



ESCOLA DE DOUTORAMENTO  
INTERNACIONAL DA USC

Iago  
Isasi Freire

Tese de doutoramento

APLICACIÓN DO MÉTODO  
DAS SERIES DE TAYLOR AO  
ESTUDO DO MOVIMENTO  
ORBITAL E ROTACIONAL DO  
SATÉLITE ARTIFICIAL

Santiago de Compostela, 2022

Programa de Doutoramento en Matemáticas



D./Dna. **Iago Isasi Freire**

Título da tese: **APLICACIÓN DO MÉTODO DAS SERIES DE TAYLOR AO ESTUDO DO MOVEMENTO ORBITAL E ROTACIONAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL**

Presento a miña tese, seguindo o procedemento axeitado ao Regulamento, e declaro que:

- 1) A tese abarca os resultados da elaboración do meu traballo.
- 2) De ser o caso, na tese faise referencia ás colaboracións que tivo este traballo.
- 3) Confirmo que a tese non incorre en ningún tipo de plaxio doutros autores nin de traballos presentados por min para a obtención doutros títulos.
- 4) A tese é a versión definitiva presentada para a súa defensa e coincide a versión impresa coa presentada en formato electrónico

E comprométome a presentar o Compromiso Documental de Supervisión no caso de que o orixinal non estea na Escola.

En **Santiago de Compostela, 01 de Abril de 2022.**

**Sinatura electrónica**



D./Dna. **José Ángel Docobo Durántez**

En condición de: **Titor/a e director/a**

Título da tese: **Aplicación do método das series de Taylor ao estudo do movemento orbital e rotacional do satélite artificial**

INFORMA:

Que a presente tese, correspóndese co traballo realizado por D/Dna Iago Isasi Freire, baixo a miña dirección/titorización, e autorizo a súa presentación, considerando que reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC, e que como director/titor desta non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei 40/2015.

En **Santiago de Compostela, 28 de Marzo de 2022**

**Sinatura electrónica**



D./Dna. **Alberto José Abad Medina**

En condición de: **Titor/a**

Título da tese: **Aplicación do método das series de Taylor ao estudo do movemento orbital e rotacional do satélite artificial**

INFORMA:

Que a presente tese, correspóndese co traballo realizado por D/Dna Iago Isasi Freire, baixo a miña dirección/titorización, e autorizo a súa presentación, considerando que reúne os requisitos esixidos no Regulamento de Estudos de Doutoramento da USC, e que como director/titor desta non incorre nas causas de abstención establecidas na Lei 40/2015.

En **Santiago de Compostela, 28 de Marzo de 2022**

**Sinatura electrónica**





OBSERVATORIO ASTRONÓMICO RAMÓN MARÍA ALLER

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

---

**APLICACIÓN DO MÉTODO DAS  
SERIES DE TAYLOR AO ESTUDO DO  
MOVEMENTO ORBITAL E  
ROTACIONAL DO SATÉLITE  
ARTIFICIAL**

---

Iago Isasi Freire

SANTIAGO DE COMPOSTELA, 2022





A Susana  
A Artai, Antón, Aldán e André

Aos meus pais e irmáns



# Agradecementos

O meu máis sincero agradecemento aos meus directores os profesores José Ángel Docobo Durántez e Alberto Abad Medina das universidades de Santiago de Compostela (*USC*) e Zaragoza (*UZ*). É unha honra formar parte dos doutorandos de tan sobranceiros persoeiros nos seus respectivos eidos como ambos os dous o son. Agradézolles moi fondamente a súa guía no desenvolvemento da Tese, non só dende o punto de vista académico, mais tamén formal. Igualmente é preciso salientar a súa inmensa paciencia e o compromiso que tiveron comigo e con esta Tese, con especial mención á súa dedicación e a súa total dispoñibilidade.

Esta Tese foi realizada á vez no *Observatorio Astronómico Ramón María Aller* da *USC* e no *Instituto de Matemáticas y Aplicaciones* da *UZ* co financiamento dos seguintes proxectos

- **AYA2016-80938-P**: Estudo de binarias pechadas de especial interese astrofísico e dinámico na era Gaia. Financiado polo *Ministerio de Economía y Competitividad*.
- **ED431B 2020/38**: Axudas para grupos con potencial de crecemento. Financiado de xeito conxunto pola *Consellería de Cultura, Educación e Universidade* e da *Vicepresidencia segunda e Consellería de Economía, Empresa e Innovación* da *Xunta de Galicia*.
- **PID2020-117066GB-I00**: Técnicas de deseño orbital aplicadas ao cálculo de órbitas periódicas e ao deseño de constelacións de satélites. Financiado polo *Ministerio de Ciencia e Innovación*.



# Abstract

The main objective of this research was to use the Taylor Series method to analyze the orbital dynamics of an artificial satellite by creating a novel propagator. Other objectives were also achieved, such as, to obtain extended Lagrange equations that include the rotational movement (which we have called generalized Lagrange equations) and the implementation of a second propagator which, in addition to the orbital motion, also takes into account the rotational movement of the satellite.

The first propagator used the Taylor Series method under a Newtonian formulation to check the orbital motion of an artificial satellite under different conditions. The second used the same method but, in this case, with a Hamiltonian formulation. We designed this study of translational-rotational motion with very heterogeneous initial conditions in different models of artificial satellites.

The Dissertation consists of 5 Chapters in addition to an Introduction and Conclusions. In the **Introduction**, we establish the current situation in terms of not only the orbital movement of the artificial satellite but its rotation as well. We continue with a brief description of each of the Chapters and we end with a summary of the motivations and objectives that led us to undertake this research.

In **Chapter 1**, we describe the orbital motion of the artificial satellite, beginning with the theoretical bases necessary to develop this movement and introducing the Newtonian and the Hamiltonian formulations. Then, we present the main perturbations to which an artificial satellite is subjected: geopotential, attraction of other bodies, solar radiation, and atmospheric drag. We also dedicate a significant part of this Chapter to the description of the analytical, semi-analytical, and numerical methods used to integrate the equations of motion in recent decades. We configure

this section to be followed from a historical point of view, describing the most important methods from their origins in the middle of the last century to the three great groups of numerical methods.

In order to apply the Taylor Series method, we use the technique of automatic differentiation to define a sequential structure of operations that allowed us to establish the function that we have to integrate. In addition, we create an algebra of series to be able to use the Taylor Series in the integrator of the propagators. All of this, which is the core of the propagators and of the Dissertation itself, is described in detail in **Chapter 2**.

With the theoretical base created, we use **Chapter 3** to practically implement what was developed in the previous chapter. With a brief description of what orbital propagators are and how they work, we describe the first of our propagators which we have named PSAT. Much of this chapter is dedicated to describing the implementation in PSAT of the different perturbations considered. We explain in detail how automatic differentiation is managed so that its extrapolation by a user to any other perturbation may be as intuitive as possible. As will be seen, we are able to recreate perturbations or external forces that are, a priori, very complex in a highly versatile propagator with just a few operations.

Rotational motion is discussed in conjunction with orbital motion in **Chapter 4**. Here, we consider it to be necessary to unify the nomenclature that exists in this regard by seeking a unifying criterion, given the diversity of terminology that we encountered while conducting our research. Apart from that question, we establish the Hamiltonian of the artificial satellite roto-translatory problem and particularize it to two cases: a quasi-symmetric satellite and a triaxial one. All of that led us to establish the generalized Lagrange equations for the first time, that is, the classic Lagrange equations extended also to rotational movement, thus giving rise to a useful system for dealing with rotational-translational movement. Next, we develop them for the case of a quasi-symmetric satellite under the model of the Main Problem. We finish with the implementation of that achieved in another new propagator with a Hamiltonian formulation that we call PSATROT.

**Chapter 5** treats the practical application of PSAT and PSATROT. We begin with a series of initial conditions sufficiently heterogeneous to cover a varied casuistry

in terms of satellite geometries, orbits, orbital parameters, force models, rotation velocity... With this, we create a wide set of simulations that allow us to generalize, to some extent, what happens under different conditions. We set our new propagators to address different cases, beginning by applying PSAT to 36 models. These will be useful later to check the difference between an orbital movement and its corresponding rotational movement since, in the following simulations, we use the same cases but applied different rotation velocities. With that, and because we also calculate the contribution and influence of the terms that make up the Hamiltonian of a roto-translatory motion, we are able to answer certain questions such as the mutual influence between the orbit and the rotation of the satellite. We finish the Chapter with a complete example of an artificial satellite under realistic conditions considering all of the main perturbations indicated above.

With PSAT it is possible to quickly calculate the ephemeris in different cases, and we are able to discern which perturbations have more influence on the general movement of the artificial satellite and to what degree.

The Dissertation ends with the **Conclusions and future research lines**. We give a detailed account of the novelties that the Dissertation generated. We also consider several options such as the improvement of the propagators in terms of parallel calculation and/or the precision of our simulation of more concrete and specific cases in order to move research forward in the field of rotational movement.

The **Bibliography** section includes articles, Doctoral Dissertations, and classic or historical books (2% of the Bibliography is from the 19th century and 43% from the 20th century), as well as more contemporary material (36% of the entire Bibliography corresponds to the last 10 years).



# Resumen

Esta Tesis Doctoral recoge el trabajo de Iago Isasi Freire bajo la dirección del Dr. José Ángel Docobo Durántez, Catedrático en Astronomía y Director del *Observatorio Astronómico Ramón María Aller* (ORMA) de la *Universidade de Santiago de Compostela*, y del Dr. Alberto José Abad Medina, Profesor Titular del *Área de Física de la Tierra* de la *Universidad de Zaragoza*. El Trabajo se enmarca dentro del *Programa de Doctorado en Matemáticas de la Universidade de Santiago de Compostela*.

El objetivo principal de la Tesis ha sido el empleo del método de series de Taylor para analizar la dinámica orbital del satélite artificial, mediante la creación de un novedoso propagador, aunque en el proceso de elaboración de la misma se han alcanzado otros objetivos como la obtención de las ecuaciones de Lagrange extendidas al movimiento rotacional (que hemos dado en llamar ecuaciones de Lagrange generalizadas), y la implementación de un segundo propagador, que incluye así mismo el movimiento de rotación del satélite.

El primero de los propagadores emplea el método de las series de Taylor bajo una formulación newtoniana y lo hemos empleado para comprobar el movimiento orbital del satélite artificial bajo diferentes condiciones. El segundo utiliza el mismo método, pero en este caso con una formulación hamiltoniana. En esta ocasión lo hemos diseñado para el estudio del movimiento rototraslacional con condiciones iniciales muy heterogéneas en modelos diferentes de satélites artificiales.

Para estructurar los logros conseguido hemos dividido la Tesis Doctoral en 5 capítulos además de una Introducción y las Conclusiones. En la **Introducción** hemos establecido el contexto del que partimos y en el que nos encontramos en relación con la Astrodinámica y más específicamente con el cálculo de efemérides (conocer la posición

en un momento concreto) de un satélite artificial en torno a la Tierra. Sigue con la descripción de la Tesis Doctoral, comentando someramente cada uno de los capítulos de los que se compone, y finalizamos esta parte con las motivaciones y los objetivos que han llevado a prepararla.

El **Capítulo 1** lo destinamos a describir el movimiento orbital del satélite artificial, comenzando con las bases teóricas necesarias para desarrollar este movimiento e introduciendo la formulación newtoniana y hamiltoniana. Posteriormente introducimos las principales perturbaciones a las que un satélite artificial se encuentra sometido: geopotencial, atracción de otros cuerpos, radiación solar y frenaje atmosférico. Dedicamos también una parte muy importante de este Capítulo a describir los métodos analíticos, semianalíticos y numéricos que se han venido utilizando en las últimas décadas para integrar las ecuaciones del movimiento. Hemos configurado esta parte para que se pueda seguir desde un punto de vista histórico describiendo los métodos más importantes desde sus inicios, a mediados del siglo pasado, hasta los tres grandes grupos de métodos numéricos.

Para poder aplicar el método de las series de Taylor hemos necesitado emplear la técnica de la diferenciación automática para definir una estructura secuencial de operaciones que permitan establecer la función que hemos de integrar. Además, hemos tenido que crear un álgebra de series para poder emplear las series de Taylor en el integrador de los propagadores. Todo ello, que será el núcleo de los propagadores y de la propia Tesis Doctoral lo describimos de forma pormenorizada en el **Capítulo 2**.

Con la base teórica creada, hemos empleado el **Capítulo 3** para poner en marcha de forma práctica lo desarrollado en el capítulo anterior. Con una breve descripción sobre lo que son y cómo funcionan los propagadores orbitales, describimos a continuación el primero de nuestros propagadores, que hemos llamado PSAT. Gran parte de este capítulo está dedicado a describir de forma pormenorizada la implementación en PSAT de las diferentes perturbaciones que hemos tenido en cuenta. Explicamos con detalle cómo se gestiona la diferenciación automática, para que su extrapolación a cualquier otra perturbación por parte de un usuario sea lo más intuitiva posible. Como se verá, con apenas unas pocas operaciones seremos capaces de recrear en un propagador muy versátil perturbaciones o fuerzas externas a priori muy complejas.

El movimiento rotacional se estudia conjuntamente con el movimiento orbital en

el **Capítulo 4**. Es en este capítulo en donde hemos creído necesario unificar la nomenclatura que existe al respecto buscando un criterio unificador, habida cuenta de la diversidad de terminología que nos hemos encontrado mientras realizábamos nuestra investigación. Aparte de esta cuestión, hemos establecido el hamiltoniano del problema rototraslatorio del satélite artificial y lo hemos particularizado a dos casos: el de un satélite cuasisimétrico y el de uno triaxial. Todo ello nos ha llevado a establecer por primera vez las ecuaciones de Lagrange generalizadas, es decir las clásicas ecuaciones de Lagrange ampliadas al movimiento rotacional dando así lugar a un sistema útil para afrontar el movimiento rototraslacional. A continuación, las hemos desarrollado para el caso de un satélite cuasisimétrico bajo el modelo del Problema Principal. Hemos finalizado este capítulo con la implementación de lo alcanzado en él en un nuevo propagador con formulación hamiltoniana que hemos denominado PSATROT.

El **Capítulo 5** está dedicado a poner en práctica lo expuesto en los capítulos precedentes empleando PSAT y PSATROT. Partimos de una serie de condiciones iniciales lo suficientemente heterogéneas como para abarcar una variada casuística en cuanto a geometrías de satélites, órbitas, parámetros orbitales, modelos de fuerza, velocidades de rotación... Con ello creamos un conjunto muy amplio de simulaciones que nos permiten generalizar, hasta cierto punto, lo que acontece en diferentes condiciones. Hemos usado nuestros nuevos propagadores para abordar diferentes casos, comenzando por aplicar PSAT a 36 modelos. Éstos nos serán de utilidad posteriormente para comprobar la diferencia entre un movimiento orbital y su correspondiente movimiento rototraslatorio, pues en las simulaciones siguientes hemos empleado los mismos casos, pero aplicándoles diferentes velocidades de rotación. Con ello y debido a que también hemos calculado la contribución e influencia de los términos que componen el hamiltoniano de un movimiento rototraslatorio podremos contestar a ciertas cuestiones como la influencia mutua entre la órbita y la rotación del satélite. Finalizaremos el capítulo con un ejemplo completo de un satélite artificial bajo condiciones realistas teniendo en cuenta todas las principales perturbaciones antes indicadas. Con PSAT podremos calcular de forma rápida efemérides en diferentes casos de forma que podremos ser capaces de discernir en el modelo completo qué perturbaciones tienen efecto sobre el movimiento general del satélite y en qué medida.

Rematamos con las **Conclusiones y trabajos futuros**. Aquí damos cuenta, por una parte, de las novedades que ha generado la Tesis Doctoral, al tiempo que dejamos

varias puertas abiertas como la mejora de los propagadores en cuanto a cálculo paralelo y/o precisión, o la simulación de casos más concretos y específicos que permitan avanzar en el campo del movimiento rototraslatorio. La Memoria se complementa con el apartado de **Bibliografía**, en donde hemos acudido a artículos, Tesis Doctorales y libros clásicos e históricos (un 2% de la bibliografía es del siglo XIX y un 43% del siglo XX); así como a material más actual (un 36% de toda la bibliografía en cualquiera de sus formatos corresponde a los últimos 10 años).

# Resumo

Esta Tese de Doutoramento recolle o traballo de Iago Isasi Freire baixo a dirección do Dr. José Ángel Docobo Durántez, Catedrático en Astronomía e Director do *Observatorio Astronómico Ramón María Aller (ORMA)* da *Universidade de Santiago de Compostela*, e do Dr. Alberto José Abad Medina, Profesor Titular da *Área de Física da Terra* da *Universidad de Zaragoza*. O Traballo encádrase dentro do *Programa de Doutoramento en Matemáticas da Universidade de Santiago de Compostela*.

O obxectivo principal da Tese foi o emprego do método de series de Taylor para analizar a dinámica orbital do satélite artificial, mediante a creación dun novidoso propagador, aínda que no proceso de elaboración da mesma acadáronse outros obxectivos como a obtención das ecuacións de Lagrange estendidas ao movemento rotacional (que chamamos ecuacións de Lagrange xeneralizadas), e a implementación dun segundo propagador, que inclúe asemade o movemento de rotación do satélite.

O primeiro dos propagadores emprega o método das series de Taylor baixo unha formulación newtoniana e empregámolo para comprobar o movemento orbital do satélite artificial baixo diferentes condicións. O segundo utiliza o mesmo método, pero neste caso cunha formulación hamiltoniana. Nesta ocasión deseñámolo para o estudo do movemento rototranslacional con condicións iniciais moi heteroxéneas en exemplos diferentes de satélites artificiais.

Para estruturar os logros acadados dividimos a Tese de Doutoramento en 5 capítulos ademais dun Limiar e as Conclusións. No **Limiar** establecemos o contexto do que partimos e no que nos atopamos en relación coa Astrodinámica e máis especificamente co cálculo de efemérides (coñecer a posición nun momento concreto) dun satélite artificial en torno á Terra. Segue coa descrición da Tese de Doutoramento, comentando

someramente cada un dos capítulos dos que se compón, e finalizamos esta parte coas motivacións e os obxectivos que levaron a preparala.

O **Capítulo 1** destinámolo a describir o movemento orbital do satélite artificial, comezando coas bases teóricas necesarias para desenvolver este movemento e introducindo a formulación newtoniana e hamiltoniana. Posteriormente introducimos as principais perturbacións ás que un satélite artificial se atopa sometido: xeopotencial, atracción doutros corpos, radiación solar e freada atmosférica. Adicamos tamén unha parte moi importante deste Capítulo a describir os métodos analíticos, semianalíticos e numéricos que se veñen empregando nas últimas décadas para integrar as ecuacións do movemento. Configuramos esta parte para que se poda seguir dende un punto de vista histórico describindo os métodos máis importantes dende os seus comezos, a mediados do século pasado, ata os tres grandes grupos de métodos numéricos.

Para aplicar o método da serie de Taylor cómpre utilizar a técnica da diferenciación automática para definir unha estrutura secuencial de operacións que nos permita establecer a función que temos que integrar. Ademais, tivemos que crear unha álgebra de series para poder utilizar as series de Taylor no integrador dos propagadores. Todo isto, que será a cerna dos propagadores e da propia Tese de Doutoramento, descríbese polo miúdo no **Capítulo 2**.

Coa base teórica creada, empregamos o **Capítulo 3** para pór en marcha de forma práctica o desenvolvido no capítulo anterior. Comezamos cunha breve descrición do que son e como funcionan os propagadores orbitais, e describimos a continuación o primeiro dos nosos propagadores, que demos en chamar *PSAT*. Gran parte deste capítulo está dedicado a describir con detalle a implantación en *PSAT* das diferentes perturbacións que tivemos en conta. Explicamos polo miúdo como se xestiona a diferenciación automática, para que a súa extrapolación a calquera outra perturbación por parte dun usuario sexa o máis intuitiva posible. Como se verá, con só unhas poucas operacións poderemos recrear nun propagador moi versátil perturbacións ou forzas externas a priori moi complexas .

O movemento rotacional estúdase en conxunto co movemento orbital no **Capítulo 4**. É neste capítulo onde cremos necesario unificar a nomenclatura existente ao respecto, buscando un criterio unificador dada a diversidade terminolóxica coa que nos atopamos ao realizar a nosa investigación. Ademais desta cuestión, establecemos

o hamiltoniano do problema rototranslatorio do satélite artificial e particularizámolo a dous casos: ao dun satélite cuasi-simétrico e ao dun triaxial. Todo isto levounos a establecer por primeira vez as ecuacións de Lagrange xeneralizadas, é dicir, as clásicas ecuacións de Lagrange estendidas ao movemento de rotación, dando así lugar a un sistema útil para afrontar o movemento rototranslacional. A continuación, desenvolvémolas para o caso dun satélite cuasisimétrico baixo o modelo do Problema Principal. Rematamos este capítulo coa implementación do acadado no mesmo nun novo propagador cunha formulación hamiltoniana que demos en chamar desta volta *PSATROT*.

O **Capítulo 5** adícase a pór en práctica o exposto nos capítulos anteriores mediante *PSAT* e *PSATROT*. Partimos dunha serie de condicións iniciais o suficientemente heteroxéneas como para cubrir unha variada casuística en canto a xeometrías de satélites, órbitas, parámetros orbitais, modelos de forzas, velocidades de rotación... Con isto creamos un amplo conxunto de simulacións que nos permiten xeneralizar, en certa medida, o que acontece en diferentes condicións. Usamos os nosos novos propagadores para abordar diversos casos, comezando pola aplicación de *PSAT* a 36 modelos. Estes serán útiles máis adiante para comprobar a diferenza entre un movemento orbital e o seu correspondente movemento rototranslatorio, xa que nas seguintes simulacións utilizamos os mesmos casos, pero aplicando velocidades de rotación diferentes. Con isto, e porque tamén calculamos a contribución e a influencia dos termos que conforman o hamiltoniano dun movemento rototranslatorio, poderemos dar resposta a certas cuestións como a influencia mutua entre a órbita e a rotación do satélite. Remataremos o capítulo cun exemplo completo de satélite artificial en condicións realistas tendo en conta todas as perturbacións indicadas anteriormente. Con *PSAT* poderemos calcular rapidamente efemérides en diferentes casos para poder discernir no modelo completo que perturbacións teñen un efecto no movemento xeral do satélite e en que medida.

Rematamos coas **Conclusiones e traballos futuros**. Aquí damos conta, por unha banda, das novidades que xerou a Tese de Doutoramento, deixando abertas varias portas como a mellora dos propagadores en canto ao cálculo paralelo e/ou precisión, ou a simulación de casos máis concretos e específicos que permitan avanzar no campo do movemento rototranslatorio.

A Memoria complementase coa sección **Bibliografía**, onde acudimos a artigos, Te-

IAGO ISASI FREIRE

ses de Doutoramento e libros clásicos e históricos (o 2% da bibliografía é do século XIX e o 43% do século XX); así como material máis actual (o 36% de toda a bibliografía en calquera dos seus formatos corresponde aos últimos 10 anos).



# Índice xeral

<b>Agradecementos</b>	<b>XIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XV</b>
<b>Resumen</b>	<b>XIX</b>
<b>Resumo</b>	<b>XXIII</b>
<b>Limiar</b>	<b>1</b>
Introdución . . . . .	1
Estrutura da tese . . . . .	7
Motivación / obxectivos . . . . .	10
Metodoloxía . . . . .	11
<b>1 Movemento orbital do satélite artificial</b>	<b>13</b>
1.1 Formulación do problema. . . . .	13
1.1.1 Movemento kepleriano . . . . .	13
1.1.2 Sistemas de coordenadas e elementos orbitais . . . . .	18
Sistemas de coordenadas . . . . .	18
Elementos orbitais . . . . .	19
1.1.3 Movemento kepleriano perturbado . . . . .	21
1.1.4 Perturbacións . . . . .	24
Potencial terrestre . . . . .	25
Influencia dun terceiro corpo . . . . .	37
Radiación solar . . . . .	39

## Índice xeral

Influencia da atmosfera . . . . .	45
Outras perturbacións . . . . .	47
1.1.5 Ecuacións de Lagrange . . . . .	48
Expresión das ecuacións de Lagrange . . . . .	50
1.2 Métodos de integración . . . . .	54
1.3 Métodos analíticos de integración . . . . .	54
1.3.1 Método de von Zeipel . . . . .	56
Solución de Brouwer . . . . .	58
Solución de Kozai . . . . .	66
1.3.2 Método de Hori . . . . .	68
Solución de Kinoshita . . . . .	71
1.3.3 Método de Deprit . . . . .	73
Solución de Deprit e Rom . . . . .	78
1.3.4 Singularidades . . . . .	81
Variables que anulan singularidades en primeira orde . . . . .	81
Variables que anulan singularidades en segunda orde . . . . .	82
1.4 Métodos semianalíticos de integración . . . . .	84
1.4.1 Método estroboscópico . . . . .	84
1.5 Métodos numéricos de integración . . . . .	89
Formulación de Cowell . . . . .	90
Formulación de Encke . . . . .	91
1.5.1 Métodos de Runge-Kutta . . . . .	93
1.5.2 Métodos multichanzo . . . . .	100
1.5.3 Métodos de extrapolación . . . . .	105
<b>2 Series de Taylor e diferenciación automática . . . . .</b>	<b>107</b>
2.1 Solución dunha ecuación diferencial ordinaria por series de Taylor . . . . .	107
2.2 Diferenciación automática . . . . .	109
2.3 Álgebra de series . . . . .	114
2.4 Aplicación da diferenciación automática e da álgebra de series á resolución de EDOs. . . . .	120
2.5 Resolución numérica de ODEs mediante o método das series de Taylor . . . . .	123
2.6 Implementación do método de series de Taylor para a integración numérica de ecuacións diferenciais ordinarias: software <i>TIDES</i> . . . . .	126

2.7	Extensión da diferenciación automática para unha integración máis eficiente do problema orbital . . . . .	129
2.7.1	Método das series de Taylor aplicado a sistemas dinámicos caracterizados por unha función potencial ou unha formulación hamiltoniana . . . . .	130
2.7.2	Extensión da álgebra de series ao operador $\delta$ . . . . .	132
<b>3</b>	<b>O propagador orbital <i>PSAT</i></b> . . . . .	<b>135</b>
3.1	Propagadores orbitais . . . . .	135
3.1.1	Estrutura dun propagador orbital . . . . .	135
3.1.2	Exemplos de propagadores orbitais . . . . .	139
3.2	Estrutura básica do propagador <i>PSAT</i> . . . . .	141
3.3	Cálculo da serie de Taylor da solución . . . . .	144
3.3.1	Estrutura básica da función utilizada por <i>TIDES</i> para obter a serie de Taylor . . . . .	145
3.3.2	Cálculo de series de Taylor en <i>PSAT</i> : <code>taylorSAT(...)</code> . . . . .	146
	Estrutura de datos en <i>PSAT</i> . . . . .	146
	Inicialización da estrutura de datos en <i>PSAT</i> . . . . .	148
	Bloque de cálculo para os nodos que non representan variables . . . . .	149
	Bloque de cálculo para os nodos que representan variables . . . . .	152
3.4	Tratamento das perturbacións en <i>PSAT</i> . . . . .	153
3.4.1	Primeiros nodos da función enlazada: variables e función $f$ . . . . .	154
3.4.2	Potencial kepleriano . . . . .	156
3.5	Implementación en <i>PSAT</i> das forzas de perturbación radial, tanxencial e normal . . . . .	157
3.6	Implementación en <i>PSAT</i> do xeopotencial . . . . .	159
3.7	Implementación en <i>PSAT</i> da perturbación producida por un terceiro corpo . . . . .	165
3.7.1	Cálculo da posición dun corpo en órbita kepleriana . . . . .	166
3.7.2	Nodos necesarios para engadir a perturbación dun terceiro corpo . . . . .	166
3.8	Implementación do efecto da radiación solar . . . . .	168
3.9	Implementación da freada atmosférica . . . . .	169
<b>4</b>	<b>O movemento rototranslatorio</b> . . . . .	<b>173</b>



## Índice xeral

4.1	Introdución . . . . .	173
4.2	Movemento dun sólido ríxido . . . . .	175
4.2.1	Ángulos de Euler e velocidade angular de rotación . . . . .	176
4.2.2	Momento angular de rotación e tensor de inercia . . . . .	178
4.2.3	Energía cinética do sólido ríxido . . . . .	180
4.2.4	Variables canónicas de Euler . . . . .	181
4.2.5	Variables canónicas de Andoyer . . . . .	182
4.3	Movemento rototranslatorio do satélite artificial . . . . .	186
4.3.1	Potencial de atracción entre dous sólidos . . . . .	192
4.3.2	Expresión das componentes $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ e $(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$ da dirección radial $\mathbf{u}$ . . . . .	197
4.3.3	Hamiltoniano do problema . . . . .	201
	Hamiltoniano do problema en variables canónicas de Euler . . . . .	202
	Hamiltoniano do problema en variables canónicas de Andoyer: dous modelos de rotación do satélite . . . . .	203
4.4	Extensión das ecuacións de Lagrange ao movemento rototranslatorio do satélite . . . . .	204
4.4.1	Variación dos elementos orbitais . . . . .	206
4.4.2	Variación dos elementos rotacionais . . . . .	209
	Satélite cuasisimétrico . . . . .	211
	Satélite triaxial . . . . .	211
4.4.3	Ecuacións de Lagrange do movemento rototranslatorio . . . . .	212
	Satélite cuasisimétrico . . . . .	213
	Satélite triaxial . . . . .	214
4.4.4	Derivadas do potencial perturbador para un satélite cuasisimétrico baixo o modelo do Problema Principal . . . . .	214
4.5	Extensión a <i>PSATROT</i> ao movemento rototranslatorio do satélite . . . . .	219
4.5.1	Implementación dos termos rotacionais do hamiltoniano . . . . .	222
	Expresión de $(\alpha_s, \gamma_s)$ en <i>PSATROT</i> . . . . .	222
	Implementación do hamiltoniano rotacional, $\mathcal{H}_r$ . . . . .	222
	Implementación do potencial debido á non esfericidade do satélite, $V_s$ . . . . .	223

5.1	Introdución . . . . .	225
5.2	Condições iniciais . . . . .	226
5.3	Comprobación do propagador <i>PSAT</i> para o modelo orbital sen rotación . . . . .	232
5.4	Contribución e influencia de cada termo do hamiltoniano no problema rototranslatorio . . . . .	240
5.5	Comprobación con <i>PSATROT</i> da influencia mutua entre a órbita e a rotación do satélite . . . . .	245
5.6	Aplicación de <i>PSAT</i> ao estudo do movemento dun satélite artificial con condicións realistas . . . . .	257
	<b>Conclusións e traballos futuros</b> . . . . .	<b>263</b>
	Conclusións . . . . .	263
	Traballos inmediatos e futuro . . . . .	265
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>267</b>
	<b>Índice de figuras</b> . . . . .	<b>283</b>
	<b>Táboas</b> . . . . .	<b>287</b>

# Limiar

## Introdución

O 4 de outubro de 1957 lanzouse o primeiro satélite artificial, *Sputnik-1*, que marca o inicio da carreira espacial. Dende entón o número de obxectos que orbitan a Terra non fixo máis que aumentar a un ritmo elevado, achegándose a un crecemento exponencial na última década debido principalmente á entrada de empresas nunha zona que tradicionalmente estaba en mans dos estados como consecuencia dos enormes custos asociados. Actualmente non hai unha cifra exacta sobre o número de satélites activos na órbita terrestre pero calcúlase que hai máis de 5 000 operativos<sup>1</sup>. A pesar de que inicialmente a carreira espacial comezou cun obxectivo e fondo eminentemente político e militar, hoxe en día boa parte dos satélites serven e servirán para tecer e reforzar a rede de telecomunicacións e para a observación e control da Terra e da súa atmosfera.

O desenvolvemento de novas tecnoloxías e os avances en diferentes ramas da Ciencia (electrónica, materiais, comunicacións, informática...) impulsaron un crecente interese no eido espacial, non só dende o punto de vista científico senón tamén desde o económico. Por todo isto produciuse unha redución drástica dos custos asociados aos lanzamentos e agárdase que esta sexa aínda máis importante dado o auxe actual do uso de vehículos reutilizables. O elevado valor que supón o envío dun satélite ao espazo foi a gran barreira que tiñan universidades, centros tecnolóxicos, laboratorios, etc. para acceder fisicamente a este campo, polo que se prevé que o número de obxectos en órbita aumente aínda máis nun futuro próximo, a medida que se fai cada vez máis accesible.



---

<sup>1</sup> Datos tirados de <http://www.celestrak.com/>, coa base de datos actualizada o 25/03/2022.

É preciso indicar que a posta en órbita dun satélite está sustentada por uns estudos previos extremadamente rigorosos e intensos que abarcan unha multitude de cálculos, simulacións, previsións, etc. que buscan reducir os riscos e os custos ao mesmo tempo que aumentar a vida útil do aparello. Esta é unha das cuestións transcendentais nas primeiras fases do deseño dunha misión e para iso é preciso coñecer as perturbacións de diversa índole que van afectar ao obxecto na súa órbita arredor da Terra, que serán tanto maiores canto menor sexa a súa altitude, sendo a máis importante en calquera caso a vencellada co potencial terrestre ou xeopotencial. Ademais, por cuestións operativas, como poden ser redución de custos, facilidades técnicas ou de comunicación, unha gran porcentaxe de satélites colócanse nas denominadas órbitas terrestres baixas ou *LEO* (menos de 2000 km de altitude) onde o principal problema é a freada atmosférica que tende a modificar o seu movemento e facer que tarde ou cedo vaia decaendo ata producir a perda do satélite por mor das forzas de rozamento coas capas superiores da atmosfera. Por suposto, existen outros tipos de perturbacións como o albedo terrestre, a influencia dun terceiro corpo ou a radiación solar, con pouca influencia relativa pero que tamén acaban afectando ao seu movemento secular.

A evolución das órbitas dos satélites artificiais permitiu coñecer de xeito cada vez máis exacto o xeopotencial, e polo tanto, a figura física da Terra, o denominado *xeoide*. Ademais púidose estudar a influencia, aínda que menor, das outras perturbacións acadándose erros mínimos en canto a cálculos de efemérides, é dicir, saber con anticipación a localización dun satélite a partir dos seus parámetros orbitais como funcións do tempo.

O seguimento continuo dun obxecto en órbita é útil para corrixir calquera desviación da súa traxectoria e polo tanto aumentar a súa vida útil, pero realizar o seguimento dun satélite foi historicamente unha tarefa ardua. Os datos obtidos polo *Sputnik-1* e polo resto de satélites pioneiros na carreira espacial deron o pulo e os coñecementos previos necesarios para adentrarse nun ámbito case descoñecido ata aquel intre como era o cálculo de efemérides. O dito ámbito de estudo podería dicirse que foi inaugurado por von Zeipel en 1916 a partir de estudos de Poincaré ([von Zeipel \(1916\)](#)) e magnificamente continuado mediante o emprego de métodos analíticos por Brouwer ([Brouwer \(1959\)](#), [Brouwer \(1961\)](#)), Kozai ([Kozai \(1959\)](#), [Kozai \(1962\)](#), [Kozai \(1966\)](#)), Hori ([Hori \(1960\)](#), [Hori \(1966\)](#)), Kinoshita ([Kinoshita \(1970\)](#), [Kinoshita \(1972\)](#), [Kinoshita \(1978\)](#)) ou Deprit ([Deprit \(1969\)](#)); todos eles realizados practicamente antes

## Índice xeral

de cumprirse os 20 anos do lanzamento do primeiro satélite. Como veremos nesta tese, estes métodos eran complexos, extensos e ata tediosos nalgúns casos; e precisaban unha gran cantidade de tempo non só para ser desenvolvidos, senón tamén para poder ser aplicados. Por mor destes obstáculos, intrínsecos por outra banda aos propios métodos, ampliar o rango de ordes de perturbación era unha tarefa titánica. É de destacar a contribución española neste aspecto grazas ás achegas analíticas de Cid (Cid (1967)), Lahulla (Lahulla (1970), Cid e Lahulla (1969), Cid e Lahulla (1971)), Calvo (Calvo (1971)) ou Caballero (Caballero (1975)). Salientemos tamén o enorme esforzo que supuxo ir aumentando a orde dos métodos sinalando que mesmo implicou o emprego de novas técnicas matemáticas, como por exemplo as series de Lie no caso do método de Deprit.

O paso posterior foi o desenvolvemento de métodos semianalíticos de integración cuxo paradigma en Mecánica Celeste é o método estroboscópico proposto por Lubowe (Lubowe (1969)), desenvolvido na década dos 70 do século pasado por Roth (Roth (1973), Roth (1978), Roth (1979), Roth (1985)) e posteriormente empregado tamén, por exemplo, para o estudo dos sistemas xerárquicos de estrelas triplas como fixo Ling na súa tese, proposta e dirixida por Docobo e Abad (Ling (1989)).

Co paso do tempo, o seguimento de satélites converteuse nun campo cada vez máis sofisticado, polo que agora se empregan programas informáticos de alta precisión enormemente especializados que utilizan métodos numéricos. Algúns deles son propietarios (por exemplo *STK*) con licenzas que acadan prezos inaccesibles para grupos de investigación estándar, aínda que ben é certo existen alternativas gratuítas potentes (como *GMAT*); a integración numérica que adoitan empregar estes programas baséase principalmente nos métodos Runge-Kutta. Obviamente, coa chegada destes métodos numéricos abandonáronse os analíticos e semianalíticos, pero naturalmente isto non é un impedimento para destacar o seu papel crucial nas misións espaciais da última metade do século pasado e, sobre todo, para obter resultados cualitativos polo que, tanto pola súa relevancia matemática como pola súa enorme importancia histórica, consideramos conveniente a súa inclusión nesta tese.

Por todos estes motivos, cómpre acadar unha mellor comprensión da contribución de cada unha das perturbacións e da súa concomitancia, de xeito que contribúan a aumentar a vida útil do satélite coa conseguente redución de custos.

En todo caso, non só é fundamental a vixilancia dos satélites operativos; o control e seguimento daqueles en desuso, dos seus refugallos ou fragmentos, das súas fases xa empregadas... que vagan polo espazo sen control efectivo, tamén son de grande interese, polos problemas de seguridade que levan implícitos <sup>2</sup>. En relación a isto, a maioría das axencias espaciais adican enormes cantidades de recursos ao seguimento dos devanditos restos para que non interfiran nas misións en curso ou futuras, é dicir, para manter baixo control os obxectos que conforman o denominado *lixo espacial*.

Relacionado co estudo do comportamento dos satélites no espazo, este foi obxecto de numerosos estudos e traballos onde se modelaron perturbacións como o xeopotencial ou a freada atmosférica de forma excepcionalmente precisa a pesar do descoñecemento dalgúns dos seus factores (determinados harmónicos no primeiro caso ou o modelo da atmosfera no segundo), como veremos no capítulo 1.

A este aspecto dedicamos unha parte da tese, que inclúe a elaboración dun propagador orbital ao que aplicamos o método das series de Taylor sobre a expresión do potencial correspondente e que se estrutura nun integrador baseado en *TIDES*. *TIDES* (**T**aylor **s**eries **I**ntegrator **f**or **D**iferential **E**quation**S**) é un programa desenvolvido por A. Abad, R. Barrio, F. Blesa e M. Rodríguez (*Abad et al. (2012)*) do *Grupo de Mecánica Espacial* e do *IUMA da Universidad de Zaragoza*<sup>3</sup> que permite integrar ecuacións diferenciais ordinarias en dobre e múltiple precisión entre outras funcionalidades. *TIDES* tratarase en detalle no capítulo 3. O uso do método das series de Taylor no integrador fará do propagador unha ferramenta moi rápida, eficiente e versátil, xa que permitirá escoller o grao das series de Taylor, aínda que con certas limitacións relacionadas coa converxencia e o control de erros. Este propagador orbital, que denominamos *PSAT*, permitiranos obter o movemento dun satélite artificial sen rotación pero tendo en conta os diferentes tipos de perturbacións como o xeopotencial (permitindo a posibilidade de incluílo manualmente ou mediante un arquivo con valores de harmónicos de calquera orde e grao), influencia dun terceiro corpo (o Sol e/ou a Lúa, pero facilmente extensible a calquera outro obxecto só aportando os seus elementos orbitais, mesmo varios deles xuntos), radiación solar, freada atmosférica ou calquera forza externa.

<sup>2</sup> Segundo a Axencia Espacial Europea hai máis de 36 500 obxectos de máis de 10 cm, 1 000 000 entre 1 cm e 10 cm e máis de 330 millóns entre 1 mm e 1 cm.

<sup>3</sup> <http://iuma.unizar.es/es/investigacion/software/TIDES>

Teñamos en conta que ata agora só describimos o movemento orbital, pero non esquezamos que os satélites tamén teñen asociado un movemento de rotación arredor dalgún dos seus eixes que podería afectar á súa órbita. A combinación de ambos os movementos dálle ao satélite o chamado *movemento rototranslatorio*<sup>4</sup>. Este movemento constitúe unha parte moi importante da tese porque observamos un baleiro na consideración deste aspecto (xunto coa súa perturbación asociada) no tocante aos propagadores. Ademais, posiblemente por cuestións cuantitativas vencelladas principalmente á influencia dos momentos de inercia (e polo tanto indirectamente ao tamaño dos satélites), o estudo do movemento rototranslacional quedou relegado a un menor número de artigos e investigacións en comparanza co movemento orbital.

Outra razón para ter en conta a rotación é que podería empregarse para xerar gravidade artificial. Historicamente deseñáronse de xeito teórico, mesmo aparecendo en novelas e en películas de ciencia ficción, estacións e vehículos espaciais con gravidade artificial para tentar simular as condicións terrestres, aproveitando a forza centrífuga como mimetismo da gravidade. Isto sería de grande axuda para as persoas que pasasen longos períodos de tempo no espazo. Esta gravidade artificial conseguiríase principalmente mediante o uso de velocidades de rotación en obxectos cilíndricos (*cilindros de O'Neill*), toroidais (*toros de Standford*) ou esféricos (*esferas de Bernal*).

Na tese optamos por centrarnos nas hipóteses e ecuacións deste movemento para coñecer e cuantificar a súa contribución ao movemento do satélite artificial. Tamén constatamos que os momentos de inercia dun satélite, e polo tanto as súas características físicas e xeométricas (sobre as que podemos actuar a priori, na fase de deseño), afectan aos parámetros orbitais. En relación ao movemento rotacional, canto maior sexa o obxecto de estudo, máis afectará á súa órbita, aínda que como veremos, esta influencia é moi pequena para a orde de magnitude das dimensións dos satélites ou estacións actuais, pero en calquera caso coñecendo o comportamento destes parámetros poderase controlar o movemento de rotación dun satélite e os seus efectos.

Por outra banda, aproveitamos para tentar establecer unha nomenclatura única ao respecto. Este último punto é fundamental á hora de poder contrastar a distinta bibliografía consultada, xa que segundo os autores, mesmo os seus países de orixe,

---

<sup>4</sup> A *Real Academia Galega* recolle o termo *translación* semellante ao termo empregado na bibliografía inglesa, *translation*.

utilízanse distintos símbolos ou terminoloxías para unha mesma variable, o que dificulta a comparación das fontes e a caracterización das variables, así como o seu significado.

Desenvolvemos as ecuacións do movemento de rototranslación do satélite artificial, particularizándoas para dous modelos diferentes: o modelo cuasisimétrico e o modelo triaxial.

Do mesmo xeito que para o movemento orbital, neste caso creamos un segundo propagador, co mesmo integrador que *PSAT*, de xeito que poderíamos falar dunha extensión do mesmo, tamén baseado en series de Taylor pero aplicado agora sobre o hamiltoniano. Polo tanto, desenvóléronse dous propagadores simultaneamente: o primeiro, *PSAT*, que utiliza unha formulación newtoniana, e o segundo, que ten en conta a rotación do satélite e utiliza unha formulación hamiltoniana, que chamamos *PSATROT*.

Para implementar o proceso de integración en ambos os propagadores optamos por utilizar a *técnica de diferenciación automática* a partir dunha álgebra de series programada especificamente para eles.

Cos resultados acadados con ambos os programas, podemos afirmar que non só estamos ante propagadores innovadores no que se refire ao seu integrador, senón tamén efectivos, rápidos, versátiles e moi sinxelos de empregar.

Partimos dunha serie de artigos, teses de doutoramento e libros (Garfinkel (1959), Kinoshita (1970, 1972), Ferrándiz e Sansaturio (1988, 1989), Arribas (1989), Ferrándiz, Sansaturio e Caballero (1993), Vinti (1998), Montenbruck e Gill (2001), Abad (2012), San Juan, López e López (2012), Ferrer e Lara (2010, 2012), Arribas *et al.* (2014), Ferrer e Molero (2014), Ferrer, Molero e Crespo (2014), Abad, Docobo e Elipe (2017) entre outros) que serviron de base sobre a que construír as ecuacións do movemento a integrar. Esta revisión dá máis peso á necesidade de desenvolver códigos que permitan realizar cálculos que doutro xeito serían realmente complexos e mesmo intratables para simulacións de gran tempo e coa precisión desexada. Serán pois, en certo aspecto, o contrapunto dos nosos propagadores. Finalmente, como xa comentamos, implantámo-los nos dous propagadores orbitais.

Para certificar as capacidades de ambos os propagadores seleccionamos unha se-

rie de casos con características particulares en canto a condicións xeométricas, tipos de órbitas e velocidades de rotación. A sinxeleza dos programas, e a súa velocidade de cálculo, á que só temos que achegar unhas condicións iniciais consistentes nos parámetros orbitais, as características xeométricas do satélite (momentos de inercia normalizados), os ángulos de Euler e a velocidade de rotación, fan que sexa unha ferramenta moi útil para obter resultados rápidos e precisos.

A bondade de *PSAT* reside no seu comportamento con varios modelos: o kepleriano, o Problema Principal do satélite e dous casos de xeopotencial: un zonal e outro completo baseado no EGM96 (que veremos en 1.1.4). Analizaremos os resultados obtidos tanto con *PSAT* como con *PSATROT*, neste caso con diferentes velocidades de rotación. Aquí será evidente a influencia dos momentos de inercia e das velocidades de xiro no movemento rototranslatorio. Ademais de examinar como e en que orde se modifica a traxectoria, calculamos outros indicadores como o valor do hamiltoniano e a constante de Jacobi. Escollemos estes termos enerxéticos porque o seu valor constante representa un bo control de calidade; o primeiro deles para problemas que non dependen do tempo (por exemplo, calquera modelo zonal), e o segundo cando se traballa nun sistema de referencia rotativo, como cando se utiliza un modelo tesimal.

Por outra banda, crearemos un caso realista que conteña as principais perturbacións, esta vez empregando o modelo de xeopotencial *JGM3*. Á vista dos resultados obtidos, empregaremos os programas con cada unha das perturbacións de forma individual, para poder identificar aproximadamente cal inflúe máis e de que xeito incide na evolución dos elementos orbitais.

## Estrutura da tese

Esta tese, despois deste Limiar, estrutúrase en 5 capítulos:

O **Capítulo 1**, dedicado a facer un compendio de todos os conceptos básicos xa coñecidos sobre o movemento orbital dos satélites, comezará cunha exposición de fundamentos e, en particular, co establecemento dos distintos conceptos que se usarán máis adiante. Estes serán os sistemas de coordenadas (útiles para poder establecer as condicións iniciais), os elementos orbitais (necesarios para poder definir a órbita do satélite obxecto de estudo) e as diferentes perturbacións, incluíndo, en primeiro lugar, a obtención do potencial terrestre e que serán empregadas nas distintas si-

mulacións que faremos máis adiante. Remataremos a primeira parte deste capítulo deducindo as ecuacións de Lagrange, que nos permiten obter directamente a variación dos parámetros orbitais en función do tempo. Posteriormente, presentaremos de forma esquemática os métodos que historicamente foron empregados na integración do problema dos satélites artificiais, dende os primeiros métodos analíticos ata os máis recentes métodos numéricos, pasando polo método estroboscópico como o exemplo máis senlleiro dos métodos semianalíticos.

No **Capítulo 2** afondaremos no método e técnica empregados para programar os propagadores. Comezaremos cunha introdución á solución dunha ecuación diferencial ordinaria utilizando series de Taylor, xa que son os alicerces do noso integrador. A continuación, presentaremos a técnica de diferenciación automática que nos permitirá definir o que denominamos *función enlazada*, que é unha secuencia de operacións binarias e/ou unarias que, aplicadas de xeito secuencial, conducen ao resultado dunha determinada operación. Tamén desenvolveremos unha álgebra de series necesaria para poder implementar as series de Taylor mediante a diferenciación automática nos programas desenvolvidos. Deste xeito obteremos a base teórica para crear un propagador orbital que utilice as series de Taylor para calcular rapidamente e con gran precisión o movemento perturbado do satélite. Veremos como e por que introducimos un novo enfoque para a adaptación do método das series de Taylor ao estudo do movemento do satélite artificial.

As principais características do propagador orbital *PSAT* descríbense no **Capítulo 3**. Comezaremos o Capítulo introducindo outros propagadores orbitais e veremos a súa estrutura, o seu método de cálculo e control, o xeito en que tratan, programan, implementan e traballan as diferentes perturbacións no conxunto do programa. Noutras palabras, explicaremos como se pon en práctica toda a estrutura teórica do Capítulo 2 no software desenvolvido baseado en series de Taylor (chamado *PSAT* na súa única versión só orbital). En canto ás perturbacións, centrarémonos nas principais que afectan aos satélites artificiais: xeopotencial, terceiro corpo, radiación solar, freada atmosférica e outras secundarias como as forzas radiais, tanxenciais e normais (que xa foran comentadas no capítulo 1). Con isto explicaremos as posibilidades que ten o uso dos programas, xa que a imposición das condicións iniciais das devanditas perturbacións non resulta unha tarefa complicada.

No **Capítulo 4** trataremos o desenvolvemento das ecuacións que rexen o movemento de rotación do satélite. Comezarase cunha introdución histórica e coas bases necesarias para poder establecer paso a paso estas ecuacións: movemento dun sólido ríxido, presentación das variables necesarias (as de Euler e Andoyer) e por último o movemento rototranslatorio (onde expresaremos o hamiltoniano en diferentes sistemas de coordenadas en función das variables vistas anteriormente). Con esta base poderemos expresar o hamiltoniano do movemento rototranslatorio en variables de Euler e Andoyer, e a partir del poderemos deducir unha extensión das ecuacións de Lagrange que inclúa á vez tanto o movemento orbital como a rotación do satélite, explicitando dous modelos directamente relacionados coas características xeométricas do satélite: o modelo cuasisimétrico e o modelo triaxial. É dicir, teremos unha xeneralización das ecuacións de Lagrange, clasicamente deducidas só para o movemento orbital, pero agora estendidas ao movemento rototranslatorio. Remataremos coa implementación deste hamiltoniano nun propagador que inclúe simultaneamente o movemento orbital e a rotación do satélite, co que obteremos *PSATROT*.

O **Capítulo 5** está dedicado a aplicacións, e nel desenvolveremos unha serie de simulacións que nos permitirán ver como se comportan ambos os propagadores e como funcionan cando estudamos determinados obxectos en órbita sometidos a diferentes perturbacións, ademais da súa rotación. Para iso escollemos tres órbitas diferentes: unha órbita baixa, unha con alta excentricidade e outra xeoestacionaria para comprobar a eficiencia dos propagadores en condicións heteroxéneas. Ademais, no caso de *PSATROT*, tamén teremos en conta varias casuísticas relacionadas con momentos de inercia e velocidades de rotación para que se poida comprobar a influencia destas variables na órbita. En calquera caso, primeiro comprobaremos *PSAT* con varios casos (kepleriano, Problema Principal, modelos de xeopotencial zonal e tesimal) para despois avaliar *PSATROT*, é dicir, ter en conta o que ocorre cun movemento rototranslatorio (para o que decidimos mostrar só graficamente un exemplo dos diferentes que simulamos para non ampliar a tese máis do necesario). Non obstante, consideramos útil analizar primeiro de xeito analítico os termos do hamiltoniano relativos ao movemento rototranslacional para posteriormente, despois de obter información suficiente ao respecto, poder interpretar axeitadamente os resultados numéricos e entender o que está a acontecer e o seu porqué. Remataremos este capítulo cun modelo máis complexo empregando *PSAT*, consistente en simular un satélite en condicións realistas, é dicir,

tendo en conta un modelo xeopotencial completo como *JGM3* incluíndo as seguintes perturbacións: influencia do Sol e da Lúa, a radiación solar e a atmosfera. Pero ademais, sobre os resultados finais da evolución dos parámetros orbitais ao longo de todo o intervalo de simulación, procuraremos atopar que perturbacións están detrás de cada patrón recoñecible. Con isto veremos que cada unha das perturbacións que se tiveron en conta xoga un papel máis ou menos relevante dentro do movemento orbital dun satélite.

## Motivación / obxectivos

Os obxectivos marcados na realización da presente tese de doutoramento foron

1. O emprego do integrador *TIDES* (*Taylor series Integrator for Differential EquationS*) para a construción dun propagador orbital é moi difícil por tres razóns: a dificultade de construír as derivadas do potencial terrestre ata unha alta orde, a posibilidade de incluír nun mesmo programa diferentes tipos de perturbacións, e a formulación dalgunhas destas. Todo o anterior motivounos a crear as ferramentas necesarias para a construción dun novo propagador, baseado no método das series de Taylor, que resolva os problemas mencionados.
2. Ademais do propio movemento orbital, pareceunos o intre oportuno para considerar tamén a rotación á que están sometidos os satélites e estudar así o chamado movemento rototranslatorio coa idea de establecer como ambos os movementos do satélite se inflúen mutuamente. Neste senso, hai que dicir que a ausencia deste tipo de resultados na literatura científica supuxo unha maior motivación no noso traballo.
3. En relación co movemento rotatorio, outro dos obxectivos importantes que nos propuxemos foi dotar a este destacado campo da Mecánica dunha única nomenclatura, xa que dependendo dos distintos autores aparecen as mesmas variables con notacións diferentes, o que non fai máis que entorpecer e confundir aos investigadores.
4. Unha vez decididos os posibles contidos do traballo, propuxémonos tamén establecer unha xeneralización das ecuacións de Lagrange, deseñadas tradicionalmente para obter a variación directa dos elementos orbitais en problemas keple-

rianos perturbados. No noso caso, ao considerar tamén a rotación do satélite, preguntámonos se sería posible estender estas ecuacións ao movemento roto-translatorio para poder, cun conxunto de doce parámetros, estudar ao mesmo tempo os movementos de translación e de rotación.

## Metodoloxía

Na figura 0.1 podemos ver o proceso resumido e os métodos matemáticos que empregamos para acadar os obxectivos marcados no apartado anterior. Partimos dos conceptos básicos que se describen no **Capítulo 1**, para centrarnos, no **Capítulo 2**, nas ferramentas matemáticas utilizadas, fundamentalmente as series de Taylor, diferenciación automática e álgebra de series, as cales serán aplicadas no **Capítulo 3** para a súa implementación no primeiro propagador desenvolvido, PSAT. O **Capítulo 4** dedícase aos conceptos que darán lugar ao desenvolvemento das ecuacións de Lagrange xeneralizadas así como a súa implementación eo segundo dos propagadores, PSATROT. As aplicacións de ambos os propagadores sobre condicións iniciais determinadas amósanse no **Capítulo 5**.

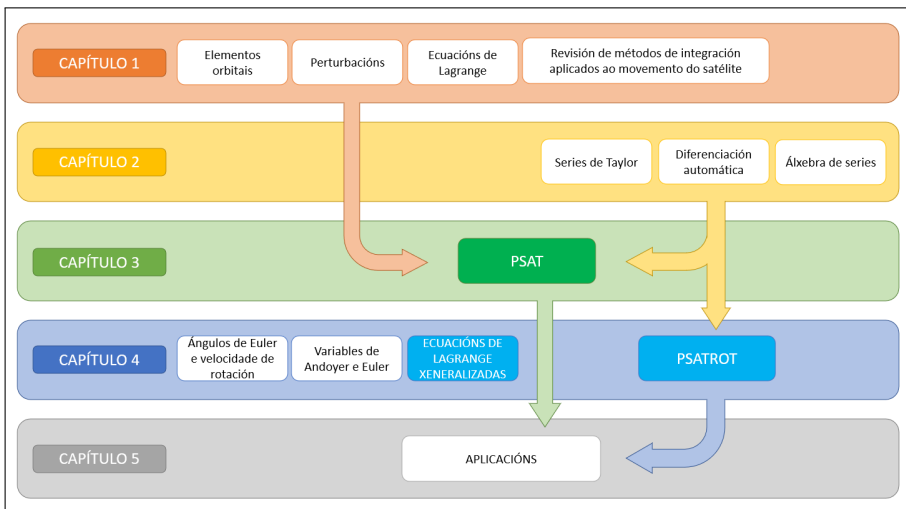


Figura 0.1: Esquema da Metodoloxía empregada no desenvolvemento da Tese.



## Capítulo 1

# Movemento orbital do satélite artificial

### 1.1. Formulación do problema.

#### 1.1.1. Movemento kepleriano

O estudo do movemento de dúas masas puntuais que se atraen gravitacionalmente chámase *Problema de dous Corpos*, sendo a base da Mecánica Celeste clásica.

Pódese dicir que este estudo ten a súa orixe a principios do século XVII cando J. Kepler enunciaba as tres leis que rexen o movemento dos planetas arredor do Sol. Estas leis, de carácter empírico, tiveron un apoio físico axeitado cando en 1687 I. Newton publicou a súa obra principal, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, na que figuraban os tres postulados da Mecánica así como a súa *Lei da gravitación*.

Segundo esta lei, dúas masas puntuais,  $m_1$  e  $m_2$ , separadas por unha distancia  $r$  atráense cunha forza que é directamente proporcional ao produto das masas e inversamente proporcional ao cadrado da distancia.

Designando por  $\mathbf{r}$  o vector de posición do corpo de masa  $m_2$  con respecto ao corpo de masa  $m_1$  e por  $r$  a distancia entre ambos, podemos expresar o vector exposto anteriormente do seguinte xeito



$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

sendo  $\mathcal{G}$  a chamada *constante de gravitación*,  $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$  a forza exercida polo corpo 1 sobre o 2 e  $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$  o vector oposto.

No *Problema de dous Corpos* demóstrase que ambos os puntos materiais describen o mesmo tipo de cónica en torno ao seu centro de masas, ou o que é o mesmo, se tomamos un deles como fixo, o outro móvese respecto a el na órbita relativa, que tamén é unha cónica, elipse en particular.

A ecuación diferencial vectorial do movemento relativo resulta ser

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.2)$$

sendo  $\mu = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$  o denominado *parámetro gravitacional estándar*.

Esta ecuación diferencial vectorial é equivalente a un sistema diferencial escalar de orde 6, polo que a súa integración dependerá de seis constantes independentes,  $\alpha_i$ , con  $i = 1$  a 6. Estas seis constantes están vencelladas cos chamados elementos orbitais, dos que falaremos a continuación (ver 1.1.2).

Por outra banda, o movemento solución de (1.2) chámase kepleriano, xa que a traxectoria relativa é unha cónica cun corpo situado nun dos seus focos (a *Primeira Lei de Kepler*). Ademais, verifícase a lei das áreas (a *Segunda Lei de Kepler*), e no caso das órbitas elípticas existe a relación

$$\mu = \frac{4\pi^2}{P^2} a^3, \quad (1.3)$$

onde  $P$  é o período orbital e  $a$  o semieixe maior da elipse. Isto dá lugar á verdadeira expresión para *Lei de Kepler*.

De feito, se aplicamos (1.3) ao caso do Sol (representaremos a masa solar como  $M_\odot$ ) e a un planeta de masa  $m_1$ , e despois ao Sol e outro planeta de masa  $m_2$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(M_\odot + m_1) &= \frac{4\pi^2}{P_1^2} a_1^3, \\ \mathcal{G}(M_\odot + m_2) &= \frac{4\pi^2}{P_2^2} a_2^3, \end{aligned}$$

de onde se deduce

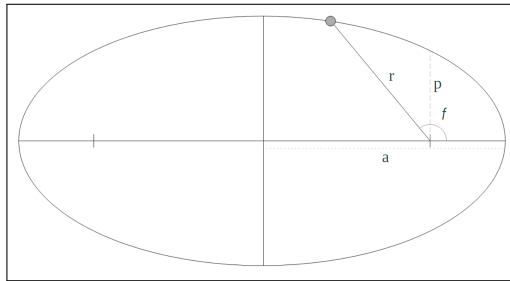
$$\frac{M_{\odot} + m_1}{M_{\odot} + m_2} = \frac{a_1^3/P_1^2}{a_2^3/P_2^2} \approx 1, \quad (1.4)$$

xa que as masas planetarias son moito máis pequenas que a masa solar.

Outro resultado fundamental do *Problema de dous Corpos* é que as coordenadas polares relativas  $(r, f)$  ligadas á posición dun corpo con respecto ao outro na súa órbita están relacionadas pola ecuación dunha cónica,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (1.5)$$

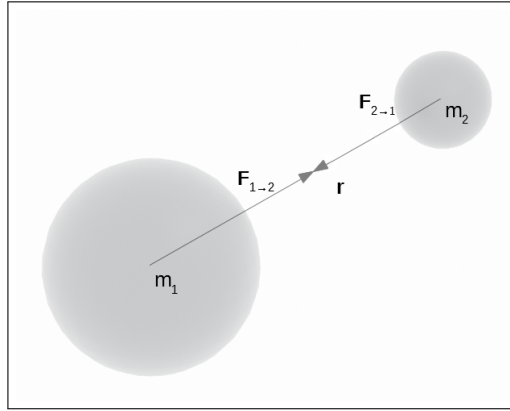
sendo  $p = a(1 - e^2)$  o parámetro no caso elíptico, tamén chamado *semi-latus rectum* (a distancia perpendicular ao eixe maior dende un foco á elipse). Xeometricamente pódense observar as variables na figura 1.1.



**Figura 1.1:** Representación do ángulo,  $f$ , o raio vector,  $r$ , o parámetro,  $p$ , e o semieixe maior da elipse,  $a$ .

O propio I. Newton estendeu estes resultados ao caso no que as masas puntuais son substituídas por esferas sólidas homoxéneas, ou ben unha esfera destas características e un punto material, como se mostra na figura 1.2.

Este último escenario ben pode ser, nunha primeira aproximación, o correspondente ao movemento dun satélite artificial (o punto material) arredor da Terra (a esfera). En realidade, o problema complícase xa que a Terra non é nin esférica, nin sólida, nin homoxénea, porén non está lonxe de cumprir estas condicións e por iso o movemento orbital, non sendo estritamente kepleriano, tampouco está lonxe de selo.



**Figura 1.2:** Esquema xeral da *Lei de Gravitación Universal*.

Son tres as anomalías que se manexan no movemento kepleriano elíptico. A media,  $M$ , a excéntrica,  $E$ , e a verdadeira,  $f$ , que é unha das coordenadas polares relativas mencionadas anteriormente (ver en (1.5)).

As relacións entre elas son, por unha banda,

$$E - e \sin E = M, \quad (1.6)$$

que é a *ecuación de Kepler*, sendo

$$M = \frac{2\pi}{P}(t - T) = n(t - T). \quad (1.7)$$

Aquí  $T$  representa o instante de mínima distancia entre o satélite e o centro de masas da Terra (denominado paso polo perixeio, que veremos máis polo miúdo en 1.1.2), mentres que  $n = \frac{2\pi}{P}$  é o denominado movemento medio.

Por outra banda, as anomalías  $E$  e  $f$  están relacionadas segundo

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}, \quad (1.8)$$

CAPÍTULO 1. MOVIMENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} f &= \frac{\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} E}{1-e \cos E}, & \operatorname{sen} E &= \frac{\sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} f}{1+e \cos f}, \\ \cos f &= \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}, & \cos E &= \frac{\cos f + e}{1+e \cos f}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

existindo asemade unha expresión que relaciona directamente  $E$  co raio vector,  $r$ ,

$$r = a(1 - e \cos E). \quad (1.10)$$

Deste xeito o esquema de cálculo das coordenadas polares  $(r, f)$  nun certo intre,  $t$ , será

$$t \xrightarrow{(1.7)} M \xrightarrow{(1.6)} E \xrightarrow{(1.8)} f \xrightarrow{(1.5)} r \quad (1.11)$$

$\swarrow$   
(1.10)  
 $r$

Na figura 1.3 representáanse as tres anomalías, onde  $C$  (no caso do satélite artificial arredor da Terra) é o centro de masa da Terra,  $S$  é a posición do satélite na súa órbita e  $S'$  é o punto correspondente a  $S$  no círculo director (círculo cun raio igual ao semieixe maior da elipse).

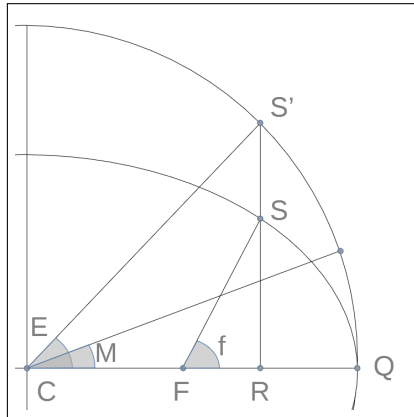


Figura 1.3: Anomalías media, excéntrica e verdadeira.

A anomalía media,  $M$ , vén sendo o ángulo descrito por un punto ideal que se move con velocidade constante sobre o círculo director, de xeito que as seguintes igualdades se verifican no perixeo <sup>1</sup> e no apoxeo <sup>2</sup>

- Perixeo  $M = E = f = 0$

- Apoxeo  $M = E = f = \pi$

Todas estas cuestións poden verse con detalle nalgúns libros xeneralistas e en obras máis enfocadas á Mecánica Celeste como [Kovalevsky \(1967\)](#), [Bate, Mueller e White \(1971\)](#), [Moulton \(1984\)](#), [Taff \(1985\)](#), [Danby \(1998\)](#), [Valtonen e Karttunen \(2006\)](#), [Curtis \(2005\)](#), [Roy \(2005\)](#), [de Orús Navarro, Català Poch e Núñez de Murga \(2007\)](#), [Meyer, Hall e Offin \(2009\)](#), [Weiland \(2010\)](#), [Goldstein, Poole e J. \(2011\)](#), [Abad \(2012\)](#), [Abad, Docobo e Elipe \(2017\)](#) etc.

### 1.1.2. Sistemas de coordenadas e elementos orbitais

#### Sistemas de coordenadas

Para estudar o movemento orbital dos satélites artificiais e demais astros, é preciso establecer sistemas de referencia. Segundo o obxectivo indicado, adoitan empregarse diferentes sistemas, entre os que se poden salientar o espacial, nodo-espacial, nodal, absidal, orbital etc., aínda que o paso dun a outro pódese facer de xeito sinxelo mediante xiros (por exemplo en [Seeber \(1993\)](#), [Abad \(2012\)](#) ou [Abad, Docobo e Elipe \(2017\)](#) pódense examinar en detalle estes sistemas de coordenadas).

Para explicar certos conceptos necesarios máis adiante, empregaranse tres sistemas cartesianos ortogonais dextróxiros (ver figura 1.4): dous fixos (o espacial e o nodal) e un móbil ancorado ao satélite,  $S$  (o orbital). A orixe dos sistemas de coordenadas será o centro de masas da Terra,  $O$ . Así, teremos

- Sistemas fixos  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  e  $\{l, m, n\}$

<sup>1</sup> Punto máis próximo á Terra na órbita dunha estrela ou satélite artificial.

<sup>2</sup> O punto dunha órbita arredor da Terra máis afastado do centro da Terra.

## CAPÍTULO 1. MOVIMIENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

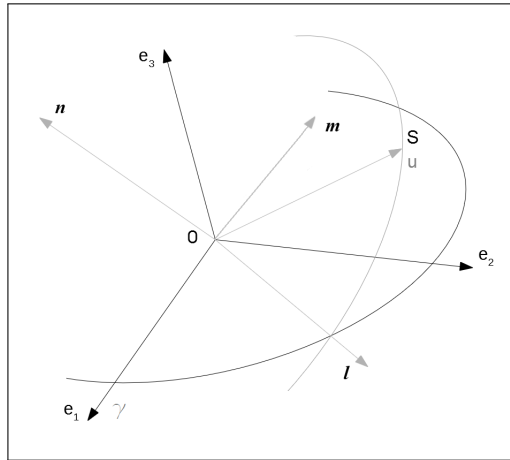


Figura 1.4: Sistemas de coordenadas empregados.

- O primeiro é un sistema de referencia inercial ecuatorial onde  $e_3$  coincide co eixe de rotación da Terra, apuntando cara ao polo norte. Os demais vectores estarán contidos no plano do ecuador, sendo o sentido de  $e_1$  cara ao punto vernal,  $\gamma$ , que é un dos puntos de intersección do plano orbital da Terra (a eclíptica) co plano do ecuador.
- O segundo deles terá o versor  $l$  dirixido cara ao punto onde o satélite pasa do hemisferio sur ao norte (nodo ascendente), mentres que o vector  $n$  terá a dirección do momento angular, que é o produto cruzado do raio vector pola velocidade do satélite:  $G = r \times \dot{r}$  (ver máis detalles en 4.2.2). O versor  $m$  forma un triedro ortogonal dextróxiro cos anteriores.
  - Sistema móbil  $\{u, v, n\}$ 
    - Estará ancorado ao satélite mediante o versor  $u$ , dirixido en todo intre cara a el indicando, polo tanto, a dirección radial; por iso  $u = \frac{r}{r}$ .

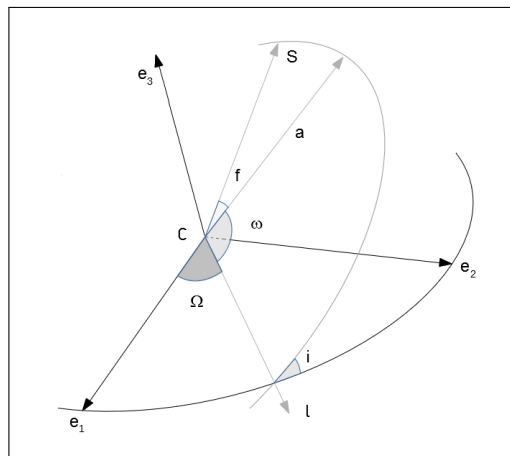
### Elementos orbitais

Como se mencionou anteriormente, a integración das ecuacións diferenciais do movemento relativo do *Problema de dous Corpos* depende de seis constantes independentes. Estas constantes, ou outras relacionadas con elas, chámanse *elementos* ou

*parámetros orbitais*. Os máis utilizados, tanto no caso do satélite artificial como noutros escenarios astronómicos, son os dados por

- $T$ , o tempo de paso do periastro (ou perixeo no caso dun satélite terrestre),
- $e$ , a súa excentricidade,
- $a$ , o semieixe da órbita elíptica,
- $i$ , a inclinación orbital,
- $\Omega$ , o ángulo do nodo ascendente,
- $\omega$ , o argumento periastro,

dos que se pode ver a súa representación na figura 1.5. Os tres últimos son ángulos que representan tanto a orientación da órbita no espazo como no seu propio plano.



**Figura 1.5:** Parámetros orbitais.

A *inclinación* é o ángulo diédrico que forma o plano orbital coa eclíptica, pero tómase entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  cando o movemento é directo (en sentido antihorario) e entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$  para o movemento retrógrado (sentido horario). Con máis precisión, e traballando cun sistema de referencia dextróxiro, é o ángulo que forma o vector de momento angular (ver 4.2.2) co eixe  $z$  positivo.

O *ángulo do nodo* é aquel contado sobre o ecuador, e en sentido dextróxiro, dende a posición do punto  $\gamma$  ata o nodo ascendente, punto este no cal o satélite pasa de ter declinación negativa a positiva.

O *argumento do periastro* (ou perixeo) cóntase sobre o plano orbital e no senso do movemento, dende o nodo ascendente ao perixeo.

Ás veces  $T$  substitúese pola anomalía media dun instante concreto. Tamén o se-mieixe pode cambiarse polo período orbital co que está relacionado mediante (1.3).

### 1.1.3. Movimiento kepleriano perturbado

A dinámica dun sistema illado composto por un satélite que orbita un planeta esférico satisfai a ecuación (1.2) e seguirá un movemento kepleriano. Esta ecuación, que deriva dun potencial kepleriano ( $V_k = -\mu/r$ ), representaría un sistema ideal. En realidade, calquera sistema está influenciado por diferentes forzas ou potenciais que perturban o seu movemento, entón dise que se produce un movemento kepleriano perturbado e á ecuación anterior será necesario engadir un termo adicional,  $\mathcal{P}$ , que agrupará a suma das forzas que provocan estas perturbacións. Son realmente forzas entre unidade de masa, é dicir, aceleracións

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathcal{P}. \quad (1.12)$$

Partindo da expresión que relaciona a forza co potencial,  $\mathcal{P} = -\nabla V$ , ou o que é o mesmo,

$$\mathcal{P} = \left( -\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad (1.13)$$

e tendo en conta que as compoñentes do vector aceleración son as derivadas parciais do potencial con respecto a cada coordenada, as ecuacións de movemento do satélite serán

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{\partial V}{\partial z}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

A expresión do potencial,  $V$ , que afecta a un satélite, será a suma do potencial kepleriano,  $V_k = -\mu/(x^2 + y^2 + z^2)$ , e do potencial perturbador,  $V_p$ , que agrupará a suma de todas as perturbacións (potenciais e/ou forzas) que actúan sobre el.

As ecuacións (1.12) representan a formulación newtoniana do problema kepleriano perturbado xa sexa a partir da expresión da forza ou a través do potencial pero, en ambos os casos, expresada en función das coordenadas cartesianas do problema. Algunhas das perturbacións son difíciles de expresar en coordenadas cartesianas, polo que é necesario realizar un cambio de variables que simplifique a formulación destas perturbacións. Emporiso, estes cambios adoitan dificultar a expresión de ecuacións diferenciais transformadas. A formulación hamiltoniana da Mecánica, xunto co concepto de transformación e variables canónicas, simplifica de xeito notable o tratamento dos problemas perturbados. Para un sistema kepleriano perturbado, con forzas de perturbación conservadoras, definiremos o hamiltoniano do sistema como a expresión

$$\mathcal{H}(x, y, z, X, Y, Z) = \mathcal{H}_k + V_p,\tag{1.15}$$

onde  $\mathcal{H}_k$  é o hamiltoniano kepleriano dado por

$$\mathcal{H}_k = T + V_k, \quad T = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2),\tag{1.16}$$

sendo  $T$  a enerxía cinética e  $(x, y, z, X, Y, Z)$  as variables canónicas do sistema; de xeito que  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  son as coordenadas e  $\dot{\mathbf{r}} = (X, Y, Z)$  os momentos.

As ecuacións de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X}, & \frac{dX}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y}, & \frac{dY}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z}, & \frac{dZ}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

son equivalentes á ecuación vectorial (1.12), correspondente á formulación newtoniana, e substitúena para a integración do problema.

Se temos unha transformación, independente do tempo  $t$ , totalmente canónica  $(x, y, z, X, Y, Z) \longleftrightarrow (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ , para atopar as ecuacións do movemento nestas novas variables canónicas abonda con substituír as variables no hamiltoniano  $\mathcal{H}(x, y, z, X, Y, Z)$  para obter o novo hamiltoniano  $\mathcal{H}(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ . As ecuacións do movemento virán entón dadas polas ecuacións de Hamilton nas novas variables,

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.18)$$

Os parámetros orbitais serven para introducir algúns sistemas de variables canónicas como as de Delaunay ou as de Hill, moi empregadas en Astrodinámica.

As primeiras, que serán útiles para o desenvolvemento desta Tese, foron establecidas por [Delaunay \(1867\)](#) a partir dos traballos de [Binet \(1841\)](#), consisten no conxunto:  $l, g, h, L, G, H$ ; onde  $l, g, h$  son as coordenadas e  $L, G, H$  son os seus momentos conxugados. A súa relación cos elementos orbitais vén dada por

$$\begin{aligned} l &= n(t - T), & L &= \sqrt{\mu a}, \\ g &= \omega, & G &= L\sqrt{1 - e^2}, \\ h &= \Omega, & H &= G \cos i. \end{aligned} \quad (1.19)$$

En canto ás variables de [Hill \(1913\)](#), tamén chamadas polares-nodais ou de [Whittaker \(1904\)](#), están definidas polo conxunto  $(r, u, h, R, U, H)$

$$\begin{aligned}
r, & & R = \dot{r}, \\
u = \omega + f, & & U = 2c, \\
h = \Omega, & & H = U \cos i,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

con  $2c = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$  e por tanto  $U$  é igual a  $G$ .

En termos das variables de Delaunay, a expresión (1.15) adopta a forma

$$\mathcal{H} = \frac{\mu^2}{2L^2} + \mathcal{H}_{\mathcal{P}}, \tag{1.21}$$

en tanto que en variables polares-nodais resulta

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( R^2 + \frac{U^2}{r^2} \right) - \frac{\mu}{r} + \mathcal{H}_{\mathcal{P}}. \tag{1.22}$$

A solución clásica do problema implicaba integrar o sistema hamiltoniano correspondente utilizando métodos analíticos por ordes de perturbación. Porén, tamén se pu-xeron en práctica métodos semianalíticos e, por suposto, aplicáronse métodos numéricos, algúns deseñados ad hoc.

#### 1.1.4. Perturbacións

Ata agora, o sistema de satélites da Terra considerábase un *Problema de dous Corps*. En realidade, o satélite sofre unha serie de perturbacións de diversa índole que provocan que a súa órbita se modifique co paso do tempo. Isto implica que os elementos orbitais non sexan constantes. Ademais, non todas as perturbacións afectan por igual, algunhas fano periodicamente (perturbacións de *longo período* e *curto período* que se repiten cunha determinada frecuencia) e outras acumúlanse ao longo de cada órbita (*perturbacións seculares*).

Existe unha ampla bibliografía que describe estas perturbacións en detalle, nesta Memoria seguimos principalmente Kovalevsky (1967), Montenbruck e Gill (2001) e Walter (2019).

A continuación móstranse algunhas das perturbacións máis importantes que hai que ter en conta no movemento orbital dun satélite artificial.

### Potencial terrestre

É, sen dúbida, a perturbación máis importante que afecta á órbita dun satélite artificial arredor do noso planeta. Débese a que a Terra non é esférica e tamén ao feito de que tampouco é homoxénea (ver máis detalles en [Vetter \(1994\)](#), [Rapp \(1998\)](#), [Montenbruck e Gill \(2001\)](#) ou [Capderou \(2014\)](#)).

Para obter a expresión do potencial terrestre, partiremos do estudo do potencial creado por calquera sólido nun punto externo P, que podemos tomar como unidade de masa, utilizando o esquema mostrado na figura 1.6. Consideremos primeiro o potencial creado por un elemento diferencial Q do sólido, con masa  $dm$  e coordenadas  $(x_Q, y_Q, z_Q)$  referidas a un certo punto interior O, tomado como orixe. Sexan  $(x_P, y_P, z_P)$  as coordenadas de P, o punto que identificamos co satélite. Nestas condicións, o potencial creado por Q en P virá dado por

$$dV = -\frac{\mathcal{G}dm}{\Delta}. \quad (1.23)$$

Para calcular o potencial total do sólido sobre o satélite haberá que integrar sobre o seu volume total

$$V = -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \frac{dm}{\Delta}, \quad (1.24)$$

onde  $\Delta$  é a distancia entre o elemento de masa, Q, e P. Se o sólido fose un obxecto esférico, homoxéneo e uniforme de masa M o potencial sería

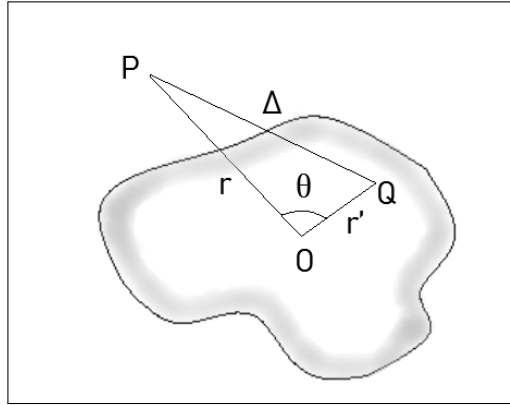
$$V = -\frac{\mathcal{G}M}{\Delta} = -\frac{\mathcal{G}M}{\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\|}. \quad (1.25)$$

No noso caso, o sólido é a Terra e, como se mencionou ao comezo deste apartado, non é homoxéneo e presenta anomalías gravitatorias, polo que é necesario calcular a integral en todos os seus puntos. Para iso, utilizaremos a expresión

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta. \quad (1.26)$$



No triángulo  $OPQ$  da figura 1.6 dedúcese,



**Figura 1.6:** Esquema dos elementos úteis para o cálculo do potencial criado por un sólido nun punto exterior.

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta\right]}}. \quad (1.27)$$

No estudo dos satélites artificiais, o cociente entre as distancias  $r'$  e  $r$  sempre será inferior a 1 e pódese empregar a seguinte igualdade baseándose nos polinomios de Legendre

$$\frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \theta\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (1.28)$$

Onde  $P_n(\cos \theta)$  é o *polinomio de Legendre de grao n*, definido pola expresión

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [\cos^2 \theta - 1]^n}{d \cos \theta^n}. \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
 P_0[\cos\theta] &= \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0 [\cos^2\theta - 1]^0}{d\cos\theta^0} = 1, \\
 P_1[\cos\theta] &= \frac{1}{2^1 1!} \frac{d [\cos^2\theta - 1]}{d\cos\theta} = \cos\theta, \\
 P_2[\cos\theta] &= \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2 [\cos^2\theta - 1]^2}{d\cos\theta^2} = \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1), \\
 P_3[\cos\theta] &= \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3 [\cos^2\theta - 1]^3}{d\cos\theta^3} = \frac{1}{2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta), \\
 P_4[\cos\theta] &= \frac{1}{2^4 4!} \frac{d^4 [\cos^2\theta - 1]^4}{d\cos\theta^4} = \frac{1}{8} (35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3), \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Substituíndo (1.28) e (1.29) en (1.24), chégase a

$$\begin{aligned}
 V &= -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \frac{dm}{\Delta} \\
 &= -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) dm \\
 &= -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [\cos^2\theta - 1]^n}{d\cos\theta^n} dm.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Descompoñendo agora esta expansión segundo a orde do polinomio de Legendre, teremos

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots \tag{1.32}$$

sendo

$$V = -\frac{\mathcal{G}}{r} \iiint_{Vol} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\theta) \right\} dm, \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
 V_0 &= -\mathcal{G} \iiint_{Vol} dm = -\frac{\mathcal{G}m_T}{r}, \\
 V_1 &= -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \frac{r'^1}{r^2} P_1(\cos\theta) dm = -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \frac{r'}{r^2} \cos\theta dm \\
 &= -\frac{\mathcal{G}}{r^3} \iiint_{Vol} rr' \cos\theta dm, \\
 V_2 &= -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \frac{r'^2}{r^3} P_2(\cos\theta) dm = -\mathcal{G} \iiint_{Vol} \frac{r'^2}{r^3} \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) dm \\
 &= -\frac{\mathcal{G}}{2r^4} \iiint_{Vol} rr'^2 (3\cos^2\theta - 1) dm, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

$$V_n = -\frac{\mathcal{G}}{r} \iiint_{Vol} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) dm. \tag{1.35}$$

Vexamos, porén, que  $V_1 = 0$  se facemos coincidir a orixe das coordenadas co centro de masa do sólido. De feito, nestas condicións podemos escribir,

$$\begin{aligned}
 V_1 &= -\mathcal{G} \frac{m_T}{r} \frac{1}{m_T} \int_{m_T} \frac{r'}{r} \cos\theta dm = -\mathcal{G} \frac{m_T}{r^3} \frac{1}{m_T} \int_{m_T} r' r \cos\theta dm \\
 &= -\mathcal{G} \frac{m_T}{r^3} \frac{1}{m_T} \int_{m_T} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r} dm = -\mathcal{G} \frac{m_T}{r^3} \mathbf{r} \frac{\int_{m_T} \mathbf{r}' dm}{\int_{m_T} dm},
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

mais

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\int_{m_T} \mathbf{r}' dm}{\int_{m_T} dm}, \tag{1.37}$$

é o vector de posición do centro de masas do sólido, ou sexa

$$V_1 = -\mathcal{G} \frac{m_T}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_0. \tag{1.38}$$

Polo tanto, se  $\mathbf{r}_0 = 0$  dedúcese que  $V_1 = 0$ .

A partir de agora empregaremos a constante gravitacional,  $\mu = \mathcal{G}m_T$ , onde  $m_T$  é a masa total do sólido (empregaremos o subíndice  $T$  porque máis tarde especificaremos

CAPÍTULO 1. MOVEMENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

as ecuacións para o caso da Terra), xa que a masa do satélite pode considerarse insignificante en comparación coa masa  $m_T$ .

Pasemos agora ás coordenadas polares esféricas, co polo no centro de masa do sólido. Sexan  $(r, \psi, \lambda)$  as do satélite, P, e  $(r', \psi', \lambda')$  as do elemento de masa do sólido, Q. Nestas condicións, se consideramos unha esfera de raio unidade concéntrica co sólido, fórmase sobre ela o triángulo esférico  $PQN$  (ver figura 1.7), e aplicándolle o teorema do coseno da trigonometría esférica, temos

$$\cos \theta = \cos(90^\circ - \psi') \cos(90^\circ - \psi) + \sin(90^\circ - \psi') \sin(90^\circ - \psi) \cos(\lambda - \lambda'), \quad (1.39)$$

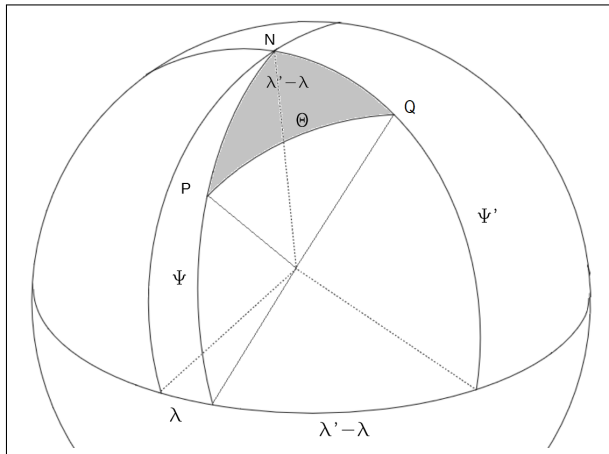


Figura 1.7: Coordenadas polares esféricas para o cálculo de  $\cos \theta$ .

ou ben,

$$\cos \theta = \sin \psi \sin \psi' + \cos \psi \cos \psi' \cos(\lambda - \lambda'). \quad (1.40)$$

A relación entre  $\psi$  e os parámetros orbitais  $\omega$  e  $i$  pódese deducir da figura 1.8, na que consideramos de novo unha esfera de raio unidade centrada na Terra e exterior á órbita do satélite. Proxectándoa sobre a dita esfera, fórmase nela un triángulo esférico rectángulo, a partir do cal a relación

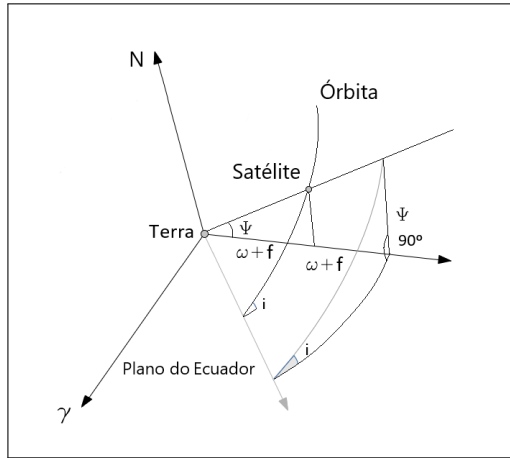


Figura 1.8: Coordenadas cilíndricas para o cálculo de  $\cos \theta$ .

$$\text{sen } \psi = \text{sen } i \text{ sen } (\omega + f). \quad (1.41)$$

Introducindo a igualdade (1.8) em (1.29) e facendo as pertinentes substituições, temos

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\text{sen } \psi) P_n(\text{sen } \psi') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\text{sen } \psi) P_n^m(\text{sen } \psi') \cos [m(\lambda - \lambda')], \quad (1.42)$$

Por outra parte, dedúcese os *polinômios asociados de Legendre*

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}}, \quad (1.43)$$

onde empregando a *fórmula de Rodrigues*, pode probarse que

$$P_n^0(x) = P_n(x). \quad (1.44)$$

$$\frac{r'^n}{r^n} = \frac{r'^n}{R_e^n} \frac{R_e^n}{r^n}, \quad (1.45)$$

sendo  $R_e$  a máxima distancia dende o centro de masas do sólido a un punto da súa superficie, que vén sendo o raio ecuatorial.

Substituíndo agora en (1.42) e (1.45) en (1.33), chégase a

$$\begin{aligned} V = & -\frac{\mu}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{m_T} \iiint_{Vol} \frac{r'^n}{R_e^n} \frac{R_e^n}{r^n} P_n(\text{sen } \psi) P_n(\text{sen } \psi') dm \right. \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{2}{m_T} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{Vol} P_n^m(\text{sen } \psi) \frac{r'^n}{R_e^n} \frac{R_e^n}{r^n} \left[ P_n^m(\text{sen } \psi') \cos(m\lambda) \cos(m\lambda') \right. \\ & \left. \left. + P_n^m(\text{sen } \psi') \text{sen}(m\lambda) \text{sen}(m\lambda') \right] dm \right]. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Con obxecto de deducir unha expresión máis manexable do potencial, definamos

$$\begin{aligned} J_n &= -\frac{1}{m_T} \iiint_{Vol} \frac{r'^n}{R_e^n} P_n(\text{sen } \psi') dm, \\ C_n^m &= \frac{2}{m_T} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{Vol} \frac{r'^n}{R_e^n} P_n^m(\text{sen } \psi') \cos(m\lambda') dm, \\ S_n^m &= \frac{2}{m_T} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{Vol} \frac{r'^n}{R_e^n} P_n^m(\text{sen } \psi') \text{sen}(m\lambda') dm. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Finalmente, levando (1.47) a (1.46) resulta

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \frac{R_e^n}{r^n} P_n(\text{sen } \psi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{R_e^n}{r^n} P_n^m(\text{sen } \psi) [C_n^m \cos(m\lambda) + S_n^m \text{sen}(m\lambda)] \right], \quad (1.48)$$

ou ben,

$$V = -\frac{\mu}{r} \left[ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \frac{R_e^n}{r^n} P_n(\text{sen } \psi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{R_e^n}{r^n} P_n^m(\text{sen } \psi) J_n^m \cos[m(\lambda - \lambda_n^m)] \right], \quad (1.49)$$

con

$$\begin{aligned} C_n^m &= J_n^m \cos(m\lambda_n^m), \\ S_n^m &= J_n^m \sin(m\lambda_n^m). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Sendo  $J_n$  os chamados harmónicos zonais e  $C_n^m$  e  $S_n^m$  os harmónicos teserais.

A expresión completa do xeopotencial é complexa e de difícil utilización, polo que adoitan formularse diferentes hipóteses co fin de simplificala.

- Se o centro de masa da Terra se toma coma orixe das coordenadas, como vimos de facer, o termo  $V_1$  de (1.32) cancelarase, como xa vimos anteriormente.
- Se se considera que a Terra ten simetría de revolución, os harmónicos teserais cancelaranse xa que neste caso o potencial non dependerá da lonxitude  $\lambda'$ ,

$$V = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \psi) \right\}. \quad (1.51)$$

- Se tamén admitimos que para a simetría da Terra con respecto ao plano ecuatorial, (1.51) o potencial non pode variar ao cambiar  $\psi$  por  $-\psi$ , entón só deberían aparecer os harmónicos zonais pares.

$$V = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\sin \psi) \right\}. \quad (1.52)$$

Unha das simplificacións máis utilizadas é desprezar todos os harmónicos excepto  $J_2$ , que se denomina *factor de forma dinámica da Terra* e ten un valor de  $1,0827 \times 10^{-3}$ . Os harmónicos zonais restantes son varias ordes de magnitude inferiores a esta, por exemplo:  $J_3 = -2,534 \times 10^{-6}$ ,  $J_4 = -1,620 \times 10^{-6}$ ,  $J_5 = -2,273 \times 10^{-7}$ ... Neste caso, a simplificación equivale a tomar a Terra como un elipsoide de revolución, polo que o potencial sería

$$V = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \frac{J_2}{2} (1 - 3 \sin^2 \psi) \right\}, \quad (1.53)$$

$$V = V_k + V_2. \quad (1.54)$$

Tomando como potencial o dado por (1.53), o caso correspondente denomínase *Problema Principal da teoría do satélite artificial*, sendo  $V_k = -\mu/r$  o potencial kepleriano (que se corresponde coa integral de (1.24) tomando a Terra como un sólido ríxido perfectamente esférico) e

$$V_2 = -\frac{\mu R_e^2 J_2}{2r^3} (1 - 3 \sin^2 \psi), \quad (1.55)$$

o primeiro sumando do potencial perturbador.

Tendo en conta agora a expresión (1.41), podemos pór  $V_2$  en termos dos elementos orbitais, do xeito,

$$V_2 = -\frac{\mu R_e^2 J_2}{4a^3} \left[ (1 - 3 \cos^2 i) \frac{a^3}{r^3} + 3 (1 - \cos^2 i) \frac{a^3}{r^3} \cos[2(\omega + f)] \right], \quad (1.56)$$

cuxa parte secular, unha vez promediado con respecto ao tempo, resulta ser

$$V_{2s} = -\frac{\mu R_e^2 J_2}{4a^3} (1 - 3 \cos^2 i) (1 - e^2)^{-3/2}. \quad (1.57)$$

Volvendo á expresión (1.49) é claro que esta se pode escribir como

$$V = V_k + V_p, \quad (1.58)$$

indicando por  $V_p$  o total do potencial perturbador, ou sexa aquel que abrangue tanto os harmónicos zonais como os tesaerais, e que dá conta da forma real do xeide.

$V_p$  podería compactarse aínda máis introducindo os elementos  $J_n$  no dobre sumatorio. Para iso, substituíndo  $m$  por 0 nas súas respectivas expresións en (1.47) obteremos que  $C_n^0 = -2J_n$  (con  $J_n = J_n^0$ ) de xeito que

$$V = -\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_e^n}{r^n} P_n^m(\sin \psi) [C_n^m \cos(m\lambda) + S_n^m \sin(m\lambda)]. \quad (1.59)$$

Para realizar unha programación que implique o xeopotencial, é necesario truncar a suma da ecuación (1.59) nun grao  $\mathcal{D}$  e nunha orde  $\mathcal{O}$ , creando un modelo de tamaño  $\mathcal{D} \times \mathcal{O}$ , do cal se coñecen todos os seus termos, polo que a expresión anterior terá a seguinte forma

$$V = -\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\mathcal{D}} \sum_{m=0}^{\min(m, \mathcal{O})} \frac{R_e^n}{r^n} P_n^m(\sin \psi) [C_n^m \cos(m\lambda) + S_n^m \sin(m\lambda)]. \quad (1.60)$$

Polo tanto, para definir o potencial dun sólido (sexa a Terra, a Lúa, un planeta ou outro obxecto celeste) será necesario coñecer os seguintes elementos: a constante gravitatoria, a distancia máxima do centro de masas do sólido ata un punto da súa superficie (que sería o raio ecuatorial no caso dun elipsoide), os harmónicos ata un grao  $\mathcal{D}$  ( $2 \leq n \leq \mathcal{D}$ ) e unha orde  $\mathcal{O}$  ( $0 \leq m \leq \min(m, \mathcal{O})$ ) e a velocidade angular de rotación do sólido, aínda que non aparece explicitamente na expresión (1.60), terá que usarse para referirse ao sistema inercial como se verá con máis detalle en 3.6.

Unha vez obtido o potencial e as ecuacións que definen o sistema dinámico correspondente, vexamos os diferentes modelos que tentan configurar o potencial dun corpo celeste. Para iso utilizáronse 3 principais vías de obtención de datos:

- Seguimento de satélites: utilizando para iso as perturbacións observadas directamente nos satélites en órbita. Adaptándose á tecnoloxía de cada época, pasouse de empregar telescopios como a cámara Baker-Nunn nos primeiros anos da historia aeroespacial, a comezar en 1965 a utilizar sistemas moito máis sofisticados baseados en medicións láser como a *SLR* (*Satellite Laser Ranging*) ou o efecto Doppler mediante radiometría e posteriormente o chamado *SST* (*Satellite-to-Satellite Tracking*).
- Gravimetría: utilízanse en superficie mediante un resorte estático que mide a aceleración gravitatoria nun lugar específico. Tamén é posible utilizalos a bordo dalgún medio de transporte, o que reduce a precisión, pero non por iso a súa utilidade.

- Altimetría: proporcionan gran información relacionada coa forma do xeoide. Mide a altitude dos satélites en relación co nivel medio do mar.

## CAPÍTULO 1. MOVEMENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

A partir dos datos obtidos (tratados individual ou conxuntamente) puidéronse elaborar diferentes modelos de potencial<sup>3</sup>. A súa orixe foron os modelos  $J_2$  de grao 2 e orde 0 (1957) e máis tarde o *Modelo de Kozai*, de grao 3 e orde 0 (1961). Estes modelos obtivéronse a partir de datos proporcionados polo *Sputnik* (1957) e o *Vanguard I* (1959). En 1972 produciuse un importante salto cualitativo co *GEM-1* (*Goddard Earth Model*) desenvolvido polo Goddard Space Flight Center e que tiña un valor de orde e grao de 12. Durante as décadas dos 70 e 80 o *GEM* marcou o ritmo do progreso dos modelos xeopotenciais, chegando a ter un tamaño<sup>4</sup> de 50x50 a principios dos 90; aínda que durante esas décadas algunhas excepcións chegaron ata os 200 (modelos *GPM*) e mesmo 360 (modelos *OSU*). Un dos máis utilizados foi o *EGM96* (*Earth Gravity Model*) de 1996 cun tamaño de 360x360. Ata o ano 2012 este valor supuxo un teito de cristal superado polo *EGM2008* cun tamaño de 2 190x2 159.

Tamén se empregou amplamente o modelo *JGM* (*Joint Earth Gravity Models*), de novo desenvolvido polo Goddard Space Flight Center en conxunto coa University of Texas e o Centre National d'Études Spatiales e do que hai 3 versións, a última de 1996 con tamaño 70x70.

No lado europeo, Francia e Alemaña foron os pioneiros co seu modelo *GRIM1* de grao 10 en 1975. A principios do novo século, crearon os modelos *EIGEN* (*Modelo europeo de gravidade mellorada da Terra mediante Novas Técnicas*) acadando o grao 1 949 en 2012 co *EIGEN-6C2*.

Como se pode ver na figura 1.9, onde se amosan representados graficamente os modelos de maior grao en cada unha das décadas dende 1960 a 2020, os cálculos foron progresando exponencialmente de xeito que en 54 anos se pasou dun modelo de tamaño 15x15 en 1966 a outro de 2 190x2 159 en 2019.

Aínda que nesta Tese nos centramos no potencial terrestre, é necesario indicar que se conseguiron modelos do potencial doutros corpos do sistema solar. A continuación móstranse algúns deles

---

<sup>3</sup> A maioría dos modelos pódense ver en detalle na páxina web da NASA <https://ntrs.nasa.gov/> onde están dispoñibles os informes técnicos dalgúns deles ou na páxina web do International Center for Global Earth Models, <http://icgem.gfz-potsdam.de/home>, onde se poden descargar os modelos e visualizalos.

<sup>4</sup> A partir deste momento, cando falemos do tamaño do modelo, estamos a nos referir a modelos co mesmo grao e orde.

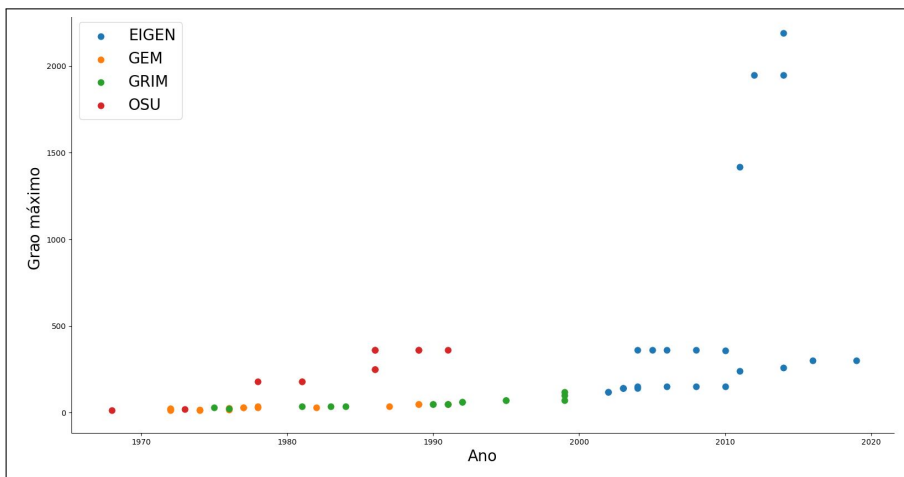


Figura 1.9: Modelos *EIGEN*, *GEM*, *GRIM* e *OSU* ao longo dos anos en función do seu grao máximo.

- **Lúa:** os modelos iniciais da Lúa, *GLGM-1* e *GLGM-2* (Lemoine *et al.* (1997)) presentaban un tamaño máximo de 70x70. No ano 2000 acadáronse modelos de ata 150x150 e 165x165, *JGL150Q1* e *JGL165P1*, respectivamente. Posteriormente conseguíronse de 900x900 (Lemoine *et al.* (2014)) e 1 200x1 200 (Goossens *et al.* (2016)).
- **Mercurio:** os máis recentes de Mercurio son o *HgMUCLA40x40* (Verma e Margot (2016)) de tamaño 40 e o *HgM005* de 50 (Mazarico *et al.* (2015)), obtidos ambos os dous a partir de 1311 órbitas da *MESSENGER* sobre o planeta entre 2011 e 2014. Actualmente o modelo *HgM008* de grao e orde 100 é o máis completo (Genova *et al.* (2019)).
- **Venus:** os modelos *MGNP120P* (Konopliv e Yoder (1996)) e *MGNP180U* (Konopliv, Banerdt e Sjogren (1999)) con tamaños 120 o primeiro deles e 180 o segundo, foron os máis empregados. Cos datos obtidos da sonda *MAGALLANES*, intentáronse aproximacións de ata grao e orde 200 (Goossens *et al.* (2017)).
- **Marte:** a comezos dos 90 publicouse un de tamaño 50, o *GMM-1* (Smith *et al.* (1993)). En anos posteriores fóronse mellorando con modelos de grao e orde 80 (*GMM-2C*). Os máis recentes constan dun tamaño 120x120, como o *GMM-3* (Genova *et al.* (2016)).

- **Outros:** grazas ás observacións directas ou indirectas puidéronse establecer modelos doutros corpos celestes: planetas ananos como Ceres (Šprlák, Han e Featherstone (2019)), algúns asteroides como por exemplo (4) Vesta (Konopliv *et al.* (2013)), (433) Eros (Fukushima (2017)) ou (21) Lutetia (Aljbaae *et al.* (2017)) ou cometas como 67P/Churyumov-Gerasimenko (Reimond e Baur (2016)).

### Influencia dun terceiro corpo

Outra perturbación a ter en conta, ademais do xeopotencial, que é o máis importante na dinámica do satélite artificial, é a influencia dun terceiro corpo como o Sol ou a Lúa. Un desenvolvemento completo de ambos os dous casos pódese ver en Patiño (2013) ou de xeito máis sinxelo en Montenbruck e Gill (2001).

Cómpre sinalar que esta perturbación, para un satélite terrestre artificial, consta de dous termos: o correspondente á Lúa e o correspondente ao Sol. Pero tamén é válido para calquera outro tipo de satélite perturbado por varias lúas ou por outro corpo masivo, polo tanto pódese xeneralizar a  $n$  corpos. Nas liñas seguintes, só se citará a presenza dun destes corpos para simplificar este apartado.

Partiremos dun terceiro corpo de masa  $m_{3c}$  de tal xeito que  $\mu_{3c} = \mathcal{G} m_{3c}$ , onde o subíndice  $3c$  corresponde ao corpo perturbador. Tomemos  $\mathbf{r}_{3c}(t)$  como un vector en función de  $t$  que representa o vector de posición do corpo con respecto ao centro de masas da Terra. O potencial perturbador resultará

$$V_{3c} = -\mu_{3c} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}_{3c} - \mathbf{r}\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{3c}}{\|\mathbf{r}_{3c}\|^3} \right), \quad (1.61)$$

ou o que é o mesmo, a forza por unidade de masa exercida polo terceiro corpo será

$$\mathbf{F}_{3c} = -\mathcal{G} \left( \frac{\mathbf{r}_{3c} - \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}_{3c} - \mathbf{r}\|^3} - \frac{\mathbf{r}_{3c}}{\|\mathbf{r}_{3c}\|^3} \right), \quad (1.62)$$

Vendo as relacións xeométricas que se extraen da figura 1.10, onde o terceiro corpo, de masa  $m_3$ , perturba calquera punto, P, a ecuación anterior pódese reescribir en forma escalar como

$$V_{3c} = -\mu_{3c} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{r \cos S_3}{r_3'^2} \right). \quad (1.63)$$

Nesta expresión,  $\rho$  é a distancia entre o terceiro corpo e o satélite,  $r_3'$  a distancia do centro de masa da Terra a ese corpo e  $S_3$  o ángulo, con vértice sobre a Terra, entre o satélite e o terceiro corpo (ver figura 1.10).

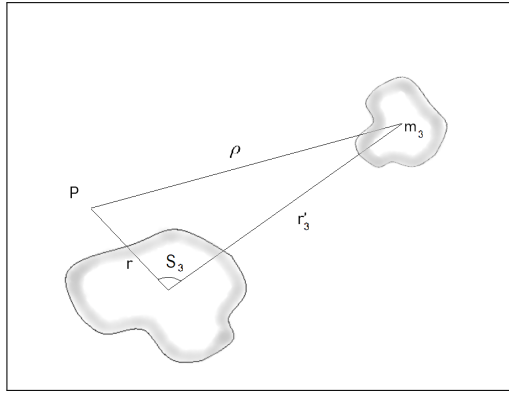


Figura 1.10: Esquema dos elementos útiles para o cálculo da influencia dun terceiro corpo.

Utilizando o desenvolvemento (1.28) (pero neste caso tendo en conta que  $r$  sempre será menor que  $r_3'$  e polo tanto  $\frac{r}{r_3'} < 1$ ), a expresión (1.63) pódese pór do xeito

$$V_{3c} = -\mu_{3c} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_3'^{n+1}} P_n(\cos S_3) - \frac{r \cos S_3}{r_3'^2} \right), \quad (1.64)$$

e desenvolvendo, chégase a

$$V_{3c} = -\mu_{3c} \left( 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{r_3'^{n+1}} P_n[\cos S_3] \right). \quad (1.65)$$

Ademais, dado que

$$\cos S_3 = \frac{xx_3 + yy_3 + zz_3}{rr_3'}, \quad (1.66)$$

o potencial do terceiro corpo que se crea sobre o satélite queda expresado finalmente na forma

$$V_{3c} = -\mu_{3c} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r^n}{r_3'^{n+1}} P_n \left( \frac{xx_3 + yy_3 + zz_3}{rr_3'} \right) \right]. \quad (1.67)$$

### Radiación solar

Independentemente de que o Sol se tome como terceiro corpo, tamén é axeitado ter en conta a radiación solar, xa que no espazo os corpos están sometidos á incidencia dos fotóns emitidos polo Sol, que producen presión sobre eles e que, no caso dos satélites, afecta ao seu movemento.

A expresión do potencial perturbador debido á radiación solar é

$$V_{\text{rad}} = \frac{\beta}{\| \mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r} \|}, \quad (1.68)$$

onde  $\beta$  é un factor que está relacionado con varios parámetros como veremos a continuación, sendo  $\mathbf{r}_{\odot}(t)$  o vector de posición do Sol.

Como se pode seguir en [Montenbruck e Gill \(2001\)](#), o fluxo solar medio está determinado por

$$\Phi = \frac{\Delta E}{A \cdot \Delta t}, \quad (1.69)$$

onde  $\Delta E$  é a enerxía dos fotóns que pasan por unha área,  $A$ , e  $\Delta t$  é o tempo no que se recibe o fluxo de enerxía.

Así mesmo, pódese calcular empiricamente dividindo o fluxo de fotóns que sae do Sol pola relación entre as superficies do Sol e a dunha esfera cun raio que coincide co lugar do sistema solar que se quere calcular. A expresión correspondente resulta ser

$$\Phi = K \cdot T_{ef}^4 \cdot \left( \frac{R}{a_0} \right)^2, \quad (1.70)$$

tal que  $K$  é a constante de Stefan-Boltzmann ( $5,670367 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ ),  $T_{ef}$  é a temperatura efectiva do Sol (5776K),  $R$  é o raio do Sol ( $6957 \times 10^8$  km ou, o que é o mesmo, 0,00465047 unidades astronómicas de distancia, ua) e, finalmente,  $a_0$  representa o raio dunha esfera que contén o lugar onde se vai calcular o fluxo (en au). Usando os valores incluídos anteriormente, teríamos un valor de  $\Phi = 1,367 \frac{W}{m^2}$ .

O pulo dun só fotón é igual á relación entre a enerxía do fotón e a velocidade da luz.

$$p_v = \frac{E_v}{c}, \quad (1.71)$$

e o cambio no pulo total dun corpo sometido á incidencia dos fotóns do Sol é proporcional á variación desa enerxía

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = \frac{\Phi}{c} A \Delta t, \quad (1.72)$$

polo que o corpo experimentará unha forza que será a variación do seu momento nun tempo determinado

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Phi}{c} A = P_{rs} A. \quad (1.73)$$

Nestas igualdades,  $P_{rs}$  representa a presión da radiación solar á distancia de 1 ua. Tomando como velocidade da luz  $299792,458 \frac{km}{s}$ , a dita presión será igual a  $4,55686 \times 10^{-6} \frac{N}{m^2}$ .

Nesta presión intervirán o material e a orientación do satélite, de forma que poidan absorber ou reflectir total ou parcialmente os fotóns. A forza total será a resta de ambos. Por outra banda, a forza de absorción, na dirección do Sol, con  $\theta$  igual ao ángulo entre as direccións cara ao satélite e o Sol, medido dende o centro de masas da Terra, será

$$F_{abs} = -P_{rs} \cos \theta A, \quad (1.74)$$

e cando os raios do Sol sexan totalmente reflectidos, existirá un pulo en dirección normal á superficie,

CAPÍTULO 1. MOVIMIENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

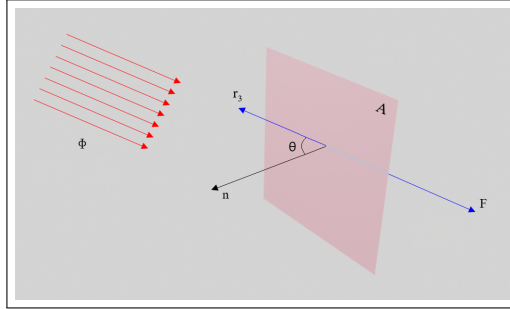


Figura 1.11: Absorción total,  $\epsilon = 0$ .

$$F_{ref} = -2P_{rs} \cos\theta A \cos\theta. \quad (1.75)$$

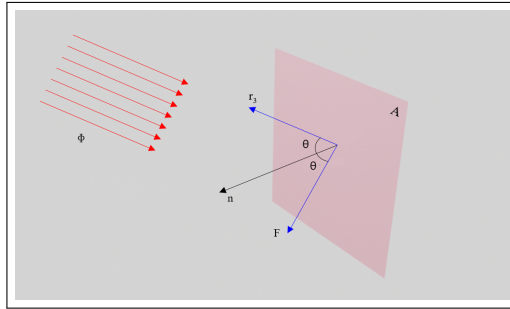


Figura 1.12: Reflexión total,  $\epsilon = 1$ .

Polo tanto, a forza total será

$$F = F_{abs} - F_{ref} = -P_{rs} \cos\theta A \left[ (1 - \epsilon) e + 2\epsilon \cos\theta n \right]. \quad (1.76)$$

Aquí,  $\epsilon$  representa o coeficiente de reflectividade (cuxos valores habituais para os satélites varían entre 0.2 e 0.9; onde o coeficiente será 0 se existe total absorción e 1 se ten unha reflexión completa ou especular). Ademais, podemos empregar a seguinte igualdade

$$\cos\theta = n^T e. \quad (1.77)$$

Por mor do movemento da Terra arredor do Sol, existen variacións na radiación solar (no perihelio terase un fluxo de  $1413,00 \frac{W}{m^2}$  e no afelio de  $1321,52 \frac{W}{m^2}$ ). Para ter en conta isto, incluíuse o termo  $r_{ua}$  que é o módulo do vector satélite-Sol (en unidades astronómicas de distancia).

Con todo isto teríamos que a forza perturbadora debida á radiación solar nun satélite de masa  $m$  (aínda que a masa do satélite pode variar ao longo da súa vida útil debido ao uso de combustible para realizar determinadas operacións, ao ser só momentos puntuais poderíase tomar como constante) sería de

$$F_{rad} = -P_{rs} (1 + \varepsilon) \frac{A}{m} r_{ua}^2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|} \cos \theta. \quad (1.78)$$

Vemos que aparece unha relación de grande importancia que relaciona a área e a masa, denominada na literatura, *AMR* (*proporción área-masa*). Neste senso é costume dividir os obxectos en

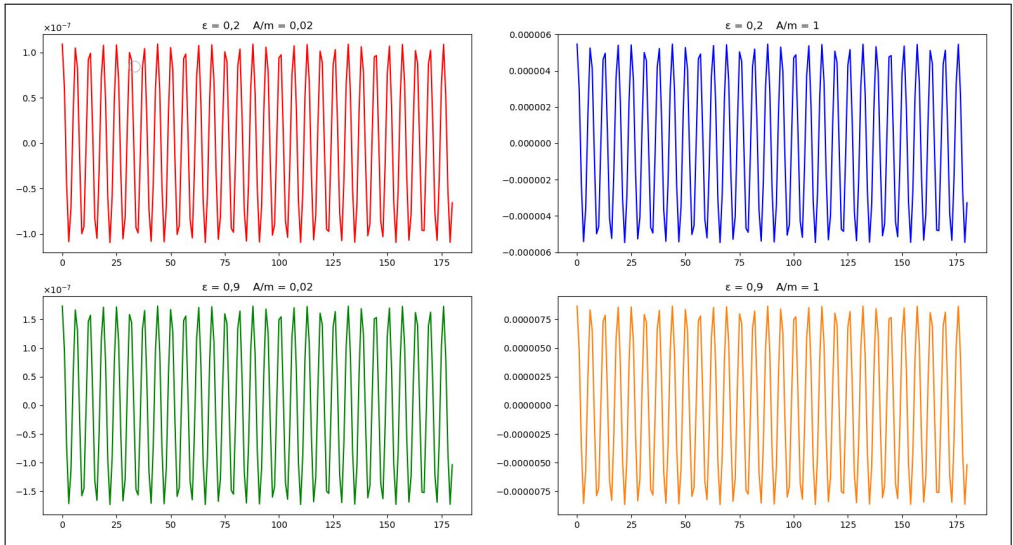
- *LAMR*: aqueles que presentan unha relación área-masa baixa e que normalmente corresponden a satélites, xa que se pretende reducir a perturbación producida pola radiación solar tanto de xeito estático (dependendo da xeometría do propio satélite) como dinámico (creando movementos de orientación que reduzan a zona de incidencia, denominados control de actitude).
- *HAMR*: aqueles que presentan unha relación área-masa elevada e que poderían corresponder a sondas espaciais (que buscarían a maior incidencia para aproveitar a presión da radiación solar) ou restos espaciais (cuxa relación é aleatoria e impredecible) e presentan un comportamento complexo.

Para facerse unha idea das ordes de magnitude, un satélite do sistema de posicionamento GPS ten unha relación área-masa de  $0.02 \text{ m}^2/\text{kg}$  (Früh e Schildknecht (2012)) mentres que un valor de  $1.00 \text{ m}^2/\text{kg}$  se considera moi alto (Früh, Kelecy e Moriba (2013)).

É neste punto onde podemos incluír todas as constantes dentro dun só parámetro que chamaremos reflectividade do satélite, e expresarémoslo mediante  $\beta$ , que non é outro que o que aparece na expresión (1.68). Así

$$\beta = -P_{rs} (1 + \varepsilon) \frac{A}{m} r_{ua}^2 \cos \theta, \quad (1.79)$$

e polo tanto é unha variable proporcional á presión que exercen os fotóns, á área perpendicular á súa dirección de incidencia e ao material do satélite; e inversamente proporcional á súa masa. Hai unha forma de aproveitar isto a priori na fase de deseño e é actuando sobre a súa forma, peso e material, e posteriormente durante a súa vida útil, actuando sobre a súa orientación (actitude do satélite).



**Figura 1.13:** Valor de  $\beta$  en función dos valores de  $\varepsilon$  (0.2 e 0.9) e  $A/m$  (0.02 e 1). Diferente escala vertical.

Con (1.78) e (1.79) pódese obter directamente o potencial perturbador debido á radiación solar, que vén dado por

$$V_{rad} = \frac{\beta}{r_{ua}}, \quad (1.80)$$

análoga a (1.68).

Ademais, hai que ter en conta a función de sombra, producida cando o satélite queda sen recibir os raios solares debido á interposición dalgún corpo (Terra ou Lúa).

Neste caso, teriamos que usar unha nova variable chamada función de sombra,  $\nu$ , para que a expresión anterior sexa como

$$V_{rad} = \nu \frac{\beta}{r_{ua}}, \quad (1.81)$$

que poderiamos, á súa vez, introducir na variable  $\beta$ .

A función de sombra terá os seguintes valores

- $\nu = 0$ : Cando o satélite se atope en umbra.
- $\nu = 1$ : Cando o satélite estea a recibir a luz do Sol completamente.
- $0 < \nu < 1$ : Cando o satélite estea en penumbra (recibindo parte da luz solar)

$$\nu = 1 - \frac{A}{\pi R^2}, \quad (1.82)$$

onde  $A$  é a área oculta e  $R$  é o raio aparente do corpo oculto (o Sol). Tomemos  $R'$  como o raio aparente do corpo que oculta o anterior e  $d_a$  como a distancia aparente dos centros de ambos os dous corpos, e agrupemos estes termos noutro tal que  $D = R^2 - R'^2 + d_a^2$ . Neste caso pódese calcular  $A$  do seguinte xeito,

$$A = R^2 \arccos\left(\frac{D}{2Rd_a}\right) + R'^2 \arccos\left[\frac{2d_a^2 - D}{2R'd_a}\right] - \sqrt{(2Rd_a)^2 - D^2}. \quad (1.83)$$

Ademais é preciso que se cumpra que

$$|R - R'| < d_a < R + R', \quad (1.84)$$

onde se

- $R + R' \leq d_a$ : non haberá ocultación.
- $d_a < R' - R$ 
  - Con  $R < R'$ : haberá ocultación total.



- $d_a < R - R'$ 
  - Con  $R > R'$ : ocultación parcial pero máxima.

A radiación solar non só é útil para ter en conta a súa acción sobre os satélites que orbitan a Terra, tamén é útil para o estudo da súa influencia en vehículos espaciais ou sondas que viaxan polo espazo cunha vela solar (ver Kirpichnikov *et al.* (1995) ou Leipold *et al.* (1999), por exemplo). Nestes casos, a incidencia dos fotóns actúa como un acelerador do obxecto se a vela ou unha superficie suficientemente grande está orientada cara ao Sol. Actualmente hai proxectos en marcha que pretenden facer uso destes elementos (por exemplo Horner *et al.* (2019)) e anualmente, dende hai 5 anos, celébrase o International Symposium on Solar Sailing, onde se presentan os últimos avances nesta tecnoloxía.

### Influencia da atmosfera

En órbitas baixas ou excéntricas con perixeo a baixa altitude (ata uns 500 km), a fricción da atmosfera inflúe de xeito significativo no movemento do satélite. Este rozamento prodúcese pola interacción das partículas da atmosfera co satélite, que ao circular a altas velocidades crean unha forza que se opón ao movemento.

A ecuación da resistencia dun satélite debido ao rozamento da atmosfera depende dun coeficiente de resistencia aerodinámico con valores entre 1 e 3 dependendo da forma e material do satélite,  $C_D$ ; da zona exposta ao rozamento do satélite,  $A$ ; da densidade do aire,  $\rho$ ; e da velocidade relativa do satélite,  $v$ ; Ademais, como é unha forza que se opón ao movemento, terá un signo oposto ao vector velocidade.

$$F_R = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho \|\mathbf{v}\| \mathbf{v}. \quad (1.85)$$

É dicir, esta forza depende da xeometría e das características intrínsecas do satélite, do seu movemento e das peculiaridades do medio polo que atravesa. Como se dixo, en altitudes superiores a 500 km estas peculiaridades desaparecen e estímase que non hai rozamentos. En órbitas baixas, porén, a densidade do aire cambia dependendo do modelo de composición da atmosfera que se tome. Aínda que non existen estudos definitivos sobre a súa composición a esa distancia, pódese axustar mediante diferentes modelos que xeralmente teñen unha expresión do tipo

$$\rho = \rho^* e^{-\alpha h}, \quad (1.86)$$

onde  $\rho^*$  é a densidade a unha altitude de referencia (ou unha expresión baseada nela),  $\alpha$  é unha constante específica de cada modelo e  $h$  é a altitude á que se atopa o satélite (polo tanto función da distancia ao centro de masas da Terra,  $\mathbf{r}$ ). Hai que ter en conta de todos os xeitos que existen variacións estacionais en canto a densidade para unha mesma altitude, polo que configurar este aspecto da atmosfera é extremadamente complexo.

Aínda que existen varios modelos que tentan describir globalmente neste senso, como *USSA76*, *GRAM99*, *HASDM*, *COSPAR* ou *MET99*, outros tamén se tentaron a menor escala (modelos rexionais). No noso caso empregaremos o *modelo ISA* (*International Standard Atmosphere*) que, a pesar da súa sinxeleza, dá moi bos resultados. Este modelo ten dúas partes diferenciadas en función dun límite marcado pola troposfera (é dicir, con  $h = 11\,000$  m).

- Altitudes  $< 11\,000$  m

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\alpha_T h}{\Theta_0} \right)^{\frac{g}{R_\alpha \alpha_T} - 1}. \quad (1.87)$$

- Altitudes  $\geq 11\,000$  m

$$\rho = \rho_{11} e^{-\frac{g(h-h_{11})}{R_\alpha \Theta_{11}}}. \quad (1.88)$$

Neste caso teremos como constantes a temperatura  $\Theta$ , a densidade  $\rho$  e a constante específica da mestura de gases atmosféricos  $R_\alpha$ . Os valores, no sistema internacional (SI), destas constantes son os que se amosan na táboa 1.1, onde o subíndice 0 representa os valores a nivel medio do mar e o subíndice 11 os valores á altitude  $h = 11\,000$  m.

$\alpha_T$	$6,5 \times 10^{-3}$	$K/m$
$\Theta$	$\Theta_0$	288,15
	$\Theta_{11}$	216,65
$\rho$	$\rho_0$	1,225
	$\rho_{11}$	0,3639
	$p_{11}$	$0,22632 \times 10^5$
$R_\alpha$	287,05	$J/(kg\ K)$
$g$	9,80665	$m/s^2$

Táboa 1.1: Valores no SI das fórmulas do modelo de densidade ISA.

## CAPÍTULO 1. MOVEMENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

A única fórmula que imos empregar será (1.88), xa que non ten senso tratar o rozamento dun satélite por debaixo dos 11 000 m xa que nese caso sería irrecuperable, se non se desintegrou nin se inutilizou antes<sup>5</sup>. Facendo un paralelismo coa ecuación (1.86), os valores da dita expresión serían

$$\begin{aligned}\rho^* &= \rho_{11} e^{\frac{gh_{11}}{R_\alpha \Theta_{11}}}, \\ \alpha &= \frac{g}{R_\alpha \Theta_{11}},\end{aligned}\tag{1.89}$$

que en SI sería:  $\rho^* = 2,0621 \text{ kg/m}^3$  e  $\alpha = 1,5769 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ .

O efecto da atmosfera nunha órbita elíptica afecta principalmente ao seu apoxeo, mentres que a posición do perixeo permanecerá aproximadamente constante. Un satélite que non corrixa a súa órbita por este motivo tenderá a reducir a súa excentricidade a medida que a altitude do apoxeo comece a diminuír. Finalmente, a órbita decaerá rapidamente ata reducir a súa altitude e o satélite comezará a sufrir as consecuencias da fricción e pode quedar totalmente destruído.

En canto á velocidade relativa do satélite, virá dada por

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}_i - (\boldsymbol{\omega}_{rot} \times \mathbf{r}) - \mathbf{v}_v,\tag{1.90}$$

onde  $\dot{\mathbf{v}}_i$  é o vector velocidade inercial do satélite,  $\boldsymbol{\omega}_{rot}$  é a velocidade angular da Terra ( $0,7292 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$ ) e  $\mathbf{v}_v$  a velocidade do vento (que no noso caso desprezaremos).

### Outras perturbacións

Existen outras perturbacións que tamén inflúen, aínda que en menor medida, no movemento dos satélites artificiais, como poden ser o albedo terrestre, os efectos relativistas, as mareas oceánicas, radiacións etc., que non se terán en conta na presente Memoria.

---

<sup>5</sup> De feito, a desintegración considérase irrecuperable e a vida útil do satélite é cuestión de horas a partir dunha altitude de 180 km (Hargreaves (1992)).

### 1.1.5. Ecuacións de Lagrange

Como vimos en 1.1.2, os parámetros orbitais permiten definir unha órbita, en particular a dun satélite artificial, cunhas condicións iniciais coñecidas ( $e_0, a_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$ ). Por iso, a órbita máis sinxela (a correspondente a un movemento kepleriano) sería aquela tal que

$$\begin{aligned}
 e_t &= e_0, \\
 a_t &= a_0, \\
 i_t &= i_0, \\
 \Omega_t &= \Omega_0, \\
 \omega_t &= \omega_0, \\
 M_t &= \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}(t - T_0),
 \end{aligned} \tag{1.91}$$

onde só varía con respecto ao tempo a anomalía media, pois é o único parámetro orbital que está ancorado ao satélite, xa que os outros identifican a xeometría e a posición do plano da órbita. Se ben esta variable,  $M_t$ , pode substituírse pola época de paso polo periastro,  $T$ , que no *Problema dos Dous Corpos* é outra constante  $T = T_0$ .

No caso do movemento kepleriano perturbado as ecuacións son máis complexas, xa que neste caso os elementos orbitais son funcións do tempo. O sistema que proporciona directamente a variación dos elementos orbitais é o formado polas coñecidas *ecuacións de Lagrange*. Obtelas implica diferenciar as variables de Delaunay (xa vistas en (1.19)) para obter unha serie de relacións útiles no proceso (ver por exemplo en [Kovalevsky \(1967\)](#) ou [Abad \(2012\)](#)).

#### Diferenciación de $l$

Utilizando a ecuación de  $l$  en (1.19) e diferenciándoa teremos

$$dl = ndt - ndT - (t - T) dn. \tag{1.92}$$



Por outra parte, escribindo a expresión (1.3) na forma

## CAPÍTULO 1. MOVEMENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

$$n^2 a^3 = \mu, \quad (1.93)$$

a súa diferenciación permítenos despexar  $dn$

$$2na^3 dn + 3n^2 a^2 da = 0, \quad (1.94)$$

$$dn = -\frac{3n}{2a} da, \quad (1.95)$$

e dese xeito substituír esta expresión en (1.92), de modo que se obtén

$$dl = dM = ndt - ndT - (t - T) \frac{3n}{2a} da. \quad (1.96)$$

### Diferenciación de $g$ e $h$

Tendo en conta a definición de  $g$  e  $h$ , resulta

$$\begin{aligned} dg &= d\omega, \\ dh &= d\Omega. \end{aligned} \quad (1.97)$$

### Diferenciación de $L$

A partir da súa definición en (1.19) obtense

$$dL = \frac{\mu}{2\sqrt{\mu a}} da, \quad (1.98)$$

ou ben



$$dL = \frac{\mu}{2L} da. \quad (1.99)$$

### Diferenciación de $G$

Dado que  $G = \sqrt{1 - e^2}$ , teremos

$$dG = dL\sqrt{1 - e^2} - L\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}de, \quad (1.100)$$

ou o que é o mesmo,

$$dG = \frac{\mu G}{2L^2}da - \frac{eL^2}{G}de, \quad (1.101)$$

facendo uso de (1.99).

### Diferenciación de $H$

A partir de  $H = G \cos i$ , dedúcese,

$$dH = \cos i dG - G \operatorname{sen} i di. \quad (1.102)$$

ou sexa,

$$dH = \frac{\mu G}{2L^2} \cos i da - \frac{eL^2}{G} \cos i de - G \operatorname{sen} i di. \quad (1.103)$$

### Expresión das ecuacións de Lagrange

Unha vez deducidos as diferenciais das seis variables de Delaunay en función das diferenciais dos seis elementos orbitais, despxendo estas últimas en función daquelas, dedúcese as derivadas con respecto ao tempo. Estas expresións combinadas son

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{dt} &= \frac{G^2}{eL^3} \frac{dL}{dt} - \frac{G}{eL^2} \frac{dG}{dt}, \\
 \frac{da}{dt} &= \frac{2L}{\mu} \frac{dL}{dt}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{G \sin i} \frac{dG}{dt} - \frac{1}{G \sin i} \frac{dH}{dt}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{dh}{dt}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{dg}{dt}, \\
 \frac{dT}{dt} &= 1 - \frac{1}{n} \frac{dl}{dt} - \frac{3L}{a\mu} (t-T) \frac{dL}{dt}.
 \end{aligned} \tag{1.104}$$

Tendo en conta as ecuacións de Hamilton nas variables de Delaunay,

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L}, \\
 \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, \\
 \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H},
 \end{aligned} \tag{1.105}$$

onde  $\mathcal{H}$  vén dado por (1.21), e dado que  $\mathcal{H}_P = \mathcal{H}_P(l, e, a, i, \omega, \Omega)$ , ao substituír obtense

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L}, \\
 \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G}, \\
 \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H},
 \end{aligned} \tag{1.106}$$

xa que a variable  $L$  tamén está presente no hamiltoniano non perturbado. Substituíndo agora (1.106) en (1.104) obteremos as expresións seguintes

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= -\frac{G^2}{eL^3} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l} + \frac{G}{eL^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g}, \\
\frac{da}{dt} &= -\frac{2L}{\mu} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l}, \\
\frac{di}{dt} &= -\frac{\cos i}{G \sin i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} + \frac{1}{G \sin i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h}, \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G}, \\
\frac{dl}{dt} = \frac{dM}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L}.
\end{aligned} \tag{1.107}$$

As derivadas parciais de  $\mathcal{H}_P$  con respecto a cada unha das variables de Delaunay resólvense pola regra da cadea, empregando as derivadas de  $\mathcal{H}_P$  con respecto aos seis elementos orbitais. Deste xeito obteremos un sistema de seis ecuacións que nos darán as variacións dos elementos orbitais en función das derivadas parciais do hamiltoniano perturbado (en realidade potencial perturbador) con respecto aos propios elementos orbitais. Estas son as chamadas *ecuacións de Lagrange* (ver máis en detalle por exemplo en [Docobo \(2021\)](#)),

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \omega} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l} \right), \\
\frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}na^2 \sin i} \left( \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \Omega} - \cos i \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \omega} \right), \\
\frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}na^2 \sin i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{na^2} \left( -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial e} + \frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \right), \\
\frac{dM}{dt} &= n + \frac{1}{na} \left( 2 \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial a} + \frac{1-e^2}{ae} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial e} \right).
\end{aligned} \tag{1.108}$$

Tendo en conta (1.7) e (1.93) obteremos a variación de  $T$  con respecto a  $t$  en termos de  $\frac{dM}{dt}$  e  $\frac{da}{dt}$ .

Neste punto é importante avanzar algúns dos problemas que implica o uso das ecuacións de Lagrange. As máis claras son as que involucran as variables atopadas nos denominadores que poden levar a unha indeterminación. En concreto, haberá que avaliar as situacións nas que  $e$  e  $i$  sexan iguais ou moi próximos a 0. Obviamente, as variables  $n$  e  $a$  nunca serán nulas e, ademais tampouco teremos en conta cando  $e$  é igual a 1 porque nese caso teríamos unha órbita parabólica, situación pouco habitual para os satélites artificiais.

Con este sistema de ecuacións poderemos calcular a solución secular de orde 1 do *Problema Principal do satélite artificial*, sendo neste caso  $\mathcal{H}_P$  a parte secular do potencial do *Problema Principal* ( $\mathcal{V}_{2s}$ , obtida en (1.57)). Levada a expresión  $\mathcal{H}_P = \mathcal{V}_{2s}$  a (1.108) e despois de calcular as derivadas parciais correspondentes, chégase a

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= 0, \\ \frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{di}{dt} &= 0, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2}n \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 J_2 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{3}{4}n \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 J_2 \frac{5\cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}, \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{3}{4}n \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 J_2 \frac{3\cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}. \end{aligned} \tag{1.109}$$

dado que  $\mathcal{H}_P$  non depende de  $\Omega$ ,  $\omega$  e  $M$ .

As tres primeiras igualdades non deben interpretarse como se os elementos  $e$ ,  $a$ ,  $i$  fosen constantes, senón que non teñen variacións seculares, só periódicas. Por outra banda, vemos que se a órbita do satélite é polar ( $i = 90^\circ$ ), entón  $\cos i = 0$  e  $\Omega_t = \Omega_0$ , é dicir que neste caso en particular, o ángulo do nodo tampouco tería perturbación secular.

En canto ao argumento do perixeo, non habería perturbación secular se o termo  $5\cos^2 i - 1$  fose cero. Isto é equivalente a que a órbita teña unha inclinación tal que  $\cos i = \sqrt{1/5}$ , é dicir,  $i = 63^\circ 26'$ . Isto é o que se chama *inclinación crítica*.

No que se refire á anomalía media, a ausencia dunha perturbación secular produciríase cando  $3\cos^2 i - 1$  é cero, é dicir, para  $i = 54^\circ 44'$ .

## 1.2. Métodos de integración

A partir dos estudos de Newton, que xa avanzaba que había certas perturbacións na órbita da Lúa debido á influencia do Sol, aumentou o interese pola dinámica do sistema Terra-Lúa arredor do Sol. Estes problemas implicaban non só as distancias mutuas entre os tres corpos senón tamén os ángulos entre eles (en planos diferentes), o que implicaba un alto grao de dificultade. O uso de desenvolvementos en serie de polinomios fixo que o tratamento do problema fose máis manexable, pero aínda presentaba unha gran complexidade. O estudo desta casuística deu lugar á chamada *Teoría de perturbacións*, coa que se deducen solucións aproximadas baseándose en que o hamiltoniano da perturbación é alomenos unha orde menor que o do problema non perturbado.

Existen diferentes formas de integrar este tipo de problemas que podemos dividir en 3 grandes grupos: métodos analíticos, métodos semianalíticos e métodos numéricos.

## 1.3. Métodos analíticos de integración

Neste apartado repasaremos os métodos que consideramos máis emblemáticos de cada un dos grupos, comezando polo que se considera o alicerce dos métodos de integración analítica: o *método de von Zeipel ou de Poincaré*. Este foi desenvolvido por von Zeipel ([von Zeipel \(1916\)](#)) a principios do século pasado baseándose na obra de Poincaré, e aínda que inicialmente non tivo moita repercusión, Brouwer “redescubriuno” en 1959.

Como calquera método analítico da época é moi restritivo xa que está deseñado para perturbacións moi sinxelas e sofre problemas de converxencia para períodos de tempo moi longos. Ademais, ten outras limitacións, xa que só é aplicable a sistemas conservativos que ademais sexan tamén periódicos na súa forma non perturbada; pero isto non supuxo un atranco para que fose a base dos posteriores métodos analíticos de integración en Mecánica Celeste, xa que se adapta perfectamente ao problema do satélite. Céntrase en atopar as constantes de integración no sistema perturbado.

O criterio xeral é atopar unha solución para un sistema de ecuacións diferenciais

## CAPÍTULO 1. MOVEMENTO ORBITAL DO SATÉLITE ARTIFICIAL

de primeira orde con 3 graos de liberdade empregando series de potencias. As transformacións canónicas realízanse secuencialmente utilizando funcións xeratrices de tal xeito que as variables angulares se eliminan en cada un destes chanzos ata acadar un hamiltoniano que só depende dos momentos e, polo tanto, sexa constante.

A maioría dos métodos posteriores e as súas aplicacións comezaron a desenvolverse na década dos 60 como resultado dos datos proporcionados polos satélites artificiais e grazas ao traballo pioneiro de von Zeipel.

As operacións a realizar para a obtención das solucións son de certa complexidade, que aumenta segundo a orde na que se trunca a serie, por iso, loxicamente, comezouse a estudar o caso de primeira orde (Brouwer (1959)), pasando á de segunda orde (Kozai (1962), Hori (1966)), á terceira orde (Deprit e Rom (1970), Kinoshita (1978)) e mesmo á cuarta ou máis (Deprit (1981)), nos anos posteriores. Algúns deles centráronse en resolver problemas con pequenos divisores que causaban inestabilidade nos cálculos (Lubow (1969)).

Un paso máis na solución da integración do problema do satélite artificial é aumentar o grao de solución ata a segunda orde. Os cálculos complícanse de xeito exponencial pero os avances neste senso tardaron pouco en facerse. Lahulla (1970) ou Caballero (1975) fan con dúas Teses de Doutoramento dirixidas polo profesor Cid na década dos 70<sup>6</sup>.

O seguinte paso é entrar nas solucións de terceira orde, por exemplo as de Kinoshita e Deprit e Rom. Ao tratarse de solucións moi complexas, remitimos aos artigos orixinais para poder afondar nas solucións presentadas, pois aquí mostráremolas dun xeito moi breve.

Aínda que existen solucións analíticas de ordes superiores a 4, non as consideraremos nesta Memoria. Como se pode ver nas seguintes liñas, os cálculos en cada orde fanse extremadamente difíciles no seu desenvolvemento e comprensión en relación a ordes menores. Debido a isto, actualmente os métodos de integración de alta orde realízanse mediante métodos numéricos.

A continuación mostraranse algúns dos métodos máis utilizados e das solucións

---

<sup>6</sup> Caballero faino baseándose no traballo de Calvo (1971) para primeira orde e utilizando ambas as variables de Hill.

obtidas co seu uso. As seguintes páxinas son, polo tanto, un compendio que intenta resumir os desenvolvementos e amosar os pasos máis importantes. Para poder obter unha visión completa e precisa dos mesmos, remitimos aos artigos orixinais de cada un dos autores que se citan en cada punto.

### 1.3.1. Método de von Zeipel

Von Zeipel utilizou variables de Delaunay (ver expresións en (1.19)) pola súa sinxeleza e pola súa relación cos elementos orbitais clásicos. O fundamento do método parte dun sistema canónico dependente dun pequeno parámetro ata chegar, mediante sucesivas transformacións canónicas, a outro hamiltoniano integrable. En concreto, busca unha transformación completamente canónica das variables de Delaunay  $(l, g, h, L, G, H)$  a outras variables  $(l', g', h', L', G', H')$  mediante unha función xeratriz  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(l, g, h, L', G', H')$  que cumpra

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial l}, & l' &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial L'}, \\ G &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial g}, & g' &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G'}, \\ H &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial h}, & h' &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H'}. \end{aligned} \tag{1.110}$$

A función  $\mathcal{S}$  transformará o sistema (1.105) noutro canónico

$$\begin{aligned} \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial L'}, \\ \frac{dG'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial g'}, & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial G'}, \\ \frac{dH'}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial h'}, & \frac{dh'}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial H'}, \end{aligned} \tag{1.111}$$

de xeito que

$$\mathcal{H}^*(l', g', h', L', G', H') = \mathcal{H}(l, g, h, L, G, H). \tag{1.112}$$

O método de von Zeipel consiste en eliminar algunhas das variables angulares en cada paso, centrándose primeiro nos termos de período curto, os correspondentes á

variable  $l$  e, finalmente, nos termos de longo período (dependentes de  $g$ ). Por este motivo, búscase unha función xeratriz de tal xeito que o novo hamiltoniano,  $\mathcal{H}^*$ , non conteña ningunha destas variables; reproducindo o proceso en cada paso conseguirase a eliminación de todas as variables angulares.

Por iso, partindo dun hamiltoniano,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(l, g, -, L, G, H)$ , onde  $H = cte$  (xa que no caso dun satélite en órbita respecto a un planeta con simetría axial equivale a tomar cero os termos tesorais),  $\mathcal{H}$  non depende da variable  $h$  e con (1.105) obtense que a súa derivada parcial con respecto a esa variable é nula. Usando a función xeratriz,  $\mathcal{S}$ , chegaremos a un novo hamiltoniano transformado:  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}^*(-, g', -, L', G', H')$ , que xa non depende da variable  $l'$  (e onde  $H'$  permanece constante, xa que se o hamiltoniano orixinal non depende en  $h$ , o hamiltoniano transformado tampouco dependerá de  $h'$ ).

Mediante outra función  $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}^*(l'', g'', -, L'', G'', H'')$ , imos ter

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial l'}, & l'' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial L''}, \\ G' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial g'}, & g'' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial G''}, \\ H' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial h'}, & h'' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial H''}. \end{aligned} \tag{1.113}$$

E do mesmo xeito, como vimos anteriormente,

$$\begin{aligned} \frac{dL''}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial l''}, & \frac{dl''}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial L''}, \\ \frac{dG''}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial g''}, & \frac{dg''}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial G''}, \\ \frac{dH''}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial h''}, & \frac{dh''}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial H''}, \end{aligned} \tag{1.114}$$

cuxo hamiltoniano será:  $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}^{**}(-, -, -, L'', G'', H'')$ . Polo tanto, de (1.114) obtense

$$\begin{aligned}
L'' &= cte, & \frac{dl''}{dt} &= n_l(cte), \\
G'' &= cte, & \frac{dg''}{dt} &= n_g(cte), \\
H'' &= cte, & \frac{dh''}{dt} &= n_h(cte),
\end{aligned} \tag{1.115}$$

de onde

$$\begin{aligned}
l'' &= n_l t + C_l, \\
g'' &= n_g t + C_g, \\
h'' &= n_h t + C_h.
\end{aligned} \tag{1.116}$$

Substituíndo en (1.113) e en (1.110), é dicir, invertendo o proceso, obteranse as variables iniciais de Delaunay en función do tempo e das constantes de integración, o que leva xa aos valores dos elementos orbitais en cada instante  $t$  (cálculo de efemérides).

### Solución de Brouwer

Brouwer empregou o método de von Zeipel para obter unha solución do problema do satélite (Brouwer (1959)). Aínda que a dita solución pode ser estendida a calquera orde, Brouwer centrouse unicamente na primeira orde. Para desenvolvela fixo a hipótese de que tanto o hamiltoniano,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ , como a función xeratriz,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 + \dots$ , pódense expresar en función de potencias do termo  $J_2$ , tomado como pequeno parámetro.

Para escoller o primeiro termo da función xeratriz, Brouwer optou pola función xeratriz identidade,  $\mathcal{S}_0$ ,

$$\mathcal{S}_0 = L'l + G'g + H'h, \tag{1.117}$$

de tal xeito que mediante as ecuacións (1.110) estableceu as relacións

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial l} = L' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \dots & l' &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial L'} = l + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial L'} + \dots \\
 G &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial g} = G' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} + \dots & g' &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial G'} = g + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G'} + \dots \\
 H &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial h} = H' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial h} + \dots & h' &= \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial H'} = h + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial H'} + \dots,
 \end{aligned} \tag{1.118}$$

e empregando a igualdade  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$ , xa vista no método de von Zeipel, resulta

$$\mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_2^* = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \tag{1.119}$$

onde  $\mathcal{H}^*$  é o hamiltoniano transformado, desenvolvido en ordes de perturbación.

Tendo en conta que se consideran os desenvolvementos ata  $J_2^2$  e que  $\mathcal{H}_0$  non depende das variables angulares, para que se poida aplicar o método de von Zeipel, resulta

$$\mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^*(-, g', -, L', G', H') + \mathcal{H}_2^*(-, g, -, L', G', H') = \mathcal{H}_0(L) + \mathcal{H}_1(l, g, -, L, G, H). \tag{1.120}$$

Empregando agora a fórmula de Taylor no contorno do punto  $(l, g, h, L', G', H')$ , pódese reescribir a ecuación anterior como

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^*(-, g, -, L', G', H') + \frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial g} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G'} + \mathcal{H}_2^*(-, g, -, L', G', H') = \\
 &\mathcal{H}_0(L') + \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial L'^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \right)^2 + \mathcal{H}_1(l, g, -, L', G', H') + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g},
 \end{aligned} \tag{1.121}$$

e ordenando por termos da mesma orde

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{H}_0^*(L') = \mathcal{H}_0(L'), \\
 &\mathcal{H}_1^*(-, g, -, L', G', H') = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \mathcal{H}_1(l, g, -, L', G', H'), \\
 &\frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial g} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G'} + \mathcal{H}_2^*(-, g, -, L', G', H') = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial L'^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial h}.
 \end{aligned} \tag{1.122}$$

Con iso, terase que

$$\mathcal{H}_0^* = \frac{\mu^2}{2L'^2}. \quad (1.123)$$

Descompoñendo agora  $\mathcal{H}_1$  en dous termos, un dos cales non dependa de  $l$ ,  $\mathcal{H}_{10}$ , e que o outro si o faga,  $\mathcal{H}_{1l}$ , de tal xeito que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \mathcal{H}_{1l} &= 0, \\ \mathcal{H}_1^* &= \mathcal{H}_{10}, \end{aligned} \quad (1.124)$$

obtense que

$$\mathcal{H}_1^* = \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{1l} dl = \frac{\mu^4 J_2}{L'^3 G'^3} \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H'^2}{G'^2} \right). \quad (1.125)$$

Integrando con respecto a  $l$  na ecuación (1.124) poderase calcular  $\mathcal{S}_1$  en función das relacións que xa se viron anteriormente,

$$\mathcal{S}_1 = \int \frac{L'^3}{\mu^2} \mathcal{H}_{1l}(l, g, -, L', G', H') dl. \quad (1.126)$$

Neste punto é posible atopar  $\mathcal{H}_2^*$  de (1.122), pois son coñecidos  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$ , realizando unha separación en dous termos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{20}^* &= \mathcal{H}_2^*(L', G', H'), \\ \mathcal{H}_{2g}^* &= \mathcal{H}_2^*(-, g, -, L', G', H'). \end{aligned} \quad (1.127)$$

Deste xeito o novo hamiltoniano vén dado por,

$$\mathcal{H}^* = \mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_{20}^* + \mathcal{H}_{2g}^*. \quad (1.128)$$

Será necesario un novo troco de variables tal que de  $(l', g', h', L', G', H')$  academos  $(l'', g'', h'', L'', G'', H'')$  mediante outra función xeratriz  $\mathcal{S}^*$ ,

$$\mathcal{S}^* = L''l' + G''g' + H''h' + \mathcal{S}_1^*(-, g', -, L'', G'', H''), \quad (1.129)$$

Así, de acordo coas expresións (1.113), dedúcense as relacións

$$\begin{aligned} L' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial l'} = L'', & l'' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial L''} = l' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial L''} + \dots \\ G' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial g'} = G'' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'} + \dots, & g'' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial G''} = g' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial G''} + \dots \\ H' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial h'} = H'', & h'' &= \frac{\partial \mathcal{S}^*}{\partial H''} = h' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial H''} + \dots, \end{aligned} \quad (1.130)$$

resultando,

$$\mathcal{H}^*(-, g', -, L', G', H') = \mathcal{H}^{**}(-, -, -, L'', G'', H''). \quad (1.131)$$

De xeito análogo ao proceso (1.120) terase

$$\mathcal{H}_0^* + \mathcal{H}_1^*(L'', G'' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'}, H'') + \mathcal{H}_{20}^* + \mathcal{H}_{2g}^* = \mathcal{H}_0^{**} + \mathcal{H}_1^{**} + \mathcal{H}_2^{**}, \quad (1.132)$$

de xeito que empregando a fórmula de Taylor de forma similar ao feito en (1.121), esta vez no contorno do punto  $(l', g', h', L'', G'', H'')$  obtense

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{**} &= \mathcal{H}_0^*, \\ \mathcal{H}_1^{**} &= \mathcal{H}_1^*, \\ \mathcal{H}_2^{**} &= \mathcal{H}_{20}^*, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial G''} \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'} + \mathcal{H}_{2g}^* &= 0. \end{aligned} \quad (1.133)$$



Con iso dedúcese o valor da función xeratriz  $\mathcal{S}_1^*$ , e integrando o sistema canónico final resulta

$$\begin{aligned}\frac{dL''}{dt} &= 0, & \frac{dl''}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial L''}, \\ \frac{dG''}{dt} &= 0, & \frac{dg''}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial G''}, \\ \frac{dH''}{dt} &= 0, & \frac{dh''}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial H''},\end{aligned}\tag{1.134}$$

con

$$\mathcal{H}^{**} = \frac{\mu^2}{2L''^2} + \frac{\mu^4 J_2}{L''^3 G''^3} \left( -\frac{1}{4} + \frac{3H''^2}{4G''^2} \right) + \mathcal{H}_2^{**},\tag{1.135}$$

e de aquí

$$\begin{aligned}l'' &= n_l(t - t_0), & L'' &= L_0, \\ g'' &= n_g(t - t_0), & G'' &= G_0, \\ h'' &= n_h(t - t_0), & H'' &= H_0,\end{aligned}\tag{1.136}$$

onde se obtén a solución ao problema en primeira orde.

A modo de exemplo, desenvolverase o método para o *Problema Principal da teoría do satélite artificial*<sup>7</sup>. Partiremos pois da expresión do potencial dado en (1.53), da que se deduce o hamiltoniano perturbado.

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu R_e^2}{r^3} J_2 P_2(\sin \psi).\tag{1.137}$$

Empregando (1.41), o termo de orde 1 do hamiltoniano pode pórse en función dos elementos orbitais na forma,

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{\mu R_e^2}{4r^3} J_2 \left[ -1 + 3\cos^2 i + 3(1 - \cos^2 i) \cos(2\omega + 2f) \right].\tag{1.138}$$

Deste xeito que vemos que  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(l, g, -, L, G, H)$ , xa que  $f$  depende de  $l$  i  $e(L, G)$ , sendo agora  $H$  constante pois  $\mathcal{H}_1$  non depende de  $h$ . Neste punto entra en xogo a función  $\mathfrak{S}$ , xa que para resolver (1.105) (que terá a forma (1.106)) é necesario

<sup>7</sup> Nas seguintes liñas seguiremos o desenvolvemento dado en Vinti (1998).

realizar unha transformación canónica a unhas novas variables  $(l', g', h', L', G', H')$  onde se cumpra (1.110) mediante a función xeratriz  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(l, g, h, L', G', H')$ . Para iso escóllese a chamada *función de transformación identidade*,  $\mathcal{S}_0$ , que ten en conta que as variables transformadas non serán moi diferentes das orixinais, pois unicamente aféctalles o harmónico  $J_2$

$$\mathcal{S}_0 = L'l + G'g + H'h. \quad (1.139)$$

Utilizando (1.110) obtense  $\mathcal{S}$ ,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0(l, g, h, L, G, H) + \mathcal{S}_1(l, g, -, L', G', H') + \mathcal{S}_2(l, g, -, L', G', H'), \quad (1.140)$$

e de novo con esa ecuación

$$\begin{aligned} L &= L' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial l}, & l' &= l + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial L'} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial L'}, \\ G &= G' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial g}, & g' &= g + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G'} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial G'}, \\ H &= H', & h' &= h + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial H'} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (1.141)$$

Desta forma obteremos o novo hamiltoniano

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(-, g', -, L', G', H) &= \mathcal{H}_0^*(-, -, -, L', G', H) + \mathcal{H}_1^*(-, g', -, L', G', H) \\ &+ \mathcal{H}_2^*(-, g', -, L', G', H), \end{aligned} \quad (1.142)$$

no cal elimínase  $l'$  o que implica, mediante (1.111), que  $L'$  ou é nula ou constante.

Neste punto hai que realizar unha serie de operacións que son o cerne do método

- Iguálase o hamiltoniano inicial a este novo hamiltoniano.
- Substitúense as variables polas novas.
- Utilízanse as series de Taylor para o punto anterior, de xeito que se pasa dun hamiltoniano función dunhas variables a unha expansión de Taylor do hamiltoniano sobre esas variables.

- Iguálanse en ambos os termos os elementos de igual orde, de tal xeito que nos quedará

- Orde 0

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^*, \quad (1.143)$$

- Orde 1<sup>8</sup>

$$\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \frac{d\mathcal{H}_0}{dL'} + \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^*, \quad (1.144)$$

- Orde 2

$$\frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial l} \frac{d\mathcal{H}_0}{dL'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \right)^2 \frac{d^2 \mathcal{H}_0}{dL'^2} + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \frac{d\mathcal{H}_1}{dL'} + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} \frac{d\mathcal{H}_1}{dG'} = \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G'} \frac{d\mathcal{H}_1^*}{dg} + \mathcal{H}_2^*, \quad (1.145)$$

e substituíndo coas novas variables mediante unha serie de cálculos que sobrepasan o contido deste exemplo (para ver o desenvolvemento completo: [Vinti \(1998\)](#), páxinas 219 a 240), obteremos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^* &= \frac{\mu^2}{2L'^2}, \\ \mathcal{H}_1^* &= \frac{\mu^4 R_e^2 J_2}{4L'^3 G'^3} \left( -1 + 3 \frac{H^2}{G'^2} \right), \\ \mathcal{H}_2^* &= \frac{\mu^6 R_e^4 J_2^2}{4L'^{10}} \left[ \frac{3}{32} \left( \frac{L'}{G'} \right)^5 \left( 5 - \frac{18H^2}{G'^2} + \frac{5H^4}{G'^4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \left( \frac{L'}{G'} \right)^6 \left( 1 - \frac{6H^2}{G'^2} + \frac{9H^4}{G'^4} \right) - \frac{15}{32} \left( \frac{L'}{G'} \right)^7 \left( 1 - \frac{2H^2}{G'^2} + \frac{7H^4}{G'^4} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\mu^6 R_e^4 J_2^2}{4L'^{10}} \left[ \frac{3}{16} \left( \frac{L'}{G'} \right)^5 \left( \frac{L'^2}{G'^2} - 1 \right) \left( 1 - \frac{16H^2}{G'^2} + \frac{15H^4}{G'^4} \cos(2g') \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Polo tanto realizouse unha transformación canónica mediante  $\mathcal{S}$  que permitiu pasar dun hamiltoniano  $\mathcal{H}(l, g, -, L, G, H)$  a outro  $\mathcal{H}^*(-, g', -, L', G', H')$ . O proceso para a seguinte transformación é semellante, de modo que se buscará pasar de  $\mathcal{H}^*(-, g', -, L', G', H')$  a  $\mathcal{H}^{**}(-, -, -, L'', G'', H'')$ ; eliminando en cada transformación unha variable do hamiltoniano anterior, neste caso cunha nova función  $\mathcal{S}^*$  tal que

<sup>8</sup> Tendo en conta que poderemos dividir  $\mathcal{H}_1$  en dúas partes: unha que dependa de  $l$ ,  $\mathcal{H}_{1l}$ , e outra independente desta variable,  $\mathcal{H}_{1g}$ .

$$\mathcal{S}^* = \mathcal{S}_0^* + \mathcal{S}_1^* = L''l' + G''g' + H''h' + \mathcal{S}_1^*, \quad (1.147)$$

buscando que se cumpra a ecuación (1.113) obtendo

$$\begin{aligned} L' &= L'', & l'' &= l' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial L''}, \\ G &= G'' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'}, & g'' &= g' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial G''}, \\ H &= H, & h'' &= h' + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial H}. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Isto leva á ecuación (1.115), de tal xeito que

$$\begin{aligned} L'' &= cte, & l'' &= l_0'' - \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial L''} t, \\ G'' &= cte, & g'' &= g_0'' - \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial G''} t, \\ H'' &= cte, & h'' &= h_0'' - \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial H''} t. \end{aligned} \quad (1.149)$$

E con isto vólvese empregar o esquema visto anteriormente, de forma que do mesmo xeito, igualamos termos segundo a orde

- Orde 0

$$\mathcal{H}_0^{**} = \frac{\mu^2}{2L'^2}, \quad (1.150)$$

- Orde 1

$$\mathcal{H}_1^{**} = \frac{\mu^4 R_e^2 J_2}{4L'^3 G''^3} \left( -1 + 3 \frac{H^2}{G''^2} \right), \quad (1.151)$$

- Orde 2

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^{**} &= \frac{\mu^6 R_e^4 J_2^2}{4L'^{10}} \left[ \frac{3}{32} \left( \frac{L'}{G''} \right)^5 \left( 5 - \frac{18H^2}{G''^2} + \frac{5H^4}{G''^4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \left( \frac{L'}{G''} \right)^6 \left( 1 - \frac{6H^2}{G''^2} + \frac{9H^4}{G''^4} \right) - \frac{15}{32} \left( \frac{L'}{G''} \right)^7 \left( 1 - \frac{2H^2}{G''^2} - \frac{7H^4}{G''^4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.152)$$

Polo tanto, o novo hamiltoniano será a suma dos tres termos anteriores:  $\mathcal{H}^{**} = \mathcal{H}_0^{**} + \mathcal{H}_1^{**} + \mathcal{H}_2^{**}$ . Mediante unha serie de operacións, podemos calcular  $\mathcal{S}_1^*$  na ecuación de  $G$  do sistema (1.148) e cos cálculos conseguintes obter os seguintes resultados,

$$\begin{aligned}
 L &= L' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l}, & l &= l_0'' - \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial L'} t - \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial L'} - \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial L'}, \\
 G &= G'' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} + \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'}, & g &= g_0'' - \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial G''} t - \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G'} - \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial G''}, \\
 H &= H'', & h &= h_0'' - \frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial H} t - \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial H} - \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial H}.
 \end{aligned} \tag{1.153}$$

Con isto podemos obter  $(l, g, h, L, G, H)$  como funcións de  $t$  e a partir delas, segundo (1.19) determinar o valor dos elementos orbitais en cada instante. Por último, tamén poderemos deducir os vectores posición e velocidade do satélite con respecto ao centro de masas da Terra.

### Solución de Kozai

De novo baseado no método de von Zeipel, foi desenvolvido por Kozai (1962) como unha solución de segunda orde a partir da solución de Brouwer. Cómpre sinalar que o propio Kozai xa publicara un artigo no mesmo volume de *The Astronomical Journal* que Brouwer en 1959 (Kozai (1959)) dando unha solución de primeira orde.

Kozai separou o hamiltoniano en varios termos para aplicar este método e derivar as perturbacións periódicas ata a primeira orde e as seculares ata a segunda.

A división do hamiltoniano fíxose nos seguintes termos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0 &= \frac{\mu^2}{2L^2}, \\
 \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_{12}, \\
 \mathcal{H}_2 &= \mathcal{H}_{22} + \mathcal{H}_{24}, \\
 \mathcal{H}_3 &= \sum_{n=5}^8 \mathcal{H}_{3n},
 \end{aligned} \tag{1.154}$$

onde cada un dos hamiltonianos con dobre subíndice,  $\mathcal{H}_{nm}$  (con  $m = 1, 2, 3$  e  $n = 5, 6, 7, 8$ ), correspóndense con



$$\mathcal{H}_{nm} = \frac{\mu^{m+2} J_m}{L^{2m+2}} \left(\frac{a}{r}\right)^{m+1} \mathcal{H}'_{nm}. \tag{1.155}$$

Sendo  $\mathcal{H}'_{mn}$

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0}^{\frac{m}{2}} \mathcal{B}_{m,2p} \cos 2p(f+g), & \text{se } m \text{ é par,} \\ & \sum_{p=0}^{\frac{m-1}{2}} \mathcal{B}_{m,2p+1} \text{sen } (2p+1)(f+g), & \text{se } m \text{ é impar,} \end{aligned} \quad (1.156)$$

sendo os coeficientes  $\mathcal{B}$  dependentes de  $\left(\frac{H}{G}\right)^2$ .

Como función xeratriz escolleu a mesma que von Zeipel, que á sua vez tamén a empregou Brouwer (1.139), e do mesmo modo que este último, usou a fórmula de Taylor no contorno do punto  $(l, g, h, L', G', H')$  para posteriormente igualar por termos de igual orde

$$\mathcal{H}_0(L') = \mathcal{H}_0^*(L'),$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \mathcal{H}_1(l, g, -, L', G', H') = \mathcal{H}_1^*(-, -, -, L', G', H'),$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial l} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial L'^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \right)^2 + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} + \mathcal{H}_2(l, g, -, L', G', H') = \\ & \mathcal{H}_2^*(-, g, -, L', G', H'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_0}{\partial L'^2} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial l} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \mathcal{H}_0}{\partial L'^3} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \right)^3 + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G'} \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial g} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial L'^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \right)^2 + \\ & \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial L' \partial G'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1}{\partial G'^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} \right)^2 + \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial L'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial G'} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial g} + \mathcal{H}_3(l, g, -, L', G', H') \\ & - \frac{\partial \mathcal{H}_2^*}{\partial g} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G'} = \mathcal{H}_3^*(-, g, -, L', G', H'). \end{aligned} \quad (1.157)$$

Destas ecuacións pódense obter  $\mathcal{H}_0^*$ ,  $\mathcal{H}_1^*$ ,  $\mathcal{H}_2^*$  e  $\mathcal{S}_1$ ; e a partir de aí calcular  $\frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial l}$ . Operando de forma análoga que na solución de Brouwer, obtéñense as diferentes partes

do hamiltoniano e da función xeratriz. Neste caso, existe a dificultade de ter a anomalía media, a verdadeira e a excentricidade de forma explícita.

As novas variables dedúcense mediante unha expresión similar á seguinte

$$L = L' + \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial l} - \frac{\partial^2 \mathcal{S}_1}{\partial l^2} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial L} - \frac{\partial^2 \mathcal{S}_1}{\partial l \partial g} \frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial G}, \quad (1.158)$$

onde serán necesarias as derivadas parciais de  $\mathcal{S}$  con respecto a  $L$ ,  $G$  e  $l$ .

O método de Kozai xoga coas partes dependentes e independentes dunha das variables. Por exemplo, no primeiro termo da última ecuación de (1.157) búscase a parte que non depende de  $l$  e calcúlase  $\mathcal{H}_3^*$ , que se dividirá á súa vez nunha parte que non contén a variable  $g$ ,  $\mathcal{H}_{3s}^*$ , e outra que si,  $\mathcal{H}_{3p}^*$ . O mesmo acontece coa ecuación anterior, onde  $\mathcal{H}_2^* = \mathcal{H}_{2s}^* + \mathcal{H}_{2p}^*$ . Unha vez que se determina o  $\mathcal{H}_i^*$ , dedúcese un novo sistema de ecuacións cos hamiltonianos da nova transformación

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{**} &= \mathcal{H}_0^*(L''), \\ \mathcal{H}_1^{**} &= \mathcal{H}_1^*(L'', G'', H''), \\ \mathcal{H}_2^{**} &= \frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial G''} \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'} + \mathcal{H}_2^*(-, g', -, L'', G'', H''), \\ \mathcal{H}_3^{**} &= \frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial G''} \frac{\partial \mathcal{S}_2^*}{\partial g'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_1^*}{\partial G''^2} \left( \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'} \right)^2 + \frac{\partial \mathcal{H}_2^*}{\partial G''} \frac{\partial \mathcal{S}_1^*}{\partial g'} + \mathcal{H}_3^*(-, g', -, L'', G'', H''). \end{aligned} \quad (1.159)$$

Neste sistema, os dous primeiros hamiltonianos obtéñense de xeito doado mentres que  $\mathcal{H}_2^{**}$  será igual a  $\mathcal{H}_{2p}^*(L'', G'', H'')$ .

Por outra banda,  $\mathcal{S}_1^*$  terá que dividirse, de xeito semellante ao que vimos cos hamiltonianos, nunha parte dependente de  $g'$ , que nos permitirá illar  $\mathcal{S}_2^*$ , e outro que non o sexa, co que se obterá  $\mathcal{H}_3^{**}$ , substituindo na última expresión de (1.159). Derivando obtéñense as novas variables, e mediante un proceso inverso dedúcese a solución.

### 1.3.2. Método de Hori

Centrándose na indeterminación que xorde en inclinacións case críticas ( $63.4^\circ$  nas órbitas directas e  $116.6^\circ$  nas retrógradas), Hori (Hori (1960)) propón o uso de desenvolvimentos en series en función das potencias da raíz cadrada de  $1 - 5 \cos^2 i$ , que

é o que produce o problema comentado (ver a ecuación do argumento periastro en (1.109), por exemplo).

Máis tarde, en 1966, Hori publicou outro artigo (Hori (1966)) onde utilizaba un novo método usando calquera variable canónica  $(x, y)$ , a partir dun hamiltoniano que non depende explicitamente do tempo e dunha función que determina a transformación canónica

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(x, y) &= \mathcal{H}_0(x, y) + \sum_{k \geq 1} \mathcal{H}_k(x, y), \\ \varepsilon \mathcal{S}(\xi, \eta) &= \sum_{k \geq 1} \mathcal{S}_k(\xi, \eta).\end{aligned}\tag{1.160}$$

Onde  $\mathcal{H}_k$  e  $\mathcal{S}_k$  conteñen as potencias dun pequeno parámetro,  $\varepsilon^k$ , como factor, e ademais

$$\sum_{k \geq 0} \mathcal{H}_k(x, y) = \sum_{k \geq 0} \mathcal{H}_k^*(\xi, \eta).\tag{1.161}$$

Aplicando agora o seguinte desenvolvemento en serie a  $\mathcal{H}_k$

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} D_{\mathcal{S}}^k f(x, y),\tag{1.162}$$

onde se fai uso dos operadores lineais seguintes (para  $n \geq 2$ )

$$\begin{aligned}D_{\mathcal{S}}^0 f &= f, \\ D_{\mathcal{S}}^1 f &= \{f, \mathcal{S}\}, \\ D_{\mathcal{S}}^n f &= D_{\mathcal{S}}^{n-1} \{D_{\mathcal{S}}^1 f\},\end{aligned}\tag{1.163}$$

e dos corchetes de Poisson

$$\{f, \mathcal{S}\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \eta_i} - \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \xi_i} \right),\tag{1.164}$$

substituíndo nas ecuacións anteriores e igualando por ordes de  $\varepsilon$ , obterase a primeira das igualdades entre as partes do hamiltoniano orixinal e as do transformado

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0^* &= \mathcal{H}_0, \\
\mathcal{H}_1^* &= \{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_1\} + \mathcal{H}_1, \\
\mathcal{H}_2^* &= \{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_2\} + \{\mathcal{H}_1, \mathcal{S}_1\} + \frac{1}{2}\{\{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_1\}, \mathcal{S}_1\} + \mathcal{H}_2, \\
\mathcal{H}_3^* &= \{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_3\} + \{\mathcal{H}_1, \mathcal{S}_2\} + \{\mathcal{H}_2, \mathcal{S}_1\} + \frac{1}{2}\{\{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_2\}, \mathcal{S}_1\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\{\{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_1\}, \mathcal{S}_2\} + \frac{1}{2}\{\{\mathcal{H}_1, \mathcal{S}_1\}, \mathcal{S}_1\} + \frac{1}{6}\{\{\{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_1\}, \mathcal{S}_1\}, \mathcal{S}_1\} + \mathcal{H}_3.
\end{aligned} \tag{1.165}$$

Seguidamente, mediante un parámetro  $t'$  que cumpra

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_j}{dt'} &= \frac{\partial H_0}{\partial \eta_j}, \\
\frac{d\eta_j}{dt'} &= -\frac{\partial H_0}{\partial \xi_j}, \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_k\} &= -\frac{d\mathcal{S}_k}{dt'},
\end{aligned} \tag{1.166}$$

trátase de atopar unha transformación canónica que elimine o parámetro  $t'$  do novo hamiltoniano  $\mathcal{H}^*$  de modo que se obterá un sistema semellante ao anterior pero verificando

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \eta_j}, \\
\frac{d\eta_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial \xi_j}, \\
\mathcal{H}_0^*(\xi, \eta) &= cte, \\
\mathcal{H}^*(\xi, \eta) &= cte.
\end{aligned} \tag{1.167}$$

O parámetro  $t'$  serve para poder dividir unha función  $\mathcal{F}$  en dúas partes, de tal xeito que



$$\mathcal{F}_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{F}(t') dt', \tag{1.168}$$

de modo que  $\mathcal{F}_p = \mathcal{F} - \mathcal{F}_s$  onde  $\mathcal{F}_s$  será o valor medio de  $\mathcal{F}$ .

Isto levará ao seguinte sistema de ecuacións, a semellanza de (1.165)


$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0^* &= \mathcal{H}_0, \\
 \mathcal{H}_1^* &= \mathcal{H}_{1s}, \\
 \mathcal{S}_1 &= \int \mathcal{H}_{1p} d\lambda, \\
 \mathcal{H}_2^* &= \mathcal{H}_{2s} + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_1 \}_s, \\
 \mathcal{S}_2 &= \int \left( \mathcal{H}_{2p} + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_1 \}_p \right) d\lambda, \\
 \mathcal{H}_3^* &= \mathcal{H}_{3s} + \frac{1}{12} \{ \{ \mathcal{H}_{1p}, \mathcal{S}_1 \}, \mathcal{S}_1 \}_s + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_2^*, \mathcal{S}_1 \}_s + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_2 \}_s, \\
 \mathcal{S}_3 &= \int \left( \mathcal{H}_{3p} + \frac{1}{12} \{ \{ \mathcal{H}_{1p}, \mathcal{S}_1 \}, \mathcal{S}_1 \}_p + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_2^*, \mathcal{S}_1 \}_p + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_2 \}_p \right) d\lambda.
 \end{aligned} \tag{1.169}$$

Deste modo, cunha nova transformación canónica de función  $\mathcal{S}^*(p, q)$  obtense un novo hamiltoniano,  $\mathcal{H}^{**}(p, q)$ , do mesmo modo que xa foi visto.

Utilizando as variables de Delaunay, Hori tomou os tres primeiros hamiltonianos (o orixinal e dous transformados) como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0(L) + \mathcal{H}_1(l, g, -, L, G, H) + \mathcal{H}_2(l, g, -, L, G, H), \\
 \mathcal{H}^* &= \mathcal{H}_0^*(L') + \mathcal{H}_1^*(L', G', H') + \mathcal{H}_2^*(-, g', -, L', G', H') + \mathcal{H}_3^*(-, g', -, L', G', H'), \\
 \mathcal{H}^{**} &= \mathcal{H}_0^{**}(L'') + \mathcal{H}_1^{**}(L'', G'', H'') + \mathcal{H}_2^{**}(L'', G'', H'') + \mathcal{H}_3^{**}(L'', G'', H'').
 \end{aligned} \tag{1.170}$$

### Solución de Kinoshita

 Kinoshita (1978) presentou unha solución de terceira orde baseada no método de Hori, onde tivo en conta os harmónicos  $J_3$  e  $J_4$ , de tal xeito que dividiu o hamiltoniano

en tres partes<sup>9</sup>,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \frac{\mu^2}{2L}, \\ \mathcal{H}_1 &= -\frac{\mu R_e^2}{r^3} J_2 P_2(\text{sen } \psi), \\ \mathcal{H}_2 &= -\frac{\mu R_e^3}{r^4} J_3 P_3(\text{sen } \psi) - \frac{\mu R_e^4}{r^5} J_4 P_4(\text{sen } \psi).\end{aligned}\tag{1.171}$$

Asumindo que a excentricidade é pequena, expresou  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  en series de potencias da mesma.

Agрупando e igualando os termos para cada orde do hamiltoniano orixinal cos do hamiltoniano transformado, obtense

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0^* &= \mathcal{H}_0, \\ \mathcal{H}_1^* &= \mathcal{H}_{1s}, \\ \mathcal{S}_1 &= \frac{L'^3}{\mu^3} \int \mathcal{H}_{1p} dl, \\ \mathcal{H}_2^* &= \mathcal{H}_{2s} + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_1 \}_s, \\ \mathcal{S}_2 &= \frac{L'^3}{\mu^3} \int \left( \mathcal{H}_{2p} + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_1 \}_p \right) dl', \\ \mathcal{H}_3^* &= \frac{1}{12} \{ \{ \mathcal{H}_{1p}, \mathcal{S}_1 \}, \mathcal{S}_1 \}_s + \frac{1}{2} [ \{ \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_2^*, \mathcal{S}_1 \}_s + \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_2 \}_s ], \\ \mathcal{S}_3^* &= \frac{L'^3}{\mu^2} \int \frac{1}{12} \{ \{ \mathcal{H}_{1p}, \mathcal{S}_1 \}, \mathcal{S}_1 \}_p + \frac{1}{2} [ \{ \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_2^*, \mathcal{S}_1 \}_p + \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_2 \}_p ] dl', \\ \mathcal{H}_4^* &= \frac{1}{2} [ \{ \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_1^*, \mathcal{S}_3 \}_s + \{ \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_2^*, \mathcal{S}_2 \}_s + \{ \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_3^*, \mathcal{S}_1 \}_s ] \\ &\quad + \frac{1}{12} [ \{ \{ \mathcal{H}_{1p}, \mathcal{S}_1 \}, \mathcal{S}_2 \}_s + \{ \{ \mathcal{H}_{1p}, \mathcal{S}_2 \}, \mathcal{S}_1 \}_s + \{ \{ \mathcal{H}_{2p}, \mathcal{S}_1 \}, \mathcal{S}_1 \}_s ].\end{aligned}\tag{1.172}$$

O seguinte paso é calcular o novo hamiltoniano,  $\mathcal{H}^{**}$ , e a nova función,  $\mathcal{S}^*$ , que permita eliminar os termos de longo período, co mesmo procedemento que antes



<sup>9</sup> Lembremos en 1.1.4 o significado de  $\psi$ .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_1^{**} &= \mathcal{H}_1^*, \\
 \mathcal{H}_2^{**} &= \mathcal{H}_2^*, \\
 \mathcal{S}_1^* &= -\frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial G''}} \int \mathcal{H}_{2p}^* dg'', \\
 \mathcal{H}_3^{**} &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_2^* + \mathcal{H}_2^{**}, \mathcal{S}_1^* \}_s, \\
 \mathcal{S}_2^* &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial G''}} \int \{ \mathcal{H}_2^* + \mathcal{H}_2^{**}, \mathcal{S}_1^* \}_p dg'', \\
 \mathcal{H}_4^{**} &= \frac{1}{12} \{ \{ \mathcal{H}_{2p}^*, \mathcal{S}_1^* \}, \mathcal{S}_1^* \}_s + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_3^* + \mathcal{H}_3^{**}, \mathcal{S}_1^* \}_s + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_2^* + \mathcal{H}_2^{**}, \mathcal{S}_2^* \}_s, \\
 \mathcal{S}_3^* &= -\frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}_1^*}{\partial G''}} \int \frac{1}{12} \{ \{ \mathcal{H}_{2p}^*, \mathcal{S}_1^* \}, \mathcal{S}_1^* \}_p + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_3^* + \mathcal{H}_3^{**}, \mathcal{S}_1^* \}_p + \frac{1}{2} \{ \mathcal{H}_2^* + \mathcal{H}_2^{**}, \mathcal{S}_2^* \}_p dg''.
 \end{aligned} \tag{1.173}$$

Unha vez eliminados os termos de curto e longo período, o hamiltoniano de orde tres non conterá variables angulares e  $L''$ ,  $G''$  e  $H''$  serán constantes, co que as variables angulares poderán ser obtidas por cadraturas

$$\begin{aligned}
 l'' &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial L''} + l_0'', \\
 g'' &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial G''} + g_0'', \\
 h'' &= -\frac{\partial \mathcal{H}^{**}}{\partial H''} + h_0''.
 \end{aligned} \tag{1.174}$$

Facendo as substitucións de xeito inverso chégase á solución completa do problema.

### 1.3.3. Método de Deprit

Deprit atopa no método de von Zeipel unha serie de reparos, como as operacións de inversión e substitución e, sobre todo, a dificultade de implementar un algoritmo que teña en conta algunhas das relacións que se requiren para aplicar o método (por exemplo, que a transformación sexa analítica nos momentos). Para solucionalo, a diferenza dos autores anteriores, empregou a transformación de Lie,  $\mathcal{L}$ , sobre o sistema canónico orixinal para poder obter outros sistemas canónicos máis doados de integrar (Deprit (1969)). O método consiste en calcular iterativamente a función xeratriz  $\mathcal{S}$

dunha transformación de Lie,  $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ , partindo dun sistema canónico con hamiltoniano  $\mathcal{H}$  a outro co hamiltoniano  $\mathcal{H}^*$  máis sinxelo de integrar, e así sucesivamente (ver desenvolvemento en [Docobo \(1977\)](#)<sup>10</sup>).

Unha transformación de Lie xeratriz  $\mathcal{S}(x, t; \varepsilon)$  é unha transformación en  $\mathbb{R}^{2n}$  (onde  $n$  é a dimensión tanto das coordenadas como dos momentos xeneralizados) definido por  $\mathcal{L}(\mathcal{S}) : \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$  onde  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$  é a solución dun problema de valores iniciais (que no caso que se está a estudar é o problema do satélite artificial) tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\varepsilon} &= \mathcal{J}\mathcal{S}_x(\mathbf{x}, t; \varepsilon), \\ \mathbf{x}(\varepsilon = 0) &= \mathbf{y}, \end{aligned} \tag{1.175}$$

onde  $\mathcal{J}$  é a matriz,

$$\begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -1_n & 0_n \end{pmatrix}, \tag{1.176}$$

sendo  $0_n$  e  $1_n$  as matrices nula e unidade de orde  $n$ , respectivamente; e con  $\mathcal{S}_x$  igual ao gradiente de  $\mathcal{S}$  con respecto de  $\mathbf{x}$ , é dicir o vector das derivadas parciais de  $\mathcal{S}$  con respecto dos compoñentes do vector  $\mathbf{x}$ . Por outra banda a función  $\mathcal{S}$  poderase desenvolver do xeito

$$\mathcal{S} = \sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathcal{S}_{k+1}(\mathbf{x}, t). \tag{1.177}$$

Se se aplica a transformada de Lie sobre unha función  $f(\mathbf{x}, t; \varepsilon)$ , chamarase transformada de  $f$  mediante  $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ , denominándose  $\mathcal{L}(\mathcal{S})f$  a función  $f^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$ , de tal modo que

$$f^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon) = \mathcal{L}(\mathcal{S})f = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t; \varepsilon), t; \varepsilon), \tag{1.178}$$

sendo  $-\mathcal{S}^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$  a función xeratriz da transformación inversa,  $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{S})$ .

<sup>10</sup> Aínda que é habitual ao formular este método facelo nun hamiltoniano independente de  $t$ , neste caso presentarémolo xeneralizado para un que si o fai, para o que se aplica o formalismo homoxéneo que engade unha variable e un momento (ver con detalle en [Aparicio Morgado \(2013\)](#)).

Se agora  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)$  é o hamiltoniano dun problema dinámico representado polo sistema canónico,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{J}\mathcal{H}_x, \quad (1.179)$$

e asumindo que

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n(\mathbf{x}, t), \quad (1.180)$$

poderase aplicar a transformación de Lie ao sistema (1.179) obtendo un novo hamiltoniano transformado  $\mathcal{K}(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$ , que á súa vez terá a forma

$$\mathcal{K}(\mathbf{y}, t; \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon^j}{j!} \mathcal{K}_j(\mathbf{y}, t). \quad (1.181)$$

Deste modo obtense a seguinte relación entre o hamiltoniano inicial e o novo,

$$\mathcal{K}(\mathbf{y}, t; \varepsilon) = \mathcal{H}^*(x(\mathbf{y}, t; \varepsilon), t; \varepsilon) + \mathcal{R}(\mathbf{y}, t; \varepsilon), \quad (1.182)$$

sendo  $\mathcal{R}$  a *función resto* da transformación  $\mathcal{L}(\mathcal{S})$  respecto de  $\mathcal{H}$ . Ademais, verifícase que o primeiro termo  $\mathcal{H}(x(\mathbf{y}, t; \varepsilon), t; \varepsilon)$  é igual ao primeiro de  $\mathcal{H}^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$ .

Tomemos agora os vectores de  $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = (t, x_1, \dots, x_n, -\mathcal{H}, X_1, \dots, X_n)$  e  $\bar{\mathbf{y}} = (t, y_1, \dots, y_n, -\mathcal{H}^*, Y_1, \dots, Y_n)$ . Denominaremos *transformación de Lie ampliada* de xerador  $\mathcal{S}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)$  a transformación nese dominio definida por  $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) : \bar{\mathbf{y}} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{y}}, t; \varepsilon)$ , onde  $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{y}}, t; \varepsilon)$  é a solución dun problema de valores iniciais tal que

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\varepsilon} &= \bar{\mathcal{J}}\mathcal{S}_{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{x}}; \varepsilon), \\ \bar{\mathbf{x}}(\varepsilon = 0) &= \bar{\mathbf{y}}, \end{aligned} \quad (1.183)$$

$$t(\varepsilon = 0) = t,$$

$$-\mathcal{H}|_{\varepsilon=0} = -\mathcal{H}[\bar{\mathbf{x}}(\varepsilon = 0), t; \varepsilon] = -\mathcal{K}(\bar{\mathbf{y}}, t; \varepsilon).$$

Pódese observar que este sistema é a unión do sistema orixinal (1.175) e doutro dado polas ecuacións

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\varepsilon} &= 0, \\ \frac{d(-\mathcal{H})}{d\varepsilon} &= -\mathcal{S}_t, \\ t(\varepsilon = 0) &= t, \\ -\mathcal{H}|_{\varepsilon=0} &= -\mathcal{K}(\mathbf{y}, t; \varepsilon). \end{aligned} \tag{1.184}$$

Isto implica que a solución de (1.175) representa a transformación  $\mathcal{L}(\mathcal{S})$  e a de (1.183),

$$\begin{aligned} t(\varepsilon = 0) &= t, \\ -\mathcal{H}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t; \varepsilon), t, -\mathcal{K}; \varepsilon) &= -\mathcal{K}(\mathbf{y}, t; \varepsilon) + \mathcal{R}(\mathbf{y}, t; \varepsilon). \end{aligned} \tag{1.185}$$

Do mesmo xeito que se ten visto anteriormente, chamarase función transformada de  $f$  mediante  $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$  á función que resulta de aplicar a transformada de Lie ampliada,  $\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ , sobre esa función  $f(\bar{\mathbf{x}}, t; \varepsilon)$  (que pola súa propia definición é igual a  $f(\mathbf{x}, t, -\mathcal{H}; \varepsilon)$ )

$$\bar{\mathcal{L}}(\mathcal{S})f = f^*(\bar{\mathbf{y}}; \varepsilon) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t; \varepsilon), t; -\mathcal{H}^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon); \varepsilon), \tag{1.186}$$

e polo tanto

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon) = \mathcal{L}(\mathcal{S})\mathcal{H}(\mathbf{x}, t; \varepsilon). \tag{1.187}$$

Deprit emprega, como inicialmente fixera Hori, as paréntese de Poisson (1.163) e (1.164) e o desenvolvemento en serie das mesmos (1.162) para obter unha serie de operadores lineais de derivación que emprega posteriormente

$$\begin{aligned} D &= \{ ; \mathcal{S} \} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}}, \\ \mathcal{D} &= \{ ; \mathcal{S} \} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \\ D &= \mathcal{D} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{1.188}$$

coas mesmas propiedades (1.164).

O método en si consiste en que os hamiltonianos  $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t; \varepsilon)$  e  $\mathcal{K}(\mathbf{y}, t; \varepsilon)$  cumbran as condicións para poder aplicar a transformación de Lie ampliada. Deste xeito, poderase utilizar (1.162) sobre a función  $f(\bar{\mathbf{x}}; \varepsilon) = -\mathcal{H}$  de tal forma que

$$-\mathcal{H}^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} D_S^k (-\mathcal{H}). \quad (1.189)$$

Utilizando (1.182) despéxase a función resto da transformación

$$\mathcal{R}(\mathbf{y}, t; \varepsilon) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} D_S^k (-\mathcal{H}), \quad (1.190)$$

e se ademais temos en conta que tanto  $\mathcal{K}$  como  $\mathcal{H}^*$  admiten desenvolvementos en serie tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{y}, t; \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \mathcal{K}_m(\mathbf{y}, t), \\ \mathcal{H}^*(\mathbf{y}, t; \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left[ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^p}{p!} \mathcal{H}_p^k \right], \end{aligned} \quad (1.191)$$

igualando os termos de igual orde en (1.182) coas anteriores relacións, poderanse obter as seguintes ecuacións do método

- Para orde 0

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{K}_0, \quad (1.192)$$

- Para ordes superiores

$$\{\mathcal{H}_0, \mathcal{S}_i\} - \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial t} = \mathcal{K}_i - \mathcal{A}_i, \quad (1.193)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= \mathcal{H}_1, \\
 \mathcal{A}_2 &= \mathcal{H}_2 + \{\mathcal{H}_1, \mathcal{S}_1\} + \{\mathcal{K}_1, \mathcal{S}_1\}, \\
 \mathcal{A}_3 &= \mathcal{H}_3 + 2\{\mathcal{H}_1, \mathcal{S}_2\} + \{\mathcal{K}_1, \mathcal{S}_2\} + 2\{\mathcal{K}_2, \mathcal{S}_1\} + \{\mathcal{H}_2, \mathcal{S}_1\} + \{\{\mathcal{K}_1, \mathcal{S}_1\}, \mathcal{S}_1\}, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{1.194}$$

Por iso, unha vez se integren as  $n$  ecuacións diferenciais obteranse as  $\mathcal{S}_i$ , con  $i = 1$  a  $n$  e con iso os  $\mathcal{K}_i$ .

Shniad mostrou a relación e equivalencia entre os métodos von Zeipel e Deprit nun artigo no que reconece a orientación recibida do propio Deprit (Shniad (1970)) e, nese mesmo ano, Kamel (Kamel (1970)) logrou unha xeneralización do método de Deprit a sistemas non canónicos.

### Solución de Deprit e Rom

Deprit e Rom (1970) estableceron unha solución de terceira orde usando o Problema Principal. As súas novidades son: non parten do método de von Zeipel senón que utilizan transformacións de Lie, evitan implementar a solución de Brouwer porque predín problemas á hora de atopar integrais axeitadas máis aló da terceira orde, obteñen termos de curto e longo período a través da terceira orde de  $J_2$  e os termos seculares a cuarta orde (aínda que con certas retencias) e fan uso de Delaunay e outras variables auxiliares para evitar os problemas dos pequenos divisores.

Comezaron a traballar cun hamiltoniano como o seguinte

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 (3 \sen^2 \beta - 1) \right], \tag{1.195}$$

onde empregaban as variables  $(x, y, z, X, Y, Z)$  (lembrems (1.15), onde temos as coordenadas e as velocidades) e empregaron a función xeratriz,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} &= \mathcal{S}(x_N, y_N, h, X, Y, Z), \\
 \mathcal{S} &= -x_N(X \cos h + Y \sen h) - y_N \sqrt{(-X \sen h + Y \cos h)^2 + Z^2},
 \end{aligned} \tag{1.196}$$

manexando asemade as seguintes relacións

$$\begin{aligned}\cos i &= \frac{-X \operatorname{sen} h + Y \operatorname{cosh}}{\sqrt{(-X \operatorname{sen} h + Y \operatorname{cosh})^2 + Z^2}}, \\ \operatorname{sen} i &= \frac{Z}{\sqrt{(-X \operatorname{sen} h + Y \operatorname{cosh})^2 + Z^2}},\end{aligned}\tag{1.197}$$

$$\begin{aligned}x &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial X}, & X_N &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_N}, \\ y &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Y}, & Y_N &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial y_N}, \\ z &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial Z}, & H &= -\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial h},\end{aligned}\tag{1.198}$$

sendo  $i$  a inclinación.

Estas ecuacións definen unha transformación canónica que pasa das variables  $(x, y, z, X, Y, Z)$  a outras  $(x_N, y_N, h, X_N, Y_N, H)$ . Os seguintes pasos inclúen unha rotación para cambiar o sistema de referencia das variables orixinais ás novas, para que o hamiltoniano cambie a un do xeito

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}(x_N, x_N, -, X_N, Y_N, H), \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} (X_N^2 + Y_N^2) - \frac{\mu}{r} \left[ 1 - \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( 3 \frac{y_N^2}{r^2} \operatorname{sen}^2 i - 1 \right) \right].\end{aligned}\tag{1.199}$$

A hipótese principal do método é que o satélite terá un raio vector aproximadamente da mesma orde de magnitude que o raio terrestre,  $R_e$ . Así, asumiron que o hamiltoniano podía representarse do seguinte xeito

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + J_2 \mathcal{H}_1,\tag{1.200}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \mathcal{H}_0(-, -, -, L, -, -) = -\frac{\mu^2}{2L^2}, \\ \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_1(l, g, -, L, G, H) = \frac{1}{2} \frac{\mu R_e^2}{r^3} \times \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos^2 i \right) - \frac{3}{2} \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen} (2f + 2g) \right].\end{aligned}\tag{1.201}$$

É neste punto onde a solución fai uso das series de potencias da excentricidade, aplicadas en  $\mathcal{H}_1$ . O desenvolvemento dá bastante fastío e pódese ver en detalle no artigo de ambos, pero chégase ás seguintes identidades dependendo da orde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1^0 + (\mathcal{H}_0^0; W_1) &= \mathcal{H}_1^1, \\ (\mathcal{H}_1^0; W_1) + (\mathcal{H}_0^1; W_1) + (\mathcal{H}_0^0; W_2) &= \mathcal{H}_0^2, \\ 2(\mathcal{H}_1^0; W_2) + (\mathcal{H}_1^1; W_1) + (\mathcal{H}_0^1; W_2) + (\mathcal{H}_0^2; W_1) + (\mathcal{H}_0^0; W_3) &= \mathcal{H}_0^3, \\ 3(\mathcal{H}_1^0; W_3) + (\mathcal{H}_2^1; W_1) + 2(\mathcal{H}_1^1; W_2) + (\mathcal{H}_0^1; W_3) + (\mathcal{H}_1^2; W_1) + (\mathcal{H}_0^2; W_2) + (\mathcal{H}_0^0; W_4) &= \mathcal{H}_0^4,\end{aligned}\tag{1.202}$$

onde os  $W_i$  se calculan a través de cadraturas. A partir deste punto comézanse a eliminar primeiramente os elementos de curto período obtendo

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' &= \mathcal{H}'(-, g', h', L', G', H'), \\ \mathcal{H}' &= \mathcal{H}'_0 + J_2 \mathcal{H}'_1 + \frac{1}{2} J_2^2 \mathcal{H}'_1 + \frac{1}{6} J_2^3 \mathcal{H}'_2 + \frac{1}{24} J_2^4 \mathcal{H}'_4, \\ \mathcal{H}'_0 &= \mathcal{H}'_0(-, -, -, L', -, -), \\ \mathcal{H}'_1 &= \mathcal{H}'_0(-, -, -, L', G', H'), \\ \mathcal{H}'_{2,3,4} &= \mathcal{H}'_0(-, g', -, L', G', H').\end{aligned}\tag{1.203}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_0^1(-, -, -, L'', G'', H'') &= \mathcal{H}_1^0, \\
 \mathcal{H}_0^2(-, -, -, L'', G'', H'') &= \mathcal{H}_2^0 + 2(\mathcal{H}_1^0; \Phi_1), \\
 \mathcal{H}_0^3(-, -, -, L'', G'', H'') &= \mathcal{H}_2^0 + (\mathcal{H}_2^1; \Phi_1) + (\mathcal{H}_1^1; \Phi_1) + (\mathcal{H}_0^2; \Phi_1) + 3(\mathcal{H}_1^0; \Phi_2), \\
 \mathcal{H}_0^4(-, -, -, L'', G'', H'') &= \mathcal{H}_4^0 + (\mathcal{H}_3^0; \Phi_1) + 3(\mathcal{H}_2^0; \Phi_2) + (\mathcal{H}_2^1; \Phi_1) + 2(\mathcal{H}_1^1; \Phi_2) \\
 &\quad + (\mathcal{H}_2^1; \Phi_1) + (\mathcal{H}_0^2; \Phi_2) + (\mathcal{H}_1^2; \Phi_1) + (\mathcal{H}_0^3; \Phi_1) + 4(\mathcal{H}_1^0; \Phi_3).
 \end{aligned} \tag{1.204}$$

Despois disto, chégase finalmente ao hamiltoniano,  $\mathcal{H}''$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}'' &= \mathcal{H}''(-, -, -, L'', G'', H''), \\
 \mathcal{H}'' &= \mathcal{H}_0'' + J_2 \mathcal{H}_1'' + \frac{1}{2} J_2^2 \mathcal{H}_2'' + \frac{1}{6} J_2^3 \mathcal{H}_2'', \\
 \mathcal{H}_0'' &= \mathcal{H}_0''(-, -, -, L'', -, -), \\
 \mathcal{H}_1'' &= \mathcal{H}_1''(-, -, -, L'', G'', H''), \\
 \mathcal{H}_2'' &= \mathcal{H}_2''(-, -, -, L'', G'', H'').
 \end{aligned} \tag{1.205}$$

### 1.3.4. Singularidades

#### Variables que anulan singularidades en primeira orde

Un dos problemas do desenvolvemento das solucións de primeira orde reside na aparición da excentricidade no denominador dalgúns termos de curto e longo período, así como o seno da inclinación nestes últimos; xa que estes valores se atopan no denominador de certos sumandos (ver (1.108)). Estas razóns poden xerar indeterminacións cando a excentricidade é cero ou o suficientemente pequena, ou a inclinación é próxima a  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ . Hill (1900) establecera moito antes un método que os tiña en conta, pero aplicado ao movemento da Lúa.

Cid (1967) propuxo unha solución de primeira orde para excentricidades próximas a cero, utilizando diferentes sistemas canónicos segundo os casos.

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \sqrt{2(L-G)} \cos l, & y_1 &= \sqrt{2(L-G)} \sin l, \\
Y_2 &= G, & y_2 &= l + g, \\
Y_3 &= H, & y_3 &= h.
\end{aligned}
\tag{1.206}$$

- Variables que anulan singularidades relacionadas coa excentricidade e coa inclinación próxima a  $0^\circ$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= G, & y_1 &= l + g + h, \\
Y_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos l, & y_2 &= \sqrt{2(L-G)} \sin l, \\
Y_3 &= \sqrt{2(G-H)} \cos h, & y_3 &= -\sqrt{2(G-H)} \sin h.
\end{aligned}
\tag{1.207}$$

- Variables que anulan singularidades relacionadas coa excentricidade e coa inclinación próxima a  $180^\circ$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= G, & y_1 &= l + g - h, \\
Y_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos l, & y_2 &= \sqrt{2(L-G)} \sin l, \\
Y_3 &= \sqrt{2(G+H)} \cos h, & y_3 &= \sqrt{2(G+H)} \sin h.
\end{aligned}
\tag{1.208}$$

Onde  $y_i$  e  $Y_i$  son calquera das variables que se escolleran.

Nas solucións de Brouwer, Garfinkel e Kozai hai unha singularidade en relación á inclinación cando esta é próxima a  $63^\circ 26'$ . Brouwer, de feito, menciónao de xeito explícito cara ao final do seu artigo: “*The formulas are applicable for any eccentricity  $e < 1$  and any inclination with the exception of inclinations near the critical inclination, for which  $1 - 5 \cos^2 i$  appears as a small divisor*”. Hori (1960) resolveu este problema usando o método de von Zeipel. Cabe salientar que neste artigo Hori agradece ao propio Brouwer por suxerir a realización deste estudo.

### Variables que anulan singularidades en segunda orde

Lahulla (1970) propuxo unha serie de variables para tratar o problema das singularidades. Para iso tivo en conta as ecuacións da teoría de segunda orde e empregou unhas funcións,  $\varphi_i$  e  $\psi_i$ , e constantes arbitrarias,  $c_i$ , para que os sistemas desenvolvidos fosen canónicos. Partiu para iso dunhas variables tales que

$$\begin{aligned}
 Y_j &= \sum_k a_{jk} X_k, \\
 y_j &= \sum_k a_{jk}^* x_k.
 \end{aligned}
 \tag{1.209}$$

En canto ás funcións, teñen que cumprir a condición

$$\psi_2 \varphi_1 \frac{d\psi_2}{d(L-G)} \frac{d\varphi_2}{dl} - \psi_1 \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{d(L-G)} \frac{d\psi_2}{dl} = 1.
 \tag{1.210}$$

De todas as solucións escolleuse a máis sinxela, chegando a unha función  $\varphi_2 = \varphi_2(l)$  e a unhas variables  $Y_1$  e  $y_1$ ,

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= -\sqrt{2(L-G)} \varphi_2 \int \frac{dl}{\varphi_2^2}, \\
 y_1 &= \sqrt{2(L-G)} \varphi_2.
 \end{aligned}
 \tag{1.211}$$

Con isto obtéñense algunhas variables especialmente simples

- Con  $\varphi_2 = \text{sen } l$ , o valor de  $\psi_2$  é  $\text{cos } l$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \sqrt{2(L-G)} \text{cos } l, & y_1 &= \sqrt{2(L-G)} \text{sen } l, \\
 Y_2 &= G, & y_2 &= l + g, \\
 Y_3 &= H, & y_3 &= h.
 \end{aligned}
 \tag{1.212}$$

- Con  $\varphi_2 = l$ ,  $\psi_2 = 1$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \sqrt{2(L-G)}, & y_1 &= l \sqrt{2(L-G)}, \\
 Y_2 &= G, & y_2 &= l + g, \\
 Y_3 &= H, & y_3 &= h.
 \end{aligned}
 \tag{1.213}$$

- Con  $\varphi_2 = 1$ ,  $\psi_2 = -l$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= -l \sqrt{2(L-G)}, & y_1 &= \sqrt{2(L-G)}, \\
 Y_2 &= G, & y_2 &= l + g, \\
 Y_3 &= H, & y_3 &= h.
 \end{aligned}
 \tag{1.214}$$

## 1.4. Métodos semianalíticos de integración

No caso dos métodos semianalíticos, só nos centraremos no método estroboscópico xa que é o máis senlleiro en termos históricos.

### 1.4.1. Método estroboscópico

Aínda que foi ideado por Lubowe, foi Roth quen afondou nel utilizando desenvolvementos de primeira orde para satélites perturbados polo Sol, a Lúa e a freada atmosférica (Roth (1973) e Roth (1978)). Existen tres procedementos principais para abordar este método: empregando elementos clásicos (como fan Roth, Janin (1979) ou Sein-Echaluze, Abad e Elipe (Abad, Elipe e Sein-Echaluze (1987))), variables de Hill (os mesmos autores comentados anteriormente, Sein-Echaluze, Abad e Elipe (1987) e Sein-Echaluze, Abad e Elipe (1987)) ou elementos equinocciais (como Lecohier (1985) ou o propio Roth (1985)). Por outra banda Ling (Ling (1989) e Ling (1991)) utilizouno na súa Tese de Doutoramento para o estudo de tres corpos aplicándoo a sistemas estelares xerárquicos triplos.

O seu nome débese a que a solución ocorre no mesmo lugar da órbita en momentos sucesivos, é dicir, en cada revolución orbital<sup>11</sup>. Baséase na hipótese de aplicar a teoría analítica a unha revolución orbital para posteriormente volver aplicar aos elementos orbitais actualizados no mesmo punto, xeralmente o periastro, e así sucesivamente unha revolución tras outra. É dicir, o valor de cada variable tomarase nun punto específico da órbita despois de cada revolución.

O gran valor deste método é a súa velocidade de cálculo, a súa boa precisión e a súa flexibilidade, xa que se pode utilizar con diferentes conxuntos de variables. Ademais, o algoritmo desenvolvido por Roth é válido en xeral, excepto en casos singulares.

Partamos das ecuacións de movemento de primeira orde dun satélite sometido a un potencial kepleriano perturbado

<sup>11</sup> Do *Diccionario da Real Academia Galega*, **estroboscopio**: *Aparello que ilumina intermitentemente un obxecto, que xira a velocidade constante, facendo que pareza que está inmóbil ou que se move lentamente.*

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, y), \\ \frac{dy}{dt} &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, y),\end{aligned}\tag{1.215}$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vector que representa as variables lentas do sistema (que nas ecuacións de Lagrange (1.108) serían: o semieixe, a excentricidade, a inclinación, o ángulo do nodo e o argumento do periastro;  $y$  a variable angular rápida (no noso caso sería a anomalía media, pero podería ser calquera das anomalías do caso elíptico) e  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  unhas funcións periódicas de período  $2\pi$ .

Se se considera  $y$  como unha variable independente, temos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dy} &= \frac{\mathbf{f}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, y)}{\mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, y)}, \\ \frac{dt}{dy} &= \frac{1}{\mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, y)},\end{aligned}\tag{1.216}$$

e reorganizando as ecuacións, empregando

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_i(\mathbf{x}, y) &= \frac{\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, y)}{\mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y)}, \\ \mathbf{G}_i(\mathbf{x}, y) &= \frac{\mathbf{g}_i(\mathbf{x}, y)}{\mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y)},\end{aligned}\tag{1.217}$$

podemos escribir as ecuacións (1.216) do seguinte xeito

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dy} &= \frac{\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, y)}{1 + \varepsilon \mathbf{G}_1(\mathbf{x}, y)}, \\ \frac{dt}{dy} &= \frac{1}{\mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y) [1 + \varepsilon \mathbf{G}_1(\mathbf{x}, y)]},\end{aligned}\tag{1.218}$$

cuxa solución sería

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)}, \\ t &= t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)}.\end{aligned}\tag{1.219}$$

Desenvolvendo os segundos termos en series de Taylor (ver en detalle no Capítulo 2) arredor da solución de (1.219):  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{h}$  conseguiremos a seguinte expresión xeral para un operador calquera  $\mathcal{X}$ , que teremos que empregar para os elementos necesarios de (1.216) ( $\mathbf{F}_i$ ,  $\mathbf{G}_i$  e  $\mathbf{g}_0$ )

$$\mathcal{X}(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{h}) = \mathcal{X}(\mathbf{x}^{(0)}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right)^k \mathcal{X}(\mathbf{x}^{(0)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (1.220)$$

O resultado será

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}^{(0)}, y) + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{x}^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{g}_0(\mathbf{x}^{(0)}, y), \\ \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, y) &= \mathbf{F}_i(\mathbf{x}^{(0)}, y) + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{x}^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{F}_i(\mathbf{x}^{(0)}, y), \\ \mathbf{G}_i(\mathbf{x}, y) &= \mathbf{G}_i(\mathbf{x}^{(0)}, y) + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{x}^{(1)}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{G}_i(\mathbf{x}^{(0)}, y), \end{aligned} \quad (1.221)$$

que substituíndo en (1.218) dá lugar ás seguintes ecuacións<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dy} &= \mathbf{F}_{00} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}_{00} + \varepsilon \mathbf{F}_{10} - \varepsilon \mathbf{F}_{00} \mathbf{G}_{10}, \\ \frac{d\mathbf{t}}{dy} &= \frac{1}{\mathbf{g}_{00}} - \frac{\varepsilon}{\mathbf{g}_{00}^2} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_{00} - \frac{1}{\mathbf{g}_{00}} \varepsilon \mathbf{G}_{10}. \end{aligned} \quad (1.223)$$

Derivando agora as ecuacións (1.219) con respecto á variable rápida,  $y$ , e igualando termos coas anteriores obteremos

---

<sup>12</sup> A partir deste intre emprégase a seguinte notación para facilitar a lectura

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ij} &= \mathbf{x}_i(\mathbf{x}^{(j)}, y), \\ \mathbf{x}_i &= \mathbf{x}^{(i)}. \end{aligned} \quad (1.222)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{x}_0}{dy} &= \mathbf{F}_{00}, \\
 \frac{d\mathbf{x}_1}{dy} &= \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}_{00} + \mathbf{F}_{10} - \mathbf{F}_{00} \mathbf{G}_{10}, \\
 \frac{dt_0}{dy} &= \frac{1}{\mathbf{g}_{00}}, \\
 \frac{dt_1}{dy} &= -\frac{1}{\mathbf{g}_{00}} \left[ \mathbf{G}_{10} + \frac{1}{\mathbf{g}_{00}} \frac{\partial \mathbf{x}_1}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_{00} \right].
 \end{aligned}
 \tag{1.224}$$

O paso dende orde 1 a calquera orde superior é relativamente sinxelo, unicamente hai que incluír os termos correspondentes nas ecuacións (1.215) e (1.219)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, y) + \varepsilon^2 \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, y) + \dots + \varepsilon^k \mathbf{f}_k(\mathbf{x}, y), \\
 \frac{dy}{dt} &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}, y) + \varepsilon \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, y) + \varepsilon^2 \mathbf{g}_2(\mathbf{x}, y) + \dots + \varepsilon^k \mathbf{g}_k(\mathbf{x}, y), \\
 \mathbf{x} &= \mathbf{x}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{x}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + \varepsilon^k \mathbf{x}^{(k)}, \\
 t &= t^{(0)} + \varepsilon t^{(1)} + \varepsilon^2 t^{(2)} + \dots + \varepsilon^k t^{(k)}.
 \end{aligned}
 \tag{1.225}$$

e seguir os pasos calculando os diferentes resultados parellos a (1.218) e (1.221) de xeito que se conseguirán unhas relacións xerais das que, unha vez integradas, se obterá a solución

$$\begin{aligned}
 \text{Orde } 0: \quad & \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \phi(\mathbf{x}_0, y), \\
 & \frac{dt_0}{dy} = \psi(\mathbf{x}_0, y), \\
 \text{Orde } 1: \quad & \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, y), \\
 & \frac{dt_1}{dy} = \psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, y), \\
 & \dots\dots\dots \\
 \text{Orde } k: \quad & \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, y), \\
 & \frac{dt_k}{dy} = \psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, y).
 \end{aligned}
 \tag{1.226}$$

Esta integración é complicada se a elección das variables non é axeitada. Se, pola contra, se elixen aquelas que non varían no problema non perturbado (lembramos que isto acontece cos parámetros orbitais (1.91) de xeito que  $\mathbf{f}_0 = 0$ ) o sistema simplifícase do seguinte xeito

$$\begin{aligned}
 \text{Orde } 0: \quad & \frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \mathbf{0}, \\
 & \frac{dt_0}{dy} = \psi(\mathbf{x}_0, y), \\
 \text{Orde } 1: \quad & \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} = \phi(\mathbf{x}_0, y), \\
 & \frac{dt_1}{dy} = \psi(\mathbf{x}_0, y) + \mathbf{Z}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, y), \\
 & \dots\dots\dots \\
 \text{Orde } k: \quad & \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, y), \\
 & \frac{dt_k}{dy} = \psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, y) + \mathbf{Z}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, y),
 \end{aligned} \tag{1.227}$$

onde dividimos o segundo termo das derivadas de  $t$  en dous sumandos función dos  $\mathbf{x}_i$ .

Para calcular a solución nunha órbita calquera  $i$  nun punto concreto (lembramos que por regra xeral se adoita escoller o periastro porque se coñecen os datos de partida:  $\mathbf{x}_0$  e  $t_0$ ) fará falla calcular a integral de cada unha das solucións para as ordes anteriores  $\mathbf{x}_i$  que permitirán obter a solución na orde desexada, por exemplo  $N$ , pois son fórmulas recorrentes

$$\mathbf{x}_i(y) = \int_0^y \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, y) dy. \tag{1.228}$$

Deste modo na seguinte órbita,  $i + 1$ , ao seu paso polo periastro, a solución de orde  $N$  será

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \int_0^{2\pi} \phi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, y) dy. \tag{1.229}$$



O resultado de  $t_N$  será similar

$$t_N = t_0 + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i \int_0^{2\pi} \psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, y) + \mathbf{Z}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i, y) dy + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathbf{g}_{00}} dy. \quad (1.230)$$

Na seguinte revolución tomaranse como valores iniciais os obtidos no periastro despois da primeira órbita e operarase do mesmo xeito ata a revolución desexada.

## 1.5. Métodos numéricos de integración

Como se viu nos puntos anteriores, a integración do problema dos satélites non é trivial. As esixencias actuais en canto a precisión e velocidade (é dicir, eficiencia) xunto coa flexibilidade no cálculo das efemérides fan que os métodos analíticos se empreguen unicamente para estudos cualitativos e para obter órbitas ou solucións preliminares, polo que se precisa o uso de métodos numéricos que conxuguen o anterior: precisión e velocidade de cálculo. Ademais, grazas aos avances en tecnoloxía informática, é posible facer a formulación de problemas que hai poucos anos eran imposibles, non só pola súa dificultade, senón tamén polo tempo de cálculo, uso dos recursos computacionais e converxencia da solución.

Existen varios xeitos de dividir os métodos numéricos de integración: polo número de pasos para acadar a solución, pola orde da mesma, polo sistema empregado... Aquí agruparanse en tres grandes grupos, deixando de lado o método das series de Taylor, que se tratará en detalle no Capítulo 2 desta Tese.

Métodos de Runge-Kutta	<ul style="list-style-type: none"> <li>⎧ Métodos RK explícitos</li> <li>⎧ Métodos RK implícitos</li> <li>⎧ Métodos embebidos</li> </ul>
Métodos multichanzo	<ul style="list-style-type: none"> <li>⎧ Métodos de Adams-Bashforth</li> <li>⎧ Métodos de Adams-Moulton</li> <li>⎧ Métodos preditores-correctores</li> </ul>
Métodos de extrapolación	

Para unha aproximación e/ou afondamento nos métodos numéricos remítese a

diferentes publicacións como Franco García (1988), Lambert (1991), Dormand (1996), Ascher e Petzold (1998), Butcher (2000), Butcher (2003), Atkinson, Hall e Stewart (2008), Griffiths e Higham (2010) ou Hairer, Lubich e Roche (2019).

Todos eles parten dun sistema de ecuacións diferenciais de primeira orde tal que

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.231)$$

de xeito que con  $\mathbf{y} = (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})^t$ , teremos que  $\dot{\mathbf{y}} = (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{a})^t$ , sendo  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{r}}) = \ddot{\mathbf{r}}$  a aceleración do satélite no noso caso.

Antes de desenvolver os tres grandes grupos de métodos numéricos, e do mesmo xeito que fixemos cos métodos analíticos, adicaremos unhas liñas a dúas das formulacións numéricas clásicas aplicadas a problemas de Mecánica Celeste: os procedementos de Cowell e Encke<sup>13</sup>. Caracterízanse ambos por non usar parámetros orbitais senón coordenadas cartesianas. Co primeiro deles obtéñense directamente as coordenadas do obxecto perturbado, e no segundo obtense a diferenza de coordenadas entre a posición teórica do obxecto baixo un movemento perturbado e a do obxecto en órbita kepleriana. En Brouwer e Clemence (1961) e en Franco García (1988) pódense ver con máis detalle, mentres que en Tewari (2007) se achegan exemplos de programación de ambos os métodos. En Brouwer e Clemence (1961) pódense ver exemplos numéricos de ambos sobre o planeta anano Ceres (na bibliografía aparece como un asteroide pero foi reclasificado en 2006) así como os procedementos correspondentes.

## Formulación de Cowell

Tamén coñecida como *método de Störmer-Cowell* ou de *tipo Gauss-Jackson*, foi creada por P. H. Cowell a comezos do século XX. Foi empregada en 1910 para predicir o retorno do cometa Halley (Brouwer (1961)). É a máis sinxela de implementar deste tipo pois baséase en explicitar todas as perturbacións que se desexen e integralas chanzo a chanzo. É polo tanto un método multipaso (pertence ao segundo grupo

<sup>13</sup> Aínda que adoitan chamarse *método de Cowell* e *método de Encke*, estritamente máis que un método numérico de integración son diferentes formulacións das ecuacións diferenciais do movemento. No caso de Cowell é a formulación clásica newtoniana mentres que no de Encke se formula como unha ecuación que calcula a diferenza de movemento con respecto do kepleriano. Polo tanto, aínda afastándonos da ortodoxia a este respecto, trataremos ambos os casos como formulacións no canto de como métodos.

que veremos en 1.5.2) de integración directa (bastante eficiente para a época pero en desuso actualmente). Para iso, partindo duns datos iniciais  $(t, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ , transfórmase primeiramente a ecuación (1.12) de modo que se obtén un sistema de orde 1 tal que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{R}, \\ \dot{\mathbf{R}} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{1.232}$$

Substituíndo  $\mathcal{P}$  (as aceleracións) polas perturbacións a calcular, e descompondo (1.232) nas súas correspondentes coordenadas, bastará aplicar calquera método numérico dos que se verán a continuación para poder calcular  $(\mathbf{r}, \mathbf{R})$  en calquera intre.

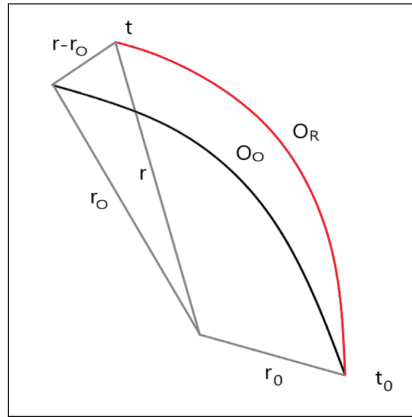
$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x, & \dot{v}_x &= -\frac{\mu}{r^3} x + \mathcal{P}_x, \\ \dot{y} &= v_y, & \dot{v}_y &= -\frac{\mu}{r^3} y + \mathcal{P}_y, \\ \dot{z} &= v_z, & \dot{v}_z &= -\frac{\mu}{r^3} z + \mathcal{P}_z. \end{aligned} \tag{1.233}$$

Obviamente, este método ten certas limitacións, xa que aínda que obtén bos resultados cando as perturbacións son de pouca magnitude, en caso contrario os erros tamén son importantes. Outra desvantaxe é que é necesario un gran número de decimais significativos cando se teñen en conta perturbacións de varias ordes de magnitude inferiores á principal ou a súa velocidade de converxencia. En todo caso, destaca a súa facilidade á hora de programarse.

### Formulación de Encke

Foi desenvolvida por J.F. Encke a mediados do século XIX para realizar cálculos de órbitas con excentricidades moi elevadas, en particular para os cometas. A diferenza do procedemento anterior onde se integra a suma de todas as aceleracións (perturbacións), neste caso intégranse a diferenza da aceleración principal e as aceleracións relacionadas coas perturbacións.

O método parte dun instante inicial  $(t_0)$  no que se elimina a aceleración das perturbacións, de xeito que o obxecto se move por unha órbita non perturbada chamada órbita osculatriz ( $O_O$ ). En calquera momento  $(t)$ , teremos un vector  $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}_O$  que é



**Figura 1.14:** Órbitas real ( $O_R$ ) e oscultriz ( $O_O$ ) do método de Encke.

a diferença entre a posição que ocupa o objecto na órbita oscultriz e a real ( $O_R$ ). Qualquer variação entre os valores de  $O_O$  e  $O_R$  será a manifestação de perturbações nesse objecto.

O método de Encke integra a evolução deste vector, de xeito que a partir de

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \dot{\mathbf{R}}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_O}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r_O^3} \mathbf{r}_O, \end{aligned} \tag{1.234}$$

obteremos

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_O}{dt^2} = -\mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_O}{r_O^3} \right) + \dot{\mathbf{R}}. \tag{1.235}$$

O método emprega unha función auxiliar

$$f(\lambda) = \frac{r_O^3}{r^3} - 1, \tag{1.236}$$

na cal podemos despear  $\lambda$  unha vez se opera cos raios

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{\rho} \cdot (\boldsymbol{\rho} - 2\mathbf{r})}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.237)$$

para, dese xeito, empregar a función auxiliar como segue

$$f(\lambda) = \lambda \left[ \frac{3 + 3\lambda + \lambda^2}{1 + (1 + \lambda)^{3/2}} \right]. \quad (1.238)$$

A variación de  $\boldsymbol{\rho}$  con respecto do tempo será, entón

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = -\mu \frac{\boldsymbol{\rho} + f(\lambda)\mathbf{r}}{r^3} + \dot{\mathbf{R}}. \quad (1.239)$$

Neste método é preciso facer unha rectificación no intre da integración no que a orde de magnitude de  $\boldsymbol{\rho}$  supere os termos de  $\dot{\mathbf{R}}$  para poder continuar co cálculo, de xeito que a órbita osculatriz se vai modificando achegándose á real.

### 1.5.1. Métodos de Runge-Kutta

Son unha serie de métodos iterativos que aproximan as solucións de ecuacións diferenciais ordinarias. Parten de valores iniciais tal que  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$  e pescudan unha aproximación nun intre  $t_0 + h$  mediante unha expansión de Taylor. A súa expresión xeral é a seguinte

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n(t)), \quad (1.240)$$

onde  $h$  é o chamado *chango de Euler* (que será un valor o suficientemente pequeno como para poder ter unha aproximación moi próxima á solución) e  $\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n(t))$  a *función incremental* da función da que se pretende atopar a solución,  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ , que será da forma

$$\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n(t)) = \sum_{s=1}^S b_s \mathbf{k}_s, \quad (1.241)$$

onde  $\mathbf{k}_s$  ten a seguinte expresión

$$\mathbf{k}_s = \mathbf{f}(t_n + c_s h, \mathbf{y}_n + h \sum_{j=1}^S a_{sj} \mathbf{k}_j), \quad (1.242)$$

$S$  é o número de chanzos que involucran os cálculos e  $b_s$  uns coeficientes que dependen do modelo empregado. Estes métodos adoitan ser denominados: *RKS*, indicando a  $S$  o número de chanzos.

Os métodos máis sinxelos son os que teñen un só chanzo,  $S = 1$ , e dentro deles o precursor é o denominado *método de Euler* que ten como coeficiente  $c_1 = 1$ , sendo a súa ecuación

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad (1.243)$$

e como xa vimos en (1.231) reescríbese como

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h \mathbf{y}'_n. \quad (1.244)$$

O método de Euler presentaranos como solución gráfica unha curva poligonal cuxos segmentos serán proporcionais ao paso escollido. Na figura 1.15 pódese observar o resultado, no intervalo  $[0, 5]$ , para un exemplo sinxelo:  $y' = y$  con  $y(0) = 1$  cuxa solución é  $y = e^x$  (azul) para diferentes chanzos:  $h=1.00$  (verde),  $h=0.25$  (laranxa) e  $h=0.0625$  (vermello).

Polo tanto, como se pode ver en (1.244) o método calcula en cada chanzo o seguinte valor empregando a pendente da función no punto anterior, o que implica que en funcións con grandes cambios de pendente o resultado vai ir por detrás da función real, como se pode corroborar na figura 1.15. Un xeito de solucionar este problema é tentar mellorar esta aproximación ao seguinte punto, que a pesar de ser un pouco groseira é moi válida en certos problemas. Con este obxectivo foise perfeccionando o modelo co *método de Euler modificado* ou *mellorado*, que son métodos de dous chanzos (polo tanto RK2), é dicir que a ecuación (1.240) pasa a ser, respectivamente

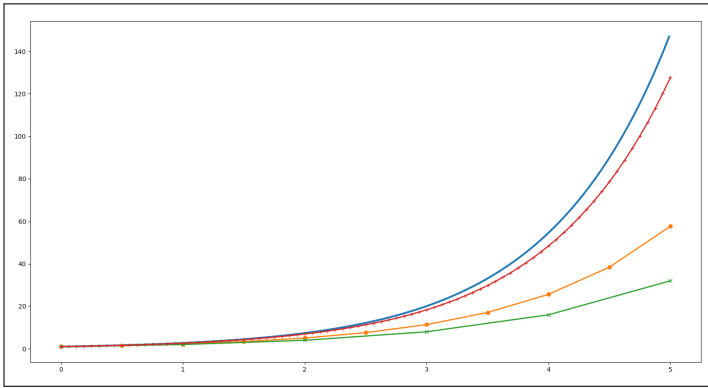


Figura 1.15: Método de Euler con diferentes chanzos aplicado ao problema  $y'=y$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\right), \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}\left[\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}\left(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.245}$$

Representando graficamente o problema anterior con este último método obsérvase na figura 1.16 que mellora considerablemente os resultados coas mesmas condicións iniciais e no mesmo intervalo. Novamente, represéntase a función  $y = e^x$  (azul) con diferentes chanzos:  $h=1.00$  (verde),  $h=0.25$  (laranja) e  $h=0.0625$  (vermello).

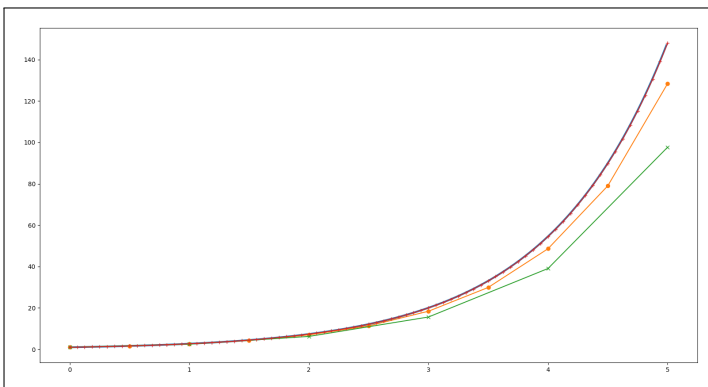


Figura 1.16: Método de Euler mellorado (RK2) con diferentes chanzos aplicado ao problema  $y'=y$ .

máis utilizado deles o Runge-Kutta de cuarta orde ( $RK4$ ) pola súa grande exactitude e relativa sinxeleza á hora de implementalo. A súa base é relativamente doada, pois emprega catro pendentes e atopa unha media entre elas. Mediante esta técnica, a ecuación (1.240) a través de (1.241) quedaría como

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{6} (k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}), \quad (1.246)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n), \\ k_{n2} &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}k_{n1}\right), \\ k_{n3} &= \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}k_{n2}\right), \\ k_{n4} &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + hk_{n3}). \end{aligned} \quad (1.247)$$

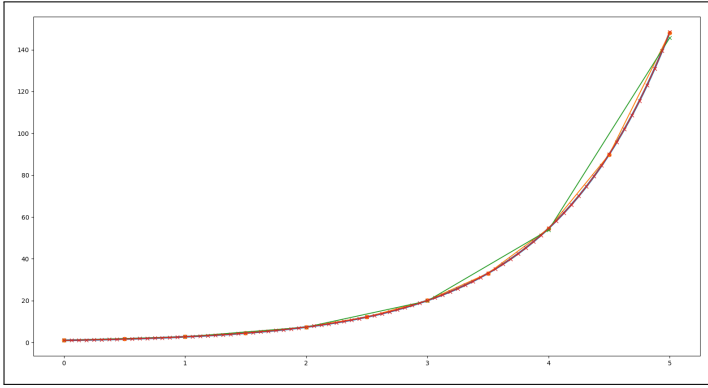
Esta fórmula dá unha aproximación ata cuarta orde. O erro de truncamento será a diferenza entre o valor real e o calculado, isto é

$$err = |\mathbf{y}(t_0 + h) - (\mathbf{y}_0 + h\dot{\mathbf{y}}_0)|. \quad (1.248)$$

A súa representación gráfica na figura 1.17 amosa unha moi boa aproximación para os puntos calculados.

Está claro que seguindo este esquema, os métodos de Runge-Kutta pódense obter para calquera orde empregando unha fórmula xeral. Pero para iso é preciso introducir a clásica división dos métodos de Runge-Kutta en función da dependencia dos coeficientes  $k_{ni}$ , pois a fórmula xeral varía segundo isto

- Métodos de Runge-Kutta explícitos ( $ERKM$ ), onde os coeficientes  $k_{ni}$  unicamente dependen de  $k_{n(i-1)}$ .
- Métodos de Runge-Kutta implícitos ( $IRKM$ ), onde os coeficientes  $k_{ni}$  dependen doutros  $k_{ni}$ .



**Figura 1.17:** Método de Runge-Kutta de cuarta orde (RK4) con diferentes chanzos aplicado ao problema  $y'=y$ .

- Métodos de Runge-Kutta embebidos ou aniñados, onde se teñen en conta as ordes pares e impares.

Atendendo á división anterior, os coeficientes  $k_{ni}$  para os *ERKM* son

$$k_{ni} = \mathbf{f} \left( t_n + hc_i, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{nj} k_j \right), \quad (1.249)$$

onde  $a_{ij}$  (para  $1 \leq j < i \leq s$ ) son os coeficientes da matriz de Runge-Kutta,  $b_i$  (para  $i \leq 1, \dots, s$ ) os pesos dos coeficientes,  $c_i$  (para  $i \leq 2, \dots, s$ ) son os denominados nodos e finalmente  $s$  é o número de chanzos que se toman.

Por outro lado, para os *IRKM* obtense a fórmula xeral

$$k_{ni} = \mathbf{f} \left( t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right). \quad (1.250)$$

Os algoritmos para cada un dos métodos e submétodos que se derivan deles, prográmanse mediante as *táboas de Butcher*, que son as que vencellan os parámetros  $a_{ij}$ ,  $b_i$  e  $c_i$ . Estas táboas teñen a forma xeral

$c_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1s}$
$c_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\dots$	$a_{ss}$
	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_s$

Particularizando para os métodos anteriormente expostos, as táboas de Butcher serán triangulares inferiores para os *ERKM* (pois son chamados tamén métodos “cara a adiante” pois  $a_{ij} > 0$  para  $i \geq j$ ), cumprindo de xeito xeral as seguintes relacións:  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ ,  $c_1 = 0$  e  $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$  para  $i > 1$ ; ou cheas para os *IRKM* (pois como se comentou dependen do resto de valores de  $k_{ni}$ )

<b>ERKM</b>	<b>IRKM</b>				
$0$	$c_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1s}$
$c_2$	$c_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2s}$
$c_3$	$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$	$\dots$	$a_{3s}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$c_s$	$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\dots$	$a_{ss}$
		$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_s$

En función dos coeficientes obteranse os diferentes submétodos, algúns deles con nomes propios como por exemplo

- *ERKM*: Método de Euler “cara adiante”, RK4, Heun (un tipo de RK3), Ralston (puidendo ser RK2 o RK4) etc.
- *IRKM*: Método de Euler “cara atrás”, Crank-Nicolson, Gauss-Legendre, Lobatto, Radau etc.

Os métodos *IRKM* son extremadamente caros en termos computacionais e de algoritmia, polo que son pouco utilizados en relación a outros. O seu uso circunscríbese a problemas con graves inestabilidades numéricas.

A modo de exemplo preséntase a táboa de Butcher para RK4 (ver (1.246))

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Como se pode deducir do anterior, é posible atopar diferentes métodos que empreguen o mesmo número de chanzos ou que, aínda que sexan diferentes usen as mesmas  $\mathbf{f}$ ; denomínanse *métodos de Runge-Kutta embebidos*. Entre eles, o máis coñecido é o *método Runge-Kutta Fehlberg* ou *RKF45*. A súa forma de proceder é a seguinte: realiza dúas aproximacións diferentes (unha de orde cuarta e outra de orde quinta, requirindo para cada un dos pasos 6  $k_i$ ) cun determinado  $h$ , e compáraas. Este resultado estúdase para que se está dentro dunha tolerancia aceptada, se tome  $h$ . En caso contrario, aumenta ou diminúe dependendo da comparación.

O criterio limitante dos métodos Runge-Kutta é a elección de  $h$  e polo tanto é necesario un control do tamaño do chanzo, que se basea no erro estimado e que se comparará cunha tolerancia determinada. Este proceso pódese levar a cabo en cada un dos chanzos, co fin de limitar a acumulación de erros. Se a comprobación non é satisfactoria, o cálculo realizarase de novo cun chanzo menor. Existe multitude de bibliografía onde se analizan as inestabilidades numéricas de todos os métodos RK.

No caso do movemento dun satélite artificial, a aceleración é da forma

$$\frac{d^2\mathbf{y}(t)}{dt^2} = \mathbf{a}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t)), \quad \mathbf{y}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.251}$$

sendo  $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ . Poderemos reescribila de xeito que represente un sistema de ecuacións de primeira orde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_0 + h) &= \mathbf{r}_0 + h\mathbf{v}_0 + h^2 \sum_{i=1} sb_i^* \mathbf{k}'_i, \\ \mathbf{v}(t_0 + h) &= \mathbf{v}_0 + h \sum_{i=1} sb_i \mathbf{k}'_i, \end{aligned} \tag{1.252}$$

$$\mathbf{k}'_i = \mathbf{a} \left( t_0 + c_i h, \mathbf{r}_0 + c_i h \mathbf{v}_0 + h^2 \sum_{j \geq 1} a_{ij}^* \mathbf{k}'_j, \mathbf{v}_0 + h \sum_{j \geq 1} a_{ij} \mathbf{k}'_j \right), \quad (1.253)$$

cos coeficientes  $a_{ij}^* = \sum_k a_{ik} a_{kj}$  e  $b_i^* = \sum_j b_j a_{ji}$ .

Os métodos que usan estas fórmulas, pero que non satisfán directamente as condicións dos coeficientes que se viron nas liñas anteriores, chámanse *métodos Runge-Kutta-Nyström*. Nos últimos anos, creáronse algoritmos denominados *métodos IRKM* (métodos Runge-Kutta-Nyström mellorados) que son computacionalmente máis eficientes e teñen ordes de precisión máis altas. A ecuación xeral do método IRKN orixinal é a seguinte

$$y_{n+1} = y_n + h \left( b_1 k_1 - b_{-1} k_{-1} + \sum_{i=2}^s b_i (k_i - k_{-i}) \right), \quad (1.254)$$

sendo as variables  $k$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), & k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \\ k_{-1} &= f(x_{n-1}, y_{n-1}), & k_{-i} &= f(x_{n-1} + c_i h, y_{n-1} + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_{-j}), \end{aligned} \quad (1.255)$$

### 1.5.2. Métodos multichanzo

Os métodos Runge-Kutta calculan os diferentes  $k_i$  en cada chanzo, de xeito que cada un deles é independente do resto. É dicir, que de xeito xeral, para cada chanzo precísase a información dalgúns dos pasos previos. Por este motivo, nos métodos de varios chanzos é necesario gardar estes datos para reducir os cálculos, reutilizalos e obter un método máis eficiente. Isto é, que para o cálculo dun  $y_{i+1}$  se require información de  $i - 1$  valores de  $y_i$ , de tal xeito que  $i$  sexa igual ao número de chanzos do método. Por exemplo, un método de varios pasos de cuarta orde debería calcular  $y_{i+1}$  os valores de  $y_{i-3}$ ,  $y_{i-2}$ ,  $y_{i-1}$ . Pódese observar que son necesarios polo menos catro valores iniciais e por iso se utilizan métodos adicionais para obter estes primeiros resultados.

Os métodos multichanzo teñen un esquema xeral tal que

$$\mathbf{y}_{i+1} = \sum_{j=1}^s \alpha_j \mathbf{y}_{i+1-j} + h \sum_{j=0}^s \beta_j \mathbf{f}(t_{i+1-j}, \mathbf{y}_{i+1-j}), \quad (1.256)$$

ou na súa forma integral

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt. \quad (1.257)$$

Do mesmo xeito que os métodos anteriores, neste caso pódense dividir en tres grupos

- Métodos multichanzo explícitos, *métodos de Adams-Bashforth* ou *métodos AB*, onde se calculan os  $y_{i+1}$  mediante  $\mathbf{f}(t_i, y_i)$  e os seus resultados anteriores; e onde  $\beta_0 = 0$  en (1.256). Nestes métodos, a orde da solución é igual ao número de chanzos.
- Métodos multichanzo implícitos, *métodos de Adams-Moulton* ou *métodos AM*, onde se calculan os  $y_{i+1}$  mediante  $\mathbf{f}(t_{i+1}, y_{i+1})$ ; e onde  $\beta_0 \neq 0$  en (1.256). Nestes métodos, a orde da solución é igual ao número de chanzos máis 1.
- Métodos preditores-correctores, onde se utiliza unha combinación de ambos os dous, de xeito que se calcula inicialmente o resultado mediante un método explícito e se mellora cun método implícito.

Desenvolveremos agora as ecuacións xerais para os *métodos AB*, partindo de que nun instante  $t$  poderase substituír o valor de  $\mathbf{f}$  por un polinomio  $\mathbf{p}(t)$  que se forzou a pasar polos puntos calculados anteriormente. Por este motivo é necesario truncar o polinomio, polo que obteremos unha solución aproximada,  $\mathbf{y}_{i+1}^*$ , de xeito que

$$\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i^* + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{p}(t) dt, \quad (1.258)$$

de tal forma que

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j(t), \quad \text{con} \quad \mathbf{p}_j(t) = y_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{t-t_k}{t_j-t_k}, \quad (1.259)$$

sendo a orde do método a do grao de  $\mathbf{p}(t)$ .

Desenvolvendo o anterior para o caso máis sinxelo, é dicir para dous chanzos por cada etapa ( $N = 2$ ) teremos que

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} + \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) \frac{t-t_i}{t_{i-1}-t_i}, \quad (1.260)$$

e integrando segundo (1.258) chegaríase á fórmula xeral

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{p}(t), dt = \frac{t_i - t_{i+1}}{2(t_{i-1} - t_i)} [\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)(t_i + t_{i+1} - 2t_{i-1}) - \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})(t_i - t_{i+1})]. \quad (1.261)$$

Neste punto escóllense os dous intervalos que se van empregar en cada un dos chanzos, de aí o nome do método, sendo

$$\begin{aligned} h_1 &= t_i - t_{i-1}, \\ h_2 &= t_{i+1} - t_i. \end{aligned} \quad (1.262)$$

Levándoos a (1.258) obtense

$$\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i^* + \frac{h_2}{2h_1} [\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i)(2h_1 + h_2) - \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})h_2]. \quad (1.263)$$

Igualando ambos os intervalos a  $h$ , resulta a ecuación do método de Adams-Bashforth de dous chanzos,

$$\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i^* + \frac{h}{2} [3\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})]. \quad (1.264)$$

Empregando o mesmo esquema para o método de Adams-Bashforth de tres chanzos lévanos á seguinte expresión,

$$\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i^* + \frac{h}{12} [23\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) - 16\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) + 5\mathbf{f}(t_{i-2}, \mathbf{y}_{i-2})], \quad (1.265)$$

e así sucesivamente segundo (1.256).

A representación gráfica para o método de Adams-Bashforth de dous chanzos para a función  $y = e^x$  (azul) con diferentes chanzos:  $h=1.00$  (verde),  $h=0.25$  (laranja) e  $h=0.0625$  (vermello) pódese ver na figura 1.18.

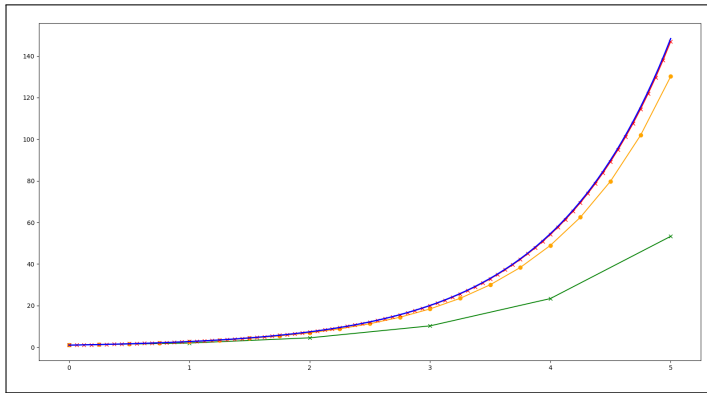


Figura 1.18: Método de Adams-Beshforth aplicado ao problema  $y'=y$ .

No caso dos métodos AM, a integral (1.258) calcúlase mediante un polinomio de interpolación. Este, para o de dous chanzos, é

$$p(t) = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) \frac{t_{i+1} - t}{t_i - t_{i-1}} + \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad (1.266)$$

de xeito que se obtén unha formulación implícita tal que

$$\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i^* + \frac{h}{12} [5\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) + 8\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1})], \quad (1.267)$$

que sería o método AM de dous chanzos. Para o método AM de tres chanzos obtense a expresión,

$$\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i^* + \frac{h}{12} [9\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) + 19\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i) - 5\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) + \mathbf{f}(t_{i-2}, \mathbf{y}_{i-2})]. \quad (1.268)$$

Dentro dos métodos implícitos son moi utilizados os chamados *métodos de diferenciación cara a atrás* ou *métodos BDF*. Indícanse de forma xenérica as expresións para os métodos BDF2 e BDF3, respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{i+2}^* &= \frac{4}{3}\mathbf{y}_{i+1}^* - \frac{1}{3}\mathbf{y}_i^* + \frac{2h}{3}\mathbf{f}(t_{i+2}, \mathbf{y}_{i+2}), \\ \mathbf{y}_{i+3}^* &= \frac{18}{11}\mathbf{y}_{i+2}^* - \frac{9}{11}\mathbf{y}_{i+1}^* + \frac{2}{11}\mathbf{y}_i^* + \frac{6h}{11}\mathbf{f}(t_{i+3}, \mathbf{y}_{i+3}). \end{aligned} \quad (1.269)$$

Aqueles de orde maior que 6 non se empregan por problemas de estabilidade numérica.

Por outra banda, os métodos preditores-correctores utilizan o chamado *algoritmo PACA* que se divide en catro partes aplicados en cada un dos chanzos

- Predicir: calcúlase a solución  $\mathbf{y}_{i+1}^{*pred}$ , en  $t_{i+1}$ , mediante a fórmula (1.258).
- Avaliar: utilízase o anterior valor en  $\mathbf{f}_{i+1}^{pred} = \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^{*pred})$ .
- Corrixir: aplícase a fórmula de Adams-Moulton,  $\mathbf{y}_{i+1}^* = \mathbf{y}_i^* + h\Phi(\mathbf{f}_{i+1}^{pred})$ .
- Avaliar: avalíase coa función actualizada  $\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}^*)$ .

O método máis sinxelo sería o chamado *método de Heun*, xa visto anteriormente co nome de *método mellorado de Euler* (1.245), que fai uso da *regra do trapecio*.

O motivo de que se empreguen os métodos explícitos como preditores é que os primeiros permiten obter unha orde  $s+1$  para  $s$  etapas (cos segundos,  $s$ ), e o feito de que os implícitos o fagan como correctores é debido a que os coeficientes destes son menores que os daqueles, o que reduce os erros. Ademais, incluso sen iteracións, é o dobre de eficiente que o método RK4.

Como apéndice a esta sección introduciremos os *PFML* (*Pares de Fórmulas Multichanzo Lineais*), desenvolvidas polo miúdo por Franco García (1988), onde se parte dun sistema de ecuacións tal que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^s \alpha_j^{(2)} \mathbf{y}_{i+j} &= h^2 \sum_{j=0}^s \beta_j^{(2)} \mathbf{f}(t_{i+j}, \mathbf{y}_{i+j}, \mathbf{y}'_{i+j}), \\
 \sum_{j=0}^s \alpha_j^{(1)} \mathbf{y}'_{i+j} &= h \sum_{j=0}^s \beta_j^{(1)} \mathbf{f}(t_{i+j}, \mathbf{y}_{i+j}, \mathbf{y}'_{i+j}).
 \end{aligned} \tag{1.270}$$

Sendo  $\alpha_j^k$  e  $\beta_j^k$ , con  $k = 1, 2$ , constantes independentes de  $i$  e  $n$ , tal que

$$\begin{aligned}
 \alpha_s^{(1)} &\neq 0, \\
 \alpha_s^{(2)} &\neq 0, \\
 |\alpha_0^{(1)}| + |\beta_0^{(1)}| &> 0, \\
 |\alpha_0^{(2)}| + |\beta_0^{(2)}| &> 0,
 \end{aligned} \tag{1.271}$$

e diferenciando entre método PFML implícito cando  $\beta_k^{(1)} \neq 0$  ou  $\beta_k^{(2)} \neq 0$ , ou explícito no caso de que  $\beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} = 0$ .

### 1.5.3. Métodos de extrapolación

Xeralmente son métodos baseados na *extrapolación de Richardson* que utiliza, mediante a *regra do trapecio*, dúas aproximacións da integral da ecuación (1.257) para atopar unha terceira estimación máis próxima á solución que as dúas anteriores. O seu paso aos métodos numéricos computacionais realízase mediante un algoritmo que parte de que o valor real da integral é igual á suma da primeira aproximación,  $I(h_1)$ , e o seu erro,  $err(h_1)$ ; e exactamente o mesmo para a segunda aproximación coa suma de  $I(h_2 + err(h_2))$ , sabendo que o error ao empregar a regra do trapecio é

$$err(h_i) = -\frac{t_{i+1} - t_i}{12} h_i^2 \mathbf{f}''(\epsilon), \tag{1.272}$$

sendo  $\epsilon$  un valor do intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$ . Vendo a relación entre os erros e substituíndo en  $err(h_2)$  obteríase a ecuación

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt = I(h_2) + \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}. \tag{1.273}$$

Cando  $h_2 = h_1/2$  o algoritmo resultante empregará a ecuación

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt \approx \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{I(h_1)}{3}, \quad (1.274)$$

resultando a expresión que se usa na *integración* ou *método de Romberg*. Este método emprega a seguinte fórmula para atopar os respectivos  $h_i$

$$h_n = \frac{t_{i+1} - t_i}{2^n}. \quad (1.275)$$

Polo tanto, cun intervalo dado,  $h_n$ , a súa metade,  $\frac{h_n}{2}$ , e empregando a fórmula anterior obtense unha terceira aproximación mediante (1.274). A nomenclatura habitual utiliza o seguinte sistema

$$\begin{aligned} R(0,0) &= \frac{1}{2}(t_i - t_{i+1})\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}(t_{i+1})) + \mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}(t_i)), \\ R(n,0) &= \frac{1}{2}R(n-1,0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \mathbf{f}(t_{i+1} + (2k-1)h_n, \mathbf{y}(t_{i+1} + (2k-1)h_n)), \quad (1.276) \\ R(n,m) &= \frac{4^m R(n,m-1) - R(n-1,m-1)}{4^m - 1}. \end{aligned}$$

Outros métodos son a *regra do punto medio*, a *regra de Simpson...* e outras máis avanzadas onde se utilizan extrapolacións racionais no canto de polinómicas (para ecuacións diferenciais de segunda orde que non dependen das derivadas primeiras), ou secuencias harmónicas en vez de lineais.

A complexidade á que chegan é bastante alta e o seu rendemento e exactitude poden acadar os niveis dos métodos de Runge-Kutta e multichanzo.

## Capítulo 2

# Método das series de Taylor e diferenciación automática

### 2.1. Solución dunha ecuación diferencial ordinaria por series de Taylor

Consideremos o problema de valor inicial definido por unha ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orde 1

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad t \in \mathbb{R}; \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^m; \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{p}$  é un conxunto de  $m$  parámetros e  $\mathbf{y}_0$  as condicións iniciais.

A solución de (2.1) nun contorno de  $t_0$  pódese expresar por medio do seu desenvolvemento en series de Taylor

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{d^k \mathbf{y}(t_0)}{dt^k} (t - t_0)^k. \quad (2.2)$$

Chamando



$$\mathbf{y}_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k \mathbf{y}(t_0)}{dt^k}, \quad (2.3)$$

á derivada  $k$ -ésima da solución  $\mathbf{y}(t)$  de (2.1) no intre inicial  $t_0$  poderemos por finalmente

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{y}_k (t - t_0)^k = \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 (t - t_0) + \mathbf{y}_2 (t - t_0)^2 + \cdots + \mathbf{y}_k (t - t_0)^k + \dots \quad (2.4)$$

Derivando (2.4) obtense a seguinte expresión

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \sum_{k \geq 1} k \mathbf{y}_k (t - t_0)^{k-1}, \quad (2.5)$$

que, redefinindo o índice  $k$  como  $k + 1$ , pódese por como

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \sum_{k \geq 0} (k + 1) \mathbf{y}_{k+1} (t - t_0)^k. \quad (2.6)$$

Substituíndo (2.4) na expresión  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p})$  e desenvolvendo esta en serie de Taylor obtense

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = \mathbf{f} \left( t, \sum_{k \geq 0} \mathbf{y}_k (t - t_0)^k; \mathbf{p} \right) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{F}_k (t - t_0)^k, \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{F}_k$  é o coeficiente de orde  $k$  da serie que depende de todos os termos  $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k$ .

Levando (2.6) e (2.7) a (2.1) e igualando, termo a termo, podemos obter a expresión de  $\mathbf{y}_{k+1}$  en función dos  $(\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k)$  anteriores

$$\mathbf{y}_{k+1} = \frac{1}{k + 1} \mathbf{F}_k(\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k). \quad (2.8)$$

Dende un punto de vista práctico non podemos traballar co desenvolvemento de Taylor dunha función senón cunha aproximación dada pola serie truncada, de orde  $N$ , cuxa expresión é

$$\mathbf{P}_N(t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_k (t - t_0)^k. \quad (2.9)$$

O erro cometido ao substituír  $\mathbf{y}(t)$  por  $\mathbf{P}_k(t)$  vén dado pola chamada *función resto*,  $\mathbf{R}_n(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{P}_n(t)$  que, de acordo co teorema de Taylor, pódese expresar como

$$\mathbf{R}_N(t) = \frac{1}{(N+1)!} \frac{d^{N+1}\mathbf{y}(\xi)}{dt^{N+1}}^{N+1}, \quad (2.10)$$

sendo  $\xi$  algún número real do intervalo  $[t_0, t]$ .

No que segue chamaremos solución de orde  $N$  da ecuación (2.1) á aproximación  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{P}_N(t)$ .

En Barrio (2005) pódese ver unha comparación de precisión e rendemento de diversos métodos numéricos que implementan o método das series de Taylor.

## 2.2. Diferenciación automática

Para desenvolver, tanto de xeito simbólico como numérico, o proceso de integración proposto no apartado anterior é preciso acudir a técnicas que nos permitan obter os termos  $\mathbf{F}_j$  da expresión (2.7). Para iso empregouse a denominada *diferenciación automática*, que constitúe unha extensión, a certos operadores matemáticos, do método usado habitualmente para realizar a derivación simbólica dunha función combinada. Cunha axeitada reformulación dos seus termos o proceso será moito máis eficiente. Pódese obter máis información ao respecto en Roth (1996), Hoffmann (2016) ou Margossian (2019).

Para ilustrar a descrición do método partiremos dunha función  $f$  real de dous parámetros (constantes)  $\alpha, \beta \neq 0$ , dada pola expresión

$$f(x, \alpha, \beta) = x^2 - \frac{\text{sen}(x + \alpha)}{e^{x^2/\beta}}. \quad (2.11)$$

Para derivar esta función aplicaranse as diferentes regras de derivación correspondentes á suma, produto, cociente, regra da cadea etc. Porén, cando a expresión ten un gran número de termos, unha axeitada descomposición da mesma pode reducir de xeito drástico o proceso de cálculo da derivada.

Na figura 2.1 pode verse a función (2.11) desenvolvida por medio dunha estrutura de árbore. Unha árbore é unha estrutura de datos representada por nodos e liñas ou

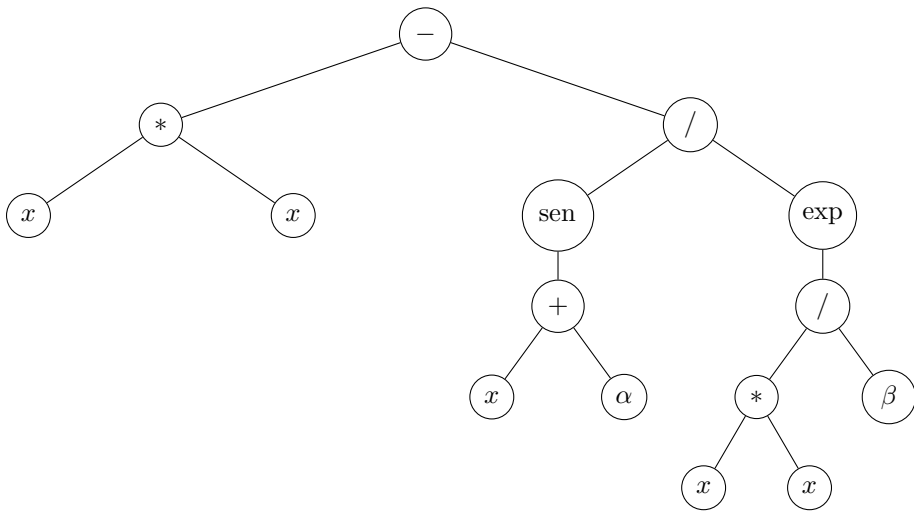


Figura 2.1: Estrutura de árbore da función (2.11).

pólas que conducen a outros nodos. Cada nodo representa unha operación ou función cuxas pólas son os operandos ou argumentos ou, se non ten pólas, representa unha variable ou parámetro.

Na mesma figura, os nodos  $(x)$ ,  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  do derradeiro nivel desta árbore, representan os parámetros (ou constantes) e a variable (ou variables) da función, mentres que o resto de nodos  $(+)$ ,  $(-)$ ,  $(*)$ ,  $(/)$ ,  $(\text{sen})$ ,  $(\text{exp})$ , identifican as distintas operacións ou funcións que se aplican ás pólas por debaixo do nodo.

Antes de derivar pensemos nunha operación máis sinxela como é a avaliación. Comecemos dando un valor numérico a cada un dos elementos do derradeiro nivel (variables e parámetros). Se seguimos cara a arriba na estrutura podemos realizar a operación correspondente en cada nodo cuxas pólas conduzan a un número, substituíndo finalmente o nodo e todas as súas pólas polo resultado da operación. Así podemos continuar ata o nodo superior e obter como resultado o valor da función.

Este tipo de operación pode realizarse tamén coa derivación comezando no nivel inferior pola derivada de cada variable ( $\dot{x} = 1$ ) e parámetro ( $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$ ) e aplicando a cada nodo a regra de derivación correspondente se representa unha operación  $(+)$ ,  $(-)$ ,

$\odot$ ,  $\oslash$  e a regra da cadea se o nodo representa unha función. O resultado representará, cando academos a nodo superior, a derivada da función.

O punto feble deste xeito de proceder é a repetición innecesaria de operacións. Neste caso pode verse que o termo  $x^2$  está repetido na función, as súas correspondentes pólas na estrutura de árbore aparecen dúas veces. Para evitar isto é preciso substituír esta estrutura de datos por outra formada por unha secuencia de operacións binarias e/ou unarias que aplicadas de xeito secuencial conduzan ao resultado da operación. A función representada desta forma será chamada *función enlazada* ou *encadeada* e a cada un dos seus elementos ou elos chamarémolos *nodo*. Observemos que o número de nodos desta estrutura é menor que o da estrutura de árbore ao evitar a repetición de nodos iguais.

$p_1 = \alpha$	$\rightarrow \alpha$	(2.12)
$p_2 = \beta$	$\rightarrow \beta$	
$l_1 = x$	$\rightarrow x$	
$l_2 = l_1 l_1$	$\rightarrow x^2$	
$l_3 = l_1 + p_1$	$\rightarrow x + \alpha$	
$l_4 = \text{sen}(l_3)$	$\rightarrow \text{sen}(x + \alpha)$	
$l_5 = l_2 / p_2$	$\rightarrow x^2 / \beta$	
$l_6 = e^{l_5}$	$\rightarrow e^{(x^2/\beta)}$	
$l_7 = l_4 / l_6$	$\rightarrow \text{sen}(x + \alpha) e^{-(x^2/\beta)}$	
$l_8 = l_2 - l_7$	$\rightarrow x^2 - \text{sen}(x + \alpha) e^{-(x^2/\beta)}$	

Aínda que mediante o software *TIDES* (ver apartado 2.6) se pode obter a función enlazada dunha expresión calquera, se esta é demasiado complexa, como por exemplo a avaliación do potencial terrestre, é conveniente unha manipulación manual da mesma para obter a forma máis eficiente da función enlazada de maneira que a avaliación sexa o máis rápida posible.

Para derivar a función aplicaremos sucesivamente as propiedades do operador  $\mathcal{D} = d./dx$ . Partindo das derivadas dos parámetros  $\mathcal{D}(\alpha) = \mathcal{D}(\beta) = 0$  e da variable  $\mathcal{D}(x) = 1$ , aplicaremos, sucesivamente en cada nodo da función enlazada a propiedade correspondente do operador de xeito que finalmente obteremos a derivada co mínimo número posible de operacións.

$\mathcal{D}(p_1) = \mathcal{D}(a) \rightarrow 0$	(2.13)
$\mathcal{D}(p_2) = \mathcal{D}(b) \rightarrow 0$	
$\mathcal{D}(l_1) = \mathcal{D}(x) \rightarrow 1$	
$\mathcal{D}(l_2) = \mathcal{D}(l_1 l_1) \rightarrow l_1 \mathcal{D}(l_1) + l_1 \mathcal{D}(l_1)$	
$\mathcal{D}(l_3) = \mathcal{D}(l_1 + p_1) \rightarrow \mathcal{D}(l_1) + \mathcal{D}(p_1)$	
$\mathcal{D}(l_4) = \mathcal{D}(\text{sen}(l_3)) \rightarrow \cos(l_3) \mathcal{D}(l_3)$	
$\mathcal{D}(l_5) = \mathcal{D}(l_2/p_2) \rightarrow (p_2 \mathcal{D}(l_2) - l_2 \mathcal{D}(p_2))/p_2^2$	
$\mathcal{D}(l_6) = \mathcal{D}(e^{l_5}) \rightarrow e^{l_5} \mathcal{D}(l_5)$	
$\mathcal{D}(l_7) = \mathcal{D}(l_4/l_6) \rightarrow (l_6 \mathcal{D}(l_4) - l_4 \mathcal{D}(l_6))/l_6^2$	
$\mathcal{D}(l_8) = \mathcal{D}(l_2 - l_7) \rightarrow \mathcal{D}(l_2) - \mathcal{D}(l_7)$	

Este proceso pódese xeneralizar a un operador  $\mathcal{O}$  que actúe sobre un espazo de funcións  $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}: \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F} \\ f &\rightarrow \mathcal{O}(f), \end{aligned}$$

sendo  $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}\}$ , onde  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  representa unha función real de  $n$  variables  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $m$  parámetros  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$  que poida expresarse en termos dunha función enlazada cuxos nodos sexan funcións ou operacións alxebraicas elementais.

O operador  $\mathcal{O}$  debe ter unha regra asociada, tanto aos parámetros e variables, como a cada unha das operacións que aparecen na función enlazada correspondente a  $f$

$\mathcal{O}(p_i) = \mathcal{O}_{par}(p_i)$	(2.14)
$\mathcal{O}(x_i) = \mathcal{O}_{var}(x_i)$	
$\mathcal{O}(u + v) = \mathcal{O}_{\oplus}(u, v, \mathcal{O}(u), \mathcal{O}(v))$	
$\mathcal{O}(uv) = \mathcal{O}_{\otimes}(u, v, \mathcal{O}(u), \mathcal{O}(v))$	
$\dots = \dots$	
$\mathcal{O}(\Phi(u)) = \mathcal{O}_{\Phi}(u, \Phi(u), \mathcal{O}(u))$	

onde  $p_i, x_i$  representan, respectivamente un parámetro e unha variable,  $u, v$  cada unha das expresións dun nodo e  $\Phi$  é unha función calquera (por exemplo  $\text{sen } u, e^u, u^\alpha, \text{tanh } u$  etc.). Notemos que na aplicación dun operador a unha operación particular pode depender de cada un dos argumentos da dita expresión así como do operador aplicado a cada un deles.

## CAPÍTULO 2. SERIES DE TAYLOR E DIFERENCIACIÓN AUTOMÁTICA

Este procedemento pode usarse con operadores de derivación como o gradiente, o hessiano etc. e a outros operadores que non o sexan como por exemplo a avaliación eficiente de funcións e as operacións asociadas á álgebra de series de potencias, que se verá no apartado seguinte. Nestes casos, a pesar de que o procedemento non estea asociado á derivación, mantívose o nome de *diferenciación automática*.

No caso da avaliación, visto no exemplo (2.12), podemos pensar no proceso como a aplicación do *operador identidade* que, para identificalo cun dos elementos que aparece no apartado 2.7, denotaremos  $\delta^0$ ,

$$\delta^0 f = f, \tag{2.15}$$

que asocia a cada función a propia función. Se damos valores numéricos ao operador asociado aos parámetros e ás variables podemos obter, seguindo a secuencia correspondente, o valor numérico da función. Se aos parámetros e variables se lles asocia un valor simbólico, a secuencia condúcenos á expresión simbólica da función.

No exemplo anterior tomouse unha función dunha variable, porén, cando se traballa con funcións de  $n$  variables debemos substituír o operador  $\mathcal{D}$  polo operador derivada parcial, que chamaremos  $\delta^j$ ,

$$\delta^j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{2.16}$$

que asocia a cada función a súa derivada parcial respecto da variable  $x_j$ .

Neste caso todas as regras do operador se obteñen aplicando as propiedades xerais da derivación, en particular da regra da cadea

$$\delta^j \Phi(u) = \Phi'(u) \delta^j u, \quad \delta^j \Psi(u, v) = \Psi_u(u, v) \delta^j u + \Psi_v(u, v) \delta^j v, \tag{2.17}$$



que permite obter as seguintes regras

$\delta^j p_i$	$= 0$		
$\delta^j x_i$	$= 1$		
$\delta^j x_j$	$= 0, \quad j \neq i$		
$\delta^j(u+v)$	$= \delta^j u + \delta^j v$		
$\delta^j(uv)$	$= u\delta^j v + v\delta^j u$	$\delta^j(uv)$	$= \delta^0 u \delta^j v + \delta^0 v \delta^j u$
$\delta^j(1/u)$	$= -(1/u^2)\delta^j u$	$\delta^j(1/u)$	$= -\delta^0(1/u^2)\delta^j u$
$\delta^j(\text{sen } u)$	$= \cos u \delta^j u$	$\delta^j(\text{sen } u)$	$= \delta^0(\cos u)\delta^j u$
$\delta^j(\cos u)$	$= -\text{sen } u \delta^j u$	$\delta^j(\cos u)$	$= -\delta^0(\text{sen } u)\delta^j u$
$\delta^j(u^\alpha)$	$= \alpha u^{\alpha-1} \delta^j u$	$\delta^j(u^\alpha)$	$= \alpha \delta^0(u^{\alpha-1})\delta^j u$
$\delta^j(\alpha^u)$	$= \ln \alpha \alpha^u \delta^j u$	$\delta^j(\alpha^u)$	$= \ln \alpha \delta^0(\alpha^u)\delta^j u$
$\delta^j(u^v)$	$= v u^{v-1} \delta^j u + u^v \ln u \delta^j v$	$\delta^j(u^v)$	$= \delta^0(v u^{v-1})\delta^j u + \dots$

(2.18)

À dereita da anterior táboa aparecen as regras do operador  $\delta^j$  combinadas coas do operador identidade  $\delta^0$ .

O gradiente dunha función  $f(t, \mathbf{x})$ , nun campo vectorial  $\mathbf{x}$  vén dado pola expresión

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = (\delta^1 f, \dots, \delta^n f).$$

No proceso de cálculo simbólico para obter o gradiente tamén é necesaria a expresión explícita da función  $f$  polo que, no canto do operador gradiente, nós traballaremos cunha extensión do mesmo que inclúa a función, na forma seguinte

$$\delta f = (\delta^0 f, \delta^1 f, \dots, \delta^n f), \quad \delta^0 f = f, \quad \delta^j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.19)$$

O operador  $\delta$  é un vector, de dimensión  $n+1$  cuxa primeira compoñente é o operador identidade (2.15) e as  $n$  últimas representan o operador gradiente cuxas compoñentes son os operadores  $\delta^j$  (2.18).

### 2.3. Álgebra de series

Chamaremos serie de potencias á expresión

$$u(t) = \sum_{k \geq 0} u_k t^k,$$

onde  $t \in \mathbb{R}$  é unha variable real e  $u_k \in \mathbb{R}$  representa o coeficiente de orde  $k$  da serie.

Como se ten dito no apartado 2.1, a solución da ecuación (2.1) pode expresarse como a serie de Taylor (2.4), que, se tomamos sen perda de xeneralidade  $t_0 = 0$ , representa unha serie de potencias. Así pois, as series de potencias constitúen o elemento matemático fundamental para o tratamento, mediante este método, das ecuacións diferenciais ordinarias.

Xa que dende o punto de vista computacional é imposible tratar con series infinitas, de aquí en adiante consideraremos unicamente aproximacións a estas series obtidas truncando a serie orixinal, é dicir, facendo cero todos os coeficientes a partir dunha orde dada. Chamaremos serie de orde  $N$ ,

$$u(t) = \sum_{k=0}^N u_k t^k, \tag{2.20}$$

ao polinomio resultante de truncar a serie de potencias na orde  $N$ .

O operador

$$\mathcal{S}(u) = (u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, u_N),$$

que nos dá, para unha función  $u$ , os  $n + 1$  coeficientes  $u_k$  da serie de potencias de orde  $N$  de  $u$ , contén a información básica da serie, suficiente para coñecer e tratar a mesma.

Para realizar a procura dos elementos  $\mathbf{F}_j$  que aparecen en (2.7) é preciso levar a cabo as operacións alxébricas<sup>1</sup> útiles para obter cada coeficiente da serie, polo que será necesario definir as diferentes regras asociadas ao operador  $\mathcal{S}$ .

Como a información da serie vén dada polos seus distintos termos  $u_k$ , cada operación cunha ou varias series debe permitir a obtención secuencial do  $k$ -ésimo termo da serie resultante. Partindo da orde  $k$  de cada parámetro e variable

$$\mathcal{S}(p_i) = ((p_i)_0, (p_i)_1 = 0, \dots, (p_i)_k = 0), \quad \mathcal{S}(x_i) = ((x_i)_0, (x_i)_1, \dots, (x_i)_k),$$

<sup>1</sup> Neste senso referímonos á *álgebra de series* como o conxunto de todas as operacións necesarias para o tratamento das mesmas e non unicamente aquelas que lle confiren a estrutura de álgebra.

completaremos secuencialmente o  $k$ -ésimo termo de cada nodo da función enlazada aplicando o algoritmo correspondente a cada tipo de operación.

No que segue desenvolveremos cada un destes algoritmos, para iso chamaremos  $\alpha, u, v$  aos elementos que aparecen como argumentos dun determinado nodo,  $\alpha$  é un parámetro ou constante, e  $u, v$  representan parámetros, variables ou funcións.  $w$  representará o resultado da operación realizada no nodo. Partiremos de que se coñece  $\mathcal{S}(\alpha) = (\alpha, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathcal{S}(u) = (u_0, u_1, \dots, u_k)$ ,  $\mathcal{S}(v) = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  e  $\mathcal{S}(w) = (w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$  e calcularase  $w_k$  para completar a orde  $k$  de  $\mathcal{S}(w)$ .

- **Operacións elementais de series:** suma, resta, produto, inversa e derivada, con respecto ao tempo, dunha función.

A demostración dos seguintes algoritmos está baseada na expresión da serie truncada como polinomio e as operacións elementais con polinomios, truncando estes na orde axeitada.

- **Suma:**  $w = u + v$

$$w = u + v \quad \rightarrow \quad w_k = u_k \pm v_k. \quad (2.21)$$

- **Produto:**  $w = uv$

$$w = uv \quad \rightarrow \quad w_k = \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j}. \quad (2.22)$$

- **Inversa:**  $w = 1/u$ .

Para demostrar o algoritmo correspondente ao cálculo da inversa basta multiplicar a serie truncada a orde  $k$  de  $u$  pola de  $w$  e despxear, da expresión, o termo  $w_k$ . Desta forma obteremos

$$w = \frac{1}{u} \quad \rightarrow \quad w_0 = \frac{1}{u_0}, \quad w_k = -\frac{1}{u_0} \sum_{j=0}^{k-1} w_j u_{k-j}. \quad (2.23)$$

Pode observarse que no proceso de cálculo do termo  $w_k$ , da serie  $w$ , úsanse explicitamente todos os termos,  $w_i, i < k$ , calculados en ordes anteriores.

- **Derivada con respecto ao tempo:**  $w = u'$ .

$$w = \frac{du}{dt} = u' \quad \rightarrow \quad w_k = (k+1)u_{k+1}. \quad (2.24)$$

A orde da derivada dunha serie só pode ser construída ata unha orde menos que a serie a derivar.

■ **Funcións trigonométricas e hiperbólicas**

Se chamamos  $s = \text{sen } u$ ,  $c = \text{cos } u$  e derivamos respecto ao tempo poderemos pór  $s' = cu'$ ,  $c' = -su'$ . A orde  $k-1$  de cada unha das series  $s'$ ,  $c'$  poderase pór como

$$\begin{aligned} {}^k s_k &= s'_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} c_j u'_{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) c_j u_{k-j}, \\ {}^k c_k &= c'_{k-1} = -\sum_{j=0}^{k-1} s_j u'_{k-1-j} = -\sum_{j=0}^{k-1} (k-j) s_j u_{k-j}, \end{aligned}$$

de tal xeito que

$$\begin{aligned} s = \text{sen } u &\quad \rightarrow \quad s_0 = \text{sen } u_0, \quad s_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j u_{k-j}, \\ c = \text{cos } u &\quad \rightarrow \quad c_0 = \text{cos } u_0, \quad c_k = -\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} s_j u_{k-j}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

As operacións *seno* e *coseno* están interrelacionadas (no cálculo do seno emprégase o coseno e viceversa), polo que será necesario calcular ambas simultaneamente aínda que só se vaia utilizar unha delas.

De xeito semellante podemos obter as expresións para as funcións hiperbólicas  $\text{senh } u$ ,  $\text{cosh } u$

$$\begin{aligned} s = \text{senh } u &\quad \rightarrow \quad s_0 = \text{senh } u_0, \quad s_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} c_j u_{k-j}, \\ c = \text{cosh } u &\quad \rightarrow \quad c_0 = \text{cosh } u_0, \quad c_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} s_j u_{k-j}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Para o cálculo das series das funcións  $\text{tan } u$ ,  $\text{csc } u$ ,  $\text{sec } u$ ,  $\text{cot } u$ ,  $\text{tanh } u$ ,  $\text{csch } u$ ,  $\text{sech } u$  e  $\text{coth } u$  basta recordar que estas se poden expresar como funcións elementais das funcións seno e coseno.

- **Funciones unarias**  $w = \Phi(u)$ , onde  $\Phi' = 1/\Psi$ .

Derivando a expresión que relaciona  $u$  e  $w$  obteremos

$$w' \Psi = u',$$

onde, se substituímos as expresións polo seu desenvolvemento en serie de potencias, o termo de orde  $k - 1$  será

$$k u_k = u'_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} w'_j \Psi_{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1) w_{j+1} \Psi_{k-1-j} = \sum_{j=1}^k j w_{j+1} \Psi_{k-j},$$

e finalmente, poderemos pór

$$w = \Phi(u) \quad \rightarrow \quad w_0 = \Phi(u_0), \quad w_k = \frac{1}{\Psi_0} \left( u_k - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j w_j \Psi_{k-j} \right). \quad (2.27)$$

A expresión anterior indica que se se coñece ata a orde  $k$  de  $u$  e ata a orde  $k - 1$  de  $\Psi$  pódese calcular a orde  $k$  de  $w = \Phi(u)$ .

Deste xeito podemos tratar, entre outras, as seguintes funcións

$$\begin{aligned} \Phi = \text{asen } u & \quad \rightarrow \quad \Psi = \sqrt{1 - u^2}, \\ \Phi = \text{acos } u & \quad \rightarrow \quad \Psi = -\sqrt{1 - u^2}, \\ \Phi = \text{atan } u & \quad \rightarrow \quad \Psi = 1 + u^2, \\ \Phi = \text{arcsenh } u & \quad \rightarrow \quad \Psi = \sqrt{1 + u^2}, \\ \Phi = \text{arccosh } u & \quad \rightarrow \quad \Psi = \sqrt{u^2 - 1}, \\ \Phi = \text{arctanh } u & \quad \rightarrow \quad \Psi = 1 - u^2, \\ \Phi = \log u & \quad \rightarrow \quad \Psi = u. \end{aligned} \quad (2.28)$$

De acordo con isto, o desenvolvemento para a función logaritmo será

$$w = \log u \quad \rightarrow \quad w_0 = \log u_0, \quad w_k = \frac{1}{u_0} \left( u_k - \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j w_j u_{k-j} \right). \quad (2.29)$$

- **Potencias:** Distinguiremos tres casos distintos segundo teñamos dúas series ou unha serie e unha constante real.

- **Constante elevada a unha serie:**  $w = \alpha^u$ .

Se derivamos esta función obtense

$$w' = \alpha^u u' \log \alpha = w u' \log \alpha,$$

onde, prescindindo do valor constante  $\log \alpha$  e obtendo a orde  $k-1$  da anterior expresión, terase

$$w'_{k-1} = k w_k = \sum_{j=0}^{k-1} w'_j u_{k-1-j} = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) w_j u_{k-j}, \quad (2.30)$$

para obter finalmente a seguinte expresión

$$w = \alpha^u \quad \rightarrow \quad w_0 = \alpha^{u_0}, \quad w_k = \frac{\log \alpha}{k} \left( \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) w_j u_{k-j} \right). \quad (2.31)$$

- **Serie elevada a unha constante:**  $w = u^\alpha$ .

A derivada desta función, multiplicada por  $u$ , é igual a

$$w' = \alpha u^{\alpha-1} u' \quad \rightarrow \quad w' u = \alpha w u'.$$

A orde  $k-1$  da expresión anterior será

$$\sum_{j=0}^{k-1} u_{k-1-j} w'_j = \alpha \sum_{j=0}^{k-1} u'_{k-1-j} w_j, \quad (2.32)$$

de onde, substituíndo as derivadas e reordenando termos e índices, obtense

$$\sum_{j=1}^k (j+1) u_{k-1-j} w_{j+1} = \alpha \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) u_{k-j} w_j. \quad (2.33)$$

Finalmente, separando o termo  $j = k$  do primeiro sumando obtemos

$$w = u^\alpha \quad \rightarrow \quad w_0 = u_0^\alpha, \quad w_k = \frac{1}{k u_0} \left( \sum_{j=0}^{k-1} [\alpha(k-j) - j] w_j u_{k-j} \right). \quad (2.34)$$

- **Serie elevada a unha serie:**  $w = u^v$ .

A derivada de  $w$  é

$$w' = \left( \frac{v}{u} u' + \log u v' \right) w.$$

Se introducimos tres novas funcións  $s = u/v$ ,  $t = \log u$  e  $r = s u' + t v'$  a anterior expresión poderase pór como  $w' = r w$ , cuxo termo  $(k-1)$ -ésimo será

$$k w_k = w'_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} r_j w_{k-1-j},$$

e finalmente

$$w_0 = u_0^{v_0}, \quad w_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} r_j w_{k-1-j}, \quad (2.35)$$

onde os termos  $r_j$  serán calculados durante o proceso secuencial despois de engadir as funcións  $s$ ,  $t$ ,  $r$  como nodos na función enlazada.

## 2.4. Aplicación da diferenciación automática e da álgebra de series á resolución de EDOs.

Para poder comprobar a potencia da diferenciación automática, verase unha aplicación cun exemplo sinxelo como pode ser o problema do oscilador harmónico. Para iso partírase da ecuación diferencial de orde dous con condicións iniciais

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0 = 1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0, \quad (2.36)$$

onde  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Para poder aplicar o método será preciso presentar un sistema de ecuacións de orde un. De modo que poderemos reescribir (2.36) como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x, \end{aligned} \quad (2.37)$$

e en forma vectorial, a modo de (2.1)

$$\mathbf{x} = (x, y), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}; \omega) = (y, -\omega^2 x), \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (1, 0). \quad (2.38)$$

A función de paso correspondente á avaliación do vector  $\mathbf{f}$  da ecuación diferencial (2.38) pode pórse como

$p_1$	$=$	$-\omega^2$	(2.39)
$l_1$	$=$	$x$	
$l_2$	$=$	$y$	
$l_3$	$=$	$p l_1$	

onde se introduciu o parámetro  $p = -\omega^2$ , os dous primeiros nodos  $l_1, l_2$  representan as variables e os nodos  $l_2, l_3$  representan a función  $\mathbf{f}$ .

Suporemos que a solución da ecuación diferencial vén dada por medio da serie de Taylor das variables

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \dots + x_j t^j + \dots \\ y &= y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \dots + y_j t^j + \dots \end{aligned} \quad (2.40)$$

das que, inicialmente, só coñecemos os termos de orde cero  $x_0$  e  $y_0$ .

Para aplicar o método debemos atopar as series de potencias de cada nodo  $l_i$

$$l_i = l_{i0} + l_{i1} t + l_{i1} t^2 + \dots + l_{ik} t^k + \dots \quad (2.41)$$

onde chamamos  $l_{ik}$  ao coeficiente de orde  $k$  da serie de potencias de  $l_i$ .

Posto que as variables están representadas polos dous primeiros nodos  $l_1, l_2$  terase que  $x_k = l_{1k}$ ,  $y_k = l_{2k}$ . O obxectivo do proceso consiste en atopar, iterativamente, o valor dos elementos de orde  $k$ , é dicir  $l_{1k}, l_{2k}$ . Para iso, na orde cero asignaremos o valor dos parámetros e tomaremos os valores,  $l_{10} = x_0, l_{20} = y_0$ , a partir das condicións iniciais

Orde 0			
$p$	$=$	$-\omega^2$	$\rightarrow -\omega^2$
$l_{10}$	$=$	$x_0$	$\rightarrow 1$
$l_{20}$	$=$	$y_0$	$\rightarrow 0$

(2.42)

Na orde 1 debemos completar os termos de orde 0 dos nodos que non representan variables, é dicir  $l_i$ ,  $i > 2$ , e usar a expresión  $\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{F}_k/(k+1)$  para obter os elementos de orde un,  $l_{11}, l_{21}$ , das variables

Orde 1			
$l_{30}$	$=$	$pl_{10}$	$\rightarrow -\omega^2$
$l_{11}$	$=$	$l_{20}/1$	$\rightarrow 0$
$l_{21}$	$=$	$l_{30}/1$	$\rightarrow -\omega^2$

(2.43)

De xeito xenérico, se completamos a orde  $k$  significa que coñecemos todos os termos ata a orde  $k$  de  $l_1, l_2$  e ata a orde  $k-1$  de  $l_i$ ,  $i > 2$ , así pois para completar a orde  $k+1$  faremos

Orde k+1			
$l_{3k}$	$=$	$pl_{1k}$	$\rightarrow \dots$
$l_{1k+1}$	$=$	$l_{2k}/(k+1)$	$\rightarrow \dots$
$l_{2k+1}$	$=$	$l_{3k}/(k+1)$	$\rightarrow \dots$

(2.44)

Para completar a ilustración do proceso de integración de (2.36) completaremos a orde 2

Orde 2			
$l_{31}$	$=$	$pl_{11}$	$\rightarrow 0$
$l_{12}$	$=$	$l_{21}/2$	$\rightarrow -\omega^2/2$
$l_{22}$	$=$	$l_{31}/2$	$\rightarrow 0$

(2.45)

Orden 3		
$l_{32}$	$= pl_{12}$	$\rightarrow -\omega^4/2$
$l_{13}$	$= l_{22}/3$	$\rightarrow 0$
$l_{23}$	$= l_{32}/3$	$\rightarrow \omega^4/6$

(2.46)

Finalmente reunindo os coeficientes  $l_{1k}$ ,  $l_{2k}$ , que representan os termos  $x_k$ ,  $y_k$ , poderemos pór

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{\omega^2}{2}t^2, \\ y &= -\omega^2t + \frac{\omega^4}{6}t^3, \end{aligned} \tag{2.47}$$

que obviamente coincide co desenvolvemento en serie da solución da ecuación diferencial dada en (2.36),

$$\begin{aligned} x &= \cos(\omega t) = 1 - \frac{\omega^2}{2}t^2 + \frac{\omega^4}{24}t^4 + \dots \\ y &= -\omega \operatorname{sen}(\omega t) = -\omega^2t + \frac{\omega^4}{6}t^3 + \dots \end{aligned} \tag{2.48}$$

truncada na orde catro.

## 2.5. Resolución numérica de ODEs mediante o método das series de Taylor

A solución de (2.1) pode expresarse como  $\mathbf{y}(t) = \sum_{k \geq 0} \mathbf{y}_k(t-t_0)^k$ . Para considerar o uso desta serie na avaliación, para cada  $t$ , da función  $\mathbf{y}(t)$  debemos ter en conta dous puntos

- Por un lado o *raio de converxencia da serie*, isto é, o valor  $h$  tal que a serie converxe para  $|t-t_0| < h$ . Este valor indícanos os valores de  $t$  para os que é posible avaliar o valor de  $\mathbf{y}(t)$  usando o seu desenvolvemento en serie de potencias.

- Na práctica tomaremos unha aproximación de orde  $N$  da serie dada por

$$\mathbf{y}(t) \approx \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_k (t - t_0)^k. \quad (2.49)$$

Poderemos estimar o erro cometido na aproximación a partir da expresión (2.10).

Unha vez obtida, por medio de técnicas de diferenciación automática, a aproximación (2.49) á solución de (2.1) podemos deseñar o procedemento de avaliación da solución para calquera valor de  $t$ , o que constituirá a parte numérica do proceso de integración. Para iso dividiremos o problema nos seguintes puntos

1. Para o instante  $t_0$  calcúlase, en primeiro lugar, a orde  $N$  da serie de Taylor ((2.4) e (2.3)), que depende do erro máximo que admitamos na integración, e que é función dun erro relativo e un erro absoluto (definidos previamente).
2. En segundo lugar calcúlase a serie de Taylor da solución ata a orde  $N$ .
3. Despois avaliase o raio de converxencia  $h$  que constitúe o chanzo do método de integración.
  - Se  $t < t_0 + h$ , entón o instante onde queremos a solución está dentro do raio de converxencia e polo tanto basta con avaliar a serie, que ao estar truncada na orde  $N$  se converte nun polinomio, en  $t$ . Para iso utilízase o algoritmo de Horner (ver en [Pohst e Zassenhaus \(1997\)](#)).
  - Se  $t > t_0 + h$  tómase como novo instante inicial  $t_0$  o intre  $t_0 + h$  e calcúlase o valor inicial  $\mathbf{y}_0$  avaliando a serie (2.4) en  $t_0 + h$ . Despois disto o proceso comeza de novo ata que o instante  $t$  se atopa dentro do raio de converxencia.

Para poder acoutar o erro en cada iteración, pódense empregar diferentes métodos ou criterios. No que segue describiremos o criterio implementado polo software *TIDES* (ver apartado 2.6).

Partindo dun erro absoluto ( $\epsilon_a$ ) e un relativo ( $\epsilon_r$ ), definidos polo usuario, podemos definir o erro ( $\epsilon$ ) do método a partir da expresión

$$\epsilon = \epsilon_a + \max(\|\mathbf{y}(t_i)\|, \|\mathbf{y}(t_{i-1})\|) \times \epsilon_r. \quad (2.50)$$

## CAPÍTULO 2. SERIES DE TAYLOR E DIFERENCIACIÓN AUTOMÁTICA

Por outro lado chamaremos  $\mathcal{O}_m, \mathcal{O}_M$ , a dous números enteiros predeterminados que representan a orde mínima e máxima das series de Taylor que usaremos no método, e  $\mathcal{O}_i$  outro enteiro que nos dá un incremento da orde estimado en función do erro. Con estas cantidades estimaremos a orde óptima  $\hat{N}$  a partir da expresión

$$\hat{N} = \text{máx} \left( \mathcal{O}_M; \frac{-\ln \epsilon}{2} + \mathcal{O}_i \right). \quad (2.51)$$

Un valor máis preciso da orde do método pode obterse das expresións

$$\epsilon_i = \text{mín} \left( \frac{\epsilon_a}{\text{mín}(\|\mathbf{y}(t_i)\|, \|\mathbf{y}(t_{i-1})\|)}, \epsilon_r \right), \quad (2.52)$$

$$\hat{N} = \text{máx} \left( \mathcal{O}_M, \frac{-\ln \epsilon_i}{2} + \mathcal{O}_i \right). \quad (2.53)$$

En ambos os casos a orde do método será igual a

$$N = \text{máx}(\mathcal{O}_m, \hat{N}). \quad (2.54)$$

Para seleccionar o chanzo estímase o erro tomando o último termo da serie de Taylor (para evitar problemas de funcións pares ou impares adóitase tomar os dous últimos termos diferentes de cero).

Deste xeito

$$\hat{h}_{i+1} = \text{mín} \left\{ \left( \frac{\epsilon}{\|\mathbf{y}^{[n-1]}(t_i)\|_\infty} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \left( \frac{\epsilon}{\|\mathbf{y}^{[n]}(t_i)\|_\infty} \right)^{\frac{1}{n}} \right\}, \quad (2.55)$$

$$h_{i+1} = F_1 \times \text{máx} \left[ \text{mín} \left( r_M \times h_i, \hat{h}_{i+1} \right), r_m \times h_i \right], \quad (2.56)$$

onde  $\mathbf{y}^{[n]}$  é a derivada normalizada  $\mathbf{y}^n/n!$ ;  $F_1$  un factor de seguridade (por defecto 0,95 pero coa posibilidade de mudalo polo usuario);  $r_M$  e  $r_m$  o máximo e o mínimo ratio entre o chanzo actual e o anterior, respectivamente.

## 2.6. Implementación do método de series de Taylor para a integración numérica de ecuacións diferenciais ordinarias: software *TIDES*

A utilidade do método das series de Taylor para a integración numérica de ecuacións diferenciais ordinarias propiciou a recente aparición de varios paquetes de software tales como *ATOMF* (Chang e Corliss (1994) e Chang e Corliss (1994)), *Cosy Infinity* (Berz, Hoefkens e Makino (2001)), *Taylor* (Jorba e Zou (2005)) e por último *TIDES* (**T**aylor series **I**ntegrator for **D**iferential **E**quation**S**), que é un programa de software libre desenvolvido por A. Abad, R. Barrio, F. Blesa e M. Rodríguez (Abad *et al.* (2012)) do Grupo de Mecánica Espacial e o *IUMA* da Universidad de Zaragoza<sup>2</sup> que actualmente se atopa na súa versión 2.0.

*TIDES* vén demostrando a súa utilidade e as súas vantaxes fronte a outros integradores numéricos nun bo número de campos da ciencia, por exemplo

- Medicina: no eido da cardioloxía, Barrio *et al.* (2020) realizaron simulacións numéricas relacionadas co proceso eléctrico que rexe o funcionamento das células cardíacas a partir dos resultados obtidos mediante *TIDES*. Por outro lado, no campo da neurociencia, Barrio e Shilnikov (2011) e Barrio *et al.* (2014) tamén o empregaron para calcular o sistema de ecuacións que modela o movemento oscilatorio das neuronas, coñecido como modelo Hindmarsh-Rose. En ambos os casos, a rapidez e a bondade en canto á exactitude dos resultados foi fundamental para que optasen por este software.
- Sistemas dinámicos: o uso de *TIDES* neste tipo de sistemas foi empregado para o estudo dos atractores de Lorenz (Barrio, Shilnikov e Shilnikov (2012), Bailey, Barrio e Borwein (2012) e Bailey e Borwein (2015)), como integrador para simulacións numéricas en estudos sobre o caos e o hipercaos (Wilczak, Serrano e Barrio (2016)) ou para o cálculo de ecuacións variacionais en sistemas hamiltonianos multidimensionais comparando resultados con outros softwares (Gerlach e Skokos (2011) e Gerlach, Eggl e Skokos (2012)).

<sup>2</sup> <http://iuma.unizar.es/es/investigacion/software/TIDES>

- Robótica: dentro dos denominados robots pasivos, aqueles que non precisan unha achega externa de enerxía e que se poden desprazar en pequenas pendentes grazas á forza da gravidade, os máis sinxelos son os chamados robots bípedos de tipo compás. Os investigadores [Kastsian, Oertel e Mönnigmann \(2014\)](#) utilizaron o programa *TIDES* (combinado con outros programas) para poder calcular o jacobiano do seu modelo matemático aplicado a este tipo de robots.
- Electromagnetismo: neste caso empregouse *TIDES* para integrar con múltiple precisión a ecuación de Riccati en estudos sobre o efecto Sauter–Schwinger, o cal predí a creación de pares partícula-antipartícula no baleiro a partir dun campo eléctrico suficientemente elevado ([Torgrimsson et al. \(2017\)](#), [Sitiwaldi e Xie \(2018\)](#), [Torgrimsson \(2019\)](#) ou [Oertel \(2020\)](#)).
- Astrodinámica: debido ao ámbito onde se desenvolveu *TIDES*, este véñse empregando en problemas relacionados coa astrodinámica dende o ano 2011, onde [Barrio et al. \(2011\)](#) ou [Abad, Barrio e Dena \(2011\)](#) daban conta das capacidades de *TIDES* para calcular a propagación de órbitas keplerianas con parámetros ou condicións iniciais incertos debido a limitacións na toma de medidas ou erros. Posteriormente empregouse para, por exemplo, calcular órbitas periódicas de sistemas dinámicos con precisión arbitraria ([Dena, Abad e Barrio \(2012\)](#) ou [Dena et al. \(2012\)](#)) ou no estudo de órbitas lunares de interese para posibles misións de exploración ([Dena, Abad e Barrio \(2016\)](#)). Os máis recentes usos de *TIDES* dentro deste campo son os estudos de sistemas Hénon-Heiles, relacionados co movemento dunha estrela arredor dun centro galáctico ([Wilczak e Barrio \(2020\)](#)) ou a súa aplicación na evolución dinámica do problema de tres corpos xerarquizado e a comprobación a longo prazo do seu comportamento en canto aos ciclos de Lidov-Kozai en relación á excentricidade e á inclinación da órbita interior cando a inclinación mutua é alta ([Docobo et al. \(2021\)](#)).

### Características de *TIDES*

Entre outras vantaxes de *TIDES* fronte a outros integradores podemos citar as seguintes:



- Ademais de integrar ecuacións diferenciais ordinarias en dobre precisión permite

facelo tamén en múltiple precisión mediante o uso das librarías *GMP* e *MPFR*, o que fai este método especialmente útil en problemas cun comportamento caótico.

- A resolución numérica implementa un óptimo e eficiente método de chanzo e orde variables.
- Permite o cálculo das derivadas parciais da solución con respecto ás condicións iniciais e aos parámetros o que conduce a unha integración sinxela das ecuacións variacionais sen necesidade de formulalas.
- É quen de detectar eventos na propagación da ecuación diferencial. Estes eventos son instantes onde algunha das variables, ou unha función delas, acadada un cero ou un máximo ou mínimo relativo.
- A expresión da función de chanzo necesaria para a integración da ecuación diferencial é calculada automaticamente polo software.

### Estrutura de *TIDES*

*TIDES* consta de dúas partes ben diferenciadas

- **MathTIDES**: é un paquete escrito en linguaxe *Mathematica* que actúa como preprocesador e que, a partir da expresión das ecuacións diferenciais do problema, escribe automaticamente, en linguaxe compilable *C* ou *Fortran*, o ficheiro que contén a función de chanzo estendida necesaria para a integración. Aínda que estes ficheiros poden ser escritos manualmente o proceso adoita ser moi pesado, polo que a axuda proporcionada por *MathTIDES* resulta moi útil.
- **LibTIDES**: contén o conxunto de rutinas escritas en linguaxe *C* ou *Fortran* que, xunto cos ficheiros xerados con *MathTIDES*, permiten a construción do programa executable que integra a ecuación diferencial. O formato de *MathTIDES* é o dun ficheiro ou unha librería de funcións segundo a versión. Actualmente existen catro versións da librería *MathTIDES* (ver táboa 2.1). Dúas delas son versións básicas escritas en *Fortran* e en *C*, que son máis rápidas pero que contan cunha serie de limitacións en canto ao sistema de ecuacións e as súas variables, funcións, parámetros etc. As outras dúas son versións completas escritas en *C* coas que se pode escoller entre precisión dobre e múltiple.

Versións de TIDES			
Versión	Contido	Linguaxe	Libraría
minf-tides	TSM básico	Fortran	LibTIDES
minc-tides	TSM básico	C	LibTIDES
dp-tides	TSM completo derivadas parciais	C	LibTIDES
mp-tides	TSM completo derivadas parciais precisión arbitraria	C	LibTIDES GMP MPFR

**Táboa 2.1:** Táboa de versións de *TIDES*.

## 2.7. Extensión da diferenciación automática para unha integración máis eficiente do problema orbital

O uso do preprocesador *MathTIDES* para a obtención do código *C* da función de chanzo dunha ecuación diferencial é moi útil cando a expresión da ecuación diferencial é relativamente simple. Se consideramos a integración do movemento orbital dun satélite artificial cun modelo sinxelo, como pode ser o Problema Principal, a función de chanzo xerada por *MathTIDES* é moi eficiente, pero se consideramos outras perturbacións, como o efecto do xeopotencial incluíndo un gran número de termos zonais e teserais, o resultado da aplicación de *MathTIDES* resulta ineficiente e mesmo pode chegar a exceder a capacidade de *Mathematica*.

Para evitar esta dificultade en [Hernández et al. \(2019\)](#) procédese a desenvolver un procedemento para aplicar o método de series de Taylor considerando calquera número de termos do xeopotencial sen o uso de *TIDES*. Para facer isto requírese a aplicación directa das expresións das derivadas do potencial terrestre que deben ser calculadas previamente.

Tendo en conta o anterior, así como outros problemas que serán comentados no seguinte capítulo, optamos por introducir un novo enfoque para a adaptación do método de series de Taylor ao estudo do movemento do satélite artificial. Este enfoque evita o cálculo previo das derivadas do potencial que serán calculadas internamente polo programa e pode ser estendido a calquera problema no que as forzas deriven dun potencial ou a un sistemas dinámico formulado en forma hamiltoniana.

### 2.7.1. Método das series de Taylor aplicado a sistemas dinámicos caracterizados por unha función potencial ou unha formulación hamiltoniana

A formulación clásica dun sistema dinámico, en particular dos sistemas que representan o movemento dun sistema de partículas, baséase no concepto de forza ou variación da cantidade de movemento e na segunda lei de Newton, forza igual á masa por aceleración, que é representado matematicamente mediante unha ecuación diferencial de orde 2.

Para a aplicación do método das series de Taylor, primeiro é necesario expresalo como unha ecuación diferencial de orde 1 mediante a extensión das variables  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$  do espazo de configuración (que representan só a posición) ás variables  $(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \in \mathbb{R}^{2n}$  no espazo fásico (posición e a velocidade), de xeito que as ecuacións que amosan a evolución dun sistema dinámico pódense pór como un sistema de orde 1 na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{R}, \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p}), \end{aligned} \tag{2.57}$$

donde  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ , representa a posición,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$  a velocidade, e  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p})$  a forza que actúa sobre o sistema.

Comparando a expresión (2.57) con (2.1) podemos concluír que

$$\mathbf{y} = (\mathbf{r}, \mathbf{R}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\mathbf{R}, \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}; \mathbf{p})),$$

co que temos a formulación axeitada para aplicar o método das series de Taylor.

Dicimos que a forza  $\mathbf{F}$  deriva dun potencial cando existe unha función escalar  $V(t, \mathbf{r})$  tal que se verifica  $\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{r}} V = -\partial V / \partial \mathbf{r}$ , deste xeito as ecuacións diferenciais (2.57) poderanse pór como

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{R}, \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= -\nabla_{\mathbf{r}}V(t, \mathbf{r}; \mathbf{p}).\end{aligned}\tag{2.58}$$

Neste caso, terase

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\mathbf{R}, -\nabla_{\mathbf{r}}V),\tag{2.59}$$

e, polo tanto, para obter  $\mathbf{f}$  será necesario realizar o cálculo das derivadas do potencial  $V$ .

Se no problema se inclúen forzas que non derivan dun potencial, o sistema poderase expresar como

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{R}, \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= -\nabla_{\mathbf{x}}V + \mathbf{F},\end{aligned}\tag{2.60}$$

onde  $\mathbf{F}$  será o vector suma de todas as forzas que non derivan dun potencial e  $V$  o potencial do resto das forzas.

En moitos problemas resulta conveniente usar as ecuacións de Hamilton

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \nabla_{\mathbf{R}}\mathcal{H}(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}), \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= -\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{H}(t, \mathbf{r}, \mathbf{R}),\end{aligned}\tag{2.61}$$

onde  $\mathcal{H}(t, \mathbf{r}, \mathbf{R})$  representa o hamiltoniano do sistema dinámico, sendo  $\mathbf{r}$  as coordenadas e  $\mathbf{R}$  os momentos.

Nestes dous últimos casos a función  $\mathbf{f}$  poderá expresarse como

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\mathbf{R}, -\nabla_{\mathbf{r}}V + \mathbf{F}), \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{R}}\mathcal{H}, -\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{H}).\tag{2.62}$$

### 2.7.2. Extensión da álgebra de series ao operador $\delta$

Para estender o método das series de Taylor a un sistema dinámico formulado por unha das expresións dadas en (2.62) debemos estender a álgebra de series, dada no apartado 2.3, ao operador  $\delta$  definido en (2.19).

Xa que estamos interesados no desenvolvemento en series de Taylor da función  $\mathbf{f}$  e das súas derivadas podemos pór

$$\delta \mathbf{f}(t) = \delta \left( \sum_{k \geq 0} \mathbf{f}_k t^k \right),$$

cuxas compoñentes serán

$$\delta^i \mathbf{f} = \delta^j \left( \sum_{k \geq 0} \mathbf{f}_k t^k \right) = \sum_{k \geq 0} (\delta_k^j \mathbf{f}) t^k, \quad (2.63)$$

onde chamamos

$$\delta_k^0 \mathbf{f} = \mathbf{f}_k, \quad \delta_k^j \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.64)$$

O procedemento de cálculo realizarase, ao igual que para a álgebra de series, de xeito secuencial, orde a orde. Supoñamos coñecido ata a orde  $k-1$ , isto é coñecemos os elementos  $\delta_o^j$ ,  $0 \leq j \leq n$ ,  $0 \leq o \leq (k-1)$  para todas as funcións dos nodos da función enlazada. O obxectivo é obter os elementos  $\delta_k^j$ ,  $0 \leq j \leq n$  de cada nodo, ata completar a orde  $k$ .

No proceso de cálculo dos elementos  $\delta_k^j$  debemos distinguir o elemento  $\delta_k^0$  que corresponde ao termo de orde  $k$  do desenvolvemento en serie da función, dos elementos  $\delta_k^j$ ,  $1 \leq j \leq n$  que corresponden á derivada respecto á variable  $x_j$  do  $k$ -ésimo termo do desenvolvemento da serie. O algoritmo de cálculo será diferente para ambos.

$w = u + v$	$\delta_0^0 w = \delta_0^0 u + \delta_0^0 v$	$\delta_k^0 w = \delta_k^0 u + \delta_k^0 v$
$w = u v$	$\delta_0^0 w = \delta_0^0 u \delta_0^0 v$	$\delta_k^0 w = \sum_{o=0}^k \delta_o^0 u \delta_{k-o}^0 v$
$w = 1/u$	$\delta_0^0 w = \frac{1}{\delta_0^0 u}$	$\delta_k^0 w = w_k = -\frac{1}{\delta_0^0 u} \sum_{o=0}^{k-1} \delta_o^0 w \delta_{k-o}^0 u$
$s = \text{sen } u$	$\delta_0^0 s = \text{sen } \delta_0^0 u$	$\delta_k^0 s = \frac{1}{k} \sum_{o=0}^{k-1} \delta_o^0 c \delta_{k-o}^0 u$
$c = \text{cos } u$	$\delta_0^0 c = \text{cos } \delta_0^0 u$	$\delta_k^0 c = -\frac{1}{k} \sum_{o=0}^{k-1} \delta_o^0 s \delta_{k-o}^0 u$
$s = \text{senh } u$	$\delta_0^0 s = \text{senh } \delta_0^0 u$	$\delta_k^0 s = \frac{1}{k} \sum_{o=0}^{k-1} \delta_o^0 c \delta_{k-o}^0 u$
$c = \text{cosh } u$	$\delta_0^0 c = \text{cosh } \delta_0^0 u$	$\delta_k^0 c = \frac{1}{k} \sum_{o=0}^{k-1} \delta_o^0 s \delta_{k-o}^0 u$
$w = \log u$	$\delta_0^0 w = \log \delta_0^0 u$	$\delta_k^0 w = \frac{1}{\delta_0^0 u} \left( \delta_k^0 u - \frac{1}{k} \sum_{o=1}^{k-1} o \delta_o^0 w \delta_{k-o}^0 u \right)$
$w = \alpha^u$	$\delta_0^0 w = \alpha^{\delta_0^0 u}$	$\delta_k^0 w = \frac{\log \alpha}{k} \left( \sum_{o=0}^{k-1} (k-o) \delta_o^0 w \delta_{k-o}^0 u \right)$
$w = u^\alpha$	$\delta_0^0 w = \delta_0^0 u^\alpha$	$\delta_k^0 w = \frac{1}{k \delta_0^0 u} \left( \sum_{o=0}^{k-1} [\alpha(k-o) - o] \delta_o^0 w \delta_{k-o}^0 u \right)$
$w = u^v$	$\delta_0^0 w = \delta_0^0 u^{\delta_0^0 v}$	ver (2.35)

(2.65)

Como sabemos  $\delta_k^0 \mathbf{f} = \mathbf{f}_k$  polo que para o cálculo do termo  $\delta_k^0 \mathbf{f}$  segue idénticas regras que as desenvolvidas para a álgebra de series vista no apartado 2.3 e que, reunindo (2.21), (2.22), (2.23), (2.25), (2.26), (2.29), (2.31), (2.34) e (2.35), pode resumirse nas expresións de (2.65).

Supoñamos dúas funcións  $\Phi(u)$ ,  $\Psi(u, v)$  cuxas derivadas son

$$r(u) = \frac{d\Phi}{du}, \quad s(u, v) = \frac{\partial \Psi}{\partial u}, \quad t(u, v) = \frac{\partial \Psi}{\partial v}.$$

Se aplicamos a propiedade (2.17) a cada orde  $k$  obteremos

$$\delta_k^j \Phi(u) = \delta_k^0 r \delta_k^j u, \quad \delta_k^j \Psi(u, v) = \delta_k^0 s \delta_k^j u + \delta_k^0 t \delta_k^j v, \quad (2.66)$$

o que indica que para o cálculo do termo  $\delta_k^j$  dun nodo calquera da función enlazada hai que coñecer o elemento  $\delta_k^j$  de  $u$  e  $v$ , ademais do elemento  $\delta_k^0$  das funcións  $r$ ,  $s$  e  $t$ .

Para as funcións habituais dunha variable tense

$$\begin{aligned}
 \Phi(u) = 1/u &\quad \rightarrow \quad r = -1/u^2, \\
 \Phi(u) = \text{sen } u &\quad \rightarrow \quad r = \cos u, \\
 \Phi(u) = \cos u &\quad \rightarrow \quad r = -\text{sen } u, \\
 \Phi(u) = \text{senh } u &\quad \rightarrow \quad r = \cosh u, \\
 \Phi(u) = \cosh u &\quad \rightarrow \quad r = \text{senh } u, \\
 \Phi(u) = \text{arc sen } u &\quad \rightarrow \quad r = 1/\sqrt{1-u^2}, \\
 \Phi(u) = \text{arccos } u &\quad \rightarrow \quad r = -1/\sqrt{1-u^2}, \\
 \Phi(u) = \text{arctan } u &\quad \rightarrow \quad r = 1/(1+u^2), \\
 \Phi(u) = \text{arcsenhu} &\quad \rightarrow \quad r = 1/\sqrt{1+u^2}, \\
 \Phi(u) = \text{arccosh } u &\quad \rightarrow \quad r = 1/\sqrt{u^2-1}, \\
 \Phi(u) = \text{arctanh } u &\quad \rightarrow \quad r = 1/(1-u^2), \\
 \Phi(u) = \log u &\quad \rightarrow \quad r = 1/u, \\
 \Phi(u) = \alpha^u &\quad \rightarrow \quad r = \log \alpha \alpha^u, \\
 \Phi(u) = u^\alpha &\quad \rightarrow \quad r = \alpha u^{\alpha-1},
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

mentres que para as funcións binarias

$$\begin{aligned}
 \Phi(u, v) = u + v &\quad \rightarrow \quad s = 1, \quad t = 1, \\
 \Phi(u, v) = u v &\quad \rightarrow \quad s = v, \quad t = u, \\
 \Phi(u, v) = u^v &\quad \rightarrow \quad s = u^{v-1} v, \quad t = u^v \log u.
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

A partir das táboas anteriores concluímos que calquera dos elementos  $\delta_k^0 r$ ,  $\delta_k^0 s$  e  $\delta_k^0 t$ , necesarios para o cálculo dos elementos  $\delta_k^j \Phi(u)$ ,  $\delta_k^j \Psi(u, v)$ , pode obterse a partir dos algoritmos dados en (2.65).

Para terminar este procedemento basta lembrar o valor dos elementos de orde 0 tanto dos parámetros como das variables. Para un parámetro  $p$  calquera terase  $\delta_0^0 p = p$ ,  $\delta_0^i p = 0$ , mentres que para a variable  $x_v$  terase  $\delta_0^0 x_v = x_v$ ,  $\delta_0^j x_v = 1$  ( $j = v$ ),  $\delta_0^i x_v = 0$  ( $j \neq v$ ).

## Capítulo 3

# O propagador orbital *PSAT*

### 3.1. Propagadores orbitais

A palabra *propagación*, aplicada a un sistema dinámico, indica a determinación do estado do sistema en calquera intre a partir das condicións iniciais do mesmo. No caso do movemento dun satélite artificial, un *propagador orbital* é o software que permite obter, a partir da posición e velocidade iniciais, a posición e velocidade do satélite en calquera instante.

O uso de propagadores orbitais é esencial na maioría das etapas de estudo e análise dunha misión espacial, tanto antes como despois do lanzamento. Ademais do estudo de viabilidade, é necesaria unha análise exhaustiva da misión previa ao lanzamento, así como un seguimento detallado da posición e velocidade do satélite en cada momento que indique, coa debida anticipación, cando realizar os acendidos do motor necesarios para modificar a órbita. Deste xeito, poderíanse evitar os perigos de colisión con corpos inertes no espazo ou rectificar os efectos de perturbacións insuficientemente tratados na análise previa. A importancia do uso de propagadores orbitais na navegación espacial propiciou a aparición de moitos e moi diferentes tipos.

#### 3.1.1. Estrutura dun propagador orbital

Na estrutura dun propagador orbital podemos distinguir catro módulos (ver figura 3.1): modelo de forzas, integrador, sistemas de referencia e análise de resultados.



Figura 3.1: Esquema dun propagador orbital.

### ■ Modelo de fuerzas

Como se dixo no capítulo 1 o movemento orbital pode formularse a partir da ecuación diferencial

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathcal{P}, \quad (3.1)$$

onde a parte dereita da ecuación representa a suma de todas as forzas que actúan sobre o orbitador, sendo a principal a que dá lugar ao movemento kepleriano,  $\mathcal{P}_k = -\mu\mathbf{r}/r^3$ , e  $\mathcal{P}$  a suma de todas as perturbacións que actúan sobre este e que foron descritas anteriormente.

Aínda que un propagador deba incluír en  $\mathcal{P}$  todas as forzas, isto é imposible na práctica polo descoñecemento parcial ou a dificultade de cálculo dalgunha destas forzas. Por exemplo, o potencial terrestre está modelado a partir dunha serie de infinitos termos zonais e tesaiais que, obviamente, debe ser truncada

obténdose así unha aproximación cuxa avaliación será moito máis lenta e pesada cantos máis termos tomemos.

Afortunadamente, as necesidades de enfoque son diferentes segundo o tipo de estudo que queiramos facer. O seguimento dunha misión espacial real, onde hai que considerar o modelo de forzas máis próximo á realidade, non sería o mesmo que a análise previa á misión, onde abonda ter menos precisión. Polo tanto, distinguiremos entre diferentes tipos de propagadores dependendo do modelo de forza incluído na ecuación diferencial (3.1). Así podemos falar de: un modelo kepleriano puro, sen perturbacións; o *Problema Principal do satélite* que ten en conta, unicamente, o aplanamento terrestre; ou algún modelo máis completo de potencial terrestre que inclúa máis termos, tanto zonais como tesorais. O modelo pódese completar coa inclusión de cada unha das perturbacións que actúan sobre o satélite artificial: freada atmosférica, perturbación solar ou lunar, radiación solar etc.

### ■ Integrador

Para abordar a integración das ecuacións (3.1) na programación de propagadores orbitais podemos distinguir tres tipos de métodos: analíticos, semianalíticos e numéricos. Aínda que xa se comentou sobre os métodos de integración en 1.2, neste punto retomaremos aqueles que máis se utilizan nos integradores dos propagadores.

Os *métodos analíticos* están caracterizados pola súa rapidez de cálculo fronte a unha baixa aproximación que os fai válidos para períodos de tempo moi curtos. Entre estes podemos destacar os chamados *Métodos de perturbación simplificados* (Hoots e Röhrich (1980)). Por un lado os *SGP* (*Simplified General Perturbation*) para órbitas de baixa altitude (período menor de 225 minutos) e polo outro os *SDP* (*Simplified Deep Space Perturbation*) para órbitas de altitude alta (período maior de 225 minutos).

Os modelos anteriores comezaron a ser desenvolvidos a partir dos traballos de Brouwer (1959) e Kozai (1959). A partir do primeiro modelo, chamado *SGP* e desenvolvido no ano 1966, creáronse, por un lado, os modelos *SGP4* e *SGP8*, e polo outro os *SDP4* e *SDP8*. En todos os casos partindo do modelo básico mellorouse a teoría analítica correspondente para incluír efectos como a forma da

Terra, a freada atmosférica para órbitas baixas, a presión de radiación e o efecto do Sol e a Lúa. As ecuacións, así como o código en *Fortran IV*, dos diferentes modelos pode verse en [Hoots e Röhrich \(1980\)](#). Este código pode obterse de xeito doado noutras linguaxes de programación máis modernas.

*SGP4* é o modelo máis comunmente usado e ten un erro aproximado de 1 km que crece arredor de 1 a 3 km cada día posterior ao instante no que se dan as condicións iniciais. Por iso, estas condicións iniciais que publica o *NORAD* a partir dos chamados *TLE* (*Two Line Elements*, [Vallado e Cefola \(2012\)](#)) son actualizadas moi frecuentemente. Este modelo, pola súa sinxeleza de cálculo, é moi usado entre todos aqueles que precisan a posición dun satélite nun certo intre e non posúen nin as ferramentas nin a bagaxe profesional necesaria para usar outro tipo de instrumentos. Está moi estendido o seu uso, por exemplo, entre os radioaficionados.

Os *métodos semianalíticos* combinan as características dos métodos analíticos e numéricos para acadar un bo balance entre velocidade e precisión. Un dos métodos semianalíticos máis destacados é o *DSST* (*Draper Semianalytical Satellite Theory*, [Neelon, Cefola e Proulx \(1997\)](#)) que é un programa independente desenvolvido polo Draper Laboratory (inicialmente integrado no *MIT*) a partir do software *GTDS* (*Goddard Trajectory Determination System*) da NASA. Este software, inicialmente desenvolvido en *Fortran* e recentemente mellorado, [Cefola et al. \(2014\)](#), implementa un sofisticado modelo de forzas que inclúe un modelo de xeopotencial  $50 \times 50$ .

Así como os métodos analíticos e semianalíticos inclúen un modelo de forzas prefixado, e este non pode ser modificado, os *métodos numéricos* permiten unha gran flexibilidade á hora de implementar distintos modelos de forzas podendo aumentar de xeito doado a súa complexidade. Aínda que en xeral son máis lentos, a posibilidade de elixir o modelo de forzas fainos máis precisos.

Existen un gran número de métodos numéricos que foron usados para a integración de problemas de astrodinámica, algúns adaptados especialmente para este tipo de problemas, emporiso, mencionaremos aquí unicamente os baseados na familia de métodos Runge-Kutta (por exemplo os métodos *DOPRI*, desenvolvidos por Dormand e Price en [Dormand e Prince \(1978\)](#), [Dormand e Prince \(1980\)](#) e [Prince e Dormand \(1981\)](#)) e os métodos baseados en series de Taylor

como o método *AC* (*Analytic Continuation*) (ver en [Hernández et al. \(2019\)](#)), e o propagador *PSAT* desenvolvido nesta memoria.

#### ■ Sistemas de referencia

As ecuacións (3.1) están formuladas nun sistema inercial, aínda que na realidade os sistemas de coordenadas de tipo astronómico ou xeodésico aos que se refire o movemento dos satélites teñen algún tipo de movemento de rotación que os fai non inerciais. Por outro lado, a referencia temporal,  $t$ , variable independente de (3.1), que non é senón o tempo absoluto da mecánica newtoniana, difire do valor obtido por medio dos reloxos. Estas dúas cuestións requiren o tratamento dos problemas astronómicos asociados á medida das coordenadas e do tempo para enlazar correctamente os resultados do modelo teórico coas observacións.

#### ■ Análise de resultados

O resultado da integración, aplicada ao modelo de forzas considerado, permite a obtención dos vectores de posición e velocidade do orbitador nunha serie de instantes de tempo  $t$ . Estes datos en bruto (ou datos primarios) son difíciles de interpretar se non son manipulados de xeito numérico ou gráfico.

Aínda que os dous últimos módulos dun propagador (sistemas de referencia e análise de resultados) son de grande utilidade en moitas aplicacións non son unha parte fundamental e imprescindible do mesmo e só son implementados nalgúns deles.

### 3.1.2. Exemplos de propagadores orbitais

A continuación enumeraremos algúns dos exemplos máis importantes de software dedicado á resolución de problemas en astrodinámica. Cada elemento pertence a un dos tres tipos diferentes de software que podemos atopar: contornos pechados de traballo, librerías de funcións e programas independentes.

- *STK*<sup>1</sup> (*Satellite Tool Kit*) é un contorno gráfico profesional. Actualmente é usado tanto polas grandes axencias espaciais, NASA ou ESA, como pola maior parte das empresas dedicadas á industria aeroespacial. Desenvolvido por AGI era

 <sup>1</sup> [www.stk.com](http://www.stk.com)

usado inicialmente para cálculos de órbitas, pero a súa versatilidade en canto a seguimento de calquera tipo de obxecto (terrestre, marítimo, aéreo ou espacial) levou a renomealo dende *Satellite Tool Kit* ao actual *Systems Tool Kit*.

*STK* non só permite realizar a propagación dunha órbita senón que é unha ferramenta esencial na análise de calquera aspecto dunha misión espacial. Para a propagación admite a posibilidade de incluír calquera perturbación ao modelo e dispón de numerosos integradores tanto analíticos, pois inclúe *SGP* e *SDP*, como semianalíticos e numéricos.

- *GMAT*<sup>2</sup> (*General Mission Analysis Tool*). Este software libre é unha moi boa alternativa a *STK*, que polo seu prezo, é inaccesible para pequenos grupos de traballo. *GMAT* está sendo desenvolvido na actualidade pola NASA aínda que, no seu estado actual xa representa unha ferramenta completa de estudo e análise dunha misión espacial. Como *STK*, preséntase como contorno de traballo gráfico.
- *PSIMU*<sup>3</sup> é un propagador orbital preparado pola axencia espacial francesa, CNES, e programado en *Java*. Pode empregarse como un contorno gráfico pechado ou como unha librería de funcións en *Java*.
- *JAT*<sup>4</sup> é unha librería (software libre) de funcións, escrita en *Java*, polo *Goddard Space Flight Center* da NASA.
- *GAL*<sup>5</sup> é unha librería (software libre) de funcións, escrita en *C++*, por *AMSAT-BDA*.
- *Orbits*<sup>6</sup> é un paquete de *Mathematica* cun conxunto de funcións que permiten a análise dun movemento orbital. O seu uso, dentro do contorno proporcionado por *Mathematica*, permite tanto o tratamento de diferentes funcións elementais, como unha librería, ou de problemas máis complexos, como un contorno gráfico de traballo. *Orbits* foi desenvolvido polo Grupo de Mecánica Espacial da Universidad de Zaragoza.

---

<sup>2</sup> <https://software.nasa.gov/software/GSC-17177-1>

<sup>3</sup> <https://logiciels.cnes.fr/en/content/psimu>

<sup>4</sup> <https://opensource.gsfc.nasa.gov/projects/JAT/index.php>

<sup>5</sup> [http://www.amsat-bda.org/GAL\\_Home.html](http://www.amsat-bda.org/GAL_Home.html)

<sup>6</sup> <https://sourceforge.net/projects/orbitsm/>

Na lista anterior vimos exemplos de contornos de traballo pechados e librarías de software escritas en diferentes linguaxes. Non obstante, debido ao crecente desenvolvemento de misións que implican un gran número de pequenos satélites, resulta cada vez máis útil incorporar, a bordo, un propagador independente e autónomo que permita ao satélite obter a súa posición e velocidade sen depender das comunicacións coa base de rastreo. Tendo en conta as limitacións computacionais e de memoria do ordenador a bordo do satélite, estes propagadores deben deseñarse para un equilibrio eficiente entre o método de integración e o modelo de perturbación considerado. Poden verse as características dalgúns destes propagadores en [Gurfil \(2008\)](#), [Rossouw \(2015\)](#) ou [Liu, Yuan e Meng \(2018\)](#).

### 3.2. Estrutura básica do propagador *PSAT*

Segundo o dito no último parágrafo do apartado anterior, un dos obxectivos principais deste traballo consiste na creación dun propagador independente e autónomo, que chamaremos *PSAT*, que se basearía no método das series de Taylor como integrador e nun modelo de perturbación o máis completo posible.

O propagador *PSAT* foi escrito en linguaxe *C* e consta dun programa principal onde se establecerán os diferentes parámetros de integración e de dous ficheiros, `psat_tides.c` e `psat_tides.h`, que conteñen o núcleo da integración e dos que nos centraremos nas súas dúas funcións principais: `psat_tides(...)` e `taylorSAT(...)`.

No programa principal (ver algoritmo 1) establécense os parámetros do propagador: modelo orbital, condicións iniciais, instantes de integración e erros ou tolerancias absolutas e relativas  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_r$  (ver sección 2.5).

---

#### Algoritmo 1: Programa principal *PSAT*

---

**Entrada:** Modelo orbital

Condicións iniciais:  $t_0$ ,  $\mathbf{y}(t_0)$

Intres de integración:  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ , ...,  $t_f$

Tolerancias:  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_r$

**Saída:**  $\{\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_f)\}$ . Pode ser en ficheiro ou por pantalla.

Chamada á rutina `psat_tides(...)`

---



No dito programa principal unicamente se recolle a declaración dos parámetros da

integración e chama á rutina `psat_tides(...)`.

Polo que respecta ao modelo orbital, o modelo de perturbacións, implementouse un sistema que permita dende o modelo de propagador máis sinxelo, o modelo kepleriano, a modelos moito máis completos. Así, ao modelo básico kepleriano pódenselle engadir as seguintes perturbacións:

- **Potencial terrestre ou planetario.** Aínda que no que segue nos referiremos ao xeopotencial, o potencial terrestre, *PSAT* pode ser empregado, tamén, para o estudo de órbitas arredor de calquera planeta ou corpo do que coñezamos o seu potencial. O modelo de xeopotencial pode ser engadido manualmente polo usuario ou lido dende un ficheiro.
- **Perturbación producida por un terceiro corpo.** *PSAT* admite incluír no modelo orbital a perturbación producida por un terceiro corpo (ou varios) que percorra unha órbita supostamente kepleriana arredor da Terra ou do corpo central.

A perturbación producida por un terceiro corpo non pode ser incluída de xeito preciso nun integrador baseado en series de Taylor pola dependencia con respecto ao tempo da posición do terceiro corpo, salvo que esta dependencia poida ser modelada a partir dunha serie de potencias. Para poder incluír a perturbación do Sol e a Lúa na órbita dun satélite artificial terrestre suporemos, como aproximación, que as órbitas da Lúa e do Sol non están perturbadas.

- **Presión de radiación solar e vela solar.** Tanto a presión de radiación solar como a perturbación producida por unha vela solar sobre un satélite artificial terrestre dependen, ao igual que a perturbación gravitacional producida polo Sol, da posición deste e, polo tanto, podemos incluílas en *PSAT* a través dun procedemento similar ao do terceiro corpo. Aquí incluimos ambas as posibilidades. Notemos que se a órbita é arredor do Sol a forza producida pola radiación solar e por unha vela non se poden modelar deste xeito senón mediante unha forza radial.

Habitualmente tanto a presión de radiación como a forza producida pola vela fórmulanse a partir dun parámetro que inclúe a relación *área-masa* e que se considera constante. En *PSAT* incluimos a posibilidade de que esta función veña

dada como unha función do tempo que permita estudar as variacións do efecto da presión de radiación cando o satélite rota, o que equivale a un parámetro área-masa variable.

- **Freada atmosférica.** A altitudes menores de 500 km a influencia da atmosfera faise notar de xeito importante. Por este motivo necesariamente incluímos en *PSAT* a freada atmosférica. Nesta versión fixémoslo a partir do *modelo ISA* (*Internacional Standard Atmosphere*), que é un modelo exponencial moi sinxelo pero que achega bos resultados.
- **Forzas radiais, tangenciais e normais.** Finalmente incluíronse en *PSAT* forzas de tipo radial, tanxencial e normal, que permiten considerar, no estudo do movemento do satélite, o efecto de foguetes de baixo empuxe, por exemplo, os motores iónicos.

En `psat_tides(...)`, que se describe no algoritmo 2, impleméntase a parte numérica da solución baseada na versión de *TIDES* básica `minc-tides`. Para este propagador tómanse, por defecto, os valores  $\mathcal{O}_m = 6$ ,  $\mathcal{O}_M = 26$ ,  $\mathcal{O}_i = 5$ ,  $F_1 = 0,95$ ,  $r_m = 10^{-2}$  e  $r_M = 10^2$  (véxase apartado 2.5).

Despois da iniciación das estruturas necesarias para realizar todas as operacións correspondentes á técnica de diferenciación automática, calcúlase a orde  $N$  da serie coa expresión (2.54).

O núcleo principal desta función consiste nun bucle no que se parte dos valores  $\mathbf{y}(t_i)$ , comezando en  $t_i = t_0$ , e calcúlase, por medio da función `taylorSAT(...)`, os  $N + 1$  coeficientes  $\mathbf{y}_k(t_i)$ ,  $k = 0, \dots, N$ , da serie de Taylor da solución, en torno a  $t_i$ . Mediante a expresión (2.56) calcúlase o chanzo (raio de converxencia estimado da serie) e deste xeito avalíase a serie en  $t_{i+j}$ ,  $j = 1, \dots$  se estes valores quedan dentro deste raio de converxencia e continúaase o bucle tomando  $t_i = t_{i+j}$  en caso contrario.

Esta función responde ao descrito no apartado 2.5 correspondente ao proceso numérico que se emprega en *TIDES*. A diferenza esencial de *PSAT* con *TIDES* radica nas estruturas necesarias para a implementación e na función `taylorSAT(...)` onde se calculan as series de Taylor.

**Algoritmo 2:** Función `psat_tides(...)`**Entrada:**  $t_0, \mathbf{y}(t_0), \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_f\}, \epsilon_a, \epsilon_r$ **Saída:**  $\{\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots\}$ Inicia todas as estruturas usadas en *PSAT*Calcula a orde  $N$  das series de Taylor**dende**  $i = 0$  **ata**  $f - 1$  **fai**

$\mathbf{y}_k(t_i), \quad k = 0, \dots, N \leftarrow$	<code>taylorSAT(...)</code>
---	-----------------------------

Calcula o chanzo  $h$  $j \leftarrow 1$  $\Delta t \leftarrow t_{i+j} - t_i$ **mentres**  $\Delta t \leq h$  **fai**

Calculábase $\mathbf{y}(t_{i+j}) \leftarrow \mathbf{y}(t_i + \Delta t) = \sum_{k=0}^N \mathbf{y}_k(t_i) (\Delta t)^k$
---

$j \leftarrow j + 1$
----------------------

$\Delta t \leftarrow t_{i+j} - t_i$
-------------------------------------

**fin** $t_i \leftarrow t_{i+j}$ **fin**

Finalmente a función `taylorSAT(...)`, que será detallada no que queda de capítulo, contén a función enlazada estendida do problema que, mediante os algoritmos da álgebra de series, estendida ao operador  $\delta$ , vista no apartado 2.7.2, permite a obtención da serie de Taylor.

### 3.3. Cálculo da serie de Taylor da solución

Tanto en *TIDES* como en *PSAT* o cálculo da serie de Taylor da solución ao redor dun intre inicial  $t_0$  constitúe o núcleo fundamental do método (pódese atopar máis información sobre isto en Barrio (2005)). A dificultade deste cálculo radica na necesidade de crear, para cada problema, a función enlazada correspondente á ecuación diferencial. En *TIDES* esta función, así como o ficheiro C que contén a rutina chamada pola librería *libTIDES* para a integración de problemas, créase automaticamente polo paquete *Mathematica*, *MathTIDES* (ver en detalle en Abad *et al.* (2012)).

A complexidade de avaliar as derivadas do xeopotencial, cando se toman unha orde e grao elevados, fai que *MathTIDES* sexa ineficiente para esta tarefa. Por este motivo, en *PSAT* optamos pola construción manual da función que calcula a serie de Taylor da

solución. Chamamos a esta función, que contén a parte máis nova deste propagador, `taylorSAT(...)`.

Para facer máis eficiente *PSAT*, a función `taylorSAT(...)` incorpora, con respecto a *TIDES*, as seguintes novidades

- Cálculo das forzas implicadas no problema directamente a través do potencial (cando existe) e non a través da forza.
- Creación dunha función enlazada cun número variable de nodos que depende das forzas consideradas no problema.
- Uso de parámetros dependentes do tempo,  $t$ .

### 3.3.1. Estrutura básica da función utilizada por *TIDES* para obter a serie de Taylor

Antes de describir a función `taylorSAT(...)` analizaremos a estrutura da función equivalente de *TIDES*, xerada por *MathTIDES*, para comprender mellor os cambios introducidos en `taylorSAT(...)`. Para iso asumiremos a ecuación diferencial (2.1) cuxa función enlazada vén dada a partir de  $N$  nodos  $l_i$  cuxa serie de Taylor virá dada pola expresión (2.41) cuxos elementos  $l_{ik}$  deben ser calculados sucesivamente.

No algoritmo 3 pode verse o esquema xeral desta función que parte dos seguintes datos de entrada: número de variables,  $n$ ; orde das series,  $N$ , e condicións iniciais,  $t_0$  e  $\mathbf{x}(t_0)$ . Unha vez declarado o número de nodos,  $N$ , que se obtiveron con *mathTIDES* ao facer a descomposición da función  $\mathbf{f}$  na súa función enlazada, iníciase a estrutura (un array ou matriz bidimensional) que contén os elementos  $l_{ik}$ , facendo  $l_{i0} = x_i(t_0)$ ,  $1 \leq i \leq n$  (véxase algoritmo 3, bloque 1).

Despois destas declaracións e inicializacións pásase ao cálculo dos elementos  $l_{ik}$ . Pártese sempre de que os  $n$  primeiros nodos (os que representan as variables) dunha orde  $k$  son coñecidos, polo tanto calcúlanse os elementos  $l_{ik}$ ,  $i > n$  (véxase algoritmo 3 bloque 2) e posteriormente, aplicando a relación (2.8), calcúlanse os  $n$  primeiros nodos da seguinte orde  $k+1$  (véxase algoritmo 3 bloque 3). Finalmente obtense a serie da solución a partir dos  $n$  primeiros nodos.

**Algoritmo 3:** Cálculo das series de Taylor para a solución dunha EDO.

---

**Entrada:**  $n, N, t_0, \mathbf{x}(t_0)$   
**Saída:**  $N + 1$  coeficientes  $\mathbf{x}_k$  da serie da solución  $\sum_{k=0}^N \mathbf{x}_k (t - t_0)^k$

$N \leftarrow$  declaración do número de nodos.

**dende**  $i = 1$  **ata**  $n$  **fai**

1 |  $l_{i0} \leftarrow x_i(t_0)$   
**fin**

**dende**  $k = 0$  **ata**  $N - 1$  **fai**

2 | **dende**  $i = n + 1$  **ata**  $N$  **fai**  
| | Calcula  $l_{ik}$  aplicando a álgebra de series  
**fin**

3 | **dende**  $i = 1$  **ata**  $n$  **fai**  
| |  $l_{ik+1} \leftarrow l'_{i'k} / (k + 1)$ , sendo  $i'$  o índice do nodo que representa  $f_i$   
**fin**

|  $\mathbf{x}_k \leftarrow (l_{1k}, \dots, l_{nk})$   
**fin**

---

**3.3.2. Cálculo de series de Taylor en PSAT: `taylorSAT(...)`****Estrutura de datos en PSAT**

Supoñamos un problema con  $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $N$  nodos  $l_i$ , na función enlazada e orde  $N$  para as series de potencias  $\sum_{k=0}^N u_k t^k$ .

Co esquema de *TIDES* a estrutura fundamental de almacenamento dos datos para o cálculo das series é un array ou matriz bidimensional,  $N \times (N + 1)$ , que conterá os elementos  $l_{ik}$ .

En *PSAT* pretendemos modificar o programa para traballar, simultaneamente, con potenciais e con forzas, o que obriga a introducir o operador  $\delta$ , definido en (2.16) e adaptado ao uso con series de potencias en (2.65).

Deste xeito no proceso teremos  $N$  nodos  $l_i$  cuxas series de potencias virán dadas por  $l_i = \sum_{k=0}^N l_{ik} t^k$ . O operador  $\delta$  aplicado ás ditas series daranos o vector  $\delta l_i = \sum_{k=0}^N \delta l_{ik} t^k$ , cuxas  $n + 1$  compoñentes serán  $\delta^j l_i = \sum_{k=0}^N \delta^j l_{ik} t^k$ . Así, finalmente

atopamos os elementos

$$l_{ik0} = l_{ik}, \quad l_{ikj} = \delta^j l_{ik} = \delta_k^j l_i = \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.2)$$

que representaremos por un array (tensor),  $\mathcal{T}$ , tridimensional de orde  $\mathcal{N} \times (\mathcal{N} + 1) \times (n + 1)$ . No que segue usaremos sempre esta notación, onde o primeiro índice  $i$  representa o nodo da función enlazada,  $k$  a orde da serie de potencias e  $j$  a variable respecto da que derivaremos (se  $j = 0$  será a propia función).

Anteriormente falouse de que a función enlazada ten  $\mathcal{N}$  nodos, dos cales os  $n$  primeiros  $(l_1, \dots, l_n)$  representan as variables. En *PSAT* imos engadir un nodo adicional  $l_0$  que representará o tempo  $t$ , o que permitirá tratar perturbacións que dependan explicitamente do tempo. Así pois, o tensor que representa a estrutura fundamental terá de dimensións  $(\mathcal{N} + 1) \times (\mathcal{N} + 1) \times (n + 1)$ .

Por outra banda o problema que aborda *PSAT*, a integración dun movemento orbital, vén representado por unha ecuación diferencial de orde 2 con vectores de dimensión 3,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Ao formular o problema como unha ecuación diferencial de orde 1 debemos dobrar o número de variables a seis, de xeito que

$$\mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

e así chegamos á expresión

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\mathbf{R}, -\nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{V} + \mathbf{F}), \quad (3.3)$$

sendo

$$\mathbf{R} = (x_4, x_5, x_6), \quad \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{V} = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3} \right) = (\delta^1 V, \delta^2 V, \delta^3 V), \quad \mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z),$$

onde  $\mathbf{V} = \sum \mathbf{V}_p$  representa a suma de todas as forzas que actúan sobre o satélite e que derivan dun potencial e  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_p$  a suma das forzas que non derivan dun potencial.

Como vemos, a pesar de ter seis variables, unicamente aparecerán no programa as derivadas respecto das tres primeiras variables, logo no noso caso teremos  $\delta = (\delta^0, \delta^1, \delta^2, \delta^3)$ , co que o array de almacenamento,  $\mathcal{T}$ , terá a dimensión  $(\mathcal{N} + 1) \times (\mathcal{N} + 1) \times 4$ .

Para identificar isto coas estruturas usadas en *TIDES* podemos pensar no tensor  $\mathcal{T}$  como na matriz

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} l_{00} & l_{01} & \dots & l_{0N} \\ l_{10} & l_{11} & \dots & l_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{N0} & l_{N1} & \dots & l_{NN} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

onde cada elemento  $l_{ik}$  no canto de representar un número, como en *TIDES*, representará un vector de dimensión 4

$$l_{ik} = (l_{ik0}, l_{ik1}, l_{ik2}, l_{ik3}) = \left( l_{ik}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_1}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_2}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_3} \right). \quad (3.5)$$

O esquema da rutina `taylorSAT(...)` será o mesmo que o visto no algoritmo 3 onde as operacións que se realizan no proceso de obtención dos elementos  $l_{ik}$  son operacións realizadas sobre vectores de dimensión 4.

### Inicialización da estrutura de datos en *PSAT*

O bloque de iniciación (algoritmo 3 bloque 1) farase tendo en conta as seguintes consideracións

- No caso de  $l_0$ , que representa o tempo, teremos en conta que a súa serie de Taylor será  $t_0 + t$ , logo terase:  $l_{000} = t_0$ ,  $l_{010} = 1$  sendo 0 o resto. Con isto podemos facer:

$$l_{00} = (t_0, 0, 0, 0), \quad l_{01} = (1, 0, 0, 0).$$

- As variables  $(x, y, z)$  veñen representadas polos nodos  $l_1, l_2, l_3$  e inicialmente asignarémolles os valores

$$l_{10} = (x_0, 1, 0, 0), \quad l_{20} = (y_0, 0, 1, 0), \quad l_{30} = (z_0, 0, 0, 1).$$

- As variables  $(X, Y, Z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  veñen representadas polos nodos  $l_4, l_5, l_6$  e inicialmente asignarémolles os valores

$$l_{40} = (\dot{x}_0, 0, 0, 0), \quad l_{50} = (\dot{y}_0, 0, 0, 0), \quad l_{60} = (\dot{z}_0, 0, 0, 1).$$

- O resto de elementos  $l_{ik}$  serán iniciados como o vector nulo  $(0, 0, 0, 0)$ .

**Bloque de cálculo para os nodos que non representan variables**

Despois de analizar a función enlazada correspondente ao conxunto de perturbacións que trataremos na integración do modelo orbital compróbase que todo o proceso pódese efectuar con cinco operacións básicas

- Suma de varios nodos.
- Produto de dous nodos.
- Nodo elevado a un número real.
- Número real elevado a un nodo.
- Seno e coseno dun nodo.

O caso de suma ou produto dun nodo e unha constante pode reducirse aos anteriores supoñendo a constante como unha serie de orde 0 igual á constante e o resto das ordes iguais a cero.

Cando cada elemento dunha serie é considerado como un número ou un escalar, como se fai en *TIDES*, os procesos para o cálculo destas funcións, extraídos das relacións dadas no apartado 2.3, poden verse nos algoritmos 4, 5, 6 e 8.

---

**Algoritmo 4:** Suma (escalares):  $w \leftarrow \text{sumaE}(u, v, k)$

---

**Entrada:**  $(u_0, u_1, \dots, u_k), (v_0, v_1, \dots, v_k), (w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$

**Saída:**  $w_k$  (orde  $k$  de  $w$ )

$w_k \leftarrow u_k + v_k$

---



---

**Algoritmo 5:** Produto (escalares):  $w \leftarrow \text{prodE}(u, v, k)$

---

**Entrada:**  $(u_0, u_1, \dots, u_k), (v_0, v_1, \dots, v_k), (w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$

**Saída:**  $w_k$  (orde  $k$  de  $w$ )

$w_k \leftarrow 0$

**dende**  $m = 0$  **ata**  $k$  **fai**

$w_k \leftarrow w_k + u_m v_{k-m}$

**fin**

---

---

**Algoritmo 6:** Potencia (escalares):  $w \leftarrow \text{potenciaE}(u, \alpha, k)$ 


---

**Entrada:**  $(u_0, u_1, \dots, u_k), \alpha, (w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$ **Saída:**  $w_k$  (orde  $k$  de  $w$ )**se**  $k = 0$  **entón**|  $w_k \leftarrow u_0^\alpha$ **noutro caso**|  $w_k \leftarrow 0$ | **dende**  $m = 0$  **ata**  $k - 1$  **fai**| |  $w_k \leftarrow w_k + (\alpha(k - m) - m)w_m u_{k-j}$ | **fin**|  $w_k \leftarrow w_k / (k u_0)$ **fin**


---

**Algoritmo 7:** Número elevado a serie (escalares):  $w \leftarrow \text{potcteE}(\alpha, u, k)$ 


---

**Entrada:**  $\alpha, (u_0, u_1, \dots, u_k), (w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$ **Saída:**  $w_k$  (orde  $k$  de  $w$ )**se**  $k = 0$  **entón**|  $w_k \leftarrow \alpha^{u_0}$ **noutro caso**|  $w_k \leftarrow 0$ | **dende**  $m = 0$  **ata**  $k - 1$  **fai**| |  $w_k \leftarrow w_k + (k - m)w_m u_{k-j}$ | **fin**|  $w_k \leftarrow (w_k \log \alpha) / k$ **fin**

Unha vez establecida a función enlazada debe entrarse, para cada orde  $k$ , no bloque de cálculo dos nodos  $l_i, i > 7$  (ver algoritmo 3, bloque 2). Este bloque, en *PSAT*, é idéntico ao de *TIDES* agás que en *PSAT* as funcións non actúan sobre escalares senón sobre vectores. As funcións correspondentes ás catro operacións mencionadas son agora diferentes ás funcións *sumaE*, *prodeE*, *potenciaE*, *sencosE*, amosadas nos algoritmos 4, 5, 6, 8, aínda que estas serán usadas no caso vectorial. Estas funcións, baseados nas expresións dadas no apartado 2.7.2, amósanse nos algoritmos 9, 10, 11 e 12<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup> No caso da exponencial (número elevado a nodo) non é precisa a extensión ás derivadas porque só se aplica no cálculo da forza e polo tanto non se deriva.

---

**Algoritmo 8:** Seno e coseno (escalares):  $(s, c) \leftarrow \text{sencosE}(u, k)$

---

**Entrada:**  $(u_0, u_1, \dots, u_k), (s_0, s_1, \dots, s_{k-1}), (c_0, c_1, \dots, c_{k-1})$

**Saída:**  $s_k, c_k$  (ordes  $k$  de  $s, c$ )

**se**  $k = 0$  **entón**

$s_k \leftarrow \text{sen}(u_0)$

$c_k \leftarrow \text{cos}(u_0)$

**noutro caso**

$s_k \leftarrow 0$

$c_k \leftarrow 0$

**dende**  $m = 0$  **ata**  $k - 1$  **fai**

$s_k \leftarrow s_k + c_m u_{k-m}$

$c_k \leftarrow c_k + s_m u_{k-m}$

**fin**

$s_k \leftarrow s_k/k$

$c_k \leftarrow -c_k/k$

**fin**

---



---

**Algoritmo 9:** Suma (vectores):  $w \leftarrow \text{sumaV}(u, v, k)$

---

**Entrada:**  $\delta u_0, \delta u_1, \dots, \delta u_k, \delta v_0, \delta v_1, \dots, \delta v_k, \delta w_0, \delta w_1, \dots, \delta w_{k-1}$

**Saída:**  $\delta w_k$

$\delta^0 w_k \leftarrow \text{sumaE}(\delta^0 u, \delta^0 v, k)$

**se** *Calcula derivadas* **entón**

**dende**  $j = 1$  **ata**  $3$  **fai**

$\delta^j w_k \leftarrow \text{sumaE}(\delta^j u, \delta^j v, k)$

**fin**

**noutro caso**

**dende**  $j = 1$  **ata**  $3$  **fai**

$w_{kj} \leftarrow 0$

**fin**

**fin**

---

---

**Algoritmo 10:** Produto (vectores):  $w \leftarrow \text{prodV}(u, v, k)$ 

---

**Entrada:**  $\delta u_0, \delta u_1, \dots, \delta u_k, \delta v_0, \delta v_1, \dots, \delta v_k, \delta w_0, \delta w_1, \dots, \delta w_{k-1}$ **Saída:**  $\delta w_k$  $\delta^0 w_k \leftarrow \text{prodE}(\delta^0 u, \delta^0 v, k)$ se *Calcula derivadas* entón    **dende**  $j = 1$  **ata**  $3$  **fai**         $\delta^j w_k \leftarrow \text{prodE}(\delta^j u, \delta^j v, k) + \text{prodE}(\delta^j u, \delta^0 v, k)$     **fin**

noutro caso

**dende**  $j = 1$  **ata**  $3$  **fai**         $\delta^j w_k \leftarrow 0$     **fin****fin**

---

---

**Algoritmo 11:** Potencia (vectores):  $w \leftarrow \text{potenciaV}(u, \alpha, k)$ 

---

**Entrada:**  $\delta u_0, \delta u_1, \dots, \delta u_k, \delta w_0, \delta w_1, \dots, \delta w_{k-1}, \delta v_0, \delta v_1, \dots, \delta v_{k-1}$ Hai que engadir un nodo adicional  $v$  inicializado como nulo**Saída:**  $\delta w_k$ se *Calcula derivadas* entón     $\delta^0 v_k \leftarrow \text{potenciaE}(\delta^0 u, \alpha - 1, k)$      $\delta^j w_k \leftarrow \alpha \text{prodE}(\delta^0 v, \delta^j u, k)$ 

noutro caso

**dende**  $j = 1$  **ata**  $3$  **fai**         $\delta^j w_k \leftarrow 0$     **fin****fin**

---

**Bloque de cálculo para os nodos que representan variables**

A rutina `taylorSAT(...)` remata, ao igual que no bloque 3 do algoritmo 3, calculando a orde seguinte de cada nodo correspondente ás variables. Para iso teremos en conta a expresión (3.3)

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\mathbf{R}, -\nabla_{\mathbf{x}} V + \mathbf{F}).$$

Ademais suporemos que o potencial  $V$ , suma de todos os potenciais, ocupa na función enlazada o nodo  $l_v$  e as compoñentes do vector forza  $\mathbf{F}$  ocupan, respectivamente, os nodos  $l_{f(i)}, i = 1, 2, 3$ .

---

**Algoritmo 12:** Seno e coseno (vectores):  $(s, c) \leftarrow \text{sencosV}(u, k)$

---

**Entrada:**  $\delta u_0, \delta u_1, \dots, \delta u_k, \delta s_0, \delta s_1, \dots, \delta s_{k-1}, \delta c_0, \delta c_1, \dots, \delta c_{k-1}$

**Saída:**  $\delta s_k, \delta c_k$

se *Calcula derivadas* entón

|  $\delta^j s_k \leftarrow \text{prodE}(\delta^0 c, \delta^j s, k)$   
 |  $\delta^j c_k \leftarrow -\text{prodE}(\delta^0 s, \delta^j c, k)$

noutro caso

| dende  $j = 1$  ata 3 fai

|  $\delta^j s_k \leftarrow 0$   
 |  $\delta^j c_k \leftarrow 0$

| fin

fin

---

De acordo con isto poderemos actualizar a orde  $k+1$  das seis variables facendo

$$\begin{aligned} \delta_k^0 l_i &= \delta_k^0 l_{i+3} / (k+1), & i = 1, 2, 3, \\ \delta_k^0 l_{i+3} &= (-\delta_k^i l_v + \delta_k^0 l_{f(i)}) / (k+1), & i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Finalmente obtense a serie da solución a partir dos  $n$  primeiros nodos e con iso `taylorSAT(...)` pasa o control a `psat_tides(...)`.

### 3.4. Tratamento das perturbacións en *PSAT*

O paquete *MathTIDES* calcula, a partir da expresión da función  $f$ , a función de chanzo, necesaria para a integración dunha ecuación diferencial que, xunto con *LibTIDES*, permite a *TIDES* integrar a ecuación diferencial. Se modificamos a función  $f$  o ficheiro xerado por *MathTIDES* troca e con el modifica o programa final de integración (*Abad et al. (2012)* para ver en detalle este proceso). Con *TIDES* non é posible xerar un ficheiro que permita integrar un problema onde a función  $f$  poida variar en función da elección do usuario, senón que hai que reescribir o programa para cada variación de  $f$ .

Un dos obxectivos de *PSAT* é que se poida facer unha elección das perturbacións que, a partir do movemento kepleriano, modifican o movemento orbital. Ademais, algunhas desas perturbacións proveñen dun potencial pero outras só poden ser formuladas a partir da forza. Así, en xeral, teremos

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\mathbf{R}, -\nabla_{\mathbf{r}} V_T + \mathbf{F}_T), \quad V_T = V_k + \sum_p V_p, \quad \mathbf{F}_T = \sum_p \mathbf{F}_p, \quad (3.7)$$

onde  $V_k$  representa o potencial kepleriano,  $\mathbf{F}_p, V_p$  calquera das forzas ou potenciais perturbadores e  $\mathbf{F}_T, V_T$  a forza e potencial total que actúa sobre o satélite artificial.

O modelo orbital considerado en *PSAT*, que permite elixir o tipo de perturbacións que actúan sobre o satélite, require a implementación dun sistema cun número variable de nodos da función enlazada que é distinto do usado en *TIDES*.

No que segue ademais das características concretas da implementación en *PSAT* das distintas perturbacións veremos como se trata este número variable de nodos na función enlazada.

### 3.4.1. Primeiros nodos da función enlazada: variables e función $f$

Aínda que *PSAT* traballa con coordenadas cartesianas, para facilitar a introdución de datos ao usuario optouse polos elementos orbitais como condicións iniciais. Deste xeito queda definida univocamente a órbita a simular. Para realizar o troco de variables que nos permita pasar de  $(T, e, a, i, \Omega, \omega)$  a  $(x, y, z, X, Y, Z)$  utilízase o algoritmo 13. Este e o seu inverso, pois os resultados tamén se amosan en termos de elementos orbitais, poden verse en, por exemplo, [Abad \(2012\)](#), que é o que se implementou en *PSAT*.

Os primeiros nodos en toda función enlazada representan as variables do problema.

Así, comezaremos polo tempo  $t$  que, como se dixo no apartado anterior, será tratado como o nodo  $l_0$

$$\boxed{l_0 = t.} \quad (3.8)$$

A posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  e a velocidade  $\dot{\mathbf{r}} = (X, Y, Z)$  ocupan os nodos  $l_1$  ao  $l_6$

$$\boxed{\begin{array}{ll} l_1 = x, & l_4 = X, \\ l_2 = y, & l_5 = Y, \\ l_3 = z, & l_6 = Z. \end{array}} \quad (3.9)$$

---

**Algoritmo 13:** Paso de elementos orbitais a coordenadas cartesianas.

---

**Entrada:**  $T, e, a, i, \Omega, \omega, t, \mu$

**Saída:**  $x, y, z, X, Y, Z$

se  $e \neq 1$  entón

    se  $e < 1$  entón

        |  $p \leftarrow a(1 - e^2)$

    noutro caso

        |  $p \leftarrow a(e^2 - 1)$

    fin

noutro caso

    |  $p \leftarrow a$

fin

$(M, r, f) \leftarrow (T, e, a, t, \mu)$  a partir das relacións de (1.11)

$(x, y, z, X, Y, Z) \leftarrow (M, r, f, i, \Omega, \omega)$

---

Para acceder ao potencial total,  $V_T$ , e á forza total,  $\mathbf{F}_T$ , debemos incorporar catro nodos  $l_7, l_8, l_9, l_{10}$  que conterán, respectivamente, a suma dos potenciais así como as tres compoñentes da suma das forzas

$$\begin{array}{l} l_7 = V_T, \\ l_8 = F_{T_1}, \\ l_9 = F_{T_2}, \\ l_{10} = F_{T_3}, \end{array} \quad (3.10)$$

que serán iniciados como o vector nulo.

De acordo con isto as tres compoñentes de  $\mathbf{f}$  virán representadas polos elementos  $\delta^1 l_7 + \delta^0 l_8, \delta^2 l_7 + \delta^0 l_9$  e  $\delta^3 l_7 + \delta^0 l_{10}$ . Deste xeito na expresión xenérica (3.6), que obtén a orde  $k+1$  das variables a partir da orde  $k$  do resto dos nodos, e que finaliza a rutina *taylorSAT*, pode pórse  $v = 7, f(1) = 8, f(2) = 9, f(3) = 10$ .

Notemos que cando o nodo se usa para calcular un potencial é necesario traballar co vector completo  $(\delta^0 l, \delta^1 l, \delta^2 l, \delta^3 l)$ , namentres que se o nodo soamente se usa para calcular a forza basta con obter o elemento  $\delta^0$ , o que permite reducir o número de operacións nestes casos.

### 3.4.2. Potencial kepleriano

A forza kepleriana será sempre incorporada ao modelo orbital polo que os seus nodos, que por outra parte serán usados na formulación do resto de perturbacións, ocuparán as primeiras posicións da función enlazada e terán sempre un índice fixo.

O proceso de cálculo para cada orde comenza, tal como se ve no algoritmo 3 bloque 2, coa avaliación do primeiro nodo distinto dos nodos de variables e dos nodos do potencial e forza total. Este nodo,  $l_{11}$ , corresponde ao primeiro nodo de avaliación do potencial kepleriano.

Xa que o potencial kepleriano é  $V_k = -\mu/r$ , a parte da función enlazada correspondente a esta función poderase pór como

$p_1$	$= \mu$	$\rightarrow \mu$	(3.11)
$l_{11}$	$= x x$	$\rightarrow x^2$	
$l_{12}$	$= y y$	$\rightarrow y^2$	
$l_{13}$	$= z z$	$\rightarrow z^2$	
$l_{14}$	$= l_{11} + l_{12} + l_{13}$	$\rightarrow r^2$	
$l_{16}$	$= l_{14}^{-1/2}$	$\rightarrow 1/r$	
$l_{17}$	$= -p_1 l_{16}$	$\rightarrow V_k = -\mu/r$	

onde aparece un parámetro  $p_1$ , a constante gravitacional, e sete nodos  $l_{11}$  a  $l_{17}$ . En (3.11) non figura explicitamente o nodo  $l_{15}$  pero este é preciso reservalo para as operacións intermedias necesarias para calcular  $l_{16} = l_{14}^{-1/2}$  pois, como se viu no algoritmo 11, a operación potencia require este nodo extra.

Finalmente hai que sumar este potencial ao potencial total,  $V_T$ , engadindo na cadea de operacións da función enlazada a seguinte liña

$$\boxed{l_7 = l_7 + l_{17} \rightarrow V_T = V_T + V_k,} \quad (3.12)$$

que non avalía un novo nodo senón que actualiza un anterior.

Observemos que a función enlazada do potencial kepleriano ten sete nodos distintos, que engadidos aos once anteriores fan un total de dezaioito. Así as cousas, o

seguinte nodo será o  $l_{18}$  que pode tamén pórse como  $l_{N_k+1}$ , con  $N_k = 17$ .

Isto dános idea do doado procedemento que usaremos para determinar o índice do primeiro nodo correspondente a unha perturbación particular. Se ata ese momento cada perturbación  $p$  requiriu  $N_p$  nodos, o seguinte nodo será o  $l_{A+1}$  sendo

$$A = N_k + \sum_p N_p. \quad (3.13)$$

Nos seguintes apartados veremos como se implementan en *PSAT* os distintos tipos de perturbacións.

### 3.5. Implementación en *PSAT* das forzas de perturbación radial, tanxencial e normal

Despois do potencial kepleriano parece natural continuar coa perturbación correspondente ao xeopotencial, porén, dado que a orde de introdución no modelo de forzas en *PSAT* é indiferente, preferimos amosar, en primeiro lugar, a perturbación producida polas forzas de tipo radial, tanxencial e normal porque, pola súa sinxeleza, resulta máis útil explicar o proceso de adición de perturbacións.

A perturbación radial dáse a través da forza

$$\mathbf{F}_r = \alpha_r \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.14)$$

onde  $\alpha_r$  é un parámetro constante.

Aínda que esta perturbación pode ser expresada a través dunha función potencial,  $V_r = -\alpha_r r$ , preferimos tratala como forza para ilustrar tamén como engadir unha forza ao modelo.

$p_{P+1}$	$= \alpha_r$	$\rightarrow \alpha_r$	(3.15)
$l_{A+1}$	$= l_1 l_{16}$	$\rightarrow x r^{-1}$	
$l_{A+2}$	$= l_2 l_{16}$	$\rightarrow y r^{-1}$	
$l_{A+3}$	$= l_3 l_{16}$	$\rightarrow z r^{-1}$	
$l_{A+1}$	$= p_{P+1} l_{A+1}$	$\rightarrow F_{r_1} = \alpha_r x r^{-1}$	
$l_{A+2}$	$= p_{P+1} l_{A+2}$	$\rightarrow F_{r_2} = \alpha_r y r^{-1}$	
$l_{A+3}$	$= p_{P+1} l_{A+3}$	$\rightarrow F_{r_3} = \alpha_r z r^{-1}$	
$l_8$	$= l_8 + l_{A+1}$	$\rightarrow F_{T_1} = F_{T_1} + F_{r_1}$	
$l_9$	$= l_9 + l_{A+2}$	$\rightarrow F_{T_2} = F_{T_2} + F_{r_2}$	
$l_{10}$	$= l_{10} + l_{A+3}$	$\rightarrow F_{T_3} = F_{T_3} + F_{r_3}$	

O proceso, que pode verse en (3.15), comeza dando valor a un parámetro que representa  $\alpha_r$ . Este parámetro ten o índice  $P + 1$  onde  $P$  é o número total de parámetros xa declarados.

O primeiro nodo do proceso será  $l_{A+1}$  onde  $A$  representa o número total de nodos requiridos ata este momento. O proceso de cálculo das tres compoñentes da forza radial involucra unicamente tres nodos:  $l_{A+1}$ ,  $l_{A+2}$  e  $l_{A+3}$ , que se calculan a partir dos elementos  $(x, y, z)$  que xa estaban declarados como nodos de variables e de  $r^{-1}$  que aparece como un dos nodos xa calculados no potencial kepleriano ( $l_{16}$ ). Hai que notar aquí que, aínda que aparecen seis liñas no comezo de (3.15), as tres últimas unicamente reescriben os nodos  $l_{A+i}$ .

Finalmente, as tres compoñentes da forza engádense aos nodos  $l_8, l_9, l_{10}$  que representaban a forza total aplicada ao satélite.

Así pois, a inclusión desta forza no modelo agrega unicamente tres nodos, é dicir o valor de  $N_r$ , usado en (3.13), ten un valor constante:  $N_r = 3$ . As perturbacións tanxencial e normal veñen dadas polas expresións

$$F_t = \alpha_t \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|}, \quad F_n = \alpha_n \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\|}. \tag{3.16}$$

Estas dúas perturbacións serán tratadas necesariamente como forzas porque ningunha delas deriva dun potencial.

No caso da forza tanxencial partimos de que os elementos do vector  $\dot{\mathbf{x}} = (X, Y, Z)$  están xa representados polos nodos de variables  $(l_4, l_5, l_6)$ . Para calcular o inverso da velocidade  $v = \|\dot{\mathbf{r}}\|$  é preciso efectuar un proceso similar ao do cálculo do inverso de  $r$  a partir do vector  $\mathbf{r}$ , é dicir calcular os elementos  $(X^2, Y^2, Z^2)$  (tres nodos), calcular a súa suma  $v^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$  (un nodo) e finalmente calcular o inverso de  $v$ ,  $\|\dot{\mathbf{x}}\|^{-1} = (v^2)^{-1/2}$  (dous nodos: un para  $1/v$  e outro auxiliar necesario para o algoritmo da potencia). Finalmente necesitamos tres nodos para almacenar as tres compoñentes de  $\mathbf{F}_t$ , que serán sumadas aos nodos da forza total  $l_8, l_9, l_{10}$ . Deste xeito, para engadir unha forza tanxencial necesitamos agregar un parámetro,  $\alpha_t$ , e nove nodos, é dicir  $N_t = 9$ .

Para unha forza normal teremos en conta que  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (yZ - zY, zX - xZ, xY - yX)$ . Partindo dos seis nodos das variables necesitamos definir seis novos nodos para os elementos  $xY, xZ, yX, yZ, zX, zY$ ; outros tres para as sumas parciais do vector  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$  e outros seis para calcular  $\|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\|^{-1}$  (tres para os cadrados das compoñentes, outro para a suma e dous para o inverso). En total precisamos 15 nodos, polo tanto teremos que  $N_n = 15$ .

Nos tres casos o número de nodos necesarios é constante para cada tipo de forza.

### 3.6. Implementación en *PSAT* do xeopotencial

Concordando co visto en 1.1.4, partiremos da expresión do potencial terrestre (1.59), que recordamos novamente

$$V_p = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{r_T^n}{r^n} P_n^m(\sin \psi) [C_n^m \cos(m\lambda) + S_n^m \sin(m\lambda)]. \quad (3.17)$$

Aínda que a forma da Terra vén determinada por infinitos harmónicos tesaiais, na práctica os modelos usados na navegación espacial conteñen un número finito de termos. Así, diremos que un modelo é de grao  $\mathcal{D}$  e orde  $\mathcal{O}$  ( $\mathcal{D} \times \mathcal{O}$ ) se se consideran os harmónicos  $C_n^m, S_n^m, 2 \leq n \leq \mathcal{D}, 0 \leq m \leq \min(n, \mathcal{O})$  (sendo  $m$  a orde do polinomio asociado de Legendre (1.43)), mentres que os de índice distinto se consideran nulos. Para este modelo de potencial teremos que (3.17) se transforma en

$$V_p = -\frac{\mu}{r_T} \sum_{n=2}^{\mathcal{D}} \sum_{m=0}^{\min(m, \Theta)} V_n^m, \quad (3.18)$$

onde

$$V_n^m = \left(\frac{r_T}{r}\right)^{n+1} (C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \operatorname{sen} m\lambda) P_n^m(\operatorname{sen} \psi). \quad (3.19)$$

Os polinomios asociados de Legendre,  $P_n^m(t)$ , están relacionados coas funcións de Legendre,  $P_n(t)$ , (Lundberg e Schutzf (1988)) ou os polinomios de Helmholtz,  $Q_n^m(t)$ , (Balmino *et al.* (1991)) por medio das expresións

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{(m/2)} Q_n^m(t), \quad Q_n^m(t) = \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \quad (3.20)$$

polo tanto teremos  $P_n^m(\operatorname{sen} \psi) = \cos^m \psi Q_n^m(\operatorname{sen} \psi)$ .

Ao aumentar o grao, os coeficientes dos polinomios  $P_n^m(t)$  fanse extremadamente grandes, mentres que os valores dos coeficientes  $C_n^m$ ,  $S_n^m$  son moi pequenos. Por iso a avaliación da expresión (3.19) faise ineficiente numericamente. Para evitar este problema introdúcese un factor de normalización

$$N_n^m = \sqrt{\frac{(2-\delta_0^m)(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}}, \quad (3.21)$$

onde  $\delta_0^k$  é a delta de Kronecker<sup>8</sup>

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{cando } i = j, \\ 0, & \text{cando } i \neq j. \end{cases} \quad (3.22)$$

Deste xeito podemos definir uns polinomios  $\bar{Q}_{nm}(t)$  e uns coeficientes  $\bar{C}_n^m$ ,  $\bar{S}_n^m$  normalizados do xeito

$$\bar{Q}_n^m(t) = N_n^m Q_n^m(t), \quad \left\{ \begin{array}{c} \bar{C}_n^m \\ \bar{S}_n^m \end{array} \right\} = \frac{1}{N_n^m} \left\{ \begin{array}{c} C_n^m \\ S_n^m \end{array} \right\}. \quad (3.23)$$

<sup>8</sup> Non confundir cos operadores de diferenciación automática definidos no Capítulo 2.

Con estes trocos o termo  $V_n^m$ , que aparece en (3.19), convértese en

$$V_n^m = \rho_n (\bar{C}_n^m u_m + \bar{S}_n^m v_m) \bar{Q}_n^m(w), \quad (3.24)$$

con  $\rho_n$ ,  $u_m$ ,  $v_m$ ,  $w$  dados por

$$\begin{aligned} \rho_n &= \left(\frac{r_p}{r}\right)^{(n+1)}, & w &= \text{sen } \psi, \\ u_m &= \cos m\lambda \cos^m \psi, & v_m &= \text{sen } m\lambda \cos^m \psi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

En Lundberg e Schutzf (1988) demóstrase que, de entre todos os algoritmos que permiten calcular os valores de  $\bar{Q}_n^m(w)$  a partir de  $w$ , só dous son numericamente estables. En Abad e Lacruz (2013) escóllese o primeiro deles pola súa perfecta adaptación á técnica de diferenciación automática. En *PSAT* usaremos tamén este esquema de cálculo que pode verse no que segue

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0^0(w) &= 1, \\ \bar{Q}_m^m(w) &= \gamma_m \bar{Q}_{m-1}^{m-1}, \\ \bar{Q}_n^m(w) &= \alpha_n^m w \bar{Q}_{n-1}^m(w) + \beta_n^m \bar{Q}_{n-2}^m(w), \quad n \neq m, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $\gamma_m$  vén dado por

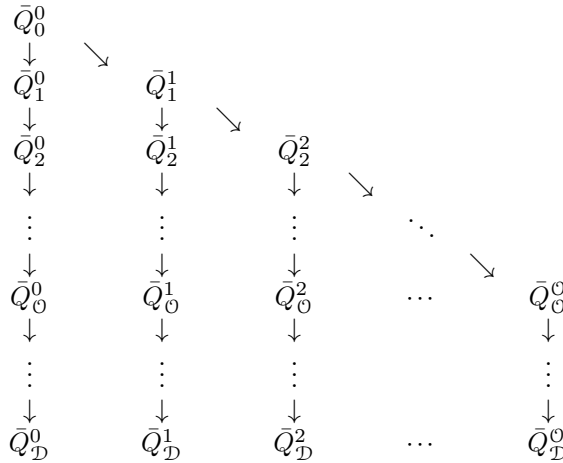
$$\gamma_m = \delta_m \sqrt{\frac{2m+1}{2m}}, \quad \delta_m = \begin{cases} \sqrt{2}, & m = 1 \\ 1, & m \neq 1, \end{cases} \quad (3.27)$$

e os coeficientes  $\alpha_n^m$ ,  $\beta_n^m$  son

$$\alpha_n^m = \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n-m)(n+m)}}, \quad \beta_n^m = -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(2n-3)(n-m)(n+m)}}. \quad (3.28)$$

Cando  $n = m + 1$ , o valor de  $\beta_{m+1}^m = 0$  e para calcular  $\bar{Q}_{m+1}^m$  é unicamente necesario o termo  $\bar{Q}_m^m$ .

O esquema para o cálculo das derivadas das funcións de Legendre pode verse na táboa 3.1. Os termos  $\bar{Q}_m^m$  da diagonal calcúlanse de xeito independente ao inicio do



**Táboa 3.1:** Esquema de cálculo das derivadas das funcións de Legendre.

proceso. O resto de elementos calcúlanse columna a columna (grao a grao) a partir da diagonal. Para realizar este proceso basta ter almacenados os parámetros constantes  $\gamma_m, \alpha_n^m, \beta_n^m$ .

Para poder implementar este esquema de cálculo basta reescribir a expresión (3.18) reorganizando os índices do sumatorio

$$V_p = \frac{\mu}{r_T} \sum_{m=0}^M V_m, \quad V_m = \sum_{n=\max(2,m)}^N \rho_n (\bar{C}_n^m u_m + \bar{S}_n^m v_m) \bar{Q}_n^m(w). \quad (3.29)$$

Finalmente remátase o proceso de cálculo obtendo os valores de  $\rho_n, u_m, v_m, w$ . Para iso teremos en conta as relacións (3.25), onde  $(r, \lambda, \psi)$  representan as coordenadas polares esféricas do vector de posición do satélite  $\mathbf{r}_r = (x_r, y_r, z_r)$  expresadas nun sistema de referencia fixo coa Terra que rota, con respecto ao sistema inercial onde as coordenadas do satélite son  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , un ángulo  $\omega_r = \omega_T t$  arredor do eixe  $Oz$ , sendo  $\omega_T$  a velocidade angular de rotación da Terra (inversa do período de rotación). Así pois, teremos

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_T t & \text{sen } \omega_T t & 0 \\ -\text{sen } \omega_T t & \cos \omega_T t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Tendo en conta as relacións entre as coordenadas cartesianas e polares,

$$\begin{aligned} x_r &= r \cos \psi \cos \lambda, \\ y_r &= r \cos \psi \text{sen } \lambda, \\ z_r &= r \text{sen } \psi, \end{aligned} \quad (3.31)$$

de onde se deduce

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad u_1 = \frac{x_r}{r}, \quad v_1 = \frac{y_r}{r}, \quad w = \frac{z_r}{r}. \quad (3.32)$$

Se ademais usamos as relacións das funcións circulares poderemos pór

$$u_m = u_{m-1}u_1 - v_{m-1}v_1, \quad v_m = v_{m-1}u_1 + u_{m-1}v_1, \quad m > 1. \quad (3.33)$$

que nos permiten obter iterativamente os elementos  $u_m, v_m, m \leq \mathcal{O}$ .

Por último, para calcular os termos  $\rho_n$  podemos usar as relacións

$$\rho_0 = \frac{r_p}{r}, \quad \rho_n = \rho_{n-1} \rho_0, \quad n = 1, \dots, \mathcal{D}, \quad (3.34)$$

que consuman o proceso de cálculo de todos os elementos que aparecen na expresión (3.29).

Para implementar este proceso en *PSAT* é necesario declarar o número de parámetros e nodos necesarios que é variable en función do grao  $\mathcal{D}$  e orde  $\mathcal{O}$  do modelo de potencial elixido. Este número depende de parámetros e nodos determinados por un índice dobre  $K_i^j$  cuxos índices poden variar como  $0 \leq i \leq \mathcal{D}$ ,  $0 \leq j \leq \text{mín}(m, \mathcal{O})$ , ou ben como  $2 \leq i \leq \mathcal{D}$ ,  $0 \leq j \leq \text{mín}(m, \mathcal{O})$ . O índice  $i$  comenza co valor  $i = 2$  na maior parte destes parámetros e nodos pero no caso de  $\bar{Q}_i^j$  o proceso de cálculo exige comenazar polo índice  $i = 0$ .

O esquema visto na táboa 3.1 dá idea dos elementos necesarios para o almacenamento dos datos nestes casos. O número de elementos cando  $0 \leq i \leq \mathcal{D}$ ,  $0 \leq j \leq \min(m, \mathcal{O})$ , é igual ao dunha matriz  $(1 + \mathcal{D}) \times (1 + \mathcal{O})$  da que eliminamos todos os elementos por riba da diagonal da submatriz  $(1 + \mathcal{O}) \times (1 + \mathcal{O})$  que son  $(1 + \mathcal{O})\mathcal{O}/2$ .

Polo tanto, se tomamos os elementos de índice 0 e 1, o número de elementos necesarios para almacenar  $K_i^j$  será

$$T(\mathcal{D}, \mathcal{O}) = (1 + \mathcal{D})(1 + \mathcal{O}) - \frac{\mathcal{O}(1 + \mathcal{O})}{2}, \quad (3.35)$$

mentres que se quitamos os elementos de índice 0 e 1 teremos un total de

$$T^*(\mathcal{D}, 0) = T(\mathcal{D}, 0) - 2, \quad T^*(\mathcal{D}, \mathcal{O}) = T(\mathcal{D}, \mathcal{O}) - 3, \text{ si } \mathcal{O} \neq 0, \quad (3.36)$$

elementos.

Os parámetros constantes que deben ser almacenados para avaliar un modelo de potencial determinado son: grao,  $\mathcal{D}$ ; orde,  $\mathcal{O}$ ; constante orbital  $\mu$ ; raio da Terra  $r_T$ ; velocidade angular de rotación da Terra  $\omega_T$ ; coeficientes tesaerais  $C_n^k$ ,  $S_n^k$ ,  $2 \leq n \leq \mathcal{D}$ ,  $0 \leq k \leq \min(m, \mathcal{O})$  e, finalmente, os termos  $\gamma_m$ ,  $1 \leq m \leq \mathcal{O}$  asemade  $\alpha_n^m$ ,  $\beta_n^m$ ,  $0 \leq n \leq \mathcal{D}$ ,  $0 \leq m \leq \min(m, \mathcal{O})$ . En total o número de parámetros será:  $P_g = 5 + 2T^*(\mathcal{D}, \mathcal{O}) + \mathcal{O} + 2T(\mathcal{D}, \mathcal{O})$ .

Para coñecer o número total de nodos,  $N_g$ , revisaremos o proceso contando todas as funcións necesarias

- Un nodo para cada un dos sete elementos:  $w$ ,  $(\omega_T t)$ ,  $\cos(\omega_T t)$ ,  $\sin(\omega_T t)$ ,  $x_r$ ,  $y_r$  e  $V_p$ .
- $(\mathcal{D} + 1)$  nodos para almacenar:  $\rho_n$ .
- $(\mathcal{O} + 1)$  nodos para almacenar cada un dos tres elementos:  $u_m$ ,  $v_m$  e  $V_m$ .
- $T^*(\mathcal{D}, \mathcal{O})$  nodos para almacenar:  $(\bar{C}_n^m u_m + \bar{S}_n^m v_m)$ .
- $T^*(\mathcal{D}, \mathcal{O})$  nodos para almacenar:  $\rho_n (\bar{C}_n^m u_m + \bar{S}_n^m v_m)$ .
- $T(\mathcal{D}, \mathcal{O})$  nodos para almacenar as funcións:  $\bar{Q}_n^m(w)$ .



- $T^*(\mathcal{D}, \mathcal{O})$  nodos para almacenar cada un dos dous sumandos da terceira liña de (3.26).
- $T^*(\mathcal{D}, \mathcal{O})$  nodos para almacenar:  $V_n^m$ .

O total de nodos necesarios para o proceso resulta ser

$$N_g(\mathcal{D}, \mathcal{O}) = 7 + (\mathcal{D} + 1) + 3(\mathcal{O} + 1) + T(\mathcal{D}, \mathcal{O}) + 5T^*(\mathcal{D}, \mathcal{O})$$

Levando (3.35) e (3.36) á expresión de  $N_g$  e simplificando obtemos

$$N_g(\mathcal{D}, 0) = 7(\mathcal{D} + 1), \quad N_g(\mathcal{D}, \mathcal{O}) = 2 + 6\mathcal{O} - 3\mathcal{O}^2 + (7 + 6\mathcal{O})\mathcal{D} \text{ si } \mathcal{O} \neq 0. \quad (3.37)$$

Por exemplo, para o Problema Principal do satélite, que é un modelo de grao  $\mathcal{D} = 2$  e orde  $\mathcal{O} = 0$ , necesitaremos  $N_g = 21$  nodos. Para un modelo zonal de orde 20 serán  $N_g = 147$  nodos. Un modelo tesimal de orde  $2 \times 2$  precisa  $N_g = 40$  nodos, mentres que o modelo EGM96 ( $360 \times 360$ ) usará  $N_g = 393482$  nodos.

### 3.7. Implementación en *PSAT* da perturbación producida por un terceiro corpo

Concordando co visto no apartado 1.1.4 a expresión do potencial producido por un terceiro corpo vén dada por (1.61), que lembramos de novo aquí

$$V_{3c} = -\mu_{3c} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r}_{3c} - \mathbf{r}\|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_{3c}}{\|\mathbf{r}_{3c}\|^3} \right). \quad (3.38)$$

A perturbación producida pola Lúa e polo Sol sobre un satélite artificial é moi importante para órbitas altas, porén, a súa posición vén dada normalmente a partir dunha serie de datos numéricos que non permiten a súa inclusión sinxela nun integrador numérico baseado en series de Taylor. Para poder tratar esta perturbación será necesario aproximar a posición destes astros por medio dun modelo simplificado que permita expresala como un desenvolvemento en serie de potencias do tempo. Para isto, suporemos que tanto o Sol como a Lúa, ou o terceiro corpo en xeral, teñen unha órbita kepleriana, sen perturbacións.

### 3.7.1. Cálculo da posición dun corpo en órbita kepleriana

Para tratar o potencial producido por un terceiro corpo suporemos, como se dixo, que a órbita do terceiro corpo é unha órbita kepleriana dada polos seus elementos orbitais  $(T, e, a, i, \Omega, \omega)$ . Para obter a serie de potencias que determina a posición do terceiro corpo,  $\mathbf{r}_{3c}$ , empregamos o visto no apartado 3.4 para a integración da parte puramente kepleriana.

Xa que a posición do terceiro corpo é independente da posición do satélite, creamos un programa (ver algoritmo 14) que calcula a serie de potencias de  $\mathbf{r}_{3c}(t)$  independente do proceso de integración do satélite.

Debido tamén a esa independencia, as derivadas  $\delta^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  das compoñentes da serie  $\mathbf{r}_{3c}(t)$  serán todas cero. Para aproveitar esta propiedade, e simplificar o cálculo, usaremos a mesma estrutura de diferenciación automática implementada en *TIDES* no canto da extensión vista no apartado 2.7, é dicir os algoritmos 4, 5, 6 e 8 en lugar dos algoritmos 9, 10, 11 e 12. Hai que salientar aquí que os nodos usados neste proceso deben ser completamente independentes dos empregados en *PSAT*.

Se observamos a expresión (3.38) vemos que non só necesitamos a serie de potencias de  $\mathbf{r}_{3c}(t)$ , senón tamén a de  $\mathbf{r}_{3c}/\|\mathbf{r}_{3c}\|^3$ , por iso o algoritmo 14 se estendeu para calcular tamén esa serie.

### 3.7.2. Nodos necesarios para engadir a perturbación dun terceiro corpo

Unha vez calculadas as series de potencias de  $\mathbf{r}_{3c}$  e  $\mathbf{r}_{3c}/\|\mathbf{r}_{3c}\|^3$  podemos usar estas para continuar o proceso de *PSAT* e incluír o potencial producido por un terceiro corpo.

A partir de (3.38) deduciremos o número de nodos que se precisan para a inclusión da perturbación de cada un dos corpos.

- Seis nodos para almacenar as compoñentes dos vectores  $\mathbf{r}_{3c}$  e  $\mathbf{r}_{3c}/\|\mathbf{r}_{3c}\|^3$ . Estes almacénanse unha vez para cada chamada a `taylorSAT` e non forman parte do proceso iterativo de cada orde.

- Cinco nodos para calcular o segundo sumando  $-\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r}_{3c}/\|\mathbf{r}_{3c}\|^3)$ . Tres para os

---

**Algoritmo 14:** Cálculo da posición dun terceiro corpo en órbita kepleriana:  
**posicion\_terceiro\_corpo(...)**

---

**Entrada:**  $N, t_0, \mu, (a, e, i, \omega, \Omega, T)$

**Saída:** Seis nodos, que serán enlazados con *PSAT* e que conteñen as series correspondentes ás tres compoñentes do vector  $\mathbf{r}$  e ás tres de  $\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$

$N \leftarrow 22$  (declaración do número de nodos)

$(x_0, y_0, z_0, X_0, Y_0, Z_0) \leftarrow \{t_0, (a, e, i, \omega, \Omega, T)\}$  (Empregando o algoritmo 13)

$(l_{10}, l_{20}, l_{30}) \leftarrow (x_0, y_0, z_0)$

$(l_{40}, l_{50}, l_{60}) \leftarrow (X_0, Y_0, Z_0)$

$(l_{70}, l_{80}, l_{90}) \leftarrow (x_0^2, y_0^2, z_0^2)$

$l_{10,0} \leftarrow l_{70} + l_{80} + l_{90} \quad (\|\mathbf{r}_0\|^2)$

$l_{11,0} \leftarrow l_{10,0}^{-6} \quad (\|\mathbf{r}_0\|^{-3})$

$(l_{12,0}, l_{13,0}, l_{14,0}) \leftarrow (l_{10}, l_{20}, l_{30})l_{11,0} \quad (\mathbf{r}_0/\|\mathbf{r}_0\|^3)$

**dende**  $k = 0$  **ata**  $N - 1$  **fai**

**Inicio** orde  $k$

$(l_{15k}, l_{16k}, l_{17k}) \leftarrow \text{prodE}()$  para calcular  $(x^2, y^2, z^2)$

$l_{18k} \leftarrow \text{sumaE}() \quad (r^2)$

$l_{19k} \leftarrow \text{potenciaE}(l_{10}, -1/2, k) \quad (r^{-1})$

$(l_{20k}, l_{21k}, l_{22k}) \leftarrow \text{prodE}()$  para calcular  $(x r^{-1}, y r^{-1}, z r^{-1})$

$(l_{20k}, l_{21k}, l_{22k}) \leftarrow -\mu(l_{20k}, l_{21k}, l_{22k})$  para calcular a forza

**Fin**

**Inicio** orde  $k + 1$  das variables e dos nodos que calculan  $\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$

$(l_{1k+1}, l_{2k+1}, l_{3k+1}) \leftarrow (l_{4k}, l_{5k}, l_{6k})/(k + 1)$

$(l_{4k+1}, l_{5k+1}, l_{6k+1}) \leftarrow (l_{20k}, l_{21k}, l_{22k})/(k + 1)$

$(l_{7k+1}, l_{8k+1}, l_{9k+1}) \leftarrow (l_{1k+1}^2, l_{2k+1}^2, l_{3k+1}^2)$

$l_{10k+1} \leftarrow l_{7k+1} + l_{8k+1} + l_{9k+1}$

$l_{11k+1} \leftarrow l_{10k+1}^{-6}$

$(l_{12k+1}, l_{13k+1}, l_{14k+1}) \leftarrow (l_{1k+1}, l_{2k+1}, l_{3k+1})l_{11k+1}$

**Fin**

$\mathbf{r}_k \leftarrow (l_{1k}, l_{2k}, l_{3k})$

$(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3)_k \leftarrow (l_{12k+1}, l_{13k+1}, l_{14k+1})$

**fin**

---

produtos das compoñentes, un para a suma e outro para o produto pola constante  $-1$ .

- Nove nodos para o cálculo do primeiro sumando  $\|\mathbf{r}_{3c} - \mathbf{r}\|^{-1}$ . Tres para calcular o vector  $\mathbf{r}_{3c} - \mathbf{r}$ , tres para o cadrado das compoñentes, un para a suma dos cadrados  $(\|\mathbf{r}_{3c} - \mathbf{r}\|)^2$  e dous para a potencia.
- Un nodo para o potencial  $V_{3c}$  que almacenará primeiro a suma dos dous termos e logo o seu produto polo parámetro  $\mu_{3c}$ .

Así pois, para cada terceiro corpo requírense  $N_{3c} = 21$  nodos. Se se considera a perturbación lunisolar requiriranse 42 nodos (21 por cada corpo).

Os parámetros necesarios para incluír a perturbación dun terceiro corpo serán o parámetro orbital,  $\mu_{3c}$ , e os elementos orbitais,  $(a_{3c}, e_{3c}, i_{3c}, \Omega_{3c}, \omega_{3c}, T_{3c})$ , é dicir sete parámetros por cada corpo.

### 3.8. Implementación do efecto da radiación solar

Concordando co visto no apartado 1.1.4 a expresión do potencial perturbador producido pola radiación solar vén dada por

$$V_{\text{rad}} = \frac{\beta}{\|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}\|}, \quad (3.39)$$

onde  $\beta$  é o factor de reflectividade do satélite que depende, entre outras cousas, do cociente *área-masa* que presenta o satélite respecto ao Sol. Lembremos que  $\mathbf{r}_{\odot}(t)$  é o vector de posición do Sol e que será calculado do mesmo xeito que no caso da perturbación lunisolar (se non foi xa previamente calculada). Neste caso non necesitaremos o cociente  $\mathbf{r}_{\odot}/\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3$ .

Normalmente o parámetro  $\beta$  adóitase tomar como constante, pero iso impide considerar a posibilidade de variacións no *área-masa* debidas a unha rotación do satélite. En *PSAT* introducimos a posibilidade de usar un parámetro  $\beta(t)$  supoñendo sempre que ou ben coñecemos a serie de potencias con respecto ao tempo ou que coñecemos unha expresión analítica de  $\beta(t)$  cunha función enlazada que nos permita calcular a dita serie.

Os parámetros necesarios para incluír a radiación solar son os elementos orbitais  $(T_{\odot}, e_{\odot}, a_{\odot}, i_{\odot}, \Omega_{\odot}, \omega_{\odot})$  e o parámetro  $\beta$  se é constante.

Os nodos necesarios neste proceso son

- Se o parámetro é variable, un nodo para conter o desenvolvemento en serie de  $\beta(t)$ . Ao igual que no caso da posición no terceiro corpo, este ten todas as súas derivadas  $\delta^i, i \neq 0$  iguais a cero. Almacénase unha vez para cada chamada a `taylorSAT` e non forma parte do proceso iterativo de cada orde.
- Tres nodos para almacenar as compoñentes do vector de posición do Sol  $\mathbf{r}_{\odot}$ .
- Nove nodos para o cálculo do primeiro sumando  $\|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}\|^{-1}$ . Tres para calcular o vector  $\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}$ , tres para o cadrado das compoñentes, un para a suma dos cadrados  $(\|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}\|)^2$  e dous para a potencia.
- Un nodo para o potencial  $V_{\odot}$  formado polo produto de  $\beta$ , sexa constante ou variable, por  $\|\mathbf{r}_{\odot} - \mathbf{r}\|^{-1}$ .

Así pois o número de nodos necesarios será  $N_{\text{rad}} = 13$  se  $\beta$  depende de  $t$  e  $N_{\text{rad}} = 12$  en caso contrario.

### 3.9. Implementación da freada atmosférica

Vimos en 1.1.4 que a atmosfera ten influencia sobre o movemento dun satélite cando este se atopa en órbitas baixas. Dentro do fluxo de traballo de *PSAT* incluiremos no lugar axeitado unha comparación entre o raio vector, que xa estará calculado como se pode ver na ecuación (3.11) e un límite<sup>9</sup>. O programa traballa de xeito que se se cumpre procederanse a activar os nodos correspondentes.

Lembremos as ecuacións (1.85), (1.86) e (1.90) para obter a ecuación a implementar en *PSAT*. Como se pode observar, a maior parte dos coeficientes son valores constantes que estarán inicializados no programa permitindo a súa modificación por

---

<sup>9</sup> Unha vez activada a subrutina que pon en marcha a freada atmosférica, o programa calcularaa sempre que  $r^2 \leq 6,2 \times 10^7 \text{ km}^2$ . Este límite considerámolo o suficientemente conservador como para que se calcule continuamente en órbitas LEO e unicamente no perixeo de satélites con órbitas excéntricas, evitando o cálculo, e por ende reducindo tempos, cando os cálculos se fagan no apoxeo.

parte do usuario, se é o caso. Crearemos unha variable que se calculará ao comenzo e almacenaremos como un parámetro, de tal xeito que

$$k = -\frac{1}{2} C_D \frac{A}{m} \rho^* . \quad (3.40)$$

Os únicos valores que se calculan en cada paso son a posición,  $\mathbf{r}$ , a velocidade relativa do satélite,  $\mathbf{v}$ , (ambos necesarios en calquera caso) e a altitude,  $h$  (que á súa vez é función da posición  $h = \|\mathbf{r}\| - r_T$ ).

Para implementar a freada atmosférica necesitaremos os seguintes 23 nodos

- Un parámetro previamente calculado correspondente á constante  $k$  de (3.40).
- Sete nodos para calcular o cadrado da diferenza entre o vector velocidade e o produto vectorial entre  $\boldsymbol{\omega}_{rot}$  e o vector de posición<sup>10</sup>.
- Catro nodos para crear o expoñente da función exponencial e para multiplicala por  $k$ .
- Cinco nodos para calcular o módulo de  $\mathbf{v}$  e multiplicalo polas compoñentes da velocidade relativa do satélite.
- Seis nodos: tres para almacenar cada unha das compoñentes nas súas correspondentes direccións e tres para sumar os anteriores ás compoñentes totais.

O proceso, que pode verse en (3.41), comeza dando valor a un parámetro que representa a ecuación (3.40). Este parámetro ten o índice  $Q+1$  onde  $Q$  é o número total de parámetros declarados anteriormente. Do mesmo xeito faise cos nodos do resto de proceso, onde o primeiro deles será  $l_{B+1}$ , sendo  $B$  o número total de nodos xa empregados ata este intre.

<sup>10</sup> A terceira compoñente do produto escalar é nula, por ese motivo non é preciso calculala. Esta hipótese implica que a rotación da Terra coincide co eixe  $\mathbf{e}_3$ , isto é que  $\boldsymbol{\omega}_{rot} = (0, 0, \omega_{rot})$ .

CAPÍTULO 3. O PROPAGADOR ORBITAL *PSAT*

$p_{Q+1}$	$= k$	$\rightarrow k$	
$l_{B+1}$	$= l_{14}^{1/2}$	$\rightarrow r$	
$l_{B+2}$	$= -\omega_{rot} l_2$	$\rightarrow \omega_{rot} y$	
$l_{B+3}$	$= \omega_{rot} l_1$	$\rightarrow -\omega_{rot} x$	
$l_{B+4}$	$= l_4 l_{B+2}$	$\rightarrow X + \omega_{rot} y$	
$l_{B+5}$	$= l_5 l_{B+3}$	$\rightarrow Y - \omega_{rot} x$	
$l_{B+6}$	$= l_{B+4}^2$	$\rightarrow (X + \omega_{rot} y)^2$	
$l_{B+7}$	$= l_{B+5}^2$	$\rightarrow (Y - \omega_{rot} x)^2$	
$l_{B+8}$	$= l_6 l_6$	$\rightarrow Z^2$	
$l_{B+9}$	$= l_{B+1} - r_T$	$\rightarrow h$	
$l_{B+10}$	$= -\alpha l_{B+9}$	$\rightarrow -\alpha h$	
$l_{B+11}$	$= e^{l_{B+10}}$	$\rightarrow e^{-\alpha h}$	
$l_{B+12}$	$= p_{Q+1} l_{B+11}$	$\rightarrow k e^{-\alpha h}$	
$l_{B+13}$	$= l_{B+6} + l_{B+7} + l_{B+8}$	$\rightarrow \ \mathbf{v}\ ^2$	
$l_{B+14}$	$= l_{B+13}^{1/2}$	$\rightarrow \ \mathbf{v}\ $	
$l_{B+15}$	$= l_4 l_{B+14}$	$\rightarrow \ \mathbf{v}\  X$	
$l_{B+16}$	$= l_5 l_{B+14}$	$\rightarrow \ \mathbf{v}\  Y$	
$l_{B+17}$	$= l_6 l_{B+14}$	$\rightarrow \ \mathbf{v}\  Z$	
$l_{B+18}$	$= l_{B+12} l_{B+6}$	$\rightarrow F_{R1}$	
$l_{B+19}$	$= l_{B+12} l_{B+7}$	$\rightarrow F_{R2}$	
$l_{B+20}$	$= l_{B+12} l_{B+8}$	$\rightarrow F_{R3}$	

(3.41)



## Capítulo 4

# O movemento rototranslatorio

### 4.1. Introducción

O movemento rototranslatorio do satélite artificial pódese definir como a combinación do movemento de rotación en torno a un eixe xunto ao movemento orbital arredor da Terra. Este movemento, e a súa influencia no comportamento xeral do satélite, comezou a ser estudado a partir das bases teóricas que estableceu [Andoyer \(1923\)](#) a comezos do século XX. Máis tarde outros autores foron ampliándoas, en especial [Leimanis \(1965\)](#), [Kinoshita \(1970, 1972\)](#) ou [Zanardi \(1985, 1986\)](#). A contribución da ciencia española neste eido foi moi salientable, especialmente a partir de finais dos anos 80 con [Ferrándiz e Sansaturio \(1988, 1989\)](#), [Arribas \(1989\)](#), [Ferrándiz, Sansaturio e Caballero \(1993\)](#)... Nos últimos anos houbo un renacido interese, como se pode comprobar nos artigos de [Vilhena de Moraes \*et al.\* \(2009\)](#), [San Juan, López e López \(2012\)](#), [Ferrer e Lara \(2010, 2012\)](#), [Arribas \*et al.\* \(2014\)](#), [Ferrer e Molero \(2014\)](#), [Ferrer, Molero e Crespo \(2014\)](#), [Hautesserres e Lara \(2017\)](#), [Cantero, Crespo e Ferrer \(2018\)](#), [Lara \(2018\)](#) ou nas teses de [Navarro \(2011\)](#), [Molero \(2013\)](#), [Crespo \(2014\)](#), [Soler \(2016\)](#) ou [Jiménez \(2016\)](#).

O estudo do movemento rototranslacional non é alleo á gran dificultade para integrar as ecuacións que rexen a dinámica do satélite artificial. A diferenza fundamental con respecto ao que vimos no Capítulo 1 é que agora se duplica o número de variables, polo que é necesario un tratamento específico para este escenario xeral. A isto súmase a complexidade intrínseca do movemento rototranslatorio, o que explica que

sexa extremadamente complicado de tratar, modelar e analizar.

A todos estes aspectos teóricos hai que engadir a dificultade que implica o feito de que existan diferentes notacións, sistemas de referencia e nomenclaturas nos distintos autores que o trataron, o que contribúe a confundir e mesturar termos, variables, ángulos... facendo que nalgúns ocasións a análise e a interconexión entre eles sexa unha tarefa ardua. Neste capítulo estableceremos unha notación compacta e práctica que nos permitirá manter unha liña explicativa suficientemente diáfana para seguila de xeito claro e conciso.

Os pasos que imos seguir comezarán coa descrición do movemento dun corpo ríxido, definindo os sistemas de referencia e as variables necesarias para o seu tratamento. Posteriormente obteremos a enerxía cinética e potencial do sólido, para atopar a expresión do seu hamiltoniano. Presentaremos a continuación os grupos de variables canónicas de Euler e Andoyer, que nos permitirán expresar a enerxía potencial en función de ambos os dous conxuntos. A partir deste punto e tendo en conta unha serie de hipóteses, describiremos o movemento rototranslatorio do satélite artificial, que rematará coa expresión do hamiltoniano para dous casos particulares: cando tratamos un satélite cuasisimétrico ou cando o fagamos cun satélite triaxial. Remataremos o capítulo establecendo o que chamaremos as *doce ecuacións de Lagrange do movemento rototranslatorio do satélite artificial*, para as que presentaremos os *elementos rotacionais*. En realidade, trátase das ecuacións de Lagrange xeneralizadas, válidas tanto para o movemento orbital (clásicas ecuacións de Lagrange) como para o movemento de rotación, propostas por primeira vez.

Como comentamos nas liñas anteriores, o movemento rototranslatorio, coas súas doce variables, debe ser tratado independentemente do caso do movemento orbital kepleriano perturbado, que non inclúe a rotación. Por este motivo, é necesaria unha extensión ao propagador *PSAT*, que chamaremos *PSATROT* e que se explicará en detalle nunha sección separada (do mesmo xeito que no Capítulo 3 con *PSAT*). Como veremos a continuación, as características deste movemento fan que o propagador *PSATROT* sexa diferente na súa forma, aínda que non no fondo (porque o integrador seguirá sendo o mesmo) que *PSAT*.

## 4.2. Movement dun sólido ríxido

Un sólido ríxido pode definirse como un conxunto infinito de puntos,  $P$ , de masa infinitesimal,  $dm$ , cuxa distancia entre cada dous puntos calquera do mesmo permanece constante independentemente da forza que actúe sobre o corpo.

Representaremos, como é habitual, a posición de cada un dos puntos mediante un vector  $\mathbf{r}$  referido a un sistema de referencia inercial  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  con orixe en  $O$ . Se definimos un punto fixo calquera do sólido ríxido,  $C$ , sobre o que se sitúa un sistema de referencia ortonormal,  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ , solidario con el, poderemos referenciar calquera punto do corpo a partir de  $C$  mediante o vector  $\boldsymbol{\rho}$ , constante no sistema de referencia do sólido; e a partir de  $O$  a través de  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\rho}$ , tal e como se pode ver na figura 4.1.

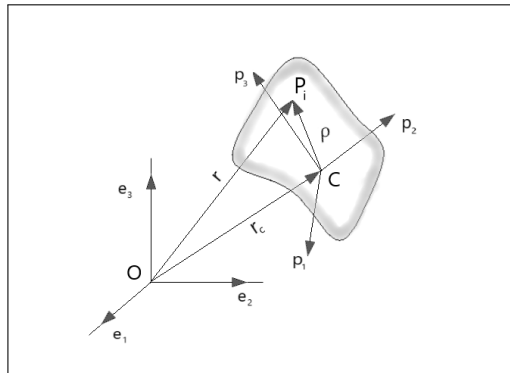


Figura 4.1: Representación do sólido ríxido.

Por cuestións prácticas adóitase facer coincidir  $C$  co centro de masas do sólido, e o sistema de coordenadas a el asociado,  $\mathcal{P}$ , co sistema de eixes principais de inercia que se definirán máis adiante.

Para caracterizar a rotación do sólido bastará determinar a posición do sistema de referencia,  $\mathcal{P}$ , respecto do sistema inercial,  $\mathcal{E}$ , por medio do vector  $\boldsymbol{\epsilon} = (\psi, \theta, \phi)$  cuxos elementos son denominados *ángulos de Euler*<sup>1</sup>.

Así pois, o problema do movemento do sólido ten seis graos de liberdade: tres

<sup>1</sup> Tamén se poden denominar respectivamente: ángulo de precesión, de rotación propia (ambos os dous con valores comprendidos entre 0 e  $2\pi$ ) e de nutación (con valores entre 0 e  $\pi$ ).

para o seu movemento de translación, representado polas coordenadas do vector  $\mathbf{r}_c$ , e outros tres para o seu movemento de rotación, representado polo vector  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

#### 4.2.1. Ángulos de Euler e velocidade angular de rotación

Para describir os ángulos de Euler introduciremos o plano  $\Pi_e$ , que será aquel que contén os vectores  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  e ao que chamaremos *plano de Euler*. O vector que representa a intersección do plano definido por  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  con  $\Pi_e$ , será  $\mathbf{l}_p$ , de xeito que  $\mathbf{l}_p = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{p}_3$ , tal e como se observa na figura 4.2.

Deste xeito definiremos cada elemento de  $\boldsymbol{\epsilon}$  como o ángulo entre dous vectores xa coñecidos, tal que

$$\psi = \angle \mathbf{e}_1, \mathbf{l}_p \quad \theta = \angle \mathbf{e}_3, \mathbf{p}_3 \quad \phi = \angle \mathbf{l}_p, \mathbf{p}_1. \quad (4.1)$$

Unha vez caracterizado  $\boldsymbol{\epsilon}$  é posible empregalo para establecer a transformación entre os sistemas  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{P}$  mediante as matrices de rotación clásicas<sup>2</sup>, é dicir, mediante o produto de tres matrices de rotación,  $R_3(\psi)R_1(\theta)R_3(\phi)$ , de tal xeito que poderemos expresar o sistema  $\mathcal{P}$  a partir de  $\mathcal{E}$  mediante  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

Unha vez definido no espazo o sistema de referencia do sólido ríxido con respecto ao sistema de referencia global, é posible caracterizar o seu movemento mediante o vector velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$ , cuxa dirección é a do eixe instantáneo de rotación do sistema e, polo tanto, do sólido; e cuxa norma  $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$  representa a velocidade angular con que o sólido xira arredor do dito eixe. Para iso hai que ter en conta as fórmulas de Poisson (ver, por exemplo, o Capítulo 6.3 de [Abad \(2012\)](#)) que determina o movemento dun sistema de referencia non inercial,

<sup>2</sup> Chamaremos matriz de rotación do sistema  $\mathcal{J}$  ao sistema  $\mathcal{F}$ , ambos os dous sistemas de referencia ortonormais tal que  $\mathcal{J} = \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$  e  $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ , sendo  $\mathbf{x}_{\mathcal{J}}, \mathbf{x}_{\mathcal{F}}$  as expresións dun mesmo vector en cada un deles; a unha matriz ortogonal  $R$  que verifica  $\mathbf{x}_{\mathcal{F}} = R \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{J}}$ . Con este convenio ([Goldstein, Poole e J. \(2011\)](#)) as matrices elementais de rotación, que representan o xiro dun ángulo  $\alpha$  arredor dos eixes  $Ox$  e  $Oz$ , pódense pór como

$$R_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad R_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que, por ser ortogonais, verifican a relación  $R_i^{-1}(\alpha) = R_i^T(\alpha) = R_i(-\alpha)$ .

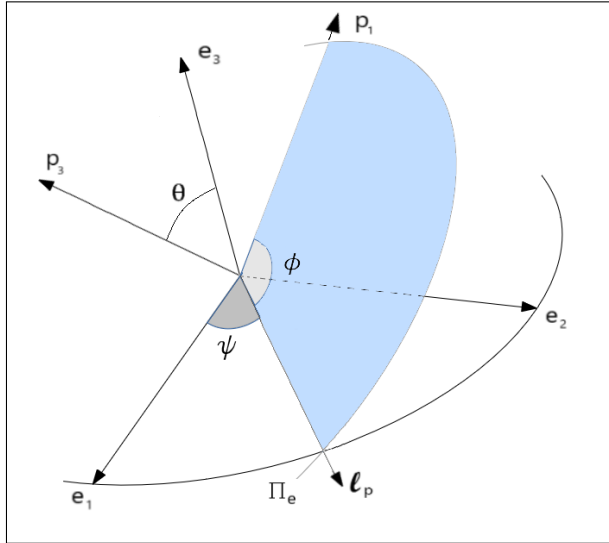


Figura 4.2: Representación gráfica dos ángulos de Euler.

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

A partir desta ecuación podemos obter as compoñentes  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  de  $\boldsymbol{\omega}$  respecto de  $\mathcal{P}$ , de xeito que  $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{p}_1 + \omega_2 \mathbf{p}_2 + \omega_3 \mathbf{p}_3$ .

Mediante a seguinte expresión podemos relacionar  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  con  $\boldsymbol{\omega}$  do seguinte modo,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \mathbf{l}_p + \dot{\phi} \mathbf{p}_3, \quad (4.3)$$

xa que cada unha das compoñentes de  $\boldsymbol{\epsilon}$  xira en torno ao seu eixe correspondente. Introducindo un vector  $\boldsymbol{\sigma}$  tal que  $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\omega} dt$ , obteremos a forma diferencial

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_3 d\psi + \mathbf{l}_p d\theta + \mathbf{p}_3 d\phi. \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \mathbf{p}_1 + \text{sen } \theta \cos \phi \mathbf{p}_2 + \cos \theta \mathbf{p}_3, \\ \mathbf{l}_p &= \cos \phi \mathbf{p}_1 - \text{sen } \phi \mathbf{p}_2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

que levada a (4.3) permite obter as compoñentes de  $\boldsymbol{\omega}$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \text{sen } \theta \text{ sen } \phi \dot{\psi} + \cos \phi \dot{\theta}, \\ \omega_2 &= \text{sen } \theta \cos \phi \dot{\psi} - \text{sen } \phi \dot{\theta}, \\ \omega_3 &= \cos \theta \dot{\psi} + \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Con isto poderemos expresar a velocidade absoluta  $\dot{\boldsymbol{\rho}}$  de cada partícula do sólido como

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}, \quad (4.7)$$

onde a velocidade relativa  $\boldsymbol{\rho}'$  é nula, xa que  $P$  non se move respecto ao sistema do sólido (ver a figura 4.1).

#### 4.2.2. Momento angular de rotación e tensor de inercia

O momento angular,  $\mathbf{L}$ , do movemente dunha partícula é o produto da súa masa polo produto vectorial do seu vector de posición polo vector velocidade. No caso dun sistema de partículas será o sumatorio, estendido a todas elas, de cada un dos momentos angulares individuais. Se partimos, como é o noso caso, dun sólido cun número infinito de partículas de masa,  $dm$ , o sumatorio converterase nunha integral. Para calcular o momento angular de rotación faremos coincidir a orixe  $O$  do sistema inercial co punto  $C$ , así aplicando (4.7)

$$\mathbf{L} = \int_{m_s} [\boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}] dm = \int_{m_s} [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})] dm = \int_{m_s} [(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega})] dm. \quad (4.8)$$

Supoñendo que o sólido é homoxéneo a expresión (4.8) pódese pór como

$$\mathbf{L} = m_s \int_{V_s} [(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega})] dx dy dz, \quad (4.9)$$

onde agora a integral está estendida sobre o volume  $V_s$  do sólido.

Desenvolvendo o anterior poderemos expresar o momento angular de rotación como

$$\mathbf{L} = [I]_s \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad [I]_s = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde  $[I]_s$  é a matriz ou tensor de inercia do sólido respecto a un sistema calquera do sólido  $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$  cuxas compoñentes poden obterse a partir das relacións

$$\begin{aligned} I_{xx} &= m_s \int_{V_s} (y^2 + z^2) dx dy dz, & I_{xy} &= I_{yx} = -m_s \int_{V_s} xy dx dy dz, \\ I_{yy} &= m_s \int_{V_s} (x^2 + z^2) dx dy dz, & I_{xz} &= I_{zx} = -m_s \int_{V_s} xz dx dy dz, \\ I_{zz} &= m_s \int_{V_s} (x^2 + y^2) dx dy dz, & I_{yz} &= I_{zy} = -m_s \int_{V_s} yz dx dy dz. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A partir da matriz de inercia  $[I]_s$  podemos obter os seus valores e vectores propios que denotaremos, respectivamente, como  $(I_1, I_2, I_3)$  e  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ . Os vectores  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$  representan as direccións dos eixes principais de inercia do sólido, mentres que os valores  $(I_1, I_2, I_3)$  son os chamados momentos principais de inercia. A matriz de inercia  $[I]$ , expresada no sistema de eixes principais, é unha matriz diagonal, cuxos elementos da diagonal coinciden cos momentos principais de inercia.

Os momentos e os eixes principais de inercia relaciónanse co momento angular mediante a expresión

$$\mathbf{L} = I \cdot \boldsymbol{\omega} = I_1 \omega_1 \mathbf{p}_1 + I_2 \omega_2 \mathbf{p}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{p}_3. \quad (4.12)$$

Observemos que en (4.11) todos os momentos de inercia están multiplicados pola masa do sólido,  $m_s$ , de xeito que a súa ecuación dimensional será  $[M L^2]$ . Por cuestións prácticas dividiremos pola masa introducindo os elementos  $(A, B, C)$  mediante as relacións seguintes

$$I_1 = m_s A, \quad I_2 = m_s B, \quad I_3 = m_s C, \quad (4.13)$$

é dicir, os momentos principais divididos pola masa do sólido. Por extensión chamaremos a  $(A, B, C)$  momentos principais de inercia por unidade de masa<sup>3</sup>.

A norma do vector momento angular  $\mathbf{L}$  será

$$L = \sqrt{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2}. \quad (4.14)$$

Se denominamos  $\mathbf{n}_3$  á dirección de  $\mathbf{L}$  teremos que

$$\mathbf{L} = L \mathbf{n}_3. \quad (4.15)$$

Como é natural, poderemos obter o mesmo empregando os momentos principais de inercia por unidade de masa, introducindo neste caso o vector  $\mathbf{G}$ , que será análogo a  $\mathbf{L}$ , agás o factor masa, de forma que

$$\mathbf{L} = m_s \mathbf{G}, \quad (4.16)$$

que á súa vez nos permite obter a norma do momento angular por unidade de masa

$$G = \sqrt{A^2 \omega_1^2 + B^2 \omega_2^2 + C^2 \omega_3^2}, \quad (4.17)$$

obviamente,  $\mathbf{G}$  ten a mesma dirección que  $\mathbf{L}$ , polo tanto

$$\mathbf{G} = G \mathbf{n}_3. \quad (4.18)$$

### 4.2.3. Enerxía cinética do sólido ríxido

Para calcular a enerxía cinética do sólido empregaremos a expresión

---

<sup>3</sup> Aínda que estritamente non son momentos de inercia, pois teñen dimensións de  $[L^2]$ , empregárase esta denominación para non perder a perspectiva de que son realmente: momentos de inercia divididos entre a masa do sólido.

$$T = \frac{1}{2} \int_{m_s} \dot{\mathbf{r}}^2 dm, \quad (4.19)$$

á que aplicaremos a fórmula de Poisson (ver en (4.2)) e a expresión (4.7) adaptándoas a este caso. Elixindo o centro de masas do sólido coma orixe do sistema de eixes principais de inercia (4.19) quedará como

$$T = \frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{r}}_c^2 + \frac{1}{2} m_s \int_{V_s} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})^2 dx dy dz, \quad (4.20)$$

onde poderemos separar en dous sumandos  $T = T_c + T_r$ , representando  $T_c$  a enerxía cinética de translación (equivalente á enerxía cinética do movemento dunha partícula puntual coa masa total do sólido), e  $T_r$  a enerxía cinética de rotación de xeito que

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{r}}_c^2 \\ T_r &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} m_s (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Empregando as relacións de (4.6) poderemos expresar o segundo sumando como función das variables de Euler e as súas derivadas, é dicir,  $T_r = T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ .

#### 4.2.4. Variables canónicas de Euler

Para poder definir unhas variables canónicas partiremos da seguinte premisa: sobre o sólido actúan forzas que derivan dun potencial  $V$  que depende unicamente dos ángulos de Euler, é dicir  $V(\boldsymbol{\epsilon})$ .

Así pódese construír a lagrangiana do sistema do seguinte modo

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = T(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - V(\boldsymbol{\epsilon}), \quad (4.22)$$

e a partir dela os momentos conxugados  $\mathbf{p}_\boldsymbol{\epsilon} = (p_\psi, p_\theta, p_\phi)$  como

$$\mathbf{p}_\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{\partial T_r}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}, \quad (4.23)$$

que desenvolvidos son

$$\begin{aligned}
 p_\psi &= \frac{\partial T_r}{\partial \dot{\psi}} = I_1 \omega_1 \sin \theta \sin \phi + I_2 \omega_2 \sin \theta \cos \phi + I_3 \omega_3 \cos \theta, \\
 p_\theta &= \frac{\partial T_r}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \omega_1 \cos \phi - I_2 \omega_2 \sin \phi, \\
 p_\phi &= \frac{\partial T_r}{\partial \dot{\phi}} = I_3 \omega_3.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Invertendo estas expresións obtemos

$$\begin{aligned}
 I_1 \omega_1 &= p_\theta \cos \phi + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\phi \cos \theta), \\
 I_2 \omega_2 &= -p_\theta \sin \phi + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\phi \cos \theta), \\
 I_3 \omega_3 &= p_\phi.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Substituíndo estas igualdades en  $T_r$  de (4.21) chegamos finalmente á expresión da enerxía cinética de rotación en variables canónicas de Euler

$$\begin{aligned}
 T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_\epsilon) &= \frac{1}{2I_1} \left[ p_\theta \cos \phi + \frac{\sin \phi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\phi \cos \theta) \right]^2 + \\
 &+ \frac{1}{2I_2} \left[ -p_\theta \sin \phi + \frac{\cos \phi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\phi \cos \theta) \right]^2 + \frac{p_\phi^2}{2I_3}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

#### 4.2.5. Variables canónicas de Andoyer

Aínda que estas variables habitualmente coñécense simplemente como variables de Andoyer, o certo é que foi J. A. Serret o primeiro en caracterizalas en 1866 (Serret (1866)) e M. H. Andoyer o primeiro en demostrar a canonicidade das mesmas en 1923 (Andoyer (1923)).

Para definilas axudarámonos da figura 4.3 onde identificamos un novo plano,  $\Pi_a$ , como aquel ortogonal ao momento angular  $\mathbf{L}$  ou, o que é igual, a  $\mathbf{n}_3$  (lembramos (4.15)) e ao que chamaremos plano de Andoyer; mentres que a dirección  $\mathbf{l}_a$  será a

intersección do plano definido polos vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  con  $\Pi_a$ ; e o vector  $\mathbf{n}_1$  representará a intersección dos planos  $\Pi_a$  e  $\Pi_e$ .

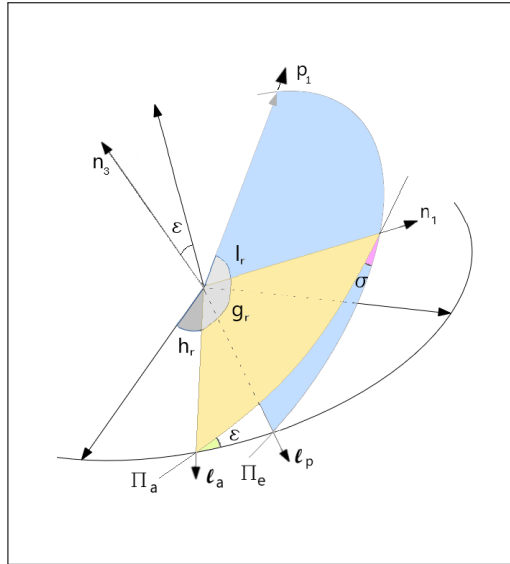


Figura 4.3: Variables de Andoyer.

Do mesmo modo que fixemos cos ángulos de Euler en (4.1) podemos definir agora as variables de Andoyer mediante os ángulos dos vectores que as conforman

$$l_r = \angle \mathbf{n}_1, \mathbf{p}_1 \quad g_r = \angle \mathbf{l}_a, \mathbf{n}_1 \quad h_r = \angle \mathbf{e}_1, \mathbf{l}_a. \quad (4.27)$$

A este conxunto chamarémolo  $\mathbf{a} = (l_r, g_r, h_r)$ .

Outros ángulos importantes son:  $\sigma$  que é a inclinación do plano  $\Pi_e$  respecto a  $\Pi_a$ , e  $\epsilon$  que é a inclinación do plano  $\Pi_a$  respecto ao plano definido polos vectores  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , isto é

$$\sigma = \angle \mathbf{p}_3, \mathbf{n}_3 \quad \epsilon = \angle \mathbf{n}_3, \mathbf{e}_3. \quad (4.28)$$

$$\mathbf{n}_3 = \text{sen } \sigma \text{ sen } l \mathbf{p}_1 + \text{sen } \sigma \cos l \mathbf{p}_2 + \cos \sigma \mathbf{p}_3, \quad (4.29)$$

para o que basta comprobar que a matriz de rotación que relaciona o sistema  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3\}$  co de eixes principais é  $R_3(l)R_1(\sigma)$ .

Do mesmo xeito que en (4.4) obtiñamos a variación do vector  $\boldsymbol{\sigma}$  a partir da variación dos ángulos de Euler, aquí poderemos obter a variación de  $\boldsymbol{\sigma}$  a partir das variables de Andoyer  $(l_r, g_r, h_r)$  e auxiliares  $(\epsilon, \sigma)$

$$d\boldsymbol{\sigma} = dh_r \mathbf{e}_3 + d\epsilon \mathbf{l}_a + dg_r \mathbf{n}_3 + d\sigma \mathbf{n}_1 + dl_r \mathbf{p}_3, \quad (4.30)$$

e multiplicando escalarmente a expresión polo momento angular  $\mathbf{L}$ , lembrando que por definición tanto  $\mathbf{l}_a$  como  $\mathbf{n}_1$  son ortogonais a  $\mathbf{L}$ , obteremos

$$\mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3) dh_r + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}_3) dg_r + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{p}_3) dl_r. \quad (4.31)$$

Tendo en conta o significado de  $\epsilon, \sigma$  e a expresión (4.15) poderanse definir os seguintes valores

$$\begin{aligned} p_l = \mathbf{L} \cdot \mathbf{p}_3 &= L \cos \sigma = m_s G \cos \sigma, \\ p_g = \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}_3 &= L = m_s G, \\ p_h = \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3 &= L \cos \epsilon = m_s G \cos \epsilon, \end{aligned} \quad (4.32)$$

que permiten pór

$$\mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = p_l dl_r + p_g dg_r + p_h dh_r, \quad (4.33)$$

onde empregaremos a notación seguinte para os momentos  $\mathbf{p}_a = (p_l, p_g, p_h)$ .

Por outra banda de acordo coa expresión (4.4) obtense  $\mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$  en función de  $\epsilon$



$$\mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3) d\psi + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{l}_p) d\theta + (\mathbf{L} \cdot \mathbf{p}_3) d\phi. \quad (4.34)$$

## CAPÍTULO 4. O MOVIMENTO ROTOTRANSLATORIO

Reunindo as expresións (4.5), (4.12) e (4.25) chégase aos momentos asociados aos ángulos de Euler,  $\mathbf{p}_\epsilon = (p_\psi, p_\theta, p_\phi)$

$$\begin{aligned} p_\psi &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3, \\ p_\theta &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{l}_p, \\ p_\phi &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{p}_3, \end{aligned} \quad (4.35)$$

ou o que é o mesmo

$$\mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = p_\psi d\psi + p_\theta d\theta + p_\phi d\phi. \quad (4.36)$$

Finalmente igualando (4.33) e (4.36) obtemos

$$p_\psi d\psi + p_\theta d\theta + p_\phi d\phi = p_l dl_r + p_g dg_r + p_h dh_r, \quad (4.37)$$

que demostra que a transformación de variables de Euler a Andoyer é completamente canónica.

A partir deste punto empregaremos a notación  $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_\epsilon) = (\psi, \theta, \phi, p_\psi, p_\theta, p_\phi)$  e  $(\mathbf{a}, \mathbf{p}_\mathbf{a}) = (l_r, g_r, h_r, p_l, p_g, p_h)$  para referirnos ás variables de Euler e de Andoyer (coordenadas e momentos), respectivamente.

Obteñamos agora a expresión da enerxía cinética de rotación en función das variables de Andoyer. Reunindo as expresións (4.12), (4.14) e (4.29), e levándoas a (4.21), resulta

$$T_r = \frac{1}{2} \left( \frac{L^2 \sin^2 \sigma \sin^2 l_r}{I_1} + \frac{L^2 \sin^2 \sigma \cos^2 l_r}{I_2} + \frac{L^2 \cos^2 \sigma}{I_3} \right). \quad (4.38)$$

Tendo agora en conta as expresións (4.32),

$$\begin{aligned} p_l^2 &= L^2 \cos^2 \sigma, \\ p_g &= L, \\ p_g^2 - p_l^2 &= L^2 \sin^2 \sigma = L^2 - L^2 \cos^2 \sigma, \end{aligned} \quad (4.39)$$

dedúcese a expresión de  $T_r$  en función de  $(\mathbf{a}, \mathbf{p}_\mathbf{a})$

$$T_r(\mathbf{a}, \mathbf{p}_\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \left[ (p_g^2 - p_l^2) \left( \frac{\text{sen}^2 l_r}{I_1} + \frac{\text{cos}^2 l_r}{I_2} \right) + \frac{p_l^2}{I_3} \right]. \quad (4.40)$$

### 4.3. Movemento rototranslatorio do satélite artificial

Ata este momento definimos o movemento dun sólido ríxido obtendo a enerxía cinética do mesmo dividíndoa en enerxía cinética de translación,  $T_c$ , e en enerxía cinética de rotación,  $T_r$ , tal e como vimos en (4.21). Ademais expresamos  $T_r$  en función das variables que definen o movemento de rotación, tanto de  $(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_\boldsymbol{\epsilon})$  como de  $(\mathbf{a}, \mathbf{p}_\mathbf{a})$ .

Con esta base estamos en condicións de describir o movemento rototranslatorio do satélite artificial, pois constitúe un caso particular do chamado *Problema de dous sólidos*, que representa o estudo do movemento de translación e rotación de dous sólidos ríxidos atraídos pola lei de atracción gravitacional de Newton.

Como se viu anteriormente, o movemento dun sólido ríxido ten seis graos de liberdade, tres para o movemento de translación do centro de masas e tres para o de rotación do sólido. No caso de dous sólidos o problema ten doce graos de liberdade, seis para cada sólido, e a enerxía cinética contará con catro sumandos, dous por cada sólido.

Empregando a figura 4.4 como referencia gráfica, vemos que se definiron tres sistemas de coordenadas: un asociado a un sistema inercial cartesiano ortogonal dextróxiro  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  e dous solidarios con cada un dos sólidos  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  e  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ . No noso caso os sólidos serán a Terra (ou calquera outro planeta ou corpo celeste), que terá o sistema asociado  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  e unha masa  $m_T$ ; e un satélite orbitando arredor dela cuxo sistema de referencia será  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$  e con masa  $m_s$ . En ambos os dous casos, as direccións principais de cada corpo coincidirán cos eixes principais de inercia de cada un deles. Deste xeito empregaremos a notación seguinte para a Terra e o satélite

$$\begin{aligned} (I_{T1}, I_{T2}, I_{T3}) &= m_T (A_T, B_T, C_T), \\ (I_{s1}, I_{s2}, I_{s3}) &= m_s (A_s, B_s, C_s). \end{aligned} \quad (4.41)$$

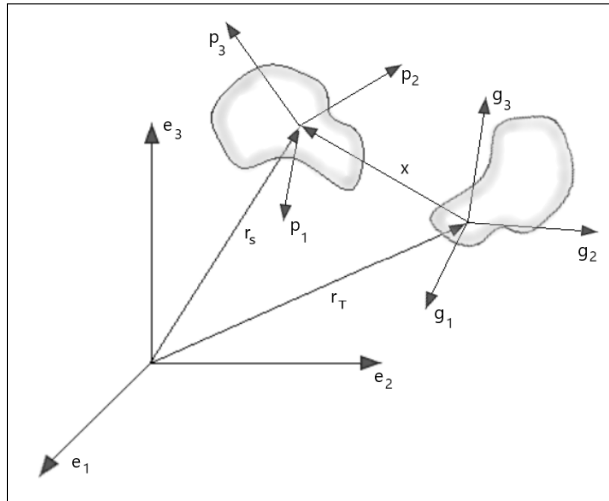


Figura 4.4: Sistemas de referencia  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{G}$ .

A partir de aquí pódense impor certas hipóteses

1. Consideraremos como primeira aproximación que a Terra é un elipsoide de revolución cuxos momentos principais de inercia por unidade de masa verifican que  $A_T = B_T$  (a dita suposición non se afasta da realidade, como se pode ver en [Chen \*et al.\* \(2015\)](#)<sup>4</sup>).
2. O sistema de eixos principais de inercia asociado á Terra, que xa definimos como  $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ , será o sistema xeográfico (que se adoita denominar  $\mathcal{G}$  ([Abad \(2012\)](#))), isto é, un sistema ecuatorial cuxa dirección  $\mathbf{g}_1$  coincide coa dirección do meridiano de Greenwich e  $\mathbf{g}_3$  coa dirección do polo. O sistema de referencia inercial  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  será o sistema ecuatorial ao que chamaremos sistema espacial.
3. A Terra rota cunha velocidade angular  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_T)$ , sendo  $\omega_T$  igual a  $2\pi$  radiáns por día sidéreo.

<sup>4</sup> Non confundir a notación que se emprega nese artigo coa que se utiliza nesta tese, pois para referirse aos momentos principais de inercia empregan a nosa notación para os momentos principais de inercia por unidade de masa.

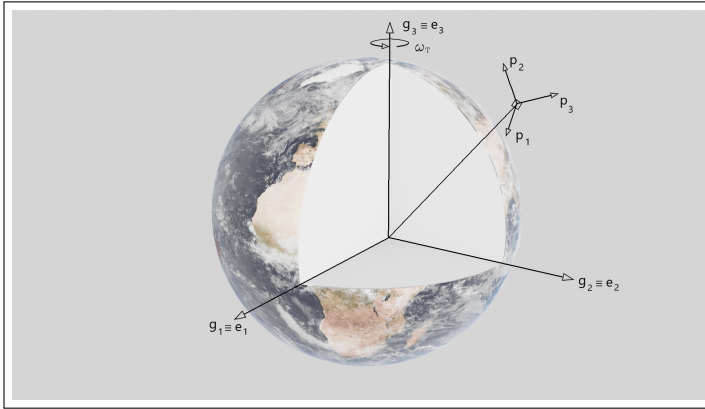


Figura 4.5: Sistemas de referencia tras as hipóteses tomadas.

4. A masa e dimensións do satélite son extremadamente pequenas en comparación coas da Terra, polo que suporemos que a rotación da Terra non é afectada polo satélite e é perfectamente coñecida.

Poderíamos reunir todas estas hipóteses nunha única figura como a 4.5.

Coa última restrición o problema ten nove graos de liberdade e a enerxía cinética vén dada unicamente por tres termos

$$T = \frac{1}{2}m_T\dot{\mathbf{r}}_T^2 + \frac{1}{2}m_s\dot{\mathbf{r}}_s^2 + T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}), \quad (4.42)$$

onde  $\mathbf{r}_T, \mathbf{r}_s$  son os vectores de posición, respectivos, dos centros de masas da Terra e o satélite; e  $(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  as variables de Euler do movemento de rotación do satélite e as súas derivadas.

A continuación describimos o proceso completo de formulación do problema rototranslatorio do satélite dende o problema de dous sólidos. Para iso suporemos que sobre o sistema actúa un potencial  $V_{sp}(\|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_T\|, \boldsymbol{\epsilon})$  que depende da distancia relativa entre os centros de masas dos sólidos e as variables de Euler da rotación do satélite.

Con esta enerxía cinética e potencial podemos reescribir a lagranxiana do sistema como



$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_T, \dot{\mathbf{r}}_s, \dot{\mathbf{r}}_T, \boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = T_r(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_T, \dot{\mathbf{r}}_s, \dot{\mathbf{r}}_T, \boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - V_{sp}(\|\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_s\|, \boldsymbol{\epsilon}). \quad (4.43)$$

Se facemos o cambio de variables definido por

$$\left. \begin{aligned} M \mathbf{r}_c &= m_T \mathbf{r}_T + m_s \mathbf{r}_s \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_T - \mathbf{r}_s \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \mathbf{r}_T &= \mathbf{r}_c - \frac{m_s}{m_s + m_T} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_s &= \mathbf{r}_c + \frac{m_T}{m_s + m_T} \mathbf{r}, \end{aligned} \right. \quad (4.44)$$

onde  $\mathbf{r}_c$  representa o centro de masas dos dous corpos,  $\mathbf{r}$  a posición relativa respecto a dous puntos calquera  $P_2$  e  $P_1$ , onde  $M$  é a masa total do sistema ( $M = m_s + m_T$ ).

Nestas variables a lagranxiana pódese pór como

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_c, \dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_c^2 + \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - V_{sp}(\|\mathbf{r}\|, \boldsymbol{\epsilon}), \quad (4.45)$$

sendo  $m$  a masa reducida

$$m = \frac{m_s m_T}{m_s + m_T}. \quad (4.46)$$

Con isto poderemos definir os momentos conxugados de tal xeito que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_c &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_c} = M \dot{\mathbf{r}}_c, \\ \mathbf{p}_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m \dot{\mathbf{r}}, \\ \mathbf{p}_\epsilon &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} = \frac{\partial T_r}{\partial \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde a terceira expresión conduce á dos momentos canónicos de Euler vistas no apartado 4.2.4, concretamente en (4.23).

Deste xeito o hamiltoniano do problema poderase pór como

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}_c, \mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_c, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_\epsilon) = \frac{1}{2M} \mathbf{p}_c^2 + \frac{1}{2m} \mathbf{p}_x^2 + T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_\epsilon) + V_{sp}, \quad (4.48)$$

onde  $T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_\epsilon)$  vén dado pola expresión (4.26).

Por outra banda, as ecuacións de Hamilton (lembrems (1.17)) correspondentes ás variables  $\mathbf{r}_c$  e  $\mathbf{p}_c$  son

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_c &= -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{r}_c} = 0 && \Rightarrow \mathbf{p}_c = \text{constante}, \\ \dot{\mathbf{r}}_c &= \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathbf{p}_c} = \frac{\mathbf{p}_c}{M} && \Rightarrow \mathbf{r}_c = \mathbf{a}t + \mathbf{b}.\end{aligned}\tag{4.49}$$

que representan un movemento uniforme do centro de masas.

O primeiro termo da ecuación (4.48) poderemos eliminalo debido a que  $\mathbf{p}_c$  é constante. Desta forma redúcese o sistema a outro de seis graos de liberdade, que estuda unicamente o movemento relativo do satélite respecto á Terra xunto coa rotación do satélite artificial. É dicir, o novo hamiltoniano será

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_\epsilon) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}_x^2 + T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_\epsilon) + V_{sp}.\tag{4.50}$$

Neste punto faremos unha transformación canónica que manteña as variables e multiplique os momentos por  $1/m$  co fin de simplificar a expresión anterior eliminando o coeficiente  $1/(2m)$  do primeiro termo. Así, se introducimos como novos momentos

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \frac{\mathbf{p}_x}{m}, \\ \boldsymbol{\mathcal{E}} &= (\Psi, \Theta, \Phi) = \frac{\mathbf{p}_\epsilon}{m},\end{aligned}\tag{4.51}$$

a transformación entre  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_\epsilon)$  e  $(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$  é canónica de multiplicador  $1/m$  e transforma o hamiltoniano (4.50) noutro  $\mathcal{H}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \mathcal{K}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, m\mathbf{R}, m\boldsymbol{\mathcal{E}})/m$  que desenvolvido será

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}^2 + T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) + \frac{1}{m} V_{sp},\tag{4.52}$$

onde, tendo en conta a expresión (4.26), que  $\mathbf{p}_\epsilon = m\boldsymbol{\mathcal{E}}$  e que  $(I_{s1}, I_{s2}, I_{s3}) = m_s(A_s, B_s, C_s)$ , obteremos

$$\begin{aligned}
 T_r(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = & \frac{1}{2A_s} \left[ \Theta \cos \phi + \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta) \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2B_s} \left[ -\Theta \text{sen } \phi + \frac{\cos \phi}{\text{sen } \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta) \right]^2 + \frac{\Phi^2}{2C_s}.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Na expresión (4.53) fíxose uso da última das hipóteses que vimos anteriormente, onde a masa do satélite é desprezable fronte á da Terra, polo que o factor  $m$  verifica que

$$\frac{m}{m_s} = \frac{m_T}{m_s + m_T} \approx 1, \tag{4.54}$$

e pode ser simplificado da expresión.

Fagamos o mesmo pero en variables de Andoyer. Partiremos entón da expresión (4.50) lembrando que a transformación entre  $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{p}_\epsilon)$  e  $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}_a)$  era completamente canónica de xeito que o hamiltoniano, agora empregando as variables de Andoyer no canto das de Euler, será<sup>5</sup>

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}_x, \boldsymbol{p}_a) = \frac{1}{2m} \boldsymbol{p}_x^2 + T_r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}_a) + V_{sp}. \tag{4.55}$$

Seguindo os pasos anteriores coas variables de Euler, poderemos establecer unha transformación canónica que mantén as variables e multiplica os momentos por  $1/m$  para que desapareza o coeficiente  $1/(2m)$  no primeiro termo do hamiltoniano. Neste caso faremos

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{R} &= \frac{\boldsymbol{p}_x}{m}, \\
 \boldsymbol{\mathcal{A}} &= (L_r, G_r, H_r) = \frac{\boldsymbol{p}_a}{m}.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

De novo, esta transformación canónica é de multiplicador  $1/m$  e transforma o hamiltoniano (4.55) noutro  $\mathcal{H}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{\mathcal{A}}) = \mathcal{K}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}, m\boldsymbol{R}, m\boldsymbol{\mathcal{A}})/m$  que desenvolvido pódese

pór como

<sup>5</sup> A expresión de  $T_r(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p}_a)$  podemos recuperala de (4.40).

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{R}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}^2 + T_r(\mathbf{a}, \mathcal{A}) + \frac{1}{m} V_{sp}, \quad (4.57)$$

onde, tendo en conta (4.40), (4.54), que  $\mathbf{p}_a = m\mathcal{A}$  e que  $(I_{s1}, I_{s2}, I_{s3}) = m_s(A_s, B_s, C_s)$ , obteremos

$$T_r(\mathbf{a}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \left[ (G_r^2 - L_r^2) \left( \frac{\sin^2 l_r}{A_s} + \frac{\cos^2 l_r}{B_s} \right) + \frac{L_r^2}{C_s} \right], \quad (4.58)$$

que pode ser tamén expresada do xeito

$$T_r = \frac{k_1}{2} L_r^2 + \frac{k_2}{2} G_r^2 + \frac{k_3}{2} (G_r^2 - L_r^2) \cos 2l_r, \quad (4.59)$$

onde os coeficientes  $k_1, k_2, k_3$  serán

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{C_s} - \frac{1}{2} \left( \frac{A_s + B_s}{A_s B_s} \right), \\ k_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{A_s + B_s}{A_s B_s} \right), \\ k_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{A_s - B_s}{A_s B_s} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

### 4.3.1. Potencial de atracción entre dous sólidos

No punto anterior supuxemos que sobre o sistema actúa un potencial  $V_{sp}$  que será o de atracción entre dous sólidos, polo tanto é a suma estendida a ambos do que existe entre dous puntos calquera de masas infinitesimais  $dm_i$  e  $dm_k$ . Para poder calculalo faremos uso do mesmo procedemento que en 1.1.4, pero sen ter en conta os pasos intermedios que alí fixemos para evitar duplicidades. Recordemos que nese caso se facía o estudo entre un sólido ríxido e un punto exterior de masa unidade. No escenario no que agora estamos a traballar non podemos desprezar a masa do satélite, pois a súa xeometría inflúe no seu movemento intrínseco de rotación (como xa vimos no apartado anterior onde os momentos de inercia xogan un papel fundamental nas

diferentes ecuacións), por ese motivo a expresión (1.24) terá que reescribirse tendo isto en conta<sup>6</sup>

$$V_{sp} = -\mathcal{G} \int_{m_T} \int_{m_s} \frac{dm_i dm_k}{\Delta}, \quad (4.61)$$

que estará estendida á masa de ambos os dous sólidos.

Ademais será preciso refacer a notación, pois necesitaremos calcular o potencial exercido por dous puntos, un en cada un dos corpos sobre un punto  $P$  calquera<sup>7</sup>. Para iso, chamaremos  $P_i$  a un certo punto que pertence ao satélite e  $P_k$  ao que forma parte da Terra. Os vectores dende o centro de masas de cada corpo ata os puntos  $P_i$  e  $P_k$  serán  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_k$ , respectivamente; e entre eles  $\Delta$ , mentres que o vector dende o centro de masas do corpo ao que pertenza o punto  $P$  ata o dito punto será  $\mathbf{r}'$ . Faremos uso do versor  $\Delta_0 = \mathbf{r}/r$  e denominaremos  $\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_i$  á proxección de  $\mathbf{r}_i$  sobre  $\mathbf{r}$  e  $\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_k$  á de  $\mathbf{r}_k$  sobre  $\mathbf{r}$ . Identificamos tamén os ángulos  $\lambda_i$ ,  $\lambda_k$  e  $\lambda$  de forma gráfica na figura 4.6 do mesmo xeito que as igualdades

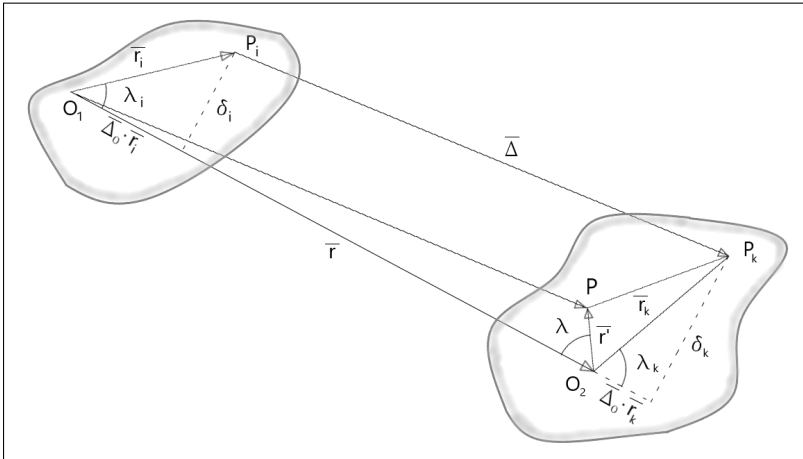


Figura 4.6: Diagrama para o cálculo da enerxía potencial entre a Terra e un satélite.

<sup>6</sup> O dobre subíndice  $sp$  indícanos que estamos calculando o potencial do satélite sobre un planeta calquera, que no noso caso poderemos particularizar á Terra.

<sup>7</sup> O seguinte desenvolvemento está baseado en [Arribas \(1989\)](#).

$$\begin{aligned}
(\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_i)^2 + \delta_i^2 &= r_i^2, \\
(\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_k)^2 + \delta_k^2 &= r_k^2, \\
\Delta_0 \cdot \mathbf{r}' &= -r' \cos \lambda, \\
\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_i &= r_i \cos \lambda_i, \\
\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_k &= r_k \cos \lambda_k,
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Recordemos neste punto a definición dos momentos principais de inercia que leva ás expresións

$$\begin{aligned}
2 \int_{m_s} r_i^2 dm_i &= I_{s1} + I_{s2} + I_{s3}, \\
2 \int_{m_T} r_k^2 dm_k &= I_{T1} + I_{T2} + I_{T3},
\end{aligned} \tag{4.63}$$

onde lembremos que  $I_s, I_T$  son os momentos de inercia do satélite e a Terra respecto do eixe que une o centro de masas do satélite co da Terra. De modo que podemos pór

$$\begin{aligned}
\int_{m_s} \delta_i^2 dm_i &= I_s, \\
\int_{m_T} \delta_k^2 dm_k &= I_T.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Para desenvolver (4.61), como en (1.28), tamén será necesario facer uso dos polinomios de Legendre, é dicir,

$$V_{sp} = -\frac{\mathcal{G}}{r} \int_{m_T} \int_{m_s} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \lambda) \right\} dm_i dm_k, \tag{4.65}$$

de modo que desenvolvendo a expresión orde a orde, os primeiros termos da serie resultan

- Para a orde 0



$$V_{sp}^{(0)} = -\frac{\mathcal{G}}{r} \int_{m_T} \int_{m_s} dm_i dm_k = -\mathcal{G} \frac{m_s m_T}{r}. \tag{4.66}$$

- Para a orde 1

$$\begin{aligned}
 V_{sp}^{(1)} &= -\frac{\mathcal{G}}{r} \int_{m_T} \int_{m_s} \left(\frac{r'}{r}\right)^1 P_1(\cos \lambda) dm_i dm_k = \frac{\mathcal{G}}{r^2} \int_{m_T} \int_{m_s} r' \cos \lambda dm_i dm_k \\
 &= \frac{\mathcal{G}}{r^2} \left( m_s \Delta_0 \int_{m_T} r_k dm_k - m_T \Delta_0 \int_{m_s} r_i dm_i \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.67}$$

- Para a orde 2<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 V_{sp}^{(2)} &= -\frac{\mathcal{G}}{r} \int_{m_T} \int_{m_s} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\cos \lambda) dm_i dm_k \\
 &= -\frac{\mathcal{G}}{2r^3} \int_{m_T} \int_{m_s} r'^2 (3 \cos^2 \lambda - 1) dm_i dm_k \\
 &= -\frac{\mathcal{G}}{2r^3} \int_{m_T} \int_{m_s} [3(\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_k)^2 + 3(\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_i)^2 - 6(\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_k)(\Delta_0 \cdot \mathbf{r}_i)] dm_i dm_k \\
 &\quad + \frac{\mathcal{G}}{2r^3} \int_{m_T} \int_{m_s} [r_k^2 + r_i^2 - 2\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k] dm_i dm_k \\
 &= -\frac{\mathcal{G}}{2r^3} \int_{m_T} \int_{m_s} [2r_k^2 - 3\delta_k^2 + 2r_i^2 - 3\delta_i^2] dm_i dm_k.
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Finalmente utilizando (4.63) e (4.64) poderemos pór o termo xeral na forma

$$V_{sp} = -\mathcal{G} \frac{m_s m_T}{r} - \mathcal{G} \frac{1}{2r^3} \left[ m_T (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3} - 3I_s) + m_s (I_{T1} + I_{T2} + I_{T3} - 3I_T) \right], \tag{4.69}$$

onde, como se dixo antes,  $I_s$  e  $I_T$  representan os momentos de inercia do satélite e a Terra respecto do eixe que une os centros de masas de ambos, é dicir, a dirección radial  $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$  do movemento orbital do satélite respecto da Terra. Recordando a figura 4.4, se este vector se expresa no sistema de eixes principais de inercia do satélite poderemos pólo como  $\mathbf{u} = \alpha_s \mathbf{p}_1 + \beta_s \mathbf{p}_2 + \gamma_s \mathbf{p}_3$  mentres que se se fai no sistema de eixes principais de inercia da Terra, será  $\mathbf{u} = \alpha_T \mathbf{g}_1 + \beta_T \mathbf{g}_2 + \gamma_T \mathbf{g}_3$ . As ternas  $(\alpha_s,$

<sup>8</sup> Aquí empregaremos as igualdades de (4.62).

$\beta_s, \gamma_s$ ) e  $(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$  son as compoñentes do vector  $\mathbf{u}$  nos sistemas respectivos de eixes principais ou, o que é igual, as proxeccións do vector  $\mathbf{u}$  sobre os eixes dos ditos sistemas. Estas proxeccións non son senón os cosenos dos ángulos que forma o dito vector cos eixes, tamén chamados *cosenos directores*.

Mediante os cosenos directores e as expresións dos momentos de inercia do satélite e a Terra respecto do eixe que une o centro de masas de ambos os dous corpos pódese obter a seguinte relación

$$I_k = I_{k1}\alpha_k^2 + I_{k2}\beta_k^2 + I_{k3}\gamma_k^2 \quad \text{con} \quad k = s, T. \quad (4.70)$$

Dado que o vector  $\mathbf{u}$  é unitario poderemos pór  $\beta_k^2 = 1 - \alpha_k^2 - \gamma_k^2$  con  $k = s, T$ ; de xeito que finalmente

$$\begin{aligned} I_{k1} + I_{k2} + I_{k3} - 3I_k &= (I_{k1} - I_{k2})(1 - 3\alpha_k^2) + (I_{k2} - I_{k3})(1 - 3\gamma_k^2) \\ &= m_k(A_k - B_k)(1 - 3\alpha_k^2) + m_k(C_k - B_k)(1 - 3\gamma_k^2), \end{aligned} \quad (4.71)$$

onde se empregou a relación (4.13) para pasar dos momento de inercia aos momentos de inercia por unidade de masa.

Levando isto a (4.69) resulta,

$$\frac{1}{m}V_{sp} = \mathcal{V}_k + \mathcal{V}_s + \mathcal{V}_T, \quad (4.72)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_k &= -\frac{\mu}{r}, \\ \mathcal{V}_s &= -\frac{\mu}{2r^3} [(A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2) + (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2)], \\ \mathcal{V}_T &= -\frac{\mu}{2r^3} (C_T - A_T)(1 - 3\gamma_T^2). \end{aligned} \quad (4.73)$$

sendo  $\mu = \mathcal{G}(m_s + m_T)$ . Como xa vimos anteriormente  $A_T = B_T$ , é por isto que  $\mathcal{V}_T$  ten esa expresión. Fisicamente  $\mathcal{V}_s$  e  $\mathcal{V}_T$  representan a influencia da non esfericidade do sólido, a primeira a do satélite e a segunda a da Terra.

Pódese simplificar a expresión de  $\mathcal{V}_T$  se se ten en conta a relación entre os momentos de inercia e o harmónico  $J_2$  (ver en [Abad \(2012\)](#))

$$J_2 = \frac{1}{2m_T r_T^2} (I_{T1} + I_{T2} - 2I_{T3}) = -\frac{1}{r_T^2} (C_T - A_T), \quad (4.74)$$

pola simetría de revolución.

Debido ao anterior

$$\mathcal{V}_T = \frac{\mu J_2 r_T^2}{2r^3} (1 - 3\gamma_T^2), \quad (4.75)$$

que representa o potencial debido ao aplanamento terrestre. Esta expresión é unha simplificación do  $\mathcal{V}_T$  que se obtivo en 1.1.4, de feito se se segue calculando o potencial ata unha orde calquera nos atoparíamos exactamente con aquela expresión.

No caso do potencial de rotación debido ao satélite quedarémonos unicamente coa orde 2, pois empregar ordes superiores podería diminuír o rendemento dos cálculos, toda vez que a achega, tanto cuantitativa como cualitativa, de termos de maior orde sería ínfima.

### 4.3.2. Expresión das componentes $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ e $(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$ da dirección radial $u$

Para traballar co potencial mutuo é preciso ter a forma explícita das expresións  $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$  e  $(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$  expresadas nas variables axeitadas. Faise necesario polo tanto explicitar as súas expresións en coordenadas cartesianas, en variables de Euler e Andoyer e en función dos elementos orbitais.

#### Expresión do vector $u$ no sistema de referencia espacial e en coordenadas cartesianas

As compoñentes do vector  $u$  no sistema espacial, expresadas en coordenadas cartesianas son

$$\mathbf{u} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Destá forma as compoñentes de  $\mathbf{u}$  son

$$u_1 = \frac{x}{r}, \quad u_2 = \frac{y}{r}, \quad u_3 = \frac{z}{r}. \quad (4.77)$$

### Expresión do vector $\mathbf{u}$ expresado no sistema espacial e en elementos orbitais

Para a expresión de  $\mathbf{u}$  en elementos orbitais e no sistema de referencia espacial temos que efectuar as tres rotacións clásicas para obter efemérides (por analogía o ángulo do nodo,  $\Omega = h$ , a inclinación,  $i$ , e a lonxitude do periastro,  $\omega + f = g + f$ , serán os ángulos de Euler do sistema de referencia orbital). A expresión será

$$\mathbf{u} = R_3^T(h)R_1^T(i)R_3^T(g+f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

De xeito que

$$\begin{aligned} u_1 &= -\operatorname{sen}(g+f)\operatorname{sen}h\cos i + \cos(g+f)\cos h, \\ u_2 &= \operatorname{sen}(g+f)\cos h\cos i + \cos(g+f)\operatorname{sen}h, \\ u_3 &= \operatorname{sen}(g+f)\operatorname{sen}i. \end{aligned} \quad (4.79)$$

### Expresión do vector $(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$ en coordenadas cartesianas

No caso de  $(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$  hai que lembrar que estes se corresponden co vector no sistema de eixes principais de inercia da Terra, que son os mesmos eixes do sistema ecuatorial xirados un ángulo  $(\omega_T t)$ , sendo  $\omega_T$  a velocidade angular de rotación da Terra. De feito o vector  $r(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$  coincide co  $(x_r, y_r, z_r)$  usado na expresión (3.30) e polo tanto

$$\begin{pmatrix} \alpha_T \\ \beta_T \\ \gamma_T \end{pmatrix} = R_3(\omega_T t) \mathbf{u} = \frac{1}{r} \left[ R_3(\omega_T t) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]. \quad (4.80)$$

Se se considera o modelo simétrico,  $A_T = B_T$ , e se leva á expresión (4.73) unicamente necesitaremos  $\gamma_T$ , polo tanto desenvolvendo teremos

$$\gamma_T = \frac{z}{r}. \quad (4.81)$$

### Expresión do vector $(\alpha_T, \beta_T, \gamma_T)$ en elementos orbitais

Substituíndo (4.78) en (4.80) obtense

$$\begin{pmatrix} \alpha_T \\ \beta_T \\ \gamma_T \end{pmatrix} = R_3(\omega_T t) R_3^T(h) R_1^T(i) R_3^T(g+f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$


Polo tanto

$$\gamma_T = \text{sen } i \text{ sen } (g+f). \quad (4.83)$$

Neste caso poderíase simplificar a expresión, xa que polas propiedades das matrices de rotación  $R_3(\omega_T t) R_3^T(h) = R_3(\omega_T t - h)$ , aínda que a expresión de  $\gamma_T$  non se vería afectada pois non depende das ditas variables.

### Expresión do vector $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ en coordenadas cartesianas e variables de Euler

Axudándonos da figura 4.2 e seguindo as tres rotacións na orde axeitada, temos



$$\begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \left[ R_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right], \quad (4.84)$$

de xeito que<sup>9</sup>

$$\begin{aligned}\alpha_s &= -\frac{x}{r}(\text{sen } \phi \text{ sen } \psi \cos \theta - \cos \phi \cos \psi) + \frac{y}{r}(\text{sen } \phi \cos \theta \cos \psi + \text{sen } \psi \cos \phi) + \frac{z}{r} \text{sen } \phi \text{ sen } \theta, \\ \gamma_s &= \frac{x}{r} \text{sen } \theta \text{ sen } \psi - \frac{y}{r} \text{sen } \theta \cos \psi + \frac{z}{r} \cos \theta.\end{aligned}\tag{4.85}$$

### Expresión do vector $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$ en coordenadas cartesianas e variables de Andoyer

Calculando agora  $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$  no sistema de eixes principais do satélite apoiándonos neste caso da figura 4.3 obtense

$$\begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \left[ R_3(l_r) R_1(\sigma) R_3(g_r) R_1(\epsilon) R_3(h_r) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]. \tag{4.86}$$

E deste xeito

$$\begin{aligned}\alpha_s &= -\frac{x}{r} \left\{ [(\cos l_r \text{ sen } g_r + \text{sen } l_r \cos \sigma \cos g_r) \cos \epsilon - \text{sen } l_r \text{ sen } \sigma \text{ sen } \epsilon] \text{ sen } h_r \right. \\ &\quad \left. + (\text{sen } l_r \cos \sigma \text{ sen } g_r - \cos l_r \cos g_r) \cos h_r \right\} \\ &\quad - \frac{y}{r} \left\{ [(\cos l_r \text{ sen } g_r + \text{sen } l_r \cos \sigma \cos g_r) \cos \epsilon - \text{sen } l_r \text{ sen } \sigma \text{ sen } \epsilon] \cos h_r \right. \\ &\quad \left. - (\text{sen } l_r \cos \sigma \text{ sen } g_r - \cos l_r \cos g_r) \text{ sen } h_r \right\} \\ &\quad + \frac{z}{r} [(\cos l_r \text{ sen } g_r + \text{sen } l_r \cos \sigma \cos g_r) \text{ sen } \epsilon + \text{sen } l_r \text{ sen } \sigma \cos \epsilon], \\ \gamma_s &= \frac{x}{r} [(\cos \sigma \text{ sen } \epsilon + \text{sen } \sigma \cos g_r \cos \epsilon) \text{ sen } h_r + \text{sen } \sigma \text{ sen } g_r \cos h_r] \\ &\quad + \frac{y}{r} [(\cos \sigma \text{ sen } \epsilon + \text{sen } \sigma \cos g_r \cos \epsilon) \cos h_r - \text{sen } \sigma \text{ sen } g_r \text{ sen } h_r] \\ &\quad - \frac{z}{r} (\text{sen } \sigma \cos g_r \text{ sen } \epsilon - \cos \sigma \cos \epsilon).\end{aligned}\tag{4.87}$$

<sup>9</sup> Nas expresións que seguon non reflectiremos  $\beta_s$ , pois como se pode apreciar en (4.73) unicamente faremos uso de  $\alpha_s$  e  $\gamma_s$ .

**Expresión do vector  $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$  en coordenadas cartesianas e elementos orbitais**

Nesta ocasión substituíndo por (4.78) en (4.86) podemos deducir os valores de  $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$  en termos de elementos orbitais

$$\begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \\ \gamma_s \end{pmatrix} = R_3(l_r)R_1(\sigma)R_3(g_r)R_1(\epsilon)R_3(h_r)R_3^T(h)R_1^T(i)R_3^T(g+f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Ao igual que en (4.83) tamén poderemos empregar a propiedade das matrices elementais de rotación que nos permite reescribir a expresión anterior mediante  $R_3(h_r)R_3^T(h) = R_3(h_r - h)$ , aínda que a diferenza de alí neste caso si que se simplifican as expresións.

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \left\{ [\lambda_1 \cos(h_r - h) - \lambda_2 \sin(h_r - h)] \cos i + \lambda_3 \sin i \right\} \sin(g+f) \\ &\quad - [\lambda_1 \sin(h_r - h) + \lambda_2 \cos(h_r - h)] \cos(g+f), \\ \gamma_s &= - \left\{ [\lambda_4 \cos(h_r - h) - \lambda_5 \sin(h_r - h)] \cos i + \lambda_6 \sin i \right\} \sin(g+f) \\ &\quad + [\lambda_4 \sin(h_r - h) + \lambda_5 \cos(h_r - h)] \cos(g+f), \end{aligned} \quad (4.89)$$

onde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (\cos l_r \sin g_r + \sin l_r \cos \sigma \cos g_r) \cos \epsilon - \sin l_r \sin \sigma \sin \epsilon, \\ \lambda_2 &= \sin l_r \cos \sigma \sin g_r - \cos l_r \cos g_r, \\ \lambda_3 &= (\cos l_r \sin g_r + \sin l_r \cos \sigma \cos g_r) \sin \epsilon + \sin l_r \sin \sigma \cos \epsilon, \\ \lambda_4 &= \cos \sigma \sin \epsilon + \sin \sigma \cos g_r \cos \epsilon, \\ \lambda_5 &= \sin \sigma \sin g_r, \\ \lambda_6 &= \sin \sigma \cos g_r \sin \epsilon - \cos \sigma \cos \epsilon. \end{aligned} \quad (4.90)$$

**4.3.3. Hamiltoniano do problema**

Reunindo todas as expresións de (4.73) poderemos pór o hamiltoniano como



$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_k + \mathcal{H}_r + \mathcal{H}_p, \quad (4.91)$$

onde  $\mathcal{H}_k$  representa o hamiltoniano kepleriano, suma da enerxía cinética de translación  $\dot{\mathbf{r}}^2/2$  máis o termo de orde 0 do potencial mutuo  $\mathcal{V}_k = -\mu/r$ ;  $\mathcal{H}_r$  é o hamiltoniano correspondente á rotación (que poderá expresarse en variables de Euler ou de Andoyer) e  $\mathcal{H}_P$  o da perturbación.

### Hamiltoniano do problema en variables canónicas de Euler

Neste caso teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, z, \psi, \theta, \phi, X, Y, Z, \Psi, \Theta, \Phi) = & \mathcal{H}_k(x, y, z, X, Y, Z) + \\ & \mathcal{H}_r(\psi, \theta, \phi, \Psi, \Theta, \Phi) + \\ & \mathcal{H}_p(x, y, z, \psi, \theta, \phi), \end{aligned} \quad (4.92)$$

onde<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}, \\ \mathcal{H}_r &= \frac{1}{2A_s} \left[ \Theta \cos \phi + \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta) \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2B_s} \left[ -\Theta \text{sen } \phi + \frac{\cos \phi}{\text{sen } \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta) \right]^2 + \frac{\Phi^2}{2C_s}, \\ \mathcal{H}_p &= \mathcal{V}_s + \mathcal{V}_T = \\ &- \frac{\mu}{2r^3} [(A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2) + (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2)] \\ &+ \mathcal{V}_T + \dots \end{aligned} \quad (4.93)$$

onde  $(\alpha_s, \gamma_s)$  se obterán a partir de (4.84).

Como casos particulares pódense considerar os seguintes: que a Terra é un punto, e polo tanto  $\mathcal{V}_T = 0$ ; ou que a Terra é un elipsoide de revolución, co cal teremos para a parte orbital a formulación do *Problema Principal*, sendo  $\mathcal{V}_T$  igual á expresión que vimos en (4.75).

<sup>10</sup> A partir de aquí o termo  $\mathcal{V}_T$  de  $\mathcal{H}_T$  representará a perturbación gravitacional debida á Terra e poderase pór como a expresión (1.48). Por outra banda, os puntos suspensivos ao final da expresión de  $\mathcal{H}_P$  indican que se poderá engadir calquera das forzas que afectan sobre o satélite artificial de entre as descritas en capítulos anteriores.

Para expresar o hamiltoniano kepleriano  $\mathcal{H}_k$  podemos empregar tanto as coordenadas cartesianas,  $\frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \mu(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ , como as variables de Delaunay,  $-\frac{\mu^2}{2L^2}$ , ou as coordenadas polares-nodais,  $\frac{1}{2}\left(R^2 + \frac{U^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r}$ , tal e como vimos en (1.16), (1.21) e (1.22) respectivamente.

### Hamiltoniano do problema en variables canónicas de Andoyer: dous modelos de rotación do satélite

Observando o valor do coeficiente  $k_3$  dado na expresión (4.60) este faise pequeno cando o satélite é cuasisimétrico,  $A_s \approx B_s$ , e cero cando é simétrico,  $A_s = B_s$ , o que permite separar o terceiro sumando da enerxía cinética de rotación,  $T_r$ , dada en (4.59), e tomalo como unha pequena perturbación. Distinguiremos, por iso, eses dous casos

#### ■ Caso cuasisimétrico

Onde o hamiltoniano será función das seguintes variables

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, z, l_r, g_r, h_r, X, Y, Z, L_r, G_r, H_r) = & \mathcal{H}_k(x, y, z, X, Y, Z) + \\ & \mathcal{H}_r(-, -, -, L_r, G_r, -) + \\ & \mathcal{H}_p(x, y, z, l_r, g_r, h_r, L_r, G_r, H_r), \end{aligned} \quad (4.94)$$

de tal xeito que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}, \\ \mathcal{H}_r &= \frac{k_1}{2}L_r^2 + \frac{k_2}{2}G_r^2, \\ \mathcal{H}_p &= \mathcal{V}_r + \mathcal{V}_s + \mathcal{V}_T = \\ &= \frac{k_3}{2}(G_r^2 - L_r^2)\cos 2l_r \\ &\quad - \frac{\mu}{2r^3}[(A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2) + (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2)] \\ &\quad + \mathcal{V}_T + \dots \end{aligned} \quad (4.95)$$

#### ■ Caso triaxial

Onde o hamiltoniano troca con respecto ao anterior caso no segundo dos seus sumandos,  $\mathcal{H}_r$ , de xeito que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, y, z, l_r, g_r, h_r, X, Y, Z, L_r, G_r, H_r) = & \mathcal{H}_k(x, y, z, X, Y, Z) + \\ & \mathcal{H}_r(l_r, -, -, L_r, G_r, -) + \\ & \mathcal{H}_p(x, y, z, l_r, g_r, h_r, L_r, G_r, H_r), \end{aligned} \quad (4.96)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}, \\ \mathcal{H}_r &= \frac{k_1}{2} L_r^2 + \frac{k_2}{2} G_r^2 + \frac{k_3}{2} (G_r^2 - L_r^2) \cos 2l_r, \\ \mathcal{H}_p &= \mathcal{V}_s + \mathcal{V}_T = \\ &= -\frac{\mu}{2r^3} [(A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2) + (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2)] \\ &\quad + \mathcal{V}_T + \dots \end{aligned} \quad (4.97)$$

Os puntos suspensivos ao final de cada termo  $\mathcal{H}_p$  indican que é posible engadir máis elementos a  $\mathcal{V}_T$ , pois lembremos que tomamos unha simplificación do mesmo (ver en (4.75)).

#### 4.4. Extensión das ecuacións de Lagrange ao movemento rototranslatorio do satélite

Do mesmo xeito que establecemos no Capítulo 1 as ecuacións de Lagrange para un problema de dous corpos perturbado, estas pódense xeneralizar para o movemento rototranslatorio. Para iso, pasaremos dun sistema de seis ecuacións diferenciais de orde 1 a outro sistema de doce ecuacións diferenciais de orde 1.

No primeiro caso, no que unicamente se tiña en conta o movemento orbital, obtíñase o sistema de seis ecuacións a partir das ecuacións de Hamilton do problema en variables de Delaunay (1.105) e as relacións diferenciais existentes entre estas e os elementos orbitais (ver en 1.1.5), de xeito que obtiñamos a expresión da variación con respecto ao tempo dos elementos orbitais (1.108).

No caso rototranslacional poderemos separalo en dúas partes: unha parte orbital que se describirá tamén por medio dos elementos orbitais; e a parte rotacional, que se fará mediante uns novos elementos, que se definirán axeitadamente e chamaremos

rotacionais, e que xogarán un papel semellante aos elementos orbitais. A parte correspondente á variación dos elementos rotacionais obterase a partir das ecuacións de Hamilton escritas nas variables de Andoyer e a súa relación diferencial cos elementos rotacionais.

En ambos os dous casos a perturbación estará formulada polo hamiltoniano perturbado,  $\mathcal{H}_P$ , que depende tanto de variables orbitais como rotacionais, polo que as doce ecuacións obtidas non serán independentes e polo tanto haberá que integralas de xeito conxunto.

Comezaremos definindo os *elementos rotacionais* aos que denotaremos do xeito  $(e_r, a_r, i_r, \Omega_r, \omega_r, M_r)$ , de forma que

- $M_r$  será igual a  $l_r$ .
- $\Omega_r, \omega_r$  corresponden, respectivamente, ás variables  $h_r, g_r$ .
- Como podemos comprobar na figura 4.3,  $\epsilon$  é a inclinación do plano de Andoyer, polo tanto  $i_r = \epsilon$ .
- A excentricidade  $e$  aparece na expresión  $\sqrt{1-e^2}$  a partir do cociente de dous momentos. No movemento elíptico, que é o tratado polas ecuacións planetarias de Lagrange, tanto  $e$  como  $\sqrt{1-e^2}$  son cantidades comprendidas entre 0 e 1, polo que poden ser representadas polo seno e o coseno dun ángulo. No caso rotacional usaremos o ángulo  $\sigma$  para introducir unha variable similar á excentricidade (aínda que sen o seu significado xeométrico) que chamaremos  $e_r = \cos \sigma$ .
- Finalmente hai que introducir a variable  $a_r$ , que deberá ter dimensións de lonxitude. Como  $L_r$  representa o momento angular por unidade de masa, ten como ecuación dimensional  $[L^2T^{-1}]$ . Para pasalo a dimensións  $[L^2]$  basta multiplicar por unha cantidade con dimensións de tempo, por exemplo unha frecuencia constante  $n_0$  que poderá ser a inversa dunha velocidade angular constante ( $\omega_0$ ). Deste xeito  $\sqrt{n_0 L_r}$  ten dimensións de lonxitude polo que igualaremos a  $a_r$ .



É dicir, que os elementos rotacionais que vimos de definir serán

$$\begin{aligned}
 e_r &= \cos \sigma, & \Omega_r &= h_r, \\
 a_r &= \sqrt{n_0 L_r}, & \omega_r &= g_r, \\
 i_r &= \epsilon, & M_r &= l_r.
 \end{aligned}
 \tag{4.98}$$

Nas seguintes liñas expresaremos as ecuacións de Lagrange do movemento roto-translatorio do satélite artificial calculando por separado as variacións dos elementos orbitais e as variacións dos elementos rotacionais. Para iso basta observar as expresións (4.95) e (4.97) xunto coas de  $(\alpha_s, \beta_s, \gamma_s)$  vistas en 4.3.2 para comprobar que  $\mathcal{H}_P$  depende explicitamente de  $(r, f, g, h, i, l_r, h_r, L_r, \epsilon, \sigma)$ , onde as variables  $(r, f, g, h, i)$  se corresponden coa parte orbital e as seguintes  $(l_r, h_r, L_r, \epsilon, \sigma)$  coa parte rotacional. Á súa vez as expresións de  $\mathcal{A}$ , (4.56), permitirannos reescribir estas últimas en termos das variables de Andoyer  $(l_r, g_r, h_r, L_r, G_r, H_r)$ .

#### 4.4.1. Variación dos elementos orbitais

Para a parte orbital obteremos as ecuacións de Lagrange empregando as ecuacións de Hamilton (1.105) e así deducir as expresións necesarias do sistema de ecuacións (1.104). Para iso calcularemos as derivadas de  $\mathcal{H}_P$  con respecto ás variables  $(r, f, g, h, i)$ . Para calcular as derivadas destas variables con respecto ás de Delaunay  $(l, g, h, L, G, H)$  cómpre empregar a regra da cadea (agás para  $g$  e  $h$ , obviamente)

$$\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \delta} = \sum_{j=r, f, i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial j} \frac{\partial j}{\partial \delta},
 \tag{4.99}$$

onde  $\delta$  é calquera das variables de Delaunay. Así as cousas, debemos ter en conta as seguintes expresións

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial l} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial l}, & \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial L} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial L} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial L}, \\
 \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} & & \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial G} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial G} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial G}, \\
 \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h} & & \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial H} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial H} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \frac{\partial i}{\partial H},
 \end{aligned}
 \tag{4.100}$$

Mediante as tres primeiras igualdades de (1.104), resultan

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{G^2}{eL^3} \frac{dL}{dt} - \frac{G}{eL^2} \frac{dG}{dt}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2L}{\mu} \frac{dL}{dt}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{G \sin i} \frac{dG}{dt} - \frac{1}{G \sin i} \frac{dH}{dt}.\end{aligned}\tag{4.101}$$

Derivando agora con respecto ao tempo a ecuación de Kepler (1.6) e empregando a ecuación (1.10) teremos

$$\frac{dE}{dt} = \frac{a}{r} \sin E \frac{de}{dt} + \frac{a}{r} \frac{dl}{dt},\tag{4.102}$$

e facendo o propio con (1.10), substituíndo  $\frac{dE}{dt}$  e tendo en conta a expresión de  $\cos f$  de (1.9) chégase a

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{a} \frac{da}{dt} - a \cos f \frac{de}{dt} + \frac{a e \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dl}{dt}.\tag{4.103}$$

Operando do mesmo xeito, diferenciando  $\cos f$  en (1.9) e substituíndo  $dE$  por (4.102), deducimos a derivada de  $\frac{df}{dt}$

$$\frac{df}{dt} = \frac{(2 + e \cos f) \sin f}{1 - e^2} \frac{de}{dt} + \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{r^2} \frac{dl}{dt}.\tag{4.104}$$

Finalmente substituíndo as expresións de  $\frac{de}{dt}$  e  $\frac{da}{dt}$  de (4.101) en (4.103) e (4.104) obtemos  $\frac{dr}{dt}$  e  $\frac{df}{dt}$  en función das derivadas con respecto ao tempo das variables de Delaunay

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{a e \sin f}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dl}{dt} + \left( \frac{r 2L}{a \mu} - a \cos f \frac{G^2}{eL^3} \right) \frac{dL}{dt} + a \cos f \frac{G}{eL^2} \frac{dG}{dt}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{r^2} \frac{dl}{dt} + \frac{(2 + e \cos f) \sin f}{1 - e^2} \frac{G^2}{eL^3} \frac{dL}{dt} - \frac{(2 + e \cos f) \sin f}{1 - e^2} \frac{G}{eL^2} \frac{dG}{dt}.\end{aligned}\tag{4.105}$$

Notemos que ao verificarse,

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial r}{\partial l} \frac{dl}{dt} + \frac{\partial r}{\partial L} \frac{dL}{dt} + \frac{\partial r}{\partial G} \frac{dG}{dt}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial l} \frac{dl}{dt} + \frac{\partial f}{\partial L} \frac{dL}{dt} + \frac{\partial f}{\partial G} \frac{dG}{dt},\end{aligned}\tag{4.106}$$

identificando (4.105) e (4.106), dedúcense as igualdades

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial l} &= \frac{a e \operatorname{sen} f}{\sqrt{1-e^2}}, & \frac{\partial f}{\partial l} &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}, & \frac{\partial i}{\partial G} &= \frac{\cos i}{G \operatorname{sen} i}, \\ \frac{\partial r}{\partial L} &= \frac{r}{a} \frac{2L}{\mu} - a \cos f \frac{G^2}{eL^3}, & \frac{\partial f}{\partial L} &= \frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{G^2}{eL^3}, & \frac{\partial i}{\partial H} &= -\frac{1}{G \operatorname{sen} i}, \\ \frac{\partial r}{\partial G} &= a \cos f \frac{G}{eL^2}, & \frac{\partial f}{\partial G} &= -\frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{G}{eL^2},\end{aligned}\tag{4.107}$$

as cales substituídas en (4.100) permítennos escribir este sistema no xeito,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l} &= \frac{a e \operatorname{sen} f}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L} &= \left( \frac{r}{a} \frac{2L}{\mu} - a \cos f \frac{G^2}{eL^3} \right) \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{G^2}{eL^3} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G} &= a \cos f \frac{G}{eL^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} - \frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{G}{eL^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} + \frac{\cos i}{G \operatorname{sen} i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H} &= -\frac{1}{G \operatorname{sen} i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}.\end{aligned}\tag{4.108}$$

Nestas condicións, as ecuacións hamiltonianas (1.106), adoptan a forma

$$\begin{aligned}
 \frac{dl}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} + \left( \frac{r}{a} \frac{2L}{\mu} - a \cos f \frac{G^2}{eL^3} \right) \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{(2 + e \cos f) \operatorname{sen} f}{1 - e^2} \frac{G^2}{eL^3} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}, \\
 \frac{dg}{dt} &= a \cos f \frac{G}{eL^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} - \frac{(2 + e \cos f) \operatorname{sen} f}{1 - e^2} \frac{G}{eL^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} + \frac{\cos i}{G \operatorname{sen} i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}, \\
 \frac{dh}{dt} &= - \frac{1}{G \operatorname{sen} i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}, \\
 \frac{dL}{dt} &= - \frac{a e \operatorname{sen} f}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} - \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}, \\
 \frac{dG}{dt} &= - \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g}, \\
 \frac{dH}{dt} &= - \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h}.
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

Finalmente, só teremos que aplicar estas relacións en (1.104), para obter as ecuacións de Lagrange, as cales hamos proporcionar as variacións dos elementos orbitais en función de  $\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h}$  e  $\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= - \frac{2}{\sqrt{\mu(1 - e^2)}} \left( e \operatorname{sen} f \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{a(1 - e^2)}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} \right), \\
 \frac{de}{dt} &= - \frac{1 - e^2}{e\sqrt{\mu a}} \left( \frac{a e \operatorname{sen} f}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{a^2 \sqrt{1 - e^2}}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} - \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} \right), \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)} \operatorname{sen} i} \left( -\cos i \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h} \right), \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= - \frac{1}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)} \operatorname{sen} i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e\sqrt{\mu a}} \left( a \cos f \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} - \frac{(2 + e \cos f) \operatorname{sen} f}{1 - e^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} + \frac{e}{(1 - e^2) \tan i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \right), \\
 \frac{dM}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} + \left( \frac{r}{a} \frac{2L}{\mu} - a \cos f \frac{G^2}{eL^3} \right) \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{(2 + e \cos f) \operatorname{sen} f}{1 - e^2} \frac{G^2}{eL^3} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}.
 \end{aligned} \tag{4.110}$$

#### 4.4.2. Variación dos elementos rotacionais

Operando de xeito semellante a como acabamos de proceder, pero agora usando as ecuacións de Hamilton correspondentes ás variables de Andoyer, podemos ver que a partir de (4.98) obtemos

$$d\Omega_r = dh_r, \quad d\omega_r = dg_r, \quad dM_r = dl_r, \quad (4.111)$$

e diferenciando teremos tamén

$$\begin{aligned} de_r &= \frac{1}{G_r} dL_r - \frac{e_r}{G_r} dG_r, \\ da_r &= \frac{n_0}{2a_r} dL_r, \\ d\epsilon &= di_r = \frac{\cos \epsilon}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} dH_r - \frac{1}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} dG_r, \\ d\sigma &= \frac{1}{G_r \sqrt{1-e_r}} dL_r - \frac{e_r}{G_r \sqrt{1-e_r}} dG_r. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Derivando con respecto ao tempo temos

$$\begin{aligned} \frac{de_r}{dt} &= \frac{1}{G_r} \frac{dL_r}{dt} - \frac{e_r}{G_r} \frac{dG_r}{dt}, & \frac{d\Omega_r}{dt} &= \frac{dh_r}{dt}, \\ \frac{da_r}{dt} &= \frac{n_0}{2a_r} \frac{dL_r}{dt}, & \frac{d\omega_r}{dt} &= \frac{dg_r}{dt}, \\ \frac{di_r}{dt} &= \frac{\cos \epsilon}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{dH_r}{dt} - \frac{1}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{dG_r}{dt}, & \frac{dM_r}{dt} &= \frac{dl_r}{dt}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Para expresar as derivadas de  $\mathcal{H}_P$  respecto das variables das que depende explicitamente empregaremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial L_r}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G_r} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial G_r} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial G_r}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H_r} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial H_r}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

onde o primeiro sumando de  $(\partial \mathcal{H}_P / \partial L_r)$  representa a derivada explícita de  $\mathcal{H}_P$  respecto de  $L_r$  xa que  $\mathcal{H}_P$  depende de  $L_r$  (explícita e implicitamente a través de  $\sigma$ ).

Neste punto teremos que diferenciar entre os dous casos que vimos anteriormente, o caso dun satélite cuasisimétrico e o caso do satélite triaxial, de xeito que teremos dúas series de ecuacións de Lagrange, unha por cada caso.

### Satélite cuasisimétrico

Neste caso tendo en conta (4.93), as ecuacións de Hamilton da parte rotacional serán

$$\begin{aligned}
 \frac{dl_r}{dt} &= k_1 L_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r}, & \frac{dL_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r}, \\
 \frac{dg_r}{dt} &= k_2 G_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G_r}, & \frac{dG_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{dh_r}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H_r}, & \frac{dH_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h_r}.
 \end{aligned} \tag{4.115}$$

Despois de substituír os valores das expresións en (4.114) en (4.115) e levalas a (4.113) obtense a variación dos elementos rotacionais

$$\begin{aligned}
 \frac{de_r}{dt} &= -\frac{1}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r} + \frac{e_r}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{da_r}{dt} &= -\frac{n_0}{2a_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r}, \\
 \frac{di_r}{dt} &= -\frac{\cos \epsilon}{G_r \sin \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h_r} + \frac{1}{G_r \sin \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{d\Omega_r}{dt} &= \frac{1}{G_r \sin \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \epsilon}, \\
 \frac{d\omega_r}{dt} &= k_2 G_r + \frac{\cos \sigma}{G_r \sin \sigma} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \sigma} + \frac{\cos \epsilon}{G_r \sin \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \epsilon}, \\
 \frac{dM_r}{dt} &= k_1 L_r - \frac{1}{G_r \sin \sigma} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r}.
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

### Satélite triaxial

Neste caso tendo en conta (4.97) as ecuacións de Hamilton da parte rotacional serán



$$\begin{aligned}
 \frac{dl_r}{dt} &= k_1 L_r - k_3 L_r \cos 2l_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r}, & \frac{dL_r}{dt} &= k_3 (G_r^2 - L_r^2) \operatorname{sen} 2l_r - \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r}, \\
 \frac{dg_r}{dt} &= k_2 G_r + k_3 L_r \cos 2l_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G_r}, & \frac{dG_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{dh_r}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H_r}, & \frac{dH_r}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h_r}.
 \end{aligned}
 \tag{4.117}$$

Despois de substituír os valores das expresións en (4.114) en (4.117) e levalas a (4.113) obtense a variación dos elementos rotacionais

$$\begin{aligned}
 \frac{de_r}{dt} &= -\frac{k_3}{G_r} (G_r^2 - L_r^2) \operatorname{sen} 2l_r + \frac{1}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r} + \frac{e_r}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{da_r}{dt} &= -\frac{n_0 k_3}{2a_r} (G_r^2 - L_r^2) \operatorname{sen} 2l_r + \frac{n_0}{2a_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r}, \\
 \frac{di_r}{dt} &= -\frac{\cos \epsilon}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h_r} + \frac{1}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{d\Omega_r}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H_r}, \\
 \frac{d\omega_r}{dt} &= k_2 G_r + k_3 L_r \cos 2l_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G_r}, \\
 \frac{dl_r}{dt} &= k_1 L_r - k_3 L_r \cos 2l_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r}.
 \end{aligned}
 \tag{4.118}$$

#### 4.4.3. Ecuacións de Lagrange do movemento rototranslatorio

Finalmente, reunindo as expresións (4.110) con (4.116) e (4.118) obtense por primeira vez a extensión das ecuacións de Lagrange para os casos vistos con anterioridade

Satélite cuasisimétrico

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} \left( \frac{a e \operatorname{sen} f}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} \right), \\
 \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} \left( e \operatorname{sen} f \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{a(1-e^2)}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} \right), \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)} \operatorname{sen} i} \left( -\cos i \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h} \right), \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)} \operatorname{sen} i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu a}} \left( a \cos f \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} - \frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} + \frac{e}{(1-e^2) \tan i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \right), \\
 \frac{dM}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} + \left( \frac{r}{a} \frac{2L}{\mu} - a \cos f \frac{G^2}{eL^3} \right) \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{G^2}{eL^3} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}, \\
 \frac{de_r}{dt} &= -\frac{1}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r} + \frac{e_r}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{da_r}{dt} &= -\frac{n_0}{2a_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r}, \\
 \frac{di_r}{dt} &= -\frac{\cos \epsilon}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h_r} + \frac{1}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{d\Omega_r}{dt} &= \frac{1}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \epsilon}, \\
 \frac{d\omega_r}{dt} &= k_2 G_r + \frac{\cos \sigma}{G_r \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \sigma} + \frac{\cos \epsilon}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \epsilon}, \\
 \frac{dM_r}{dt} &= k_1 L_r - \frac{1}{G_r \operatorname{sen} \sigma} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial \sigma} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r}.
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

**Satélite triaxial**

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} \left( \frac{a e \operatorname{sen} f}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} \right), \\
 \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} \left( e \operatorname{sen} f \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{a(1-e^2)}{r^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} \right), \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)} \operatorname{sen} i} \left( -\cos i \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g} + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h} \right), \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu a(1-e^2)} \operatorname{sen} i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{\mu a}} \left( a \cos f \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} - \frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f} + \frac{e}{(1-e^2) \tan i} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial i} \right), \\
 \frac{dM}{dt} &= \frac{\mu^2}{L^3} + \left( \frac{r}{a} \frac{2L}{\mu} - a \cos f \frac{G^2}{eL^3} \right) \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial r} + \frac{(2+e \cos f) \operatorname{sen} f}{1-e^2} \frac{G^2}{eL^3} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial f}, \\
 \frac{de_r}{dt} &= -\frac{k_3}{G_r} (G_r^2 - L_r^2) \operatorname{sen} 2l_r + \frac{1}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r} + \frac{e_r}{G_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{da_r}{dt} &= -\frac{n_0 k_3}{2a_r} (G_r^2 - L_r^2) \operatorname{sen} 2l_r + \frac{n_0}{2a_r} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial l_r}, \\
 \frac{di_r}{dt} &= -\frac{\cos \epsilon}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial h_r} + \frac{1}{G_r \operatorname{sen} \epsilon} \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial g_r}, \\
 \frac{d\Omega_r}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial H_r}, \\
 \frac{d\omega_r}{dt} &= k_2 G_r + k_3 L_r \cos 2l_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial G_r}, \\
 \frac{dM_r}{dt} &= k_1 L_r - k_3 L_r \cos 2l_r + \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial L_r}.
 \end{aligned} \tag{4.120}$$

**4.4.4. Derivadas do potencial perturbador para un satélite cuasisimétrico baixo o modelo do Problema Principal**

Para rematar calcularemos as derivadas parciais de  $\mathcal{H}_P$  con respecto a  $(r, f, g, h, i, l_r, g_r, h_r, \epsilon, \sigma)$ . Lembremos que  $i = i(H, G)$ ,  $\epsilon = \epsilon(G_r, H_r)$  e  $\sigma = \sigma(L_r, G_r)$ . Para iso descomporemos en bloques as expresións de  $\mathcal{H}_P$  co fin de poder expresar as súas ecuacións de xeito máis claro. Discriminaremos segundo o caso en función de que

pertenza a el ou non, pois gran parte dos bloques serán comúns para ambos.

Para iso reescribiremos o termo  $\mathcal{H}_P$  de (4.95) empregando a expresión (4.75) de xeito que

$$\mathcal{H}_p = \frac{k_3}{2} (G_r^2 - L_r^2) \cos 2l_r - \frac{\mu}{2r^3} [(A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2) + (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2) + J_2 r_T^2 (1 - 3\gamma_T^2)]. \quad (4.121)$$

Consideremos os seguintes bloques

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{k_3}{2} (G_r^2 - L_r^2) \cos 2l_r, \\ \Gamma_2 &= -\frac{\mu}{2r^3} [\Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5], \\ \Gamma_3 &= (A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2), \\ \Gamma_4 &= (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2), \\ \Gamma_5 &= J_2 r_T^2 (1 - 3\gamma_T^2), \end{aligned} \quad (4.122)$$

que serán función das variables,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_1(l_r, L_r, G_r) \quad , \\ \Gamma_2 &= \Gamma_2(r, \alpha_s, \gamma_s, \gamma_T) \quad , \quad \alpha_s = \alpha_s(f, g, h, i, l_r, g_r, h_r, \epsilon, \sigma), \\ \Gamma_3 &= \Gamma_3(\alpha_s) \quad , \quad \gamma_s = \gamma_s(f, g, h, i, g_r, h_r, \epsilon, \sigma), \\ \Gamma_4 &= \Gamma_4(\gamma_s) \quad , \quad \gamma_T = \gamma_T(f, g, i). \\ \Gamma_5 &= \Gamma_5(\gamma_T) \quad , \end{aligned} \quad (4.123)$$

As derivadas parciais de  $\Gamma_1$  con respecto ás variables das que depende serán

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial l_r} &= -k_3 (G_r^2 - L_r^2) \operatorname{sen} 2l_r, \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial L_r} &= -L_r k_3 (G_r^2 - L_r^2) \cos 2l_r, \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial G_r} &= G_r k_3 (G_r^2 - L_r^2) \cos 2l_r. \end{aligned} \quad (4.124)$$



$\Gamma_2$  é o único bloque que depende de  $r$ , polo tanto

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial r} = \frac{3\mu}{2r^4} [(A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2) + (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2) + J_2 r_T^2 (1 - 3\gamma_T^2)]. \quad (4.125)$$

Para derivar a expresión do interior do corchete de  $\Gamma_2$  en (4.122) podemos calcular por separado as derivadas de cada un dos bloques  $\Gamma_3$ ,  $\Gamma_4$  e  $\Gamma_5$ . Como  $\Gamma_3$  depende de  $(f, g, h, i, l_r, g_r, h_r, \epsilon, \sigma)$  e  $\Gamma_4$  de  $(f, g, h, i, g_r, h_r, \epsilon, \sigma)$  podemos expresalo como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \delta} &= -6(B_s - A_s)\alpha_s \frac{\partial \alpha_s}{\partial \delta} && \text{sendo } \delta = f, g, h, i, l_r, g_r, h_r, \epsilon, \sigma, \\ \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \delta} &= -6(C_s - B_s)\gamma_s \frac{\partial \gamma_s}{\partial \delta} && \text{sendo } \delta = f, g, h, i, g_r, h_r, \epsilon, \sigma. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Para calcular  $\frac{\partial \alpha_s}{\partial \delta}$  e  $\frac{\partial \gamma_s}{\partial \delta}$  necesitaremos derivar primeiramente as funcións auxiliares vistas en (4.90) segundo as súas variables ( $\lambda_1 = \lambda_1(l_r, g_r, \epsilon, \sigma)$ ;  $\lambda_2 = \lambda_2(l_r, g_r, \epsilon)$ ;  $\lambda_3 = \lambda_3(l_r, g_r, \epsilon, \sigma)$ ;  $\lambda_4 = \lambda_4(g_r, \epsilon, \sigma)$ ;  $\lambda_5 = \lambda_5(g_r, \sigma)$ ;  $\lambda_6 = \lambda_6(g_r, \epsilon, \sigma)$ ), de tal xeito que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial l_r} &= (-\text{sen } l_r \text{ sen } g_r + \cos l_r \cos \sigma \cos g_r) \cos \epsilon - \cos l_r \text{ sen } \sigma \text{ sen } \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_r} &= (\cos l_r \cos g_r - \text{sen } l_r \cos \sigma \text{ sen } g_r) \cos \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon} &= -(\cos l_r \text{ sen } g_r + \text{sen } l_r \cos \sigma \cos g_r) \text{ sen } \epsilon - \text{sen } l_r \text{ sen } \sigma \cos \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} &= -\text{sen } l_r (\cos \epsilon \cos g_r \text{ sen } \sigma + \text{sen } \epsilon \cos \sigma), \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial l_r} &= \cos l_r \cos \sigma \text{ sen } g_r + \text{sen } l_r \cos g_r, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial g_r} &= \text{sen } l_r \cos \sigma \cos g_r + \cos l_r \text{ sen } g_r, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} &= -\text{sen } l_r \text{ sen } \sigma \text{ sen } g_r, \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial l_r} &= (-\text{sen } l_r \text{ sen } g_r + \cos l_r \cos \sigma \cos g_r) \text{ sen } \epsilon + \cos l_r \text{ sen } \sigma \cos \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial g_r} &= (\cos l_r \cos g_r - \text{sen } l_r \cos \sigma \text{ sen } g_r) \text{ sen } \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \epsilon} &= (\cos l_r \text{ sen } g_r + \text{sen } l_r \cos \sigma \cos g_r) \cos \epsilon - \text{sen } l_r \text{ sen } \sigma \text{ sen } \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \sigma} &= -\text{sen } l_r \text{ sen } \sigma \cos g_r \text{ sen } \epsilon + \text{sen } l_r \cos \sigma \cos \epsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda_4}{\partial g_r} &= -\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} g_r \cos \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \epsilon} &= \cos \sigma \cos \epsilon - \operatorname{sen} \sigma \cos g_r \operatorname{sen} \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \sigma} &= -\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \epsilon + \cos \sigma \cos g_r \cos \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_5}{\partial g_r} &= \operatorname{sen} \sigma \cos g_r, \\ \frac{\partial \lambda_5}{\partial \sigma} &= \cos \sigma \operatorname{sen} g_r, \\ \frac{\partial \lambda_6}{\partial g_r} &= -\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} g_r \operatorname{sen} \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_6}{\partial \epsilon} &= \operatorname{sen} \sigma \cos g_r \cos \epsilon + \cos \sigma \operatorname{sen} \epsilon, \\ \frac{\partial \lambda_6}{\partial \sigma} &= \cos \sigma \cos g_r \operatorname{sen} \epsilon + \operatorname{sen} \sigma \cos \epsilon.\end{aligned}$$

E así desenvolvemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_s}{\partial f} &= \frac{\partial \alpha_s}{\partial g} = \left\{ [\lambda_1 \cos(h_r - h) - \lambda_2 \operatorname{sen}(h_r - h)] \cos i + \lambda_3 \operatorname{sen} i \right\} \cos(g + f) \\ &\quad + [\lambda_1 \operatorname{sen}(h_r - h) + \lambda_2 \cos(h_r - h)] \operatorname{sen}(g + f), \\ \frac{\partial \gamma_s}{\partial f} &= \frac{\partial \gamma_s}{\partial g} = - \left\{ [\lambda_4 \cos(h_r - h) - \lambda_5 \operatorname{sen}(h_r - h)] \cos i + \lambda_6 \operatorname{sen} i \right\} \cos(g + f) \\ &\quad - [\lambda_4 \operatorname{sen}(h_r - h) + \lambda_5 \cos(h_r - h)] \operatorname{sen}(g + f), \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial h} &= [-\lambda_1 \operatorname{sen}(h_r - h) + \lambda_2 \cos(h_r - h)] \cos i \operatorname{sen}(g + f) \\ &\quad - [\lambda_1 \cos(h_r - h) + \lambda_2 \operatorname{sen}(h_r - h)] \cos(g + f), \\ \frac{\partial \gamma_s}{\partial h} &= [\lambda_4 \operatorname{sen}(h_r - h) - \lambda_5 \cos(h_r - h)] \cos i \operatorname{sen}(g + f) \\ &\quad - [\lambda_4 \cos(h_r - h) + \lambda_5 \operatorname{sen}(h_r - h)] \cos(g + f), \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial i} &= - \left\{ [\lambda_1 \cos(h_r - h) - \lambda_2 \operatorname{sen}(h_r - h)] \operatorname{sen} i - \lambda_3 \cos i \right\} \operatorname{sen}(g + f), \\ \frac{\partial \gamma_s}{\partial i} &= \left\{ [\lambda_4 \cos(h_r - h) - \lambda_5 \operatorname{sen}(h_r - h)] \operatorname{sen} i - \lambda_6 \cos i \right\} \operatorname{sen}(g + f), \\ \frac{\partial \alpha_s}{\partial l_r} &= \left\{ \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial l_r} \cos(h_r - h) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial l_r} \operatorname{sen}(h_r - h) \right] \cos i + \frac{\partial \lambda_3}{\partial l_r} \operatorname{sen} i \right\} \operatorname{sen}(g + f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial l_r} \operatorname{sen}(h_r - h) + \frac{\partial \lambda_2}{\partial l_r} \cos(h_r - h) \right] \cos(g + f), \\
\frac{\partial \gamma_s}{\partial l_r} &= 0, \\
\frac{\partial \alpha_s}{\partial g_r} &= \left\{ \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_r} \cos(h_r - h) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial g_r} \operatorname{sen}(h_r - h) \right] \cos i + \frac{\partial \lambda_3}{\partial g_r} \operatorname{sen} i \right\} \operatorname{sen}(g + f) \\
& - \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial g_r} \operatorname{sen}(h_r - h) + \frac{\partial \lambda_2}{\partial g_r} \cos(h_r - h) \right] \cos(g + f), \\
\frac{\partial \gamma_s}{\partial g_r} &= - \left\{ \left[ \frac{\partial \lambda_4}{\partial g_r} \cos(h_r - h) - \frac{\partial \lambda_5}{\partial g_r} \operatorname{sen}(h_r - h) \right] \cos i + \frac{\partial \lambda_6}{\partial g_r} \operatorname{sen} i \right\} \operatorname{sen}(g + f) \\
& + \left[ \frac{\partial \lambda_4}{\partial g_r} \operatorname{sen}(h_r - h) + \frac{\partial \lambda_5}{\partial g_r} \cos(h_r - h) \right] \cos(g + f), \\
\frac{\partial \alpha_s}{\partial h_r} &= - \left[ \lambda_1 \operatorname{sen}(h_r - h) + \lambda_2 \cos(h_r - h) \right] \cos i \operatorname{sen}(g + f) \\
& - \left[ \lambda_1 \cos(h_r - h) - \lambda_2 \operatorname{sen}(h_r - h) \right] \cos(g + f), \\
\frac{\partial \gamma_s}{\partial h_r} &= \left[ \lambda_4 \operatorname{sen}(h_r - h) + \lambda_5 \cos(h_r - h) \right] \cos i \operatorname{sen}(g + f) \\
& + \left[ \lambda_4 \cos(h_r - h) - \lambda_5 \operatorname{sen}(h_r - h) \right] \cos(g + f), \\
\frac{\partial \alpha_s}{\partial \epsilon} &= \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon} \cos(h_r - h) \cos i + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \epsilon} \operatorname{sen} i \right] \operatorname{sen}(g + f) \\
& - \frac{\partial \lambda_1}{\partial \epsilon} \operatorname{sen}(h_r - h) \cos(g + f), \\
\frac{\partial \gamma_s}{\partial \epsilon} &= - \left[ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \epsilon} \cos(h_r - h) \cos i + \frac{\partial \lambda_6}{\partial \epsilon} \operatorname{sen} i \right] \operatorname{sen}(g + f) \\
& + \frac{\partial \lambda_4}{\partial \epsilon} \operatorname{sen}(h_r - h) \cos(g + f), \\
\frac{\partial \alpha_s}{\partial \sigma} &= \left\{ \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} \cos(h_r - h) - \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} \operatorname{sen}(h_r - h) \right] \cos i + \frac{\partial \lambda_3}{\partial \sigma} \operatorname{sen} i \right\} \operatorname{sen}(g + f) \\
& - \left[ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} \operatorname{sen}(h_r - h) + \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} \cos(h_r - h) \right] \cos(g + f), \\
\frac{\partial \gamma_s}{\partial \sigma} &= - \left\{ \left[ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \sigma} \cos(h_r - h) - \frac{\partial \lambda_5}{\partial \sigma} \operatorname{sen}(h_r - h) \right] \cos i + \frac{\partial \lambda_6}{\partial \sigma} \operatorname{sen} i \right\} \operatorname{sen}(g + f) \\
& + \left[ \frac{\partial \lambda_4}{\partial \sigma} \operatorname{sen}(h_r - h) + \frac{\partial \lambda_5}{\partial \sigma} \cos(h_r - h) \right] \cos(g + f),
\end{aligned}$$

que substituiremos en (4.126) segundo corresponda.

Finalmente  $\Gamma_5$  é función de  $f, g, i$ , por iso

$$\frac{\partial \Gamma_5}{\partial \delta} = -6J_2 r_T^2 \gamma_T \frac{\partial \gamma_T}{\partial \delta} \quad \text{sendo } \delta = f, g, i, \quad (4.127)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_T}{\partial f} = \cos i \cos(f+g) &\rightarrow \frac{\partial \Gamma_5}{\partial f} = -6J_2 r_T^2 \gamma_T \cos i \cos(f+g), \\ \frac{\partial \gamma_T}{\partial g} = \cos i \cos(f+g) &\rightarrow \frac{\partial \Gamma_5}{\partial g} = -6J_2 r_T^2 \gamma_T \cos i \cos(f+g), \\ \frac{\partial \gamma_T}{\partial i} = \cos i \sin(f+g) &\rightarrow \frac{\partial \Gamma_5}{\partial i} = 6J_2 r_T^2 \gamma_T \cos i \sin(f+g). \end{aligned} \quad (4.128)$$

#### 4.5. Extensión a *PSATROT* ao movemento rototranslatorio do satélite

Unha vez temos modelado o movemento rototranslatorio mediante o seu hamiltoniano, como vimos en 4.3.3, o seguinte paso é a integración deste tipo de movemento nun propagador. Como nesta ocasión se emprega un método diferente non é posible utilizar *PSAT*, e por iso se creou o propagador *PSATROT*. Así poderemos obter resultados e poderemos analízalos e valoralos, non só analiticamente senón tamén numericamente.

A diferenza fundamental entre *PSAT* e *PSATROT* consiste no xeito de introducir as ecuacións diferenciais do problema. En *PSAT* usábase unha formulación newtoniana, a través do potencial, mentres que *PSATROT* utiliza unha formulación hamiltoniana. Polo tanto pasaremos de utilizar as expresións de (2.58) a usar as de (2.61), ou o que é o mesmo, a función  $\mathbf{f}$  pasará de ser a da esquerda de (2.62) a ser a da dereita desa expresión. A implicación disto é directa, pois exixirá o cálculo explícito de todas as derivadas do hamiltoniano (doce) o que redundará nun aumento significativo dos requirimentos computacionais, en particular da memoria, pois será necesaria para almacenar os ditos resultados. Por este motivo, aínda que se podería calcular un movemento translacional mediante *PSATROT*, non sería recomendable en termos de tempo e memoria.

Como é obvio será necesario realizar unha serie de trocos para poder adaptar

esta nova forma de facer os cálculos ao propagador *PSATROT*, polo que haberá que modificar principalmente a estrutura de datos en *PSAT* (ver en 3.3.2). Aquí, a primeira transformación significativa será a duplicación do número de variables, pois pasamos de traballar con seis variables a facelo con doce. O vector  $\mathbf{y}$  será, polo tanto,

$\mathbf{y} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}) = p(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \psi, \theta, \phi, \Psi, \Theta, \Phi)$ ,  
na expresión

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t); \mathbf{p}) = (\nabla_{\mathbf{R}} \mathcal{H}, -\nabla_{\mathbf{r}} \mathcal{H}). \quad (4.129)$$

O array de almacenamento,  $\mathcal{T}$ , terá entón a dimensión  $(N+1) \times (N+1) \times 13$ , é dicir unha matriz M (como en (3.4)) onde cada nodo representará un vector de dimensión 13,

$$l_{ik} = (l_{ik0}, l_{ik1}, l_{ik2}, l_{ik3}, l_{ik4}, l_{ik5}, l_{ik6}, l_{ik7}, l_{ik8}, l_{ik9}, l_{ik10}, l_{ik11}, l_{ik12}) \\ = \left( l_{ik}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_1}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_2}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_3}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_4}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_5}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_6}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_7}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_8}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_9}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_{10}}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_{11}}, \frac{\partial l_{ik}}{\partial x_{12}} \right), \quad (4.130)$$

e será, a igual número de orde e grao, 3.25 veces maior que no caso orbital. Aquí é onde o novo programa que calcula o movemento rototranslatorio demandará máis recursos que o caso orbital.

Do mesmo xeito que definimos os primeiros nodos da función enlazada en 3.4.1, neste caso unicamente temos que modificar os valores de  $l_7$  a  $l_{12}$ , sendo os 13 primeiros nodos os que seguen

$  \begin{array}{cccccc}  l_1 = x, & l_4 = X, & l_7 = \psi, & l_{10} = \Psi, \\  l_0 = t, & l_2 = y, & l_5 = Y, & l_8 = \theta, & l_{11} = \Theta, \\  l_3 = z, & l_6 = Z, & l_9 = \phi, & l_{12} = \Phi.  \end{array}  $	(4.131)
---	---------

Por ese mesmo motivo, a inicialización da estrutura de datos tamén se verá exposta aos trocos, pois o bloque de iniciación (algoritmo 3 bloque 1) farase tendo en conta as seguintes consideracións a maiores das vistas en 3.3.2



■ Como no caso anterior  $l_0$  representa o tempo, a súa serie de Taylor será  $t_0 + t$ ,

polo tanto:  $l_{000} = t_0$ ,  $l_{010} = 1$  sendo cero o resto. Con isto podemos facer:

$$l_{00} = (t_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$l_{01} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

- As variables  $(x, y, z)$  veñen representadas polos nodos  $l_1, l_2, l_3$  e asignaráselle os valores

$$l_{10} = (x_0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$l_{20} = (y_0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$l_{30} = (z_0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

- As variables  $(X, Y, Z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  están representadas por  $l_4, l_5, l_6$  e inicialmente asignaráselles os valores

$$l_{40} = (\dot{x}_0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$l_{50} = (\dot{y}_0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$l_{60} = (\dot{z}_0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

- As variables  $(\psi, \theta, \phi)$  veñen representadas polos nodos  $l_7, l_8, l_9$  e inicialmente asignarémolles os valores

$$l_{70} = (\psi_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

$$l_{80} = (\theta_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$l_{90} = (\phi_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

- As variables  $(\Psi, \Theta, \Phi)$  veñen representadas polos nodos  $l_{10}, l_{11}, l_{12}$  e inicialmente asignarémolles os valores<sup>11</sup>

$$l_{10\ 0} = (\Psi_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$l_{11\ 0} = (\Theta_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0),$$

$$l_{12\ 0} = (\Phi_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

- O resto de variables do problema,  $\xi$ , representadas polos elementos  $l_{ik}$  serán iniciadas como o vector nulo

$$l_{ik} = (\xi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

<sup>11</sup> Xa vimos que os valores iniciais  $\Psi_0, \Theta_0, \Phi_0$  se obteñen de xeito implícito da expresión (4.24) a partir das condicións iniciais de  $(\psi, \theta, \phi)$  e  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ .

#### 4.5.1. Implementación dos termos rotacionais do hamiltoniano

Os termos do hamiltoniano correspondentes á parte orbital son idénticos aos implementados en PSAT, polo que non serán descritos aquí. A estes termos engádenselles os termos correspondentes ao hamiltoniano de rotación  $\mathcal{H}_r$  e o potencial de rotación  $V_r$ .

A continuación veremos como se implementa cada un dos elementos involucrados nos termos rotacionais do hamiltoniano.

##### Expresión de $(\alpha_s, \gamma_s)$ en *PSATROT*

Introducir nun primeiro intre a subrutina que obtén  $(\alpha_s, \gamma_s)$  será moi útil para os cálculos posteriores, porque ao depender das variables de Euler (como se pode comprobar en (4.85)) teremos que calcular os seus senos e cosenos, que serán necesarios en  $\mathcal{H}_r$ . Lembremos en (2.25) que cun só nodo poderemos obter ambos os valores.

Para esta subrutina necesítanse 26 nodos que desenvolvan os valores das ecuacións de (4.85), deles os tres primeiros nodos correspóndense co cálculo dos senos e cosenos de cada un dos ángulos de Euler. Posteriormente póñense en común obtendo as expresións de  $\alpha_s$  e  $\gamma_s$  (dous nodos máis) e finalmente elévanse ao cadrado cada un deles (dous nodos), empregando un total de 30 nodos para obter os valores que temos que introducir en  $V_s$ . Deles, 23 son do tipo multiplicación, 3 do tipo seno/coseno e 4 sumatorios.

Como comentamos nas liñas anteriores, algúns dos valores aquí obtidos tamén serán empregados en  $\mathcal{H}_r$ .

##### Implementación do hamiltoniano rotacional, $\mathcal{H}_r$

Partiremos da ecuación (4.93) para poder establecer o hamiltoniano rotacional do movemento rototranslacional. Para iso necesitaremos os inversos dos momentos de inercia, que serán datos de entrada da subrutina.

A continuación necesitaremos os seguintes 16 nodos



■ Dous nodos para a expresión do interior das parénteses.

- Catro nodos para a división de  $\sin \phi$  e  $\cos \phi$  entre  $\sin \theta$  e para a multiplicación entre as expresións anteriores.
- Dous nodos para a multiplicación de  $\Theta$  por  $-\sin \phi$  e  $\cos \phi$ .
- Dous nodos para combinar as parénteses coas expresións anteriores, é dicir, para crear o interior dos corchetes de (4.93).
- Dous nodos para elevar ao cadrado as expresións dos corchetes.
- Un nodo para calcular  $\Phi^2$ .
- Tres nodos para multiplicar cada un dos sumandos pola súa inversa do momento de inercia correspondente e sumalos entre si. Recordemos que as inversas son datos de entrada da subrutina.

#### Implementación do potencial debido á non esfericidade do satélite, $V_s$

Nesta subrutina calcularase  $V_s$  de (4.93), establecéndose neste caso como entradas da mesma as constantes  $(A_s - B_s)$  e  $(C_s - B_s)$ . Unha vez obtidos  $\alpha_s$  e  $\gamma_s$  o cálculo de  $V_s$  é moi doado, pois unicamente teremos que empregar 5 nodos distribuídos do seguinte xeito

- Dous nodos para multiplicar por -3 e sumar unha unidade a  $\alpha_s$  e  $\gamma_s$ .
- Un nodo para a combinación lineal das expresións anteriores con cada unha das constantes que involucran aos momentos de inercia.
- Un nodo para o cálculo de  $1/r^3$ .
- Un nodo para multiplicar por  $\mu/2$  o nodo anterior.



## Capítulo 5

# Aplicacións

### 5.1. Introducción

Neste capítulo validaremos os dous propagadores orbitais que se desenvolveron. Empregaremos *PSAT* cndo só se considere o movemento orbital e *PSATROT* se se inclúe a rotación do satélite. Para iso, realizaremos unha serie de simulacións co fin de comprobar a bondade dos programas elaborados e posteriormente, co segundo deles, crearemos unha casuística suficiente para verificar se existe algún tipo de influencia por parte da rotación na órbita dun satélite e viceversa.

Para ver o comportamento de *PSAT* e *PSATROT* será necesario ver como se comportan baixo diferentes condicións iniciais, por iso simularemos varios tipos de órbitas: unha baixa, unha de excentricidade alta e outra xeostacionaria. Ademais, para ver a influencia dos momentos de inercia, comprobaremos cada unha delas con obxectos de varias magnitudes xeométricas.

Dividiremos este capítulo en catro apartados. O primeiro deles dedicado ás condicións iniciais que temos que achegar aos programas, centrándonos na velocidade de rotación, onde explicaremos a motivación que nos levou a seleccionar un certo rango de velocidades. Tamén escollemos un intervalo amplo de momentos de inercia co fin de ver a súa influencia en ambos os movementos.

O segundo apartado serviranos para comprobar a eficiencia de *PSAT*. Como este propagador necesita menos condicións iniciais (as ecuacións que emprega non depen-

den dos momentos de inercia nin das velocidades de rotación) serán necesarias menos simulacións e por iso realizaranse soamente doce, que como veremos serán máis que suficientes para ver que *PSAT* funciona como é de agardar.

O terceiro apartado reúne parte do visto no Capítulo 4 e ten unha importancia crucial no resto deste capítulo. Nel compararemos cada un dos termos do hamiltoniano que *PSATROT* calcula (ver expresión en (4.93)) co fin de analizar os valores obtidos e poder entender non só os resultados gráficos que se mostrarán na última parte, senón tamén como funcionan as ecuacións da rotación e ver cando, como e en que magnitude modifican o valor do hamiltoniano e polo tanto que efecto ten cada un na órbita. Empregaremos para iso cento vinte simulacións froito da combinación das condicións iniciais que se seleccionaron.

No último apartado centrarémonos nos resultados gráficos, onde poderemos analizar e validar os propagadores en función do visto no apartado anterior. Presentaremos, ademais tanto as variacións relativas dos elementos orbitais calculadas con *PSATROT* en relación cos de *PSAT* (polo tanto a influencia que implica a rotación) como a evolución dos ditos parámetros cando se lle aplica un movemento rototraslacional a un satélite. Obviamente mostrarase un número limitado de todas as gráficas que se obtiveron coas simulacións, pero serán suficientes para ver como se comporta un satélite de certas características xeométricas nunha órbita concreta ao aplicarlle unha velocidade de rotación en particular.

Con todo iso e á vista dos resultados, poderemos validar os programas desenvolvidos, así como o método de series de Taylor que empregan.

## 5.2. Condicións iniciais

Ambos os programas precisan unha serie de datos iniciais mínimos<sup>1</sup> para poder executarse. Neste capítulo tratouse de obter unha base de datos o suficientemente ampla como para poder ver similitudes, tendencias, correlacións, diferenzas... Por ese motivo neste apartado indícase un grupo de elementos co fin de combinalos e ter unha gran cantidade de datos para poder avaliar e analizar.

---

<sup>1</sup> No Capítulo 3 vimos (para o caso de *PSAT*) que o usuario pode ter control tamén sobre aspectos referidos á integración e o control de erros, aínda que xa están definidos por defecto nos programas.

As condicións iniciais que os propagadores necesitan son<sup>2</sup>

- **Parámetros orbitais**
- **Ángulos de Euler**
- Momentos de inercia
- **Modelo de forzas**
- Velocidade de rotación
- **Intervalos de propagación**

A continuación explícanse cada un deles.

■ **Parámetros orbitais**, ver na táboa 5.1.

Os parámetros orbitais definirannos unha órbita unívoca. Para poder ver a influencia da rotación escollemos tres órbitas representativas.

- *Órbita baixa*: optouse por unha órbita *LEO* con semieixe maior igual a 7000 km. Denominarémola  $O_B$ .
- *Órbita con valores elevados tanto da inclinación como da excentricidade*: consideramos unha órbita con certa semellanza coas Molniya<sup>3</sup> co obxecto de amosar os resultados dun satélite con elevados valores nestes dous elementos orbitais. Referirémonos a ela mediante  $O_M$ .
- *Órbita xeostacionaria*: tomaremos unha órbita circular ecuatorial, polo que os elementos orbitais serán nulos a excepción do semieixe maior, que será 42167 km. Nomearémola  $O_G$ .

	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>i</i>	$\Omega$	$\omega$
$O_B$	0.1000	7 000.00 km	23.0000°	100.0000°	200.0000°
$O_M$	0.7420	26 570.00 km	63.4349°	277.2700°	270.0000°
$O_G$	0.0000	42 167.00 km	0.0000°	0.0000°	0.0000°

**Táboa 5.1:** Elementos orbitais iniciais das órbitas estudadas<sup>4</sup>.

<sup>2</sup> En **vermello** indícanse as necesarias para *PSAT*.

<sup>3</sup> As órbitas deste tipo teñen unha alta excentricidade e unha inclinación preto da crítica. O obxectivo dos satélites con estes parámetros orbitais é manterse a maior parte da órbita na zona próxima ao apoxeo, prolongando o tempo sobre un territorio en particular. Empréganse por parte de países moi setentrionais como Rusia ou o Canadá.

<sup>4</sup> En todas as órbitas estudadas tomouse como cero o valor inicial da época de paso polo perixeo.

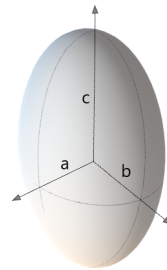
Mediante a expresión (1.3), podemos calcular o período orbital de cada órbita, de xeito que o de  $O_B$  é 5 828.56 s, o de  $O_M$  é 43 109.74 s e o de  $O_G$  é 86 173.48 s.

Escollendo esta tipoloxía tan diferente, poderemos ver a incidencia do movemento rototraslatorio en órbitas o suficientemente dispares entre si.

■ Momentos de inercia<sup>5</sup>, ver táboa 5.2.

Empregáronse cinco obxectos con diferentes ordes de magnitude para poder comprobar como varían os resultados en función da dimensión do obxecto. Debido a que os momentos de inercia achegan relativamente pouca información en canto á xeometría do obxecto, modelamos cada un deles coma un elipsoide de revolución de xeito que, mediante as relacións

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{1}{5}(b^2 + c^2), \\ B_s &= \frac{1}{5}(a^2 + c^2), \\ C_s &= \frac{1}{5}(a^2 + b^2), \end{aligned} \tag{5.1}$$



podemos obter unhas dimensións do obxecto simulado recoñecibles cuantitativamente. Na táboa 5.2 inclúense os eixes dun elipsoide de revolución ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) con eses momentos de inercia en particular ( $A_s$ ,  $B_s$ ,  $C_s$ ).

■ Velocidade de rotación

En todos os casos empregouse unha velocidade de rotación cunha única compoñente en  $z$  en valor absoluto, é dicir que teremos rotacións tal que  $(0.0, 0.0, \omega_{r_z})$  en rad/s. Para a elección dunhas velocidades de rotación que sexan representativas dos obxectos que simularemos, faise preciso partir dunha orde de magnitude de referencia realista. Neste caso, partimos da velocidade de rotación, en valor absoluto, que citan Cochran e Lahr (1986) para o telescopio espacial *Hubble*; é dicir  $\omega_{r_z} = 1.17 \times 10^{-3}$  rad/s. En torno a esta velocidade de rotación

<sup>5</sup> Normalizáronse os datos dos momentos de inercia segundo a ecuación (4.13).

	$a$	$b$	$c$	$A_s$	$B_s$	$C_s$
<b>OB<sub>1</sub></b>	1.9506	1.9506	3.0429	$2.6129 \times 10^{-6}$	$2.6196 \times 10^{-6}$	$1.5225 \times 10^{-6}$
<b>OB<sub>2</sub></b>	$1.2747 \times 10$	$1.2747 \times 10$	6.1237	$4.0000 \times 10^{-5}$	$4.0000 \times 10^{-5}$	$6.5000 \times 10^{-5}$
<b>OB<sub>3</sub></b>	$1.2747 \times 10^2$	$1.2747 \times 10^2$	$6.1237 \times 10$	$4.0000 \times 10^{-3}$	$4.0000 \times 10^{-3}$	$6.5000 \times 10^{-3}$
<b>OB<sub>4</sub></b>	$6.6708 \times 10^2$	$6.6708 \times 10^2$	$2.3452 \times 10^2$	$1.0000 \times 10^{-1}$	$1.0000 \times 10^{-1}$	$1.7800 \times 10^{-1}$
<b>OB<sub>5</sub></b>	$1.2747 \times 10^3$	$1.2747 \times 10^3$	$6.1237 \times 10^2$	$4.0000 \times 10^{-1}$	$4.0000 \times 10^{-1}$	$6.5000 \times 10^{-1}$

**Táboa 5.2:** Eixes dun elipsoide de revolución tipo  $(a, b, c)$  (m) e momentos de inercia normalizados  $(A_s, B_s, C_s)$  ( $\text{km}^2$ ) dos obxecto simulados.

podería tomarse un límite inferior, pero como veremos, a influencia da velocidade de rotación comeza a facerse patente a partir de certas ordes de magnitude; por iso esta sería practicamente imperceptible, e tomaremos como límite inferior unha orde de magnitude superior:  $1.00 \times 10^{-2}$  rad/s.

En canto ao límite superior tomaremos como referencia a chamada *zona de confort* relacionada coa gravidade artificial, que se sitúa entre un rango de aceleracións de entre  $0,30 g$  e  $1,00 g$  (Clément e Bukley (2007)). A partir das expresións das seguintes liñas poderemos calcular os rangos das velocidades de rotación que farían que cada obxecto estivese na súa propia zona de confort.

Polo tanto, partamos da aceleración centrípeta

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega_r^2 R, \quad (5.2)$$

empregando

$$\omega_r = \frac{2\pi}{P_r}, \quad (5.3)$$

unha vez despxado  $P_r$ , o período de rotación (en s), obteremos

$$P_r = 2\pi \sqrt{\frac{R}{a}}. \quad (5.4)$$

respectivamente<sup>6</sup>. Na táboa 5.3 amósanse os valores para as aceleracións límite superior ( $a_{sup} = 9.81 \text{ m/s}^2$ ) e inferior ( $a_{inf} = 30\% 9.81 \text{ m/s}^2$ ) da zona de confort para cada obxecto. É dicir, a partir das características xeométricas de cada satélite, que no noso caso veñen dadas polas dimensións do elipsoide, empregando a expresión (5.4) e substituíndo  $a$  por  $a_{sup}$  e  $a_{inf}$ , podemos obter os límites superior e inferior da velocidade de rotación ( $\omega_{z\ sup}$  e  $\omega_{z\ inf}$ ) para que no satélite poda existir gravidade artificial compatible coa vida humana (mediante (5.3)).

	(5.4)	$P_r$	(5.3)	$\omega_{r_z}$
OB <sub>2</sub>	→	7.1603 s	→	0.8775 rad/s
		13.0728 s	→	0.4806 rad/s
OB <sub>3</sub>	→	22.6072 s	→	0.2779 rad/s
		41.2750 s	→	0.1522 rad/s
OB <sub>4</sub>	→	51.8094 s	→	0.1213 rad/s
		94.5905 s	→	0.0664 rad/s
OB <sub>5</sub>	→	71.6028 s	→	0.0878 rad/s
		130.7283 s	→	0.0481 rad/s

**Táboa 5.3:** Intervalos das velocidades de rotación para a zona de confort en función de cada obxecto.

Vemos que podemos establecer uns límites entre 0.01 rad/s e 1.00 rad/s. Deste xeito, para ver como varía a influencia da velocidade de rotación nos cálculos, optamos por escoller os valores mostrados na táboa 5.4 pois recollen gran parte da casuística para as xeometrías estudadas.

$\omega_{r_1}$	$\omega_{r_2}$	$\omega_{r_3}$	$\omega_{r_4}$
$1.00 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-1}$	$5.00 \times 10^{-1}$	1.00

**Táboa 5.4:** Velocidades de rotación empregadas para as simulacións, en rad/s.

Aínda que o veremos en 5.4, podemos adiantar que calcular valores por debaixo de 0.01 rad/s apenas ten significación nos resultados, e valores por riba de 10.00 rad/s tiran efectos estraños, seguramente por cuestións de resonancia, insuficiencia de datos<sup>7</sup> etc.

<sup>6</sup> Polas súas dimensións, non ten senso falar de zona de confort (tal e como o definimos en termos de comodidade en canto á habitabilidade humana no espazo) nun obxecto como o OB<sub>1</sub>.

<sup>7</sup> Teñamos en conta que para o valor máximo que tivemos en consideración, 1 rad/s, implica

- Ángulos de Euler<sup>8</sup>

Tomaremos como ángulos de Euler os valores  $(\pi/2, \pi/2, 0)$ . Con esta elección (e como tomamos un único eixe de rotación) os obxectos simulados xirarán en torno a un eixe perpendicular á dirección que indica o punto vernal (lembrámosto na figura 1.4).

- Modelo de forzas

En función do propagador empregado, calculáronse diferentes modelos.

- Para *PSAT*

- Movemento kepleriano
- Problema Principal
- Modelo xeopotencial zonal de grao 10
- Modelo xeopotencial 10x10

- Para *PSATROT*

- Movemento kepleriano
- Problema Principal

- Intervalo de propagación

Fíxose unha única simulación de 365 días de cada un dos casos anteriores. En cada unha delas obtivemos 262 800 puntos, é dicir, un dato cada 120 segundos. A partir desta simulación inicial, realizáronse diferentes subintervalos de 1 ou 2<sup>9</sup>, 15 e 100 días, de xeito que en cada un deles teremos 1 440, 10 800 e 72 000 datos, respectivamente. Á vista dos resultados, considerámostos suficientes e mesmo nalgúns casos vímonos na obriga de reducir a súa cantidade ao obter gráficos tan densos que impedían a correcta visualización dos resultados, especialmente naqueles que representan un ano.

---

un xiro completo do satélite sobre o seu eixe de revolución cada 6.28 s. Para poder ter en conta un posible efecto en velocidades maiores habería que refinar moito máis os datos das simulacións.

<sup>8</sup> Podemos lembrar a súa descrición en 4.2.1 e o seu significado xeométrico na figura 4.2.

<sup>9</sup> En función da definición das imaxes escollerase entre 1 ou 2 días, pois a cantidade de datos obtidos fai que se obteñan gráficos con gran densidade de puntos que poderían facer que os resultados gráficos non desen a suficiente información.

O número de simulacións finais para *PSAT* obtémolo combinando as posibilidades da táboa 5.5, o que implica doce simulacións iniciais, acadando trinta e seis cando se empregan os subintervalos.

Órbita	Modelo de forzas	Intervalo	Subintervalos
$O_B$	Movimento kepleriano	365 días	1 - 2 días
$O_G$	Problema Principal		15 días
$O_M$	Modelo xeopotencial zonal grao 10		100 días
	Modelo xeopotencial completo 10x10		

**Táboa 5.5:** Resumo de simulacións para *PSAT*.

No tocante a *PSATROT* os casos multiplícanse, tal e como podemos ver na táboa 5.6. Aquí podemos comprobar que o total de casos simulados é de 120, acadando un total de 360 cando empregamos os subintervalos.

Órbita	Momentos de inercia	Velocidade de rotación	Modelo	Intervalo	Subintervalos
$O_B$	OB <sub>1</sub>	$\omega_{r_1}$	Movimiento kepleriano	365 días	1 - 2 días
	OB <sub>2</sub>				
	OB <sub>3</sub>				
	OB <sub>4</sub>				
	OB <sub>5</sub>				
$O_G$		$\omega_{r_2}$	Problema Principal		15 días
$O_M$		$\omega_{r_3}$			100 días
		$\omega_{r_4}$			

**Táboa 5.6:** Resumo de simulacións para *PSATROT*.

### 5.3. Comprobación do propagador *PSAT* para o modelo orbital sen rotación

Lembremos que para *PSAT* se calcularon doce casos xerais cun intervalo de 365 días que se dividen noutros con subintervalos para 1 ou 2, 15 e 100 días (ver táboa 5.5). Deste xeito fan un total de trinta e seis modelos.

Ante a imposibilidade de mostrar todos eles, faremos un breve resumo dos resultados dun xeito xeral para posteriormente particularizar en tres exemplos que pretenden abarcar dalgún xeito a casuística dos doce casos simulados.

Para poder comprobar a bondade dos propagadores é útil monitorizar algún elemento do que coñecemos o seu comportamento. Para iso empregamos dous parámetros

enerxéticos que poden considerarse como constantes: o *hamiltoniano*,  $\mathcal{H}$ , que é constante para sistemas autónomos, e a *constante de Jacobi*,  $\mathcal{J}$ , constante en sistemas de referencia rotantes.

Usaremos o hamiltoniano (ver en (1.15)) cando este non dependa do tempo, por exemplo no caso kepleriano e en calquera modelo zonal. Pola contra, cando se teñan en conta modelos teserais, que deben ser avaliados nun sistema rotacional, empregaremos a constante de Jacobi (ver en Hashida (2003) ou en Lacruz (2013)).

En calquera caso, para poder obter unha magnitude que nos cuantifique a tolerancia dos propagadores calcularemos as variacións relativas mediante a seguinte ecuación cando o parámetro en cuestión sexa o semieixe maior (co fin de adimensionar a magnitude)

$$e_r = \left| \frac{a_i - a_0}{a_0} \right|, \quad (5.5)$$

e cando se trate do resto de parámetros orbitais e a constante enerxética correspondente empregárase

$$e_r = |x_i - x_0|, \quad (5.6)$$

onde  $x_0$  é o valor inicial dos parámetros  $T_0$ ,  $e_0$ ,  $i_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\omega_0$  e  $\mathcal{H}_0$  ( $\mathcal{J}_0$  para o modelo teseral 10x10) e  $x_i$  o valor calculado nun instante calquera  $i$ .

Atendendo ao tipo de caso, comezaremos polo movemento kepleriano. Se volvemos ao sistema de ecuacións (1.91) que nos amosaba as expresións do propagador máis sinxelo (aquel que resulta do movemento kepleriano) podemos ver que os elementos orbitais para ese caso deben ser constantes.

Os resultados de *PSAT* no intervalo de 365 días mostran que efectivamente os valores son virtualmente os mesmos, tal e como se pode apreciar na táboa 5.7, onde a máxima das diferenzas relativas de todos os parámetros é da orde de  $10^{-12}$ ,  $10^{-13}$  e  $10^{-13}$  nas órbitas  $O_B$ ,  $O_G$  e  $O_M$ ; respectivamente.

Entrando máis polo miúdo en cada un dos casos, en  $O_B$  podemos corroborar que no caso kepleriano efectivamente todos os parámetros son constantes e no Problema

	$e$	$a$	$i$	$\Omega$	$\omega$	$\mathcal{H}$
$\mathbf{O}_B$	$2.0961 \times 10^{-13}$	$5.5349 \times 10^{-14}$	$5.1070 \times 10^{-15}$	$2.8200 \times 10^{-14}$	$1.7040 \times 10^{-12}$	$1.5596 \times 10^{-12}$
$\mathbf{O}_G$	$2.6745 \times 10^{-14}$	$6.6293 \times 10^{-14}$	0.0000	0.0000	0.0000	$1.3234 \times 10^{-13}$
$\mathbf{O}_M$	$7.8994 \times 10^{-14}$	$1.2057 \times 10^{-13}$	$6.8834 \times 10^{-15}$	$7.1054 \times 10^{-15}$	$2.0783 \times 10^{-13}$	$5.8975 \times 10^{-13}$

**Táboa 5.7:** Máximas variacións relativas de los elementos orbitais en el caso kepleriano.

Principal existe unha pequena oscilación arredor dos valores iniciais de  $e$ ,  $a$ ,  $i$  mentres se observan tanto a precesión do nodo como a variación secular do argumento do perixeo.

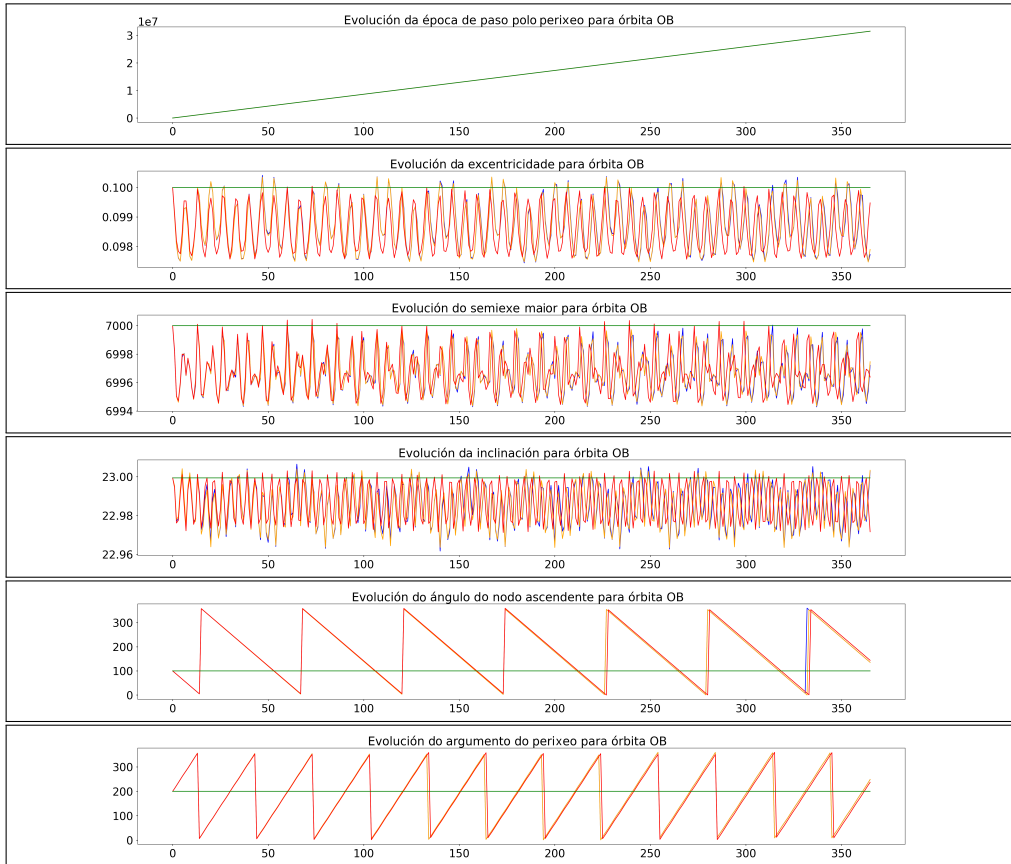
Como mostra, preséntase nas figuras 5.2<sup>10</sup> a evolución dos elementos orbitais para os catro casos definidos na táboa 5.5 no intervalo de 365 días. A lenda das figuras que contén diferentes modelos será



**Figura 5.1:** Lenda para as figuras co conxunto de modelos simulados.

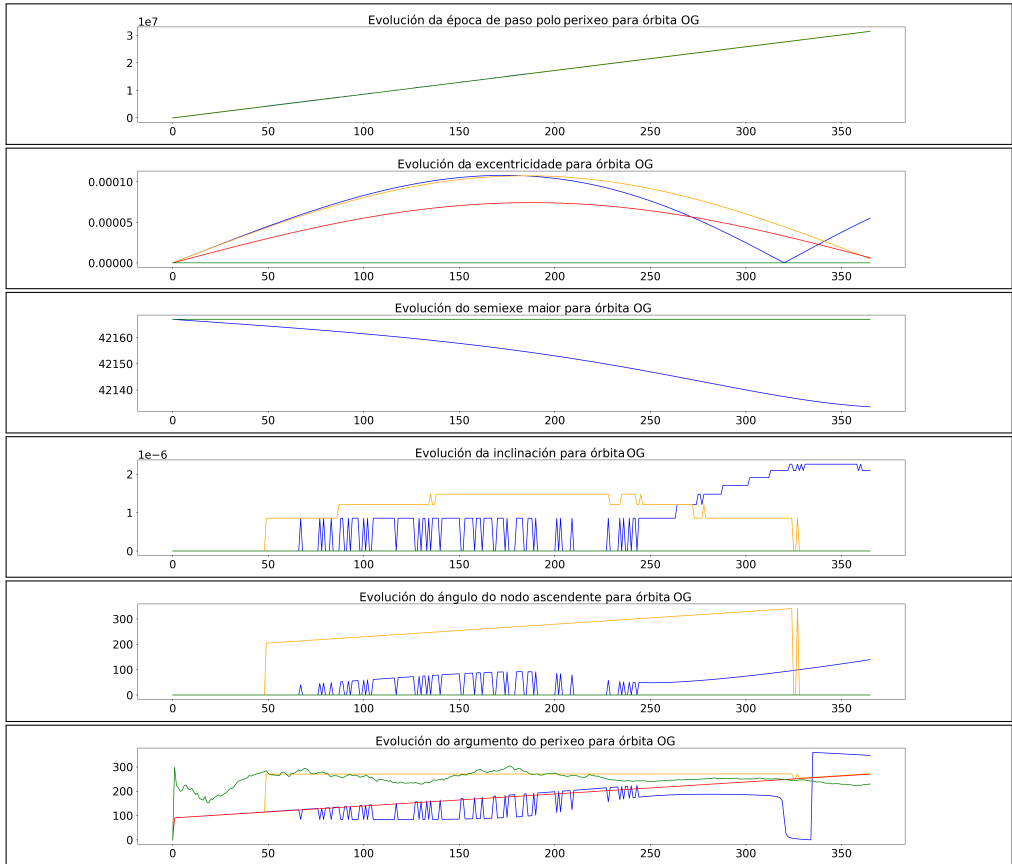
Podemos observar que mentres o valor no caso kepleriano permanece constante ao longo de todo o intervalo (liña verde), no resto apréciase a anteriormente comentada oscilación, moi semellante entre eles ao inicio da simulación pero aumentando a amplitude das oscilacións ao longo do tempo cantos máis harmónicos se teñan en conta. Isto apréciase sobre todo se se comparan o modelo zonal (liña laranxa) e o tesimal (liña azul), que son moi semellantes, pero difiren lixeiramente do Problema Principal (liña vermella).

<sup>10</sup> Ao longo deste capítulo mostraranse varias figuras e grupos de figuras correspondentes, principalmente, ás variacións relativas e á evolución dos elementos orbitais e outras variables. En todas elas, a non ser que se diga o contrario de xeito explícito, mostraranse *días* no eixe de abscisas mentres que as unidades do eixe de ordenadas variarán en función da variable representada. De xeito xeral presentarase a época de paso polo perixeo en *segundos*, a excentricidade de xeito *adimensional*, o semieixe maior en *quilómetros* e a inclinación, o ángulo do nodo ascendente e o argumento do perixeo en *graos sexagesimais*. Nas táboas, en función da variable, as unidades serán as utilizadas no eixe de ordenadas.



**Figura 5.2:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_B$  nos catro casos simulados durante 365 días (ver lenda en 5.1).

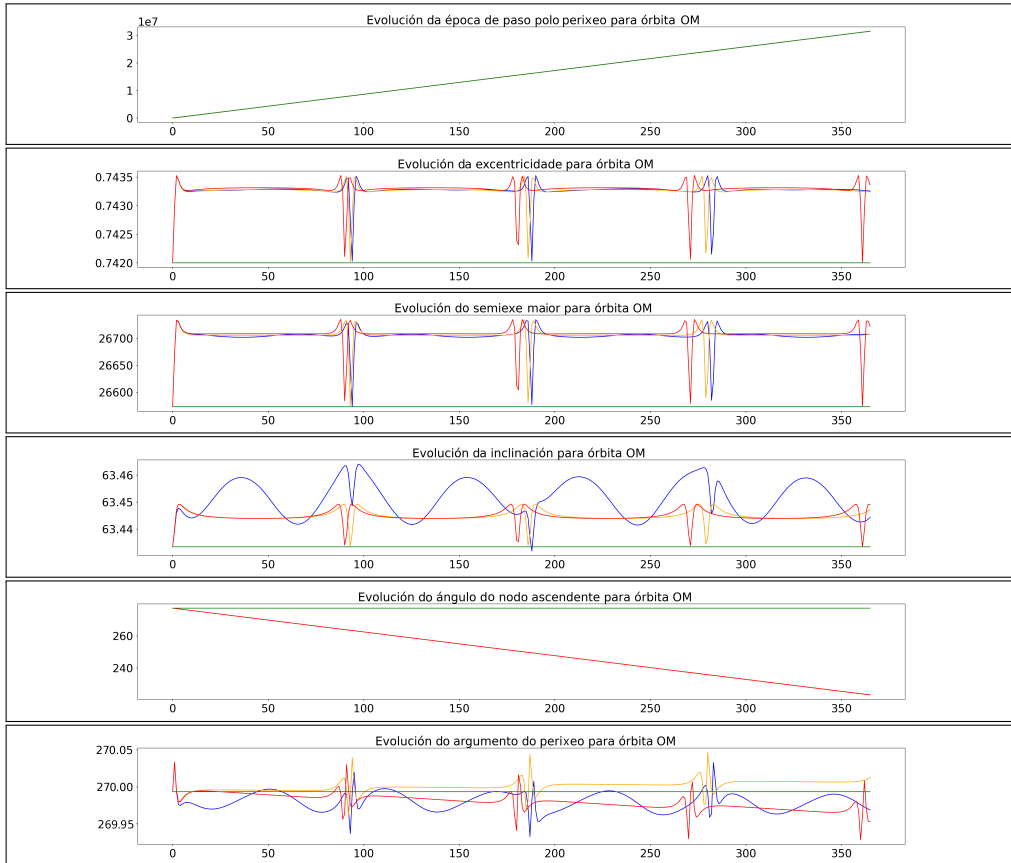
Se analizamos as figuras de  $O_G$  aprécianse uns resultados moi parecidos para os casos do Problema Principal e os modelos zonal e tesimal (de feito no caso da evolución do semieixe maior son indistinguibles). Nas figuras 5.3 móstrase a evolución dos elementos orbitais, onde podemos salientar a excentricidade, onde se pode apreciar de novo a oscilación sobre o valor inicial (moito máis ampla debido ao período orbital dunha órbita de tipo xeostacionario). Observemos, en calquera caso, que a amplitude da oscilación é dunha orde de magnitude de  $10^{-4}$ . Ao contrario que no caso anterior, o período destas oscilacións redúcese conforme se teñen en conta máis harmónicos.



**Figura 5.3:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_G$  nos catro casos simulados durante 365 días (ver lenda en 5.1).

Finalmente no caso de  $O_M$  resulta un comportamento moi parecido aos casos anteriores onde os valores para os modelos do Problema Principal, tesimal e zonal oscilan sobre a condición inicial, aínda que nesta ocasión de xeito máis acusado que en  $O_B$ . De igual xeito que nos casos anteriores, o valor no movemento kepleriano mantense constante. Nas figuras 5.4 apréciase a evolución dos elementos orbitais que mostran para o modelo tesimal  $10 \times 10$  un comportamento lixeiramente diferente.

Resumindo os casos simulados con *PSAT*: o movemento kepleriano represéntase de



**Figura 5.4:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_M$  nos catro casos simulados durante 365 días (ver lenda en 5.1).

xeito correcto. No caso do Problema Principal os resultados coinciden cos agardados empregando técnicas analíticas. E nos casos zonal e teseral vese unha lixeira semellanza tamén esperable debido á definición de ambos os casos, de feito o motivo dos desprazamentos que se ven nalgunhas das figuras son froito da orde 10 do caso teseral, que é no que se diferencian entre si. Ademais o hamiltoniano (nos tres primeiros modelos) e a constante de Jacobi (no modelo teseral) compórtanse de xeito esperable.

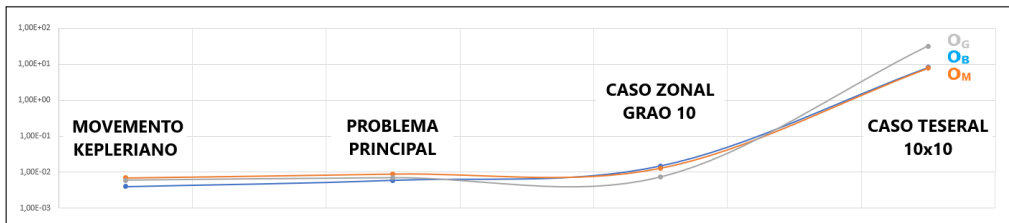
En canto aos tempos de simulación, na táboa 5.8 preséntanse os resultados obtidos

para cada un dos casos<sup>11</sup>.

	Caso kepleriano	Problema Principal	Caso zonal grao 10	Caso tesimal 10x10
<b>O<sub>B</sub></b>	$4.00 \times 10^{-3}$	$6.00 \times 10^{-3}$	$1.50 \times 10^{-2}$	8.09
<b>O<sub>G</sub></b>	$7.00 \times 10^{-3}$	$8.99 \times 10^{-3}$	$1.30 \times 10^{-2}$	7.78
<b>O<sub>M</sub></b>	$6.00 \times 10^{-3}$	$7.00 \times 10^{-3}$	$7.30 \times 10^{-2}$	$3.16 \times 10$

**Táboa 5.8:** Tempos de cálculo (s) de PSAT para os casos simulados durante un ano.

Na figura 5.5 vese como o caso da órbita xeoestacionaria ten uns resultados moi bos en calquera dos modelos simulados, mentres que no caso de órbita baixa sobe considerablemente cando se involucran máis harmónicos. De todas formas é necesario salientar o elevado número de puntos que se obteñen, polo que os resultados poden considerarse óptimos.



**Figura 5.5:** Tempos de cálculo (en s) de PSAT para os casos simulados durante un ano. Escala vertical logarítmica.

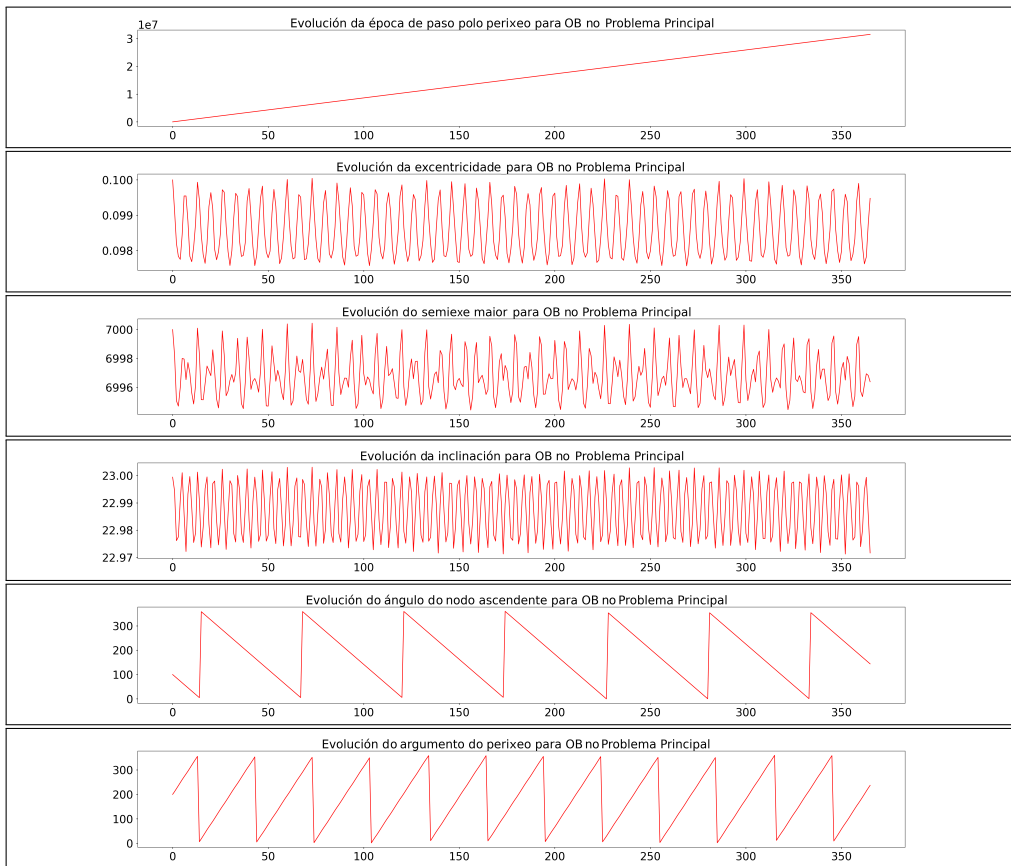
A continuación móstranse os resultados dos seguintes casos particulares<sup>12</sup>

- **Problema Principal:** A evolución dos elementos orbitais en 365 días para  $O_B$  está reflectida nas figuras 5.6, mentres que nas figuras 5.7 se presenta con máis detalle, para un día.

<sup>11</sup> Para pór en contexto o tempo de cálculo é conveniente lembrar que se calculan 262 800 puntos nun intervalo de 365 días.

<sup>12</sup> Teñamos en conta o comentado anteriormente, e é que para evitar gráficas moi densas debido á inxente cantidade de datos calculados, optouse por representar un dato por día no caso das figuras que presentan un ano mentres que nas que representan un día dáse un dato cada dous minutos. Polo tanto, as figuras correspondentes a un ou dous días dan conta dos respectivos aumentos das figuras que o fan de un ano en tanto en canto as primeiras constan de 1 439 ou 2 879 puntos máis (en función de que se representen un ou dous días, respectivamente) que as seguintes.

- Modelo zonal de grao 10: A evolución dos elementos orbitais para 365 días para  $O_M$  móstrase nas figuras 5.8 mentres que na figura 5.9 se presenta con máis detalle, para dos días.
- Modelo tesimal 10x10: A evolución dos parámetros orbitais para 365 días para  $O_G$  móstrase nas figuras 5.10<sup>13</sup>.



**Figura 5.6:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_B$  co modelo do Problema Principal para 365 días (ver lenda en 5.1).

<sup>13</sup>

Nesta ocasión non se representa a figura de  $\Omega$  debido ás inestabilidades numéricas que producen os valores case nulos da excentricidade e a inclinación.

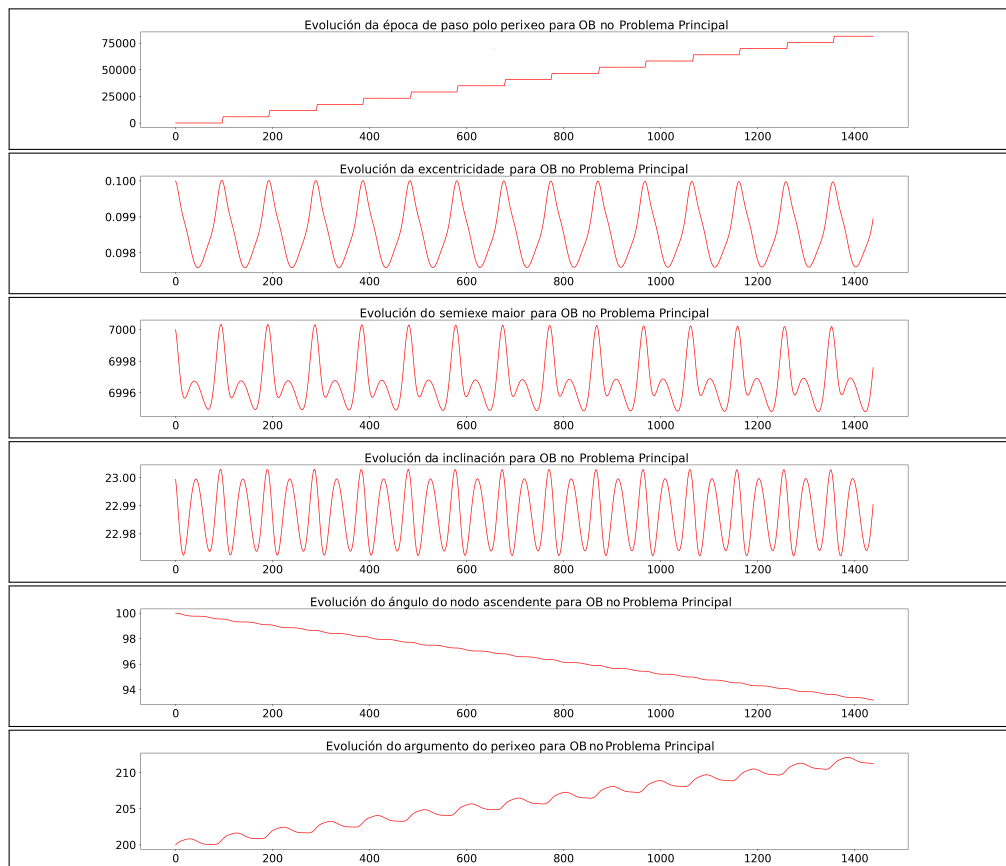
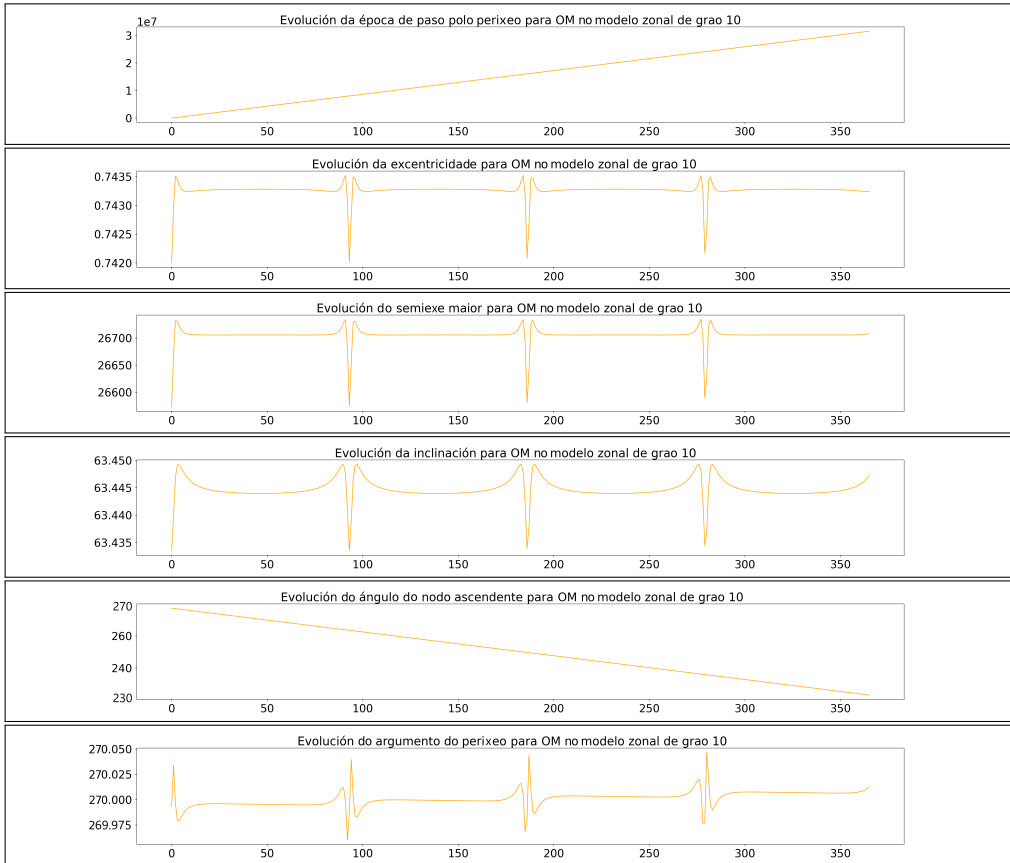


Figura 5.7: Evolución dos elementos orbitais para  $O_B$  co modelo do Problema Principal para un día (ver unidades do eixe de ordenadas en <sup>10</sup>, unidades do eixe de abscisas en minutos).

#### 5.4. Contribución e influencia de cada termo do hamiltoniano no problema rototranslatorio

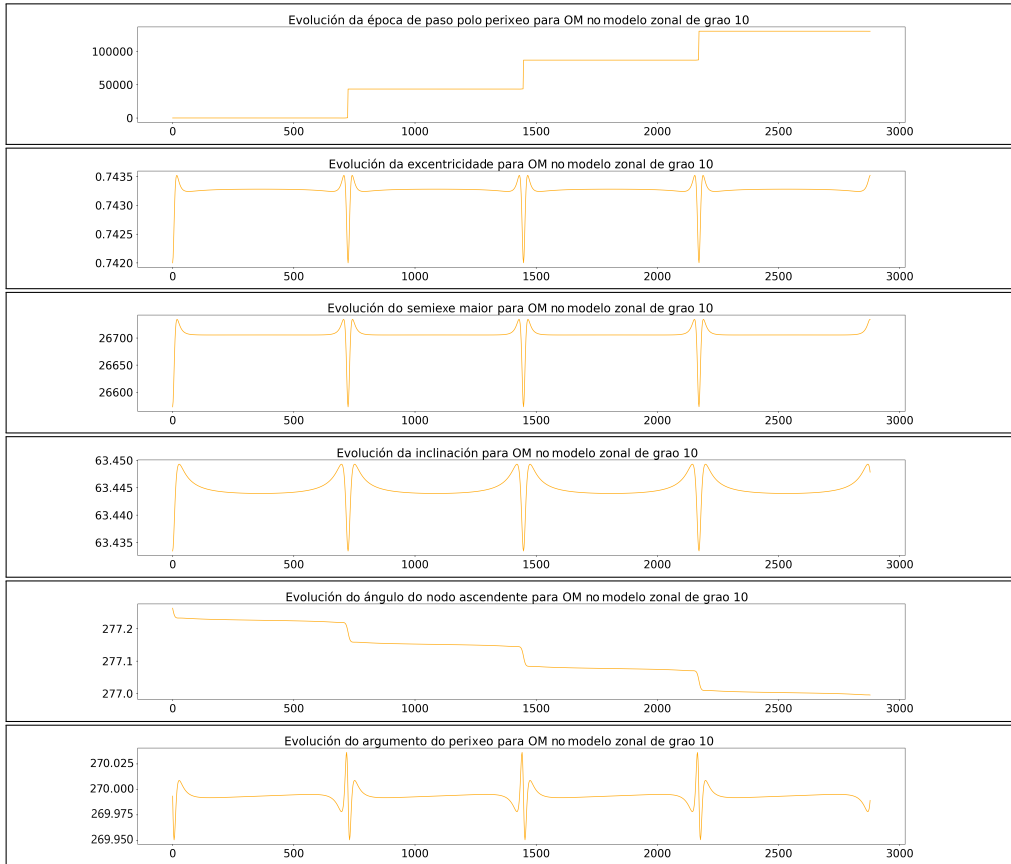
Antes de arrostrar os resultados obtidos con *PSATROT* veremos a contribución de cada un dos termos do hamiltoniano para ver de que xeito afecta a rotación á órbita ou viceversa. O obxectivo será demostrar analiticamente que o efecto mutuo da rotación e a translación é escaso baixo certos criterios, e corrobóralo empiricamente coas figuras das simulacións.



**Figura 5.8:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_M$  co modelo zonal de grao 10 para 365 días (ver lenda en 5.1).

Analizaremos a magnitude e a influencia de cada un dos termos do hamiltoniano e calcularemos o peso relativo da parte rotacional sobre a orbital. Deste xeito teremos unha ferramenta moi potente que nos permitirá interpretar os resultados gráficos.

A partir dos parámetros orbitais que consideramos na táboa 5.1 calcularemos cada un dos termos onde se maximicen as perturbacións, é dicir, no perixeo. Para iso comezaremos lembrando a expresión xeral do hamiltoniano do problema a analizar segundo a ecuación (4.92)



**Figura 5.9:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_M$  co modelo zonal de grao 10 para dous días (ver unidades do eixe de ordenadas en <sup>10</sup>, unidades do eixe de abscisas en minutos).

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) = \mathcal{H}_k(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + \mathcal{V}_T(\mathbf{r}) + \mathcal{H}_r(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\mathcal{E}}) + \mathcal{V}_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\epsilon}), \quad (5.7)$$

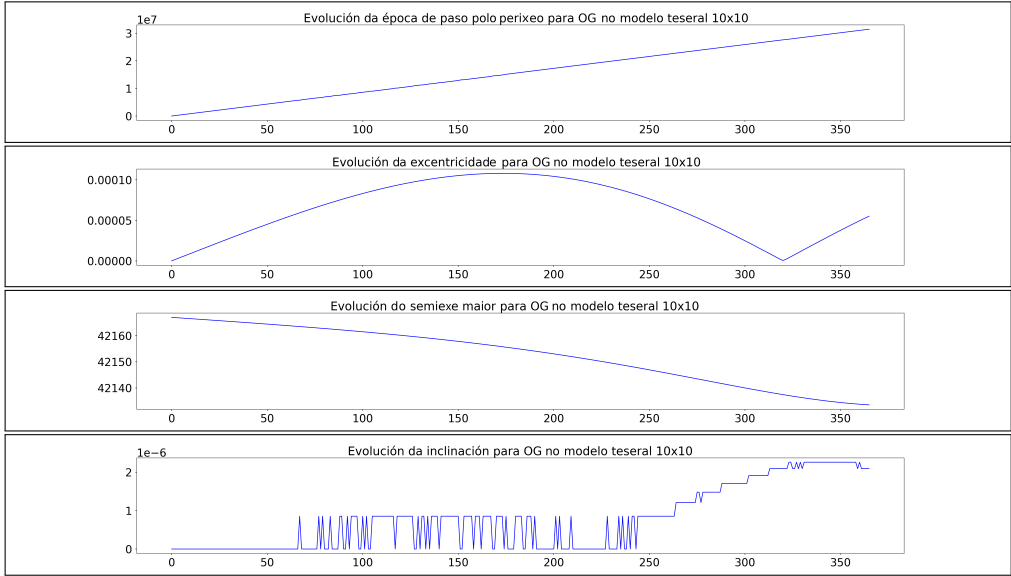


Figura 5.10: Evolución dos elementos orbitais para  $O_G$  co modelo teseral 10x10 para 365 días (ver lenda en 5.1).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_k &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}, \\
 \mathcal{H}_r &= \frac{1}{2A_s} \left[ \Theta \cos \phi + \frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta) \right]^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2B_s} \left[ -\Theta \text{sen } \phi + \frac{\cos \phi}{\text{sen } \theta} (\Psi - \Phi \cos \theta) \right]^2 + \frac{\Phi^2}{2C_s}, \\
 \mathcal{V}_s &= -\frac{\mu}{2r^3} [(A_s - B_s)(1 - 3\alpha_s^2) + (C_s - B_s)(1 - 3\gamma_s^2)], \\
 \mathcal{V}_T &= \frac{\mu J_2 r_T^2}{2r^3} (1 - 3\gamma_T^2).
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Deste modo, as correspondentes ecuacións de Hamilton (ver en (1.18)) pódense escribir na forma

	$O_B$		$O_G$		$O_M$	
	$\ \nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_T/\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_s\ $	$\nabla_{\epsilon}\mathcal{V}_s$	$\ \nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_T/\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_s\ $	$\nabla_{\epsilon}\mathcal{V}_s$	$\ \nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_T/\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_s\ $	$\nabla_{\epsilon}\mathcal{V}_s$
1	$5.12306\times 10^{-11}$	$2.17352\times 10^{-12}$	$4.95164\times 10^{-11}$	$8.58706\times 10^{-29}$	$1.66371\times 10^{-11}$	$1.60883\times 10^{-12}$
2	$1.17458\times 10^{-9}$	$4.98330\times 10^{-11}$	$1.13528\times 10^{-9}$	$1.96878\times 10^{-27}$	$3.81445\times 10^{-10}$	$3.68864\times 10^{-11}$
3	$1.17458\times 10^{-7}$	$4.98330\times 10^{-9}$	$1.13528\times 10^{-7}$	$1.96878\times 10^{-25}$	$3.81445\times 10^{-8}$	$3.68864\times 10^{-9}$
4	$3.66470\times 10^{-6}$	$1.55479\times 10^{-7}$	$3.54208\times 10^{-6}$	$6.14261\times 10^{-24}$	$1.19011\times 10^{-6}$	$1.15085\times 10^{-7}$
5	$1.17458\times 10^{-5}$	$4.98330\times 10^{-7}$	$1.13528\times 10^{-5}$	$1.96878\times 10^{-23}$	$3.81445\times 10^{-6}$	$3.68864\times 10^{-7}$

**Táboa 5.9:** Relación entre as normas das derivadas parciais de  $\mathcal{V}_s$  e  $\mathcal{V}_T$  con respecto ás coordenadas orbitais e a de  $\mathcal{V}_s$  con respecto ás coordenadas rotacionais en función dos momentos de inercia.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \nabla_{\mathbf{R}}\mathcal{H}_k, & \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} &= \nabla_{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\mathcal{H}_k, \\
 \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= -(\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{H}_k + \nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_T + \nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_s), & \frac{d\boldsymbol{\mathcal{E}}}{dt} &= -(\nabla_{\boldsymbol{\epsilon}}\mathcal{H}_k + \nabla_{\boldsymbol{\epsilon}}\mathcal{V}_s),
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

onde as ecuacións da esquerda representan a órbita (variables  $(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ ) e as da dereita a rotación (variables  $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\mathcal{E}})$ ).

A partir deste sistema de ecuacións podemos analizar os termos que perturban a órbita ( $\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_T$  e  $\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_s$ ) e aqueles que o fan sobre a rotación ( $\nabla_{\boldsymbol{\epsilon}}\mathcal{V}_s$ )<sup>14</sup>.

Así, calcularemos  $\|\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_T/\nabla_{\mathbf{r}}\mathcal{V}_s\|$ , a cal amosará o efecto da rotación sobre o Problema Principal, e paralelamente faremos o propio con  $\|\nabla_{\boldsymbol{\epsilon}}\mathcal{V}_s\|$  deducindo o efecto da órbita sobre a rotación.

Os resultados obtidos, que se mostran na táboa 5.9, permítenos observar como a influencia da rotación sobre o Problema Principal é case desprezable independentemente da órbita que se trate. A mesma conclusión tírase do efecto da órbita sobre a rotación, onde chega a ser virtualmente nula no caso de  $O_G$ , pois o denominador  $r^3$  da súa expresión penalízao para órbitas de grande altitude.

De calquera modo faise patente a importancia dos momentos de inercia, pois a orde de magnitude da influencia da rotación sobre o Problema Principal e da órbita sobre a rotación, aumenta do mesmo xeito no que o fai o dos momentos de inercia.

<sup>14</sup>  $\mathcal{H}_k$  é o hamiltoniano orbital kepleriano (é dicir, sen perturbacións) e  $\mathcal{H}_r$  o hamiltoniano correspondente á rotación do sólido libre (tamén sen perturbación); e polo tanto non os consideraremos para ver a influencia sobre os respectivos movementos.

## 5.5. Comprobación con *PSATROT* da influencia mutua entre a órbita e a rotación do satélite

Nesta sección usaremos o propagador *PSATROT* co fin de confirmar as conclusións teóricas do apartado anterior. Á vista dos resultados é obvio que a influencia da rotación na órbita é moi pequena, polo que se fai necesaria unha elección dos modelos que teñan máis afección mostrando unicamente os casos máis representativos co fin de non sobrecargar esta sección.

No que segue analizaremos o efecto da rotación sobre a órbita comparando os resultados de *PSATROT*, con diversos valores para os momentos de inercia e velocidades de rotación, cos obtidos para o mesmo modelo orbital con *PSAT*.

Para as comparacións con *PSATROT* aplicaremos unhas expresións semellantes a (5.5) e (5.6). A variación debida á rotación respecto do modelo sen rotación virá dada por

$$e_r = \left| \frac{x_i^r - x_i^0}{x_0^0} \right| \quad (5.10)$$

cando o parámetro en cuestión sexa o semieixe maior, e

$$e_r = |x_i^r - x_i^0| \quad (5.11)$$

no resto de casos. Nesta ocasión  $x_i^r$  é o valor calculado con *PSATROT* nun instante  $i$ , mentres que  $x_i^0$  será o valor de *PSAT* calculado con ese mesmo modelo nese mesmo intre. Deste xeito poderemos ver a contribución da rotación cando comprobamos o movemento calculado cando non existe (mediante *PSAT*) e cando si se ten en consideración (empregando *PSATROT*).

O seguinte paso é comprobar que acontece cando se inclúe unha rotación no modelo. Debido á falta de espazo faise necesaria unha elección axeitada para mostrar algúns dos 120 casos que se simularon segundo o descrito na táboa 5.6. Ao analizar todas as simulacións constatamos que os resultados do movemento kepleriano son practicamente iguais exista ou non rotación, polo tanto non ha lugar a presentar as figuras dese

caso en particular, e por ese motivo analizaremos o efecto da rotación para o Problema Principal.

Empregando as ecuacións (5.10) e (5.11) poderemos comparar os resultados deste caso cos que obtivemos ao simular mediante *PSAT*. Os valores numéricos das variacións relativas máximas de cada parámetro orbital para as simulacións de cada tipo de órbita durante 365 días móstranse nas táboas 5.10, 5.11 e 5.12.

Se nos detemos nos resultados destas táboas podemos tirar unha conclusión xa coñecida: as diferentes velocidades de rotación teñen escasa influencia e ademais esta atópase encuberta pola importancia dos momentos de inercia. Dos quince casos (cinco momentos de inercia diferentes en tres tipos de órbita diferente), a máxima diferenza relativa para as velocidades de rotación  $\omega_{r_1}$  e  $\omega_{r_4}$  (que difiren en dúas ordes de magnitude) é da orde de  $10^{-3}$ , correspondente a  $\Omega$  para o caso dos maiores momentos de inercia, é dicir  $0.2089^\circ$  ao cabo dun ano, polo tanto practicamente desprezable.

Para ilustralo de xeito gráfico empregaremos un único exemplo, que será un dos máis desfavorables en canto a termos rotacionais, dos simulados. Para iso, co comentado na sección anterior e á vista das táboas desta podemos comprobar que ese caso é  $O_B$ , principalmente cando temos en conta altos momentos de inercia.

Mostraremos as figuras dos elementos orbitais obtidos con *PSATROT* para as diferentes velocidades de rotación e a súa comparación en termos de variacións relativas cos datos obtidos mediante *PSAT* para o exemplo  $O_B$ . Para observar as variacións que existen entre o caso orbital e o rotacional escolléronse dous momentos de inercia diferentes, o 2 e o  $5^{15}$  (ver táboa 5.2). En ambos os casos, mostráranse os valores dos parámetros orbitais para o intervalo de 15 días (figuras 5.12 e 5.14) e posteriormente os de 365 días (figuras 5.13 e 5.15).

Empregaremos a lenda da figura 5.11 naquelas imaxes que conteñan diferentes velocidades de rotación

O que se constata nas gráficas e nas táboas é o comentado na sección anterior: a velocidade de rotación ten efectos moi limitados sobre os elementos que definen a

---

<sup>15</sup> Teñamos en conta que debido a que se fixo unha comparación entre as diferentes velocidades de rotación, empregamos menos puntos que os que constan nas figuras de 5.6, onde representabamos o mesmo modelo obtido mediante *PSAT*. Por ese motivo, as figuras difiren en certos parámetros orbitais, pois pasamos de plasmar as gráficas cun dato cada dous minutos a un cada día.

$O_B$	$T$	$e$	$a$	$i$	$\Omega$	$\omega$
1-1	$2.3689 \times 10^{-5}$	$3.9528 \times 10^{-11}$	$2.1382 \times 10^{-11}$	$1.7936 \times 10^{-11}$	$1.2160 \times 10^{-9}$	$2.9326 \times 10^{-10}$
1-2	$2.1512 \times 10^{-4}$	$3.5468 \times 10^{-10}$	$1.8788 \times 10^{-10}$	$1.5323 \times 10^{-10}$	$5.6221 \times 10^{-9}$	$8.5522 \times 10^{-10}$
1-3	$1.3202 \times 10^{-4}$	$2.1923 \times 10^{-10}$	$1.1888 \times 10^{-10}$	$9.3783 \times 10^{-11}$	$2.9515 \times 10^{-9}$	$8.9101 \times 10^{-10}$
1-4	$1.9229 \times 10^{-3}$	$3.1795 \times 10^{-9}$	$1.7099 \times 10^{-9}$	$1.3531 \times 10^{-9}$	$4.6463 \times 10^{-8}$	$9.8667 \times 10^{-9}$
2-1	$7.0652 \times 10^{-4}$	$1.1760 \times 10^{-9}$	$6.1938 \times 10^{-10}$	$5.0559 \times 10^{-10}$	$1.3584 \times 10^{-8}$	$7.1914 \times 10^{-9}$
2-2	$6.8382 \times 10^{-3}$	$1.1350 \times 10^{-8}$	$6.0907 \times 10^{-9}$	$4.8496 \times 10^{-9}$	$1.6512 \times 10^{-7}$	$3.5551 \times 10^{-8}$
2-3	$5.8970 \times 10^{-2}$	$9.7787 \times 10^{-8}$	$5.1957 \times 10^{-8}$	$4.1717 \times 10^{-8}$	$1.4358 \times 10^{-6}$	$3.0453 \times 10^{-7}$
2-4	$3.3106 \times 10^{-2}$	$5.4735 \times 10^{-8}$	$2.9521 \times 10^{-8}$	$2.3332 \times 10^{-8}$	$8.0374 \times 10^{-7}$	$1.6899 \times 10^{-7}$
3-1	$7.0338 \times 10^{-2}$	$1.1710 \times 10^{-7}$	$6.1656 \times 10^{-8}$	$5.0339 \times 10^{-8}$	$1.3512 \times 10^{-6}$	$7.1767 \times 10^{-7}$
3-2	$6.8332 \times 10^{-1}$	$1.1342 \times 10^{-6}$	$6.0862 \times 10^{-7}$	$4.8461 \times 10^{-7}$	$1.6500 \times 10^{-5}$	$3.5527 \times 10^{-6}$
3-3	5.8978	$9.7810 \times 10^{-6}$	$5.1960 \times 10^{-6}$	$4.1726 \times 10^{-6}$	$1.4358 \times 10^{-4}$	$3.0455 \times 10^{-5}$
3-4	3.3110	$5.4739 \times 10^{-6}$	$2.9521 \times 10^{-6}$	$2.3335 \times 10^{-6}$	$8.0385 \times 10^{-5}$	$1.6900 \times 10^{-5}$
4-1	1.9345	$3.2240 \times 10^{-6}$	$1.6955 \times 10^{-6}$	$1.3886 \times 10^{-6}$	$3.6297 \times 10^{-5}$	$2.0787 \times 10^{-5}$
4-2	$1.6156 \times 10^{+1}$	$2.6899 \times 10^{-5}$	$1.4392 \times 10^{-5}$	$1.1475 \times 10^{-5}$	$3.7935 \times 10^{-4}$	$8.2982 \times 10^{-5}$
4-3	$1.5057 \times 10^{+2}$	$2.4931 \times 10^{-4}$	$1.3107 \times 10^{-4}$	$1.0621 \times 10^{-4}$	$3.7935 \times 10^{-4}$	$7.7155 \times 10^{-4}$
4-4	$1.2413 \times 10^{+2}$	$2.0453 \times 10^{-4}$	$1.1026 \times 10^{-4}$	$8.7019 \times 10^{-5}$	$3.6836 \times 10^{-3}$	$6.3380 \times 10^{-4}$
5-1	7.0333	$1.1710 \times 10^{-5}$	$6.1660 \times 10^{-6}$	$5.0341 \times 10^{-6}$	$1.3510 \times 10^{-4}$	$7.1766 \times 10^{-5}$
5-2	$6.8334 \times 10^{+1}$	$1.1334 \times 10^{-4}$	$6.0799 \times 10^{-5}$	$4.8387 \times 10^{-5}$	$1.6482 \times 10^{-3}$	$3.5476 \times 10^{-4}$
5-3	$5.8940 \times 10^{+2}$	$9.1230 \times 10^{-4}$	$4.7701 \times 10^{-4}$	$3.7471 \times 10^{-4}$	$1.3499 \times 10^{-2}$	$2.9332 \times 10^{-3}$
5-4	$3.3104 \times 10^{+2}$	$5.3534 \times 10^{-4}$	$2.8756 \times 10^{-4}$	$2.2554 \times 10^{-4}$	$7.8828 \times 10^{-3}$	$1.6676 \times 10^{-3}$

Táboa 5.10: Variacións relativas máximas entre  $PSAT$  e  $PSATROT$  para  $O_B$  no Problema Principal para 365 días.

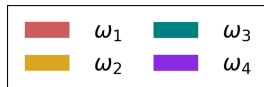
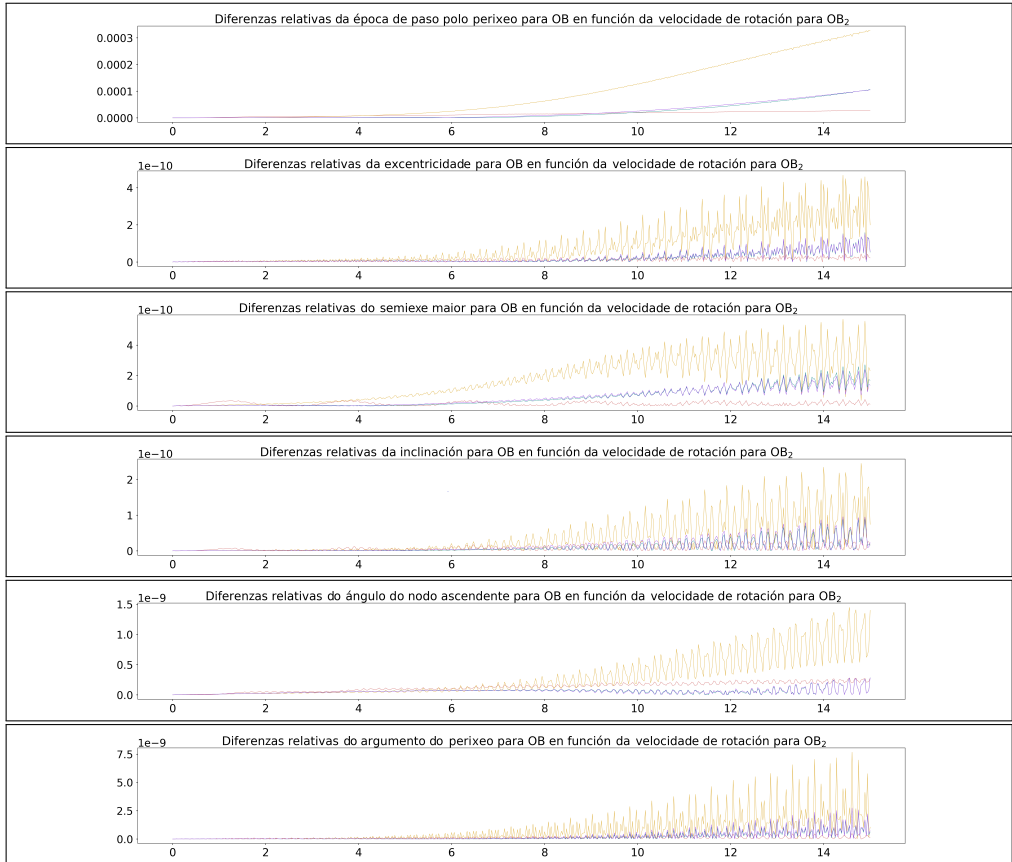
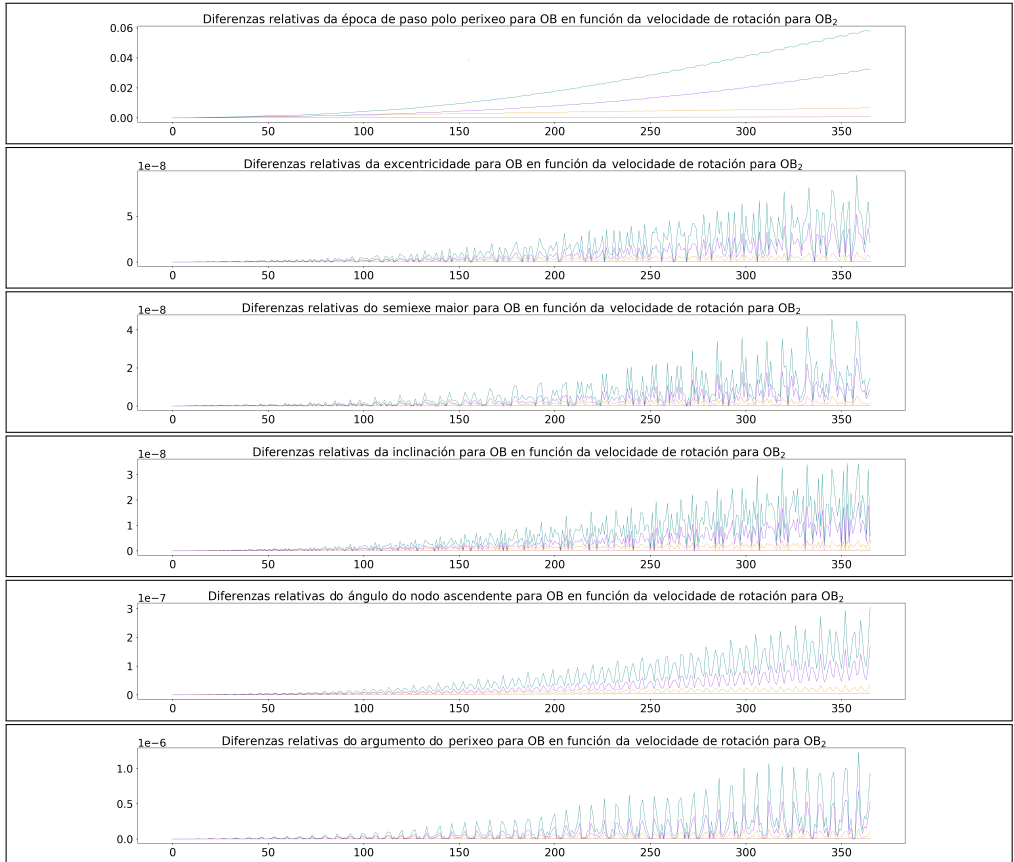


Figura 5.11: Lenda para as figuras con diferentes velocidades de rotación.

órbita. De feito, en tempos curtos (15 días) a evolución para diferentes velocidades de rotación dos parámetros orbitais superponse unha sobre outra tal e como se aprecia nas figuras 5.14. Ademais, para este intervalo de tempo observamos en 5.12 que as variacións relativas son ínfimas e se atopan no entorno de  $10^{-10}$ , agás na época de paso polo perixeo, que o é de  $10^{-4}$ . Esta situación varía cando se toman intervalos de simulación elevados e con momentos de inercia altos como se observa nas figuras 5.15 onde se mostra a evolución dos parámetros orbitais para 365 días e cos momentos



**Figura 5.12:** Variacións relativas máximas entre *PSAT* e *PSATROT* dos elementos orbitais para  $O_B$  do Problema Principal para 15 días (unidades en eixe de abscisas en días).



**Figura 5.13:** Variacións relativas máximas entre  $PSAT$  e  $PSATROT$  dos elementos orbitais para  $O_B$  do Problema Principal para 365 días (unidades en eixe de abscisas en días).

$O_G$	T	e	a	i	$\Omega$	$\omega$
<b>1-1</b>	1.4593	$3.7524 \times 10^{-14}$	$6.3326 \times 10^{-14}$	0.0000	0.0000	$1.3018 \times 10^{-5}$
<b>1-2</b>	3.2618	$1.1351 \times 10^{-13}$	$8.4205 \times 10^{-14}$	0.0000	0.0000	$3.4211 \times 10^{-5}$
<b>1-3</b>	$3.4598 \times 10^{+2}$	$1.0681 \times 10^{-13}$	$1.2148 \times 10^{-13}$	0.0000	0.0000	$6.7372 \times 10^{-5}$
<b>1-4</b>	$8.7083 \times 10^{+4}$	$1.2297 \times 10^{-13}$	$3.4062 \times 10^{-13}$	0.0000	0.0000	$4.0039 \times 10^{-5}$
<b>2-1</b>	1.4593	$7.8237 \times 10^{-14}$	$8.7311 \times 10^{-14}$	0.0000	0.0000	$1.1176 \times 10^{-5}$
<b>2-2</b>	1.4593	$1.3638 \times 10^{-13}$	$1.3148 \times 10^{-13}$	0.0000	0.0000	$1.9658 \times 10^{-5}$
<b>2-3</b>	1.4600	$2.6459 \times 10^{-13}$	$2.4123 \times 10^{-13}$	0.0000	0.0000	$3.6226 \times 10^{-5}$
<b>2-4</b>	$2.6824 \times 10^{+4}$	$2.3921 \times 10^{-13}$	$2.6072 \times 10^{-13}$	0.0000	0.0000	$1.8559 \times 10^{-4}$
<b>3-1</b>	1.4593	$5.7117 \times 10^{-12}$	$1.2391 \times 10^{-11}$	0.0000	0.0000	$4.4987 \times 10^{-6}$
<b>3-2</b>	$3.4254 \times 10^{-1}$	$5.6257 \times 10^{-12}$	$5.3201 \times 10^{-12}$	0.0000	0.0000	$2.9652 \times 10^{-5}$
<b>3-3</b>	$2.5361 \times 10^{+3}$	$5.7121 \times 10^{-12}$	$5.4664 \times 10^{-12}$	0.0000	0.0000	$9.4822 \times 10^{-5}$
<b>3-4</b>	$6.6068 \times 10^{+3}$	$5.6606 \times 10^{-12}$	$5.5663 \times 10^{-12}$	0.0000	0.0000	$6.7416 \times 10^{-5}$
<b>4-1</b>	$1.9191 \times 10^{-2}$	$1.7781 \times 10^{-10}$	$4.9923 \times 10^{-10}$	0.0000	0.0000	$1.8891 \times 10^{-4}$
<b>4-2</b>	3.1073	$1.7634 \times 10^{-10}$	$1.6450 \times 10^{-10}$	0.0000	0.0000	$1.5834 \times 10^{-4}$
<b>4-3</b>	1.5324	$1.7650 \times 10^{-10}$	$1.6453 \times 10^{-10}$	0.0000	0.0000	$1.0205 \times 10^{-4}$
<b>4-4</b>	$1.5503 \times 10^{+1}$	$1.7614 \times 10^{-10}$	$1.6465 \times 10^{-10}$	0.0000	0.0000	$2.2699 \times 10^{-4}$
<b>5-1</b>	1.4600	$5.6830 \times 10^{-10}$	$1.2326 \times 10^{-9}$	0.0000	0.0000	$5.8321 \times 10^{-4}$
<b>5-2</b>	1.4620	$5.6511 \times 10^{-10}$	$5.2728 \times 10^{-10}$	0.0000	0.0000	$5.2468 \times 10^{-4}$
<b>5-3</b>	6.8434	$5.6521 \times 10^{-10}$	$5.2726 \times 10^{-10}$	0.0000	0.0000	$4.8017 \times 10^{-4}$
<b>5-4</b>	$2.4974 \times 10^{+2}$	$5.6495 \times 10^{-10}$	$5.2738 \times 10^{-10}$	0.0000	0.0000	$5.6600 \times 10^{-4}$

**Táboa 5.11:** Variacións relativas máximas entre *PSAT* e *PSATROT* para  $O_G$  no Problema Principal para 365 días.

de inercia  $OB_5$  (recordar na táboa 5.2). Neste caso comézase a ver unha separación da tendencia inicial aos 90 días aproximadamente nos parámetros  $e$ ,  $a$  e  $i$  que afecta principalmente á crista e ao val da evolución. Este fenómeno vai aumentado obténdose os valores máis altos de diferenza relativa na zona final do intervalo (ver as figuras 5.13). En calquera caso, os valores máximos das variacións son practicamente insignificantes, pois atópanse en ordes de magnitude, no peor dos casos (coincidindo co exemplo  $O_B$  e cos maiores momentos de inercia) de entre  $10^{-3}$  e  $10^{-4}$ , mentres que para  $O_G$  vólvese practicamente insignificante. Salientemos nas figuras 5.13 como os valores son proporcionais entre as velocidades de rotación, o que tamén está reflectido nas figuras 5.15, tal e como comentamos con anterioridade.

Do mesmo xeito que coas táboas, as gráficas explican o analizado en 5.4: a rotación é

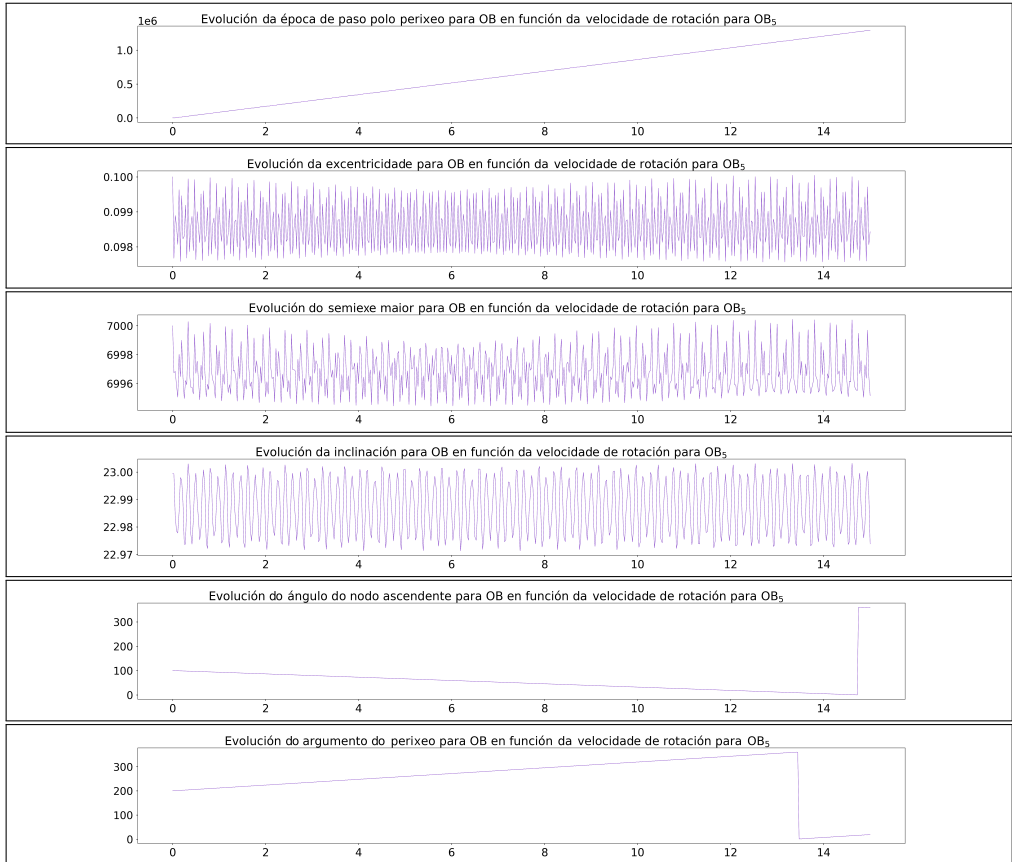
$O_M$	T	e	a	i	$\Omega$	$\omega$
<b>1-1</b>	$2.0626 \times 10^{-4}$	$5.5100 \times 10^{-10}$	$2.0871 \times 10^{-9}$	$7.3020 \times 10^{-11}$	$6.6110 \times 10^{-10}$	$1.9628 \times 10^{-10}$
<b>1-2</b>	$4.5116 \times 10^{-4}$	$1.2032 \times 10^{-9}$	$4.5624 \times 10^{-9}$	$1.5312 \times 10^{-10}$	$1.4584 \times 10^{-9}$	$4.4008 \times 10^{-10}$
<b>1-3</b>	$1.1309 \times 10^{-3}$	$3.0006 \times 10^{-9}$	$1.1380 \times 10^{-8}$	$3.7684 \times 10^{-10}$	$3.6714 \times 10^{-9}$	$1.1173 \times 10^{-9}$
<b>1-4</b>	$1.3892 \times 10^{-3}$	$3.6988 \times 10^{-9}$	$1.4030 \times 10^{-8}$	$4.6410 \times 10^{-10}$	$4.4902 \times 10^{-9}$	$1.3665 \times 10^{-9}$
<b>2-1</b>	$3.2836 \times 10^{-3}$	$8.8069 \times 10^{-9}$	$3.3347 \times 10^{-8}$	$1.2020 \times 10^{-9}$	$1.0450 \times 10^{-8}$	$3.0510 \times 10^{-9}$
<b>2-2</b>	$1.1615 \times 10^{-2}$	$3.0829 \times 10^{-8}$	$1.1703 \times 10^{-7}$	$4.0056 \times 10^{-9}$	$3.8026 \times 10^{-8}$	$1.1846 \times 10^{-8}$
<b>2-3</b>	$3.0499 \times 10^{-2}$	$8.1071 \times 10^{-8}$	$3.0786 \times 10^{-7}$	$1.0708 \times 10^{-8}$	$9.9996 \times 10^{-8}$	$3.1138 \times 10^{-8}$
<b>2-4</b>	$1.7942 \times 10^{-2}$	$4.7690 \times 10^{-8}$	$1.8125 \times 10^{-7}$	$6.4996 \times 10^{-9}$	$5.9258 \times 10^{-8}$	$1.8718 \times 10^{-8}$
<b>3-1</b>	$3.2672 \times 10^{-1}$	$8.7636 \times 10^{-7}$	$3.3182 \times 10^{-6}$	$1.1966 \times 10^{-7}$	$1.0396 \times 10^{-6}$	$3.0341 \times 10^{-7}$
<b>3-2</b>	1.1637	$3.0885 \times 10^{-6}$	$1.1725 \times 10^{-5}$	$4.0116 \times 10^{-7}$	$3.8107 \times 10^{-6}$	$1.1869 \times 10^{-6}$
<b>3-3</b>	3.0520	$8.1123 \times 10^{-6}$	$3.0813 \times 10^{-5}$	$1.0708 \times 10^{-6}$	$1.0015 \times 10^{-5}$	$3.1167 \times 10^{-6}$
<b>3-4</b>	1.7989	$4.7815 \times 10^{-6}$	$1.8175 \times 10^{-5}$	$6.5130 \times 10^{-7}$	$5.9441 \times 10^{-6}$	$1.8770 \times 10^{-6}$
<b>4-1</b>	$1.0679 \times 10$	$2.8571 \times 10^{-5}$	$1.0809 \times 10^{-4}$	$3.8954 \times 10^{-6}$	$3.3882 \times 10^{-5}$	$9.9627 \times 10^{-6}$
<b>4-2</b>	$3.0586 \times 10$	$8.0601 \times 10^{-5}$	$3.0628 \times 10^{-4}$	$1.0370 \times 10^{-5}$	$1.0053 \times 10^{-4}$	$3.1457 \times 10^{-5}$
<b>4-3</b>	$1.0422 \times 10^{+2}$	$2.7298 \times 10^{-4}$	$1.0343 \times 10^{-3}$	$3.6501 \times 10^{-5}$	$3.3909 \times 10^{-4}$	$1.0588 \times 10^{-4}$
<b>4-4</b>	$6.2391 \times 10$	$1.6422 \times 10^{-4}$	$6.2726 \times 10^{-4}$	$2.2404 \times 10^{-5}$	$2.0669 \times 10^{-4}$	$6.4869 \times 10^{-5}$
<b>5-1</b>	$3.2669 \times 10$	$8.7394 \times 10^{-5}$	$3.3010 \times 10^{-4}$	$1.1985 \times 10^{-5}$	$1.0254 \times 10^{-4}$	$3.0204 \times 10^{-5}$
<b>5-2</b>	$1.1632 \times 10^{+2}$	$3.0424 \times 10^{-4}$	$1.1516 \times 10^{-3}$	$4.0232 \times 10^{-5}$	$3.7617 \times 10^{-4}$	$1.1821 \times 10^{-4}$
<b>5-3</b>	$3.0493 \times 10^{+2}$	$7.6320 \times 10^{-4}$	$2.9197 \times 10^{-3}$	$1.0415 \times 10^{-4}$	$9.3131 \times 10^{-4}$	$3.0484 \times 10^{-4}$
<b>5-4</b>	$1.7980 \times 10^{+2}$	$4.6241 \times 10^{-4}$	$1.7522 \times 10^{-3}$	$6.4967 \times 10^{-5}$	$5.6057 \times 10^{-4}$	$1.8440 \times 10^{-4}$

**Táboa 5.12:** Variacións relativas máximas entre *PSAT* e *PSATROT* para  $O_M$  no Problema Principal para 365 días.

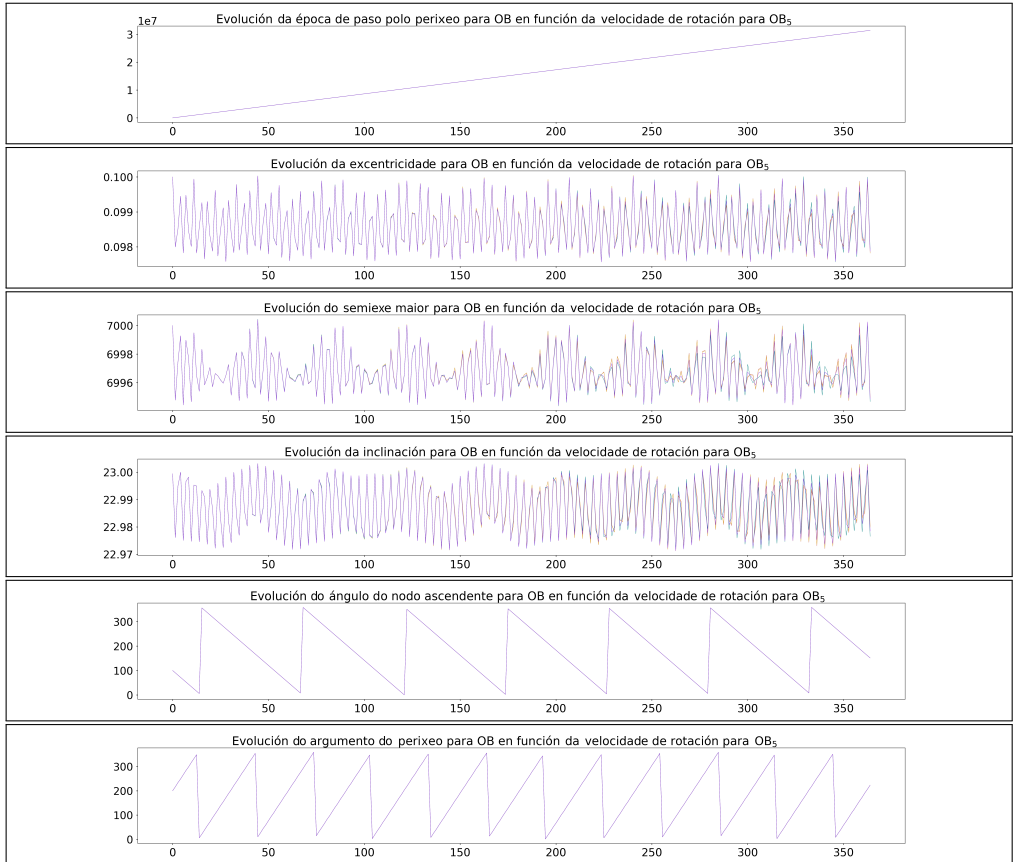
practicamente desprezable en canto á súa influencia non só sobre a órbita senón tamén sobre os parámetros orbitais.

Por outro lado vemos unha cuestión interesante en relación coa velocidade de rotación, pois as súas compoñentes  $\omega_{r_x}$  e  $\omega_{r_y}$  vense alteradas de xeito oscilatorio, aínda que moi lixeiramente, arredor do seu valor inicial, sendo máis importante a amplitude canto menor sexa  $\omega_r$ . A diferenza entre a súa norma e o valor inicial para a velocidade de rotación máis pequena é da orde de  $10^{-5}$ , mentres que para a maior  $\omega_r$  é da orde de  $10^{-11}$ ; polo tanto pódese considerar que é unha variación moi pequena e ilustra perfectamente o efecto da perturbación sobre a rotación. Na figura 5.16<sup>16</sup>

<sup>16</sup> Móstrase o caso máis desfavorable neste senso, o 1-1 xa que no resto de casos (velocidades de

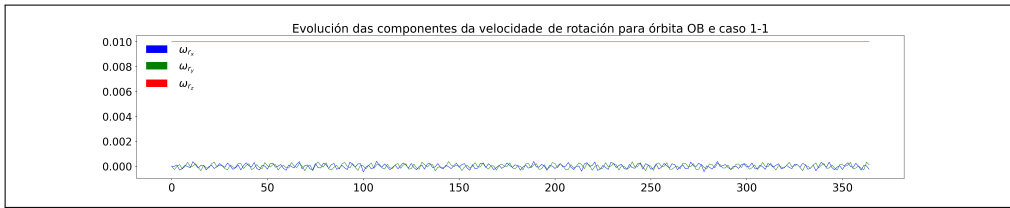


**Figura 5.14:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_B$  do Problema Principal para 15 días (ver unidades en <sup>10</sup>).



**Figura 5.15:** Evolución dos elementos orbitais para  $O_B$  do Problema Principal para 365 días (ver unidades en <sup>10</sup>).

e na táboa 5.13 vemos o dito fenómeno, que non é outro que a precesión do vector velocidade angular. De feito os datos da táboa 5.13 amosan que os valores máximo e mínimo en todos os casos simulados son practicamente o mesmo en módulo (lembrems que nos exemplos estase a utilizar unha velocidade angular unicamente no eixe  $z$ ).



**Figura 5.16:** Evolución das compoñentes das velocidades de rotación ( $\omega_{r_x}$ ,  $\omega_{r_y}$  e  $\omega_{r_z}$ ) para o caso 1-1 para  $O_B$ .

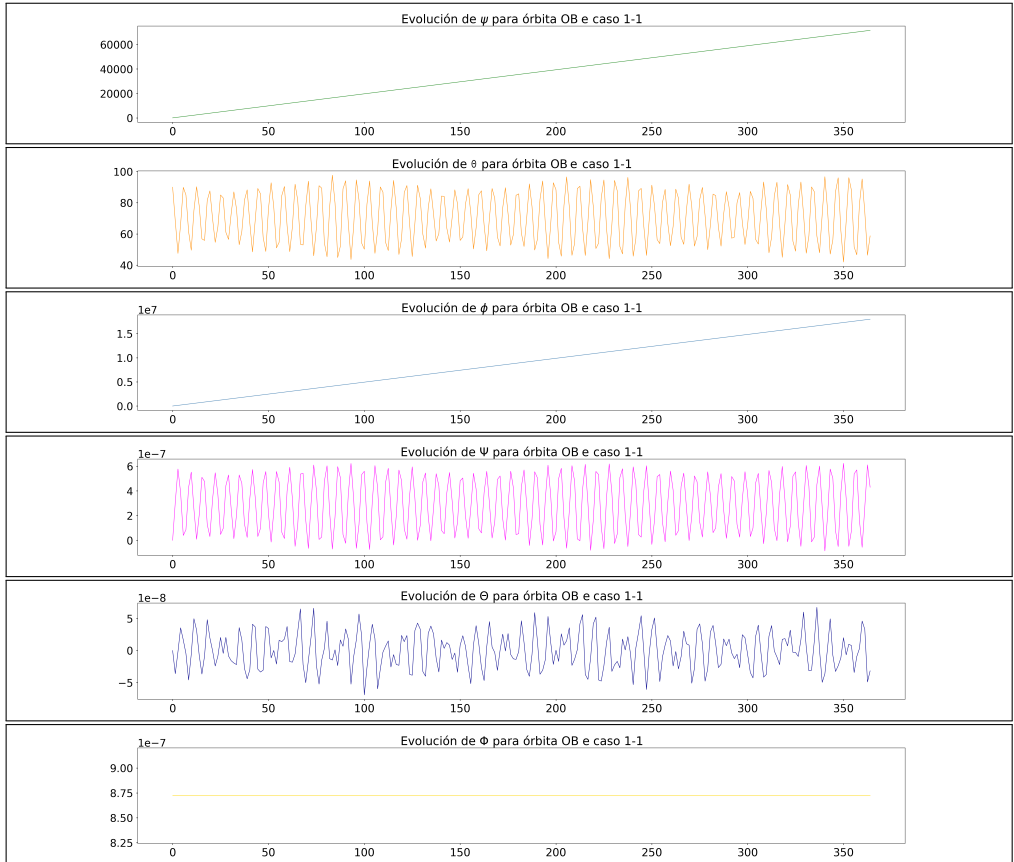
En canto ás coordenadas rotacionais tamén se observa unha variación en función das velocidades de rotación, onde as compoñentes  $\psi$ ,  $\theta$  son maiores canto menor sexa  $\omega_{r_z}$  mentres que a evolución de  $\phi$  faíno á inversa. En calquera caso se aprecia unha estabilización en  $\psi$  conforme aumenta a velocidade de rotación para unha mesma casuística do momento de inercia, de xeito que se vai axustando a un perfil sinusoidal.

En relación cos momentos,  $\Phi$  é constante, pois recordemos que depende de  $\omega_{r_z}$  e de  $C$ , que son invariables. En canto a  $\Psi$  e  $\Theta$  mantéñense dentro dunha mesma orde de magnitude para cada momento de inercia escollido, pero aumentando segundo aumentan estes. Do mesmo modo que sucedía con  $\psi$ , canto máis aumenta  $\omega_{r_z}$  máis se estabiliza, definíndose cada vez mellor.

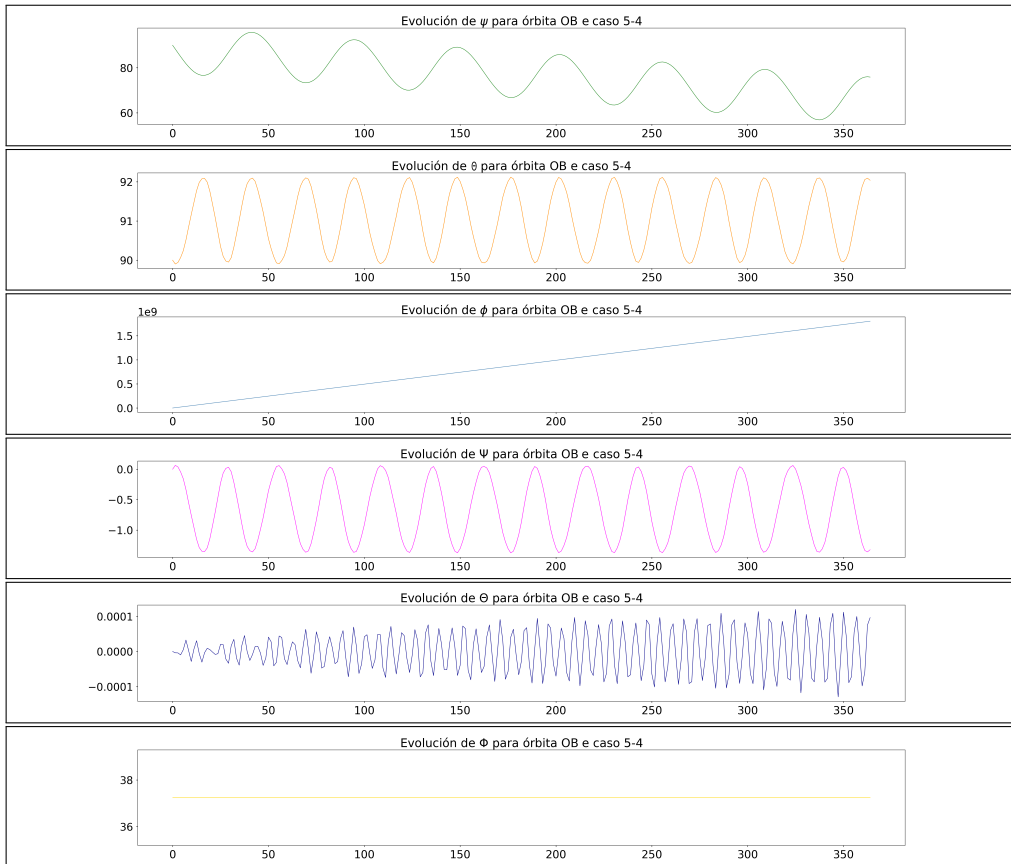
Nas figuras 5.17 e 5.18 represéntanse os comportamentos de  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Theta$ ,  $\Phi$  para o caso 1-1 e 5-4, respectivamente.

Recordemos, en todo caso que nesta sección simulamos uns casos moi concretos, cunhas condicións iniciais moi particulares e estritas, que fan que os resultados non poidan ser extrapolados a calquera outro caso diferente.

rotación 2 a 4) os valores de  $\omega_{r_x}$  e  $\omega_{r_y}$  superpóñense e apenas se aprecia a oscilación, pois é dunha amplitude moi cativa.



**Figura 5.17:** Evolución das compoñentes de  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Theta$  e  $\Phi$  para o caso 1-1 para  $O_B$  (ver unidades en <sup>10</sup>).



**Figura 5.18:** Evolución das compoñentes de  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\Psi$ ,  $\Theta$  e  $\Phi$  para o caso 5-4 para  $O_B$  (ver unidades en <sup>10</sup>).

## 5.6. Aplicación de *PSAT* ao estudo do movemento dun satélite artificial con condicións realistas

Descubrimos no Capítulo 1 (en concreto en 1.1.4) as principais perturbacións que implementamos en *PSAT* segundo o sinalado no Capítulo 3 (a partir de 3.4): xeopotencial (1.1.4 e 3.6), perturbación do terceiro corpo (1.1.4 e 3.7), a radiación solar (1.1.4 e 3.8) e a freada atmosférica (1.1.4 e 3.9). Faise necesario reunir nun único exemplo todas elas ao obxecto de ver o alcance e as posibilidades de *PSAT*.

Empregaremos a órbita  $O_M$ <sup>17</sup> definida anteriormente na táboa 5.1 debido principalmente ao alto valor da súa excentricidade, pois isto permitiranos comprobar

- No seu perixeo (altitude de 477.69 km): a influencia da freada atmosférica e outros termos do potencial máis alá do  $J_2$ .
- No seu apoxeo ( $r = 46\,290.16$  km): a influencia do termo  $J_2$  e do terceiro corpo.

Polo tanto, para aproveitar toda a capacidade de *PSAT* simularemos un exemplo que inclúa, ademais do correspondente modelo de xeopotencial (tomando para iso un modelo *JGM3 70x70*), os catro efectos seguintes: atmosfera, Lúa e Sol e a súa radiación.

Para modelar as perturbacións consideradas tivemos en conta o seguinte

- Freada atmosférica
  - $C_D$ : A partir do comentado en [Montenbruck e Gill \(2001\)](#) acerca do coeficiente de resistencia aerodinámico, tomamos o valor 2.5.
  - $A/m$ : Definiremos unha área exposta por unidade de masa de  $0.1 \times 10^{-6}$  km<sup>2</sup>/kg.
  - $\rho$ : Como vimos en 1.1.4 empregaremos o *modelo ISA* cos valores definidos nese apartado nas unidades correspondentes.
- Terceiro corpo

Utilizáronse as órbitas do Sol e a Lúa correspondentes ao instante *J2000.0* como época estándar para comprobar a perturbación lunisolar.

<sup>17</sup> Lembremos que o seu período orbital é 43 109.74 s, é dicir 12.05 h.

- Radiación solar

O valor de  $\beta$  tomouse como  $1.8471163035579 \times 10^7$  segundo a expresión (1.68) e a partir das constantes que toma [Abad \(2012\)](#).

Os resultados da simulación, presentados a partir da evolución dos seus elementos orbitais así como a distancia no apoxeo e perixeo, móstranse nas imaxes da figura 5.19. O tempo de *PSAT* en realizar este caso foi de  $1.30 \times 10^4$  s, o que é un tempo máis que aceptable tendo en conta que se trata de 15 724 nodos e un intervalo de 365 días cun total de 8 760 puntos intermedios.

De todos os xeitos, analizar estas figuras resulta complicado debido á concatenación das diferentes perturbacións que actúan sobre o movemento translacional. Por iso, para poder relacionar os efectos que se aprecian nas figuras coa súa orixe perturbadora procederemos a analizar as perturbacións de forma individual sobre o caso kepleriano, de modo que poidamos identificar os patróns que nos indicarán cal é a perturbación que o orixina. Para facilitar o seguimento escolléronse as seguintes abreviaturas

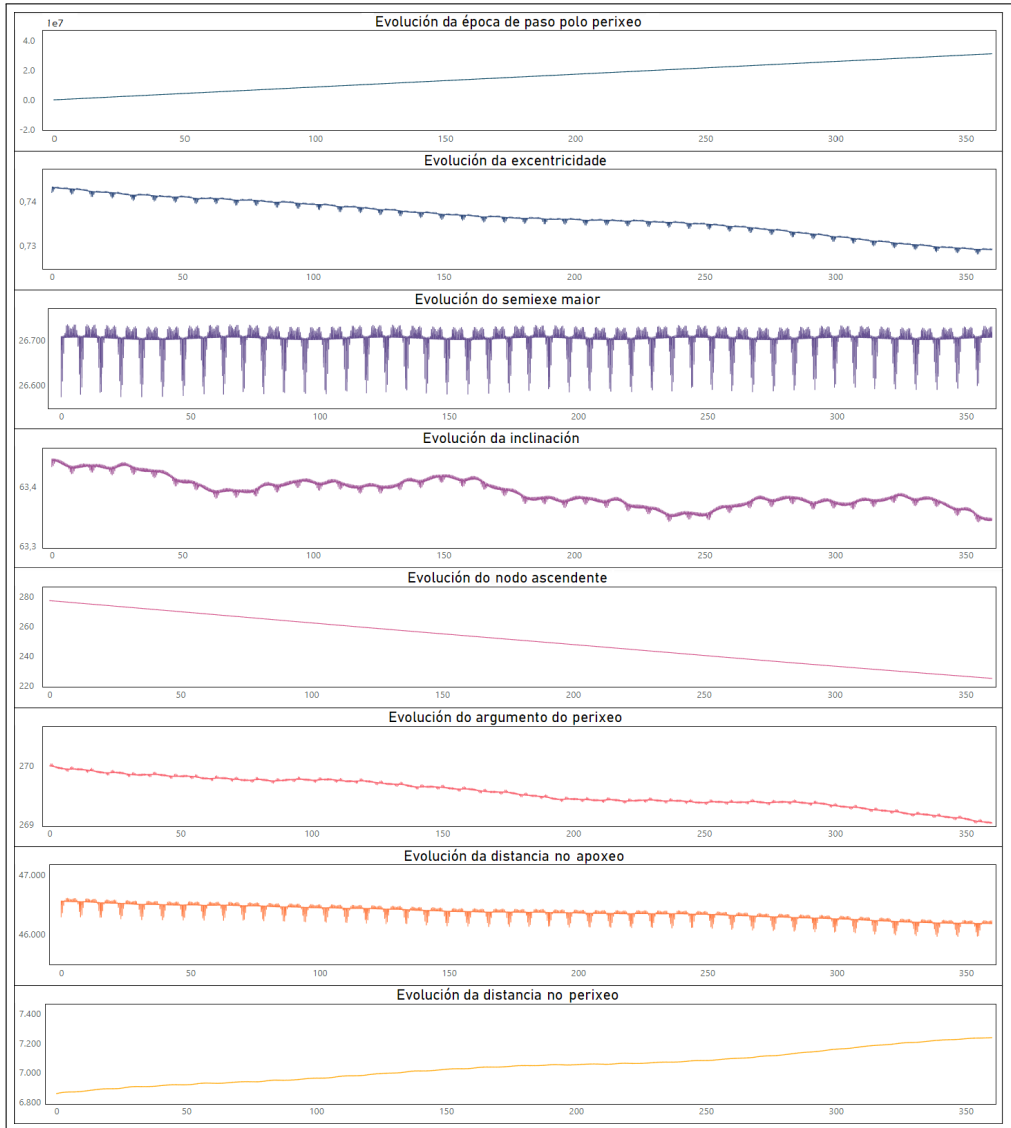
- |   |   |
|---|---|
| ▪ <b>(K)</b> Caso kepleriano                | ▪ <b>(L)</b> Influencia gravitatoria da Lúa |
| ▪ <b>(T)</b> Xeopotencial tesimal 70x70     | ▪ <b>(R)</b> Radiación solar                |
| ▪ <b>(S)</b> Influencia gravitatoria do Sol | ▪ <b>(A)</b> Freada atmosférica             |

Polo tanto veremos os resultados de *PSAT* para o caso que nos ocupa para os seguintes casos: **(K) + (A)**, **(K) + (S)**, **(K) + (L)**, **(K) + (T)** e **(K) + (S) + (R)**.

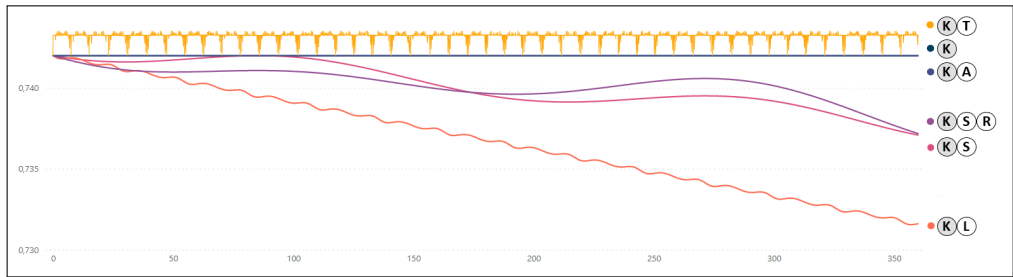
Na figura 5.20 amósase a evolución da excentricidade para 365 días e en 5.21 un detalle da figura anterior para ver a periodicidade das perturbacións lunisolares en 60 días.

Por outra banda móstrase na figura 5.22 a distancia no apoxeo nos intervalos temporais de 365 días e 2 días.

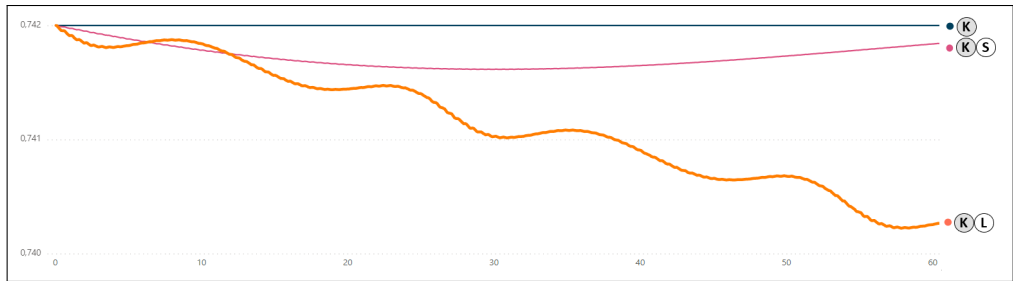
Para interpretar as imaxes da figura 5.19, que representa a evolución dos elementos orbitais do problema completo durante un ano, podemos facer uso das anteriores figuras 5.20, 5.21 e 5.22, de modo que tiramos a seguinte información



**Figura 5.19:** Evolución dos elementos orbitais e das distancias no apoxeo e perixeo no caso da excentricidade para o caso kepleriano co modelo teseral 70x70, influencia lunisolar, radiación e freada atmosférica (ver unidades en <sup>10</sup>).



**Figura 5.20:** Evolución da excentricidade para o caso kepleriano coas diferentes perturbacións e as súas combinacións durante 365 días (ver unidades en <sup>10</sup>).

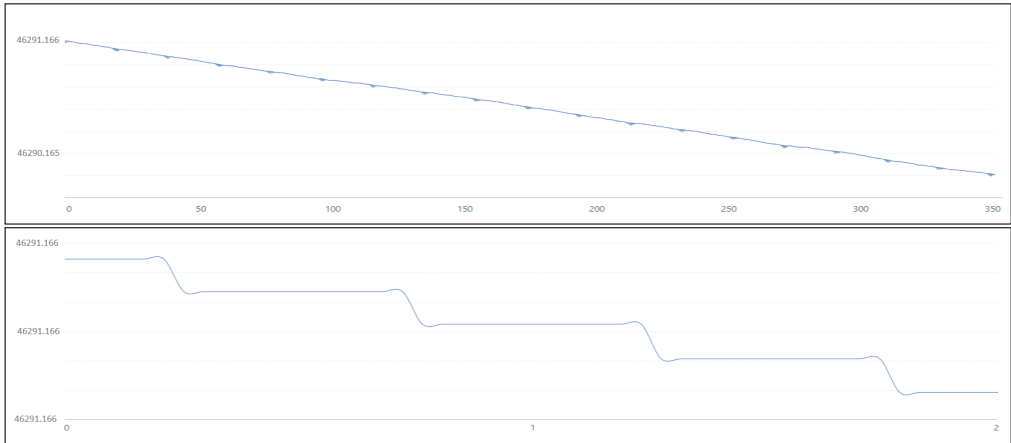


**Figura 5.21:** Evolución da excentricidade para o caso kepleriano coas diferentes perturbacións e as súas combinacións durante 60 días (ver unidades en <sup>10</sup>).

- A fredda atmosférica neste caso ten un efecto case desprezable. De feito na figura 5.22 a diferenza da distancia no apoxeo ao cabo dun ano é de tan só  $1.13 \times 10^{-2}$  km. Na mesma figura observamos como funciona a fredda atmosférica reducindo a distancia no apoxeo da órbita con cada paso do satélite polo perixeo, que é onde se manifesta a influencia da fredda. Lembremos que o período orbital de  $O_M$  é 43 109.74 s, polo tanto cada 12 h pasará pola zona na que se nota a influencia do rozamento atmosférico, aínda que o satélite permanece durante pouco espazo de tempo nesta zona (de aí a importancia deste tipo de órbitas). Na imaxe inferior da figura 5.22 apréciase perfectamente este aspecto, onde ademais, a orde de magnitude da diferenza da dita distancia en cada paso é arredor de  $10^{-6}$  km.



- A perturbación lunar é aproximadamente o dobre da do Sol, e ademais a primeira



**Figura 5.22:** Evolución da distancia no apoxeo durante 365 días e detalle durante dous días (ver unidades en <sup>10</sup>).

faise notar periodicamente ao cabo de case un mes (período orbital da Lúa, 27.32166 días).

- A perturbación do Sol, por outra banda, ten unha periodicidade de aproximadamente un ano.
- A radiación solar actúa, como era de agardar, de xeito paralelo á do Sol. Ademais, o efecto é oposto pero de menor magnitude que a atracción solar, logo contribúe a diminuír este.
- Hai unha variación periódica de curto período (período orbital) debida fundamentalmente ao potencial terrestre. Esta variación apréciase na figura 5.19 amplificada e/ou atenuada nalgúns dos elementos orbitais, especialmente na evolución do semieixe maior e en menor medida na excentricidade e a inclinación.

	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_{rz}$
<b>1-1</b>	$4.7386 \times 10^{-4}$	$4.7400 \times 10^{-4}$	$1.0000 \times 10^{-2}$
	$-4.7190 \times 10^{-4}$	$-4.7607 \times 10^{-4}$	
<b>1-2</b>	$3.1692 \times 10^{-5}$	$3.1841 \times 10^{-5}$	$1.0000 \times 10^{-1}$
	$-3.1774 \times 10^{-5}$	$-3.1741 \times 10^{-5}$	
<b>1-3</b>	$6.2807 \times 10^{-6}$	$6.2678 \times 10^{-6}$	$5.0000 \times 10^{-1}$
	$-6.3092 \times 10^{-6}$	$-6.2525 \times 10^{-6}$	
<b>1-4</b>	$6.0935 \times 10^{-6}$	$6.1566 \times 10^{-6}$	1.0000
	$-6.0511 \times 10^{-6}$	$-5.9377 \times 10^{-6}$	
<b>2-1</b>	$1.8327 \times 10^{-4}$	$1.8276 \times 10^{-4}$	$1.0000 \times 10^{-2}$
	$-1.8304 \times 10^{-4}$	$-1.8383 \times 10^{-4}$	
<b>2-2</b>	$1.6941 \times 10^{-5}$	$1.6908 \times 10^{-5}$	$1.0000 \times 10^{-1}$
	$-1.6953 \times 10^{-5}$	$-1.6909 \times 10^{-5}$	
<b>2-3</b>	$6.6083 \times 10^{-6}$	$6.7179 \times 10^{-6}$	$5.0000 \times 10^{-1}$
	$-6.7377 \times 10^{-6}$	$-6.7433 \times 10^{-6}$	
<b>2-4</b>	$5.7571 \times 10^{-6}$	$5.8331 \times 10^{-6}$	1.0000
	$-5.7635 \times 10^{-6}$	$-5.7464 \times 10^{-6}$	
<b>3-1</b>	$1.8327 \times 10^{-4}$	$1.8275 \times 10^{-4}$	$1.0000 \times 10^{-2}$
	$-1.8304 \times 10^{-4}$	$-1.8383 \times 10^{-4}$	
<b>3-2</b>	$1.6941 \times 10^{-5}$	$1.6909 \times 10^{-5}$	$1.0000 \times 10^{-1}$
	$-1.6955 \times 10^{-5}$	$-1.6909 \times 10^{-5}$	
<b>3-3</b>	$6.6154 \times 10^{-6}$	$6.7155 \times 10^{-6}$	$5.0000 \times 10^{-1}$
	$-6.7425 \times 10^{-6}$	$-6.7430 \times 10^{-6}$	
<b>3-4</b>	$5.7548 \times 10^{-6}$	$5.8341 \times 10^{-6}$	1.0000
	$-5.7623 \times 10^{-6}$	$-5.7473 \times 10^{-6}$	
<b>4-1</b>	$2.0612 \times 10^{-4}$	$2.0734 \times 10^{-4}$	$1.0000 \times 10^{-2}$
	$-2.0598 \times 10^{-4}$	$-2.0717 \times 10^{-4}$	
<b>4-2</b>	$1.9305 \times 10^{-5}$	$1.9245 \times 10^{-5}$	$1.0000 \times 10^{-1}$
	$-1.9261 \times 10^{-5}$	$-1.9206 \times 10^{-5}$	
<b>4-3</b>	$7.6547 \times 10^{-6}$	$7.0624 \times 10^{-6}$	$5.0000 \times 10^{-1}$
	$-7.6722 \times 10^{-6}$	$-7.0618 \times 10^{-6}$	
<b>4-4</b>	$6.3696 \times 10^{-6}$	$6.4390 \times 10^{-6}$	1.0000
	$-6.3403 \times 10^{-6}$	$-6.3423 \times 10^{-6}$	
<b>5-1</b>	$1.8328 \times 10^{-4}$	$1.8272 \times 10^{-4}$	$1.0000 \times 10^{-2}$
	$-1.8303 \times 10^{-4}$	$-1.8381 \times 10^{-4}$	
<b>5-2</b>	$1.6933 \times 10^{-5}$	$1.6943 \times 10^{-5}$	$1.0000 \times 10^{-1}$
	$-1.6986 \times 10^{-5}$	$-1.6909 \times 10^{-5}$	
<b>5-3</b>	$6.6006 \times 10^{-6}$	$6.6706 \times 10^{-6}$	$5.0000 \times 10^{-1}$
	$-6.6632 \times 10^{-6}$	$-6.7723 \times 10^{-6}$	
<b>5-4</b>	$5.7886 \times 10^{-6}$	$5.7874 \times 10^{-6}$	1.0000
	$-5.7754 \times 10^{-6}$	$-5.7224 \times 10^{-6}$	

Táboa 5.13: Valores máximo e mínimo das compoñentes das velocidades de rotación.

# Conclusións e traballos futuros

## Conclusións

As principais novidades achegadas nesta tese de doutoramento foron, por unha banda, deseñar e implantar dous propagadores orbitais, *PSAT* e *PSATROT*, baseados no método das series de Taylor e, por outro, conseguir a extensión das ecuacións de Lagrange ao movemento rototranslatorio do satélite.

Como consecuencia da elaboración deste Informe, cabe destacar as seguintes conclusións

- Realizouse unha revisión exhaustiva dos fundamentos relacionados co movemento orbital do satélite artificial, incluíndo as diferentes perturbacións así como os principais métodos de integración das ecuacións de movemento que se utilizaron, tanto analíticas como semianalíticas. e numéricos.
- O método de series de Taylor estendeuse para traballar directamente con potenciais e hamiltonianos no canto de con forzas, para o que se formulou e implementou unha extensión da álgebra de series a un operador que inclúe a función e as súas derivadas.
- Creouse o propagador orbital *PSAT* que usa álgebra en serie estendida e trata forzas e potenciais simultaneamente. Este propagador permite o tratamento das seguintes perturbacións: potencial terrestre, perturbación dun terceiro corpo, radiación solar, freada atmosférica e outras forzas de tipo radial, tanxencial e normal.

- *PSAT* traballa cun número variable de nodos, o que permite incluír diferentes perturbacións a elección do usuario, e pode traballar co potencial planetario de calquera orde e grao sen calcular previamente a expresión das derivadas.
- *PSAT* inclúe o tratamento de parámetros dependentes do tempo que se poden utilizar, por exemplo, para satélites con área-masa variable, velas solares cunha área variable ou para calcular a posición dun terceiro corpo a partir dos seus elementos orbitais.
- Reformulouse o movemento conxunto orbital e rotacional do satélite artificial, aclarando a definición das variables e a expresión dos distintos termos do hamiltoniano.
- Definíronse uns elementos rotacionais formalmente similares aos clásicos orbitais, o que nos permite establecer de forma compacta e simultánea as ecuacións do movemento orbital e rotacional do satélite, dando lugar así á extensión das ecuacións de Lagrange.
- Foi implementado o propagador *PSATROT* como unha extensión de *PSAT* para o estudo conxunto do movemento orbital e rotacional. *PSATROT* usa a formulación hamiltoniana e require duplicar o número de variables para tratar o problema.
- Mediante a posta en práctica de varios exemplos, comprobouse a eficiencia de ambos os propagadores, *PSAT* e *PSATROT*, así como o feito de que a influencia da rotación no movemento orbital e viceversa é moi feble.
- Simulouse un caso completo coas principais perturbacións, e nel identificouse a orixe das oscilacións que amosan a evolución dos distintos parámetros implicados.

Realizouse unha tese de doutoramento que contén varias contribucións novidasas como dous propagadores orbitais que teñen en conta diferentes formulacións utilizando o método das series de Taylor para realizar as integracións. Utilizando a diferenciación automática para desenvolver as diferentes perturbacións obtivemos programas informáticos rápidos, de alta precisión, moi sinxelos de usar e mellorar, ben aumentando a precisión ou reprogramándoos para o seu uso en paralelo. Ademais, obtivemos

o que demos en chamar ecuacións de Lagrange xeneralizadas, que son unha extensión das clásicas ecuacións de Lagrange pero teñen en conta a rotación. Finalmente comprobamos os resultados dos propagadores baixo diferentes condicións iniciais.

### Traballos inmediatos e futuro

O primeiro que temos en mente é preparar dous artigos para a súa publicación en revistas *WOS* que recollan as principais novidades do noso traballo, é dicir, a obtención das Ecuacións de Lagrange xeneralizadas e a presentación dos dous propagadores desenvolvidos. Á parte disto, outras liñas abertas son

- A extensión a *PSAT* dalgunhas das características do integrador *TIDES*
  - Cálculo das derivadas das variables respecto dos parámetros para poder calcular a matriz de monodromía e aplicalo á obtención de órbitas periódicas.
  - Engadir ao cálculo das variables na integración o cálculo de funcións externas destas variables e parámetros.
- Obtención de resultados teóricos a partir do uso das ecuacións de Lagrange xeneralizadas para o movemento orbital-rotacional.



# Bibliografía

- Abad, A. (2012). *Astrodinámica*. Bubok Publishing S.L. ISBN 978-8468628578.
- Abad, A., Barrio, R., Blesa, F. e Rodríguez, M. (2012). Algorithm 924: TIDES, a Taylor series integrator for differential equations. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 39:5:1–5:28.
- Abad, A., Barrio, R. e Dena, A. (2011). Computing periodic orbits with arbitrary precision. *Physical Review E*, 84:1–6.
- Abad, A., Docobo, J. A. i Elipe, A. (2ª ed. - 2017). *Curso de Astronomía*. Prensas de la Universidad de Zaragoza. ISBN 978-8416935673.
- Abad, A., Elipe, A. e Sein-Echaluze, M. L. (1987). Método estroboscópico en variables de Delaunay. Aplicación a un radial del satélite artificial. *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, 42:81–90.
- Abad, A. e Lacruz, E. J. (2013). Computing derivatives of a gravity potential by using automatic differentiation. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117:187–200.
- Aljbaae, S., Chanut, T. G. G., Carruba, V., Souchay, J., Prado, A. F. B. A. e Amarante, A. (2017). The dynamical environment of asteroid 21 Lutetia according to different internal models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 464:3552–3560.
- Andoyer, M. H. (1923). *Cours de mécanique céleste. Tome I*. Gauthier-Villars.
- Aparicio Morgado, I. (2013). Sobre la definición y construcción sistemática de variables canónicas de tipo focal. aplicación a sistemas keplerianos perturbados. Tese de doutoramento, Universidad de Valladolid.

- Arribas, M. (1989). Sobre la dinámica de actitud de satélites artificiales. Tese de doutoramento, Universidad de Zaragoza.
- Arribas, M., Casanova, D., Elipe, A. e Palacios, M. (2014). Bifurcations in the attitude dynamics of an axial-symmetric satellite in a central field. *Monografías Matemáticas, García de Galdeano*, 39:33–43.
- Ascher, U. M. e Petzold, L. R. (1998). *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM. ISBN 978-0898714128.
- Atkinson, K., Hall, W. e Stewart, D. (2008). *Numerical Solutions of Ordinary Differential Equations*. Wiley. ISBN 978-9814635080.
- Bailey, D. H., Barrio, R. e Borwein, J. M. (2012). High-precision computation: Mathematical physics and dynamics. *Applied Mathematics and Computation*, 218:10106–10121.
- Bailey, D. H. e Borwein, J. M. (2015). High-precision arithmetic in Mathematical Physics. *Mathematics*, 3:337–367.
- Balmino, G., Barriot, J., Koop, R., Middel, B., Thong, N. e Vermeer, M. (1991). Simulation of gravity gradients: a comparison study. *Bulletin Geodesique*, 65:218–229.
- Barrio, R. (2005). Performance of the Taylor series method for ODEs/DAEs. *Applied Mathematics and Computation*, 163:525–545.
- Barrio, R., Martínez, M. A., Pérez, L. e Pueyo, E. (2020). Bifurcations and slow-fast analysis in a cardiac cell model for investigation of early afterdepolarizations. *Mathematics*, 8.
- Barrio, R., Martínez, M. A., Serrano, S. e Shilkilov, A. (2014). Macro- and micro-chaotic structures in the Hindmarsh-Rose model of bursting neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 24.
- Barrio, R., Rodríguez, M., Abad, A. e Serrano, S. (2011). Uncertainty propagation or box propagation. *Mathematical and Computer Modelling*, 54:2602–2615.

- Barrio, R. e Shilnikov, A. (2011). Parameter-sweeping techniques for temporal dynamics of neuronal systems: Case study of Hindmarsh-Rose model. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, 1:880.
- Barrio, R., Shilnikov, A. e Shilnikov, L. (2012). Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos. A tutorial. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22.
- Bate, R. R., Mueller, D. D. e White, J. E. (1971). *Fundamentals of astrodynamics*. Dover Publications, Inc. ISBN 978-0486600611.
- Berz, M., Hoefkens, J. e Makino, K. (2001). COSY INFINITY version 8.1 - user's guide and reference manual. Technical report, Department of Physics and Astronomy, Michigan State University.
- Binet, M. (1841). Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les formules générales de la dynamique, et dans un système d'équations analogues plus étendues. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, XVII:1-94.
- Brouwer, D. (1959). Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *The Astronomical Journal*, 64:378-397.
- Brouwer, D. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. New York: Academic Press. ISBN 978-1483225784.
- Brouwer, D. e Clemence, G. M. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press. ISBN 978-0121356507.
- Butcher, J. C. (2000). Numerical methods for ordinary differential equations in the 20<sup>th</sup> century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 125:1-29.
- Butcher, J. C. (2003). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley. ISBN 978-0471967583.
- Caballero, J. A. (1975). Movimiento de un satélite artificial bajo la acción gravitatoria terrestre. Teoría de segundo orden en las variables de Hill. Tese de doutoramento, Universidad de Zaragoza.

- Calvo, M. (1971). Aplicaciones de los métodos de promedios al estudio del movimiento de satélites artificiales. Tese de doutoramento, Universidad de Zaragoza.
- Cantero, A., Crespo, F. e Ferrer, S. (2018). The triaxiality role in the spin-orbit dynamics of a rigid body. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 3:187–208.
- Capderou, M. (2014). *Handbook of Satellite Orbits: From Kepler to GPS*. Springer. ISBN 978-3319034157.
- Cefola, P., Folcik, Z., Di-Costanzo, R., Bernard, N., Setty, S. e San Juan, J. (2014). Revisiting the DSST standalone orbit propagator. *Advances in the Astronautical Sciences*, 152:2891–2914.
- Chang, Y. F. e Corliss, G. (1994a). ATOMF: solving ODEs and DAEs using Taylor series. *Computers & Mathematics with Applications*, 28:209–233.
- Chang, Y. F. e Corliss, G. (1994b). Solving ordinary differential equations using Taylor series. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 3-4:114–144.
- Chen, W., Li, J. C., Ray, J., Shen, W. e Huang, C. L. (2015). Consistent estimates of the dynamic figure parameters of the Earth. *Journal of Geodesy*, 89:179–188.
- Cid, R. (1967). Eliminación de singularidades en la solución de Brouwer para satélites artificiales. Informe, Actas VIII Reunión Matemática - Universidade de Santiago de Compostela.
- Cid, R. e Lahulla, J. F. (1969). Perturbaciones de corto período en el movimiento de un satélite artificial, en función de las variables de Hill. *Universidad de Zaragoza*, 24:159–165.
- Cid, R. e Lahulla, J. F. (1971). Perturbaciones de segundo orden y corto período, para el movimiento de un satélite artificial, en las variables de Hill. Artículo, Universidad de Zaragoza.
- Clément, G. e Buckley, A. (2007). *Artificial Gravity*. Springer. ISBN 978-0321024015.
- Cochran, J. E. e Lahr, B. S. (1986). Satellite attitude motion models for capture and retrieval investigations. Informe, NASA - George C. Marshall Space Flight Center.

- Crespo, F. (2014). Hopf fibration reduction of a quartic model. Applications to rotational and orbital dynamics. Tese de doutoramento, Universidad de Murcia - Facultad de Informática.
- Curtis, H. D. (2005). *Orbital mechanics for engineering students*. Elsevier. ISBN 978-0750661690.
- Danby, J. M. A. (1998). *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Atlantic Books. ISBN 978-0943396200.
- de Orús Navarro, J. J., Català Poch, M. A. e Núñez de Murga, J. (2007). *Astronomía Esférica y Mecánica Celeste*. Universitat de Barcelona. ISBN 978-8447530595.
- Delaunay, C. E. (1867). *Théorie du Mouvement de la Lune. Vol 2*. Gauthier-Villars.
- Dena, A., Abad, A. e Barrio, R. (2012). High-precision periodic orbits corrector. Artículo, Monografías Matemáticas García de Galdeano.
- Dena, A., Abad, A. e Barrio, R. (2016). Efficient computational approaches to obtain periodic orbits in hamiltonian systems: Application to the motion of a lunar orbiter. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 124:51–71.
- Dena, A., Rodríguez, M., Serrano, S. e Barrio, R. (2012). High-precision continuation of periodic orbits. *Abstract and Applied Analysis*, 2012.
- Deprit, A. (1969). Canonical transformations depending on a small parameter. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1:12–30.
- Deprit, A. (1981). The elimination of the parallax in satellite theory. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 24:111–153.
- Deprit, A. e Rom, A. (1970). The main problem of artificial satellite theory for small and moderate eccentricities. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2:166–206.
- Docobo, J. A. (1977). Aplicación de la teoría de perturbaciones al estudio de sistemas estelares triples. Tese de doutoramento, Universidad de Zaragoza. D.L. Z - 1254/1977.

- Docobo, J. A. (2021). *Apuntes de Astrodinámica. Máster en Matemáticas*. Universidade de Santiago de Compostela. Pendente de publicación.
- Docobo, J. A., Piccotti, L., Abad, A. e Campo, P. P. (2021). A study about the secular evolution of the hierarchical Three-Body Problem using the numerical integrator TIDES. *The Astronomical Journal*, 161:43.
- Dormand, J. R. (1996). *Numerical Methods for Differential Equations: A Computational Approach*. CRC Press. ISBN 978-1315896007.
- Dormand, J. R. e Prince, P. (1978). New Runge-Kutta algorithms for numerical simulation in dynamical astronomy. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 8(3):223–232.
- Dormand, J. R. e Prince, P. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19–26.
- Ferrándiz, J. M. e Sansaturio, M. E. (1988). General motion of a triaxial rigid body in a newtonian force field. Informe, Long-Term Dynamical Behaviour of Natural and Artificial N-Body Systems. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences).
- Ferrándiz, J. M. e Sansaturio, M. E. (1989). Elimination of the nodes when the satellite is a non spherical rigid body. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 46:307–320.
- Ferrándiz, J. M., Sansaturio, M. E. e Caballero, R. (1993). On the roto-translatory motion of a satellite of an oblate primary. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 57:189–202.
- Ferrer, S. e Lara, M. (2010). Integration of the rotation of an Earth-like body as a perturbed spherical rotor. *The Astronomical Journal*, 139:1899–1908.
- Ferrer, S. e Lara, M. (2012). On roto-translatory motion: Reductions and radial intermediaries. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 59:21–39.
- Ferrer, S. e Molero, F. J. (2014). Intermediaries for gravity-gradient attitude dynamics I. Action-angle variables. *Advances in the Astronautical Sciences, 2nd IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems*.

- Ferrer, S., Molero, F. J. e Crespo, F. (2014). Intermediaries for gravity-gradient attitude dynamics II. The role of triaxiality. *Advances in the Astronautical Sciences, 2nd IAA Conference on Dynamics and Control of Space Systems*.
- Franco García, J. M. (1988). Métodos numéricos para la integración directa de problemas orbitales. aplicaciones. Tese de doutoramento, Universidad de Zaragoza.
- Früh, C., Kececy, T. M. e Moriba, K. J. (2013). Coupled orbit-attitude dynamics of high area-to-mass ratio (HAMR) objects: Influence of solar radiation pressure, Earth's shadow and the visibility in light curves. *Celestial Mechanics*, 117:385–404.
- Früh, C. e Schildknecht, T. (2012). Variation of the area-to-mass ratio of high area-to-mass ratio space debris objects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 419:3521–3528.
- Fukushima, T. (2017). Precise and fast computation of the gravitational field of a general finite body and its application to the gravitational study of asteroid Eros. *The Astronomical Journal*, 154.
- Garfinkel, B. (1959). The orbit of a satellite of an oblate planet. *The Astronomical Journal*, 64:353–363.
- Genova, A., Goossens, S., Lemoine, F. G., Mazarico, E., Neumann, G. A., Smith, D. E. e Zuber, M. T. (2016). Seasonal and static gravity field of Mars from MGS, Mars Odyssey and MRO Radio Science. *Icarus*, 272:228–245.
- Genova, A., Goossens, S., Mazarico, E., Lemoine, F. G., Neumann, G. A., Kuang, W., Sabaka, T. J., Hauck, S. A. I., Smith, D. E., Solomon, S. C. e Zuber, M. T. (2019). Geodetic evidence that Mercury has a solid inner core. *Geophysical Research Letters*, 46:3625–3633.
- Gerlach, E., Eggl, S. e Skokos, C. (2012). Efficient integration of the variational equations of multi-dimensional hamiltonian systems: Application to the Fermi-Pasta-Ulam lattice. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22.
- Gerlach, E. e Skokos, C. (2011). Comparing the efficiency of numerical techniques for the integration of variational equations. Technical report, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications - 8<sup>th</sup> AIMS Conference.

- Goldstein, H., Poole, C. P. e J., S. (2011). *Classical Mechanics - 3<sup>rd</sup> Edition*. Pearson Education. ISBN 978-8131758915.
- Goossens, S. J., Lemoine, F., Rosenblatt, P., Mazarico, E. e Lebonnois, S. (2017). Venus gravity field modeling from Magellan and Venus express tracking data. Informe, Proceedings of the 48<sup>th</sup> Lunar and Planetary Science Conference.
- Goossens, S. J., Lemoine, F., Sabaka, T. J., Nicholas, J. B., Mazarico, E., Rowlands, D. D., Loomis, B. D., Chinn, D. S., Neumann, G. A., Smith, D. E. e Zuber, M. T. (2016). A global degree and order 1200 model of the lunar gravity field using GRAIL mission data. Informe, 47<sup>th</sup> Lunar and Planetary Science Conference.
- Griffiths, D. F. e Higham, D. J. (2010). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: Initial Value Problems*. Springer. ISBN 978-0857291479.
- Gurfil, P. (2008). Simple satellite orbit propagator. *Spaceflight Mechanics 2008, Advances in the Astronautical Sciences*, 130(1):1033–1052.
- Hairer, E., Lubich, C. e Roche, M. (2019). *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. Springer. ISBN 978-1590786291.
- Hargreaves, J. K. (1992). *The Solar-Terrestrial Environment An Introduction to Geospace - the Science of the Terrestrial Upper Atmosphere, Ionosphere, and Magnetosphere*. Cambridge University Press. ISBN 978-0521327480.
- Hashida, Y. (2003). Analytical solution for autonomous determination of near circular orbits. Tese de doutoramento, University of Surrey.
- Hautesserres, D. e Lara, M. (2017). Intermediary LEO propagation including higher order zonal harmonics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 127:505–526.
- Hernández, K., Elgohary, T. A., Turner, J. D. e Junkins, J. L. (2019). A novel analytic continuation power series solution for the perturbed Two-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 131:48:1–48:32.
- Hill, G. W. (1900). On the extension of Delaunay’s method in the lunar theory to the General Problem of planetary motion. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1:205–242.

- Hill, G. W. (1913). Motion of a system of material points under the action of gravitation. *The Astronomical Journal*, 27:171–182.
- Hoffmann, P. H. W. (2016). A hitchhiker’s guide to automatic differentiation. *Numerical Algorithms*, 72:775–811.
- Hoots, F. R. e Röhrich, R. L. (1980). Spacetrack Report n°3, models for propagation of NORAD element sets. Informe, Aerospace Defense Center, Peterson Air Force Base.
- Hori, G. (1960). The motion of an artificial satellite in the vicinity of the critical inclination. *The Astronomical Journal*, 65:291–299.
- Hori, G. (1966). Theory of general perturbations with unspecified canonical variables. *Astronomical Society of Japan*, 18:287–296.
- Horner, S. D., Wilkie, W. K., Fernandez, J. M., Brown, P. L. e Fishman, J. L. (2019). Advanced composite solar sail system: Demonstrating deployable composite solar sails for future deep space small spacecraft. Informe, National Aeronautics and Space Administration - NASA.
- Janin, G. (1979). Mission analysis for terrestrial satellites and planetary orbiters: Software design and algorithm description. Informe, ESA STM-208.
- Jiménez, E. S. (2016). Clasificación topológica del flujo hamiltoniano de algunos problemas roto-traslatorios. Tese de doutoramento, Universidad Politécnica de Cartagena - Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.
- Jorba, A. e Zou, M. (2005). A software package for the numerical integration of ODE by means of high-order Taylor methods. *Experimental Mathematics*, 14:9–117.
- Kamel, A. A. (1970). Perturbation method in the theory of nonlinear oscillations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 3:90–106.
- Kastsian, D., Oertel, E. e Mönnigmann, M. (2014). Optimal parameters for stable walking of a compass-like biped robot. Conference, IEEE Conference on Control Applications (CCA).

- Kinoshita, H. (1970). Stationary motions of an axisymmetric body around a spherical body and their stabilities. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 22:383–526.
- Kinoshita, H. (1972). First-order perturbation of the two finite body problem. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 24:423–457.
- Kinoshita, H. (1978). Third-order solution of an artificial-satellite theory. *International Astronomical Union Colloquium*, 41:241–257.
- Kirpichnikov, S. N., Kirpichnikova, E. S., Polyakhova, E. N. e Shmyrov, A. S. (1995). Planar heliocentric roto-translatory motion of a spacecraft with a solar sail of complex shape. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 63:255–269.
- Konopliv, A., Asmar, S., Park, R., Bills, B., Centinello, F., Chamberlin, A. B., Ermakov, A., Gaskell, R., Rambaux, N., Raymond, C., Russell, C., Smith, D., Tricarico, P. e Zuber, M. (2013). The dynamical environment of asteroid 21 Lutetia according to different internal models. *Icarus*, 240:103–117.
- Konopliv, A. e Yoder, C. F. (1996). Venusian k2 tidal Love number from Magellan and PVO tracking data. *Geophysical Research Letters*, 23:1857–1860.
- Konopliv, A. S., Banerdt, W. B. e Sjogren, W. L. (1999). Venus gravity: 180<sup>th</sup> degree and order model. *Icarus*, 139:3–18.
- Kovalevsky, J. (1967). *Introduction to Celestial Mechanics*. Springer Netherlands. ISBN 978-9027701268.
- Kozai, Y. (1959). The motion of a close Earth satellite. *The Astronomical Journal*, 64:367–377.
- Kozai, Y. (1962). Second-order solution of artificial satellite theory without air drag. *The Astronomical Journal*, 67:446–461.
- Kozai, Y. (1966). The earth gravitational potential derived from satellite motion. *Space Science Reviews*, 5:818–879.
- Lacruz, E. J. (2013). Problema de Lambert para órbitas perturbadas. aplicación a la búsqueda de órbitas cuasiestacionarias. Tese de doutoramento, Universidad de Zaragoza.

- Lahulla, F. (1970). Movimiento de satélites artificiales. Eliminación de pequeños divisores en una teoría de segundo orden. Tese de doutoramento, Universidad de Zaragoza.
- Lambert, J. D. (1991). *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: the Initial Value Problem*. Wiley. ISBN 978-0471929901.
- Lara, M. (2018). Complex variables approach to the short-axis-mode rotation of a rigid body. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 3:537–552.
- Lecohier, G. (1985). Informe, MAO Working Paper, N<sup>o</sup> 221.
- Leimanis, E. (1965). *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*. Springer -Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3642884146.
- Leipold, M., Kassing, D., Eiden, M. e Herbeck, L. (1999). Solar sails for space exploration – the development and demonstration of critical technologies in partnership. Informe, European Space Agency - ESA.
- Lemoine, F. G., Goossens, S., Sabaka, T. J., Nicholas, J. B., Mazarico, E., Rowlands, D. D., Loomis, B. D., Chinn, D. S., Neumann, G. A., Smith, D. E. e Zuber, M. T. (2014). GRGM900C: A degree 900 lunar gravity model from GRAIL primary and extended mission data. *Geophysical Research Letters*, 41:3382–3389.
- Lemoine, F. G., Smith, D. E., Zuber, M. T., Neumann, G. A. e Rowlands, D. D. (1997). A 70<sup>th</sup> degree and order lunar gravity model (GLGM-2) from Clementine and historical data. *Journal of Geophysical Research*, 102:16339–16359.
- Ling, J. F. (1989). Aplicación del método estroboscópico al Problema Estelar de Tres Cuerpos. Tese de doutoramento, ORMA - Universidade de Santiago de Compostela.
- Ling, J. F. (1991). Application of the stroboscopic method to the Stellar Three-Body Problem. *Astrophysics and Space Science*, 185:51–61.
- Liu, X., Yuan, B. e Meng, Z. (2018). Microsatellite autonomous orbit propagation method based on SGP4 model and GPS data. Informe, EEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC), Xiamen, China.

- Lubow, A. G. (1969). How critical is the critical inclination? *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1:6–10.
- Lundberg, J. B. e Schutzf, B. E. (1988). Recursion formulas of Legendre functions use with nonsingular geopotential models. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 11:31–38.
- Margossian, C. (2019). A review of automatic differentiation and its efficient implementation. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 9.
- Mazarico, E., Genova, A., Goosens, S., Lemoine, F. G., Neumann, G. A., Zuber, M. T., Smith, D. E. e Solomon, S. C. (2015). The gravity field, orientation, and ephemeris of Mercury from MESSENGER observations after three years in orbit. *Journal of Geophysical Research*, 119:2417–2436.
- Meyer, K. R., Hall, G. R. e Offin, D. (2009). *Introduction to hamiltonian dynamical system and the N-body problem*. Springer. ISBN 978-0387097237.
- Molero, F. J. (2013). On the perturbed fast rotating satellite. closed form vs. series expansion approach. Tese de doutoramento, Universidad de Murcia.
- Montenbruck, O. e Gill, E. (2001). *Satellite Orbits. Models, Methods and Applications*. Springer. ISBN 978-3540672807.
- Moulton, F. R. (1984). *An Introduction to Celestial Mechanics*. Dover Publications Inc. ISBN 978-0486646879.
- Navarro, J. F. (2011). Teoría analítica de la rotación de la tierra rígida mediante manipulación simbólica específica. Tese de doutoramento, Universidad de Alicante - Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada.
- Neelon, J. G., Cefola, P. e Proulx, R. J. (1997). Current development of the draper semianalytical satellite theory standalone orbit propagator package. *The Journal of the Astronautical Sciences*, 97:97–731.
- Oertel, J. (2020). Pair production in spacetime-dependent fields using WKB-like techniques. Tese de doutoramento, Universität Duisburg-Essen.

- Patiño, M. E. (2013). Control orbital de satélites geoestacionarios. Tese de doutoramento, Universidad Complutense de Madrid.
- Pohst, M. e Zassenhaus, H. (1997). *Algorithmic Algebraic Number Theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)*. Cambridge Univ. Press. ISBN 978-0521330602.
- Prince, P. e Dormand, J. R. (1981). Revisiting the DSST standalone orbit propagator. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 7(1):67–75.
- Šprlák, M., Han, S. C. e Featherstone, W. (2019). Spheroidal forward modelling of the gravitational fields of 1 Ceres and the Moon. *Icarus*, 335.
- Rapp, R. H. (1998). Past and future developments in geopotential modeling. Informe, International Association of Geodesy Symposia.
- Reimond, S. e Baur, O. (2016). Spheroidal and ellipsoidal harmonic expansions of the gravitational potential of small solar system bodies. case study: Comet 67P/Churyumov-Gerasimenko. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 121:497–515.
- Rossouw, N. (2015). A GPS-based on-board orbit propagator for low Earth-orbiting CubeSats. Tese de doutoramento, Stellenbosch University.
- Roth, E. A. (1973). Fast computation of high eccentricity orbits by the stroboscopic method. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 8:245–249.
- Roth, E. A. (1978). An application of the stroboscopic method. *International Astronomical Union Colloquium*, 41:181–188.
- Roth, E. A. (1979). On the higher-order stroboscopic method. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 30:315–325.
- Roth, E. A. (1985). Application of the stroboscopic method to equinoctial elements. *Acta Astronaut*, 12:71–80.
- Roth, E. A. (1996). An introduction to automatic differentiation. *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools*, 89.

- Roy, A. E. (2005). *Orbital Motion - 4<sup>th</sup> Edition*. Routledge. ISBN 978-0750310154.
- San Juan, J. F., López, L. M. e López, R. (2012). Higher-order analytical attitude propagation of an oblate rigid body under gravity-gradient torque. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- Seeber, G. (1993). *Satellite Geodesy: Foundations, Methods and Applications*. Hubert & Co. GmbH & Co. KG. ISBN 978-3110127539.
- Sein-Echaluze, M. L., Abad, A. i Elipe, A. (1987a). Application of the stroboscopic method to the radial intermediaries in satellite theory. *International Astronautical Congress, 38th, Brighton, England*.
- Sein-Echaluze, M. L., Abad, A. i Elipe, A. (1987b). The stroboscopic method in hill variables. application to orbit propagation. *Astrodynamics 1987; Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference, Kalispell, MT*, pp. 519–525.
- Serret, J. A. (1866). Mémoire sur l'emploi de la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, XXXV:585–616.
- Shniad, H. (1970). The equivalence of von Zeipel mappings and lie transforms. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2:114–120.
- Sitiwaldi, I. e Xie, B. S. (2018). Pair production by three fields dynamically assisted Schwinger process. *Physics Letters B*, 777.
- Smith, D. E., Lerch, F. J., Nerem, R. S., Zuber, M. T., Patel, G. B., Fricke, S. K. e Lemoine, F. G. (1993). An improved gravity model for Mars: Goddard Mars Model 1. *Journal of Geophysical Research*, 98:20871–20889.
- Soler, F. A. (2016). Intermediarios radiales del movimiento roto-traslatorio de satélites artificiales. Tese de doutoramento, Universidad de Murcia - Departamento de Matemática Aplicada.
- Taff, L. G. (1985). *Celestial Mechanics: A Computational Guide for the Practitioner*. John Wiley Sons Inc. ISBN 978-0471893165.

- Tewari, A. (2007). *Atmospheric and Space Flight Dynamics: Modeling and Simulation with MATLAB® and Simulink®*. Springer. ISBN 978-0817643737.
- Torgrimsson, G. (2019). Perturbative methods for assisted nonperturbative pair production. *Physical Review D*, 99.
- Torgrimsson, G., Schneider, C., Oertel, J. e Schützhold, R. (2017). Dynamically assisted Sauter-Schwinger effect non-perturbative versus perturbative aspects. *Journal of High Energy Physics*, 6.
- Vallado, D. A. e Cefola, P. J. (2012). Two-line element sets - practice and use. Report, 63<sup>rd</sup> International Astronautical Congress, Naples, Italy.
- Valtonen, M. e Karttunen, H. (2006). *The Three-Body Problem*. Cambridge University Press. ISBN 978-0521852241.
- Verma, A. K. e Margot, J. L. (2016). Mercury's gravity, tides, and spin from MESSENGER radio science data. *Journal of Geophysical Research*, 121:1627–1640.
- Vetter, J. (1994). The evolution of Earth gravitational models used in Astrodynamics. *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 15:319–335.
- Vilhena de Moraes, R., Cabette, R., Zanardi, M., Stuchi, T. e Formiga, J. (2009). Attitude stability of artificial satellites subject to gravity gradient torque. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104:337–353.
- Vinti, J. P. (1998). *Orbital and Celestial Mechanics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. ISBN 978-1563472565.
- von Zeipel, H. (1916). Recherches sur le mouvement des petites planètes. *Arkiv för Matematik - Astronomi och Fysik*, 11:1–58.
- Walter, U. (2019). *Astronautics. The Physics of Space Flight (3<sup>rd</sup> edition)*. Wiley. ISBN 978-3319743721.
- Weiland, C. (2010). *Computational space flight mechanics*. Springer. ISBN 978-3642135828.
- Whittaker, E. (1904). *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge Univ. Press.

- Wilczak, D. e Barrio, R. (2020). Distribution of stable islands within chaotic areas in the non-hyperbolic and hyperbolic regimes in the Henon-Heiles system. *Nonlinear Dynamics*, 102:403–416.
- Wilczak, D., Serrano, S. e Barrio, R. (2016). Coexistence and dynamical connections between hyperchaos and chaos in the 4D Rössler system: a computer-assisted proof. *Journal on Applied Dynamical Systems*, 15:356–390.
- Zanardi, M. C. (1985). Attitude stability of artificial satellites subject to gravity gradient torque. *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica*, 10:355–366.
- Zanardi, M. C. (1986). Study of the terms of coupling between rotational and translational motions. *Celestial Mechanics*, 39:147–158.

# Índice de figuras

0.1	Esquema da Metodoloxía empregada no desenvolvemento da Tese. . .	11
1.1	Representación do ángulo, $f$ , o raio vector, $r$ , o parámetro, $p$ , e o semieixe maior da elipse, $a$ . . . . .	15
1.2	Esquema xeral da <i>Lei de Gravitación Universal</i> . . . . .	16
1.3	Anomalías media, excéntrica e verdadeira. . . . .	17
1.4	Sistemas de coordenadas empregados. . . . .	19
1.5	Parámetros orbitais. . . . .	20
1.6	Esquema dos elementos útiles para o cálculo do potencial creado por un sólido nun punto exterior. . . . .	26
1.7	Coordenadas polares esféricas para o cálculo de $\cos\theta$ . . . . .	29
1.8	Coordenadas cilíndricas para o cálculo de $\cos\theta$ . . . . .	30
1.9	Modelos <i>EIGEN</i> , <i>GEM</i> , <i>GRIM</i> e <i>OSU</i> ao longo dos anos en función do seu grao máximo. . . . .	36
1.10	Esquema dos elementos útiles para o cálculo da influencia dun terceiro corpo. . . . .	38
1.11	Absorción total, $\epsilon = 0$ . . . . .	41
1.12	Reflexión total, $\epsilon = 1$ . . . . .	41

1.13	Valor de $\beta$ en función dos valores de $\epsilon$ (0.2 e 0.9) e $A/m$ (0.02 e 1). Diferente escala vertical. . . . .	43
1.14	Órbitas real ( $O_R$ ) e oscultriz ( $O_O$ ) do método de Encke. . . . .	92
1.15	Método de Euler con diferentes chanzos aplicado ao problema $y'=y$ . . . . .	95
1.16	Método de Euler mellorado (RK2) con diferentes chanzos aplicado ao problema $y'=y$ . . . . .	95
1.17	Método de Runge-Kutta de cuarta orde (RK4) con diferentes chanzos aplicado ao problema $y'=y$ . . . . .	97
1.18	Método de Adams-Beshforth aplicado ao problema $y'=y$ . . . . .	103
2.1	Estrutura de árbore da función (2.11). . . . .	110
3.1	Esquema dun propagador orbital. . . . .	136
4.1	Representación do sólido ríxido. . . . .	175
4.2	Representación gráficas dos ángulos de Euler. . . . .	177
4.3	Variables de Andoyer. . . . .	183
4.4	Sistemas de referencia $\mathcal{E}$ , $\mathcal{P}$ e $\mathcal{G}$ . . . . .	187
4.5	Sistemas de referencia tras as hipóteses tomadas. . . . .	188
4.6	Diagrama para o cálculo da enerxía potencial entre a Terra e un satélite. . . . .	193
5.1	Lenda para as figuras co conxunto de modelos simulados. . . . .	234
5.2	Evolución dos elementos orbitais para $O_B$ nos catro casos simulados durante 365 días (ver lenda en 5.1). . . . .	235
5.3	Evolución dos elementos orbitais para $O_G$ nos catro casos simulados durante 365 días (ver lenda en 5.1). . . . .	236
5.4	Evolución dos elementos orbitais para $O_M$ nos catro casos simulados durante 365 días (ver lenda en 5.1). . . . .	237
5.5	Tempos de cálculo (en s) de <i>PSAT</i> para os casos simulados durante un ano. Escala vertical logarítmica. . . . .	238
5.6	Evolución dos elementos orbitais para $O_B$ co modelo do Problema Principal para 365 días (ver lenda en 5.1). . . . .	239
5.7	Evolución dos elementos orbitais para $O_B$ co modelo do Problema Principal para un día (ver unidades do eixe de ordenadas en <sup>10</sup> , uni- dades do eixe de abscisas en minutos). . . . .	240



5.8	Evolución dos elementos orbitais para $O_M$ co modelo zonal de grao 10 para 365 días (ver lenda en 5.1).	241
5.9	Evolución dos elementos orbitais para $O_M$ co modelo zonal de grao 10 para dous días (ver unidades do eixe de ordenadas en <sup>10</sup> , unidades do eixe de abscisas en minutos).	242
5.10	Evolución dos elementos orbitais para $O_G$ co modelo teseral 10x10 para 365 días (ver lenda en 5.1).	243
5.11	Lenda para as figuras con diferentes velocidades de rotación.	247
5.12	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> dos elementos orbitais para $O_B$ do Problema Principal para 15 días (unidades en eixe de abscisas en días).	248
5.13	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> dos elementos orbitais para $O_B$ do Problema Principal para 365 días (unidades en eixe de abscisas en días).	249
5.14	Evolución dos elementos orbitais para $O_B$ do Problema Principal para 15 días (ver unidades en <sup>10</sup> ).	252
5.15	Evolución dos elementos orbitais para $O_B$ do Problema Principal para 365 días (ver unidades en <sup>10</sup> ).	253
5.16	Evolución das compoñentes das velocidades de rotación ( $\omega_{r_x}$ , $\omega_{r_y}$ e $\omega_{r_z}$ ) para o caso 1-1 para $O_B$ .	254
5.17	Evolución das compoñentes de $\psi$ , $\theta$ , $\phi$ , $\Psi$ , $\Theta$ e $\Phi$ para o caso 1-1 para $O_B$ (ver unidades en <sup>10</sup> ).	255
5.18	Evolución das compoñentes de $\psi$ , $\theta$ , $\phi$ , $\Psi$ , $\Theta$ e $\Phi$ para o caso 5-4 para $O_B$ (ver unidades en <sup>10</sup> ).	256
5.19	Evolución dos elementos orbitais e das distancias no apoxeo e perixeo no caso da excentricidade para o caso kepleriano co modelo teseral 70x70, influencia lunisolar, radiación e freada atmosférica (ver unidades en <sup>10</sup> ).	259
5.20	Evolución da excentricidade para o caso kepleriano coas diferentes perturbacións e as súas combinacións durante 365 días (ver unidades en <sup>10</sup> ).	260

5.21	Evolución da excentricidade para o caso kepleriano coas diferentes perturbacións e as súas combinacións durante 60 días (ver unidades en <sup>10</sup> ). . . . .	260
5.22	Evolución da distancia no apoxeo durante 365 días e detalle durante dous días (ver unidades en <sup>10</sup> ). . . . .	261

# Táboas

1.1	Valores no SI das fórmulas do modelo de densidade <i>ISA</i> . . . . .	46
2.1	Táboa de versións de <i>TIDES</i> . . . . .	129
3.1	Esquema de cálculo das derivadas das funcións de Legendre. . . . .	162
5.1	Elementos orbitais iniciais das órbitas estudadas <sup>18</sup> . . . . .	227
5.2	Eixes dun elipsoide de revolución tipo $(a, b, c)$ (m) e momentos de inercia normalizados $(A_s, B_s, C_s)$ ( $\text{km}^2$ ) dos obxecto simulados. . .	229
5.3	Intervalos das velocidades de rotación para a zona de confort en función de cada obxecto. . . . .	230
5.4	Velocidades de rotación empregadas para as simulacións, en rad/s. .	230
5.5	Resumo de simulacións para <i>PSAT</i> . . . . .	232
5.6	Resumo de simulacións para <i>PSATROT</i> . . . . .	232
5.7	Máximas variacións relativas de los elementos orbitais en el caso kepleriano. . . . .	234
5.8	Tempos de cálculo (s) de <i>PSAT</i> para os casos simulados durante un ano. . . . .	238

5.9	Relación entre as normas das derivadas parciais de $\mathcal{V}_s$ e $\mathcal{V}_T$ con respecto ás coordenadas orbitais e a de $\mathcal{V}_s$ con respecto ás coordenadas rotacionais en función dos momentos de inercia. . . . .	244
5.10	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> para $O_B$ no Problema Principal para 365 días. . . . .	247
5.11	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> para $O_G$ no Problema Principal para 365 días. . . . .	250
5.12	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> para $O_M$ no Problema Principal para 365 días. . . . .	251
5.13	Valores máximo e mínimo das compoñentes das velocidades de rotación. . . . .	262

5.9.	Relación entre as normas das derivadas parciais de $\mathcal{V}_s$ e $\mathcal{V}_T$ con respecto ás coordenadas orbitais e a de $\mathcal{V}_s$ con respecto ás coordenadas rotacionais en función dos momentos de inercia. . . . .	244
5.10.	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> para $O_B$ no Problema Principal para 365 días. . . . .	247
5.11.	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> para $O_G$ no Problema Principal para 365 días. . . . .	250
5.12.	Variacións relativas máximas entre <i>PSAT</i> e <i>PSATROT</i> para $O_M$ no Problema Principal para 365 días. . . . .	251
5.13.	Valores máximo e mínimo das compoñentes das velocidades de rotación. . . . .	262





Presentamos nesta Tese o traballo realizado no eido da Astrodinámica no tocante ao movemento rototranslacional do satélite artificial. A cerna das nosas investigacións é o emprego do método de series de Taylor para poder integrar as ecuacións que rexen o movemento traslacional e rotacional do satélite artificial. Mediante a técnica de diferenciación automática e a creación dunha álgebra de series axeitada seremos quen de implementar o devandito método en sendos propagadores orbitais con diferentes formulacións: un deles coa newtoniana creado para o movemento traslacional e o outro coa hamiltoniana para o movemento rotacional. Isto permitiranos calcular efemérides de xeito preciso e eficiente. Estableceremos tamén por primeira vez as doce ecuacións de Lagrange do movemento rototranslatorio do satélite artificial.