^*$,
4. $Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$.

Además, si f es de clase p en Ω , entonces g es de clase p en $B[\bar{y}, \beta]$.

Proposición 1.33 (Fórmula de Taylor). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $x, \bar{x} \in \Omega$ tales que $L[\bar{x}, x] \subset \Omega$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es $m + 1$ veces diferenciable en Ω , entonces existe $c \in L[\bar{x}, x]$ tal que:

$$f(x) = f(\bar{x}) + df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}d^2f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \dots + \frac{1}{m!}d^m f(\bar{x})(x - \bar{x}, \dots, x - \bar{x}) + \frac{1}{(m+1)!}d^{(m+1)}f(c)(x - \bar{x}, \dots, x - \bar{x}).$$

Donde, en este caso:

$$P_{m, \bar{x}}^f(x) = f(\bar{x}) + df(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}d^2f(\bar{x})(x - \bar{x}, x - \bar{x}) + \dots + \frac{1}{m!}d^m f(\bar{x})(x - \bar{x}, \dots, x - \bar{x}),$$

es el polinomio de Taylor de orden m de f centrado en \bar{x} , y:

$$R_{m, \bar{x}}^f(x) = \frac{1}{(m+1)!}d^{(m+1)}f(c)(x - \bar{x}, \dots, x - \bar{x}),$$

es el resto de Lagrange.

Observación 1.34. La notación de $L[\bar{x}, x]$ representa el segmento que une \bar{x} con x :

$$L[\bar{x}, x] = \{\bar{x} + t(x - \bar{x}) : t \in [0, 1]\}.$$

Capítulo 2

Teoría de Bifurcación

Este será el capítulo principal del trabajo, donde daremos una introducción a la teoría de bifurcación, la cual se centra en el estudio de los cambios cualitativos que se dan en un sistema al modificar ciertos parámetros en una EDO. Empezaremos dando un ejemplo que pueda mostrar la necesidad de desarrollar dicha teoría para, posteriormente, hacer un resumen de los conceptos fundamentales que permitan sentar las bases necesarias para el análisis detallado que se realizará en próximos capítulos.

2.1. Motivación

La teoría de bifurcación estudia cómo cambia cualitativamente el comportamiento de un sistema cuando se modifica alguno de sus parámetros. Estas modificaciones pueden provocar un gran cambio en la dinámica del propio sistema.

Un ejemplo que nos puede servir para introducir la necesidad de estudiar esta teoría lo encontramos en la física: la generación de luz láser. En ciertos dispositivos láser particulares, si la energía que se inyecta en el sistema es baja, no se produce la emisión de luz láser, y se tiene simplemente una fuente de luz. Sin embargo, al alcanzar un umbral crítico de energía, el sistema empieza a emitir luz láser de forma estable. Este salto puede modelarse, de manera simplificada, mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$n' = (GN_0 - k)n - \mu Gn^2 \equiv f(n, N_0), \quad (2.1)$$

donde $n \geq 0$ representa la densidad de fotones, y $G, N_0, k, \mu > 0$ son parámetros del modelo.

Este fenómeno lo estudiaremos más detalladamente en el Capítulo 4, pero podemos ver que

existen dos puntos de equilibrio:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \frac{GN_0 - k}{\mu G},$$

y que fijados los parámetros G, k, μ , en función del valor que tome N_0 , tendremos un comportamiento completamente distinto:

- Si $N_0 < \frac{k}{G}$, el único equilibrio que verifica $n \geq 0$ es $n = 0$, que además resulta ser estable. El sistema no genera luz láser y se mantiene en reposo.
- Si $N_0 > \frac{k}{G}$, aparece un nuevo equilibrio positivo $n_2 > 0$, que es estable, mientras que $n = 0$ se vuelve inestable. El sistema comienza a emitir luz láser de forma continuada.
- Cuando $N_0 = \frac{k}{G}$, ambos equilibrios coinciden en $n = 0$, y se produce un cambio cualitativo en la dinámica del sistema a ambos lados de este punto. Este valor crítico del parámetro marca el punto de bifurcación.

Por tanto, la idea que debe permanecer es que, al variar un parámetro, el comportamiento cualitativo del sistema ha cambiado drásticamente. Continuamos entonces dando una introducción sobre la teoría de bifurcación, que será de gran ayuda para poder hacer un mejor estudio del sistema (2.1).

2.2. Introducción

Consideramos una familia de EDOs dependiente de un espacio de parámetros

$$x' = f(x, \alpha), \tag{2.2}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}^m$.

Fijado un vector de parámetros arbitrario, $\alpha = \alpha^* \in \mathbb{R}^m$, vamos a considerar el retrato de fases para la familia (2.2). Si ahora decidimos variar este vector de parámetros, el retrato de fases sufrirá también variaciones. Se pueden dar dos posibilidades: o el sistema permanece topológicamente equivalente al original, o el comportamiento del sistema cambia.

Definición 2.1 (Bifurcación). Se dice que la familia (2.2) presenta una **bifurcación** para $\alpha = \alpha^*$ cuando para valores de α arbitrariamente próximos a α^* , podemos encontrar retratos de fases topológicamente no equivalentes. Al vector de parámetros α^* , se le llama **valor de bifurcación**.

Definición 2.2 (Diagrama de bifurcación). El *diagrama de bifurcación* de la familia de EDOs parámetro-dependiente (2.2) es la representación en el espacio (α, x) de las curvas que representan, para cada valor de α , los puntos de equilibrio o órbitas periódicas.

Para poder continuar fundamentando la teoría de bifurcación, debemos extender los conceptos de equivalencia topológica, vistos en el capítulo anterior, para sistemas dinámicos continuos dependientes de parámetros.

Consideramos dos familias de EDOs con dependencia paramétrica:

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad (2.3)$$

$$y' = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (2.4)$$

con f, g suficientemente regulares.

Definición 2.3 (Topológicamente equivalentes). Se dice que los sistemas (2.3) y (2.4) son *topológicamente equivalentes* si:

1. Existe un homeomorfismo entre vectores de parámetros $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\beta = p(\alpha)$,
2. Existe un homeomorfismo dependiente del vector de parámetros α , $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $y = h_\alpha(x)$, llevando las órbitas del primer sistema (2.3) para valores del vector de parámetros α en órbitas del segundo sistema (2.4) para valores del vector de parámetros $\beta = p(\alpha)$, conservando la dirección temporal.

Definición 2.4 (Localmente topológicamente equivalentes). Se dice que los sistemas (2.3) y (2.4) son *localmente topológicamente equivalentes* cerca del origen si existe una aplicación $(x, \alpha) \mapsto (h_\alpha(x), p(\alpha))$ en un entorno de $(x, \alpha) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y tal que:

1. $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo definido en un entorno de $\alpha = 0$ tal que $p(0) = 0$,
2. $h_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo con dependencia paramétrica, definido en un entorno $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ de $x = 0$, tal que $h_\alpha(0) = 0$ y que además lleva las órbitas de U_α del primer sistema (2.3) en órbitas de $h_\alpha(U_\alpha)$ en el segundo sistema (2.4), conservando la dirección temporal.

Nos planteamos también qué sistemas se mantienen topológicamente equivalentes tras añadir una pequeña perturbación, pues se puede dar el caso donde el retrato de fases de un sistema dinámico no cambie cualitativamente tras una perturbación lo suficientemente pequeña.

Ejemplo 2.5 (Constancia de un equilibrio hiperbólico). Consideramos el sistema:

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

donde f es suficientemente regular y tiene un punto de equilibrio hiperbólico en x_0 , es decir, $f(x_0) = 0$ y los autovalores λ_i verifican que $Re(\lambda_i) \neq 0$ con $i = 1, \dots, n$. Consideramos también su perturbación dependiente de un parámetro:

$$x' = f(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

donde g es lo suficientemente regular y $\varepsilon \in \mathbb{R}$. El equilibrio del nuevo sistema (2.6) vendrá dado por la ecuación:

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon g(x) = 0,$$

verificando $F(x_0, 0) = 0$.

Por otra parte, la matriz Jacobiana $A_0 := F_x(x_0, 0) = Df(x_0)$ es invertible ya que x_0 es un equilibrio hiperbólico. Haciendo uso entonces del *Teorema de la Función Implícita*, sabemos que existe una función $x(\varepsilon)$, con $x(0) = x_0$ que satisface que $F(x(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ para cualquier $|\varepsilon|$ lo suficientemente pequeño. La matriz Jacobiana de (2.6) es:

$$A_\varepsilon := D_x F(x(\varepsilon), \varepsilon) = (Df(x) + \varepsilon Dg(x))|_{x=x(\varepsilon)},$$

la cual depende de ε y coincide con A_0 para $\varepsilon = 0$.

Por otra parte, los autovalores irán variando a medida que lo haga el parámetro, pues dependen directamente de ε . Así, por continuidad sabemos que existe $\delta > 0$ tal que A_ε es hiperbólico para todo ε con $|\varepsilon| < \delta$. Consecuentemente, $x(\varepsilon)$ será un equilibrio hiperbólico de (2.6) para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño.

Como para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeño se mantiene la hiperbolicidad, se concluye que los autovalores no cruzarán el eje imaginario, es decir, la parte real no se anulará en ningún momento. De esta forma deducimos que los autovalores no cambiarán de signo en su parte real, y por lo tanto se mantiene la misma cantidad de autovalores con parte real negativa (n_-), y de autovalores con parte real positiva (n_+). Haciendo ahora uso de la Observación 1.27, podemos afirmar que (2.5) y (2.6) son localmente topológicamente equivalentes en un entorno del equilibrio.

Observación 2.6. Resumiremos el concepto anterior diciendo que un equilibrio hiperbólico es **estructuralmente estable** bajo perturbaciones regulares.

Lo interesante de la teoría de bifurcación recae en el hecho de que esto no se va a verificar para equilibrios no hiperbólicos. En estos casos, incluso la más mínima perturbación puede provocar grandes cambios en el retrato de fases, en el número de equilibrios o mismo en su estabilidad. Precisamente este hecho motiva el estudio de las bifurcaciones.

Buscamos entonces cómo clasificar las bifurcaciones en función de lo estructuralmente inestables que sean. Para ello introducimos, de manera intuitiva, el concepto de *codimensión*.

Definición 2.7 (Codimensión). Decimos que una bifurcación es de *codimensión* k si el número de condiciones independientes que dan lugar a la bifurcación es exactamente k .

Observación 2.8. Se puede entender la *codimensión* como el número de parámetros que hay que mover para que ocurra una bifurcación.

Ejemplo 2.9 (Codimensión de la bifurcación de fold). Dado el sistema:

$$x' = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad (2.7)$$

con $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$, se puede ver que simplemente variando α se pueden obtener tres retratos de fases completamente distintos. Para $\alpha < 0$ se tienen dos puntos de equilibrio, para $\alpha = 0$ estos colisionan en uno, y para $\alpha > 0$, no se tienen puntos de equilibrio (Figura 2.1). Por tanto, con tan solo variar el parámetro α , se puede observar una bifurcación en $\alpha = 0$. Diremos entonces que la bifurcación de tipo fold del sistema (2.7) es de *codimensión 1*.

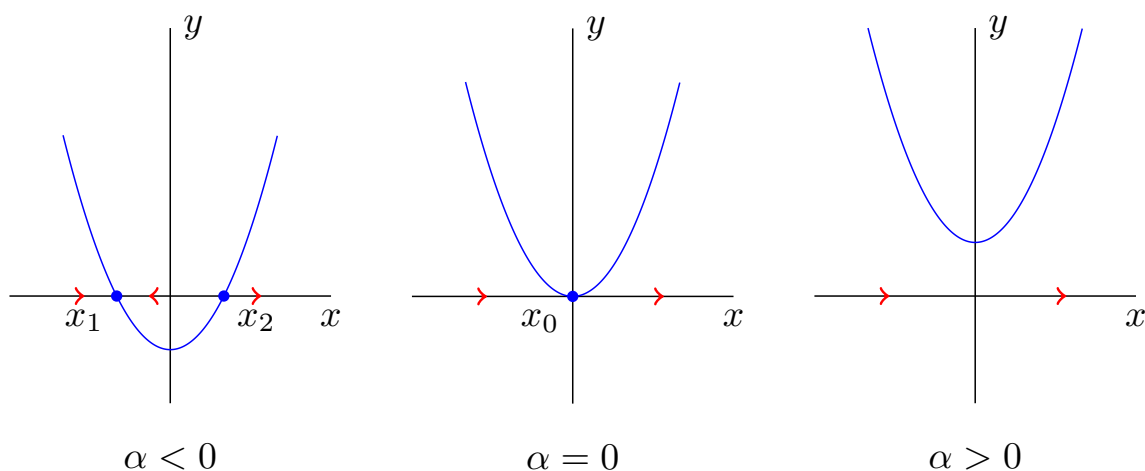


Figura 2.1: Gráfica de $\alpha + x^2$ y bifurcación de tipo fold para el sistema (2.7).

Observación 2.10. Nos centraremos en el próximo capítulo en el estudio de bifurcaciones de codimensión 1.

2.3. Formas topológicas normales

Aunque los diagramas de bifurcación pueden mostrar comportamientos complejos, en muchos casos presentan patrones comunes y estructuras recurrentes. De hecho, sistemas diferentes pueden presentar diagramas con apariencia similar cuando estos son topológicamente equivalentes.

Esta sección estará dedicada al problema de clasificación de todos los posibles diagramas de bifurcación de un sistema genérico. Esta clasificación se basará en la búsqueda de formas normales topológicas, es decir, representaciones que reflejan la estructura cualitativa esencial del sistema.

Antes de nada, veamos a qué nos referimos cuando hablamos de un sistema genérico:

Definición 2.11 (Sistema genérico). Un *sistema genérico* es aquel que satisface un número finito de *condiciones de generalidad*:

$$N_i[f] \neq 0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Estas condiciones suelen estar relacionadas directamente con las derivadas parciales de f respecto a x y a α evaluadas en $(x, \alpha) = (0, 0)$.

Observación 2.12. Dichas condiciones de generalidad pueden incluir derivadas parciales respecto a cualquiera de las dos variables (x, α) . Por tanto es útil hacer la siguiente distinción:

- **Condiciones de no degeneración:** condiciones expresadas en términos de derivadas parciales de $f(x, 0)$ respecto a x evaluadas en $x = 0$. Estas condiciones garantizan que el equilibrio no sea demasiado degenerado y que la bifurcación tenga el orden deseado.
- **Condiciones de transversalidad:** condiciones expresadas en términos de derivadas parciales de $f(x, \alpha)$ respecto a α . Estas condiciones garantizan que el parámetro dé lugar a una bifurcación.

Ejemplo 2.13. Como veremos en el próximo capítulo, en la construcción de la forma normal de tipo fold, van a aparecer dos condiciones de generalidad para el sistema (2.7):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0, \quad (\text{Fold 1})$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0. \quad (\text{Fold 2})$$

- **Condición de no degeneración:** Fold 1.
- **Condición de transversalidad:** Fold 2.

En cuanto al problema de clasificación, este se puede simplificar gracias a los siguientes aspectos a tener en cuenta:

- El número mínimo de parámetros necesarios para obtener una bifurcación de codimensión k es exactamente k . Por tanto, se necesita poder variar k parámetros independientes para tener una bifurcación de codimensión k .
- Aunque el sistema dependa de m parámetros con $m > k$, es suficiente con estudiar la variación de k parámetros (el resto se fijan) para analizar una bifurcación de codimensión k .

Para el caso de bifurcaciones locales de un equilibrio, se introduce el concepto de *forma normal topológica*, que proporciona el diagrama universal de bifurcación.

Sea el sistema dinámico continuo y parámetro-dependiente:

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^k, \quad (2.8)$$

con una singularidad para $\alpha = 0$ en $x = 0$. Junto al sistema genérico (2.8) consideramos el sistema:

$$\xi' = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^k, \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad (2.9)$$

que tiene una singularidad para $\beta = 0$ en $\xi = 0$, y que ha sido construido de tal forma que presenta una bifurcación de codimensión k . El vector $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ es el vector de coeficientes de los polinomios del sistema.

Definición 2.14 (Forma normal topológica). El sistema (2.9) es una *forma normal topológica* para la bifurcación de codimensión k si algún sistema genérico (2.8) es localmente topológicamente equivalente a (2.9) cerca del origen para ciertos valores de los coeficientes σ_i , y satisface condiciones de generalidad, no degeneración y transversalidad.

La *forma normal topológica* es una herramienta clave en la teoría de bifurcación. Tiene tanta importancia porque esta *forma normal* nos permite reducir el análisis de bifurcaciones locales de codimensión k al de alguna familia topológicamente equivalente que tenga exactamente k parámetros, y que solo contendrá los términos algebraicos relevantes e influyentes en la estructura cualitativa de la bifurcación de interés.

Capítulo 3

Bifurcaciones de codimensión 1 en sistemas dinámicos continuos

Consideramos la familia de sistemas dinámicos continuos que depende de un único parámetro:

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de al menos clase C^1 . Para $\alpha = \alpha_0$ vamos a considerar el equilibrio hiperbólico $x = x_0$. Como ya hemos mencionado previamente, para variaciones lo suficientemente pequeñas, el equilibrio permanece hiperbólico.

Hay dos maneras por las cuales la condición de hiperbolicidad se puede romper:

1. La matriz Jacobiana $Df(x_0, \alpha_0)$ tiene un autovalor real simple λ que se anula.
2. La matriz Jacobiana $Df(x_0, \alpha_0)$ tiene un par de autovalores complejos conjugados λ_1, λ_2 que se sitúan en el eje imaginario.

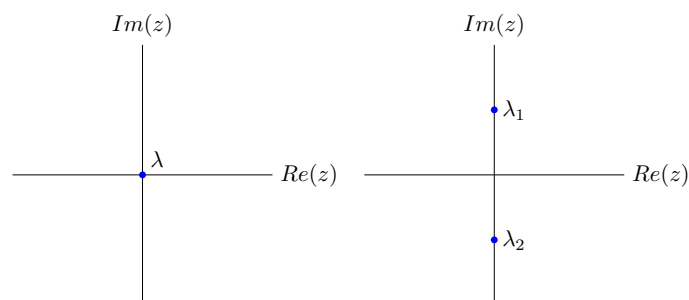


Figura 3.1: Casos de pérdida de hiperbolicidad.

Dependiendo del caso en el que nos encontremos, estas son las bifurcaciones locales más típicas:

Definición 3.1 (Bifurcación de tipo fold). La bifurcación asociada directamente con la aparición de algún autovalor nulo $\lambda = 0$ se conoce como *bifurcación de tipo fold*.

Observación 3.2. Dentro de las bifurcaciones de tipo *fold*, estudiaremos a mayores dos casos degenerados conocidos como bifurcación *transcrítica* y bifurcación *pitchfork*.

Definición 3.3 (Bifurcación de Hopf). La bifurcación asociada directamente con la aparición de los dos autovalores complejos conjugados ubicados en el eje imaginario $\lambda_{1,2} = \pm iw_0, w_0 > 0$, se conoce como *bifurcación de Hopf* (o *Andronov-Hopf*).

Observación 3.4. Observamos que la bifurcación de tipo *fold* puede ocurrir para $n \geq 1$, pero para que ocurra la bifurcación de Hopf se necesita que $n \geq 2$.

Por lo tanto, en este capítulo veremos que un equilibrio no hiperbólico que satisfaga alguna de las condiciones anteriores es estructuralmente inestable. Además, estudiaremos sus retratos de fases a ambos lados del valor de bifurcación y la construcción de sus formas normales. En todas ellas, primero estudiaremos un caso ejemplo y, posteriormente, haremos una caracterización de la propia forma normal para cada bifurcación.

3.1. Bifurcación de tipo fold

Consideramos el sistema dinámico dependiente de un parámetro:

$$x' = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

Estudiemos los distintos comportamientos que presenta el sistema en función del parámetro:

- **Caso $\alpha < 0$:** Se tienen dos puntos de equilibrio $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, donde el punto de equilibrio negativo es estable y el positivo es inestable.
- **Caso $\alpha = 0$:** Se tiene un equilibrio no hiperbólico en $x_0 = 0$ con $\lambda = \frac{\partial}{\partial x} f(x, \alpha)|_{(0,0)} = 0$.
- **Caso $\alpha > 0$:** No se tienen puntos de equilibrio.

Como se puede apreciar en la Figura 3.2, mientras α atraviesa el valor de bifurcación $\alpha = 0$, los dos puntos singulares colisionan en un único punto singular y posteriormente desaparecen para valores positivos del parámetro. Esta colisión de dos singularidades en una, para finalmente

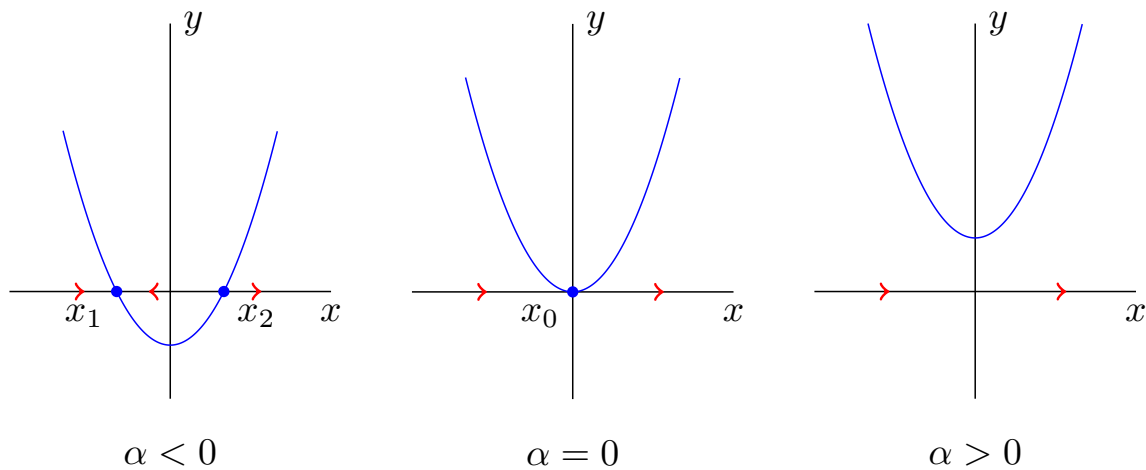


Figura 3.2: Gráfica de $\alpha + x^2$ y bifurcación de tipo fold para el sistema (2.7).

acabar desapareciendo cuando el parámetro pasa de valores negativos a positivos, se corresponderá con una **bifurcación de tipo fold subcrítica**.

Para ver esto, también nos sirve representar el diagrama de bifurcación en el plano (α, x) , el cual podemos ver en la parte (a) de la Figura 3.3, que nos muestra el número de equilibrios que encontraremos en función del valor de α y la estabilidad que tienen los mismos.

Observación 3.5. Nótese que el sistema

$$x' = \alpha - x^2, \quad (3.2)$$

tendría un comportamiento análogo, pero las singularidades aparecen para valores de $\alpha > 0$. En este caso, se denomina **bifurcación de tipo fold supercrítica** y podemos ver su diagrama de bifurcación en la parte (b) de la Figura 3.3.

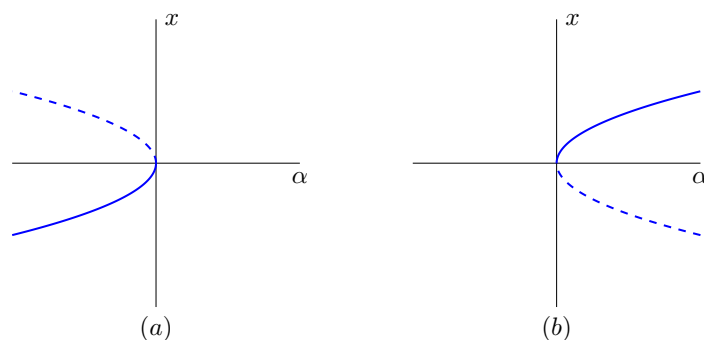


Figura 3.3: (a) Diagrama de bifurcación de tipo fold subcrítica. (b) Diagrama de bifurcación de tipo fold supercrítica.

Ahora, podríamos pensar qué le ocurre al sistema si añadiésemos términos de orden superior. El lema que probamos a continuación nos da un resultado clave a la hora de encontrar la forma normal para la bifurcación tipo fold, ya que nos asegura que añadir términos de orden superior al sistema (3.1) no supondrá ningún cambio cualitativo en el comportamiento del sistema en un entorno del origen para valores cercanos a $\alpha = 0$.

Lema 3.6. *El sistema*

$$x' = \alpha + x^2 + O(x^3), \quad (3.3)$$

es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen al sistema (3.1).

Demostración. Dividiremos la demostración en dos pasos.

Paso 1. Análisis de los equilibrios.

Consideramos y una variable escalar y reescribimos el primer sistema de la forma

$$y' = F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha), \quad (3.4)$$

donde $\psi = O(y^3)$ es una función lo suficientemente regular cerca del origen. Consideramos el conjunto de puntos de equilibrio del sistema (3.4):

$$M = \{(y, \alpha) : F(y, \alpha) = 0\},$$

el cual incluye el origen; $F(0, 0) = 0$. Además, se verifica que $F_\alpha(0, 0) = 1$, por lo tanto se cumplen las hipótesis del *Teorema de la Función Implícita*, así, M estará parametrizada localmente por y :

$$M = \{(y, \alpha) : \alpha = g(y)\},$$

donde g es una función lo suficientemente regular definida para valores pequeños de $|y|$. Además, despejando llegamos a:

$$\alpha = -y^2 + \psi(y, g(y)) \Rightarrow M = \{(y, \alpha) : \alpha = -y^2 + O(y^3)\},$$

Por lo tanto, si tenemos un $\alpha < 0$ lo suficientemente pequeño, habrá dos equilibrios de (3.4) cerca del origen, $y_{1,2}(\alpha)$, que estarán próximos a los puntos de equilibrio de (3.1), $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, para el mismo valor del parámetro.

Paso 2. Construcción de un homeomorfismo

Ahora construimos para valores de $|\alpha|$ suficientemente pequeños la aplicación parámetro-dependiente $y = h_\alpha(x)$ como sigue:

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} a(\alpha) + b(\alpha)x & \text{si } \alpha < 0, \\ x & \text{si } \alpha \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde los coeficientes a, b se obtendrán de las condiciones:

$$h_\alpha(x_j(\alpha)) = y_j(\alpha), \quad j = 1, 2.$$

Más concretamente, se pueden calcular:

$$\begin{cases} y_1(\alpha) = h_\alpha(x_1(\alpha)) = a(\alpha) + b(\alpha)x_1(\alpha), \\ y_2(\alpha) = h_\alpha(x_2(\alpha)) = a(\alpha) + b(\alpha)x_2(\alpha), \end{cases}$$

restando y despejando, obtenemos:

$$\begin{cases} b(\alpha) = \frac{y_2(\alpha) - y_1(\alpha)}{x_2(\alpha) - x_1(\alpha)} = \frac{y_1(\alpha) - y_2(\alpha)}{2\sqrt{-\alpha}}, \\ a(\alpha) = y_1(\alpha) - b(\alpha)x_1(\alpha) = \frac{y_1(\alpha) + y_2(\alpha)}{2}, \end{cases}$$

Veamos que efectivamente es un homeomorfismo. Primero observamos que:

- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} y_1(\alpha) = x_1(\alpha)$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} y_2(\alpha) = x_2(\alpha)$,
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_1(\alpha) = 0$ y $\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_2(\alpha) = 0$,
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} a(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(y_1(\alpha) + \frac{y_2(\alpha) - y_1(\alpha)}{x_2(\alpha) - x_1(\alpha)} x_1(\alpha) \right) = 0$,
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} b(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{y_2(\alpha) - y_1(\alpha)}{x_2(\alpha) - x_1(\alpha)} \right) = 1$.

Al tratarse de dos funciones lineales (la primera con pendiente $b(\alpha) \neq 0$), se deduce la biyectividad del homeomorfismo (3.5). Además, la continuidad se puede probar, pues ambas componentes son continuas y $\lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} x = h_0(x) = x = \lim_{\alpha^- \rightarrow 0} a(\alpha) + b(\alpha)x$. Finalmente, su inversa quedaría:

$$h_\alpha^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y - a(\alpha)}{b(\alpha)} & \text{si } \alpha < 0, \\ y & \text{si } \alpha \geq 0, \end{cases}$$

la cual también es continua en $\alpha = 0$ viendo que $\lim_{\alpha^+ \rightarrow 0} y = h_0(y) = y = \lim_{\alpha^- \rightarrow 0} \frac{y - a(\alpha)}{b(\alpha)}$.

Como estamos en la recta real \mathbb{R} , en un entorno de los equilibrios, las órbitas serán trozos de rectas. Como nuestro homeomorfismo h_α lleva equilibrios en equilibrios, y es monótono (estrictamente creciente), esto basta para implicar que lleva localmente órbitas del sistema (3.1) en órbitas del sistema (3.3), conservando la dirección temporal. Se puede concluir entonces que el sistema (3.3) es localmente topológicamente equivalente al sistema (3.1) en un entorno del origen.

□

El siguiente paso será probar que el sistema (3.1), o (3.2), es una forma normal topológica de un sistema unidimensional genérico que presente una bifurcación de tipo *fold*.

Teorema 3.7 (Forma normal topológica de la bifurcación de tipo fold). *Supongamos que el sistema dinámico unidimensional:*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

con f una función suficientemente regular, tiene una singularidad $x = 0$ para $\alpha = 0$ y sea $\lambda = Df_x(0, 0) = 0$. Asumamos que además verifican las condiciones siguientes:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0, \quad (F1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0. \quad (F2)$$

Entonces el sistema presenta una bifurcación de tipo *fold* en $(0, 0)$ y es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a una de las dos formas normales:

$$\eta' = \beta \pm \eta^2.$$

Demostración. La idea principal de la demostración es, mediante cálculos básicos, transformar el sistema (3.6) en la forma (3.1) incluyendo términos de hasta segundo orden, aprovechándonos del Lema 3.6 para deshacernos de los términos de orden superior.

Empezamos expandiendo $f(x, \alpha)$ como una serie de Taylor respecto a x centrada en $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3),$$

donde:

$$f_0(\alpha) = f(0, \alpha) \quad \text{y} \quad f_k(\alpha) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, \alpha) \Big|_{(0,\alpha)},$$

Además, por hipótesis sabemos que se cumplen:

- **Condición de equilibrio** : $f_0(0) = f(0, 0) = 0$.
- **Condición de bifurcación de fold**: $f_1(0) = Df_x(0, 0) = 0$.

Paso 1: Cambio de coordenadas

Realizamos un cambio de coordenadas introduciendo una nueva variable:

$$\xi = x + \delta, \quad (3.7)$$

donde $\delta = \delta(\alpha)$ será definida posteriormente. Teniendo en cuenta que $x = \xi - \delta$ y sustituyendo en nuestra ecuación principal obtendremos la expresión:

$$\begin{aligned}\xi' &= [f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta + f_2(\alpha)\delta^2 + O(\delta^3)] \\ &\quad + [f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + O(\delta^2)]\xi \\ &\quad + [f_2(\alpha) + O(\delta)]\xi^2 \\ &\quad + O(\xi^3).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Como buscamos una expresión de la forma (3.1) vamos a intentar deshacernos de los términos lineales, es decir, el coeficiente de ξ . Para ello, consideramos $F(\alpha, \delta)$ como el coeficiente de la parte lineal del sistema, el cual podemos expresar como:

$$F(\alpha, \delta) = f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\delta + \delta^2\psi(\alpha, \delta),$$

con ψ suficientemente regular. Por hipótesis, sabemos que se verifica (F1), por lo tanto:

$$f_2(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0,$$

y además observamos que:

$$F(0, 0) = f_1(0) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \delta} F(\alpha, \delta) \Big|_{(0,0)} = -2f_2(0) \neq 0; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, \delta) \Big|_{(0,0)} = f_1'(0),$$

por lo tanto se verifican las hipótesis del *Teorema de la Función Implícita*, el cual nos asegura la existencia y unicidad local de una función $\delta = \delta(\alpha)$ con $\delta(0) = 0$ y $F(\alpha, \delta(\alpha)) = 0$. Además, podemos calcular:

$$\delta'(0) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)} \xrightarrow{\text{Taylor}} \delta(\alpha) = \frac{f_1'(0)}{2f_2(0)}\alpha + O(\alpha^2),$$

consiguiendo así la expresión de δ que anula la parte lineal del sistema.

Siguiendo con el mismo razonamiento, y considerando los términos independientes como:

$$h(\alpha) = f_0(\alpha) - f_1(\alpha)\delta(\alpha) + f_2(\alpha)\delta^2(\alpha) + O(\delta^3),$$

hacemos la expansión de Taylor:

$$h(\alpha) = h(0) + h'(0)\alpha + O(\alpha^2),$$

donde

$$h(0) = f_0(0) - f_1(0)\delta(0) + f_2(0)\delta^2(0) + O(\delta^3) = 0,$$

$$h'(0) = f_0'(0) - f_1'(0)\delta(0) - f_1(0)\delta'(0) + f_2'(0)\delta^2(0) + 2f_2(0)\delta'(0)\delta(0) + O(\delta^3) = f_0'(0),$$

y teniendo en cuenta las condiciones de equilibrio y de bifurcación de fold, junto con que la función $\delta(\alpha)$ se anula en el punto $\alpha = 0$ obtenemos:

$$h(\alpha) = f'_0(0)\alpha + O(\alpha^2).$$

Por tanto, la expresión (3.8) queda como sigue:

$$\xi' = [f'_0(0)\alpha + O(\alpha^2)] + [f_2(\alpha) + O(\alpha)]\xi^2 + O(\xi^3), \quad (3.9)$$

sin dependencia de términos lineales y con los términos independientes simplificados.

Paso 2: Incorporación de un nuevo parámetro

Considerando la parte de términos independientes de (3.9) introducimos el parámetro:

$$\mu(\alpha) = f'_0(0)\alpha + \alpha^2\phi(\alpha),$$

con ϕ suficientemente regular. Vemos que μ verifica:

$$\mu(0) = 0; \quad \mu'(0) = f'_0(0) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \right|_{(0,0)}.$$

Sabemos además, por hipótesis (F2), se verifica que $\mu'(0) \neq 0$. De esta manera estamos bajo las hipótesis para aplicar el *Teorema de la Función Inversa* que nos asegura la existencia y unicidad local de una función $\alpha = \alpha(\mu)$ con $\alpha(0) = 0$ que transforma (3.9) en:

$$\xi' = \mu + b(\mu)\xi^2 + O(\xi^3),$$

en donde $b(\mu) := f_2(\alpha(\mu)) + O(\alpha(\mu))$ es lo suficientemente regular y que por (F1) verifica que $b(0) = f_2(0) \neq 0$

Paso 3: Ajuste final

Para concluir la demostración, necesitamos un ajuste que nos permita considerar ambos casos de la forma normal. Para ello tomamos $\eta = |b(\mu)|\xi$ y operamos:

$$\frac{\eta'}{|b(\mu)|} = \mu + b(\mu) \frac{\eta^2}{|b(\mu)|^2} + O(\eta^3) \iff \eta' = |b(\mu)|\mu + \frac{b(\mu)}{|b(\mu)|} \eta^2 + O(\eta^3),$$

y tomando $\beta = |b(\mu)|\mu$, $s = \frac{b(\mu)}{|b(\mu)|} = \pm 1$, llegamos a la expresión:

$$\eta' = \beta + s\eta^2 + O(\eta^3).$$

Para concluir la demostración, basta aplicar el *Lema 3.6* para deshacernos de los términos de orden superior y conseguir la forma normal deseada:

$$\eta' = \beta + s\eta^2.$$

□

3.1.1. Bifurcaciones tipo fold degeneradas

Hemos estudiado previamente que un sistema dinámico uniparamétrico que tenga un autovalor nulo en su matriz Jacobiana, y que verifique ciertas condiciones de *no degeneración* y de *transversalidad*, será localmente topológicamente equivalente a una de las formas normales asociadas a la bifurcación de tipo *fold*.

Aún así, puede haber sistemas que presenten un autovalor nulo pero que no verifiquen ambas condiciones (F1) y (F2). Por ello que en esta subsección estudiaremos nuevas bifurcaciones de codimensión 1 que pueden aparecer cuando existe un autovalor nulo, pero se incumple alguna de las condiciones de *no degeneración* o de *transversalidad* previamente vistas.

Puede darse el caso de que un sistema tenga en el origen una singularidad para todo valor del parámetro. En este caso se estaría violando la condición de *transversalidad* y esta bifurcación se conoce como **bifurcación transcítica**. Veremos cómo es su forma normal topológica y qué condiciones adicionales debemos imponer para subsanar el incumplimiento de (F2).

El otro caso que estudiaremos será el de un sistema que presente simetría impar o respecto al origen, es decir, $f_\alpha(-x) = -f_\alpha(x)$, ya que estos sistemas no verificarán la condición de *no degeneración*. A esta bifurcación se la conoce como **bifurcación pitchfork o tridente**, y veremos cómo es su forma normal topológica y qué condiciones adicionales debemos imponer para subsanar el incumplimiento de la condición (F1).

Bifurcación transcítica

Consideramos el sistema dinámico dependiente de un parámetro:

$$x' = \alpha x - x^2 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Estudiemos los distintos comportamientos que presenta el sistema en función del parámetro:

- **Caso $\alpha < 0$:** Se tienen dos puntos de equilibrio en $x_1 = 0$, que es estable, y en $x_2 = \alpha$, que es inestable.
- **Caso $\alpha = 0$:** Se tiene un equilibrio no hiperbólico en $x_1 = 0$ con $\lambda = \frac{\partial}{\partial x} f(x, \alpha)|_{(0,0)} = 0$.
- **Caso $\alpha > 0$:** Se tienen de nuevo dos puntos de equilibrio en $x_1 = 0$, que ahora es inestable, y en $x_2 = \alpha$, que ahora es estable.

La colisión de los equilibrios en $\alpha = 0$ y el intercambio de estabilidad entre ellos al cruzar dicho valor del parámetro indican la existencia de una bifurcación, como vemos en la Figura 3.4.

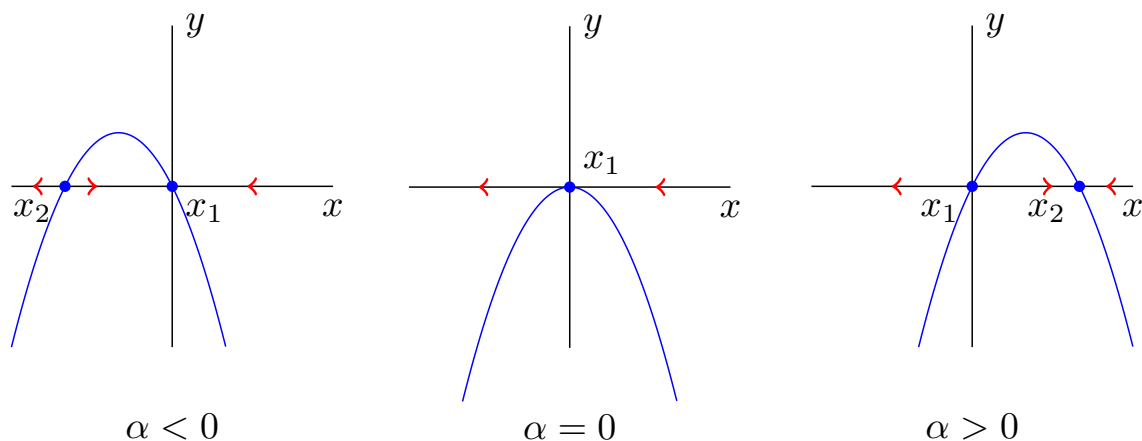


Figura 3.4: Gráfica de $\alpha x - x^2$ y bifurcación transcítica del sistema (3.10).

Esta bifurcación se denomina bifurcación *transcítica*, en este caso **con pendiente positiva**, tiene lugar en el punto $\alpha = 0$ y en la parte (a) de la Figura 3.5 podemos ver el diagrama de bifurcación.

Observación 3.8. Al igual que en la sección anterior, se podría trabajar con el sistema

$$x' = \alpha x + x^2,$$

que daría lugar a una **bifurcación transcítica con pendiente negativa**. Su diagrama de bifurcación se aprecia en la parte (b) de la Figura 3.5.

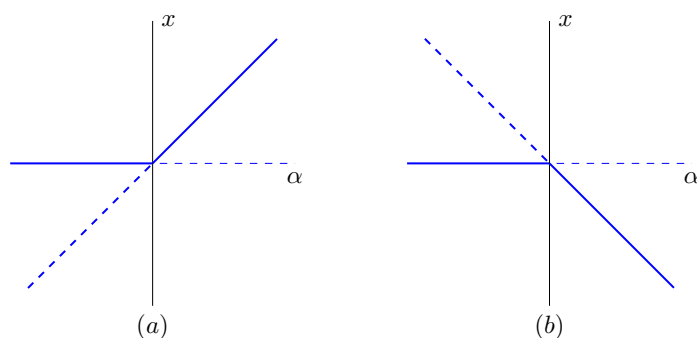


Figura 3.5: (a) Diagrama de bifurcación transcítica con pendiente positiva. (b) Diagrama de bifurcación transcítica con pendiente negativa.

Teorema 3.9 (Forma normal topológica de la bifurcación transcítica). *Supongamos que el sistema dinámico unidimensional:*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

con f una función suficientemente regular, tiene una singularidad $x = 0$ para $\alpha = 0$ y sea $\lambda = Df_x(0,0) = 0$. Asumamos que además verifican las condiciones siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} = 0, \quad (\text{TRC1})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0, \quad (\text{TRC2})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0. \quad (\text{TRC3})$$

Entonces el sistema presenta una bifurcación transcítica en $(0,0)$ y es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a una de las dos formas normales:

$$\eta' = \beta\eta \mp \eta^2.$$

Demostración. En esta ocasión en la demostración se usará el *Teorema de la Función Implícita* para poder caracterizar la estructura geométrica de las curvas de los puntos de equilibrio que pasan por el punto de bifurcación.

Por los diagramas de bifurcación vistos en la Figura 3.5, se pueden deducir las siguientes propiedades sobre la estructura de las órbitas en un entorno del punto de bifurcación:

- (I) Hay dos curvas de puntos de equilibrios que cruzan el punto de bifurcación $(x, \alpha) = (0, 0)$ y vienen dadas por $x = \alpha$ y $x = 0$.
- (II) Las dos curvas anteriores existen a ambos lados del valor $\alpha = 0$.
- (III) Ambas curvas de puntos de equilibrio cambian su estabilidad al atravesar el valor $\alpha = 0$.

Basando nuestra demostración en estas 3 propiedades, empezaremos justificando las condiciones suficientes dadas para luego poder construir la forma normal. Consideramos un sistema uniparamétrico:

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

con una singularidad no hiperbólica en $x = 0$ para $\alpha = 0$, por lo tanto obtenemos las dos condiciones:

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

Ahora, sabemos por (I) que tenemos dos curvas de puntos de equilibrios que pasa por $(0,0)$ y para ello necesitamos imponer:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} = 0,$$

que coincide exactamente con la hipótesis (TRC1). Vemos que esto es necesario ya que en caso contrario, estaríamos bajo las hipótesis del *Teorema de la Función Implícita* y podríamos asegurar que existe una y sola una curva de puntos de equilibrio que pase por el origen.

Ahora necesitamos compatibilizar la condición anterior con el hecho de que $x = 0$ es también una curva de puntos de equilibrio que atraviesa el origen. Para solucionarlo, vamos a exigir que el sistema (3.11) sea de la forma:

$$x' = f(x, \alpha) = xF(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde se tiene:

$$F(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{f(x, \alpha)}{x} & x \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} f(0, \alpha) & x = 0. \end{cases}$$

Este nuevo sistema tiene la curva de puntos de equilibrios $x = 0$, la cual nos da un condición poderosa, pues se considera que $f(0, \alpha) = 0$ para todo α . De esta manera, se tendrá:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x, \alpha)|_{(0,0)} = 0.$$

Ahora busquemos que haya otra curva de equilibrios que pase por $(x, \alpha) = (0, 0)$. Para ello, buscaremos condiciones sobre la función F para que tenga una curva de ceros que pase por $(0, 0)$. Para ello aprovecharemos la propia expresión de F y sus derivadas, que también se podrán expresar en función de f , para obtener:

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, \alpha)|_{(0,0)} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} F(x, \alpha)|_{(0,0)} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \alpha)|_{(0,0)}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, \alpha)|_{(0,0)} &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, \alpha)|_{(0,0)}; \end{aligned}$$

y una importante condición añadida,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \alpha)|_{(0,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} f(x, \alpha)|_{(0,0)} \stackrel{(TRC3)}{\neq} 0,$$

pues gracias a esta condición podemos aplicar el *Teorema de la Función Implícita* y asegurar la existencia de una función $\alpha(x)$, definida para valores de x suficientemente pequeños, con $\alpha(0) = 0$ y tal que $F(x, \alpha(x)) = 0$.

De esta forma ya tenemos una curva de puntos de equilibrio dada por $\alpha(x)$. Ahora bien, necesitamos que no coincida con $x = 0$ y además por (II), necesitamos que exista a ambos lados de $\alpha = 0$, y para ello imponemos:

$$0 < \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha(0) \right| < \infty. \quad (3.12)$$

Además, el propio *Teorema de la Función Implícita* nos da una expresión para la derivada de dicha función:

$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha(0) = \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, \alpha)|_{(0,0)} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial x}F(x, \alpha)|_{(0,0)} = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, \alpha)|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha}f(x, \alpha)|_{(0,0)}}, \quad (3.13)$$

y por (TRC2) y (TRC3) sabemos que la expresión es no nula y acotada. Además esta expresión, nos dará la pendiente de la segunda curva de puntos de equilibrio.

Pasamos a la construcción de la forma normal haciendo uso de las expansiones de Taylor. Empezamos considerando el sistema general (3.11) y hacemos su expansión en torno al punto de equilibrio $(x, \alpha) = (0, 0)$:

$$f(x, \alpha) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0, 0)x\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(0, 0)\alpha^2 + \psi(x, \alpha),$$

donde $\psi = O(|(x, \alpha)|^3)$. Haciendo uso de todas las hipótesis vistas, nos quedaría algo de la forma:

$$f(x, \alpha) = Ax\alpha + Bx^2 + \psi(x, \alpha), \text{ tal que } A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0, 0), B = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0).$$

Ahora bien, podremos considerar el sistema:

$$f(x, \alpha) = Ax\alpha + Bx^2, \quad (3.14)$$

ya que en un entorno del $(0, 0)$ los términos de orden superior no determinan la propia bifurcación, pues tienden a 0 mucho más rápido que los del sistema (3.14), por ello los vamos a obviar en la forma normal. Basta considerar el cambio de variable $\eta = |B|x$ y $\beta = A\alpha$,

$$\eta' = |B|x' = |B| \left[A\frac{\eta}{|B|}\alpha + B\frac{\eta^2}{|B|^2} \right] = A\alpha\eta + \frac{B}{|B|}\eta^2 = \beta\eta + s\eta^2 \quad / \quad s = \mp 1.$$

Por lo tanto queda probado que, bajo las hipótesis de que $(0, 0)$ es una singularidad no hiperbólica, (TRC1), (TRC2) y (TRC3), el comportamiento cualitativo de las órbitas en un entorno de $(x, \alpha) = (0, 0)$ del sistema (3.11) es idéntico al del sistema (3.10). De esta manera, concluimos que (3.11) es topológicamente equivalente a:

$$\eta' = \beta\eta \mp \eta^2. \quad (3.15)$$

Por tanto, (3.15) es la forma normal de la bifurcación *transcrítica*. □

Observación 3.10. Es fácil de comprobar que la forma normal obtenida (3.15) efectivamente verifica (III), bastaría comprobar la dirección que toma el campo vectorial para distintos valores del parámetro.

Bifurcación pitchfork

Consideramos el sistema dinámico dependiente de un parámetro:

$$x' = \alpha x - x^3 \equiv f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.16)$$

Estudiamos los distintos comportamientos que presenta el sistema en función del parámetro:

- **Caso $\alpha < 0$:** Se tiene un punto de equilibrio en $x_0 = 0$ que es estable.
- **Caso $\alpha = 0$:** Se mantiene un único punto de equilibrio estable en $x_0 = 0$.
- **Caso $\alpha > 0$:** El punto $x_0 = 0$ sigue siendo un punto de equilibrio, pero ahora pasa a ser inestable, y además, hay otros dos equilibrios que brotan del origen en $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$, los cuales son ambos estables.

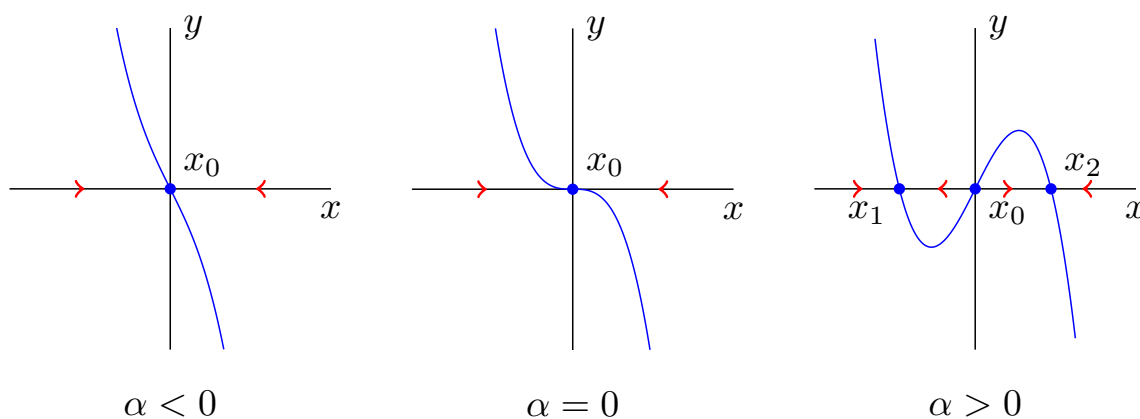


Figura 3.6: Gráfica de $\alpha x - x^3$ y bifurcación de pitchfork del sistema (3.16).

De esta forma, la aparición de dos equilibrios estables cuando el parámetro cruza el valor $\alpha = 0$ y el cambio de estabilidad del equilibrio ya existente, indican la existencia de una bifurcación. Esta bifurcación se denomina bifurcación *pitchfork* o *tridente*, tiene lugar en el punto $\alpha = 0$ y en el caso de (3.16) se tiene una bifurcación **supercrítica**, con el diagrama de bifurcación representado en la parte (a) de la Figura 3.7.

Observación 3.11. Al igual que vimos en secciones anteriores, se puede hacer el estudio de manera análoga para el sistema:

$$x' = \alpha x + x^3 \quad (3.17)$$

Este sistema dará lugar también a una bifurcación pitchfork, pero en este caso **subcrítica**, la cual presenta un diagrama de bifurcación como el que podemos ver en la parte (b) de la Figura 3.7.

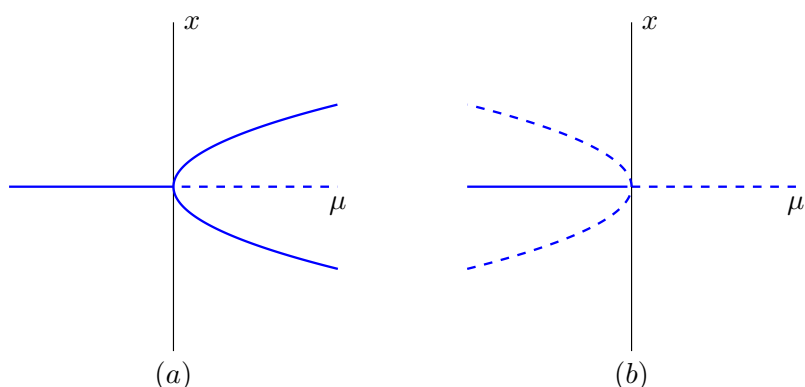


Figura 3.7: (a) Diagrama de bifurcación de pitchfork supercrítica. (b) Diagrama de bifurcación de pitchfork subcrítica.

Teorema 3.12 (Forma normal topológica de la bifurcación pitchfork). *Supongamos que el sistema dinámico unidimensional:*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

con f una función suficientemente regular, tiene una singularidad $x = 0$ para $\alpha = 0$ y sea $\lambda = \frac{\partial}{\partial x} f(x, \alpha)|_{(0,0)} = 0$. Asumamos que además se verifican las condiciones siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha)|_{(0,0)} = 0, \quad (\text{P1})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, \alpha)|_{(0,0)} = 0, \quad (\text{P2})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} f(x, \alpha)|_{(0,0)} \neq 0, \quad (\text{P3})$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(x, \alpha)|_{(0,0)} \neq 0, \quad (\text{P4})$$

Entonces el sistema presenta una bifurcación pitchfork en $(0,0)$ y es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a una de las dos formas normales:

$$\eta' = \beta\eta \pm \eta^3.$$

Demostración. Al igual que en el caso anterior, haremos una caracterización de la estructura geométrica de las curvas de los puntos de equilibrio que pasan por el punto de bifurcación.

Por los diagramas de bifurcación vistos en la Figura 3.7, se pueden deducir las siguientes propiedades sobre la estructura de las órbitas en un entorno del punto de bifurcación:

- (i) Dos curvas de puntos fijos atraviesan el origen, una es dada por $x = 0$ y la otra por $\alpha = x^2$.

- (II) Mientras que la curva $x = 0$ existe a ambos lados del valor $\alpha = 0$, la curva $\alpha = x^2$ sólo existe a uno de los lados.
- (III) Los puntos de equilibrio de la recta $x = 0$ cambian su estabilidad al atravesar el valor $\alpha = 0$. En cambio, los de la curva $\alpha = x^2$ tienen el mismo tipo de estabilidad.

Consideramos ahora un sistema uniparamétrico:

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

con una singularidad no hiperbólica en $x = 0$ para $\alpha = 0$, por lo tanto obtenemos:

$$f(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

Al igual que en caso de la bifurcación *transcrítica* necesitamos que exista más de una curva de puntos de equilibrio pasando por el origen, por tanto imponemos (P1):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} = 0,$$

verificando así (I). Nuevamente, debemos reescribir el sistema de la forma:

$$x' = f(x, \alpha) = xF(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R},$$

donde:

$$F(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{f(x, \alpha)}{x} & x \neq 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} f(0, \alpha) & x = 0. \end{cases}$$

Para este nuevo sistema ya tenemos la curva de puntos de equilibrios $x = 0$, la cual nos da un condición poderosa también, pues se considera entonces que $f(0, \alpha) = 0$ para todo α y de esta manera se tendrá:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} = 0 = \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)}.$$

Además, para asegurar que la curva adicional es única, necesitamos (P3):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} f(x, \alpha) \Big|_{(0,0)} \neq 0,$$

Ahora aplicando el *Teorema de la Función Implícita* sabemos que existe una única función $\alpha(x)$, para x suficientemente pequeño, con $\alpha(0) = 0$ y tal que $F(x, \alpha(x)) = 0$. A mayores, para que las curvas dadas por $\alpha(x)$ verifique (II) exigimos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \alpha(0) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha(0) &\neq 0, \end{aligned}$$

Por otro lado, el propio *Teorema de la Función Implícita* nos proporciona una expresión para la derivada de $\alpha(x)$ y podemos también implícitamente derivar para obtener la expresión de la segunda derivada como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\alpha(0) &= -\frac{\frac{\partial}{\partial x}F(x, \alpha)|_{(0,0)}}{\frac{\partial}{\partial \alpha}F(x, \alpha)|_{(0,0)}} = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, \alpha)|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha}f(x, \alpha)|_{(0,0)}} \stackrel{(P2)}{=} 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x, \alpha)|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha}f(x, \alpha)|_{(0,0)}}\right) = \frac{\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x, \alpha)|_{(0,0)}}{\frac{\partial^2}{\partial x\partial \alpha}f(x, \alpha)|_{(0,0)}} \stackrel{(P3,P4)}{\neq} 0.\end{aligned}$$

Una vez comprobado que las las condiciones son válidas y suficientes, pasamos a la construcción de la forma normal haciendo uso de las expansiones de Taylor. Empezamos considerando el sistema general (3.18) y hacemos su expansión en torno al punto de equilibrio $(x, \alpha) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned}f(x, \alpha) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0)\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \alpha}(0, 0)x\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(0, 0)\alpha^2 \\ &+ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial \alpha}(0, 0)x^2\alpha + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x\alpha^2}(0, 0)x\alpha^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)x^3 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}(0, 0)\alpha^3 + \psi(x, \alpha),\end{aligned}$$

donde $\psi = O(|(x, \alpha)|^4)$.

Haciendo uso de todas las hipótesis vistas gran parte de los coeficientes se anulan. Por otro lado, los términos cruzados de tercer orden, $x^2\alpha$ o $x\alpha^2$, podrían eliminarse mediante un homeomorfismo local que preserve la equivalencia topológica del sistema, ya que tan solo actúan como perturbaciones del sistema, pero no modifican el número ni la estabilidad de los puntos de equilibrio. Estos términos por tanto no alteran la estructura cualitativa del diagrama de bifurcación en el punto de bifurcación.

De esta forma nos quedaría:

$$f(x, \alpha) = Ax\alpha + Bx^3 + \psi(x, \alpha), \text{ tal que } A = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial \alpha}(0, 0), B = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0).$$

Ahora bien, podremos considerar el sistema:

$$f(x, \alpha) = Ax\alpha + Bx^3, \quad (3.19)$$

ya que, siguiendo el mismo razonamiento que hicimos antes, los términos de orden superior no determinan la propia bifurcación en un entorno del origen.

Basta considerar el cambio de variable $\eta = |B|x$ y $\beta = A\alpha$,

$$\eta' = |B|x' = |B|\left[A\frac{\eta}{|B|}\alpha + B\frac{\eta^3}{|B|^3}\right] = A\alpha\eta + \frac{B}{|B|^2}\eta^3 = \beta\eta + s\eta^3 \quad / \quad s = \mp 1.$$

Por lo tanto queda probado que, bajo las hipótesis de que $(0, 0)$ es una singularidad no hiperbólica, (P1), (P2),(P3) y (P4), el comportamiento cualitativo de las órbitas en un entorno

de $(x, \alpha) = (0, 0)$ del sistema (3.16) es cualitativamente idéntico al comportamiento cualitativo de las órbitas en un entorno de $(x, \alpha) = (0, 0)$ del sistema (3.18), haciéndolo topológicamente equivalente a:

$$\eta' = \beta\eta \mp \eta^3, \quad (3.20)$$

que es por tanto, la forma normal de la bifurcación *pitchfork*. \square

Observación 3.13. Es fácil de comprobar que la forma normal obtenida (3.20) verifica (III), bastaría comprobar la dirección que toma el campo vectorial para distintos valores de α .

3.2. Bifurcación de Hopf

Consideremos la familia de sistemas de EDOs en \mathbb{R}^2 dependientes de un parámetro:

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (3.21)$$

donde, trivialmente, se puede ver que la única singularidad que tiene se produce en $x_1 = x_2 = 0$ para cualquier valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Además la matriz Jacobiana en ese punto es:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

de donde podemos sacar los autovalores:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & -1 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 + 1 = 0 \iff (\alpha - \lambda)^2 = -1 \iff \alpha - \lambda = \pm i,$$

que nos da $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$. De aquí empezamos a deducir la clasificación del equilibrio pues, si $\alpha < 0$ el equilibrio es asintóticamente estable y mantiene la configuración del sistema linealizado (foco atractor), si $\alpha = 0$ no podemos asegurar nada sobre la estabilidad, y si $\alpha > 0$ el equilibrio es inestable y se mantiene la configuración del sistema linealizado (foco inestable).

Si consideramos las coordenadas polares:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin(\theta), \\ x_2 = r \cos(\theta), \end{cases}$$

se tiene que $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ y $\tan \theta = \frac{x_1}{x_2}$, por lo que derivando el sistema (3.21), lo transformamos en el sistema:

$$\begin{cases} r' = r(\alpha - r^2), & r \geq 0, \\ \theta' = 1. \end{cases} \quad (3.22)$$

Sabiendo que el origen es el único punto de equilibrio, con la forma polar podemos hacer la representación del retrato de fases y analizar su comportamiento de manera más sencilla debido al desacoplamiento de las ecuaciones.

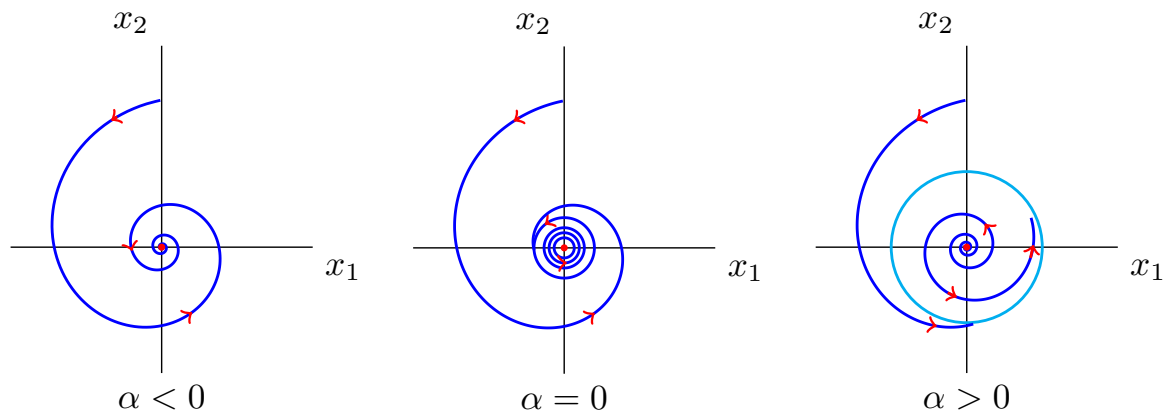


Figura 3.8: Bifurcación de Hopf supercrítica.

Como podemos ver en la Figura 3.8, el comportamiento del sistema se ve afectado según atraviesa el valor de bifurcación $\alpha = 0$:

- **Caso $\alpha < 0$:** tenemos un foco estable en el único equilibrio $r = 0$ pues $r' < 0$ para cualquier valor de r .
- **Caso $\alpha = 0$:** tenemos que $r' < 0$ si $r > 0$ y en $r = 0$, $r' = 0$, por tanto el origen sigue siendo un foco atractor.
- **Caso $\alpha > 0$:** tenemos que la primera ecuación se anula para $r = 0$ y $r = \sqrt{\alpha}$, y de la segunda ecuación se deduce que $\theta(t) = cte$, por lo tanto se da la aparición de un ciclo límite cuando $r = \sqrt{\alpha}$. Mientras $r \in (0, \sqrt{\alpha})$ se tendrá $r' > 0$, entonces el radio crece del origen al ciclo. En cambio, cuando $r > \sqrt{\alpha}$ se tendrá $r' < 0$, por lo tanto el radio decrece hasta el ciclo. Con todo, tendremos que el origen ahora es inestable (repulsor), mientras que el nuevo ciclo límite es estable (atractor).

Por lo tanto, cuando aparece un ciclo límite mientras el valor del parámetro aumenta y atraviesa el valor de bifurcación $\alpha = 0$, se dice que ha tenido lugar una **bifurcación de Hopf**, en este caso **supercrítica**.

Observación 3.14. Consideramos el mismo sistema que en (3.21) pero cambiando el signo de los términos no lineales:

$$\begin{cases} x_1' = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (3.23)$$

Haciendo un análisis análogo, obtendremos que para el caso $\alpha < 0$, habrá un ciclo límite inestable que desaparecerá mientras el valor de α vaya aumentando y atraviese el valor de bifurcación $\alpha = 0$. En cuanto a la estabilidad del origen, para valores de $\alpha < 0$ tenemos un equilibrio estable y para valores de $\alpha > 0$ será inestable. Por otro lado, si $\alpha = 0$, al contrario que en el caso anterior, el equilibrio será inestable. En este caso, la aparición del ciclo límite se da para valores de $\alpha < 0$, pero se sigue considerando que ocurre una **bifurcación de Hopf** en $\alpha = 0$, en este caso, **subcrítica**.

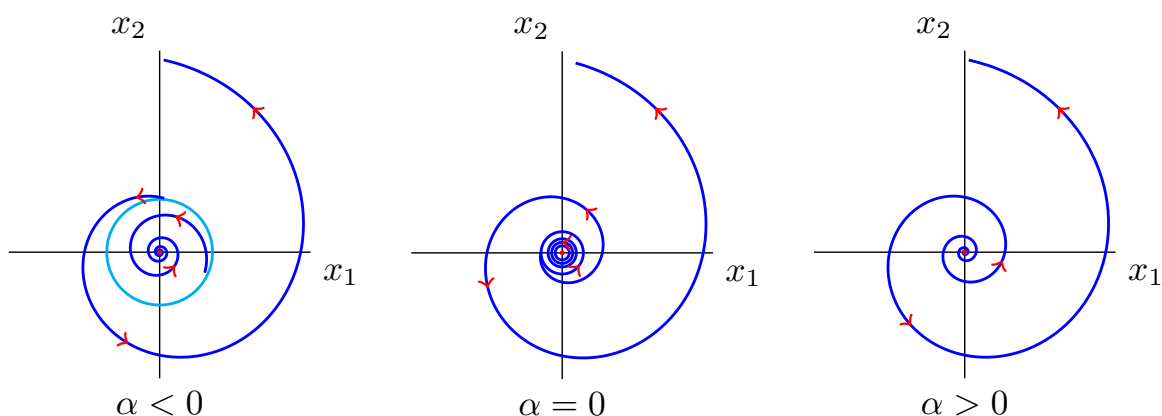


Figura 3.9: Bifurcación de Hopf subcrítica.

Enunciamos también en esta sección el lema que será clave para encontrar la forma normal topológica de la bifurcación de Hopf, pues nuevamente, los términos de orden superior no afectan en el comportamiento del sistema en un entorno del origen.

Lema 3.15. *El sistema*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x\|^4),$$

donde $x = (x_1, x_2)^T$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ y los términos de $O(\|x\|^4)$ pueden depender de α , es localmente topológicamente equivalente al sistema (3.21) en un entorno del origen.

Demostración. Véase [1, páginas 108-11, Apéndice 1, Cap.3] para la demostración. \square

Nuestro próximo objetivo es probar que todo sistema genérico bi-dimensional que presente una bifurcación de Hopf se puede transformar en un sistema de la forma (3.21). Sea el sistema:

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R},$$

con f una función lo suficientemente regular que tiene en $\alpha = 0$ el equilibrio $x = 0$ y cuyos autovalores son $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. Como $\lambda = 0$ no es uno de los autovalores de la matriz

Jacobiana, se verifican las hipótesis del *Teorema de la Función Implícita*, por tanto sabemos que el sistema tiene un equilibrio único en $x_0(\alpha)$ en algún entorno del origen para todo $|\alpha|$ suficientemente pequeño. Supondremos entonces, sin pérdida de generalidad, que el equilibrio será $x = 0$ y modificamos entonces el sistema a:

$$x' = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (3.24)$$

donde F es una función suficientemente regular cuyas componentes $F_{1,2}$ contienen los términos de la expansión de Taylor de f en x empezando al menos desde términos de orden dos, $F = O(\|x\|^2)$. Por otra parte, $A(\alpha)$ es la matriz Jacobiana y se puede escribir como:

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix},$$

tal que a, b, c, d son funciones suficientemente regulares respecto a α . Los autovalores vienen dados por las raíces del polinomio característico:

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

donde definimos $\sigma \equiv \sigma(\alpha) = a(\alpha) + d(\alpha) = \text{tr}(A(\alpha))$ y $\Delta \equiv \Delta(\alpha) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha) = \det(A(\alpha))$. De esta forma se tiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma(\alpha) \pm \sqrt{\sigma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)}).$$

Sabemos, además, que una bifurcación de Hopf se da con la aparición de los dos autovalores complejos conjugados, por tanto tendremos que $\sigma(0) = 0$ y $\Delta(0) = \omega_0^2 > 0$. Así, para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, podemos introducir los valores:

$$\mu(\alpha) = \frac{1}{2}\sigma(\alpha) \quad \text{y} \quad \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \sigma^2(\alpha)},$$

así, los autovalores quedarían como $\lambda_1 = \lambda(\alpha)$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda(\alpha)}$ donde:

$$\lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha),$$

con $\mu(0) = 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Lema 3.16. *Al introducir una variable compleja z , el sistema (3.24) se puede reescribir para $|\alpha|$ suficientemente pequeño como:*

$$z' = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (3.25)$$

donde $g = O(|z|^2)$ es continua respecto a (z, \bar{z}, α) .

Demostración. Consideramos $q(\alpha) \in \mathbb{C}^2$, un autovector de $A(\alpha)$ correspondiente al autovalor $\lambda(\alpha)$ y $p(\alpha) \in \mathbb{C}^2$, un autovector de $A^T(\alpha)$ correspondiente al autovalor $\overline{\lambda(\alpha)}$ tales que:

$$A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha) \quad \text{y} \quad A^T(\alpha)p(\alpha) = \overline{\lambda(\alpha)}p(\alpha).$$

Consideramos el producto escalar estándar en \mathbb{C}^2 y podemos normalizar p con respecto a q :

$$\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle = \overline{p_1}(\alpha)q_1(\alpha) + \overline{p_2}(\alpha)q_2(\alpha) = 1.$$

Además se puede ver que, basándonos en las propiedades de los autovalores y autovectores, se tiene:

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \Rightarrow \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0,$$

pero $\lambda \neq \bar{\lambda}$ pues para $|\alpha|$ suficientemente pequeño se tiene que $\omega(\alpha) > 0$. De esta manera se tiene que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$.

Teniendo en cuenta todo esto, cualquier vector $x \in \mathbb{R}^2$ puede ser representado de forma única para cualquier α lo suficientemente pequeño por:

$$x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \quad / \quad z = \langle p(\alpha), x \rangle.$$

Vemos que z satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} z' &= \langle p(\alpha), x' \rangle \\ &= \langle p(\alpha), A(\alpha)x + F(x, \alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), A(\alpha)zq(\alpha) + A(\alpha)\bar{z}\bar{q}(\alpha) + F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= z\langle p(\alpha), A(\alpha)q(\alpha) \rangle + \bar{z}\langle p(\alpha), A(\alpha)\bar{q}(\alpha) \rangle + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle, \end{aligned}$$

y definiendo $g(z, \bar{z}, \alpha)$ como el segundo término de la ecuación anterior concluimos la demostración. \square

Observación 3.17. Podemos expresar g como una serie de Taylor de la forma:

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

donde los coeficientes son:

$$g_{k,l}(\alpha) = \left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \right) \Big|_{z=0} \quad \text{tal que} \quad k, l \in \mathbb{N}, k+l \geq 2,$$

Ahora intentaremos simplificar (3.25) mediante los siguientes cambios de coordenadas.

Lema 3.18. *La ecuación:*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (3.26)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ se puede transformar mediante el cambio de coordenadas complejo, parámetro-dependiente e invertible:

$$z = v + \frac{h_{20}}{2} v^2 + h_{11} v \bar{v} + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}^2, \quad (3.27)$$

en una ecuación sin términos cuadráticos:

$$v' = \lambda v + O(|v|^3), \quad (3.28)$$

para $|\alpha|$ lo suficientemente pequeño.

Demostración. Empezamos calculando el inverso del cambio de coordenadas de (3.27). Para ello, necesitamos reescribir v en función de z , lo cual haremos proponiendo una expansión en series de potencias como inversa:

$$v = z + a_{20}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3), \quad (3.29)$$

y buscando los coeficientes a_{20}, a_{11}, a_{02} tales que al sustituir (3.29) en (3.27) se obtenga la expresión (3.28). Partiendo de (3.27):

$$\begin{aligned} z &= z + a_{20}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3) + \frac{h_{20}}{2}(z + a_{20}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3))^2 + \\ &+ h_{11}[(z + a_{10}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{02}\bar{z}^2 + O(|z|^3))(\bar{z} + \bar{a}_{10}\bar{z}^2 + \bar{a}_{11}z\bar{z} + \bar{a}_{02}z^2 + O(|z|^3))] + \\ &+ \frac{h_{02}}{2}(\bar{z} + \bar{a}_{20}\bar{z}^2 + \bar{a}_{11}z\bar{z} + \bar{a}_{02}z^2 + O(|z|^3))^2, \end{aligned}$$

que operando y agrupando todos los términos de orden superior en $O(|z|^3)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} z &= z + a_{20}z^2 + a_{11}z\bar{z} + a_{02}\bar{z}^2 + \frac{h_{20}}{2}z^2 + h_{11}z\bar{z} + \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3) = \\ &= z + \left(a_{20} + \frac{h_{20}}{2}\right)z^2 + (a_{11} + h_{11})z\bar{z} + \left(a_{02} + \frac{h_{02}}{2}\right)\bar{z}^2 + O(|z|^3), \end{aligned}$$

Por lo tanto, debemos tomar: $a_{20} = -\frac{h_{20}}{2}, a_{11} = -h_{11}, a_{02} = -\frac{h_{02}}{2}$.

Una vez obtenida la inversa de (3.27):

$$v = z - \frac{h_{20}}{2}z^2 - h_{11}z\bar{z} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

procedemos a derivar:

$$\begin{aligned} v' &= z' - h_{20}zz' - h_{11}(z'\bar{z} + z\bar{z}') - h_{02}\bar{z}\bar{z}' + O(|z|^3) \\ &= \lambda z + \frac{g_{20}}{2}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3) - h_{20}z\left(\lambda z + \frac{g_{20}}{2}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^2 + O(|z|^3)\right) \\ &- h_{11}\left(\lambda z\bar{z} + \frac{g_{20}}{2}z^2\bar{z} + g_{11}z\bar{z}^2 + \frac{g_{02}}{2}\bar{z}^3 + O(|z|^3) + \bar{\lambda}\bar{z}z + \frac{\bar{g}_{20}}{2}\bar{z}^2z + \bar{g}_{11}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{02}}{2}z^3 + O(|z|^3)\right) \\ &- h_{02}\bar{z}\left(\bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{20}}{2}\bar{z}^2 + \bar{g}_{11}\bar{z}z + \frac{\bar{g}_{02}}{2}z^2 + O(|z|^3)\right), \end{aligned}$$

y de nuevo, operando y agrupando los términos de orden superior en $O(|z|^3)$ llegamos a la expresión:

$$v' = \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20}\right)z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \lambda \bar{h}_{11})z\bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02}\right)\bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

Finalmente, haciendo uso de (3.27), operando y agrupando los términos de orden superior en $O(|v|^3)$, llegamos a la expresión:

$$v' = \lambda v + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})v^2 + (g_{11} - \bar{\lambda}h_{11})v\bar{v} + \frac{1}{2}[g_{02} + h_{02}\lambda - 2\bar{\lambda}]v^2 + O(|v|^3),$$

de donde deducimos que, considerando los coeficientes: $h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}$, $h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}$, $h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda}$ en (3.27), podemos suprimir los términos de orden 2 en (3.26). \square

Observación 3.19. Los coeficientes están bien definidos al no anularse los denominadores para $|\alpha|$ suficientemente pequeño, ya que $\lambda(0) = i\omega_0$ con $\omega_0 > 0$.

Observación 3.20. Notar que con esta transformación, los coeficientes de los términos de orden superior, en especial los de orden 3, han sido modificados.

Lema 3.21. *La ecuación:*

$$z' = \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4), \quad (3.30)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ y $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$ se puede transformar mediante el cambio de coordenadas complejo, parámetro-dependiente e invertible:

$$z = v + \frac{h_{30}}{6}v^3 + \frac{h_{21}}{2}v^2\bar{v} + \frac{h_{12}}{2}v\bar{v}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{v}^3, \quad (3.31)$$

en una ecuación con un único término de tercer orden:

$$v' = \lambda v + c_1v^2\bar{v} + O(|v|^4) / c_1 = c_1(\alpha), \quad (3.32)$$

para $|\alpha|$ lo suficientemente pequeño.

Demostración. Siguiendo un proceso totalmente análogo al del antiguo lema, considerando esta vez los términos incógnita los de orden 3, obtenemos la inversa de (3.31):

$$v = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + O(|z|^4).$$

Entonces, siguiendo exactamente los pasos de antes, derivamos, hacemos uso de (3.31), operamos y agrupamos para obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} v' &= \lambda v + \frac{1}{6}(g_{30} - 2\lambda h_{30})v^3 + \frac{1}{2}(g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})h_{21})v^2\bar{v} \\ &\quad + \frac{1}{2}(g_{12} - 2\bar{\lambda}h_{12})v\bar{v}^2 + \frac{1}{6}(g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda})h_{03})\bar{v}^3 + O(|v|^4). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando $h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}$, $h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}$, $h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda}$ podemos eliminar casi todos los términos de orden 3. Al igual que antes, los coeficientes están bien definidos al no anularse los denominadores para $|\alpha|$ suficientemente pequeño.

En este caso, debemos tratar a parte el caso del coeficiente de $v^2\bar{v}$, pues, si definimos:

$$h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}},$$

funciona para todo α pequeño no nulo, pero en $\alpha = 0$ el denominador $\lambda(0) + \bar{\lambda}(0) = i\omega_0 + (-i\omega_0) = 0$, se anula. Para subsanar esto y dar una expresión que dependa completamente del parámetro, consideraremos $h_{21} = 0$ y de esta forma obtenemos:

$$c_1(\alpha) = \frac{g_{21}}{2}.$$

□

Observación 3.22. Al término de orden 3 que permanece en la ecuación se le conocerá como **término resonante**, que son términos que no se pueden eliminar mediante cambios de coordenadas pues determinan el comportamiento esencial del sistema.

Recordemos que nuestro objetivo principal es probar que (3.21) es una forma normal para la bifurcación de Hopf. Para ello, seguiremos simplificando para poder obtener las condiciones que determinan la propia bifurcación.

Lema 3.23. *Se considera la ecuación:*

$$\frac{dv}{dt} = (\mu(\alpha) + i\omega(\alpha))v + c_1(\alpha)v|v|^2 + O(|v|^4), \quad (3.33)$$

donde $\lambda = \lambda(\alpha) = \mu(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\mu(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Asumimos $\mu'(0) \neq 0$ y $Re(c_1(0)) \neq 0$, y de esta forma, mediante una transformación lineal de coordenadas parámetro-dependientes, un reescalado temporal y una reparametrización no lineal, se puede simplificar (3.33) en:

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \quad (3.34)$$

donde u es la nueva coordenada compleja, θ el nuevo tiempo, β el nuevo parámetro y s coincide con el signo de la parte real del término resonante $c_1(\alpha)$, siendo $s = \pm 1$.

Demostración. Como se ha mencionado, se requerirán tres acciones clave, por ello se divide la demostración en tres partes.

Parte 1. Reescalado del tiempo.

Se introduce un nuevo tiempo $\tau = \omega(\alpha)t$ para normalizar la parte imaginaria del término lineal. Dado que $\omega(\alpha) > 0$ para $|\alpha|$ lo suficientemente pequeño, la orientación de las órbitas se conserva y podemos reescribir:

$$\frac{dv}{d\tau} = (\beta + i)v + d_1(\beta)v|v|^2 + O(|v|^4), \quad (3.35)$$

donde

$$\beta(\alpha) = \frac{\mu(\alpha)}{\omega(\alpha)} / \beta(0) = 0, \beta'(\alpha) = \frac{\mu'(\alpha)}{\omega(\alpha)} \neq 0,$$

entonces por el *Teorema de la Función Inversa* podemos garantizar la existencia (local) de una función $\alpha(\beta)$. Así, se considerará:

$$d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))} \in \mathbb{C}.$$

Parte 2. Reparametrización no lineal del tiempo.

Ahora hacemos un nuevo cambio en la variable temporal:

$$\theta = \theta(\tau, \beta) / d\theta = (1 + \varepsilon_1(\beta)|\omega|^2) d\tau,$$

donde $\varepsilon_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta)) \in \mathbb{R}$. Vemos que es un cambio muy próximo a la identidad cerca del origen, y de esta manera se busca hacer que el coeficiente del término no lineal sea real. De esta forma obtenemos:

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{dv}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1}{1 + \varepsilon_1(\beta)|v|^2} [(\beta + i)v + d_1(\beta)v|v|^2 + O(|v|^4)], \quad (3.36)$$

Podemos hacer el desarrollo en serie de Taylor en torno a $|v| = 0$:

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_1(\beta)|v|^2} = \frac{1}{1 - (-\varepsilon_1(\beta)|v|^2)} = 1 - \varepsilon_1(\beta)|v|^2 + O(|v|^4),$$

que sabemos que se verifica ya que estamos trabajando para valores de $|v|$ muy próximos al origen.

Ahora sustituimos este desarrollo de Taylor en (3.36) y operamos:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} &= (1 - \varepsilon_1(\beta)|v|^2)(\beta + i)v + (1 - \varepsilon_1(\beta)|v|^2)d_1(\beta)v|v|^2 + O(|v|^4) \\ &= (\beta + i)v - (\beta\varepsilon_1(\beta) + i\varepsilon_1(\beta))v|v|^2 + d_1(\beta)v|v|^2 - d_1(\beta)\varepsilon_1(\beta)v|v|^4 + O(|v|^4) \\ &= (\beta + i)v + (d_1(\beta) - \beta\varepsilon_1(\beta) - i\varepsilon_1(\beta))v|v|^2 + O(|v|^4) \\ &= (\beta + i)v + l_1(\beta)v|v|^2 + O(|v|^4), \end{aligned}$$

donde $l_1(\beta) = d_1(\beta) - \beta\varepsilon_1(\beta) - i\varepsilon_1(\beta)$. Recordemos que $d_1(\beta) \in \mathbb{C}$, por lo tanto podemos escribir:

$$d_1(\beta) = a + ib / a = \text{Re}(d_1(\beta)), b = \text{Im}(d_1(\beta)),$$

de esta forma y recordando que $\varepsilon_1(\beta) = \text{Im}(d_1(\beta))$:

$$l_1(\beta) = a + ib - \beta b - ib = a - \beta b = \text{Re}(d_1(\beta)) - \beta \text{Im}(d_1(\beta)) \in \mathbb{R}.$$

Parte 3. Cambio de coordenadas lineal.

Introducimos la variable compleja:

$$v = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} \iff u = v\sqrt{|l_1(\beta)|},$$

que está bien definida ya que $l_1(0) = \frac{Re(c_1(0))}{\omega(0)}$ y por hipótesis $Re(c_1(0)) \neq 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

De esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{dv}{d\theta} \sqrt{|l_1(\beta)|} = \sqrt{|l_1(\beta)|} [(\beta + i)v + l_1(\beta)v|v|^2 + O(|v|^4)] = \\ &= \sqrt{|l_1(\beta)|} \left[(\beta + i) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} + l_1(\beta) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} \left| \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} \right|^2 + O(|u|^4) \right] = \\ &= (\beta + i)u + su|u|^2 + O(|u|^4), \end{aligned}$$

donde $s = \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} = \text{signo}(l_1(\beta)) = \pm 1$. □

Definición 3.24 (Primer coeficiente de Lyapunov). La función real dada por $l_1(\beta)$ se conoce como el *primer coeficiente de Lyapunov*.

Observación 3.25. Como hemos visto:

$$l_1(0) = \frac{Re(c_1(0))}{\omega(0)},$$

y se puede calcular explícitamente con la fórmula:

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} Re(ig_{20}g_{11} + \omega_0g_{21}).$$

Con todo el desarrollo anterior, cerramos esta sección con el resultado que buscábamos sobre la forma normal topológica de la bifurcación de Hopf.

Teorema 3.26 (Forma normal topológica de la bifurcación de Hopf). *Supongamos que el sistema dinámico bidimensional y uniparamétrico:*

$$x' = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.37)$$

con f una función suficientemente regular, tiene una singularidad en $x = 0$ para $\alpha = 0$ con los autovalores asociados:

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha),$$

tal que $\mu(0) = 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Supongamos también que se verifican las dos siguientes condiciones:

$$l_1(0) \neq 0, \quad (H1)$$

$$\mu'(0) \neq 0. \quad (\text{H2})$$

Entonces, (3.37) presenta una bifurcación de tipo Hopf en $((0,0),0)$ y es localmente topológicamente equivalente a una de las dos formas normales siguientes:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Demostración. En base a todos los resultados vistos en esta sección, empezamos la demostración transformando (3.37) para todo $|\alpha|$ lo suficientemente pequeño en el sistema equivalente:

$$x' = Ax + F(x, \alpha),$$

con $x = 0$ como equilibrio y autovalores asociados $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, donde $\mu(0) = 0$ y $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

El siguiente paso es transformar el sistema anterior en:

$$v' = \lambda v + c_1 v^2 \bar{v} + O(|v|^4) \text{ donde } c_1 = c_1(\alpha),$$

haciendo uso del Lema 3.16, del Lema 3.18 y del Lema 3.21.

Gracias a las hipótesis (H1) y (H2) se puede aplicar el Lema 3.23 y realizar una transformación lineal de coordenadas parámetro-dependientes y una reparametrización temporal que transformarán el sistema de partida en:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y\|^4).$$

Para concluir la demostración, sabemos por el Lema 3.15 que los términos de orden superior no afectan en el comportamiento cualitativo del sistema en un entorno del origen, por lo tanto, el sistema (3.37) es localmente topológicamente equivalente en un entorno del origen a:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

□

Capítulo 4

Bifurcación aplicada: umbral láser simple

La palabra *láser* es un acrónimo referente a su principio fundamental: *light amplification by stimulated emission of radiation* (amplificación de luz por emisión estimulada de radiación). A pesar de la variedad de dispositivos láser, todos ellos comparten un elemento crucial: cada uno contiene en su interior algún material capaz de amplificar la radiación y generar luz láser [7].

4.1. Introducción y fundamentos

Consideramos un tipo particular de láser conocido como láser de estado sólido, que usa material sólido como medio activo para generar dicha luz. Consiste en un conjunto de átomos activos dentro de una matriz sólida vítrea, insertada entre dos espejos parcialmente reflectantes. Para poder excitar los átomos y generar la luz láser se utiliza una energía externa bombeada.

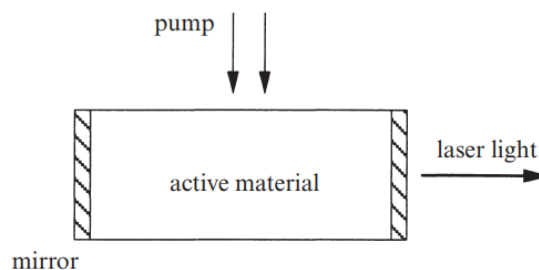


Figura 4.1: Representación del láser de estado sólido y el flujo del proceso de bombeo de energía para la generación de luz láser.

Podemos pensar en los átomos como pequeñas antenas capaces de absorber e irradiar energía. Para un bombeo de energía bajo, el láser emite luz de manera espontánea, actuando como una lámpara normal. A medida que la energía de bombeo aumenta, la intensidad de emisión también lo hace hasta llegar al valor crítico conocido como **umbral láser**, donde los átomos empiezan a oscilar y hacen que el sistema produzca la luz láser.

4.2. Modelo matemático

Un desarrollo exhaustivo y detallado del modelo requeriría un alto conocimiento de mecánica cuántica y física avanzada [6]. Es por ello que nos centraremos en realizar el estudio para un modelo simplificado del sistema dado por:

$$n' = \text{gain} - \text{loss} = GnN - kn, \quad (4.1)$$

donde definimos las variables:

- $n(t)$: número de fotones en el campo láser,
- $N(t)$: número de átomos excitados,
- G : coeficiente de ganancia que representa la eficiencia con la que un fotón induce la emisión de nuevos fotones por átomos estimulados,
- k : constante de escapada de los fotones por el láser.

En este modelo la ganancia de fotones en el campo láser viene dada por el proceso de emisión estimulada, donde los fotones inducen a los átomos excitados a emitir más fotones a una velocidad proporcional al número de fotones y al número de átomos excitados. Este proceso ocurre mediante encuentros aleatorios entre fotones y átomos excitados. Por otra parte, la pérdida de fotones en el campo láser está determinada por la fuga de fotones a través de las caras finales del láser.

La idea física clave reside en el hecho de que después de que un átomo excitado emita un fotón, su nivel de energía cae, haciéndole perder su condición de excitado. De esta forma, $N(t)$ decrece con la emisión de fotones, y es por eso que buscamos expresar N en función de n . Supondremos que en ausencia de acción láser, la energía que se bombea mantiene el número de átomos excitados en el valor N_0 . Por lo tanto, el número actual de átomos excitados se verá reducido con la aparición de luz láser. Asumimos entonces que N es de la forma:

$$N(t) = N_0 - \mu n, \quad (4.2)$$

donde μ representa la tasa a la que los átomos dejan de estar excitados y regresan a su forma fundamental tras generar la luz láser.

Observación 4.1. N_0 va a depender exclusivamente de cuánta energía se le bombea al sistema inicialmente, por lo tanto será un término que se puede manipular para el estudio.

De esta forma obtenemos el modelo simplificado que vamos a estudiar:

$$\begin{aligned} n' &= Gn(N_0 - \mu n) - kn \\ &= (GN_0 - k)n - \mu Gn^2 \equiv f(n, N_0), \end{aligned} \quad (4.3)$$

con $G, N_0, k, \mu > 0$ y $n \geq 0$.

Observación 4.2. Observamos que, en base al estudio hecho en el Capítulo 3, la forma algebraica del sistema anterior debería recordarnos a la estudiada para la bifurcación transcítica.

4.3. Análisis de bifurcación

Nuestro primer paso será identificar el parámetro de bifurcación, que sabemos que es el parámetro del que va a depender el comportamiento cualitativo del sistema en torno al equilibrio. Fijamos en el sistema (4.3) los parámetros $G, k, \mu > 0$, pues no son más que constantes. Nuestra elección para parámetro de bifurcación será N_0 , ya que es el coeficiente que podemos variar en el experimento.

Ahora vamos a encontrar los puntos de equilibrio del sistema (4.3):

$$\begin{aligned} n' = 0 &\iff (GN_0 - k)n - \mu Gn^2 = 0 \\ &\iff n[(GN_0 - k) - \mu Gn] = 0, \end{aligned}$$

de donde conseguimos dos singularidades:

$$n_1 = 0, \quad n_2 = \frac{GN_0 - k}{\mu G}.$$

Tomamos $N_0^* = \frac{k}{G}$ y estudiamos el comportamiento del sistema en función del parámetro:

- **Caso $N_0 < N_0^*$:** en este caso estaríamos ante un solo equilibrio $n_1 = 0$, pues se tendría que $n_2 < 0$, lo que es físicamente imposible, pues el número de fotones es de la forma $n \geq 0$. El equilibrio será estable.
- **Caso $N_0 = N_0^*$:** en este caso se tendría $n_1 = 0 = n_2$, que sería el único equilibrio no hiperbólico con $\lambda = \left. \frac{\partial}{\partial n} f(n, N_0) \right|_{(0, N_0^*)} = 0$.
- **Caso $N_0 > N_0^*$:** en este caso se tendrían los dos puntos de equilibrio dados por n_1 y n_2 , donde n_1 es inestable pero n_2 es estable.

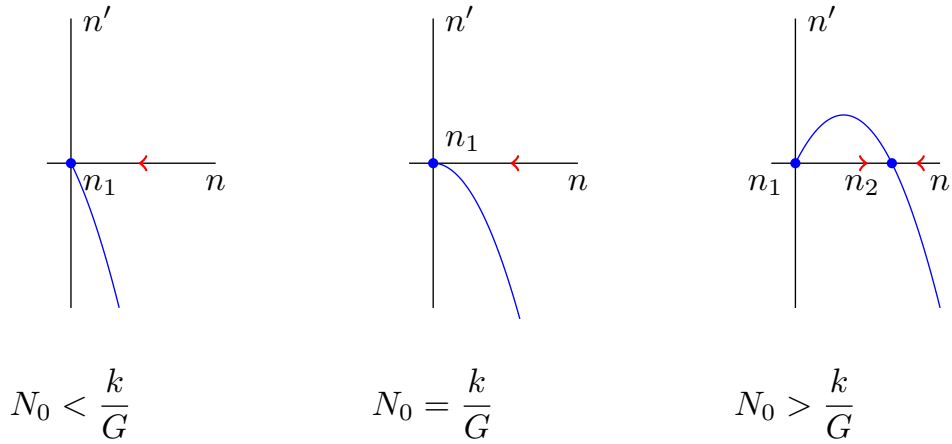


Figura 4.2: Gráfica de $(GN_0 - k)n - \mu Gn^2$ y bifurcación transcritical del sistema (4.3).

A partir de este análisis, podemos ver que existe un valor crítico de bombeo de energía N_0^* , a partir del cual el comportamiento cualitativo del sistema cambia de manera radical. Vemos en la Figura 4.2 que, para $N_0 < N_0^*$, el sistema permanece apagado y el equilibrio único es $n_1 = 0$, por lo tanto no se da la energía suficiente para que se dé la generación de fotones.

En cambio, al traspasar el valor de bifurcación y situarnos en $N_0 > N_0^*$, aparece un nuevo punto de equilibrio positivo y estable que se corresponde con un estado en el que el láser se ha encendido y además se está generando luz láser de manera continuada en el tiempo. En este caso se ve que $n_1 = 0$ se convierte en un equilibrio inestable, lo que nos hace deducir que cualquier perturbación puede dar lugar a la aparición de luz.

Por otro lado, el diagrama de bifurcación representado en la Figura 4.3 muestra como a partir del valor de bifurcación, o umbral láser, se pasa de dar luz de lámpara normal a dar luz láser.

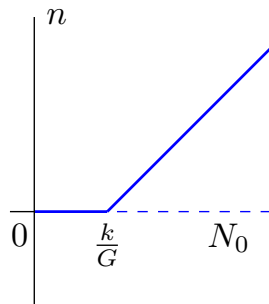


Figura 4.3: Diagrama de bifurcación del sistema (4.3).

4.4. Justificación de la bifurcación en base a la forma normal

Para finalizar este ejemplo, vamos a justificar más formalmente la presencia de una bifurcación transcítica en el sistema (4.3) comprobando que se verifican las condiciones del Teorema 3.9.

Antes de nada, vemos que el teorema requiere que la bifurcación tenga lugar en el punto $(n, N_0) = (0, 0)$. Realizamos entonces el cambio de variable:

$$\hat{N}_0 = N_0 - \frac{k}{G},$$

que tan solo se trata de una traslación del parámetro de bifurcación y por tanto no altera la dinámica. Reescribimos el sistema (4.3) de la forma:

$$n' = G\hat{N}_0 n - \mu G n^2 \equiv f(n, \hat{N}_0). \quad (4.4)$$

Ahora sí, podemos ver si (4.4) verifica las condiciones:

- $f(0, 0) = 0$,
- $\frac{\partial}{\partial n} f(n, \hat{N}_0)|_{(0,0)} = (G\hat{N}_0 - 2\mu G n)|_{(0,0)} = 0$,
- $\frac{\partial}{\partial \hat{N}_0} f(n, \hat{N}_0)|_{(0,0)} = (G n)|_{(0,0)} = 0$,
- $\frac{\partial^2}{\partial n^2} f(n, \hat{N}_0)|_{(0,0)} = (-2\mu G)|_{(0,0)} \neq 0$,
- $\frac{\partial^2}{\partial n \partial \hat{N}_0} f(n, \hat{N}_0)|_{(0,0)} = (G)|_{(0,0)} \neq 0$.

Por tanto, podemos afirmar que el sistema (4.4) presenta una bifurcación transcítica en el punto $(n, \hat{N}_0) = (0, 0)$ y su comportamiento cualitativo cerca del origen será localmente topológicamente equivalente al de la forma normal:

$$\eta' = \beta\eta - \eta^2.$$

Observación 4.3. Destacar que el cambio de variable nos ha permitido aplicar el teorema centrando la bifurcación en $(n, \hat{N}_0) = (0, 0)$, pero esto no modifica el comportamiento del sistema original (4.3). Por lo tanto, para el parámetro de bifurcación original N_0 , la bifurcación transcítica se da en $(n, N_0) = \left(0, \frac{k}{G}\right)$.

Bibliografía

- [1] Kuznetsov, Y. A. (1998). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- [2] Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- [3] Guckenheimer, J. y Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York.
- [4] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd ed., Springer-Verlag, New York.
- [5] Rodríguez López, G. (2003). *Diferenciación de funciones de varias variables reales* (1^a ed.). Santiago de Compostela: Universidade de Santiago de Compostela, Servizo de Publicacións e Intercambio Científico. Serie Manuais Universitarios.
- [6] Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton.
- [7] Haken, H. (1983). *Synergetics: An Introduction*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [8] Alonso, F. (2024). *Introducción al Análisis de Bifurcaciones en los Sistemas Dinámicos*, Trabajo de Fin de Grado, Universidad de Oviedo, Oviedo.
- [9] Aguirre, P. (2023). *Introducción a la Teoría de Bifurcaciones*, Apuntes de clase, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso.
- [10] Rodríguez López, R. (2022) *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Notas de clase de Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 2^o curso (Curso 2021-2022).
- [11] Otero Espinar, M. V. (2023) *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Notas de clase de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de 3^o curso (Curso 2022-2023).

- [12] López Somoza, L. (2022) *Diferenciación de Funciones de varias Variables Reales*, Notas de clase de Diferenciación de Funciones de varias Variables Reales de 2^o curso (Curso 2021-2022).