FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos

Sofía Rodríguez Ballesteros

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos

Sofía Rodríguez Ballesteros

Julio 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Álgebra
Título: Análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos
Breve descrición do contido
El contenido coincide esencialmente con ”Bourbaki: Théories Spectrales, chapitre II” o con los primeros capítulos de ”Deitmar, Echterhoff: Principles of Harmonic Analysis”. El análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos es necesario, junto con un curso básico de teoría algebraica de números, para comenzar a estudiar algunos de los principales temas en teoría de números: formas automorfas, la famosa tesis de Tate, el programa Langlands (véase por ejemplo el libro Bump, Automorphic Forms and Representations, cuyo contenido queda evidentemente fuera de este TFG)
Bibliografía
Bourbaki: Théories Spectrales, chapitre II; Deitmar, Echterhoff: Principles of Harmonic Analysis
Recomendacións
Se usarán frecuentemente parte de los contenidos de las asignaturas ”Topología General”, ”Estructuras Algebraicas”, ”Ecuaciones Algebraicas”, ”Series de Fourier e Introdución a las Ecuaciones en Derivadas Parciales” y ”Variable Compleja”, por lo que es importante manejar con soltura los conceptos básicos de dichas asignaturas. Asimismo, es conveniente (pero no necesario) cursar simultáneamente o haber cursado la asignatura optativa ”Análisis Funcional en Espacios de Hilbert” y, en menor medida, ”Álgebra, Números y Geometría”.

Índice general

Resumen

El trabajo realizado a continuación se encuadra en el contexto del análisis de Fourier en grupos abelianos localmente compactos. El objetivo es desarrollar las técnicas algebraicas, topológicas, de teoría de medida y análisis funcional necesarias para abordar el teorema de dualidad de Pontryagin en este contexto.

Abstract

The work carried out below falls within the context of Fourier's analysis into locally compact Abelian groups. The objective is to develop the algebraic, topological, measure theory and functional analysis techniques needed to address Pontryagin's duality theorem in this context.

Introducción

Tras el resultado de [Haar, 1933] mostrando que todo grupo localmente compacto tiene una medida no nula regular invariante por traslación, se desarrolló en los años inmediatamente posteriores una intensa actividad utilizando este resultado, entre la cual destacaremos dos aspectos.

Por una parte, se vio que el análisis de Fourier no solo se generalizaba fácilmente de $\mathbb{R}$ y la circunferencia $\mathbb{S}^1$ a todo grupo abeliano localmente compacto, sino que de hecho era el contexto más natural para ello, como quedó reflejado en la manografía de [Weil, 1940] exponiendo la teoría desarrollada en esos años. En palabras de [Cartan and Gudement, 1947]: *Le but du présent article est d'exposer, avec le maximum de généralité et le minimum d'artifices techniques, les principes de l'Analyse harmonique. Pour cela, et comme l'a vu [Weil, 1940], il faut poser le problème en termes de théorie des groupes.*

Sin embargo, como señala [Rudin, 1990, en la introducción de su libro], a pesar de que este cuadro tan natural para tratar esta teoría puede llevar a algunos a pensar que se trata de generalizar por generalizar, la teoría de grupos estaba ya oculta en el análisis de Fourier "clásico", y hacerla explícita ha servido, no solo para entender mejor la teoría, sino para importantes aplicaciones dentro de la misma.

También han surgido importantes aplicaciones fuera del análisis. Una de las más destacadas es la tesis de [Tate, 1950] en teoría de números, que a su vez es el germen del llamado Programa Langlands, uno de los problemas más ambiciosos y con más actividad en las matemáticas de los últimos 50 años.

Por otra parte, uno de los resultados más básicos y utilizados en matemáticas es el teorema de clasificación de grupos abelianos de tipo finito, que expresa todo grupo de este tipo como producto directo finito de grupos cíclicos. Como resultado de la anterior teoría, este teorema se puede extender al caso topológico, dando lugar a un teorema de clasificación de los grupos abelianos localmente compactos asombrosamente parecido al de los grupos abelianos de tipo finito, donde, dejando a un lado la parte discreta, en la parte continua el grupo localmente compacto $\mathbb{R}$ jugaría el papel del grupo cíclico infinito $\mathbb{Z}$, y el grupo compacto $\mathbb{S}^1$ el papel de los grupos cíclicos finitos.

Este teorema de estructura se deduce del teorema de dualidad de Pontryagin, uno de los teoremas básicos en esta teoría, que suele demostrarse utilizando teoría de la medida y análisis funcional en grupos localmente compactos ([Weil, 1940],[Cartan and Gudement, 1947],[Rudin, 1990],[Deitmar and Echterhoff, 2014], ...). El enunciado es el siguiente:

Teorema 0.1. *La aplicación canónica de un grupo abeliano localmente compacto G en su bidual $\hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo de grupos localmente compactos.*

Recordemos que el dual $\hat{G}$ de un grupo localmente compacto G se define como el grupo de caracteres de G, es decir, el grupo de homomorfismos continuos de G en $\mathbb{S}^1$, con la topología compacto-abierto. Su demostración habitual suele hacerse dentro del contexto del análisis funcional en grupos localmente compactos, utilizando la transformada de Fourier para "pasar" del cuadro algebro-topológico al del análisis funcional.

Nuestro objetivo en esta memoria es desarrollar todos los aspectos algebraicos, topológicos, de teoría de medida y de análisis funcional en grupos abelianos localmente compactos necesarios para entender dicha demostración. De forma más precisa, tras leer esta memoria se estaría preparado para leer directamente la demostración del teorema de Pontryagin [Deitmar and Echterhoff, 2014, en las secciones 3.4 y 3.5] o por el libro [Rudin, 1990].

Sin embargo, queremos señalar que, aunque no tan naturales, hay otros caminos para demostrar el teorema de Pontryagin, que no trataremos en este texto. El principal es hacer la teoría en sentido contrario: en vez de deducir el teorema de estructura de los grupos abelianos localmente compactos a partir del teorema de Pontryagin, se puede obtener este teorema de estructura por técnicas exclusivamente algebro-topológicas, y después utilizar dicho teorema para probar el de Pontryagin. Esta es la vía utilizada en [Poitou, 1967]. Queremos también señalar el libro de [Morris, 1977], donde aunque no se demuestra el teorema completamente, sí se demuestra una parte utilizando fundamentalmente argumentos exclusivamente topológicos.

Capítulo 1

Topología compacto-abierto[1]

Dado un conjunto y una familia de subconjuntos, es claro que esta familia es siempre una sub-base de una topología en dicho conjunto. Así, podemos definir:

Definición 1.1. Sean X, Y espacios topológicos y sea Y^X el conjunto de aplicaciones de X en Y.

(a) Definimos la *topología de la convergencia puntual* en Y^X como la que tiene como sub-base la familia

$$P(F,U) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f(F) \subset U\}$$

donde F recorre los subconjuntos finitos de X (equivalentemente los subconjuntos de un elemento) y U recorre los abiertos de Y. Claramente esta topología es independiente de la topología de X, y coincide con la topología pensando Y^X como el espacio producto Y^X (X-copias de Y).

(b) Definimos la *topologia compacto-abierto* en Y^X como la que tiene como sub-base la familia

$$C(K,U) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f(K) \subset U\}$$

donde K recorre los subconjuntos compactos de X y U recorre los abiertos de Y. Esta topología es obviamente más fina que la de la convergencia puntual.

[1]Escogemos esta traducción del nombre original (introducido en inglés en "Ralph H. Fox, On topologies for function spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945) p. 429-432") en vez de la más usual en español "topología compacto-abierta", o en francés "topología compacta-abierta", ya que nos parece la más fiel al nombre original.

Proposición 1.2. *Sean X, Y espacios topológicos y sea G un subconjunto de Y^X. Supongamos que la aplicación*

$$\theta : G \times X \longrightarrow Y$$

$$\theta(g, x) = g(x)$$

es continua para alguna topología en G. Entonces:

(a) *Los elementos de G son aplicaciones continuas*

(b) *La topología de G contiene a la topología compacto-abierto.*

Demostración. (a) Si $g \in G$, g es la composición de $X \longrightarrow G \times X$, $x \longrightarrow (g, x)$ con θ, que son ambas continuas.

(b) Sea $f \in G$. Consideremos un abierto sub-básico con la topología compacto-abierto que contenga a f

$$C(K, U) = \{g \in G \mid g(K) \subset U\}$$

y veamos que existe un abierto W en la topología de G tal que $f \in W \subset C(K, U)$. Como θ es continua, $V := (G \times K) \cap \theta^{-1}(U)$ es abierto de $G \times K$. Como $f(K) \subset U$, $\{f\} \times K \subset V$. Por definición de la topología producto en $G \times K$, V es la unión de abiertos de la forma $W_i \times T_i$ con W_i abierto de G y T_i abierto de K. Como $\{f\} \times K$ es compacto, existe un número finito de $W_i \times T_i$ tales que $\{f\} \times K \subset \bigcup_i (W_i \times T_i)$, donde podemos suponer que $f \in W_i$ para todo i. Tomando W la intersección de este número finito de W_i, tenemos que W es abierto de G, $f \in W$, $W \times K \subset V$. Así, $\theta(W \times K) \subset U$, es decir, $g(K) \subset U$ para todo $g \in W$ con lo que $W \subset C(K, U)$.

□

Proposición 1.3. *Sean X e Y espacios topológicos y sea $G \subset Y^X$. Supongamos que*

(a) *G es cerrado en la topología compacto-abierto.*

(b) *Para todo $x \in X$, la clausura de $\{g(x) \mid g \in G\}$ en Y es compacto.*

(c) *En la clausura, $\overline{G}$, de G en Y^X para la topología de la convergencia puntual, la topología de la convergencia puntual coincide con la topología compacto-abierto.*

Entonces G es compacto para la topología compacto-abierto.

Demostración. Como $\overline{\{g(x) \mid g \in G\}}$ es compacto en Y por (b), tenemos que $\prod_{x \in X} \overline{\{g(x) \mid g \in G\}}$ es compacto en el producto (teorema de Tychonoff) y así es compacto en Y^X para la topología de la convergencia puntual. Por definición de topología de convergencia puntual, cada elemento de $\overline{G}$, pensado como elemento del producto Y^X, tiene x-componente en $\overline{\{g(x) \mid g \in G\}}$. Así, $\overline{G} \subset \prod_{x\in X} \overline{\{g(x) \mid g \in G\}}$. Para la topología de convergencia puntual, $\prod_{x\in X} \overline{\{g(x) \mid g \in G\}}$ es compacto y $\overline{G}$ un subespacio cerrado, y así $\overline{G}$ es también compacto para esta topología. Así por (c), $\overline{G}$ es también compacto para la topología compacto-abierto. Entonces por (a), G es también compacto en la topología compacto-abierto. □

Definición 1.4. Sea X un espacio topológico y sea Y un espacio métrico. Un conjunto $G \subset Y^X$ de aplicaciones de X en Y es *equicontinuo* en un punto $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un entorno U de x en X tal que $d(g(x), g(y)) < \epsilon$ para todo $y \in U$ y para todo $g \in G$. Se dice que G es equicontinuo si lo es en todo $x \in X$. En particular, los elementos de G son aplicaciones continuas.

Lema 1.5. *Sea X un espacio topológico, Y un espacio métrico y $G \subset Y^X$.*

(a) *Si G es equicontinuo en $x \in X$, entonces su clausura $\overline{G}$ para la topología de la convergencia puntual también es equicontinuo en x.*

(b) *Si G es equicontinuo, entonces la aplicación $\theta : G \times X \longrightarrow Y$, $\theta(g, x) = g(x)$ es continua considerando en G la topología de convergencia puntual. En particular, los elementos de G son aplicaciones continuas por la* 1.2.(a).

Demostración. (a) Sea $h \in \overline{G}$. Por definición de topología de convergencia puntual, tenemos en particular que para todo $\epsilon > 0$ existe $g \in G$ tal que $d(h(x), g(x)) < \epsilon$. De aquí se deduce inmediatamente el resultado ($d(h(x), h(y)) \leq d(h(x), g(x)) + d(g(x), g(y)) + d(g(y), h(y)) < 3\epsilon$).

(b) Sean $(g, x) \in G \times X$, $\epsilon > 0$ y U un entorno de x en X tal que $d(h(x), h(y)) < \epsilon$ para todo $y \in U$ y para todo $h \in G$. Sea $V \subset G$ un entorno de g en la topología de la convergencia puntual tal que $d(g(x), h(x)) < \epsilon$ para todo $h \in V$ (nos estamos centrando sólo en el punto x). Entonces $V \times U$ es un abierto de $G \times X$ y para todo $(h, y) \in V \times U$, tenemos que $d(\theta(g, x), \theta(h, y)) = d(g(x), h(y)) \leq d(g(x), h(x)) + d(h(x), h(y)) < 2\epsilon$.

□

Teorema 1.6 (Teorema de Ascoli)**.** *Sea X un espacio topológico, Y un espacio métrico y $G \subset Y^X$. Supongamos que*

(a) *G es cerrado para la topología compacto-abierto en Y^X.*

(b) *Para todo $x \in X$, la clausura de $\{g(x) \mid g \in G\}$ en Y es compacto.*

(c) *G es equicontinuo.*

Entonces G es compacto en la topología compacto-abierto.

Demostración. Se deduce de la proposición 1.3, donde para verificar la hipótesis (c) utilizamos el lema 1.5 y la proposición 1.2 (considerando en esta última la topología de la convergencia puntual en $\overline{G}$). □

Observación 1.7. Bajo ciertas hipótesis adicionales en los espacios topológicos, el recíproco del teorema anterior es cierto (teorema de Arzelá).

Lema 1.8. *Sean X, Y espacios topológicos con Y Hausdorff. Entonces Y^X es Hausdorff con la topologia compacto-abierto y con la topología de la convergencia puntual.*

Demostración. Sean $f, g \in Y^X$, $f \neq g$. Sea $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Sean U, V entornos abiertos disjuntos de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente. Entonces $C(\{x\}, U)$ y $C(\{x\}, V)$ (notación de la definición 1.1) son entornos abiertos disjuntos de f y g, tanto en la topología compacto-abierto como en la topología de la convergencia puntual. □

Definición 1.9. Sea I un conjunto. Consideremos en I una relación $\leq$ tal que sea

- **Reflexiva**: $a \leq b$.
- **Transitiva**: $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Se dice que I es un *conjunto dirigido* si para cualquier par de elementos hay una cota superior, i.e., si $a, b \in I$, entonces $\exists c \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq c$. Una *red* en un espacio topológico X es una aplicación

$$x : I \longrightarrow X$$

donde I es un conjunto dirigido. Por convenio escribimos sus imágenes como x_i, $i \in I$ en lugar de $x(i)$. Decimos que una red es convergente a un punto $x \in X$ si para todo entorno U de x existe un $i_0 \in I$ tal que $i \geq i_0 \Rightarrow x_i \in U$. Destaquemos que una red puede converger a más de un punto. El caso extremo se da para la topología trivial, en la cual cada red converge a todo punto. Sin embargo, en espacios Hausdorff ninguna red converge a más de un punto. Decimos que $(y_j)_{j \in J}$ es una *subred* de $(x_i)_{i \in I}$ (donde I, J son conjuntos dirigidos) si y sólo si existe una aplicación $f : J \longrightarrow I$ que verifica las siguientes propiedades

- $j_1 \leq j_2 \longrightarrow f(j_1) \leq f(j_2)$.
- Para todo $i_0 \in I$, existe $j_0 \in J$ tal que $f(j) \geq i_0$ para todo $j \geq j_0$.
- $xf = y$.

Proposición 1.10. *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$, entonces $\overline{A}$ coincide con el conjunto de todos los límites de redes de A. Es decir, $x \in X$ está en $\overline{A}$ si y solo si existe una red $(x_i)_{i\in I}$ en A que converge a x.*

Demostración. ($\Rightarrow$) $\overline{A}$ es el conjunto de los $x \in X$ tales que $A \cap U \neq \emptyset$ para todo U entorno de x. Sea $x \in \overline{A}$ y sea U un entorno de x. Entonces, $U \cap A \neq \emptyset$. Sea $x_U \in U \cap A$ y sea I el conjunto de todos los entornos de x con la relación de orden:

$$U \leq U' \Leftrightarrow U' \subset U$$

Tenemos que I es dirigido, pues dados U, U' entornos de x, $U \cap U' \subset U$ y $U \cap U' \subset U' \Rightarrow U \leq U \cap U', U' \leq U \cap U'$ (siempre hay cota superior). La red $(x_U)_{U\in I}$ converge por construcción a x (para todo U entorno de x, existe $U' \in I$ tal que si $U \geq U' \Rightarrow x_U \in U$).
($\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y sea $x_i \in A$, $i \in I$ una red convergente a x. Para cualquier U entorno de x, existe $i \in I$ tal que $x_i \in U$. Como $x_i \in A \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset$ para todo entorno de x. Entonces $x \in \overline{A}$. □

Proposición 1.11. *Un espacio topológico X es compacto si y solo si toda red en X tiene alguna subred convergente.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $(y_i)_{i\in I}$ es una red que no tiene ninguna subred convergente, para cada $x \in X$ existe un entorno abierto U_x de x tal que $U_x \cap (y_i)_{i\geq i_x} = \emptyset$ para algún $i_x \in I$. Si el recubrimiento $\{U_x\}_{x\in X}$ de X tuviese algún subrecubrimiento finito, entonces habría un U_x tal que para todo $i_0 \in I$, existiría un $y_i \in U_x$ con algún $i \geq i_0$, contradiciendo la elección de U_x.
($\Leftarrow$) Reciprocamente, si $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de X que no tiene subrecubrimientos finitos, tomemos I el conjunto de subrecubrimientos finitos de $\mathcal{U}$. Tenemos que I es un conjunto dirigido con la inclusión como relación de orden. Construimos una red $(y_i)_{i\in I}$ en X tomando para cada $i \in I$ un $y_i \in X$ que no esté en la unión (finita) de abiertos de $\mathcal{U}$ que determinan el índice $i \in I$. Veamos que no tiene ninguna subred convergente. Es suficiente demostrar que para todo $x \in X$ existe un entorno abierto U de x y un $i_0 \in I$ tal que $y_i \notin U$ $\forall i \geq i_0$. Sea $x \in X$ y sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Sea i_0 el índice correspondiente a U (como subrecubrimiento con el único abierto U de $\mathcal{U}$). Entonces, si $i \geq i_0$, $y_i \notin U$ por definición de I y de y_i. □

Proposición 1.12. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces, f es continua si y solo si toda red (x_i) en X que converge a $x \in X$ cumple que $f(x_i)$ converge a $f(x)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea f continua y sea $(x_i)_{i\in I}$ una red en X convergente a $x \in X$. Tenemos que demostrar que $f(x_i) \longrightarrow f(x)$. Sea U un entorno abierto de $f(x)$ en Y. Como f es continua, $V = f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de x en X. Como $x_i \longrightarrow x$, existe $i_0 \in I$ tal que $x_i \in V$ para todo $i \geq i_0 \Rightarrow f(x) \in U$ para todo $i \geq i_0$.
($\Leftarrow$) Supongamos que f satisface la condición de convergencia. Sea $A \subset Y$ cerrado y $B \subset X$ la imagen inversa de A. Tenemos que demostrar que B es cerrado en X. Sea (x_i) una red en B, convergente a $x \in X$. Como $f(x_i)$ converge a $f(x) \in \overline{A} = A$ (proposición 1.10) $\Rightarrow x \in B = f^{-1}(A)$, luego B es cerrado, por la proposición 1.10. □

Teorema 1.13. *Una red (x_λ) en un producto $X = \prod_{a\in A} X_a$ converge a x si para cada $a \in A$, $\pi_a(x_\lambda) \longrightarrow \pi_a(x)$ en X_a.*

Demostración. Supongamos que $\pi_a(x_\lambda) \longrightarrow \pi_a(x)$ para cada $a \in A$. Sea $(\pi_{a_1})^{-1}(U_{a_1}) \cap \ldots \cap (\pi_{a_n})^{-1}(U_{a_n})$ un entorno básico de x en el espacio producto. Entonces para cada $i = 1, \ldots, n$ tenemos un λ_i tal que para cualquier $\lambda \geq \lambda_i$, $\pi_{a_i}(x_\lambda) \in U_{a_i}$. Entonces, si elegimos λ_0 mayor que todos los $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tenemos que $\pi_{a_i}(x_\lambda) \in U_{a_i}$, $i = 1, \ldots, n$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Se sigue que para $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in \bigcap(\pi_{a_i})^{-1}(U_{a_i})$, y entonces $x_\lambda \longrightarrow x$ en el producto. El recíproco se deduce de la proposición 1.12. □

El nombre de topología de convergencia puntual se debe al siguiente resultado:

Proposición 1.14. *Sean X e Y espacios topológicos. Una red (f_i) en Y^X converge a $f \in Y^X$ con la topología de la convergencia puntual si y solo si $(f_i(x))$ converge a $f(x)$ con la topología de Y, para todo $x \in X$.*

Demostración. Para cada $x \in X$ sea $\pi_x : Y^X \longrightarrow Y$ la proyección x-ésima. Por el teorema 1.13, (f_i) converge a f si y solo si para todo $x \in X$, $(\pi_x(f_i))$ converge a $\pi_x(f)$, es decir, si y solo si para todo $x \in X$, $f_i(x)$ converge a $f(x)$. □

Sea X un espacio topológico. $\mathcal{C}(X)$ es el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$. Consideramos $\mathbb{C}$ con la topología usual y $\mathcal{C}(X)$ con la topología compacto-abierto (i.e., la topología inducida como subespacio de $\mathbb{C}^X$ con la topología compacto-abierto).

Proposición 1.15. (a) *Una red (f_i) en $\mathcal{C}(X)$ converge en la topología compacto-abierto si y solo si converge uniformemente en todo subconjunto compacto de X.*

(b) *Si X es localmente compacto, entonces una red (f_i) converge en la topología compacto-abierto si y solo si converge localmente uniformemente.*

(c) *Si X es compacto entonces la topología compacto-abierto de $\mathcal{C}(X)$ coincide con la topología dada por la norma del supremo.*

(d) *Si* $\mathcal{C}(X)$ *está equipado con la topología compacto-abierto, entonces cada aplicación* $\delta_x : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$*;* $f \longrightarrow f(x)$*, que evalúa puntualmente, es continua.*

Demostración. (a) Fijamos $\epsilon > 0$. Sea $f_i \longrightarrow f$ una red convergente en la topología compacto-abierto y $K \subset X$ un subconjunto compacto. Para $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ sea $B_r(z)$ la bola abierta centrada en z y de radio r, y sea $\overline{B_r(z)}$ su clausura. Para $x \in X$, sea U_x la imagen recíproca por f de $B_{\epsilon/3}(f(x))$. Entonces U_x es un entorno abierto de x y f lleva su clausura, $\overline{U_x}$, en la bola cerrada $\overline{B_{\epsilon/3}(f(x))}$. Como K es compacto, $\exists x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K = U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$. Como un cerrado en un compacto es compacto, tenemos que $\overline{U_{x_i}} \cap K$ es compacto. Así, sea L la intersección de los conjuntos $C(\overline{U_{x_i}} \cap K, B_{2\epsilon/3}(f(x_i))) \Rightarrow L$ es un entorno abierto de f en la topología compacto-abierto. Por lo tanto, $\exists j_0$ tal que si $j \geq j_0$, cada $f_j \in L$. Sea $j \geq j_0$ y $x \in K$, luego existe i tal que $x \in U_{x_i}$. Así

$$|f_j(x) - f(x)| \leq |f_j(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < \frac{2\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Luego, la red converge uniformemente en K. Ahora, sea $f \in \mathcal{C}(X)$ definida como sigue: si $x \in X$, $\{x\}$ es compacto y asi (f_i) converge en $\{x\}$ a un elemento de $\mathbb{C}$ que además es único por ser $\mathbb{C}$ Hausdorff. Llamémoslo $lim\ f_i(x)$. Definimos entonces

$$f(x) := lim\ f_i(x)$$

Si K es compacto, sabemos que (f_i) converge uniformemente a una función g en K. Pero para cada $x \in K$, $g(x) = lim\ f_i(x)$, y así $g\big|_K = f\big|_K$. Por lo tanto, tenemos que (f_i) converge uniformemente a la función f en cualquier compacto. Así pues, es suficiente demostrar que si K es un compacto de X y U un abierto de X tal que $f(K) \subset U$, entonces existe i_0 tal que $f_i(K) \subset U$ para todo $i \geq i_0$. Como (f_i) converge a f uniformemente en K y $f(x) \in U$ para todo $x \in K$, existe i_0 tal que para todo $x \in K$ se tiene $f_i(x) \in U$ para todo $i \geq i_0$. Esto es lo que teníamos que demostrar.

(b) Sea X localmente compacto y sea (f_j) un red en $\mathcal{C}(X)$ que converge a $f \in \mathcal{C}(X)$ en la topología compacto-abierto. Por (a), (f_j) converge uniformemente en los conjuntos compactos. Como todo $x \in X$ posee un entorno compacto, (f_j) converge uniformemente en un entorno de x dado, luego converge localmente uniformemente. Recíprocamente, supongamos que (f_j) converge localmente uniformemente y sea $K \subset X$ compacto. Para cada $x \in K$, existe U_x entorno abierto de x donde la red (f_j) converge uniformemente. Estos U_x forman un recubrimiento abierto de K, luego $K \subset U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in K$. Como (f_j) converge uniformemente en cada U_{x_i}, converge uniformemente en K.

(c) Por (a), si X es compacto, la topología compacto-abierto y la topologia de la norma del supremo tienen los mismos conjuntos de redes convergentes, luego tienen los mismos conjuntos cerrados. Por lo tanto son iguales.

(d) Sea (f_i) una red en $\mathcal{C}(X)$ convergente a f. Aplicando (a) al conjunto compacto $\{x\}$, vemos que $\delta_x(f_i) = f_i(x)$ converge a $f(x) = \delta_x(f)$. Entonces, por la proposición 1.12, la aplicación $\delta_x : \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua.

□

Capítulo 2

Grupos topológicos

Definición 2.1. Un grupo topológico es un grupo G con una topología tal que las aplicaciones

$$G \times G \longrightarrow G \qquad G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longrightarrow xy \qquad x \longrightarrow x^{-1}$$

son continuas. Se deduce fácilmente que la aplicación $G \times G \longrightarrow G$; $(x, y) \longrightarrow xy^{-1}$ es continua.

Ejemplo 2.2.

- Todo grupo G es un grupo topológico con la topología discreta.
- El grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ de los números reales con la topología usual de $\mathbb{R}$ es un grupo topológico.
- El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ no singulares sobre $\mathbb{R}$ es un grupo topológico con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^{n^2}$, identificando $GL(n, \mathbb{R})$ con un subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$ de la forma usual. En particular, el grupo multiplicativo de unidades de $\mathbb{R}$, $GL(1, \mathbb{R})$, es un grupo topológico con la topología usual de $\mathbb{R}$. Para el grupo de matrices recordemos que su producto es una aplicación polinómica en las entradas de las matrices, luego continua. La aplicación determinante también es polinómica, luego la inversión de matrices viene dada por apliaciones racionales, ya que $A^{-1} = |A|^{-1}\mathrm{adj}(A)$, donde $\mathrm{adj}(A)$ es la adjunta de A (las entradas de $\mathrm{adj}(A)$ son determinantes de submatrices de A), por lo tanto $A \longrightarrow A^{-1}$ es continua.
- El grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$ de los números complejos de módulo 1 con la topología usual de $\mathbb{C}$ es un grupo topológico.

Ejemplo 2.3 (Teoría de Galois)**.** Sea I un conjunto ordenado. Para cada $i \in I$ sea X_i un espacio topológico y para cada $i \leq j$, $i, j \in I$ sea $f_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$ una aplicación continua.

Supongamos que el conjunto I es dirigido. Llamaremos *limite proyectivo* de $\{X_i, f_{ij}\}$ al subespacio topológico del espacio topológico producto

$$\varprojlim_i X_i := \{(x_i)_i \in \prod_{i\in I} X_i \mid f_{ij}(x_j) = x_i \ \forall i \leq j\}$$

Lema 2.4. *Si los espacios X_i son Hausdorff compactos no vacíos, entonces $\varprojlim_i X_i$ también lo es.*

Demostración. Si los X_i son Hausdorff, $\prod_{i\in I} X_i$ es Hausdorff y así $\varprojlim_i X_i$ también lo es. Por otra parte $\prod_{i\in I} X_i$ es compacto y, así, para ver que $\varprojlim_i X_i$ es compacto es suficiente ver que es cerrado en $\prod_{i\in I} X_i$. Esto se deduce de que $\varprojlim_i X_i = \bigcap_{i\leq j} X_{ij}$, donde

$$X_{ij} := \{(x_l) \in \prod_{l\in I} X_l \mid f_{ij}(x_j) = x_i\}$$

y los X_{ij} son cerrados en $\prod_{l\in I} X_l$ por ser $\prod_{l\in I} X_l$ Hausdorff, ya que

$$X_{ij} = \{x \in \prod_{l\in I} X_l \mid p_i(x) = (f_{ij} \circ p_j)(x)\}$$

siendo p_i la proyección i-ésima $\prod_{l\in I} X_l \longrightarrow X_i$. Finalmente, si $\varprojlim_i X_i = \emptyset$, como $\varprojlim_i X_i = \bigcap_{i\leq j} X_{ij}$ y $\prod_{l\in I} X_l$ es compacto, existiría un número finito de cerrados X_{ij} cuya intersección es vacía. Esto no puede ocurrir ya que si n es un índice mayor que todos los i, j que aparece en este conjunto finito (existe por ser I dirigido) y tomamos $x_n \in X_n$, entonces el elemento (x_l) definido por

$$x_l = \begin{cases} f_{in}(x_n) & \text{si } i \leq n \\ \text{cualquier elemento en otro caso} & (X_l \neq \emptyset \ \forall l \in I) \end{cases}$$

está en esta intersección. □

Si los X_i son además grupos topológicos, entonces es fácil ver que $\prod_{i\in I} X_i$ también lo es, y $\varprojlim_i X_i$ es un subgrupo de $\prod_{i\in I} X_i$ y, así, un grupo topológico. Llamaremos *grupo profinito* a un grupo topológico que es límite proyectivo de grupos finitos considerados como grupos topológicos con la topología discreta. Un grupo profinito es, por lo tanto, Hausdorff y compacto por lo que vimos, y en particular no es discreto salvo que sea finito. Un grupo

profinito es también totalmente disconexo, es decir, las componentes conexas son los puntos: esto se deduce de que la componente conexa de un punto $(x_i) \in \prod_{i \in I} X_i$, es el producto de las componentes conexas de cada x_i en X_i, y de que las componentes conexas en X_i son los puntos al ser X_i discreto.
Sea entonces $E|K$ una extensión algebraica (no necesariamente finita) de Galois. Sea $Gal(E|K)$ su grupo de Galois, i.e., el grupo de automorfismos de E sobre K. Se tiene que

$$Gal(E|K) = \varprojlim_i Gal(L|K)$$

donde L recorre las subextensiones de $E|K$ tales que $L|K$ es de Galois finita (y, así, $Gal(L|K)$ es finito). Por lo tanto, $Gal(E|K)$ es un grupo profinito. El *teorema fundamental de la teoría de Galois* en el caso no necesariamente finito proporciona una biyección entre las subextensiones L de $E|K$ y los subgrupos cerrados de $Gal(E|K)$. Las subextensiones finitas $L|K$ se corresponden con los subgrupos abiertos de $Gal(E|K)$ (veremos más adelante que todo subgrupo abierto es cerrado) y las subextensiones $L|K$ (finitas) de Galois con los subgrupos (abiertos) normales de $Gal(E|K)$ (Todo esto puede verse en [Bourbaki, 2003, chapter V]).

A partir de ahora vamos a suponer que todos los grupos son abelianos.

Proposición 2.5. *Sea U un subconjunto de un grupo topológico G, $a \in G$. Son equivalentes*

(a) *U es un entorno de 1.*

(b) *$U^{-1} := \{g^{-1} \in G \mid g \in U\}$ es un entorno de 1.*

(c) *$aU := \{ag \in G \mid g \in U\}$ es un entorno de a.*

Demostración. Se sigue de que las apicaciones $G \longrightarrow G$; $g \longrightarrow ag$, $G \longrightarrow G$; $g \longrightarrow g^{-1}$, son claramente continuas y sus inversas también y, así, homeomorfismos. □

Lema 2.6. *Todo entorno U de 1 en un grupo topológico G continene un entorno V de 1 que es simétrico, es decir, $V = V^{-1}$, y otro entorno W que verifica $W^2 := \{g^2 \in G \mid g \in W\} \subset U$.*

Demostración. Tómese $V := U \cap U^{-1}$. Sea $W_1 \times W_2$ un entorno de $(1, 1)$ básico de $G \times G$ (para la topología producto) contenido en el abierto $\mu^{-1}(U)$, donde $\mu : G \times G \longrightarrow G$ es la multiplicación, y tómese $W = W_1 \cap W_2$. □

Sea G un grupo topológico y sea H un subgrupo. Consideramos el grupo cociente G/H, con la topología cociente. El homomorfismo canónico $p : G \longrightarrow G/H$ es continuo por definición, pero también es abierto: si U es un abierto de G, $p(U)$ es abierto ya que $p^{-1}(p(U)) = UH = \bigcup_{h \in H} Uh$ es abierto por ser unión de abiertos, y estamos con la topología cociente.

Lema 2.7. *Sea H la intersección de todos los entornos de 1 en un grupo topológico G. Se verifica*

(a) *H es un subgrupo de G.*

(b) *$\overline{\{1\}} = H$, y en particular H es cerrado.*

(c) *G/H es Hausdorff.*

(d) *G es Hausdorff si y solo si $H = \{1\}$.*

Demostración. (a) Sean $x, y \in H$ y veamos que $xy \in H$. Supongamos que existe un entorno U de 1 en G tal que $xy \notin U$. Entonces $(x, y) \in \mu^{-1}(G - U)$ donde $\mu : G \times G \longrightarrow G$ es la multiplicación. Como $\mu^{-1}(G-U)$ es cerrado y $(1, 1) \notin \mu^{-1}(G-U)$, tenemos que existe un entorno V de $(1, 1)$ en $G \times G$ tal que $(x, y) \notin V$, y así existe un entorno W de 1 en G tal que $x \notin W$ o $y \notin W$. Esto contradice que $x, y \in H$. Análogamente se prueba que si $x \in H$ entonces $x^{-1} \in H$.

(b) $x \in H \Leftrightarrow x \in U$ para todo entorno U de 1 en G, que podemos suponer simétrico por el lema 2.6. Así, esto es equivalente a que $x^{-1} \in U$ y, por lo tanto, a que $1 \in xU$ para todo entorno U de 1. Por la proposición 2.5 esto implica que $1 \in V$ para todo entorno V de x, es decir, $x \in \overline{\{1\}}$.

(c) Por (b) H es cerrado y así todas las clases aH son cerradas en G, es decir, los puntos de G/H son cerrados. En particular la diagonal $\Delta = \{(g, g) \in G \times G \mid g \in G\}$ de $G \times G$ es cerrada (pues $\Delta = d^{-1}(\{1\})$ donde $d(x, y) = xy^{-1}$), es decir, G es Hausdorff.

(d) ”Si” se deduce de (c), y ”solo si” de (b).

□

Corolario 2.8. *Sea G un grupo topológico y sea K un subgrupo de G. Entonces G/K es Hausdorff si y solo si K es cerrado.*

Demostración. Basta con aplicar el lema 2.7 al grupo G/K. □

Ejemplo 2.9. (a) Todo subgrupo no discreto de $(\mathbb{R}, +)$ es denso en $\mathbb{R}$.

(b) Todo subgrupo cerrado propio del grupo $(\mathbb{R}, +)$ es un subgrupo discreto de la forma $a\mathbb{Z}$ con $a \in \mathbb{R}$

(c) Todo cociente Hausdorff de $(\mathbb{R}, +)$ distinto de $\{0\}$ y $\mathbb{R}$ es isomorfo y homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Demostración. (a) Sea G un subgrupo de $\mathbb{R}$ no discreto. Como la aplicación traslación para cada elemento $g \in G$, $G \longrightarrow G$; $x \longrightarrow x + g$ es un homeomorfismo, si G no es discreto, ningún punto de G es aislado. En particular, para todo $\epsilon > 0$, $\{0\} \subsetneq (-\epsilon, \epsilon) \cap G$. Si $x \in (-\epsilon, \epsilon) \cap G$, $x \neq 0$, $nx \in G$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y así, como podemos tomar ϵ todo lo pequeño que queramos, vemos que en cualquier intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$ hay puntos de G.

(b) Por (a), todo subgrupo G cerrado propio de $\mathbb{R}$ es discreto. Veamos que es de la forma $a\mathbb{Z}$. Como $x \in G \Rightarrow -x \in G$, tenemos que $G = \{0\}$ (en cuyo caso tomaríamos $a = 0$) o $G \cap (0, \infty) \neq 0$. En este caso, sea $x \in G \cap (0, \infty)$. Tenemos que $[0, x] \cap G$ es compacto y discreto, y así, es finito. Sea $a := min\{y \in [0, x] \cap G \mid y \neq 0\}$. Como $a \in G$, $a\mathbb{Z} \subset G$. Recíprocamente, si $g \in G$, sea $c \in \mathbb{Z}$ el mayor entero tal que $ca \leq g$. Entonces, $g - ca \in (0, \infty)$, con lo que por la minimalidad de a, $g - ca = 0$. Así $g = ca \in a\mathbb{Z}$.

(c) Vamos a ver que para todo $a \in (0, \infty)$, $\mathbb{R}/a\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ (isomorfismos y homeomorfismos). El primer isomorfismo es $\bar{x} \longrightarrow \frac{\bar{x}}{a}$, y el segundo $\bar{x} \longrightarrow e^{2\pi i x}$. Por el Corolario 2.8 y (b), obtenemos que todo cociente Hausdorff de $\mathbb{R}$ es distinto de $\{0\}$ y $\mathbb{R}$ es isomorfo y homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

□

Proposición 2.10. *Sea G un grupo topológico y sea K un subgrupo de G. Entonces la clausura $\overline{K}$ de K en G es un subgrupo de G.*

Demostración. Basta con aplicar el lema 2.7 $(a), (b)$ a G/K. □

Proposición 2.11. *Sea G un grupo topológico y sea H un subgrupo abierto de G. Entonces H es cerrado.*

Demostración. Como G es la unión disjunta de clases aH, y cada aH es abierto por serlo H, H es el complementario de G en la unión de las aH salvo la clase H (i.e., el caso $a \in H$). Así H es cerrado. □

Definición 2.12. Un grupo topológico se dice *localmente compacto* si como espacio topológico es Hausdorff y localmente compacto.

Proposición 2.13. *Sea G un grupo localmente compacto y sea H un subgrupo cerrado. Entonces G/H es un grupo localmente compacto.*

Demostración. G/H es Hausdorff por el Corolario 2.8 y es localmente compacto por ser imagen de un espacio localmente compacto G, por una aplicación $G \longrightarrow G/H$, continua y abierta. □

Definición 2.14. Sea G un grupo localmente compacto. Un *carácter* de G es un homomorfismo de grupos continuo

$$\mathcal{X} : G \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

donde $\mathbb{S}^1$ es el grupo topológico de números complejos de módulo 1 (Ejemplo 2.2, último apartado). Denotaremos por $\hat{G}$ el grupo de caracteres de G, que es un grupo con la operación

$$(\mathcal{X}_1 \cdot \mathcal{X}_2)(g) = \mathcal{X}_1(g)\mathcal{X}_2(g) \quad (g \in G)$$

Nótese que el inverso de $\mathcal{X}$ es $\mathcal{X}^{-1}$ definido por $\mathcal{X}^{-1}(g) = \mathcal{X}(g)^{-1} = \overline{\mathcal{X}(g)}$ (conjugación compleja). Diremos que $\hat{G}$ es el *grupo dual* de G. Consideremos $\hat{G}$ como el espacio topológico con la topología compacto-abierto (Ver capítulo 1).

Proposición 2.15. *Con la topología compacto-abierto, $\hat{G}$ es un grupo topológico.*

Demostración. Tenemos que demostrar que la aplicación $\alpha : \hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G}$; $(\mathcal{X}, \eta) \longrightarrow \mathcal{X}\eta^{-1}$ es continua. Sean $(\mathcal{X}, \eta)$,$(\mathcal{X}', \eta')$ dos pares y $x \in G$

$$|\mathcal{X}(x)\eta^{-1}(x) - \mathcal{X}'(x)\eta'^{-1}(x)| \leq |\mathcal{X}(x)\eta^{-1}(x) - \mathcal{X}(x)\eta'^{-1}(x)| + |\mathcal{X}(x)\eta'^{-1}(x) - \mathcal{X}'(x)\eta'^{-1}(x)| =$$
$$|\mathcal{X}(x)||\eta^{-1}(x) - \eta'^{-1}(x)| + |\eta'^{-1}(x)||\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}'(x)| = |\eta^{-1}(x) - \eta'^{-1}(x)| + |\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}'(x)|$$

ya que $\mathcal{X}(x), \eta'^{-1}(x) \in \mathbb{S}^1$. Ahora, sea $K \subset G$ compacto y sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$B_{K,\epsilon}(\mathcal{X}\eta^{-1}) = \{\gamma \in \hat{G} : \|\gamma - \mathcal{X}\eta^{-1}\|_K < \epsilon\}$$

es un entorno abierto de $\mathcal{X}\eta^{-1}$. Entornos de esta forma forman una base de entornos de $\hat{G}$, por la proposición 1.15 (c). La desigualdad anterior muestra que el entorno abierto $B_{K,\epsilon/2}(\mathcal{X}) \times B_{K,\epsilon/2}(\eta)$ de $(\mathcal{X}, \eta)$ se aplica en $B_{K,\epsilon}(\mathcal{X}\eta^{-1})$, luego α es continua. □

Veamos los ejemplos usuales en el análisis de Fourier.

Ejemplo 2.16. (a) Si $G = \mathbb{Z}$ con la topología discreta, $\hat{G} \simeq \mathbb{S}^1$ con la topología usual de $\mathbb{S}^1$.

(b) Si $G = \mathbb{S}^1$ con la topología usual de $\mathbb{S}^1$, $\hat{G} \simeq \mathbb{Z}$ con la topología discreta.

(c) Si $G = \mathbb{R}$ con la topología usual de $\mathbb{R}$, $\hat{G} \simeq \mathbb{R}$ con la topología usual.

Demostración. (a) En primer lugar, tenemos que $\hat{\mathbb{Z}} = Hom_{cont}(\mathbb{Z}, \mathbb{S}^1) = Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{S}^1)$, ya que la topología de $\mathbb{Z}$ es la discreta y así todo homomorfismo es continuo. Por lo tanto, la aplicación

$$\phi : \hat{\mathbb{Z}} = Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

$$f \longrightarrow \phi(f) := f(1)$$

es claramente biyectiva ($\phi^{-1}(z)$ es la aplicación f tal que $f(n) = z^n$) y, obviamente, un homomorfismo de grupos ($\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$), por lo que ϕ es un isomorfismo. Veamos que ϕ es también un homeomorfismo.

- ϕ es abierta. Como ϕ es biyectiva, conserva uniones e intersecciones y así es suficiente ver que lleva un abierto sub-básico de $\hat{\mathbb{Z}}$ para la topología compacto-abierto, en un abierto de $\mathbb{S}^1$. Los abiertos sub-básicos de $\hat{\mathbb{Z}}$ son de la forma $C(\{x_1, \ldots, x_n\}, U)$ donde $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$, y U es un bierto de $\mathbb{S}^1$, ya que como $\mathbb{Z}$ es discreto, los compactos son los conjuntos finitos. Como

$$C(\{x_1, \ldots, x_n\}, U) = C(\{x_1\}, U) \cap \ldots \cap C(\{x_n\}, U)$$

  es suficiente demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}$ y todo U abierto de $\mathbb{S}^1$, $\phi(C(\{n\}, U))$ es abierto en $\mathbb{S}^1$. Como $\gamma(n) = \gamma(n \cdot 1) = \gamma(1)^n$, tenemos que

$$C(\{n\}, U) = \{\gamma \mid \gamma(n) \in U\} = \{\gamma \mid \gamma(1)^n \in U\} = C(\{1\}, \psi_n^{-1}(U))$$

  donde $\psi_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es el homomorfismo $\psi_n(z) = z^n$ que es continuo, y así $\psi_n^{-1}(U)$ es abierto. Así, es suficiente demostrar que para todo abierto U de $\mathbb{S}^1$, $\phi(C(\{1\}, U))$ es abierto de $\mathbb{S}^1$. Pero $\phi(C(\{1\}, U)) = U$ y así el resultado es claro.
- Vamos a ver que ϕ es continua en todo punto $\gamma \in \hat{\mathbb{Z}}$. Tenemos que demostrar que si U es un entorno abierto de $\phi(\gamma) = \phi(1)$ en $\mathbb{S}^1$, entonces existe un entorno abierto V de γ tal que $\phi(V) = U$. Basta tomar $V = C(\{1\}, U)$.

(b) Consideremos el grupo $\mathbb{S}^1$. En primer lugar, vamos a demostrar que todo carácter γ de $\mathbb{S}^1$ puede expresarse de la forma $\gamma(x) = mx$, donde m es un entero que caracteriza el homomorfismo γ. Para probar esto, denotemos por K el núcleo de γ. Entonces, como sabemos que todo subgrupo cerrado de $\mathbb{S}^1$ es finito, $K = \mathbb{S}^1$ o K es un grupo cíclico finito. Si $K = \mathbb{S}^1$, entonces γ es un carácter trivial y $\gamma(x) = 0 \cdot x$, $x \in \mathbb{S}^1$. Si K es un grupo cíclico finito de orden r entonces $\mathbb{S}^1/K$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{S}^1$. Además, si p es la aplicación canónica de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1/K$, entonces el isomorfismo topológico $\theta : \mathbb{S}^1/K \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es tal que $\theta p(x) = rx$. Sea α el homomorfismo continuo de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ inducido por γ.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{S}^1 \\
\mathbb{S}^1/K \arrow[d, "\theta"] & \\
\mathbb{S}^1 \arrow[uur, dotted, "\alpha"] &
\end{tikzcd}$$

Se tiene que $\alpha(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$, o $\alpha(x) = -x$, para todo $x \in \mathbb{S}^1$ (ver [Morris, 1977, Exercise Set Seven, 1]). Entonces $\gamma(x) = rx$ o $-rx$, para cada $x \in \mathbb{S}^1$. Por lo tanto, todo carácter γ de $\mathbb{S}^1$ es de la forma $\gamma = \gamma_m$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, donde $\gamma_m(x) = mx$ para todo $x \in \mathbb{S}^1$. Por supuesto, $\gamma_m + \gamma_n = \gamma_{m+n}$. Así, el grupo dual $\hat{\mathbb{S}}^1$ de $\mathbb{S}^1$ es algebraicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$, y el isomorfismo es $m \longrightarrow \gamma_m$. Siguiendo un razonamiento similar al del apartado (a), obtenemos que $\hat{\mathbb{S}}^1$ es homeomorfo a $\mathbb{Z}$.

(c) Consideremos el grupo $\mathbb{R}$. Vamos a demostrar que todo carácter γ de $\mathbb{R}$ se puede expresar de la forma $\gamma(x) = e^{2\pi i dx}$, $x \in \mathbb{R}$, donde d es un número real fijado que define $\gamma := \gamma_d$. Además, tenemos que $\gamma_a + \gamma_b = \gamma_{a+b}$. Así, el grupo dual de $\mathbb{R}$ sería algebraicamente isomorfo a $\mathbb{R}$, bajo el isomorfismo $d \longrightarrow \gamma_d$. Para probar esto, sea K el núcleo de γ. Si $K = \mathbb{R}$ entonces $\gamma = \gamma_0$. Si $K \neq \mathbb{R}$, tenemos que K es isomorfo a $\mathbb{Z}$, por el ejemplo 2.9 (b). Además, el grupo cociente $\mathbb{R}/K$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{S}^1$. Como en el apartado anterior, solo existen dos posibilidades para el isomorfismo algebraico inducido $\mathbb{R}/K \longrightarrow \mathbb{S}^1$; esto da lugar a los casos $\gamma = \gamma_{1/a}$ y $\gamma = \gamma_{-1/a}$, donde a es el elemento mínimo de K. Así, todo γ es de la forma γ_d para algún $d \in \mathbb{R}$ y entonces, $\mathbb{R}$ es algebraicamente isomorfo a su grupo dual. De nuevo, podemos probar que es un homeomorfismo siguiendo el esquema de los apartados anteriores.

□

Teorema 2.17. *Sea G un grupo localmente compacto.*

(a) *Si G es compacto, entonces $\hat{G}$ es discreto.*

(b) *Si G es discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto.*

Demostración. (a) Sea G compacto y sea L el conjunto de todos los $\eta \in \hat{G}$ tales que $\eta(G) \subset \{Re(\cdot) > 0\}$. Como G es compacto, L es un entorno abierto de la unidad en $\hat{G}$. Tenemos que para todo $\eta \in \hat{G}$, $\eta(G)$ es un subgrupo de $\mathbb{S}^1$. Sin embargo, el único subgrupo de $\mathbb{S}^1$ contenido en $\{Re(\cdot) > 0\}$ es el grupo trivial $\Rightarrow L = \{1\}$, luego $\hat{G}$ es discreto.

(b) Supongamos G discreto. Entonces, $\hat{G} = Hom(G, \mathbb{S}^1)$ es un subconjunto del conjunto de todas las aplicaciones de G en $\mathbb{S}^1$. Este conjunto puede identificarse con el producto $\prod_{a \in G} \mathbb{S}^1$. Por el teorema de Tychonoff, el producto anterior es un espacio compacto Hausdorff en la topología producto y $\hat{G}$ es un subespacio cerrado, pues al ser G discreto $\hat{G}$ es simplemente el subespacio definido por las ecuaciones que hacen que los elementos sean homomorfismos de grupos. Luego $\hat{G}$ es compacto.

□

Nuestro objetivo será desarrollar la teoría necesaria para probar el siguiente teorema de dualidad:

Teorema 2.18 (Pontryagin)**.** *Sea G un grupo localmente compacto. La aplicación canónica*

$$G \longrightarrow \hat{\hat{G}}$$

es un isomorfismo y un homeomorfismo de grupos localmente compactos.

Como consecuencia de la tería que vamos a desarrollar, veremos que si G es un grupo localmente compacto, entonces $\hat{G}$ también lo es. No obstante, daremos ahora una demostración simple, deduciendo este resultado del teorema de Ascoli (siguiendo [Morris, 1977]).

Teorema 2.19. *Si G es un grupo localmente compacto, entonces $\hat{G}$ también lo es.*

Demostración. Por el lema 1.8 $\hat{G}$ es Hausdorff. Como G es localmente compacto, existe un entorno compacto U de 1 en G. Para cada $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < \frac{1}{4}$, consideremos el entorno abierto de 1 en $\mathbb{S}^1$

$$V_a := \{e^{2\pi it} \in \mathbb{S}^1 \mid t \in [0, a) \cup (1 - a, 1)\}$$

Sea $N := \{\mathcal{X} \in \hat{G} \mid \mathcal{X}(U) \subset V_a\}$. Así, por definición de la topología compacto-abierto, N es un entorno abierto de 1 en $\hat{G}$. Es suficiente demostrar que la clausura $\overline{N}$ de N en $\hat{G}$ para esta topología es compacto. Para ello vamos a aplicar el teorema 1.6 a $\overline{N}$. La hipótesis (a) de dicho teorema se verifica trivialmente. La hipótesis (b) se verifica por ser $Y := \mathbb{S}^1$ compacto. Finalmente, veamos que se verifica (c), es decir, que $\overline{N}$ es equicontinuo. Como la clausura $\overline{N}$ de N en $\hat{G}$ para la topología de la convergencia puntual contiene a $\overline{N}$ (por ser menos fina que la topología compacto-abierto), es suficiente probar que $\overline{N}$ es equicontinuo. Por el lema 1.5 (a), es suficiente probar entonces que N es equicontinuo. Para ello, vamos a demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un entorno U_1 de 1 en G tal que $\mathcal{X}(g)\mathcal{X}(h)^{-1} \in V_\epsilon$ para todo $\mathcal{X} \in N$ y para todo $g, h \in G$ tales que $g, h \in U_1$, y $g \in hU_1$ (i.e., $gh^{-1} \in U_1$). Supongamos que no existe tal entorno U_1 para algún $\epsilon > 0$. Claramente podemos suponer que $\epsilon < a$ (y así, $\epsilon < \frac{1}{4}$). Sea entonces, $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n\epsilon < \frac{1}{2}$, y sea

W un entorno de la unidad en G tal que $W^n \subset U$. Tal entorno existe por el lema 2.6. Como W no satisface lo requerido para U_1, tenemos que existen $g, h, gh^{-1} \in W$, $\mathcal{X} \in N$ tales que $\mathcal{X}(gh^{-1}) = \mathcal{X}(g)\mathcal{X}(h)^{-1} \notin V_\epsilon$. Sea $\mathcal{X}(gh^{-1}) = e^{2\pi i x}$, donde entonces, $x \geq \epsilon$. Como $\mathcal{X}$ es una aplicación continua y $\mathcal{X}(1) = 1 \in V_\epsilon$, podemos suponer (cambiando g y h si es necesario) que $x < a$. Existe entonces $m \in N$ tal que $m \leq n$ y $a < mx < \frac{1}{2}$. Tenemos que

$$\mathcal{X}((gh^{-1})^m) = e^{2\pi i m x} \notin V_a$$

Pero $g^m, h^m, (gh^{-1})^m \subset W^m \subset W^n \subset U$, y por lo tanto, como $\mathcal{X} \in N$, tenemos que

$$\mathcal{X}((gh^{-1})^m) \in V_a$$

lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 3

Medida de Haar en un grupo abeliano localmente compacto

Definición 3.1. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Denotemos por $\mathcal{B}(X)$ la σ-álgebra de los subconjuntos de Borel de X, es decir, el menor subconjunto de partes de X que contiene a los cerrados y que es estable por uniones numerables y por paso al complementario. En particular, contiene a todos los abiertos. Una *medida regular* μ en X será una función

$$\mu : \mathcal{B}(X) \longrightarrow [0, \infty]$$

verificando:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$ (esto se deduce también de (b) y (c) a continuación)

(b) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ siempre que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(X)$ sea una familia de conjuntos disjuntos.

(c) $\mu(K) < \infty$ para todo $K \in \mathcal{B}(X)$ compacto.

(d) Para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ abierto}\}$.

(e) Para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ compacto}\}$ (Nótese que estamos suponiendo X Hausdorff, y así si K es compacto, es cerrado y entonces $K \in \mathcal{B}(X)$).

Remitimos a [Deitmar and Echterhoff, 2014, Appendix B] para las propiedades elementales de estos conceptos. Necesitaremos el siguiente resultado técnico, cuya demostración reposa, como es de esperar, en el Teorema de Representación de Riesz (ver p.e. [Deitmar and Echterhoff, 2014, Section 1.3]).

Teorema 3.2. *Sea G un grupo localmente compacto. Existe una medida regular μ no nula en G que verifica $\mu(A) = \mu(gA)$ para todo $g \in G$, $A \in \mathcal{B}(G)$. Si μ_1, μ_2 son dos tales medidas, existe $\alpha \in (0, \infty)$ tal que $\mu_1 = \alpha\mu_2$.*

Definición 3.3. Sea G un grupo localmente compacto. Llamamos *medida de Haar* a una medida regular no nula en G que verifica la condición del teorema 3.2 (es decir, $\mu(A) = \mu(gA)$).

Lema 3.4. *Sea μ una medida de Haar en un grupo localmente compacto G y sea U un abierto no vacío de G. Entonces $\mu(U) > 0$.*

Demostración. Sea K un compacto de G. Como $G = \bigcup_{g\in G} gU$, tenemos que K está contenido en una unión finita de subconjuntos de la forma gU. Como $\mu(gU) = \mu(U)$, por la definión 3.1 (b), (e) obtenemos que $\mu(U) = 0$ implicaría $\mu = 0$. □

Lema 3.5. *Sea μ una medida de Haar en un grupo localmente compacto G. Sea $A \subset G$ un subconjunto de Borel. Entonces:*

(a) $A^{-1} := \{a^{-1} \in G \mid a \in A\}$ *es un subconjunto de Borel.*

(b) $\mu(A^{-1}) = \mu(A)$.

Demostración. (a) La aplicación $G \longrightarrow G$, $x \longrightarrow x^{-1}$ es continua (definición 2.1) y A^{-1} es la imagen inversa de A por esta aplicación.

(b) Sea $\mu'(A) := \mu(A^{-1})$. Es fácil ver que μ' es una medida de Haar en G, y así $\mu' = \alpha\mu$ para algún $\alpha \in (0, \infty)$ por el teorema 3.2. Como G es localmente compacto, existe un entorno compacto K de 1, y por la definición 3.1 (c), $\mu'(K) < \infty$, $\mu(K) < \infty$. Por el lema 2.6 existe un entorno V de 1 contenido en K que es simétrico, i.e., $V^{-1} = V$. Así, $\mu(V) = \mu(V^{-1}) = \mu'(V) = \alpha\mu(V)$. Como $\mu(V) < \infty$ y $\mu(V) > 0$ por el lema 3.4, obtenemos que $\alpha = 1$ y así $\mu' = \mu$.

□

Dos casos que utilizaremos frecuentemente serán cuando G es compacto o discreto. En estos casos tenemos:

Lema 3.6. *Sea G un grupo localmente compacto, μ una medida de Haar en G.*

(a) *G es compacto si y solo si $\mu(G) < \infty$.*

(b) *G es discreto si y solo si $\mu(\{1\}) > 0$.*

Demostración. (a) Supongamos que $\mu(G) < \infty$. Sea V un entorno compacto de 1. Sean $g_1V, \ldots, g_nV$ disjuntos con n maximal (existe por la definición 3.1 (b), ya que $\mu(V) > 0$ por el lema 3.4 y $\mu(G) < \infty$ por hipótesis). Tenemos que cada g_iV es compacto por traslación y así $K := g_1V \cup \ldots \cup g_nV$ es compacto. Por la maximalidad de n, $K \cap gK \neq \emptyset$, para todo $g \in G$. Así existe $h \in K$ tal que $g^{-1}h \in K$ con lo que $g \in KK^{-1}$. Esto es cierto para todo $g \in G$, es decir, tenemos $G = KK^{-1}$. Como KK^{-1} es compacto (pues es la imagen del compacto $K \times K$ por la aplicación continua $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longrightarrow xy^{-1}$), G es compacto. El recíproco se sigue de la definición 3.1 (c).

(b) Si G es discreto, $\{1\}$ es abierto, y $\mu(\{1\}) > 0$ por el lema 3.4. Recíprocamente, si $\mu(\{1\}) = a > 0$, $\mu(\{g\}) = a$ para todo $g \in G$ (pues $\mu(gA) = \mu(A)$). Como G es localmente compacto, existe un entorno compacto V de 1. Por la definición 3.1 (b), si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos distintos en V, $\mu(V) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(g_n) = \infty$, pero $\mu(V) < \infty$ por la definición 3.1 (c). Así V es finito, y como G es Hausdorff, podemos separar los puntos de V por abiertos disjuntos, con lo que V es discreto. En particular, $\{1\}$ es abierto, y así G es discreto.

$\square$

Sea G un grupo localmente compacto con una medida de Haar μ, y para todo p con $1 \leq p \leq \infty$, sea $L^p(G) = L^p(\mu)$ el espacio de Banach cociente del espacio vectorial de las funciones medibles $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ de norma

$$\|f\|_p := \left(\int_G |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{si } p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{a > 0 \mid \mu\{g \in G \mid |f(g)| > a\} = 0\} =$$

$$= \inf\{a > 0 \mid \text{existe } A \subset G \text{ de medida nula con } |f(g)| \leq a \text{ para todo } g \in G - A\}$$

finita, por el subespacio de funciones que se anulan fuera de algún conjunto de medida nula. Sabemos que $L^2(G)$ es de hecho un espacio de Hilbert. Todo esto puede verse con detalle en cualquier referencia estándar, por ejemplo [Rudin, 1986].

Proposición 3.7. *Sea G un grupo localmente compacto con una medida de Haar μ, $1 \leq p < \infty$. Sea $C_c(G)$ el espacio de funciones continuas $G \longrightarrow \mathbb{C}$ de soporte compacto. Entonces la imagen de $C_c(G)$ en $L^p(G)$ es densa.*

Demostración. Sabemos que el espacio de funciones simples, i.e., combinaciones lineales de funciones características $\mathcal{X}_A$ con A medible ($\mathcal{X}_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\mathcal{X}_A(x) = 0$ si $x \neq A$) es denso en el de funciones medibles y así su imagen en $L^p(G)$ es también densa ([Rudin, 1986, Theorem 1.17]). Así pues, es suficiente demostrar que para todo conjunto medible A de medida finita, $\mathcal{X}_A$ está en la clausura de la imagen de $C_c(G)$ en $L^p(G)$. Por la definición 3.1 (e), $\mathcal{X}_A$ es un punto adherente en $L^p(G)$ del conjunto $\{\mathcal{X}_K \mid K \text{ compacto}, \ K \subset A\}$, y así podemos suponer que A es compacto. Sea $\epsilon > 0$. Por la definición 3.1 (d), existe un abierto U, $A \subset U$, tal que $\mu(U - A) < \epsilon^p$. Por el lema de Urysohn (por ejemplo en la versión de [Deitmar and Echterhoff, 2014, Lemma A.8.1]) existe $f \in C_c(G)$ tal que $Im(f) \subset [0,1]$, $f\big|_A = 1$, $f\big|_{G-U} = 0$. Así

$$\|\mathcal{X}_A - f\|_p = \left(\int_{U-A} |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu(U - A)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

□

Lema 3.8. *Sea G un grupo localmente compacto, y sea (X, d) un espacio métrico. Entonces toda aplicación continua $f : G \longrightarrow X$ con soporte compacto es uniformemente continua en el siguiente sentido: para todo $\epsilon > 0$, existe un entorno V de 1 en G tal que para todo $g, h \in G$*

$$gh^{-1} \in V \Rightarrow d(f(g), f(h)) < \epsilon$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y K el soporte de f. Por ser G localmente compacto, podemos tomar un entorno compacto U de 1 en G. Como K y U son compactos, también lo es KU (imagen de $K \times U$ vía la aplicación continua $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longrightarrow xy$). Como f es continua, para cada $g \in G$, existe un entorno U_g de 1, $U_g \subset U$ tal que $h \in gU_g$ implica que $d(f(g), f(h)) < \epsilon$. Sea V_g un entorno de 1 simétrico con $V_g^2 \subset U_g$ (lema 2.6). Al ser KU compacto, existe un recubrimiento finito $g_1 V_{g_1}, \ldots, g_n V_{g_n}$ de KU. Sea $V = V_{g_1} \cap \ldots \cap V_{g_n}$, que es claramente un entorno simétrico de 1. Vamos a ver que para todo $g, h \in G$, $gh^{-1} \in V \Rightarrow d(f(g), f(h)) < 2\epsilon$. Si $h \in KV$, $h \in g_i V_{g_i}$ para algún i y así $g \in hV \subset g_i V_{g_i} V$, con lo cual

$$d(f(g), f(h)) \leq d(f(g), f(g_i)) + d(f(g_i), f(h)) < \epsilon + \epsilon$$

Si $h \notin KV$ (y en particular $h \notin K$), entonces como $gh^{-1} \in V$ y V es simétrico, tenemos que $hg^{-1} \in V$ y así $h \in gV$. Como $h \notin KV$ deducimos que $g \notin K$. Así $g, h \notin K$ (recordemos que el soporte de f es $\overline{\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}}$) y entonces $f(g) = 0 = f(h)$, con lo que $d(f(g), f(h)) = 0 < 2\epsilon$. □

Lema 3.9. *Sea G un grupo localmente compacto con una medida de Haar μ, $f \in L^p(G)$. Sea $g \in G$ y $f_g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_g(h) := f(hg^{-1})$. Entonces $\|f\|_p = \|f_g\|_p$.*

Demostración. Se deduce de que para toda función f medible, $\int_G f_g d\mu = \int_{Gg^{-1}} f d\mu = \int_G f d\mu$. □

Proposición 3.10. *Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar μ, $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(G)$. Para cada $g \in G$, consideremos $f_g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como en el lema 3.9. Entonces la aplicación*

$$G \longrightarrow L^p(G)$$

$$g \longrightarrow f_g$$

es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por el lema 3.7 existe $f' \in C_c(G)$ tal que $\|f' - f\|_p < \epsilon$. Por otra parte, como f' es uniformemente continua, por el lema 3.8 existe un entorno V de 1 tal que para todo $g \in V$, $|f'(h) - f'(hg^{-1})| < \frac{\epsilon}{\mu(K)^{\frac{1}{p}}}$ para todo h tal que $gh^{-1} \in V$ donde K es el soporte de f', y asi $\|f' - f'_g\|_p = \left(\int_G |f'(h) - f'(hg^{-1})|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$ (denotando $\int_G f(x)dx := \int_G f d\mu$). Finalmente, por el lema 3.9, $\|f'_g - f_g\|_p = \|f' - f\|_p < \epsilon$. Juntando todo,

$$\|f - f_g\|_p \leq \|f - f'\|_p + \|f' - f'_g\|_p + \|f'_g - f_g\|_p < \epsilon + \epsilon + \epsilon$$

para todo $g \in V$, lo que prueba que $g \longrightarrow f_g$ es continua en 1. Por traslación, es decir, gracias a que $f_{g_1} - f_{g_2} = \left(f - f_{g_2 g_1^{-1}} \right)_{g_1}$ y el lema 3.9, obtenemos $\|f_{g_1} - f_{g_2}\|_p < \epsilon$ para todo g_1, g_2 tales que $g_2 g_1^{-1} \in V$, y así $g \longrightarrow f_g$ es uniformemente continua. $\square$

Definición 3.11. Una álgebra sobre $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial complejo $\mathcal{A}$ junto con una aplicación $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, llamada producto o multiplicación, y escrita como $(a, b) \longrightarrow ab$, que es blilinear, i.e., satisface:

$$a(b + c) = ab + ac, \ (a + b)c = ac + bc, \ \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

para $a, b, c \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, y que es asociativa, i.e., se tiene que:

$$a(bc) = (ab)c$$

para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$. La álgebra $\mathcal{A}$ se llama conmutativa si para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $ab = ba$. Una álgebra de Banach es un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{C}$ (una $\mathbb{C}$-álgebra), junto con una norma $\|\cdot\|$, en la cual $\mathcal{A}$ es completo, i.e., $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach donde la norma es submultiplicativa:

$$\|a.\, b\| \leq \|a\|\|b\|$$

En particular, esta desigualdad implica que la multiplicación en $\mathcal{A}$ es una aplicación continua de $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$. Por último, diremos que un elemento $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ tal que $1_{\mathcal{A}} a = a 1_{\mathcal{A}} = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$ se llama unidad de $\mathcal{A}$. Este elemento es único: si $1'_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ es otra unidad

de $\mathcal{A}$ tenemos que $1_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}1'_{\mathcal{A}} = 1'_{\mathcal{A}}$.
Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar μ, $f, g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones medibles. Definimos el *producto de convolución* como la función

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy^{-1})g(y)dy$$

cuando la integral existe.
Con la notación de la proposición 3.10,

$$(f * g)(x) = \int_G f_y(x)g(y)dy$$

Como G es abeliano, $f * g = g * f$.

Teorema 3.12. *Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar μ.*

(a) *Sean $f, g \in L^1(G)$. Entonces $f * g$ existe salvo en un conjunto de medida nula, y define una función en $L^1(G)$. Además, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$.*

(b) *Con este producto, $L^1(G)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa.*

(c) *Si G es discreto, $L^1(G)$ tiene elemento unidad.*

(d) *Si $f \in L^p(G)$, $g \in L^q(G)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $f * g \in C_c(G)$ y $\|f * g\|_G \leq \|f\|_p\|g\|_q$ donde $\|-\|_G$ es la norma del supremo.*

Demostración. (a) La medida $\tilde{\mu}$ en $G \times G$ dada por el teorema de Fubini, que verifica $\tilde{\mu}(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$, es (por el mismo teorema de Fubini) una medida de Haar del grupo localmente compacto $G \times G$ (en toda esta demostración usaremos una versión del teorema de Fubini que se adapte a nuestras hipótesis, por ejemplo la de [Godement, 2015, chapter IX, Section 4, Theorem 19]. Es fácil ver que la aplicación $\alpha : G \times G \longrightarrow G \times G$, $\alpha(x, y) = (y, y^{-1}x)$ es medible, y así la aplicación composición $(f \times g) \circ \alpha$, $(x, y) \longrightarrow f(y)g(y^{-1}x)$, es medible por ser composición de medibles. De nuevo por el teorema de Fubini,

$$\|f * g\|_1 = \int_G |\int_G f(y)g(y^{-1}x)dy|dx \leq \int_G \int_G |f(y)g(y^{-1}x)|dydx =$$

$$= \int_G \int_G |f(y)g(y^{-1}x)|dxdy = \int_G \int_G |f(y)g(x)|dxdy =$$

$$\int_G \int_G |f(y)||g(x)|dxdy = \|f\|_1\|g\|_1$$

(b) Ya sabemos que $L^1(G)$ es un espacio de Banach, por lo que solo queda ver la estructura multiplicativa. La conmutatividad es debida a que G es abeliano como ya fue señalado en la definición 3.11. La distributividad es inmediata. La asociatividad se deduce como sigue:

$$(f*(g*h))(x) = \int_G f(y)(g*h)(y^{-1}x)dy = \int_G \int_G f(y)g(z)h(z^{-1}y^{-1}x)dzdy =$$

$$\int_G \int_G f(y)g(y^{-1}(yz))h((yz)^{-1}x)dzdy = \int_G \int_G f(y)g(y^{-1}(yz))h((yz)^{-1}x)dydz \overset{(1)}{=}$$

$$\int_G \int_G f(y)g(y^{-1}t)h(t^{-1}x)dydt = \int_G (f*g)(t)h(t^{-1}x)dt = ((f*g)*h)(x)$$

donde la igualdad (1) se debe a que para y fijo, la aplicación $G \longrightarrow G$, $z \longrightarrow t := yz$, es biyectiva. Finalmente, la submultiplicatividad ($\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$) ha sido probada en (a).

(c) Si G es discreto, la función $e : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $e(1) = 1$, $e(x) = 0$ para todo $x \in G$, $x \neq 1$, está en $L^1(G)$. Claramente, $f * e = f$ para todo $f \in L^1(G)$. [1]

(d) Por la proposición 3.7, existen sucesiones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ en $C_c(G)$ que convergen a f y a g respectivamente en $L^p(G)$ Y $L^q(G)$. Cada función $f_n * g_n$ está en $C_c(G)$, ya que si K_{f_n} es el soporte de f_n y K_{g_n} es el de g_n, entonces $f_n * g_n$ se anulan fuera de $K_{f_n}K_{g_n}$ ($(f*g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$ y si $x \notin K_{f_n}K_{g_n}$ entonces o bien $y^{-1}x \notin K_{g_n}$ y así $g(y^{-1}x) = 0$, o bien $y^{-1}x \in K_{g_n}$ y entonces $x \in yK_{g_n}$, pero como $x \notin K_{f_n}K_{g_n}$ obtenemos que $y \notin K_{f_n}$ y así $f(y) = 0$) que es compacto (imagen de $K_{f_n} \times K_{g_n}$ mediante $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longrightarrow xy$), y así el soporte de $f_n * g_n$ es compacto al estar contenido en un compacto. La desigualdad de Hölder [Rudin, 1986, Theorem 3.5.(1)] nos da que $f_n * g_n$ converge a $f * g$ uniformemente (y así $f * g \in C_c(G)$) y la desigualdad enunciada.

□

[1] Cuando G es un grupo discreto, consideraremos la medida de Haar μ normalizada de forma que la medida de cualquier punto sea 1. Con esta convención, es claro que $f * e = f$.

Capítulo 4

Topología del grupo dual de un grupo localmente compacto

Definición 4.1. Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa. Definiremos $\Delta_{\mathcal{A}}$ como el espacio topológico de los homomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras continuos no nulos $m : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ (cuando $\mathcal{A}$ tiene unidad todo homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras es no nulo), con la topología como subespacio de $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ con la topología de la convergencia puntual (definición 1.1; ver también la proposición 1.14).

Lema 4.2. *Sea $m \in \Delta_{\mathcal{A}}$. Entonces $\|m\|_{op} \leq 1$.*

Demostración. Recordemos que $\|m\|_{op} := \underset{0 \neq a \in \mathcal{A}}{sup} \frac{|m(a)|}{\|a\|}$. Supongamos primero que $\mathcal{A}$ tiene unidad. Si existe $0 \neq a \in \mathcal{A}$ tal que $|m(a)| > \|a\|$, entonces $\|m(a)^{-1}a\| < 1$ y así $1 - m(a)^{-1}a$ tiene inverso en $\mathcal{A}$ al ser este completo (su inverso es $\sum\limits_{n \geq 0}(m(a)^{-1}a)^n$). Por lo tanto, $m(a) \cdot 1 - a = m(a)(1 - m(a)^{-1}a)$ es una unidad en $\mathcal{A}$ (ya que $m(a)$ es unidad en $\mathbb{C}$, pues $|m(a)| > \|a\| \neq 0$ y así $m(a) \neq 0$). Como m es un homomorfismo, $m(m(a) \cdot 1 - a)$ es unidad en $\mathbb{C}$. Pero esto es imposible porque $m(m(a) \cdot 1 - a) = m(a)m(1) - m(a) = 0$. Si $\mathcal{A}$ no tiene unidad, consideramos la $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa con unidad $\mathcal{A}^e := \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$, donde la suma es componente a componente, el producto $(a, z)(a', z') := (aa' + za' + z'a, zz')$, y la norma $\|(a, z)\| := \|a\| + |z|$ (la unidad es $(0, 1)$). Es fácil ver que el resultado es cierto para $\mathcal{A}$ si y solo si lo es para $\mathcal{A}^e$ (m se extiende a $\mathcal{A}^e$ mediante $m^e(a, z) = m(a) + z$ y $m = m^e\big|_{\mathcal{A}}$, y así $\|m^e\|_{op} \leq 1 \Rightarrow \|m\|_{op} \leq 1$). □

Lema 4.3. *La "bola cerrada de radio 1"*

$$B := \{f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ aplicación continua y } \|f\|_{op} \leq 1\}$$

es compacto Hausdorff con la topología de la convergencia puntual.

Demostración. $|f(a)| \leq \|a\|$ para todo $f \in B$, $a \in \mathcal{A}$, ya que $\|f\|_{op} \leq 1$. Definimos entonces una aplicación inyectiva

$$B \longrightarrow \prod_{a \in \mathcal{A}} D$$

$$f \longrightarrow \left(\frac{f(a)}{\|a\|} \right)_{a \in \mathcal{A}}$$

donde $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ es la bola cerrada de radio 1 en $\mathbb{C}$. Como $\prod_{a \in \mathcal{A}} D$ es Hausdorff y compacto por el teorema de Tychonoff, es suficiente demostrar que la imagen de B es cerrado en $\prod_{a \in \mathcal{A}} D$ (nótese que la topología en B es la inducida por la de $\prod_{a \in \mathcal{A}} D$, por la definición 1.1). Como

$$B = \{(x_a)_a \in \prod_{a \in \mathcal{A}} D \mid x_a + x_b = x_{a+b},\ x_{za} = z \cdot x_a, \forall a, b \in \mathcal{A}, \forall z \in \mathbb{C}\}$$

vemos que B es la intersección de cerrados en $\prod_{a \in \mathcal{A}} D$. □

Teorema 4.4. *$\Delta_{\mathcal{A}}$ es un espacio Hausdorff localmente compacto. Si $\mathcal{A}$ tiene unidad, $\Delta_{\mathcal{A}}$ es compacto.*

Demostración. Con la notación del lema 4.3, $\Delta_{\mathcal{A}} \subset B$ y así $\Delta_{\mathcal{A}}$ es Hausdorff, y $\overline{\Delta}_{\mathcal{A}}$ compacto. Entonces es suficiente demostrar que $\overline{\Delta}_{\mathcal{A}} = \Delta_{\mathcal{A}}$ o que $\overline{\Delta}_{\mathcal{A}} = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \{0\}$. Si $\{m_t\}_t$ es una red en $\Delta_{\mathcal{A}}$ que converge a $f \in B$, tenemos por la proposición 1.14, que $f(ab) = \varinjlim m_t(ab) = (\varinjlim m_t(a))(\varinjlim m_t(b)) = f(a)f(b)$, y así f es un homomorfismo de álgebras, es decir, $f \in \Delta_{\mathcal{A}}$ o $f = 0$ (Nótese que f es continua ya que $f \in B$). Finalmente, si $\mathcal{A}$ tiene unidad, $f(1) = 1$ y así el caso $f = 0$ no ocurre, con lo cual $\Delta_{\mathcal{A}} = \overline{\Delta}_{\mathcal{A}}$ es compacto. □

Lema 4.5. *Sea $\phi : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ un homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras de Banach conmutativas (en particular continuo), tal que $m \circ \phi \neq 0$ para todo $m \in \Delta_{\mathcal{A}_2}$. Entonces la aplicación inducida*

$$\phi^* : \Delta_{A_2} \longrightarrow \Delta_{A_1}\ ,\ \phi^*(m) = m \circ \phi$$

verifica:

(a) *ϕ^* es continua.*

(b) *Si ϕ^* es biyectiva, su inversa es continua.*

Demostración. (a) La continuidad se deduce de que si $\{m_t\}_t$ es una red en $\Delta_{\mathcal{A}_2}$ convergente, entonces la red $\{m_t \circ \phi\}_t$ en $\Delta_{\mathcal{A}_1}$ es convergente por la proposición 1.14.

(b) Consideremos $\mathcal{A}_1^e = \mathcal{A}_1 \oplus \mathbb{C}$ como en la demostración del lema 4.2. Es fácil comprobar que $\Delta_{\mathcal{A}_1^e} = \{m^e \mid m \in \Delta_{\mathcal{A}_1}\} \cup \{m^\infty\}$ donde $m^\infty(a,z) := z$, y usando el teorema 4.4, que como espacio topológico $\Delta_{\mathcal{A}_1^e}$ es la compactificación de Alexandroff (compactificación por un punto) del espacio localmente compacto Hausdorff $\Delta_{\mathcal{A}_1}$, y similarmente con $\mathcal{A}_2$. La extensión canónica de ϕ^*

$$(\phi^*)^e = \Delta_{\mathcal{A}_2^e} \longrightarrow \Delta_{\mathcal{A}_1^e}$$

definida por $(\phi^*)^e(m^\infty) = m^\infty$, es claramente biyectiva por serlo ϕ^* y continua por ser igual a la aplicación $(\phi^e)^*$ asociada a $\phi^e = \mathcal{A}_1^e \longrightarrow \mathcal{A}_2^e$, $\phi^e(a,z) = (\phi(a), z)$. Como toda aplicación biyectiva y continua de un espacio compacto en un espacio Hausdorff es un homeomorfismo [Willard, Theorem 17.14], obtenemos que $(\phi^*)^e$ es un homeomorfismo, y así $\phi^* = (\phi^*)^e|_{\Delta_{\mathcal{A}_2}}$ es un homeomorfismo.

□

Definición 4.6. Sea G un grupo localmente compacto, $L^1(G)$ la $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa correspondiente. Definimos la transformada de Fourier de $f \in L^1(G)$ como la función

$$\hat{f} : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\mathcal{X}) = \int_G f(x)\overline{\mathcal{X}(x)}dx$$

Teorema 4.7. *Existe un homeomorfismo*

$$d : \widehat{G} \longrightarrow \Delta_{L^1(G)}$$

$$\mathcal{X} \longrightarrow \; d_{\mathcal{X}} : L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$d_{\mathcal{X}}(f) = \hat{f}(\mathcal{X})$$

Demostración. Veamos primero que d está bien definida (para ello $d_{\mathcal{X}}$ debe ser un homomorfismo continuo de $\mathbb{C}$-álgebras). La continuidad de $d_{\mathcal{X}}$ se deduce de la definición de integral. Es claro que $d_{\mathcal{X}}$ es $\mathbb{C}$-lineal. Veamos que $d_{\mathcal{X}}(f * g) = d_{\mathcal{X}}(f)d_{\mathcal{X}}(g)$, es decir, que $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

$$\widehat{f * g}(\mathcal{X}) = \int_G (f * g)(x)\overline{\mathcal{X}(x)}dx = \int_G \int_G f(y)g(y^{-1}x)\overline{\mathcal{X}(x)}dydx =$$

$$= \int_G f(y)\Big(\int_G g(y^{-1}x)\overline{\mathcal{X}(x)}dx\Big)dy = \int_G \int_G f(y)\overline{\mathcal{X}(y)}\mathcal{X}(y)g(y^{-1}x)\overline{\mathcal{X}(x)}dxdy =$$

$$= \int_G \int_G f(y)\overline{\mathcal{X}(y)}g(y^{-1}x)\overline{\mathcal{X}(y^{-1}x)}dxdy = \int_G f(y)\overline{\mathcal{X}(y)}dy \int_G g(t)\overline{\mathcal{X}(t)}dt =$$

$$= \hat{f}(\mathcal{X})\cdot \hat{g}(\mathcal{X})$$

Finalmente, $d_{\mathcal{X}}$ es no nula, ya que definiendo $f \in L^1(G)$ igual a $\mathcal{X}$ en un compacto K de G de medida no nula e igual a 0 fuera de un abierto U que contenga a K y tal que $\mu(U-K)$ sea pequeño (existe por el lema de Urysohn [Deitmar and Echterhoff, 2014, Lemma A.8.1]), tenemos $f \in L^1(G)$ y

$$d_{\mathcal{X}}(f) = \int_K 1\ dx + \int_{U-K} f(x)\overline{\mathcal{X}(x)}dx \neq 0$$

La inyectividad es fácil: si $d_{\mathcal{X}} = d_{\mathcal{X}'}$ entonces $\int_G f(x)\overline{(\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}'(x))}dx = 0$ para todo $f \in L^1(G)$ y así para todo $f \in C_c(G)$, con lo cual $\mathcal{X}(x) = \mathcal{X}'(x)$ para todo x en el complementario de un conjunto de medida nula. Como $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}'$ son continuas, $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$. Veamos la sobreyectividad. Sea $h : L^1(G) \longrightarrow \mathbb{C}$, $h \neq 0$, un homomorfismo continuo. Como h es acotado de norma ≤ 1 (lema 4.2) tenemos que existe $\phi \in L^\infty(G)$ con $\|\phi\|_\infty \leq 1$ tal que

$$h(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx$$

para todo $f \in L^1(G)$ (esto es consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym [Rudin, 1986, Theorem 6.16], cuyas hipótesis se satisfacen por ser G un grupo localmente compacto [Rudin, 1990, último párrafo de E10]). Si $f, g \in L^1(G)$, tenemos por ser $h \in \Delta_{L^1(G)}$

$$h(f * g) = h(f)h(g) = \left(\int_G f(y)\phi(y)dy\right)h(g) = \int_G f(y)\phi(y)h(g)dy$$

pero por otra parte

$$h(f * g) = \int_G (f * g)(x)\phi(x)dx = \int_G \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy\phi(x)dx =$$

$$= \int_G f(y)\left(\int_G g(y^{-1}x)\phi(x)dx\right)dy = \int_G f(y)h(g_y)dy$$

donde g_y es la función de la proposición 3.10. Así pues, $\phi(y)h(g) = h(g_y)$ para todo $y \in G$ salvo un conjunto de medida nula. Por la proposición 3.10, $y \longrightarrow g_y$ es continua, y como h también lo es, tenemos que $\phi()h(g) : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $y \longrightarrow \phi(y)h(g)$ es continua para todo $g \in L^1(G)$. Sea $g \in L^1(G)$ tal que $h(g) \neq 0$. Entonces ϕ es continua salvo en un conjunto de medida nula. Podemos entonces cambiar ϕ por una función continua de forma que no afecte a la igualdad

$$h(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx$$

(proposición 3.7) y, entonces, la igualdad

$$\phi(y)h(g) = h(g_y)$$

es cierta para todo $y \in G$. En particualar

$$\phi(xy)h(g) = h(g_{xy}) = h((g_x)_y) = \phi(y)h(g_x) = \phi(y)\phi(x)h(g)$$

con lo que

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

Finalmente, como $|\phi(x)| \leq 1$ y $1 = |1| = |\phi(x)\phi(x^{-1})| = |\phi(x)||\phi(x^{-1})|$, tenemos que $|\phi(x)| = 1$, es decir, $\phi \in \widehat{G}$. Claramente $d_{\overline{\phi}} = h$ por definición de ϕ.

Veamos ahora la continuidad de d. Sea $\{\mathcal{X}_i\} \longrightarrow \mathcal{X}$ una red convergente en $\widehat{G}$ y veamos que para todo $\epsilon > 0$ y todo $f \in L^1(G)$, existe n tal que $|\hat{f}(\mathcal{X}_i) - \hat{f}(\mathcal{X})| < \epsilon$ para todo $i \geq n$. Por la proposición 3.7, existe $g \in C_c(G)$ tal que $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Como $\{\mathcal{X}_i\} \longrightarrow \mathcal{X}$ converge uniformemente en el soporte de g, existe n tal que $|\hat{g}(\mathcal{X}_i) - \hat{g}(\mathcal{X})| < \epsilon$ para todo $i \geq n$. Así, para $i \geq n$ tenemos que

$$|\hat{f}(\mathcal{X}_i) - \hat{f}(\mathcal{X})| \leq |\hat{f}(\mathcal{X}_i) - \hat{g}(\mathcal{X}_i)| + |\hat{g}(\mathcal{X}_i) - \hat{g}(\mathcal{X})| + |\hat{g}(\mathcal{X}) - \hat{f}(\mathcal{X})| < \epsilon + \epsilon + \epsilon$$

Para terminar, veamos la continuidad de d^{-1}. Es suficiente probar lo siguiente: para todo $\mathcal{X}' \in \widehat{G}$, todo compacto $K \subset G$ y todo $\epsilon > 0$, existen funciones $f_1, \ldots, f_t \in L^1(G)$ y $\delta > 0$ tales que para todo $\mathcal{X} \in \widehat{G}$ se verifica

$$|\hat{f}_i(\mathcal{X}) - \hat{f}_i(\mathcal{X}')| < \delta \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, t \Rightarrow |\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}'(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in K$. Tenemos que si $f \in L^1(G)$,

$$\hat{f}(\mathcal{X}) - \hat{f}(\mathcal{X}') = \int_G f(x)\overline{(\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}'(x))}dx = \int_G f(x)\overline{\mathcal{X}'(x)}(\overline{\mathcal{X}(x)}\mathcal{X}'(x) - 1)dx =$$

$$= \widehat{f\overline{\mathcal{X}'}}(\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}'}) - \widehat{f\overline{\mathcal{X}'}}(1)$$

Por lo tanto, podemos suponer $\mathcal{X}' = 1$. Podemos tomar $f \in L^1(G)$ tal que $\int_G f d\mu = 1$, es decir, $\hat{f}(1) = 1$. Por la proposicion 3.10 existe un entorno U de 1 tal que $\|f_y - f\|_1 < \epsilon$ para todo $y \in U$. Sean $x_1, \ldots, x_n \in G$ tales que $K \subset x_1U \cup x_2U \cup \ldots \cup x_nU$. Supongamos que $\mathcal{X} \in \widehat{G}$ es tal que $|\hat{f}(\mathcal{X}) - 1| < \epsilon$ y $|\hat{f}_{x_i}(\mathcal{X}) - 1| < \epsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$, y vamos a ver que $|\mathcal{X}(x) - 1| < 3\epsilon$ para todo $x \in K$. Sea $x \in K$ y sea i tal que $x \in x_iU$. Tomemos $y \in U$ tal que $x = x_iy$. Tenemos

$$|\mathcal{X}(x) - 1| = |\overline{\mathcal{X}}(x) - 1| \leq |\overline{\mathcal{X}}(x) - \overline{\mathcal{X}(x)}\hat{f}(\mathcal{X})| + |\overline{\mathcal{X}(x)}\hat{f}(\mathcal{X}) - \hat{f}_{x_i}(\mathcal{X})| + |\hat{f}_{x_i}(\mathcal{X}) - 1| =$$

$$|\overline{\mathcal{X}}(x)||1 - \hat{f}(\mathcal{X})| + |\hat{f}_x(\mathcal{X}) - \hat{f}_{x_i}(\mathcal{X})| + |\hat{f}_{x_i}(\mathcal{X}) - 1|$$

Los términos de los extremos son menores que ϵ. Veamos que el del centro también lo es:

$$|\hat{f}_x(\mathcal{X}) - \hat{f}_{x_i}(\mathcal{X})| \overset{(1)}{\leq} \|f_x - f_{x_i}\|_1 = \|(f_y - f)_{x_i}\|_1 \overset{(2)}{=} \|f_y - f\|_1 < \epsilon$$

donde (1) se deduce de que $|\mathcal{X}(t)| = 1$, y (2) del lema 3.9. $\square$

Observación 4.8. El teorema 4.7 y el teorema 4.4 proporcionan otra demostración del teorema 2.19.

Corolario 4.9. *Sea G un grupo localmente compacto con medida de Haar μ, $f \in L^1(G)$. Entonces $\hat{f} : \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un función continua.*

Demostración. Con la notación del teorema 4.7, se deduce de que d es continua, de que la aplicación evaluación es continua (proposición 1.14 (d)), y de que $\hat{f}$ es la composición de ambas. $\square$

Definición 4.10. Sean $\phi, \psi \in L^2(G)$. Consideremos el producto

$$<\phi, \psi> := \int_G \phi\overline{\psi} d\mu$$

del espacio de Hilbert $L^2(G)$. Con la notación del lema 3.9 (y usando ese lema) tenemos

$$|<\phi_x, \psi>| \leq \|\phi_x\|_2 \|\psi\|_2 = \|\phi\|_2 \|\psi\|_2$$

para todo $x \in G$. Así, para $\phi \in L^2(G)$, $f \in L^1(G)$, la aplicación (anti)lineal

$$w : L^2(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\psi \longrightarrow \int_G f(x) <\phi_x, \psi> dx$$

es acotada (en el sentido de que $\|w\|_{op} = \underset{\psi \neq 0}{sup} \frac{|\int_G f(x)<\phi_x,\psi>dx|}{\|\psi\|_2} < \infty$), y por lo tanto es continua. Así existe un único elemento $L(f)\phi \in L^2(G)$ tal que

$$\int_G f(x) <\phi_x, \psi> dx = <L(f)\phi, \psi>$$

(toda aplicacion lineal continua de un espacio de Hilbert en $\mathbb{C}$ es el producto por un elemento [Rudin, Real and Complex Analysis, Theorem 4.12]).

Lema 4.11. $\|L(f)\phi\|_2 \leq \|f\|_1 \|\phi\|_2$, *y así la aplicación*

$$L^2(G) \longrightarrow L^2(G)$$

$$\phi \longrightarrow L(f)\phi$$

es acotada (en el sentido anterior) y por lo tanto continua.

Demostración. Por lo visto anteriormente,

$$|< L(f)\phi, \psi >| \leq \|f\|_1 \|\phi\|_2 \|\psi\|_2$$

y así

$$\|L(f)\phi\|_2^2 = |< L(f)\phi, L(f)\phi >| \leq \|f\|_1 \|\phi\|_2 \|L(f)\phi\|_2$$

con lo que

$$\|L(f)\phi\|_2 \leq \|f\|_1 \|\phi\|_2$$

$\square$

Lema 4.12. *Sea $f \in L^1(G)$, $\phi \in L^1(G) \cap L^2(G)$. Entonces $L(f)\phi = f * \phi$.*

Demostración. Usando la proposición 3.7, se deduce de que para todo $\psi \in C_c(G)$ tenemos

$$< L(f)\phi, \psi >= \int_G f(x) < \phi_x, \psi > dx = \int_G f(x) \int_G \phi(yx^{-1})\overline{\psi(y)}dydx =$$

$$\int_G \int_G f(x)\phi(yx^{-1})dx\overline{\psi(y)}dy = \int_G (f * \phi)(y)\overline{\psi}(y)dy =< f * \phi, \psi >$$

donde las hipótesis aseguran la existencia de las integrales. $\square$

Definición 4.13. Una involución en una $\mathbb{C}$-álgebra $\mathcal{A}$ es una aplicación $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $a \longrightarrow a^*$ que verifica:

(a) $(a + b)^* = a^* + b^*$

(b) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

(c) $(ab)^* = b^* a^*$

Una $*$-álgebra de Banach es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach $\mathcal{A}$ con una involución tal que $\|a^*\| = \|a\|$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Una C^*-álgebra es una $*$-álgebra de Banach que además verifica $\|a^* a\| = \|a\|^2$ (en general, en una $*$-álgebra de Banach tendríamos solo $\|a^* a\| \leq \|a^*\| \|a\| = \|a\|^2$).

Ejemplo 4.14. (a) Sea $\mathcal{B}(L^2(G))$ el espacio de aplicaciones lineales acotadas de $L^2(G)$ en $L^2(G)$. Entonces $\mathcal{B}(L^2(G))$ es una C^*-álgebra de Banach con producto la composición, norma $\|T\|_{op} := \underset{\phi \neq 0}{sup} \frac{\|T(\phi)\|_2}{\|\phi\|_2}$, y con involución $T \longrightarrow T^*$ determinada por la igualdad

$$< T\phi, \psi >=< \phi, T^*\psi >$$

para todo $\phi, \psi \in L^2(G)$ (ver detalles en [Deitmar and Echterhoff, 2014, Example 2.6.1]).

(b) $L^1(G)$ es una $*$-álgbera de Banach con involución definida para $f \in L^1(G)$ por

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

para $x \in G$ (ver detalles en [Deitmar and Echterhoff, 2014, Proposition 2.6.2]).

Sin embargo, $L^1(G)$ no es una C^*-álgebra. Solucionaremos esto considerando a veces, en vez de $L^1(G)$, su imagen por la aplicación de la siguiente proposición, que como veremos en el teorema 4.16, no cambia $L^1(G)$ en lo que nos afecta.

Proposición 4.15. *La aplicación (notación de la definición* 4.10.*)*

$$L : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(G))$$

$$f \longrightarrow L(f)$$

es un homomorfismo continuo e inyectivo de $*$-álgebras de Banach.

Demostración. La aplicación es claramente lineal. Además $\|L(f)\|_{op} \leq \|f\|_1$ y así es continua. Veamos que conserva el producto. Sean $f, g \in L^1(G)$. Tenemos por el lema 4.12

$$L(f * g)\phi = (f * g) * \phi = f * (g * \phi) = (L(f) \circ L(g))\phi$$

para $\phi \in L^1(G) \cap L^2(G)$, y así en particular, para $\phi \in C_c(G)$. De la proposición 3.7 y la continuidad, deducimos que $L(f * g) = L(f)L(g)$. Veamos que conserva la involución. Por continuidad de nuevo, para ver que $L(f^*) = L(f)^*$, es suficiente ver que $< f * \phi, \psi > = < \phi, f^* * \psi >$ para todo $\phi, \psi \in C_c(G)$. Pero

$$< f * \phi, \psi > = \int_G (f * \phi)(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_G \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)\overline{\psi(x)}dydx =$$

$$\int_G \int_G f(y)\phi(y^{-1}x)\overline{\psi(x)}dxdy = \int_G \int_G f(y)\phi(x)\overline{\psi(yx)}dxdy =$$

$$= \int_G \int_G \phi(x)f(y^{-1})\overline{\psi(y^{-1}x)}dydx = \int_G \int_G \phi(x)\overline{\overline{f(y^{-1})}\psi(y^{-1}x)}dydx =$$

$$= \int_G \phi(x)\overline{(f^* * \psi)}(x)dx = < \phi, f^* * \psi >$$

Finalmente, para ver la inyectividad, si $f \in L^1(G)$ verifica $L(f) = 0$, entonces $f * \phi = 0$ para todo $\phi \in C_c(G)$ y así podemos deducir fácilmente de lema de Urysohn que $f = 0$ (ver [Deitmar and Echterhoff, 2014, Lemmas 1.6.5, 1.6.6]). □

Teorema 4.16. *Sea $C^*(G)$ la clausura de la imagen de la aplicación $L : L^1(G) \longrightarrow \mathcal{B}(L^2(G))$ de la proposición* 4.15*. Entonces la aplicación*

$$L^* : \Delta_{C^*(G)} \longrightarrow \Delta_{L^1(G)}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Por definición de $C^*(G)$, la imagen de L es densa en $C^*(G)$ y así

(a) la aplicación está bien definida, es decir, si $L(m) = 0$, i.e., $m \circ L = 0$, entonces $m = 0$.

(b) $L^*(m_1) = L^*(m_2)$, tenemos $m_1 = m_2$, y así L^* es inyectiva.

Del lema 4.5 deducimos entonces que solo tenemos que probar la sobreyectividad de L^*. Esto se va a deducir del teorema 4.7: si $m \in \Delta_{L^1(G)}$, existe $\mathcal{X} \in \widehat{G}$ tal que $m = d_{\mathcal{X}}$ (con la notación del teorema 4.7), es decir $m(f) = \hat{f}(\mathcal{X})$ para todo $f \in L^1(G)$. Se trata entonces de comprobar que m es continua en la norma de $\mathcal{B}(L^2(G))$ (pensando $L^1(G)$ dentro de $C^*(G) \subset \mathcal{B}(L^2(G))$ mediante L) y así tendrá una única extensión a $C^*(G)$. Esta comprobación puede verse en la demostración de [Deitmar and Echterhoff, 2014, Theorem 3.3.3]. □

Definición 4.17. Si $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa, $a \in \mathcal{A}$, se define

$$\hat{a} : \Delta_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$m \longrightarrow \hat{a}(m) := m(a)$$

que es un homomorfismo de álgebras de $\mathcal{A}$ en el álgebra de funciones continuas $C(\Delta_{\mathcal{A}})$ de Δ_A en $\mathbb{C}$.

Observación 4.18. El teorema de Gelfand-Naimark, dice que si $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra entonces la aplicación anterior se factoriza mediante un isomorfismo de álgebras que conserva la norma y la involución

$$\mathcal{A} \longrightarrow C_0(\Delta_{\mathcal{A}})$$

$$a \longrightarrow \hat{a}$$

(Si X es un espacio topológico, $C_0(X) = \{f \in C(X) \mid \text{para todo } \epsilon > 0 \text{ existe } K \subset X \text{ compacto con } |f(x)| < \epsilon \ \forall x \notin K\}$). La demostración de este toerema, que usa el teorema de Stone-Weierstrass, puede verse en [Deitmar and Echterhoff, 2014, Theorem 2.6.7].

Corolario 4.19. *Con la notación del teorema* 4.16*, tenemos un isomorfismo de álgebras*

$$C^*(G) \simeq C_0(\hat{G})$$

que conserva la norma y la involución.

Demostración. Como $\mathcal{B}(L^2(G))$ es una C^*-álgebra, $C^*(G)$ también lo es (proposición 4.15). Por el teorema 4.16 tenemos un homeomorfismo

$$\Delta_{C^*(G)} \xrightarrow{\simeq} \Delta_{L^1(G)}$$

Por el teorema 4.7 tenemos un homeomorfismo

$$\widehat{G} \xrightarrow{\simeq} \Delta_{L^1(G)}$$

y entonces un homeomorfismo

$$\widehat{G} \simeq \Delta_{C^*(G)}$$

con lo cual un isomorfismo

$$C_0(\Delta_{C^*(G)}) \simeq C_0(\widehat{G})$$

Pero por el teorema de Gelfand-Naimark (observación 4.18), tenemos un isomorfismo

$$C^*(G) \simeq C_0(\Delta_{C^*(G)})$$

Los dos útlimos isomorfismos nos dan el isomorfismo buscado. □

Corolario 4.20. *La transformada de Fourier*

$$L^1(G) \longrightarrow C_0(\widehat{G})$$

$$f \longrightarrow \hat{f}$$

es inyectiva

Demostración. Por el corolario 4.9, $\hat{f} \in C(\widehat{G})$. Por el teorema 4.7, $\widehat{G} \simeq \Delta_{L^1(G)}$. Por la demostración del teorema 4.4, el compacto $\overline{\Delta_{L^1(G)}}$ (notación de dicho teorema) es igual a $\Delta_{L^1(G)}$ en cuyo caso es compacto y $\hat{f} \in C_0(\widehat{G})$, o es igual a $\Delta_{L^1(G)} \cup \{0\}$; como $\hat{f}$ se anula en 0 (definiendo $\hat{f}$ de forma obvia), tenemos $\hat{f} \in C_0(G)$ también en este caso. En la demostración del corolario 4.19 aparecieron los isomorfismos

$$\widehat{G} \simeq \Delta_{L^1(G)} \simeq \Delta_{C^*(G)}$$

que muestran que la transformada de Fourier es la composición

$$L^1(G) \longrightarrow C^*(G) \longrightarrow C_0(\widehat{G})$$

donde la primera aplicación es inyectiva por la proposición 4.15, y la segunda es un isomorfismo por el corolario 4.19. □

Bibliografía

[Bourbaki, 2003] Bourbaki, N. (2003). *Algèbre II.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg.

[Cartan and Gudement, 1947] Cartan, H. y Gudement, R. (1947). Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 64:79–99.

[Deitmar and Echterhoff, 2014] Deitmar, A. y Echterhoff, S. (2014). *Principles of Harmonic Analysis.* Springer, New York, second edition.

[Godement, 2015] Godement, R. (2015). *Analysis IV.* Springer, Cham, Switzerland.

[Haar, 1933] Haar, A. (1933). Der maassbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen. *Annals of Mathematics*, 34(II):147–.

[Morris, 1977] Morris, S. A. (1977). *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups.* Cambridge University Press.

[Poitou, 1967] Poitou, G. (1967). *Cohomologie Galoisienne des modules finis.* Dunod, Paris.

[Rudin, 1986] Rudin, W. (1986). *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Education, third edition.

[Rudin, 1990] Rudin, W. (1990). *Fourier Analysis on Groups.* John Wiley and Sons.

[Tate, 1950] Tate, J. (1950). *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions.* PhD thesis, Princeton. Appeared in "Algebraic Number Theory", edited by Cassels and Frölich (Academic Press, 1967).

[Weil, 1940] Weil, A. (1940). *L' intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Gauthiers-Villars, Paris.