



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# ONDÍCULAS Y APLICACIONES

Sergio Casás Crego

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# ONDÍCULAS Y APLICACIONES

Sergio Casás Crego

Julio, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento:</b> Análise Matemática
<b>Título:</b> Ondículas e aplicacións
<b>Breve descrición do contido</b>
<p>Dende o traballo pioneiro de Fourier coa ecuación da calor púxose en relevancia a utilidade de representar certas funcións en termos de combinacións lineais doutras; no caso particular de Fourier, a base de Hilbert xerada polas funcións trigonométricas (senos e cosenos). Porén, pronto observouse que este tipo de descomposición xeraba problemas con algunhas funcións, como evidencian o fenómeno de Gibbs ou o fenómeno de Pinsky.</p> <p>As ondículas (orixinariamente en francés ondelettes e posteriormente en inglés wavelets) son familias de funcións que serven como alternativa ás bases trigonométricas e que resultan de moita utilidade á hora de descompoñer sinais de todo tipo e comprimir datos.</p> <p>Neste traballo propónse facer unha introdución á transformada de Fourier así como ás ondículas, as súas propiedades e aplicacións.</p>
<b>Recomendacións</b>
Cursar Análise Funcional en Espazos de Hilbert



# Índice

<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Preliminares sobre espacios de Banach y de Hilbert</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios de Banach . . . . .	1
1.2. Espacios de Hilbert . . . . .	5
<b>2. Transformada de Fourier</b>	<b>7</b>
2.1. La transformada en $L^1(\mathbb{R})$ : motivación y definición . . . . .	7
2.2. Propiedades . . . . .	10
2.3. Convolución . . . . .	14
2.4. El teorema de inversión de Fourier . . . . .	15
2.5. La transformada en $L^2(\mathbb{R})$ y el teorema de Plancherel . . . . .	18
<b>3. Inconvenientes de las series y la transformada de Fourier</b>	<b>23</b>
3.1. El fenómeno de Gibbs . . . . .	24
3.1.1. Conceptos previos . . . . .	24
3.1.2. Un primer acercamiento al fenómeno de Gibbs . . . . .	27
3.1.3. El caso general . . . . .	29
3.2. El principio de incertidumbre de Heisenberg . . . . .	31

---

<b>4. Ondículas</b>	<b>35</b>
4.1. Construcción de ondículas a partir de un análisis multirresolución . . . . .	36
4.2. Ortonormalidad . . . . .	42
4.3. Completitud (en el caso particular de que $\psi$ sea de banda acotada) . . . . .	45
4.4. Transformada ondícula continua . . . . .	51
4.5. Algunas aplicaciones y ejemplos . . . . .	55
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>





## Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar el célebre espacio funcional de Hilbert definido por Lebesgue desde el enfoque del análisis armónico. Primero, se estudia la transformada de Fourier y se exploran sus propiedades algebraicas y analíticas. Se demuestran el teorema de inversión de Fourier, que nos permite recuperar una función de su transformada aplicando la transformada inversa, y el teorema de Plancherel, el cual viabiliza extender la transformada, inicialmente definida en otro espacio funcional, a dicho espacio de Hilbert. A continuación, se presentan y estudian dos fenómenos connaturales (e inoportunos) a las herramientas matemáticas de Fourier: el fenómeno de Gibbs y el principio de incertidumbre de Heisenberg. Para finalizar, cambiando de óptica, se introducen las ondículas para subsanar esta problemática. Esta última parte se centra en caracterizar las ondículas que producen buenas aproximaciones y en definir la transformada ondícula siguiendo la hoja de ruta que nos facilita la transformada de Fourier, además de aportar someramente algunos ejemplos y aplicaciones de la teoría de ondículas.

## Abstract

The aim of this paper is to study the famous Hilbert functional space defined by Lebesgue from the harmonic analysis approach. First, the Fourier transform is studied and its algebraic and analytic properties are explored. The Fourier inversion theorem, which allows us to recover a function from its transform by applying the inverse transform, and Plancherel's theorem, which makes feasible to extend the transform, initially defined in another functional space, to this Hilbert space, are demonstrated. Next, two phenomena connatural (and unwelcome) to Fourier's mathematical tools are presented and studied: the Gibbs phenomenon and the Heisenberg uncertainty principle. Finally, changing optics, wavelets are introduced to solve this problem. This last part focuses on characterising the wavelets that produce good approximations and on defining the wavelet transform following the roadmap provided by the Fourier transform, as well

as briefly providing some examples and applications of wavelet theory.

# Introducción

En esta memoria, nos centraremos en estudiar funciones complejas de variable real desde el enfoque del análisis de Fourier. Al fin y al cabo, estas funciones no son más que abstracciones basadas en fenómenos del mundo físico, pues formalizan la relación empírica que existe entre una serie de variables (por ejemplo, magnitudes físicas) que dependen de otras variables independientes, como pueden ser el tiempo o la posición en el espacio. Cabe mencionar que podríamos estudiar la dependencia entre una variable dependiente con respecto a varias variables independientes y el tratamiento teórico no sería mucho más dificultoso. Sin embargo, por motivos de claridad y brevedad, trabajaremos exclusivamente en una dimensión.

Por un lado, la razón de escoger como codominio a  $\mathbb{C}$  reside en que la teoría que desarrollaremos apenas resulta más complicada que si nos restringiésemos a funciones reales y, asimismo, en muchas situaciones nos encontraremos con que la variable compleja facilita enormemente los cálculos o, simplemente, sería también necesaria, aunque trabajaremos solo el caso real. Por otro lado, al considerar  $\mathbb{R}$  como dominio, podemos interpretar la variable independiente como el tiempo.

Así pues, la idea esencial tras el uso del análisis de Fourier radica en el paso de una función dada en el dominio temporal, que representa la variación de la variable que se está estudiando a medida que avanza el tiempo, al dominio espectral (dominio de frecuencias), el cual nos proporciona información sobre el aporte de las diferentes frecuencias de vibración de la función de partida.

En el primer capítulo, se recopila una serie de definiciones y resultados de análisis funcional en los que nos apoyaremos de manera repetida a lo largo de este escrito. Las principales referencias utilizadas en su desarrollo son [6], [10], [12] y [13].

En el segundo capítulo, se recuerdan las nociones básicas de series de Fourier y, a partir de las mismas, se motiva y estudia la transformada de Fourier, inicialmente definida en  $L^1(\mathbb{R})$  y posteriormente extendida a  $L^2(\mathbb{R})$ . Los principales resultados que se prueban son el teorema de inversión de Fourier, el cual, bajo ciertas hipótesis, nos permite reconstruir una función absolutamente integrable a partir de su transformada; y el teorema de Plancherel, que redefine la

transformada en  $L^2(\mathbb{R})$ , un espacio con mejores propiedades que  $L^1(\mathbb{R})$ , y asevera que es un isomorfismo y una isometría, simultáneamente. En este apartado, se emplearon las referencias [6], [8] y [14].

En el tercer capítulo, se introducen y estudian pormenorizadamente dos desventajas intrínsecas a las series y la transformada de Fourier. El primer hándicap es la mala convergencia de cualquier serie de Fourier en las cercanías de una discontinuidad: el fenómeno de Gibbs. El segundo inconveniente es la falta de localización en tiempo y en frecuencia de la transformada: el principio de incertidumbre de Heisenberg. En esta parte, se sigue especialmente [11], aunque también se hace uso de [9].

En el cuarto y último capítulo, en vista de las incomodidades derivadas de las dos construcciones matemáticas anteriores, se procede a cambiar el prisma y buscar bases de  $L^2(\mathbb{R})$  que, a priori, nos provean de mejores aproximaciones. En este sentido, se define el concepto de ondícula, se propone un sistema candidato a base a partir de dicha ondícula y se caracterizan todas las ondículas que generan una base mediante este procedimiento. Tras esto, se motiva la transformada ondícula en analogía a la transformada de Fourier y se hallan condiciones para poder recuperar una función a partir de su transformada ondícula. Al final, se dan algunos ejemplos prototípicos de ondículas. En este caso, las referencias consultadas fueron, especialmente, [5] y [7], con un uso ocasional de [2] y [4].

A pesar de que solo vamos a examinar aquellas funciones definidas sobre un continuo de valores, en la práctica esta suposición no es tan razonable, ya que solo podemos llevar a cabo mediciones de manera discreta y separadas en el tiempo. El lector debe tener en cuenta que este trabajo es esencialmente teórico, aunque al final del último capítulo se darán algunas referencias para los interesados en los aspectos más prácticos.

# Capítulo 1

## Preliminares sobre espacios de Banach y de Hilbert

En este capítulo inicial, damos algunas nociones de espacios de Banach y de Hilbert que serán necesarias más adelante.

### 1.1. Espacios de Banach

Para ello, precisamos de algunas definiciones previas.

**Definición 1.1.** Un par  $(X, d)$  se dice un *espacio métrico* si  $X$  es un conjunto y  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación, llamada *distancia*, tal que

1.  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ , para cualesquiera  $x, y \in X$ ;
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , para todo  $x, y, z \in X$ .

**Definición 1.2.** Un espacio métrico  $(X, d)$  se dice *completo* si toda sucesión de Cauchy en  $X$  es convergente.

**Definición 1.3.** Un par  $(V, \|\cdot\|)$  se dice un  $\mathbb{F}$ -*espacio (vectorial) normado*, con  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , si  $V$  es un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial y  $\|\cdot\|$  es una *norma*, es decir, una aplicación  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ , para cada  $u, v \in V$ ;

2.  $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$ , para  $\lambda \in \mathbb{F}$  y  $u \in V$ ;
3. si  $v \in V$  y  $\|v\| = 0$ , entonces  $v = 0$ .

*Observación 1.4.* La norma  $\|\cdot\|$  de un espacio normado induce una distancia  $d(x, y) = \|x - y\|$  que, a su vez, induce una topología de bolas abiertas.

Ya estamos en condiciones de dar la definición de espacio de Banach.

**Definición 1.5.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  se dice un *espacio de Banach* si, con la distancia inducida, es un espacio métrico completo.

Un ejemplo clásico de espacios normados son los espacios  $L^p(X, \mu, \mathbb{F})$ , donde  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida y  $p \in [1, \infty]$ . Cuando no dé lugar a confusión, también se denotarán por  $L^p(X)$ . Recordamos los siguientes resultados ya conocidos.

**Proposición 1.6** (desigualdad de Hölder). Si  $p \in [1, \infty]$ ,  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{F}$  son medibles, entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

donde  $q = \frac{p}{p-1}$  ( $q = \infty$  si  $p = 1$  y  $q = 1$  si  $p = \infty$ ).

**Proposición 1.7** (desigualdad de Minkowski). Si  $p \in [1, \infty]$ ,  $(X, \Sigma, \mu)$  es un espacio de medida y  $f, g : X \rightarrow \mathbb{F}$  son medibles, entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

De las dos proposiciones anteriores deducimos el siguiente teorema.

**Teorema 1.8.**  $L^p(X, \mu, \mathbb{F})$  es un espacio de Banach, para todo  $p \in [1, \infty]$ . Además, si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$  en  $L^p(X, \mu, \mathbb{F})$ , entonces existe una subsucesión  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ , para casi todo  $x \in X$ .

A continuación, vamos a introducir un par de definiciones de las que requeriremos en el capítulo 3.

**Definición 1.9.** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{F}$  y denotemos por  $\mathcal{P}(I)$  al conjunto de todas las particiones de  $I$ . Definimos la variación de  $f$  con respecto a  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}(I)$  como

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

y la *variación total* de  $f$  en  $I$  como

$$V(f, I) = \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} V(f, P).$$

Así,  $f$  se dice de *variación acotada* si  $V(f, I) < \infty$ . Denotamos por  $\mathcal{VA}(I, \mathbb{F})$  al conjunto de las funciones de variación acotada de  $I$  en  $\mathbb{F}$ .

**Definición 1.10.** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{F}$ . Se dice que  $f$  es *absolutamente continua* si, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para cualquier familia de intervalos abiertos contenidos en  $I$ ,  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ , que satisfaga  $\sum_{k=1}^n (y_k - x_k) < \delta$ , se tiene que

$$\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Denotamos por  $\mathcal{AC}(I, \mathbb{F})$  al conjunto de las funciones absolutamente continuas de  $I$  en  $\mathbb{F}$ .

Estos nuevos tipos de funciones cumplen las siguientes propiedades.

**Proposición 1.11.** Sean  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo y  $f : I \rightarrow \mathbb{F}$ .

1. Si  $f$  es absolutamente continua,  $f$  es de variación acotada.
2.  $\mathcal{VA}(I, \mathbb{F})$  y  $\mathcal{AC}(I, \mathbb{F})$  son espacios de Banach con la norma  $\|f\|_{\mathcal{VA}} = V(f, I) + \lim_{x \rightarrow \inf I} |f(x)|$ .
3. Si  $f$  es de variación acotada en  $[a, b]$ , entonces  $f$  se puede expresar como la diferencia de dos funciones crecientes:

$$f(x) = [f(x) + V(f, [a, x])] - V(f, [a, x]),$$

luego posee, a lo sumo, una cantidad numerable de discontinuidades.

De hecho, el próximo teorema caracteriza totalmente a las funciones absolutamente continuas.

**Teorema 1.12** (teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue). Si  $f \in L^1(a, b)$ , entonces la función  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(x) = c + \int_{(a, x)} f(y) \, dy,$$

con  $c \in \mathbb{R}$ , es derivable y  $F' = f$  en casi todo punto. Además,  $F \in \mathcal{AC}([a, b], \mathbb{R})$  y toda función de  $\mathcal{AC}([a, b], \mathbb{R})$  es de esta forma.

En el contexto de funciones lineales entre espacios normados (que llamaremos operadores), debemos precisar qué significa que un operador sea “acotado”.

**Definición 1.13.** Sean  $X, Y$  dos  $\mathbb{F}$ -espacios normados. Un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  se dice *acotado* si  $T(B)$  está acotado, para todo subconjunto acotado  $B \subset X$ .

Resulta que este nuevo concepto de acotación está íntimamente relacionado con las distintas nociones de continuidad que conocemos.

**Teorema 1.14.** Si  $X, Y$  son dos  $\mathbb{F}$ -espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  es un operador lineal, son equivalentes:

1.  $T$  es lipschitziano,
2.  $T$  es uniformemente continuo,
3.  $T$  es continuo,
4.  $T$  es continuo en cero,
5.  $T$  es acotado,
6. existe un entorno  $U$  de cero tal que  $T(U)$  es acotado,
7. existe  $M > 0$  tal que  $\|Tx\| \leq M\|x\|$  para todo  $x \in X$ .

**Definición 1.15.** Sean  $X, Y$  dos  $\mathbb{F}$ -espacios normados y  $\mathcal{L}(X, Y)$  el conjunto de los operadores lineales de  $X$  en  $Y$ . Si  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ , definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| \in [0, \infty]$$

y  $\mathcal{LB}(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : \|T\| < \infty\}$ . Entonces,  $(\mathcal{LB}(X, Y), \|\cdot\|)$  es un espacio normado llamado *espacio de los operadores lineales acotados de  $X$  en  $Y$* .

**Ejemplo 1.16.**  $\mathcal{LB}(X, Y)$  es un espacio de Banach.

**Proposición 1.17.** Sean  $X, Y$  dos  $\mathbb{F}$ -espacios normados y  $T \in \mathcal{LB}(X, Y)$ .

1.  $\|T\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Tx\| = \min\{r \in \mathbb{R} : \|Tx\| \leq r\|x\|, x \in X\}$ .
2. Si  $X \neq \{0\}$ ,  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ .
3.  $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ , para todo  $x \in X$ .

Antes de pasar a definir qué es un espacio de Hilbert, presentamos un concepto más.

**Definición 1.18.** Sean  $X, Y$  dos  $\mathbb{F}$ -espacios normados y  $T \in \mathcal{LB}(X, Y)$ . Decimos que  $T$  es un *isomorfismo* (de espacios normados) si, con la topología inducida,  $T$  es un homeomorfismo lineal. En tal caso, diremos que  $X$  e  $Y$  son *isomorfos*.  $T$  será un *isomorfismo isométrico* si, además de ser un isomorfismo, es una isometría, es decir, si  $\|Tx\| = \|x\|$ , para todo  $x \in X$ .

## 1.2. Espacios de Hilbert

La norma de un espacio normado puede provenir, a su vez, de un producto escalar.

**Definición 1.19.** Dado un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial  $V$ , una aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{F}$  se dice un *producto escalar* en  $V$  si se satisfacen las siguientes propiedades:

1.  $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$ , para  $u, v, w \in V$  y  $\lambda \in \mathbb{F}$ ;
2.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ , para cada  $u, v \in V$ ;
3.  $\langle u, u \rangle \leq 0$ , para todo  $u \in V$ ;
4.  $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$ , para cualquier  $u \in V$ .

Un espacio vectorial dotado de un producto escalar se denomina *espacio prehilbertiano*.

**Teorema 1.20** (desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sean  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio prehilbertiano y  $x, y \in X$ . Entonces,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

y la igualdad se alcanza si y solo si  $x$  e  $y$  son linealmente dependientes.

**Corolario 1.21.** En un espacio prehilbertiano  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , el producto escalar genera una norma definida como  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , para todo  $x \in X$ .

Ya podemos concretar qué es un espacio de Hilbert.

**Definición 1.22.** Un espacio prehilbertiano  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se dice un *espacio de Hilbert* si, con la distancia inducida, es un espacio métrico completo.

**Ejemplo 1.23.**  $L^2(X, \mu, \mathbb{F})$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar  $\langle f, g \rangle_2 = \int_X f \bar{g} \, d\mu$ .

**Definición 1.24.** Sean  $H$  un espacio de Hilbert y  $f, g \in H$ .  $f$  y  $g$  se dicen *ortogonales* si  $\langle f, g \rangle = 0$  y se escribe  $f \perp g$ . Si  $A, B \subset H$  y  $f \perp g$ , para cada  $f \in A, g \in B$ , entonces  $A$  y  $B$  se dicen *ortogonales* y se escribe  $A \perp B$ . Llamamos *espacio ortogonal* a  $A$  al conjunto  $A^\perp = \{f \in H : f \perp g, g \in A\}$ .

**Proposición 1.25.** Sean  $H$  un espacio de Hilbert y  $A \subset H$ . Entonces,  $A^\perp$  es un subespacio vectorial cerrado de  $H$ .

Acto seguido, presentamos algunos de los resultados más importantes de la teoría de espacios de Hilbert.

**Teorema 1.26** (de la proyección ortogonal). Sean  $H$  un espacio de Hilbert,  $K \subset H$  un conjunto cerrado, convexo y no vacío y  $h \in H$ . Entonces, existe un único  $y \in K$  (que denotamos por  $P_K h$ ) tal que  $\|h - y\| = d(h, K)$ . Si, además,  $K$  es un subespacio vectorial,  $h - P_K h \in K^\perp$  y, si  $f \in K$  es tal que  $h - f \in K^\perp$ , entonces  $f = P_K h$ . Llamamos a la aplicación  $P_K : H \rightarrow K$  proyección ortogonal sobre  $K$ .

**Definición 1.27.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert.  $A \subset H$  se dice un conjunto ortonormal de vectores de  $H$  si  $\langle f, g \rangle = \delta_{f,g}$ , para todo  $f, g \in A$ . Un conjunto ortonormal maximal se dice una base de Hilbert.

**Teorema 1.28** (desigualdad de Bessel). Sea  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un conjunto ortonormal de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2$ , para todo  $f \in H$ .

**Teorema 1.29** (de las bases de Hilbert). Sea  $E$  un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert  $H$ . Son equivalentes:

1.  $E$  es una base de Hilbert de  $H$ ;
2.  $h = \sum_{e \in E} \langle h, e \rangle e$ , para todo  $h \in H$ ;
3. si  $h \in H$  y  $h \perp E$ , entonces  $h = 0$ ;
4.  $\langle g, h \rangle = \sum_{e \in E} \langle g, e \rangle \langle e, h \rangle$ , para cualesquiera  $g, h \in H$ ;
5.  $\overline{\langle E \rangle} = H$ ;
6.  $\|h\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle h, e \rangle|^2$ , para  $h \in H$ .

Por último, hemos de hablar brevemente del operador adjunto.

**Proposición 1.30.** Sean  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$  y  $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$  dos espacios de Hilbert y  $T \in \mathcal{LB}(X, Y)$ . Entonces, existe un único operador  $T^* \in \mathcal{LB}(Y, X)$ , llamado operador adjunto, tal que  $\langle Tx, y \rangle_Y = \langle x, T^*y \rangle_X$ , para cualesquiera  $x \in X$ ,  $y \in Y$ .

## Capítulo 2

# Transformada de Fourier

En este capítulo, se recuerdan las nociones básicas de series de Fourier de funciones periódicas y se fundamenta la transformada de Fourier, mecanismo matemático que desempeña la misma función que los coeficientes de Fourier en el caso aperiódico. Posteriormente, al igual que existen resultados para garantizar la convergencia de las series de Fourier, se establecerán hipótesis a fin de recuperar una función a partir de su transformada, lo cual se conoce como el teorema de inversión de Fourier. Para finalizar, mediante el teorema de Plancherel, se extenderá la transformada de Fourier, en principio definida en  $L^1(\mathbb{R})$ , a  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 2.1. La transformada en $L^1(\mathbb{R})$ : motivación y definición

En primer lugar, consideramos funciones  $f$  definidas en la recta real que pueden tomar valores reales o complejos. Cuando interpretamos la variable independiente como el tiempo, es común referirse a dichas funciones como *señales* y así haremos a lo largo de todo el capítulo. Por ahora, pidamos que estas señales sean  $2\pi$ -periódicas (es decir, tales que  $f(x + 2\pi) = f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ), medibles y absolutamente integrables en  $(-\pi, \pi)$ , esto es,  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ .

Así, a cada señal  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  podemos asociarle una **serie de Fourier**:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)), \quad (2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, 1 \rangle_2, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \cos(nx) \rangle_2 \quad y \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \langle f, \operatorname{sen}(nx) \rangle_2, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , son sus **coeficientes de Fourier**. Escribimos ' $\sim$ ' en vez de '=' porque, a priori, la serie anterior no tiene por qué ser convergente y, aunque convergiera en un cierto  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ni siquiera tenemos asegurado que lo hiciera a  $f(x_0)$ .

*Observación 2.1.* La expresión en serie (2.1) es equivalente a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad (2.2)$$

donde, para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} \, dx.$$

En efecto, si la serie (2.1) es convergente y coincide con  $f$  allí donde converja, basta tener en cuenta que

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \operatorname{sen}(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad y \quad \frac{1}{i} = -i$$

y sustituir en (2.1):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right).$$

Así, definiendo

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad y \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

llegamos a la formulación (2.2). Recíprocamente, es fácil comprobar que, si  $f$  admite una representación del tipo (2.2), la fórmula de Euler nos permite expresarla en la forma (2.1) con

$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad y \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Aunque la forma (2.1) resulta un poco más conveniente cuando  $f$  es real (los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  deben ser reales para que  $f$  sea real, mientras que para los coeficientes  $c_n$  la correspondiente condición es  $c_{-n} = \bar{c}_n$ ), la forma (2.2) es más compacta y cómoda de trabajar en el caso complejo.

Los coeficientes de Fourier  $c_n = \frac{1}{2\pi} \langle f, e^{inx} \rangle_2$ , que también denotaremos por  $\hat{f}(n)$  ó  $\mathcal{F}f(n)$ , cumplen el conocido lema de Riemann-Lebesgue.

**Lema 2.2** (de Riemann-Lebesgue). *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ , donde*

$$c_0(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \lim_{|n| \rightarrow \infty} |a_n| = 0\}.$$

De hecho, por ser  $L^2(\pi, \pi)$  un espacio de Hilbert y el sistema trigonométrico  $\{\frac{1}{2\pi}e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  una base de Hilbert de este espacio, la serie de Fourier de toda señal  $f \in L^2(\pi, \pi)$  converge a  $f$  (en la norma  $\|\cdot\|_2$ ) y se cumple la desigualdad de Bessel (Teorema 1.28):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_2^2.$$

Como resultado, si  $f \in L^2(\pi, \pi)$ , se tiene que  $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ , donde

$$l^2(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty\}.$$

De hecho, el siguiente teorema asevera que el recíproco es cierto.

**Teorema 2.3** (de Riesz-Fischer). *Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ . Entonces, existe una única  $f \in L^2(\pi, \pi)$  tal que  $\hat{f}(n) = a_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

Por tal razón, el operador  $\mathcal{F} : L^2(-\pi, \pi) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$  es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert. Esto quiere decir que, para señales de  $L^2(\pi, \pi)$ , nos podemos mover entre los dominios de tiempo y frecuencia en ambas direcciones y sin perder información alguna.

Ahora bien, también podemos construir series de Fourier para funciones periódicas de periodo arbitrario  $T > 0$  mediante un cambio de variable. Ciertamente, si  $f(x + T) = f(x)$ , basta definir

$$F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) \tag{2.3}$$

para que

$$F(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = F(x),$$

de modo que  $F$  es  $2\pi$ -periódica.

Entonces, si

$$F(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad \text{con } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx,$$

y aplicamos (2.3), el cambio de variable  $x \rightarrow (2\pi/T)x$  nos proporciona:

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\frac{2\pi in}{T}x}, \quad \text{con } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-\frac{2\pi in}{T}x} dx. \tag{2.4}$$

Por último, supongamos que  $f$  no es periódica y busquemos una expansión similar. Para ello, aproximemos  $f$  restringiéndola al intervalo  $[-T/2, T/2]$  y extendiéndola periódicamente a  $\mathbb{R}$ . Con las notaciones  $\xi_n = n/T$  y  $g(\xi_n) = Tc_n$ , podemos reescribir (2.4) como

$$g(\xi_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-2\pi i x \xi_n} dx,$$

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi_n) e^{2\pi i x \xi_n} \frac{1}{T} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(\xi_n) e^{2\pi i x \xi_n} (\xi_n - \xi_{n-1}).$$

Escrita de esta forma, la suma parece la aproximación de una integral. Nótese que la malla  $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  se vuelve más fina conforme  $T \rightarrow \infty$ , luego, pasando al límite, se llegaría a que

$$\begin{aligned} g(\xi) &\sim \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \\ f(x) &\sim \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde escribimos ' $\sim$ ' en vez de '=' porque no hemos justificado formalmente este último paso.

Si la variable  $x$  representa el tiempo y la variable  $\xi$  la frecuencia, la primera expresión, que se conoce como **transformada de Fourier**, nos facilita el contenido en frecuencias de  $f$  y constituye el análogo a los coeficientes de Fourier para funciones no periódicas. Asimismo, la segunda fórmula nos permite recuperar la señal original a partir de  $g$  mediante lo que se denomina **transformada de Fourier inversa**. Todo este desarrollo motiva la siguiente definición.

**Definición 2.4.** Dada una señal  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , se define su *transformada de Fourier*, y se denota por  $\hat{f}$  ó  $\mathcal{F}f$ , como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \langle f, e^{2\pi i x \xi} \rangle_2, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

y se define su *transformada de Fourier inversa*, y se denota por  $\check{f}$  ó  $\mathcal{F}^{-1}f$ , como

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Observación 2.5.* Cabe resaltar la siguiente relación entre la transformada de Fourier y la transformada inversa de una misma señal  $f \in L^1(\mathbb{R})$ :

$$\check{f}(\cdot) = \hat{f}(-\cdot).$$

Así las cosas, cualquier propiedad que se pruebe para la transformada de Fourier es inmediatamente adaptable a la transformada inversa.

## 2.2. Propiedades

Veamos algunas propiedades que se derivan sencillamente de la definición.

**Proposición 2.6.** Sean  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y  $x, \xi \in \mathbb{R}$ .

1. Linealidad:  $\mathcal{F}\{af + g\}(\xi) = a\mathcal{F}f(\xi) + \mathcal{F}g(\xi)$ .
2. Traslación en el tiempo:  $\mathcal{F}\{f(\cdot - b)\}(\xi) = e^{-2\pi i b \xi} \mathcal{F}f(\xi)$ .
3. Cambio de escala:  $\mathcal{F}\{f_b\}(\xi) = \frac{1}{|b|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{b}\right)$ , donde  $f_b(x) = f(bx)$ .

4. Conjugación:  $\mathcal{F}\{\tilde{f}\}(\xi) = \overline{\mathcal{F}f(\xi)}$ , donde  $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ .
5. Derivación: si  $f$  es absolutamente continua, entonces  $\mathcal{F}\{f'\}(\xi) = 2\pi i\xi \mathcal{F}f(\xi)$ .

### Demostración.

1. Se sigue de la linealidad de la integral de Lebesgue.
2. Con el cambio de variable  $y = x - b$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(\cdot - b)\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - b)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i(y+b)\xi} dy \\ &= e^{-2\pi i b \xi} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i y \xi} dy = e^{-2\pi i b \xi} \mathcal{F}f(\xi).\end{aligned}$$

3. Basta emplear el cambio de variable  $y = bx$ :

$$\mathcal{F}\{f_b\}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(bx)e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{1}{|b|} \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i y \frac{\xi}{b}} dy = \frac{1}{|b|} \mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{b}\right).$$

4. Se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que  $\overline{e^{2\pi i x \xi}} = e^{-2\pi i x \xi}$  y utilizando el cambio de variable  $y = -x$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\tilde{f}\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)}e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)e^{2\pi i x \xi}} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{2\pi i x \xi} dx} \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i y \xi} dy} = \overline{\mathcal{F}f(\xi)}.\end{aligned}$$

5. Se hace aplicando integración por partes con  $u = e^{2\pi i x \xi}$  y  $dv = f'(x) dx$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'\}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= f(x)e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \mathcal{F}f(\xi),\end{aligned}$$

pues, como  $f \in L^1(\mathbb{R})$  es continua,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0$ . □

Por otro lado, la condición “ $f \in L^1(\mathbb{R})$ ” no solo sirve para garantizar que la transformada está bien definida, sino que, además, se tiene que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-2\pi i x \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1 < \infty, \quad (2.6)$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . Así, la transformada de Fourier es un operador  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ . De hecho, bajo las mismas hipótesis, tenemos una versión adaptada del Lema de Riemann-Lebesgue (*vid.* Lema 1.2) que nos brinda una conclusión más fuerte, pero antes enunciemos un lema previo que precisaremos ([6], Theorem 13.24).

**Lema 2.7.** Si  $p \in [1, \infty)$  y  $f \in L^p(\mathbb{R})$ , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p = 0.$$

**Lema 2.8** (de Riemann-Lebesgue).  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R})$ , donde

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua y } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = 0\}.$$

**Demostración.** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

Primero, veamos que  $\hat{f}$  es continua. De esta forma, si  $\xi \in \mathbb{R}$  y  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  es tal que  $h_n \rightarrow 0$ , tenemos que ver que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi + h_n) = \hat{f}(\xi)$ :

$$\hat{f}(\xi + h_n) - \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) (e^{-2\pi i x (\xi + h_n)} - e^{-2\pi i x \xi}) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} (e^{-2\pi i x h_n} - 1) \, dx.$$

Si denotamos por  $f_n(x) = f(x) e^{-2\pi i x \xi} (e^{-2\pi i x h_n} - 1)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones medibles tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Además,

$$|f_n(x)| = |f(x)| |e^{-2\pi i x \xi}| |e^{-2\pi i x h_n} - 1| \leq 2|f(x)|,$$

para cualesquiera  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que  $2|f| \in L^1(\mathbb{R})$ , el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue ([13], Theorem 1.34) nos permite intercambiar el límite con la integral para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{f}(\xi + h_n) - \hat{f}(\xi)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \, dx = 0,$$

como queríamos demostrar.

Solo nos queda probar que  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| = 0$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} e^{-\pi i} \, dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (x + \frac{1}{2\xi}) \xi} \, dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} f\left(y - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i y \xi} \, dy, \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde  $y = x + \frac{1}{2\xi}$ . En consecuencia,

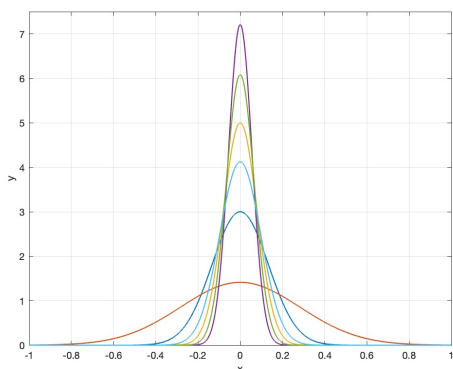
$$\begin{aligned} 0 \leq 2|\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx - \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) e^{-2\pi i x \xi} \, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right| |e^{-2\pi i x \xi}| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right| \, dx = \left\| f(\cdot) - f\left(\cdot - \frac{1}{2\xi}\right) \right\|_1. \end{aligned}$$

Gracias al Lema 2.7, sabemos que esta última expresión tiende a 0 cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Así, sin más que aplicar el teorema de compresión, hemos terminado.  $\square$

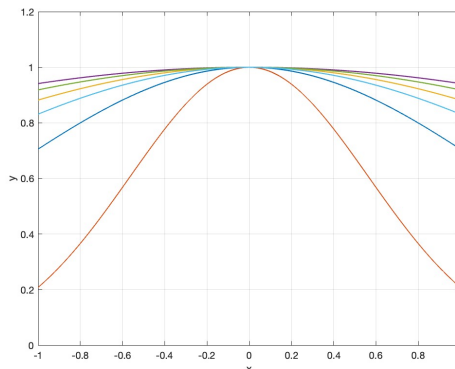
A continuación, vamos a considerar una sucesión de funciones de tipo gaussiana que adquirirá mayor relevancia en la siguiente sección:  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $g_n(x) = \sqrt{n}e^{-n\pi x^2}$ . En el siguiente ejemplo, veremos que sus transformadas de Fourier vuelven a ser gaussianas y, para ello, vamos a necesitar la siguiente igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(x+ib)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad (2.7)$$

donde  $a > 0$  y  $b \in \mathbb{R}$ . Tanto la definición de las funciones  $g_n$  (como caso particular de otras funciones  $G_t$ , con  $t > 0$ ) como la demostración de (2.7) se encuentran en [14] (páginas 40-43).



(a)  $g_n$ , para  $n = 2, 9, 17, 35, 37, 52$



(b)  $\hat{g}_n$ , para  $n = 2, 9, 17, 35, 37, 52$

Figura 2.1

**Ejemplo 2.9.**  $\hat{g}_n(\xi) = e^{-\frac{\pi\xi^2}{n}}$ , para todo  $\xi \in \mathbb{R}$  y todo  $n \in \mathbb{N}$ .

En efecto, completando cuadrados, se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{g}_n(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \sqrt{n}e^{-n\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-n\pi(x^2 + \frac{2x\xi i}{n})} dx = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-n\pi[(x + \frac{\xi i}{n})^2 - (\frac{\xi i}{n})^2]} dx \\ &= \sqrt{n}e^{-n\pi(\frac{\xi i}{n})^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-n\pi(x + \frac{\xi i}{n})^2} dx \stackrel{(2.7)}{=} \sqrt{n}e^{-\frac{\pi\xi^2}{n}} \sqrt{\frac{\pi}{n\pi}} = e^{-\frac{\pi\xi^2}{n}}. \end{aligned}$$

*Observación 2.10.* De nuevo, como consecuencia inmediata de (2.7), deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g_n &= \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-n\pi x^2} dx = \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{n\pi}} = 1, \\ \int_{\mathbb{R}} \hat{g}_n &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi\xi^2}{n}} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\pi/n}} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Estamos, pues, en condiciones de enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 2.11.** *La transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa,*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}),$$

*son operadores continuos. Además,  $\|\mathcal{F}\| = \|\mathcal{F}^{-1}\| = 1$ .*

**Demostración.** Probémoslo para  $\mathcal{F}$ , puesto que el razonamiento en el caso de  $\mathcal{F}^{-1}$  es completamente análogo. De la cadena de desigualdades (2.6) deducimos que, dada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1,$$

por lo que  $\mathcal{F}$  es continuo y  $\|\mathcal{F}\| \leq 1$ . Asimismo,

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|\hat{f}\|_\infty}{\|f\|_1} \geq \frac{\|\hat{g}_1\|_\infty}{\|g_1\|_1} = \hat{g}_1(0) = 1,$$

luego  $\|\mathcal{F}\| = 1$ . □

### 2.3. Convolución

En esta sección, presentamos un concepto de gran importancia en la teoría de señales que, de alguna forma, nos muestra cómo se superponen dos señales y que utilizaremos de manera auxiliar para demostrar uno de los teoremas centrales del capítulo: el teorema de inversión de Fourier.

**Definición 2.12.** Dadas dos señales  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , definimos su *convolución* como la señal

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Observación 2.13.* La convolución de dos señales  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  está bien definida, en el sentido de que  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

Ciertamente, la función  $\psi(x, y) = f(y)g(x-y)$  es medible. Además, si  $z = x - y$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi| &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)| \, dx \right) \, dy = \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)| \, dx \right) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left( \int_{\mathbb{R}} |g(z)| \, dz \right) \, dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\psi \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Entonces, gracias al teorema de Fubini ([13], Theorem 8.8), sabemos que  $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) \, dy$  está en  $L^1(\mathbb{R})$ , para casi todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por consiguiente, ya que  $f * g$  es medible y  $|f * g| \leq \varphi$ , se tiene que  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .

Por otro lado, es muy sencillo comprobar que la convolución es una operación conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma en  $L^1(\mathbb{R})$ . Por ejemplo, tan solo hay que considerar el cambio de variable  $z = x - y$  para demostrar que es conmutativa:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}} g(z)f(x-z) \, dz = g * f(x).$$

Ahora, veamos cómo se relacionan las operaciones de convolución y transformada de Fourier.

**Teorema 2.14** (de convolución). Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ .

**Demostración.**  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , conque  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ . Así pues, dado  $\xi \in \mathbb{R}$ , una vez más el teorema de Fubini nos permite escribir

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) \, dy \right) e^{-2\pi i x \xi} \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-2\pi i x \xi} \, dx \right) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i(z+y)\xi} \, dz \right) \, dy = \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \, dy \right) \left( \int_{\mathbb{R}} g(z) e^{-2\pi i z \xi} \, dz \right) \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \end{aligned}$$

donde  $z = x - y$ . □

## 2.4. El teorema de inversión de Fourier

Como sugería la segunda expresión de (2.5), nuestro objetivo en esta sección será obtener hipótesis sobre  $f \in L^1(\mathbb{R})$  para poder recuperar la señal  $f$  a partir de su transformada  $\hat{f}$  mediante la transformada inversa. Equivalentemente, queremos que se satisfaga la igualdad:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \, d\xi, \quad (2.8)$$

la cual se conoce como **fórmula de inversión de Fourier**. Incluso vamos a probar que, si aplicamos las transformadas directa e inversa en el orden contrario, se alcanzan las mismas conclusiones.

Este es el momento en el que entra en acción la sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , que cumple (2.8) como vemos en el siguiente lema.

**Lema 2.15.**  $\check{g}_n = g_n = \hat{g}_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demostración.** Argumentemos la veracidad de la primera igualdad, pues la prueba de la segunda es análoga. Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Sabemos que, para cada  $\xi \in \mathbb{R}$ ,

$$\hat{g}_n(\xi) = e^{-\frac{\pi \xi^2}{n}},$$

de manera que

$$\begin{aligned} \check{g}_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{\pi \xi^2}{n}} e^{-2\pi i x \xi} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi}{n}(\xi^2 - 2n x \xi)} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi}{n}[(\xi - n x)^2 - (n x)^2]} \, d\xi \\ &= e^{-\frac{\pi}{n}(x n)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi}{n}(\xi - n x)^2} \, d\xi \stackrel{(2.7)}{=} e^{-n \pi x^2} \sqrt{\frac{\pi}{\pi/n}} = g_n(x). \end{aligned}$$

□

*Observación 2.16.* La convolución es una operación que no tiene neutro en  $L^1(\mathbb{R})$  ([6], Theorem 21.35). No obstante, en esta referencia se introduce el concepto de “aproximación de la identidad” (*approximate unit*) para subsanar esta problemática: una sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$  es una aproximación de la identidad si satisface las tres condiciones siguientes.

1.  $u_n \geq 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\|u_n\|_1 = 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Para todo  $U$  entorno de 0, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus U} u_n = 0.$$

Veamos que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  entra en esta definición, para lo cual solo tenemos que probar que, dado  $\delta > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g_n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\delta, \infty)} g_n = 0.$$

Efectivamente, si  $\delta \geq 1$ ,  $g_n(x) \leq e^{-x}$ , para todo  $x \in (\delta, \infty)$ . Como la función cota está en  $L^1(\mathbb{R})$  y  $g_n \rightarrow 0$  en  $(\delta, \infty)$ , el teorema de la convergencia dominada nos permite concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\delta, \infty)} g_n = \int_{(\delta, \infty)} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \right) = 0.$$

En cambio, si  $\delta \leq 1$ , con argumentos idénticos, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(1, \infty)} g_n = 0$$

y, además,

$$\int_{(\delta, 1)} g_n \leq (1 - \delta) \sup_{x \in (\delta, 1)} g_n(x) \rightarrow 0.$$

En ([6], Theorem 21.37), se demuestra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n * f - f\|_p = 0,$$

para cualesquiera  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$  aproximación de la identidad,  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y  $p \in [1, \infty)$ . Nos conformaremos con probar el caso  $p = 1$  y utilizar, más adelante, el caso  $p = 2$ , ambos particularizados para nuestra sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Proposición 2.17.** *Para cada  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n * f - f\|_1 = 0.$$

**Demostración.** Si  $f = 0$ , el resultado es evidente. Supongamos que  $f \neq 0$  y sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Entonces, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$  ([6], Theorem 13.24), para todo  $y \in (-\delta, \delta)$ , y existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\int_{(\delta, \infty)} g_n < \frac{\varepsilon}{8\|f\|_1}$ , para todo  $n \geq N$ .

De esta forma, para cada  $n \geq N$ , gracias a que  $\int_{\mathbb{R}} g_n = 1$  y al teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \|g_n * f - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g_n(y) f(x-y) \, dy - f(x) \right| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g_n(y) [f(x-y) - f(x)] \, dy \right| \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_n(y) |f(x-y) - f(x)| \, dy \, dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_n(y) |f(x-y) - f(x)| \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_n(y) \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} g_n(y) \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 \, dy \\ &= \int_{(-\delta, \delta)} g_n(y) \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 \, dy + \int_{\mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta)} g_n(y) \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_1 \, dy \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4\|f\|_1 \int_{(\delta, \infty)} g_n < \varepsilon, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la conclusión pedida.  $\square$

**Teorema 2.18** (de inversión de Fourier). Sea  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .

1. Si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\check{\hat{f}} = f$ .
2. Si  $\check{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\hat{\check{f}} = f$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Consecuentemente, para cada  $x \in \mathbb{R}$  fijado, la función  $h_n(\xi) = e^{2\pi i x \xi} \hat{g}_n(\xi) \hat{f}(\xi)$  está en  $L^1(\mathbb{R})$ , dado que  $|h_n| \leq |\hat{g}_n \cdot \hat{f}|$  y  $\hat{g}_n \cdot \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  (debido a la Proposición 1.6:  $\hat{g}_n \in L^\infty(\mathbb{R})$  y  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ). Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\xi) = e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},$$

con  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ . En tal caso, podemos usar el teorema de la convergencia dominada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{g}_n(\xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) \, d\xi = \check{\hat{f}}(x).$$

Por otra parte, el teorema de Fubini y el Lema 2.15 nos aseguran que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{g}_n(\xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{g}_n(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i y \xi} \, dy \right) \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left( \int_{\mathbb{R}} \hat{g}_n(\xi) e^{2\pi i (x-y)\xi} \, d\xi \right) \, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \check{\hat{g}}_n(x-y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) g_n(x-y) \, dy = (g_n * f)(x), \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g_n * f)(x) = \check{\hat{f}}(x).$$

Teniendo en cuenta la Proposición 2.17 y, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la acotación:

$$0 \leq \|f - \check{f}\|_1 \leq \|g_n * f - f\|_1 + \|\check{f} - g_n * f\|_1 \longrightarrow 0,$$

el teorema de compresión nos permite concluir que  $\check{f} = f$ . Si  $\check{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , los argumentos para deducir que  $\hat{\check{f}} = f$  son prácticamente idénticos.  $\square$

## 2.5. La transformada en $L^2(\mathbb{R})$ y el teorema de Plancherel

A diferencia de lo que sucedía con señales periódicas, donde  $L^2(-\pi, \pi) \subset L^1(-\pi, \pi)$ , no es cierto que  $L^2(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ . De este modo, la transformada de Fourier, en el sentido de la Definición 2.4, no está bien definida para señales de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Sin embargo, tenemos dos buenos motivos para querer extender la transformada a  $L^2(\mathbb{R})$ . El primero es que, en general, no se cumple que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  siempre que  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , lo cual es fundamental para poder usar el Teorema de inversión 2.18. En efecto, basta considerar  $f = \chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$ , pues

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{[-1,1]} e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{-2\pi i x \xi}}{-2\pi i \xi} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi} = \frac{\text{sen}(2\pi \xi)}{\pi \xi}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}| &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\text{sen}(2\pi \xi)}{\xi} \right| d\xi = \frac{2}{\pi} \int_{(0,\infty)} \left| \frac{\text{sen}(2\pi \xi)}{\xi} \right| d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{(n-1,n)} \left| \frac{\text{sen}(2\pi \xi)}{\xi} \right| d\xi \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \int_{(n-1,n)} |\text{sen}(2\pi \xi)| d\xi, \end{aligned}$$

ya que, si  $\xi \in (n-1, n)$ ,

$$|\xi| \leq n \implies \frac{1}{|\xi|} \geq \frac{1}{n} \implies \left| \frac{\text{sen}(2\pi \xi)}{\xi} \right| \geq \frac{|\text{sen}(2\pi \xi)|}{n}.$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} \int_{(n-1,n)} |\text{sen}(2\pi \xi)| d\xi &= \int_{(n-1, n-\frac{1}{2})} \text{sen}(2\pi \xi) d\xi - \int_{(n-\frac{1}{2}, n-1)} \text{sen}(2\pi \xi) d\xi \\ &= -\frac{\cos(2\pi \xi)}{2\pi} \Big|_{\xi=n-1}^{\xi=n-\frac{1}{2}} + \frac{\cos(2\pi \xi)}{2\pi} \Big|_{\xi=n-\frac{1}{2}}^{\xi=n-1} \\ &= \cos(2(n-1)\pi) - 2\cos((2n-1)\pi) + \cos(2n\pi) = 4, \end{aligned}$$

conque

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}| \geq \frac{8}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty,$$

como queríamos ver. La segunda motivación reside en que, aunque  $L^1(\mathbb{R})$  es un espacio de Banach,  $L^2(\mathbb{R})$  tiene una estructura más rica: la de espacio de Hilbert.

Para hacerlo, seguiremos principalmente [6] y necesitaremos un par de lemas auxiliares, cuya demostración está más allá de los objetivos de esta memoria.

**Lema 2.19.** Sean  $p \in [1, \infty)$ ,  $q = \frac{p}{p-1}$  ( $q = \infty$  si  $p = 1$ ),  $f \in L^p(\mathbb{R})$  y  $g \in L^q(\mathbb{R})$ . Entonces,  $f * g$  es uniformemente continua,  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$  y, si  $p > 1$ ,  $f * g \in C_0(\mathbb{R})$ .

**Lema 2.20.** Supongamos que  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  y  $\hat{f}$  es real y no negativa. Entonces,  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , de manera que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.18.

El siguiente resultado será fundamental para demostrar el teorema más relevante de esta sección: el **teorema de Plancherel**.

**Proposición 2.21.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

**Demostración.** Sean  $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$  y  $g = f * \tilde{f}$ . Como  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{f}|^p = \int_{\mathbb{R}} |\overline{f(-x)}|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |f|^p, \quad (2.9)$$

para  $p \in \{1, 2\}$ , por lo que  $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Así, la Observación 2.13 nos asegura que  $g \in L^1(\mathbb{R})$ .

Por otro lado, el teorema de convolución y la cuarta propiedad de la Proposición 2.6 nos permiten afirmar que

$$\hat{g}(\xi) = \widehat{f * \tilde{f}}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{\tilde{f}}(\xi) = \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} = |\hat{f}(\xi)|^2 \geq 0.$$

Asimismo, puesto que  $f, \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$ , el Lema 2.19 nos da que  $g \in C_0(\mathbb{R})$ , luego también  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Como, además,  $g$  es una señal real y no negativa de  $L^1(\mathbb{R})$ , el Lema 2.20 nos dice que  $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ . Por consiguiente, considerando la igualdad:

$$\|\hat{g}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}| = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \|\hat{f}\|_2,$$

se obtiene que  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ .

Cambiando de tema, del Teorema de inversión 2.18 deducimos que  $\check{g} = g$ , pues  $g, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ . Por tanto, si  $z = -y$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \overline{f(y)} dy &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-z)} f(x-z) dz = \tilde{f} * f(x) = f * \tilde{f}(x) = g(x) = \check{g}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{2\pi i x \xi} d\xi. \end{aligned}$$

En definitiva, sustituyendo  $x = 0$  en la igualdad anterior, se obtiene la conclusión deseada:

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f \overline{f} = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \|\hat{f}\|_2^2.$$

□

**Teorema 2.22** (de Plancherel). *Existe un único operador lineal continuo  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  tal que  $Tf = \hat{f}$ , para cada  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Además:*

1.  $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$ , para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ;
2.  $\langle Tf, Tg \rangle_2 = \langle f, g \rangle_2$ , para cualesquiera  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ;
3.  $T(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$ .

En consecuencia,  $T$  es un isomorfismo isométrico.

**Demostración.** Primeramente, empecemos definiendo  $Tf = \hat{f}$ , para toda  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . La cadena de inclusiones:

$$C_{00}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$$

y la densidad de  $C_{00}(\mathbb{R})$  (el espacio de las funciones continuas en  $\mathbb{R}$  de soporte compacto) en  $L^2(\mathbb{R})$  ([6], Theorem 13.21) implican que  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ahora, extendamos  $T$  a  $L^2(\mathbb{R})$ . Para ello, sean  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ . Ya que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, la Proposición 2.21 nos permite escribir:

$$\|Tf_n - Tf_m\|_2 = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2 \rightarrow 0$$

cuando  $n, m \rightarrow \infty$ , de modo que  $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$  es de Cauchy. Por ser  $L^2(\mathbb{R})$  un espacio de Banach, existe un único  $h \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\|Tf_n - h\|_2 \rightarrow 0$ . Introducimos la notación  $Tf = h$ .

Por un lado, veamos que  $T$  está bien definido, es decir, que  $Tf$  no depende de la sucesión de aproximantes escogida. En efecto, si  $(f_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  es otra sucesión tal que  $\|f_n^* - f\|_2 \rightarrow 0$ , entonces

$$\|Tf_n - Tf_n^*\|_2 = \|\hat{f}_n - \hat{f}_n^*\|_2 = \|f_n - f_n^*\|_2 \leq \|f_n - f\|_2 + \|f - f_n^*\|_2 \rightarrow 0,$$

luego

$$\|Tf - Tf_n^*\|_2 \leq \|Tf - Tf_n\|_2 + \|Tf_n - Tf_n^*\|_2 \rightarrow 0.$$

Por otro lado, comprobemos que  $T$  es lineal, para lo cual sean  $\alpha \in \mathbb{C}$  y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  tales que  $\|f_n - f\|_2, \|h_n - h\|_2 \rightarrow 0$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(f + \alpha h) - (Tf + \alpha Th)\|_2 &\leq \|T(f + \alpha h) - (Tf_n + \alpha Th_n)\|_2 + \\ &+ \|(Tf + \alpha Th) - (Tf_n + \alpha Th_n)\|_2 \leq \|T(f + \alpha h) - T(f_n + \alpha h_n)\|_2 + \\ &+ \|Tf - Tf_n\|_2 + |\alpha| \|Th - Th_n\|_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

como queríamos ver.

Para constatar que se cumple el punto 1, es suficiente con tener en cuenta que  $\|\cdot\|_2$  es continua y usar de nuevo la Proposición 2.21:

$$\|Tf\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_2 = \|f\|_2, \quad f \in L^2(\mathbb{R}),$$

de donde, además, deducimos que  $T$  es un operador continuo.

Asimismo,  $T$  es inyectivo, pues, si  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  y  $Tf = Tg$ , entonces

$$\|f - g\|_2 \stackrel{1.}{=} \|T(f - g)\|_2 = \|Tf - Tg\|_2 = 0,$$

por lo que  $f = g$ .

Por otra parte, el punto 2 se deduce trivialmente de la siguiente identidad polar ([6], Ejercicio 16.5):

$$4\langle f, g \rangle_2 = \|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - i\|f - ig\|_2^2, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad (2.10)$$

y la unicidad de  $T$  se deriva de que  $T$  y  $\mathcal{F}$  son dos operadores continuos que coinciden sobre el subconjunto denso  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  de  $L^2(\mathbb{R})$ .

En último término, tenemos que demostrar que  $T(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$  y lo haremos en cuatro partes.

- En primer lugar, veamos que  $T(L^2(\mathbb{R}))$  es cerrado en  $L^2(\mathbb{R})$ , puesto que, en tal caso, llega con probar que  $T(L^2(\mathbb{R}))$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ . En efecto, sea  $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ , tal que  $\|Tf_n - g\|_2 \rightarrow 0$  y razonemos que  $h \in T(L^2(\mathbb{R}))$ .  $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy, de forma que, usando el punto 1,

$$\|f_n - f_m\|_2 = \|Tf_n - Tf_m\|_2 \rightarrow 0$$

cuando  $n, m \rightarrow \infty$ , luego  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy. Ahora bien,  $L^2(\mathbb{R})$  es un espacio de Banach, así que existe un único  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$ . Solo queda ver que  $g = Tf$ , que se obtiene del teorema de compresión y de la acotación:

$$\|g - Tf\|_2 \leq \|g - Tf_n\|_2 + \|Tf_n - Tf\|_2 = \|g - Tf_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \rightarrow 0.$$

- En segundo lugar, calculemos el operador adjunto  $T^*$  (véase el Teorema 1.30) de  $T$ : dadas  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{g(\xi)} \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \, dx \right) \overline{g(\xi)} \, d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\left( \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i x \xi} \, d\xi \right)} \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \check{g}(x) \, dx = \langle f, \mathcal{F}^{-1}g \rangle_2. \end{aligned}$$

Consecuentemente,  $T^* = \mathcal{F}^{-1}$  en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , esto es,

$$T^*f(x) = \check{f}(x) = \hat{f}(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

• En tercer lugar, vamos a ver que, si  $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\varphi * \psi \in T(L^2(\mathbb{R}))$ . Para ello, escribimos  $f = T^*\varphi$  y  $g = T^*\psi$  y empleamos el teorema de convolución:

$$\widehat{\varphi * \psi}(x) = \widehat{\varphi}(x)\widehat{\psi}(x) = f(-x)g(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Así, como  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , la desigualdad de Hölder (Proposición 1.6) nos asegura que  $fg \in L^1(\mathbb{R})$ , por lo que también  $\widehat{\varphi * \psi} \in L^1(\mathbb{R})$ . Por ende, el teorema de inversión de Fourier nos permite escribir:

$$\begin{aligned} \varphi * \psi(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi * \psi}(x) e^{2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(-x)g(-x) e^{2\pi i x \xi} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)g(y) e^{-2\pi i y \xi} dy = \widehat{fg}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde  $y = -x$ . Por el lema de Riemann-Lebesgue,  $fg \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subset C_0(\mathbb{R})$ , de donde

$$fg \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}).$$

La última inclusión se debe a que, para toda  $f \in C_0(\mathbb{R})$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f|_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]}\|_{\infty} \leq 1$  y:

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{[-n, n]} |f|^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} |f|^2 \leq 2n \|f|_{[-n, n]}\|_{\infty}^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} |f| = \\ &= 2n \|f|_{[-n, n]}\|_{\infty}^2 + \|f|_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]}\| < \infty. \end{aligned}$$

Entonces,  $\varphi * \psi \in T(L^2(\mathbb{R}))$ .

• En cuarto y último lugar, argumentaremos que  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset T(L^2(\mathbb{R}))$ , ya que esto implicaría que  $T(L^2(\mathbb{R}))$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ . Sea  $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  y consideremos la sucesión  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , la cual recordemos que es una aproximación de identidad. El punto anterior nos muestra que

$$\varphi * g_n \in T(L^2(\mathbb{R})), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como, además,  $\|\varphi - \varphi * g_n\|_2 \rightarrow 0$  ([6], Theorem 21.37) y  $T(L^2(\mathbb{R}))$  es cerrado en  $L^2(\mathbb{R})$ , necesariamente  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Inconvenientes de las series y la transformada de Fourier

En este capítulo, vamos a estudiar un par de casos que ilustran las deficiencias de las series y la transformada de Fourier en ciertos contextos. Para empezar, presentaremos el **fenómeno de Gibbs**, el cual nos muestra que no podemos esperar una buena convergencia de una serie de Fourier en las cercanías de una discontinuidad de salto. En segunda instancia, analizaremos una propiedad inherente a la transformada: cuanta más precisión requiramos para analizar una señal en torno a un punto, mayor dispersión nos encontraremos en su transformada alrededor de dicho punto. Este hecho se denomina **principio de incertidumbre de Heisenberg**.

Para ambas partes, precisaremos de la notación de Landau.

*Notación 3.1.* Sean  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ , con  $x_n \neq 0$  a partir de un cierto índice. Decimos que

1.  $y_n = O(x_n)$  si la sucesión  $(|y_n|/|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  está acotada;

2.  $y_n = o(x_n)$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|y_n|}{|x_n|} = 0.$$

De la misma forma, si  $f, g$  son dos funciones complejas de variable real y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , con  $|f| \neq 0$  en un entorno de  $x_0$ , decimos que

1.  $g = O(f)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  si  $|g|/|f|$  está acotada en un entorno de  $x_0$ .

2.  $g = o(f)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|g(x)|}{|f(x)|} = 0.$$

### 3.1. El fenómeno de Gibbs

#### 3.1.1. Conceptos previos

En el desarrollo de resultados de convergencia puntual de series de Fourier, juegan un papel imprescindible los conocidos como núcleos de Dirichlet. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , se define el  $n$ -ésimo núcleo de Dirichlet como

$$D_n(x) = \frac{\operatorname{sen}((n + 1/2)x)}{\operatorname{sen}(x/2)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$$

$D_n$  es una función par,  $2\pi$ -periódica y se puede expresar en la forma

$$D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx),$$

luego se pueden extender con continuidad a toda la recta real. De esta última expresión se deduce que

$$\int_{(-\pi, \pi)} D_n(x) \, dx = 2\pi.$$

La importancia de estos núcleos radica en que nos proporcionan una representación alternativa de las sumas parciales:

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$$

de cualquier  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ :

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{(-\pi, \pi)} f(y) D_N(x - y) \, dy = f * D_N(x).$$

Esta formulación nos permite probar el siguiente criterio de convergencia puntual, cuya demostración podemos ver en [9].

**Teorema 3.2** (criterio de convergencia puntual de Dini). *Sean  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ ,  $\bar{f}$  su extensión  $2\pi$ -periódica y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si existen y son finitos los límites laterales  $\bar{f}(x_0^-)$ ,  $\bar{f}(x_0^+)$  y las funciones*

$$F_-(t) = \frac{\bar{f}(x_0 + t) - \bar{f}(x_0^-)}{t} \quad \text{y} \quad F_+(t) = \frac{\bar{f}(x_0 + t) - \bar{f}(x_0^+)}{t}$$

*son integrables en  $(-\delta, 0)$  y en  $(0, \delta)$ , respectivamente, para algún  $\delta \in (0, \pi)$ , entonces  $S_N f(x_0)$  es convergente y su suma vale  $[\bar{f}(x_0^+) + \bar{f}(x_0^-)]/2$ .*

Se deducen inmediatamente de tal criterio los dos próximos corolarios, el primero para puntos de continuidad y el segundo para puntos de discontinuidad.

**Corolario 3.3.** *Sean  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ ,  $\bar{f}$  su extensión  $2\pi$ -periódica y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si existen las dos derivadas laterales de  $\bar{f}$  en  $x_0$ , entonces  $S_N f(x_0)$  es convergente y vale  $\bar{f}(x_0)$ .*

**Corolario 3.4.** Sean  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ ,  $\bar{f}$  su extensión  $2\pi$ -periódica y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si existe  $r > 0$  tal que  $\bar{f}$  es derivable en  $(x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$  y existen los límites laterales  $\bar{f}'(x_0^-)$ ,  $\bar{f}'(x_0^+)$ , entonces se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.

Seguidamente, vamos a introducir una función que será de gran utilidad en la siguiente subsección.

**Definición 3.5.** Se define la *integral seno*, y se denota por  $\text{Si}$ , como la siguiente función real de variable real:

$$\text{Si}(x) = \frac{2}{\pi} \int_{(0,x)} \frac{\text{sen}(y)}{y} \, dy, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Veamos algunas propiedades de esta función, en cuya prueba emplearemos los núcleos de Dirichlet.

**Proposición 3.6.** La función  $\text{Si}$  satisface las siguientes propiedades:

1.  $\text{Si}(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x) = 1$ ;
2. Si tiene máximos relativos en los puntos  $(2n-1)\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , y mínimos relativos en los puntos  $2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
3.  $\text{Si}(x) < \text{Si}(\pi)$ , para todo  $x \geq 0$ .

**Demostración.** Antes de nada, vamos a estudiar el comportamiento de la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\text{Si}((n+1)\pi) - \text{Si}(n\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ . Por un lado, por las propiedades de la función seno,

$$x_n = \int_{((n+1)\pi, n\pi)} \frac{\text{sen}(y)}{y} \, dy < 0 \quad (\text{resp. } > 0) \iff n \text{ es impar} \quad (\text{resp. } n \text{ es par}).$$

Por otro lado, usando el cambio de variable  $z = y - \pi$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} |x_n| &\leq \int_{((n+1)\pi, n\pi)} \left| \frac{\text{sen}(y)}{y} \right| \, dy = \int_{(n\pi, (n-1)\pi)} \left| \frac{\text{sen}(z + \pi)}{z + \pi} \right| \, dz = \int_{(n\pi, (n-1)\pi)} \left| \frac{\text{sen}(z)}{z + \pi} \right| \, dz \\ &\leq \int_{(n\pi, (n-1)\pi)} \left| \frac{\text{sen}(z)}{z + \pi} \right| \, dz \leq \int_{(n\pi, (n-1)\pi)} \left| \frac{\text{sen}(z)}{z} \right| \, dz = |x_{n-1}|. \end{aligned}$$

De este modo,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión alternada que tiende a cero.

1. La primera igualdad es evidente, así que probemos la segunda. La existencia y finitud de dicho límite se sigue del criterio de Leibniz para series alternadas, pues

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Si}(x) = \int_{(0, \infty)} \frac{\text{sen}(y)}{y} \, dy = \text{Si}(\pi) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{((n+1)\pi, n\pi)} \frac{\text{sen}(y)}{y} \, dy = \text{Si}(\pi) + \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Para el cálculo de su valor, debemos considerar la función auxiliar  $g(y) = \frac{1}{\operatorname{sen}(y/2)} - \frac{2}{y}$ . Veamos que  $g \in L^1(\pi, \pi)$ , para lo cual solo necesitamos que  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) \in \mathbb{R}$ . En efecto, aplicando dos veces la regla de L'Hôpital, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} g(y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - 2 \operatorname{sen}(y/2)}{y \operatorname{sen}(y/2)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(y/2)}{\operatorname{sen}(y/2) + y/2 \cos(y/2)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1/2 \operatorname{sen}(y/2)}{\cos(y/2) - y/4 \operatorname{sen}(y/2)} = 0. \end{aligned}$$

Entonces, por el lema de Riemann-Lebesgue,  $\hat{g}(n) \rightarrow 0$ . Así, partiendo de que

$$\operatorname{sen}((n + 1/2)y) = \operatorname{sen}(ny) \cos(y/2) + \cos(ny) \operatorname{sen}(y/2),$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-\pi, \pi)} \left( \frac{1}{\operatorname{sen}(y/2)} - \frac{2}{y} \right) \operatorname{sen}((n + 1/2)y) \, dy = 0.$$

Ahora, puesto que  $\int_{(-\pi, \pi)} D_n = 2\pi$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\pi, \pi)} \frac{\operatorname{sen}((n + 1/2)y)}{y} \, dy = \pi,$$

mas, si  $z = (n + 1/2)y$ ,

$$\begin{aligned} \int_{(-\pi, \pi)} \frac{\operatorname{sen}((n + 1/2)y)}{y} \, dy &= 2 \int_{(0, \pi)} \frac{\operatorname{sen}((n + 1/2)y)}{y} \, dy \\ &= 2 \int_{(0, n\pi + \pi/2)} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \, dz = \pi \operatorname{Si}(n\pi + \pi/2). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Si}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Si}(n\pi + \pi/2) = 1.$$

2. Primero,

$$\operatorname{Si}'(x) = \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{\pi x} = 0 \iff \operatorname{sen}(x) = 0 \iff x = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Además,

$$\operatorname{Si}''(x) = \frac{x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2},$$

por lo que

$$\operatorname{Si}''(n\pi) < 0 \quad (\text{resp. } > 0) \iff n \text{ es impar} \quad (\text{resp. } n \text{ es par}).$$

3. Para cada  $n > 1$  impar, gracias a las propiedades de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\operatorname{Si}(n\pi) = \operatorname{Si}(\pi) + \underbrace{\sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left[ \underbrace{(\operatorname{Si}(2k\pi) - \operatorname{Si}((2k-1)\pi))}_{<0} + \underbrace{(\operatorname{Si}((2k+1)\pi) - \operatorname{Si}(2k\pi))}_{>0} \right]}_{<0}} < \operatorname{Si}(\pi).$$

□

## 3.1.2. Un primer acercamiento al fenómeno de Gibbs

Consideremos la función  $f \in L^1(\pi, \pi)$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} (\pi - x)/2\pi, & \text{si } x \in (0, \pi); \\ -(\pi + x)/2\pi, & \text{si } x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

En cualquier  $x \neq 0$ ,  $f$  es derivable, de modo que  $S_N f(x) \rightarrow f(x)$  y  $S_N f(0) \rightarrow 0$ . Además, en un entorno de cualquier  $x \neq 0$ ,  $S_N f$  converge uniformemente a  $f$ , pues  $f$  es absolutamente continua y  $f(-\pi) = f(\pi)$  ([9], Teorema 3.2.3). Aun así, en  $x = 0$ , no debemos esperar tan buena convergencia, ya que, si la sucesión de funciones continuas de término general  $S_N f$  convergiese uniformemente en un entorno de 0, entonces  $f$  tendría que ser continua en 0, lo cual no es así.

Veamos cuán mala puede llegar a ser la convergencia cerca del cero. Como  $f$  es impar, sus coeficientes de Fourier son  $a_n = 0$  y

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{(-\pi, \pi)} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{(-\pi, \pi)} \operatorname{sen}(nx) \, dx - \frac{1}{\pi^2} \int_{(-\pi, \pi)} x \operatorname{sen}(nx) \, dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{\pi^2} \left( -\frac{x \cos(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{1}{n} \underbrace{\int_{(0, \pi)} \cos(nx) \, dx}_{=0} \right) \\ &= -\frac{1 + (-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n \pi}{n\pi^2} = \frac{1}{n\pi}, \end{aligned}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

En consecuencia, la  $N$ -ésima sucesión de sumas parciales de  $f$  es

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n},$$

de donde

$$(S_N f)'(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \cos(nx) = \frac{1}{2\pi} (D_N(x) - 1).$$

Por tanto,

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{(0, x)} (D_N(y) - 1) \, dy = \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{(0, x)} \frac{\operatorname{sen}((N + 1/2)y)}{\operatorname{sen}(y/2)} \, dy.$$

Ahora, vamos a volver a recurrir a la función  $g$  para continuar. Empleando el método de integración por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{(0, x)} g(y) \operatorname{sen}((N + 1/2)y) \, dy \\ &= -\frac{g(y) \cos((N + 1/2)y)}{N + 1/2} \Big|_{y=0}^{y=x} + \frac{1}{N + 1/2} \int_{(0, x)} \cos((N + 1/2)y) g'(y) \, dy \\ &= -\frac{g(x) \cos((N + 1/2)x)}{N + 1/2} + \frac{1}{N + 1/2} \int_{(0, x)} \cos((N + 1/2)y) g'(y) \, dy. \end{aligned}$$

Pero, dado que  $g \in \mathcal{C}^1([0, \pi])$  (tras usar cuatro veces la regla de L'Hôpital, se concluye que  $\lim_{y \rightarrow 0} g'(y) = -1/12$ ),

$$\int_{(0,x)} g(y) \operatorname{sen}((N+1/2)y) \, dy = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

uniformemente en  $x \in [0, \pi]$ . De esta forma,

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{(0,x)} \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)y)}{y} \, dy + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{(0,(N+1/2)x)} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \, dz + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{Si}((N+1/2)x) + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned}$$

Si  $x \in (0, \pi)$ , como era de esperar, se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \operatorname{Si}((N+1/2)x) = \frac{-x}{2\pi} + \frac{1}{2} = f(x).$$

Para estudiar el comportamiento cuando  $x \rightarrow 0$ , notemos que

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} \left[ S_N f(x) + \frac{x}{2\pi} \right] \leq \frac{1}{2} \sup_{0 \leq x < \infty} \operatorname{Si}(x) + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Si}(\pi) + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

lo cual nos da una cota superior para las fluctuaciones de las sumas parciales. Además, si  $x_N \rightarrow 0$  de modo que  $Nx_N \rightarrow \pi$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{(0,(N+1/2)x_N)} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \, dz = \frac{1}{2} \operatorname{Si}(\pi).$$

Todos estos cálculos se resumen en la siguiente proposición.

**Proposición 3.7.** *El conjunto de puntos de acumulación de las sumas parciales  $S_N f(x_N)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $x_N \rightarrow 0$ ,  $0 \leq x_N \leq \pi$ , viene dado por:*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) \leq \frac{1}{2} \operatorname{Si}(\pi) = 0.5895 \dots$$

Si, además,  $Nx_N \rightarrow \pi$ , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) = \frac{1}{2} \operatorname{Si}(\pi).$$

En particular, todo punto del intervalo  $[0, \frac{1}{2} \operatorname{Si}(\pi)]$  es un punto de acumulación de las sumas parciales  $S_N f(x_N)$ .

**Demostración.** Las dos primeras afirmaciones ya han sido probadas. Para la tercera, basta aplicar el teorema de los valores intermedios a la función continua  $S_N f$ .  $\square$

El número  $\frac{1}{2} \text{Si}(\pi) - \frac{1}{2} = 0.0895\dots$  se denomina rebasamiento o sobregiro (*overshoot*) de las sumas parciales en un entorno por la derecha de  $x = 0$ . En la Figura 3.1 se ilustra palmariamente la Proposición 3.7.

A continuación, veremos que, para toda función de variación acotada con  $f(y^+) > f(y^-)$ , el rebasamiento en un entorno por la derecha de  $y$ , definido como  $\limsup_{N \rightarrow \infty, y_N \rightarrow y} S_N f(y_N) - f(y^+)$ , será proporcional al salto  $f(y^+) - f(y^-)$ .

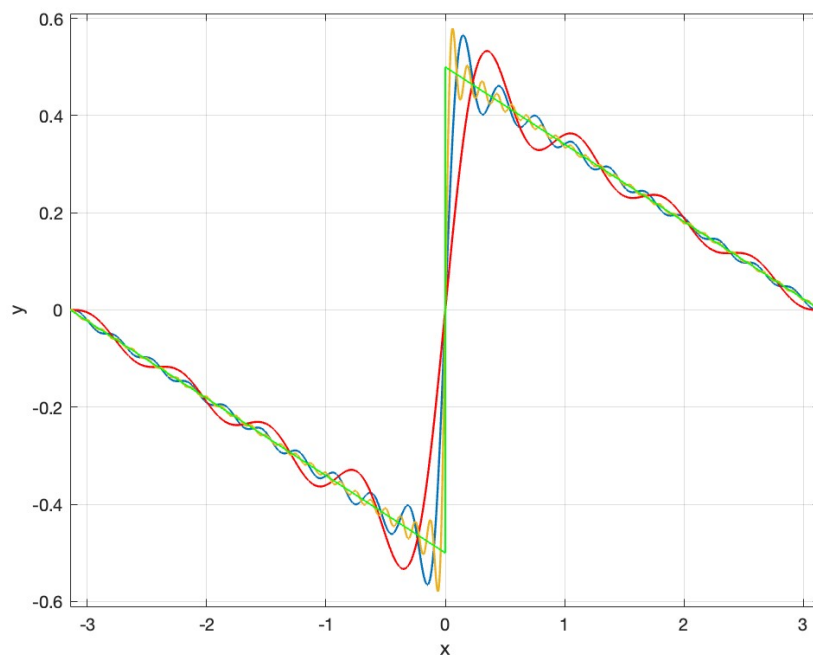


Figura 3.1:  $f$  y  $S_N f$ , para  $N = 8, 20, 50$

### 3.1.3. El caso general

Para  $f \in L^1(-\pi, \pi)$ , el fenómeno de Gibbs en un cierto  $x \in (-\pi, \pi)$  describe el conjunto de puntos de acumulación de  $S_N f(x_N)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $x_N \rightarrow x$ . En el ejemplo anterior, dicho conjunto consistía en el intervalo  $(-0.5895\dots, 0.5895\dots)$ , mientras que, si  $x \neq 0$ , entonces  $S_N f \rightarrow f$  uniformemente en un entorno de  $x$  y tal conjunto de puntos de acumulación consiste únicamente en  $f(x)$ .

A fin de estudiar con mayor generalidad el fenómeno de Gibbs, sea  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  una función de variación acotada con discontinuidades  $y_1, y_2, \dots$ . Denotemos los saltos asociados por  $\delta f(y_n) = f(y_n^+) - f(y_n^-)$  y sea  $J(x) = (\pi - x)/2\pi$ , para  $x \in (0, \pi)$  y extendida periódicamente a toda la recta real. Entonces,  $J$  tiene un salto unidad en  $x = 0$ , que será usado para estudiar el

caso general. Consideremos la función

$$f_{\text{salto}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta f(y_n) J_{y_n}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta f(y_n) J(x - y_n).$$

La serie anterior converge uniformemente a una función de variación acotada cuyas discontinuidades son precisamente los puntos  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Además, la función  $\tilde{f} = f - f_{\text{salto}}$  es continua y de variación acotada (todos sus saltos son nulos), por lo que  $S_N \tilde{f} \rightarrow f$  uniformemente ([11], Exercise 1.2.31). Por tanto, el análisis del fenómeno de Gibbs de  $f$  se reduce al de  $f_{\text{salto}}$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , sea  $M \in \mathbb{N}$  lo suficientemente grande para que  $\sum_{n=1}^M |\delta f(y_n)| \|S_N J_{y_n}\|_{\infty} < \epsilon$ . Esto es posible porque  $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta f(y_n)| < \infty$  ( $f$  es de variación acotada) y las sumas parciales  $S_N J_{y_n}$  están uniformemente acotadas.

Para analizar el fenómeno cerca de  $y_1$  (en cualquier otra discontinuidad los argumentos serían idénticos), sea  $x < \delta(y_1)$  y escribamos

$$S_N f(x) \leq \delta f(y_1) S_N J_{y_1}(x) + \sum_{n=2}^M \delta f(y_n) S_N J_{y_n}(x) + S_N \tilde{f}(x) + \epsilon.$$

Tanto la suma finita como la suma parcial asociada a  $\tilde{f}$  son uniformemente convergentes, de manera que, si  $x_N \rightarrow y_1$ ,

$$S_N f(x_N) \leq \delta f(y_1) S_N J_{y_1}(x_N) + \left[ f(y_1^+) - \frac{1}{2} \delta f(y_1) \right] + \epsilon.$$

Así,

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) &\leq \frac{1}{2} \delta f(y_1) \text{Si}(\pi) + \left[ f(y_1^+) - \frac{1}{2} \delta f(y_1) \right] + \epsilon, \\ \liminf_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) &\geq \left[ f(y_1^+) - \frac{1}{2} \delta f(y_1) \right] - \epsilon, \end{aligned}$$

pero  $\epsilon > 0$  era arbitrario. Resumimos toda esta información en el siguiente teorema.

**Teorema 3.8.** *Sea  $f \in L^1(-\pi, \pi)$  una función de variación acotada con una discontinuidad de salto en  $x \in (-\pi, \pi)$ , con  $\delta f(x) > 0$ . El conjunto de puntos de acumulación de las sumas parciales  $S_N f(x_N)$  cuando  $N \rightarrow \infty$  y  $x_N \rightarrow x$ ,  $x < x_N < \pi$ , viene dado por:*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) \leq f(x^+) + \frac{\text{Si}(\pi) - 1}{2} \delta f(x).$$

Si, además,  $N(x_N - x) \rightarrow \pi$ , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_N) = f(x^+) + \frac{\text{Si}(\pi) - 1}{2} \delta f(x).$$

En particular, todo punto del intervalo  $\left[ \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}, \frac{\text{Si}(\pi) - 1}{2} \delta f(x) \right]$  es un punto de acumulación de las sumas parciales  $S_N f(x_N)$ .

## 3.2. El principio de incertidumbre de Heisenberg

Cuando queremos estudiar el comportamiento espectral de una señal con su transformada de Fourier, necesitamos toda la información de la señal en el dominio de tiempo, de modo que, si modificamos dicha señal en un entorno pequeño de algún instante de tiempo, el espectro de frecuencias resulta completamente alterado. De hecho, lo mismo ocurre con el proceso recíproco: tratar de recuperar una señal a través de su contenido en frecuencias con ayuda de la transformada inversa. Esta circunstancia evidencia la falta de localización en tiempo y en frecuencia de la transformada de Fourier, convirtiéndola en una herramienta ciertamente inadecuada en muchas aplicaciones; y la plasmaremos mediante el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Para ello,  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ( $f \neq 0$ ). Una medida cuantitativa de la propagación en torno a  $x = 0$  viene dada por la **dispersión alrededor del cero** y se define como

$$D_0(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx},$$

siempre y cuando la integral del numerador sea finita. Este nombre está justificado porque, dado  $M > 0$ ,

$$\frac{\int_{|x|>M} |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} = \frac{\int_{\frac{x^2}{M^2}>1} |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{M^2} |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} = \frac{D_0(f)}{M^2},$$

esto es, la fracción de  $\|f\|_2$  debida a  $|x| > M$  está controlada por  $D_0(f)$ .

**Teorema 3.9** (principio de incertidumbre de Heisenberg). *Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$  una señal absolutamente continua tal que  $xf, f' \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces,*

$$D_0(f)D_0(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2}.$$

Además, la igualdad se da si y solo si  $f(x) = C_1 e^{-x^2/\sigma^2}$  y  $\hat{f}(\xi) = C_2 e^{-\pi^2\sigma^2\xi^2}$ , para ciertas constantes  $C_1, C_2, \sigma \in \mathbb{R}$ .

*Observación 3.10.* El principio de incertidumbre tiene una clara interpretación: no podemos localizar a  $f = f(x)$  y a  $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$  simultáneamente en sus respectivos espacios. En otras palabras, no podemos localizar una señal con precisión tanto en tiempo como en frecuencia. A decir verdad, si  $f$  está bien localizada en torno a  $x = 0$ , entonces  $D_0(f)$  será pequeño, luego, por el principio de incertidumbre,  $D_0(\hat{f})$  ha de ser correspondientemente grande, indicando una falta de localización de  $\hat{f}$  alrededor de  $\xi = 0$ .

**Demostración.** Por comodidad, introduzcamos la notación  $F = \hat{f}$ . El Lema 2.8 nos permite decir que  $F \in C_0(\mathbb{R})$ . Ahora bien, si denotamos por  $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  y  $h_2(x) = \sqrt{1+x^2}|f(x)|$ ,

entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.20),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f| &= \langle h_1, h_2 \rangle_2 \leq \|h_1\|_2 \|h_2\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|^2 dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \right) \\ &= (\|f\|_2^2 + \|xf\|_2^2) \underbrace{\left( \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) \right)}_{=\pi/2} - \underbrace{\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) \right)}_{=-\pi/2} < \infty, \end{aligned}$$

luego  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Análogamente,  $F \in L^1(\mathbb{R})$ . Así, el Teorema 2.18 nos permite escribir  $f = \check{f} = \check{F}$ , por lo que  $f \in C_0(\mathbb{R})$ , de nuevo por el Lema 2.8. Asimismo, gracias al punto 3 del Teorema 2.22 y a la Proposición 2.6, sabemos que  $F' = -2\pi i \widehat{xf} \in L^2(\mathbb{R})$ .

Ahora bien, por una parte,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \xi \bar{F} F' d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \xi \bar{F} F' d\xi + \int_{\mathbb{R}} \xi F \bar{F}' d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi (\bar{F} F' + F \bar{F}') d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi (F \bar{F})' d\xi = \int_{\mathbb{R}} \xi (|F|^2)' d\xi = \xi |F|^2 \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} - \int_{\mathbb{R}} |F|^2 = - \int_{\mathbb{R}} |F|^2. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad procede de aplicar integración por partes. Para probar la última, notemos que todas las integrales anteriores son convergentes, luego también lo son las integrales impropias en el sentido de Riemann, por lo que ambos límites son finitos. Aparte, si alguno de los dos límites fuese distinto de cero, se tendría que

$$F(\xi) = o(|\xi|^{-1/2}),$$

lo cual contradice la  $L^2$ -integrabilidad de  $f$ .

Por otra parte, utilizando otra vez la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$- \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \xi \bar{F} F' d\xi \leq \left| \int_{\mathbb{R}} \xi \bar{F} F' d\xi \right| \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\xi \bar{F}|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}} |F'|^2 \right)^{1/2}.$$

Igualmente, el punto 1 del Teorema 2.22 nos brinda las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \|xf\|_2 = \|\widehat{xf}\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|F'\|_2 &\implies 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |F'|^2, \\ \|f\|_2 = \|F\|_2 &\implies \int_{\mathbb{R}} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}} |F|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |F|^2 = - \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \xi \bar{F} F' d\xi \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\xi \bar{F}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \xi^2 |F(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( 4\pi^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{\mathbb{R}} |f|^2} \cdot \frac{\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |F(\xi)|^2 d\xi}{\int_{\mathbb{R}} |F|^2} = D_0(f) D_0(F).$$

Cambiando de tercio, abordemos la segunda parte de la demostración. Si se da la igualdad, podemos hacer dos afirmaciones. La primera es que, por el Teorema 1.20,  $F'$  y  $\xi F$  deben ser proporcionales, es decir,  $F' = -A\xi F$  en casi todo punto, para algún  $A \in \mathbb{C}$ . La segunda es que

$$\operatorname{Im} \int_{\mathbb{R}} \xi \bar{F} F' \, d\xi = 0.$$

Así las cosas, si  $G = Fe^{A\xi^2/2}$ , entonces

$$G' = e^{A\xi^2/2}(F' - A\xi F) = 0$$

en casi todo punto, por lo que  $G = C$  en casi todo punto, para cierta  $C \in \mathbb{C}$ . En consecuencia,  $F = Ce^{-A\xi^2/2}$  en casi todo punto. Como  $F$  es continua, la igualdad previa se cumple en toda la recta real.

Esta función produce un valor finito de  $D_0(f)$  si y solo si  $\operatorname{Re}(A) > 0$ . Para ver que  $\operatorname{Im}(A) = 0$ , escribimos  $A = \alpha + i\beta$  y calculamos  $F' = -CA\xi e^{-A\xi^2/2}$ ,  $\bar{F} = \bar{C}e^{-\bar{A}\xi^2/2}$  y

$$\int_{\mathbb{R}} \xi \bar{F} F' \, d\xi = |C|^2 A \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\alpha\xi^2} \, d\xi.$$

La parte imaginaria de la integral es cero si y solo si  $\beta = 0$ , lo cual concluye la demostración. Las constantes del enunciado pueden ser identificadas escribiendo  $A = 2\pi\sigma^2$ .  $\square$

Para llegar a una forma más flexible del principio de incertidumbre, definimos la **dispersión alrededor de**  $a \in \mathbb{R}$  de  $f$  como

$$D_a(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 \, dx}{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx}.$$

Este caso se reduce al anterior sin más que definir

$$f_{a,b}(x) = e^{2\pi ibx} f(x-a), \quad F_{a,b}(\xi) = e^{-2\pi ia\xi} F(\xi-b).$$

De las propiedades de la transformada de Fourier se deduce que  $\hat{f}_{a,b} = e^{2\pi iab} F_{-b,a}$  y, además,  $D_a(f) = D_0(f_{a,b})$  y  $D_a(F) = D_0(F_{b,-a})$ . Así, aplicando el Teorema 3.9, comprobamos que  $D_a(f)D_a(\hat{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2}$  y la igualdad se tiene solamente si  $f(x) = Ce^{2\pi ibx} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ , con  $C \in \mathbb{C}$ .

En la Figura 2.1 se puede apreciar claramente este fenómeno con las funciones  $g_n$ , que son gaussianas. Así pues, en este caso, se alcanza la igualdad y, en cualquier otro caso, las incomodidades asociadas a dicho fenómeno se agravan.



## Capítulo 4

# Ondículas

En el capítulo anterior, se ponen de manifiesto algunos hándicaps que presentan las series y la transformada de Fourier. Estos conceptos se sustentan en el hecho de que el sistema  $\{\frac{1}{2\pi}e^{inx}\}$  es una base de Hilbert de  $L^2(\mathbb{R})$ , luego no parece descabellado buscar otras bases de dicho espacio para tratar el asunto de aproximar funciones desde otro enfoque.

En este sentido, entran en juego las **ondículas** (*wavelets*). Intuitivamente, una ondícula no es más que una onda pequeña. La idea principal tras las ondículas radica en sustituir el concepto de frecuencia que usamos en los capítulos previos por los conceptos de traslación en tiempo y escala. Así las cosas, nos interesarán las ondículas que, tras aplicarles traslaciones en el dominio temporal y cambios de escala (horizontales y verticales), den lugar a una base de Hilbert de  $L^2(\mathbb{R})$ . Esta noción justifica la siguiente definición.

**Definición 4.1.** Una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  es una *ondícula ortonormal* si el sistema  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert de  $L^2(\mathbb{R})$ , con

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

En este supuesto, a la función  $\psi$  también se le suele llamar ondícula madre.

*Observación 4.2.* Los cambios de escala se llevan a cabo mediante dilataciones diádicas  $D_s$ , con  $s = 2^j$ . El término  $2^{j/2}$  subyace tras la conveniencia de que cada  $\psi_{j,k}$  tenga norma  $L^2$  igual a 1.

En la primera sección, estudiaremos cómo son las ondículas provenientes de lo que se conoce como **análisis multirresolución**, que no es más que una formalización de lo que comentábamos en el párrafo anterior: trabajar a distintas escalas de resolución y, en cada escala, capturar y añadir los detalles pertinentes para mejorar la aproximación que estamos llevando a cabo.

En la segunda sección, caracterizaremos la ortonormalidad y la completitud (en este último caso, para una clase particular de ondículas) de un sistema generado por una ondícula. Por

último, motivaremos la **transformada ondícula continua** y estudiaremos bajo qué condiciones podemos recuperar la señal original a partir de su transformada ondícula.

#### 4.1. Construcción de ondículas a partir de un análisis multirresolución

**Definición 4.3.** Un *análisis multirresolución* (AMR) es una sucesión de subespacios cerrados,  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ , de  $L^2(\mathbb{R})$  tal que:

1.  $V_j \subset V_{j+1}$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ;
2.  $f \in V_j$  si y solo si  $f(2^j \cdot) \in V_0$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ;
3.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ ;
4.  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ;
5. existe  $\varphi \in V_0$  tal que  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert de  $V_0$ .

A la función  $\varphi$  se la suele denominar **función de escala** (*scaling function*) asociada al AMR dado.

*Observación 4.4.* Se puede demostrar que las propiedades de la definición anterior no son independientes: las condiciones 1, 2 y 5 implican la condición 3, incluso relajando el punto 5 (*vid.* “*Riesz basis*” en [5], Chapter 2).

Primero, veamos una caracterización de la condición 5, pues, al fin y al cabo, toda la estructura de un análisis multirresolución se sostiene sobre una única función  $\varphi$ , que debe satisfacer dicha propiedad.

**Proposición 4.5.** Si  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\{g(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal si y solo si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

**Demostración.** Se deduce del siguiente argumento de periodización y del teorema de Plancherel:

$$\begin{aligned}
\delta_{k,0} &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \overline{g(x-k)} \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i k \xi} \, d\xi \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{(2\ell\pi, 2(\ell+1)\pi)} |\hat{g}(\xi)|^2 e^{2\pi i k \xi} \, d\xi \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{(0, 2\pi)} |\hat{g}(\mu + 2\ell\pi)|^2 e^{2\pi i k \mu} \, d\mu \\
&= \int_{(0, 2\pi)} \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2\ell\pi)|^2 \right) e^{2\pi i k \mu} \, d\mu.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que la función  $2\pi$ -periódica  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}(\mu + 2k\pi)|^2$  es igual a 1 casi por doquier, ya que su coeficiente de Fourier asociado a  $k = 0$  es 1 y todos los demás coeficientes son cero. La implicación recíproca es inmediata.  $\square$

Sea  $W_0$  el complemento ortogonal de  $V_0$  en  $V_1$ , es decir,  $V_1 = V_0 \oplus W_0$ . Entonces, sabemos que, por la condición 2 de la Definición 4.3, si dilatamos los elementos de  $W_0$  por un factor  $2^j$  en el dominio temporal, obtenemos un subespacio cerrado  $W_j$  de  $V_{j+1}$  tal que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad \text{para cada } j \in \mathbb{Z}.$$

Dado que  $V_j \rightarrow \{0\}$  cuando  $j \rightarrow -\infty$ , vemos que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \cdots = \bigoplus_{\ell=-\infty}^j W_\ell, \quad \text{para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Como  $V_j \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , se tiene que

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j. \quad (4.1)$$

Así, para encontrar una ondícula ortonormal, todo lo que necesitamos es dar con una función  $\psi \in W_0$  tal que  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  sea una base de Hilbert para  $W_0$ . En efecto, si esto es así, entonces  $\{2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert para  $W_j$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , debido al segundo punto de la Definición 4.3 y la definición de  $W_j$ . Como resultado,  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  sería una base de Hilbert para  $L^2(\mathbb{R})$ , como queríamos demostrar.

Intentemos encontrar tal función  $\psi$ .  $V_0 = W_{-1} \oplus V_{-1}$  y  $\frac{1}{2}\varphi(\cdot/2) \in V_{-1} \subset V_0$ . Por la propiedad 5 de la Definición 4.3 podemos expresar esta función en términos de la base  $\{\varphi(\cdot + k) : k \in \mathbb{Z}\}$  para obtener que

$$\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x + k),$$

donde  $\alpha_k = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{1}{2}x\right) \overline{\varphi(x+k)} dx$ . La convergencia de la serie anterior es en norma  $\|\cdot\|_2$  y  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$ . Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad, se tiene que

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi} = \hat{\varphi}(\xi) m_0(\xi), \quad (4.2)$$

donde

$$m_0(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ik\xi}$$

es una función de  $L^2(-\pi, \pi)$ . Esta función  $m_0$  se conoce como el **filtro de paso bajo** (*low pass filter*) asociado a la función de escala  $\varphi$ .

**Lema 4.6.** *El filtro de paso bajo  $m_0$  cumple:*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

**Demostración.** Primero, notemos que la Proposición 4.5 nos permite escribir:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Usando (4.2), vemos que esta ecuación es equivalente a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 |m_0(\xi + k\pi)|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Ahora, sumamos la serie anterior sobre los pares y sobre los impares por separado. Gracias a la periodicidad de  $m_0$  y a la Proposición 4.5, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= |m_0(\xi)|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2\ell\pi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2\ell\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2. \end{aligned}$$

□

Con el objetivo de encontrar una expresión para  $\psi$ , examinamos  $W_{-1}$ , el complemento ortogonal de  $V_{-1}$  en  $V_0$ , apoyándonos en la transformada de Fourier.

**Lema 4.7.** *Si  $\varphi$  es una función de escala para un AMR,  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , y  $m_0$  es el filtro de paso bajo asociado, entonces*

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \left\{ f \in L^2(-\pi, \pi) : \hat{f}(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi), \text{ para algún } m \in L^2(-\pi, \pi) \right\}, \\ V_0 &= \left\{ f \in L^2(-\pi, \pi) : \hat{f}(\xi) = \ell(\xi) \hat{\varphi}(\xi), \text{ para algún } \ell \in L^2(-\pi, \pi) \right\}. \end{aligned}$$

**Demostración.** Verifiquemos que se cumple la primera igualdad, siendo la prueba de la segunda análoga. Si  $f \in V_{-1}$ , entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi\left(\frac{1}{2}x - k\right),$$

con  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$ . Por lo tanto, usando (4.2),

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2} \hat{\varphi}(2\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-i2k\xi} = m(2\xi) \hat{\varphi}(2\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi),$$

donde  $m(\xi) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ik\xi} \in L^2(-\pi, \pi)$ .

Recíprocamente, si  $m \in L^2(-\pi, \pi)$ , podemos reescribir los pasos anteriores para mostrar que la función  $f$  definida por  $\hat{f}(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$  pertenece a  $V_{-1}$ . Observemos que, al hacer esto, debemos demostrar que  $m(2\xi) m_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$ . Esto es cierto para cualquier función de la forma  $h(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$ , con  $h \in L^2(-\pi, \pi)$  debido a la ortonormalidad de  $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ . De hecho,

$$\int_{\mathbb{R}} |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{(0, 2\pi)} |h(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 d\xi = \|h\|_2^2,$$

por la Proposición 4.5. Dado que  $m_0$  está acotado (vid. (4.3)) y  $m \in L^2(-\pi, \pi)$ ,  $h(\xi) = m(2\xi) m_0(\xi)$  ha de estar en  $L^2(-\pi, \pi)$ .  $\square$

Los elementos de  $W_{-1}$  son aquellas funciones  $f \in V_0$  ortogonales a  $V_{-1}$ . Sea  $U : V_0 \rightarrow L^2(-\pi, \pi)$  definido por  $U(f) = \ell$ , donde  $\ell$  viene dado por el Lema 4.7. Así, dada  $f \in V_0$ , con  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k \varphi(x - k)$  y  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 < \infty$ , se tiene que  $\hat{f}(\xi) = \ell(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k e^{-ik\xi}$ . Consecuentemente,  $U$  es lineal y, además,

$$\|Uf\|_2^2 = \|\ell\|_2^2 = 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |d_k|^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Ahora bien, la identidad polar (2.10) nos permite escribir:

$$\langle f, g \rangle_2 = \frac{1}{2\pi} \langle Uf, Ug \rangle_2, \quad \text{para cualesquiera } f, g \in V_0.$$

Por tanto, si  $f$  es ortogonal a  $V_{-1}$ , esta última igualdad y el Lema 4.7 nos indican que  $\ell$  debe ser ortogonal a  $m(2\xi) m_0(\xi)$ , para cada  $m \in L^2(-\pi, \pi)$ . Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{(0, 2\pi)} \ell(\xi) \overline{m(2\xi) m_0(\xi)} d\xi \\ &= \int_{(0, \pi)} \overline{m(2\xi)} \left\{ \ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \right\} d\xi, \end{aligned}$$

para todo  $m \in L^2(-\pi, \pi)$ . De este modo, la función  $\pi$ -periódica entre llaves debe ser ortogonal a  $L^2(0, \pi)$ , es decir,  $\ell(\xi) \overline{m_0(\xi)} + \ell(\xi + \pi) \overline{m_0(\xi + \pi)} = 0$  para casi todo  $\xi \in (0, \pi)$ . Entonces, se tiene que

$$(\ell(\xi), \ell(\xi + \pi)) = -\lambda(\xi + \pi) \left( \overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)} \right) \quad (4.4)$$

para casi todo  $\xi$  y para una  $\lambda(\xi)$  apropiada. Con el cambio de variable  $\xi = \mu + \pi$ , podemos reescribir lo anterior como

$$(\ell(\mu + \pi), \ell(\mu)) = -\lambda(\mu + 2\pi) \left( \overline{m_0(\mu)}, -\overline{m_0(\mu + \pi)} \right)$$

debido a la  $2\pi$ -periodicidad de  $m_0$  y  $\ell$ . Pero esta igualdad es equivalente a

$$(\ell(\xi), \ell(\xi + \pi)) = \lambda(\xi + 2\pi) \left( \overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)} \right) \quad (4.5)$$

para casi todo  $\xi$ .

Por (4.3), sabemos que el vector

$$\left( \overline{m_0(\xi + \pi)}, -\overline{m_0(\xi)} \right)$$

tiene norma 1 para casi todo  $\xi$ . Este hecho, junto con las igualdades (4.4) y (4.5), implica que  $\lambda(\xi + \pi) = -\lambda(\xi + 2\pi)$ , o, equivalentemente,  $\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + \pi)$  para casi todo  $\xi$ . Por lo tanto,  $\lambda \in L^2(-\pi, \pi)$  y

$$\lambda(\xi) = -\lambda(\xi + \pi). \quad (4.6)$$

Esto significa que  $\lambda(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)$ , con  $s \in L^2(-\pi, \pi)$ . De (4.4) y (4.6), se sigue que

$$\ell(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi + \pi)}, \quad (4.7)$$

con  $s \in L^2(-\pi, \pi)$ . Ahora, se comprueba de manera inmediata que el subespacio de  $L^2(\mathbb{R})$  de todas las funciones  $f$  tales que  $\hat{f}(\xi) = \ell(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$ , con  $\ell$  satisfaciendo (4.7), está contenido en el complemento ortogonal de  $V_{-1}$  en  $V_0$ , luego

$$W_{-1} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi + \pi)}\hat{\varphi}(\xi), \text{ para algún } s \in L^2(-\pi, \pi) \right\}.$$

Esto, a su vez, establece la siguiente caracterización de  $W_0$ .

**Lema 4.8.** *Si  $\varphi$  es una función de escala para un AMR,  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , y  $m_0$  es el filtro de paso bajo asociado, entonces*

$$W_0 = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f}(2\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi + \pi)}\hat{\varphi}(\xi) \text{ para algún } s \in L^2(-\pi, \pi) \right\}.$$

De manera similar, tenemos que

$$W_j = \left\{ f : \hat{f}(2^{j+1}\xi) = e^{i\xi}s(2\xi)\overline{m_0(\xi + \pi)}\hat{\varphi}(\xi) \text{ para algún } s \in L^2(-\pi, \pi) \right\}.$$

Ahora, definamos  $\psi$  mediante

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi}\overline{m_0(\xi + \pi)}\hat{\varphi}(\xi) \quad (4.8)$$

(es decir,  $s = 1$  en (4.7)), y veamos que hemos encontrado lo que estábamos buscando.

**Proposición 4.9.** *Supongamos que  $\varphi$  es una función de escala asociada a un AMR  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  y  $m_0$  es el filtro de paso bajo asociado. Entonces, una función  $\psi \in W_0 = V_1 \cap V_0^\perp$  es una ondícula ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si*

$$\hat{\psi}(2\xi) = e^{i\xi}\nu(2\xi)\overline{m_0(\xi + \pi)}\hat{\varphi}(\xi) \quad (4.9)$$

en casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$ , para alguna función  $\nu$  medible y  $2\pi$ -periódica tal que

$$|\nu(\xi)| = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in (-\pi, \pi).$$

**Demostración.** En primer lugar, está claro que, definida por (4.9),  $\psi \in W_0$ , ya que la última igualdad asegura que  $\nu \in L^2(-\pi, \pi)$ . Ahora, si  $g \in W_0$ , por el Lema 4.8, existe un  $s \in L^2(-\pi, \pi)$  tal que  $\hat{g}(2\xi) = e^{i\xi} s(2\xi) \overline{m_0(\xi + \pi)} \hat{\varphi}(\xi)$ . Consecuentemente,

$$\hat{g}(\xi) = \frac{s(\xi)}{\nu(\xi)} e^{i\frac{\xi}{2}} \overline{\nu(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{s(\xi)}{\nu(\xi)} \hat{\psi}(\xi) = s(\xi) \overline{\nu(\xi)} \hat{\psi}(\xi).$$

Dado que  $s\bar{\nu} \in L^2(-\pi, \pi)$ , podemos escribir  $s(\xi) \overline{\nu(\xi)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\xi}$ , con  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , y obtener que

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \psi(x - n),$$

lo cual prueba que  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  genera  $W_0$ . La ortonormalidad se sigue de que  $\hat{\psi}$  satisface la igualdad en la Proposición 4.5:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2n\pi)|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + n\pi\right) \right|^2 \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + n\pi + \pi\right) \right|^2 \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2\ell\pi\right) \right|^2 \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + 2\ell\pi + \pi\right) \right|^2 \\ &\quad + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2\ell\pi + \pi\right) \right|^2 \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + 2\ell\pi + 2\pi\right) \right|^2 \\ &= \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 = 1, \end{aligned}$$

donde hemos sumado sobre los enteros pares e impares por separado y utilizado la periodicidad de  $m_0$ , la Proposición 4.5 para  $\varphi$  y la igualdad (4.3) para  $m_0$ .

Ya hemos observado que, si  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert para  $W_0$ , entonces  $\{2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert para  $W_j$ . Por lo tanto, (4.1) nos muestra que  $\psi$  es, de hecho, una ondícula ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ahora tenemos que demostrar que todas las ondículas ortonormales en  $W_0$  vienen dadas por (4.9). Para cualquier  $\psi \in W_0$ , según el Lema 4.8, debe haber una función  $\nu \in L^2(-\pi, \pi)$  tal que

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \overline{\nu(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Si  $\psi$  es una *wavelet* ortonormal, entonces la ortonormalidad de  $\{\psi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$  nos brinda:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\nu(\xi)|^2 \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \right|^2 \\ &= |\nu(\xi)|^2 \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2\ell\pi\right) \right|^2 + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2\ell\pi + \pi\right) \right|^2 \right) \\ &= |\nu(\xi)|^2 \left( \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \right) = |\nu(\xi)|^2 \quad \text{para casi todo } \xi \in (-\pi, \pi). \quad \square \end{aligned}$$

Consideremos, por simplicidad, la ondícula  $\psi$  dada por (4.8) (en términos de la Proposición 4.9,  $\nu(\xi) = 1$ ). Habida cuenta de que  $\psi$  pertenece a  $V_1$ , debe ser una combinación lineal (a lo sumo numerable) de traslaciones de  $\varphi(2x)$ . De hecho, podemos expresar  $\psi$  como una combinación lineal de tales traslaciones con coeficientes íntimamente relacionados con los  $\alpha_k$  que determinan  $m_0(\xi)$ . De (4.8) y (4.2) deducimos que

$$\hat{\psi}(2\xi) = \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-i(k-1)\xi} \right) \hat{\varphi}(\xi),$$

luego

$$\hat{\psi}(\xi) = \left( \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} e^{-i(k-1)\frac{\xi}{2}} \right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

En último lugar, empleamos la transformada inversa de Fourier:

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} (-1)^k \overline{\alpha_k} \varphi(2x - (k-1)),$$

alcanzando así una expresión explícita de la ondícula madre únicamente en función de  $\varphi$ .

A pesar de que la mayoría de las ondículas ortonormales estudiadas provienen de un AMR, es conveniente conocer todas las ondículas que son ortonormales, provengan o no de un AMR. Nos dedicaremos a esta labor a lo largo de las próximas dos secciones.

## 4.2. Ortonormalidad

Si  $\psi$  es una ondícula ortonormal, en particular, el sistema  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbf{Z}\}$  es ortonormal. En esta sección, exprimiremos estas relaciones de ortonormalidad para encontrar dos ecuaciones que las caractericen.

El hecho de que el sistema  $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbf{Z}\}$  sea ortonormal es, como se señala en la Proposición 4.5, equivalente a que

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Realizando un cambio de variable, vemos que  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,\ell} \rangle = \langle \psi_{0,k}, \psi_{0,\ell} \rangle$ , por lo que, para cada  $j \in \mathbf{Z}$  fijo, el sistema  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbf{Z}\}$  es ortonormal cuando se satisface la igualdad (4.10) en casi todo punto.

Si  $j > n$ , entonces el cambio de variable  $x = 2^{-n}(y + m)$  muestra que  $\langle \psi_{j,k}, \psi_{n,m} \rangle = \langle \psi_{\ell,p}, \psi_{0,0} \rangle$ , donde  $\ell = j - n$  y  $p = k - 2^{j-n}m$ . En vista de lo anterior, la ortogonalidad entre  $\psi_{j,k}$  y  $\psi_{n,m}$ , para  $j > n$  y  $k, m \in \mathbf{Z}$ , se puede reducir a la ortogonalidad entre  $\psi_{j,k}$  y  $\psi$ , cuando

$j > 0$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Por el teorema de Plancherel, para  $j \geq 1$  y  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} 0 = \langle \psi, \psi_{j,k} \rangle_2 &= \langle \hat{\psi}, \hat{\psi}_{j,k} \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\xi) 2^{-\frac{j}{2}} \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)} e^{2\pi i 2^{-j} k \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2^{\frac{j}{2}} \hat{\psi}(2^j \mu) \overline{\hat{\psi}(\mu)} e^{2\pi i k \mu} d\mu. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{(2\ell\pi, 2(\ell+1)\pi)} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(\xi)} e^{2\pi i k \xi} d\xi \\ &= \int_{(0, 2\pi)} \left\{ \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2\ell\pi)) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2\ell\pi)} \right\} e^{2\pi i k \xi} d\xi, \end{aligned}$$

para todo  $k \in \mathbb{Z}$  cuando  $j \geq 1$ . Entonces,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi)) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}, \quad j \geq 1. \quad (4.11)$$

Por ende, (4.3) y (4.11) son condiciones necesarias y suficientes para la ortonormalidad del sistema  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Observemos que las series (4.10) y (4.11) convergen para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$ . De hecho, si definimos

$$\zeta_j(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi)) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

un sencillo cambio de variable, combinado con la desigualdad de Cauchy-Schwarz, da como resultado que

$$\begin{aligned} \int_{(-\pi, \pi)} |\zeta_j(\xi)| d\xi &\leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^j \xi) \hat{\psi}(\xi)| d\xi \leq \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-\frac{j}{2}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = 2^{-\frac{j}{2}} 2\pi \|\psi\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Esto prueba que  $\zeta_j \in L^1(-\pi, \pi)$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$  y, por lo tanto, nos brinda la convergencia absoluta casi por doquier de las series (4.10) y (4.11) cuando  $j = 0$  y  $j \neq 0$ , respectivamente.

Acto seguido, estudiemos la proyección ortogonal  $P_j$  de  $L^2(\mathbb{R})$  sobre  $W_j$ , donde

$$W_j = \overline{\text{span} \{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

**Teorema 4.10.** *Supongamos que  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .*

1.  *$f$  es ortogonal a  $W_j$  si y solo si*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + 2k\pi)} = 0, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

2. El operador de proyección  $P_j$  cumple:

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + 2k\pi)}, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

**Demostración.** Sabemos que  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert para  $W_j$ , luego

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2 \psi_{j,k}, \quad \text{para toda } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Puesto que

$$\hat{\psi}_{j,k}(\xi) = 2^{-\frac{j}{2}} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi}, \quad \text{para todo } j, k \in \mathbb{Z},$$

$\{\gamma_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert para  $\widehat{W}_j$ , donde

$$\gamma_{j,k}(\xi) = 2^{-\frac{j}{2}} e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi} \hat{\psi}(2^{-j}\xi), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$\widehat{P_j f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \hat{f}, \gamma_{j,k} \rangle_2 \gamma_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Sea  $g_j(\mu) = \hat{f}(\mu) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\mu)}$  y

$$F_j(\xi) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_j(\xi + 2^{j+1}\ell\pi).$$

Esta función es  $2^{j+1}\pi$ -periódica y también lo son las funciones

$$E_k^{(j)}(\xi) = 2^{-\frac{j}{2}} e^{-2\pi i 2^{-j} k \xi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De hecho, el sistema  $\{E_k^{(j)} : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Hilbert para  $L^2(0, 2^{j+1}\pi)$ . Utilizando de nuevo un argumento de periodización, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \gamma_{j,k} \rangle_2 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) 2^{-\frac{j}{2}} e^{2\pi i 2^{-j} k \xi} \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)} \, d\xi \\ &= \int_{(0, 2^{j+1}\pi)} \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g_j(\xi + 2^{j+1}\ell\pi) \right) 2^{-\frac{j}{2}} e^{2\pi i 2^{-j} k \xi} \, d\xi \\ &= \langle F_j, E_k^{(j)} \rangle_2, \end{aligned}$$

donde el último producto escalar es el asociado a  $L^2(0, 2^{j+1}\pi)$ . Así las cosas,

$$F_j(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \hat{f}, \gamma_{j,k} \rangle_2 E_k^{(j)}(\xi),$$

con convergencia en  $L^2(0, 2^{j+1}\pi)$ . Más explícitamente, hemos demostrado que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{j+1}\ell\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + 2\ell\pi)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \hat{f}, \gamma_{j,k} \rangle_2 E_k^{(j)}(\xi). \quad (4.14)$$

El punto 1 se sigue inmediatamente de (4.14). Para demostrar el punto 2, basta multiplicar ambos lados de (4.14) por  $\hat{\psi}(2^{-j}\xi)$  y observar que  $\hat{\psi}(2^{-j}\xi) E_k^{(j)}(\xi) = \gamma_{j,k}(\xi)$ .  $\square$

### 4.3. Completitud (en el caso particular de que $\psi$ sea de banda acotada)

Las condiciones (4.10) y (4.11) de la sección anterior no son suficientes para asegurarnos de que  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  sea completo, es decir, denso en  $L^2(\mathbb{R})$ . En esta sección, estudiaremos condiciones que nos proporcionarán la completitud de un sistema ortonormal generado por ondículas.

De aquí al final de la sección, trabajaremos con el supuesto de **ancho de banda acotado**, pues facilita mucho el tratamiento de las cuestiones de convergencia y simplifica en gran medida las demostraciones. Una señal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se dice de banda acotada si su transformada de Fourier es de soporte compacto, *i.e.*,

$$\text{sop}(\hat{f}) = \overline{\{\xi \in \mathbb{R} : \hat{f}(\xi) \neq 0\}} \subset (-b, b),$$

para algún  $b > 0$ .

El resultado principal de esta sección es demostrar que las condiciones

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2 = 1, \quad \text{en casi todo } \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (4.15)$$

y

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))} = 0, \quad \text{en casi todo } \xi \in \mathbb{R}, \quad k \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad (4.16)$$

caracterizan la completitud del sistema ortonormal  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Comenzamos demostrando algunos resultados previos. Si  $\psi$  es una ondícula de banda acotada, siempre podemos encontrar un entero  $J$  tal que  $\text{sop}(\hat{\psi}) \subset (-2^J \pi, 2^J \pi)$ . Supondremos esta relación de inclusión a lo largo de esta sección.

**Lema 4.11.** *Supongamos que  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y el soporte de  $\hat{f}$  está contenido en  $(a, b)$ , donde  $b - a \leq 2^{-J} \pi$  y  $(a, b) \cap [-\pi, \pi] = \emptyset$ . Entonces, para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,*

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \hat{f}(\xi) \left| \hat{\psi}(2^{-j} \xi) \right|^2, \quad \text{en casi todo } \xi \in (a, b).$$

**Demostración.** Si  $-j \leq J, k \neq 0$  y  $\xi \in (a, b)$ , tenemos que  $\xi + 2^{j+1} k \pi$  está fuera del soporte de  $\hat{f}$ . De hecho, si  $k > 0$ ,

$$b = a + (b - a) \leq a + 2^{-J} \pi \leq a + 2^{j+1} k \pi < \xi + 2^{j+1} k \pi,$$

de modo que, en este caso,  $\xi + 2^{j+1} k \pi$  está a la derecha de  $(a, b)$ . Si  $k < 0$ ,

$$a = b + (a - b) \geq b - 2^{-J} \pi \geq b + 2^{-J} k \pi \geq b + 2^{j+1} k \pi > \xi + 2^{j+1} k \pi,$$

lo que prueba que  $\xi + 2^{j+1}k\pi$  está a la izquierda de  $(a, b)$ . Por lo tanto, en la fórmula para  $\widehat{P_j f}$  dada en (4.13) (Teorema 4.10), todos los términos son cero excepto el correspondiente a  $k = 0$ . Esto prueba el lema si  $-j \leq J$ .

Si  $-j > J$ , entonces  $|2^{-j}\xi| \geq 2^J|\xi| \geq 2^J\pi$  cuando  $\xi \in (a, b)$ , ya que  $(a, b) \cap [-\pi, \pi] = \emptyset$ . Por consiguiente,  $\hat{\psi}(2^{-j}\xi) = 0$ , lo que prueba que  $\hat{f}(\xi) \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2 = 0$ . Por otro lado, si  $\xi + 2^{j+1}k\pi \in (a, b)$ ,

$$|2^{-j}\xi + 2k\pi| \geq 2^J|\xi + 2^{j+1}k\pi| \geq 2^J\pi$$

y, por tanto,  $\hat{\psi}(2^{-j}\xi + 2k\pi) = 0$ . Usando (4.13) otra vez, deducimos que  $\widehat{P_j f}(\xi) = 0$ . En consecuencia,  $\widehat{P_j f}(\xi) = \hat{f}(\xi) \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2$  cuando  $-j > J$  y  $\xi \in (a, b)$  (ya que ambos términos son nulos).  $\square$

Ya estamos en disposición de establecer la condición (4.15).

**Teorema 4.12.** *Si  $\psi$  es una ondícula ortonormal de banda acotada, entonces*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

**Demostración.** Definamos

$$\omega(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2.$$

Está claro que  $\omega(2^n \xi) = \omega(\xi)$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, basta con probar que  $\omega(\xi) = 1$ , para casi todo  $\xi \in (-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi)$ . Observemos que el conjunto  $(\pi, 2\pi)$ , excepto por un número finito de puntos, puede expresarse como la unión de  $2^J$  intervalos  $(a, b)$  con las propiedades descritas en el Lema 4.11. Entonces, llega con ver la igualdad para casi todo  $\xi \in (a, b)$ , donde  $(a, b)$  es un intervalo como se describe en tal lema.

En tal intervalo, por el Lema 4.11, tenemos que

$$\int_{(a,b)} \left| \sum_{j=-M}^M \widehat{P_j f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{(a,b)} |\hat{f}(\xi)|^2 \left( \sum_{j=-M}^M \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2 \right)^2 d\xi$$

para cada entero positivo  $M$ , siempre que  $\text{sop}(\hat{f}) \subset (a, b)$ . Dado que los operadores  $P_j$  son proyecciones mutuamente ortogonales, el lado izquierdo de la fórmula anterior está dominado por el cuadrado de la norma  $L^2$  de  $\hat{f}$ :

$$\int_{(a,b)} |\hat{f}(\xi)|^2 \left( \sum_{j=-M}^M \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2 \right)^2 d\xi \leq \int_{(a,b)} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Como esta desigualdad se satisface para todas las funciones  $f$  de  $L^2(\mathbb{R})$  tal que el soporte de  $\hat{f}$  está contenido en  $(a, b)$ , se deduce que

$$\sum_{j=-M}^M \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2 \leq 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in (a, b),$$

para todo entero positivo  $M$ . Por esta razón, la serie  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2$  converge. Además,

$$\int_{(a,b)} |\hat{f}(\xi)|^2 \left( 1 - \sum_{j=-M}^M \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2 \right)^2 d\xi = \int_{(a,b)} \left| \hat{f}(\xi) - \sum_{j=-M}^M \widehat{P_j f}(\xi) \right|^2 d\xi$$

tiende a cero cuando  $M \rightarrow \infty$ . Así, una simple aplicación del lema de Fatou ([13], Lemma 1.28) muestra que la igualdad deseada se cumple para casi todo  $\xi \in (a, b)$ .  $\square$

Nuestro siguiente objetivo es probar que el origen no está en el soporte de  $\hat{\psi}$  cuando  $\psi$  es una ondícula de banda acotada tal que  $|\hat{\psi}|$  es continua en cero. Supongamos que  $\psi$  es de banda acotada y  $|\hat{\psi}|$  es continua en cero y supongamos, también, que  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ . Dado que  $\psi$  es ortogonal a  $W_j$  para todo  $j \neq 0$ , de (4.12) se deduce que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}(\xi + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + 2k\pi)} = 0, \quad \text{casi por doquier, cuando } j \neq 0.$$

Recordemos que  $\text{sop}(\hat{\psi}) \subset (-2^J\pi, 2^J\pi)$ , luego el punto  $\xi + 2^{j+1}k\pi$  está fuera del soporte de  $\hat{\psi}$  cuando  $k \neq 0$ ,  $\xi \in \text{sop}(\hat{\psi})$  y  $j \geq J$ . Por lo tanto, la fórmula anterior se reduce a

$$\hat{\psi}(\xi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi)} = 0, \quad \text{casi por doquier en } \text{sop}(\hat{\psi}), \text{ cuando } j \geq J.$$

Ciertamente, esta igualdad se satisface si  $\xi \notin \text{sop}(\hat{\psi})$ , de modo que  $|\hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}(2^{-j}\xi)| = 0$  para casi todo  $\xi \in \mathbb{R}$ , cuando  $j \geq J$ . Haciendo  $j \rightarrow \infty$  y usando la continuidad de  $|\hat{\psi}|$  en cero, obtenemos que

$$|\hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}(0)| = 0, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

Puesto que  $\hat{\psi}$  no es idénticamente nula, deducimos que  $\hat{\psi}(0) = 0$ . Enunciamos esto en la siguiente proposición.

**Proposición 4.13.** *Si  $\psi$  es de banda acotada,  $|\hat{\psi}|$  es continua en cero y  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal, entonces  $\hat{\psi}(0) = 0$ .*

Si, además,  $\psi$  es una ondícula ortonormal, tenemos un resultado más fuerte.

**Teorema 4.14.** *Si  $\psi$  es una ondícula ortonormal de banda acotada y  $|\hat{\psi}|$  es continua en 0, entonces  $\hat{\psi} = 0$  casi por doquier en un entorno del origen.*

**Demostración.** Nuevamente, supongamos que  $\text{sop}(\hat{\psi}) \subset (-2^J\pi, 2^J\pi)$ . Como vimos en la demostración de la Proposición 4.13,

$$|\hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}(2^{-j}\xi)| = 0, \quad \text{para casi todo punto, con } |j| \geq J.$$

Así, cuando  $|j| \geq J$ ,  $\hat{\psi}(2^j \xi) = 0$  para casi todo  $\xi \in \text{sop}(\hat{\psi})$  (cuando  $j \leq -J$  basta con poner  $\eta = 2^{-j} \xi$  y obtener  $|\hat{\psi}(2^j \eta) \hat{\psi}(\eta)| = 0$  en casi todo punto). La igualdad en el Teorema 4.12 se convierte en:

$$\sum_{|j| < J} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \text{sop}(\hat{\psi}).$$

Como no hay más de  $2J - 1$  términos en esta suma, para cada uno de ellos debe existir un  $j_0 \in (-J, J) \cap \mathbb{Z}$  tal que

$$\left| \hat{\psi}(2^{j_0} \xi) \right| \geq \left( \frac{1}{2J - 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para casi todo } \xi \in \text{sop}(\hat{\psi}).$$

Por la Proposición 4.13 y la continuidad de  $|\hat{\psi}|$  en 0, existe un  $\varepsilon > 0$  tal que

$$|\hat{\psi}(\mu)| \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2J - 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{para } |\mu| < \varepsilon.$$

De esta manera, casi todo  $\xi \in \text{sop}(\hat{\psi})$  cumple que  $\varepsilon \leq |2^{j_0} \xi| \leq 2^J |\xi|$ , y, por tanto,  $|\xi| \geq 2^{-J} \varepsilon$  (de lo contrario, no podríamos tener que  $\sum_{|j| < J} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2 = 1$  casi por doquier en  $\text{sop}(\hat{\psi})$ ). Como consecuencia,  $\hat{\psi}(\xi) = 0$  para casi todo  $\xi \in (-2^{-J} \varepsilon, 2^{-J} \varepsilon)$ .  $\square$

Ahora, veamos que cualquier ondícula ortonormal de banda acotada tal que  $|\hat{\psi}|$  es continua en 0 debe satisfacer la igualdad (4.16).

**Teorema 4.15.** *Si  $\psi$  es una ondícula ortonormal de banda acotada tal que  $|\hat{\psi}|$  es continua en 0, entonces, para cada entero impar  $q$ , se tiene que*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2q\pi))} = 0, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

**Demostración.** Aislado el término  $k = 0$  en (4.13), obtenemos que

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \left| \hat{\psi}(2^{-j} \xi) \right|^2 \hat{f}(\xi) + \hat{\psi}(2^{-j} \xi) \sum_{k \neq 0} \hat{f}(\xi + 2^{j+1} k \pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j} \xi + 2k \pi)}.$$

Ya que  $|\hat{\psi}|$  es continua en 0, por el Teorema 4.14, podemos encontrar  $J \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{sop}(\hat{\psi}) \subset [-2^J \pi, -2^{-J} \pi] \cup [2^{-J} \pi, 2^J \pi]$ . Si  $0 < a < |\xi| < b$ , solo un número finito de  $j \in \mathbb{Z}$  (pongamos  $|j| \leq M$ ) nos da términos no nulos en el segundo sumando de la fórmula anterior. Fijemos uno de esos  $j$ . Entonces, existe, a lo sumo, un número finito de  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $\hat{\psi}(2^{-j} \xi + 2k \pi) \neq 0$ . De la misma forma, existirá, como mucho, un número finito de valores de la forma  $v = 2^j k$  que están en los sumandos no nulos. Cuando  $k \neq 0$ , son de la forma (única)  $v = 2^p q$  para un número finito de  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $p \geq j$  y  $q$  impar. Así,

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \left| \hat{\psi}(2^{-j} \xi) \right|^2 \hat{f}(\xi) + \hat{\psi}(2^{-j} \xi) \sum_{p \geq j} \sum_{q \in 2\mathbb{Z} + 1} \hat{f}(\xi + 2^{p+1} q \pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi + 2^{p+1} q \pi))}.$$

Empleando el Teorema 4.12, se obtiene que

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{P_j} f(\xi) \\ &= \hat{f}(\xi) + \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{p+1}q\pi) \sum_{j \leq p} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi + 2^{p+1}q\pi))}.\end{aligned}$$

Como resultado, para casi todo  $\xi \in (-b, -a) \cup (a, b)$ ,

$$\sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{p+1}q\pi) \sum_{j \leq p} \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi + 2^{p+1}q\pi))} = 0.$$

Definamos

$$h_k(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j\xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))}, \quad k \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

Gracias al cambio de índices  $p - j = \ell$ , podemos escribir, para casi todo  $\xi \in (-b, -a) \cup (a, b)$ , que

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{p+1}q\pi) \sum_{\ell \geq 0} \hat{\psi}(2^\ell 2^{-p}\xi) \overline{\hat{\psi}(2^\ell(2^{-p}\xi + 2q\pi))} \\ &= \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{p+1}q\pi) h_q(2^{-p}\xi).\end{aligned}$$

Si fijamos  $q_o \in 2\mathbb{Z} + 1$  y  $p_o = 0$ , para cada  $\xi_o \in (-b, -a) \cup (a, b)$ , existe un  $\delta > 0$  tal que el intervalo

$$U = (\xi_o + 2q_o\pi - \delta, \xi_o + 2q_o\pi + \delta)$$

no contiene ningún punto de la forma  $\xi_o + 2^{p+1}q\pi$ , siempre que  $(p, q) \neq (0, q_o)$ . Con  $\hat{f} = \chi_U$  en la igualdad anterior, obtenemos, para casi todo  $\xi \in (\xi_o - \delta, \xi_o + \delta) \cap \{(-b, -a) \cup (a, b)\}$ , que

$$0 = \sum_{q \in 2\mathbb{Z}+1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{p+1}q\pi) h_q(2^{-p}\xi) = h_{q_o}(\xi).$$

Por ser  $\xi_o$  un punto arbitrario de  $(-b, -a) \cup (a, b)$ , la igualdad anterior es cierta para casi todo  $\xi \in (-b, -a) \cup (a, b)$ . Haciendo  $a \rightarrow 0$  y  $b \rightarrow \infty$ , vemos que  $h_{q_o}(\xi) = 0$ , para casi todo  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Además, notemos que  $h_{q_o}(\xi) = 0$  si  $\xi = 0$ , pues  $\hat{\psi}(0) = 0$ . En definitiva, concluimos el resultado deseado, ya que  $q_o$  es un entero impar arbitrario.  $\square$

**Teorema 4.16.** *Supongamos que  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  es una función de banda acotada tal que  $\hat{\psi}$  es cero en un entorno del origen y  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal que satisface (4.15) y (4.16). Entonces,  $\psi$  es una ondícula ortonormal.*

**Demostración.** Es suficiente con probar que  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{P_j} f(\xi) = \hat{f}(\xi)$  casi por doquier, para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Por (4.13), podemos escribir

$$\widehat{P_j} f(\xi) = \hat{f}(\xi) \left| \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \right|^2 + \hat{\psi}(2^{-j}\xi) \sum_{k \neq 0} \hat{f}(\xi + 2^{j+1}k\pi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}\xi + 2k\pi)}.$$

Para cada  $j$  fijado y  $k \neq 0$ , podemos escribir  $2^j k = 2^j 2^p q = 2^n q$ , con  $p \geq 0$  y  $q \in 2\mathbb{Z} + 1$ . Puesto que  $\psi$  es de banda acotada y  $\hat{\psi}$  es nula en un entorno del origen, cuando sumamos en  $j \in \mathbb{Z}$  todos los términos de la línea anterior, podemos cambiar el orden de las sumas. Así, usando (4.15), obtenemos que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{P_j f}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \sum_{q \in 2\mathbb{Z} + 1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(\xi + 2^{n+1} q \pi) \sum_{j \leq n} \hat{\psi}(2^{-j} \xi) \overline{\hat{\psi}(2^{-j}(\xi + 2^{n+1} q \pi))}.$$

Escribiendo  $\xi = 2^n \mu$  y utilizando el cambio de índices  $k = n - j$ , vemos que la última suma coincide con el lado izquierdo de (4.16), que, por hipótesis, es cero. Por lo tanto,  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{P_j f}(\xi) = \hat{f}(\xi)$  casi por doquier, lo cual demuestra la completitud del sistema.  $\square$

Resumimos todos los resultados anteriores en el siguiente teorema.

**Teorema 4.17.** *Si  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  es una función de banda acotada tal que  $\hat{\psi}$  es nula en un entorno del origen y  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un sistema ortonormal, entonces, este sistema es completo si y solo si*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2 = 1, \quad \text{en casi todo } \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

y

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))} = 0, \quad \text{en casi todo } \xi \in \mathbb{R}, k \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

*Observación 4.18.* Para la necesidad, es suficiente con asumir la continuidad de  $|\hat{\psi}|$  en el origen, pero, para la suficiencia, necesitamos asumir que  $\hat{\psi}$  es cero casi por doquier en un entorno del origen.

Como ya hemos comentado, la hipótesis “ $\psi$  es una señal de banda acotada” no es esencial, aunque sí nos permite abreviar y agilizar a la hora de redactar las pruebas. Ciertamente, las ecuaciones (4.15) y (4.16) implican las condiciones (4.10) y (4.11) y caracterizan todas (sin excepción) las ondículas ortonormales, como vemos en el siguiente teorema, cuya demostración omitimos por su extensión.

**Teorema 4.19.** *Una función  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , con  $\|\psi\|_2 = 1$ , es una ondícula ortonormal si y solo si*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j \xi) \right|^2 = 1, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R},$$

y

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))} = 0, \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}, k \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

La demostración se puede encontrar en ([5], Section 7.1) y se basa en probar que

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle_2|^2 = \|f\|_2^2$$

(*vid.* Teorema 1.29), para toda  $f \in \mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{D} \subset L^2(\mathbb{R})$  es el subconjunto denso formado por todas las funciones de  $L^\infty(\mathbb{R})$  con ancho de banda acotado.

Cabe destacar que, aunque el hecho de que  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  sea una base de Hilbert es un indicador de que estamos realizando una buena aproximación, no es estrictamente necesario. En la teoría de ondículas, es común relajar la hipótesis anterior y pedir que dicho sistema sea un **marco** (*frame*). Un marco no es más que un conjunto de vectores linealmente dependientes que, de alguna forma, sigue generando  $L^2(\mathbb{R})$ . En concreto,  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un marco si existen dos constantes  $A, B$ , con  $0 < A \leq B < \infty$ , tales que

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad \text{para cada } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Para más información, consúltese [5].

#### 4.4. Transformada ondícula continua

Cuando estudiábamos series de Fourier, definíamos los coeficientes de Fourier de una tal  $f \in L^2(-\pi, \pi)$  como  $\mathcal{F}f(n) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \langle f, e^{inx} \rangle_2$  y, cuando pasábamos a la transformada de Fourier, la definíamos como  $\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \langle f, e^{2\pi i x \xi} \rangle_2$ . De manera análoga, podemos generalizar el sistema discreto  $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$  al sistema continuo  $\{\psi_{s,t} = |s|^{-1/2} \psi(\frac{x-t}{s}) : s, t \in \mathbb{R}\}$  y, para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , escribir:

$$\mathcal{W}_\psi f(s, t) = \tilde{f}(s, t) = \langle f, \psi_{s,t} \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{s,t}(x)} dx = |s|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-t}{s}\right)} dx.$$

Esta será la **transformada ondícula continua** de  $f$  con respecto a la ondícula madre  $\psi$ .

Notemos que  $\|\psi_{s,t}\|_2 = \|\psi\|_2$ , para cualesquiera  $s, t \in \mathbb{R}$  y, además, por la desigualdad de Hölder,

$$|\mathcal{W}_\psi f(s, t)| \leq \|f\|_2 \|\psi\|_2 < \infty, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

luego  $\mathcal{W}_\psi f$  está bien definida y pertenece a  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

A partir de aquí y hasta el final de la sección, nuestro objetivo será hallar condiciones que imponer sobre  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  para poder reconstruir la señal original  $f$  a partir de su transformada  $\tilde{f}$  mediante algún tipo de fórmula de inversión.

La clave radica en aplicar el teorema de Plancherel:

$$\tilde{f}(s, t) = \langle f, \psi_{s,t} \rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{\psi}_{s,t} \rangle_2$$

y calcular

$$\hat{\psi}_{s,t}(\xi) = |s|^{1/2} e^{-2\pi i t \xi} \hat{\psi}(s\xi).$$

Entonces,

$$\tilde{f}(s, t) = |s|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i t \xi} \overline{\hat{\psi}(s\xi)} \, d\xi = |s|^{1/2} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{f}(\cdot) \overline{\hat{\psi}(s\cdot)} \right\} (t). \quad (4.17)$$

Así, aplicando la transformada de Fourier a ambos lados, se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) e^{-2\pi i t \xi} \, dt = \int_{(0, \infty)} |s|^{1/2} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\psi}(s\xi)} \, ds.$$

Ahora bien, no podemos simplemente dividir por  $\overline{\hat{\psi}(s\xi)}$ , pues esta función puede anularse. En su lugar, multipliquemos en ambos lados de la igualdad por  $\hat{\psi}(s\xi)$  e integremos con respecto a  $s$ . No obstante, necesitaremos utilizar un peso  $w(s)$ , que ahora mismo no conocemos pero sí determinaremos durante la reconstrucción de  $f$ .

En primer lugar, integraremos sobre  $s > 0$ , aunque más adelante también requeriremos del análisis de las escalas negativas:

$$\int_{(0, \infty)} w(s) \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) e^{-2\pi i t \xi} \, dt \, ds = \hat{f}(\xi) \int_{(0, \infty)} w(s) \sqrt{s} \overline{\hat{\psi}(s\xi)} \, ds$$

Definamos

$$Y(\xi) = \int_{(0, \infty)} w(s) \sqrt{s} \overline{\hat{\psi}(s\xi)} \, ds$$

y asumamos, por un momento, que  $Y$  y su inverso están acotados (salvo quizás en un conjunto de medida cero), esto es,

$$A \leq Y(\xi) \leq B, \quad \text{para casi todo } \xi \in (0, \infty), \quad (4.18)$$

para algunas constantes  $A, B$  tales que  $0 < A \leq B < \infty$  (a posteriori, estudiaremos cuáles son las implicaciones de esta suposición). En consecuencia,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= Y(\xi)^{-1} \int_{(0, \infty)} w(s) \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) e^{-2\pi i t \xi} \hat{\psi}(s\xi) \, dt \, ds \\ &= Y(\xi)^{-1} \int_{(0, \infty)} w(s) s^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \hat{\psi}_{s,t}(\xi) \, dt \, ds \\ &= \int_{(0, \infty)} w(s) \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s, t) \hat{\psi}^{s,t}(\xi) \, dt \, ds. \end{aligned} \quad (4.19)$$

En la cadena de igualdades anterior, hemos definido un nuevo conjunto de “ondículas”  $\hat{\psi}^{s,t}$  a través de sus transformadas de Fourier:

$$\hat{\psi}^{s,t}(\xi) = Y(\xi)^{-1} \hat{\psi}_{s,t}(\xi) = \sqrt{s} Y(\xi)^{-1} e^{-2\pi i t \xi} \hat{\psi}(s\xi).$$

Observemos que

$$\left| \hat{\psi}^{s,t}(\omega) \right| \leq A^{-1} \left| \hat{\psi}_{s,t}(\omega) \right|,$$

por (4.18). Por lo tanto, como  $\|\psi_{s,t}\|_2 = \|\psi\|_2$ ,  $\hat{\psi}^{s,t} \in L^2(\mathbb{R})$  y

$$\|\psi^{s,t}\|^2 \leq A^{-2} \|\psi_{s,t}\|^2 = A^{-2} \|\psi\|^2.$$

En el dominio temporal, las nuevas ondículas vienen dadas por

$$\begin{aligned} \psi^{s,t}(x) &= \sqrt{s} \int_{(\mathbb{R})} Y(\xi)^{-1} \hat{\psi}(s\xi) e^{2\pi i(x-t)\xi} d\xi \\ &\equiv \psi^s(x-t), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \psi^s(x) &= \sqrt{s} \int_{\mathbb{R}} Y(\xi)^{-1} \hat{\psi}(s\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= s^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} Y(\xi/s)^{-1} \hat{\psi}(\xi) e^{2\pi i(x/s)\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Así, la señal original se puede recuperar tomando la transformada inversa de Fourier de (4.19):

$$f(x) = \int_{(0,\infty)} w(s) s^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s,t) \psi^{s,t}(x) dt ds. \quad (4.20)$$

De esta manera, hemos podido expresar  $f$  como una superposición de las nuevas funciones  $\psi^{s,t}$ , con  $\tilde{f}(s,t)$  como la función de coeficiente.

La fórmula de reconstrucción (4.20) no es satisfactoria tal y como está, ya que requiere que calculemos una nueva familia de funciones  $\psi^{s,t}$ . Esto no sería incómodo si toda la familia pudiera obtenerse de una única “ondícula madre” mediante traslaciones y dilataciones, como hicimos con  $\psi_{s,t}$ , pues, en tal caso, solo necesitaríamos calcular la nueva ondícula madre y usarla para generar la nueva familia. La ecuación (4.4) nos muestra que las traslaciones no son un problema, por lo que nos concentraremos en las dilataciones. Por (4.4), una condición suficiente para que la nueva familia provenga de una ondícula madre es que

$$Y(\xi/s) = Y(\xi), \quad \text{para casi todo } \xi \in \mathbb{R}, s > 0, \quad (4.21)$$

ya que, entonces,  $\psi^s(x) = \psi^1(x/s)$  y, por (4.4),

$$\psi^{s,t}(x) = s^{-1/2} \psi^1\left(\frac{x-t}{s}\right).$$

Por tal razón,  $\psi^1$  genera la nueva familia tal y como  $\psi$  generaba la antigua. La ecuación (4.21) significa que  $Y$  debe ser una constante en  $(0, \infty)$ , y una (posiblemente diferente) constante en  $(-\infty, 0)$ . Ahora, debemos elegir el peso  $w(s)$  para que se satisfaga (4.21). Dado que  $\xi$  interviene en  $Y(\xi)$  solo a través del producto  $s\xi$ , pedimos que  $w(s)$  sea tal que

$$w(s)\sqrt{s} = \frac{1}{s}. \quad (4.22)$$

Esto funciona porque, para cualquier  $\xi > 0$ , el cambio de variable  $\xi \rightarrow s\xi$  nos permite escribir:

$$Y(\xi) = \int_{(0,\infty)} \frac{|\hat{\psi}(s\xi)|^2}{s} ds = \int_{(0,\infty)} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \equiv C_+$$

y, para cualquier  $\xi < 0$ , el cambio de variable  $\xi \rightarrow -s\xi$  nos da:

$$Y(\xi) = \int_{(0,\infty)} \frac{|\hat{\psi}(s\xi)|^2}{s} ds = \int_{(0,\infty)} \frac{|\hat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi} s\xi \equiv C_-.$$

Por lo tanto, la ecuación (4.18) se cumple, para todo  $\xi \neq 0$  (luego casi por doquier), si y solo si

$$0 < C_{\pm} = \int_{(0,\infty)} \frac{|\hat{\psi}(\pm\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty. \quad (4.23)$$

Esto se conoce como una **condición de admisibilidad** para la ondícula madre  $\psi$ . Como ya se señaló, la elección de  $w(s)$  dictada por (4.22) no solo garantiza la existencia de una ondícula madre para la nueva familia, sino que también hace que  $Y$  sea constante a trozos. Eso, a su vez, simplifica el cálculo de la nueva ondícula madre, ya que, si consideramos (4.4) con  $s = 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \psi^1(u) &= C_-^{-1} \int_{(-\infty,0)} \hat{\psi}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi + C_+^{-1} \int_{(0,\infty)} \hat{\psi}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &\equiv C_-^{-1} \psi_-(x) + C_+^{-1} \psi_+(x) \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde  $\psi_{\pm}$  son las componentes de frecuencia positiva y negativa de  $\psi$ , obtenidas tomando la transformada inversa de Fourier de  $\hat{\psi}$  solo sobre las frecuencias positiva y negativa, respectivamente.  $\psi^1$  se conoce como la ondícula madre recíproca de  $\psi$ , y  $\{\psi^{s,t} : s, t \in \mathbb{R}\}$  como la familia de ondículas recíproca a  $\{\psi_{s,t}\}$ . Es fácil demostrar que  $\psi^1$  también es admisible en el sentido de (4.23), y que la ondícula madre recíproca de  $\psi^1$  es  $\psi$ . Sintetizamos los resultados a los que hemos llegado en el próximo teorema.

**Teorema 4.20.** *Sean  $\psi$  una ondícula admisible en el sentido de (4.23) y  $\{\psi^{s,t}\}$  la familia de ondículas recíproca a  $\{\psi_{s,t}\}$ . Entonces, cualquier señal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  puede ser reconstruida a partir de su transformada ondícula continua  $\tilde{f}(s,t) = \langle f, \psi_{s,t} \rangle_2$  mediante la fórmula:*

$$f(x) = \int_{(0,\infty)} \frac{1}{s^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(s,t) \psi^{s,t}(x) dt ds. \quad (4.25)$$

Si  $\psi$  es tal que  $C_- = C_+ \equiv C/2$ , entonces de (4.24) se deduce que  $\psi^1 = (2/C)\psi$ . Un ejemplo típico surge cuando  $\psi$  sea real, pues entonces  $\hat{\psi}(-\xi) = \overline{\hat{\psi}(\xi)}$ . Sin embargo, a veces es conveniente usar ondículas cuyas transformadas de Fourier se anulan para  $\xi < 0$  ó para  $\xi > 0$ . Entonces (4.23) no se puede dar, puesto que  $C_- = 0$  ó  $C_+ = 0$ . Así las cosas, recordemos la igualdad

(4.17), la cual nos muestra que, si  $\hat{\psi}(\xi) = 0$  para  $\xi < 0$ , entonces, para  $s > 0$ , la transformada  $\tilde{f}(s, t)$  depende solo de  $\hat{f}(\xi)$ , con  $\xi > 0$ . Así pues, a priori, es imposible recuperar la parte de frecuencia negativa de  $f$  integrando solo sobre las escalas positivas. Para recuperar toda la señal, en general, es necesario integrar también sobre las escalas negativas. Repitiendo la derivación del Teorema 4.20 pero integrando sobre todo  $s \neq 0$  con la función de peso  $w(s) = |s|^{-3/2}$ , obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.21.** *Sea  $\psi$  una ondícula admisible en el sentido de que  $0 < C < \infty$ , donde*

$$C = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = C_- + C_+.$$

*Entonces, podemos recuperar  $f \in L^2(\mathbb{R})$  a partir de  $\tilde{f} = \mathcal{W}_\psi f$  mediante la fórmula:*

$$f(x) = C^{-1} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{s^2} \tilde{f}(s, t) \psi_{s,t}(x) ds dt. \quad (4.26)$$

*Observación 4.22.* Notemos que (4.26) es más general que (4.25). Aun así, si  $0 < C_{\pm} < \infty$ , es preferible usar la reconstrucción del Teorema 4.20 porque la integración se lleva a cabo sobre un conjunto más pequeño y, por tanto, es más fácil de implementar.

*Observación 4.23.* Las condiciones de admisibilidad de los Teoremas 4.20 y 4.21 implican que  $\hat{\psi}(\xi) \rightarrow 0$  si  $\xi \rightarrow 0$ . De esta manera, si  $\hat{\psi}$  es continua (por ejemplo, cuando  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ ), se tiene que  $\hat{\psi}(0) = 0$ , es decir,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0,$$

por lo que, ciertamente, una ondícula debe ser una “onda pequeña”.

En ([3], Section 3.3), se halla un teorema que relaciona los estudios discreto y continuo que hemos elaborado sobre ondículas. Este resultado asevera que, si  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un marco (en particular, una base de Hilbert), entonces  $0 < C_{\pm} < \infty$ , luego podemos reconstruir cualquier señal  $f \in L^2(\mathbb{R})$  a partir de su transformada  $\mathcal{W}_\psi f = \tilde{f}$  con el Teorema 4.20.

## 4.5. Algunas aplicaciones y ejemplos

Tanto la transformada de Fourier como la transformada ondícula continua tienen numerosas aplicaciones en el análisis armónico de las **señales analógicas** ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ), que son las que hemos estudiado en esta memoria.

Una bien conocida aplicación de la transformada de Fourier es el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon-Whittaker-Kotelnikov, el cual nos permite determinar completamente cualquier señal de banda acotada conociendo solo sus valores en un conjunto discreto (numerable) de

puntos. Para más información, consúltese [1]. Sobre la transformada ondícula continua podemos mencionar, entre sus muchos usos en procesamiento de señales, el reconocimiento por ordenador de caracteres manuscritos. En este caso, la ondícula madre proviene de un AMR y se hace uso de la transformada en dos dimensiones. Una explicación mucho más detallada se puede encontrar en [16]. Otra utilidad de dicha transformada se puede encontrar en [15]. En esta referencia, se habla de la transformada de Radon, la cual es muy conocida por su uso en el desarrollo de la prueba diagnóstica TAC.

Ahora bien, en la práctica, las señales que se utilizan para almacenar y transmitir información en diversos soportes consisten en una cantidad finita de valores. Este tipo de señales se denominan **señales digitales** ( $f : \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $N > 0$ ). El conjunto de las señales digitales de tamaño  $N$ ,  $l^2(N)$ , es isomorfo a  $\mathbb{C}^N$ , luego podemos dotarlo de un producto escalar.

Así, podemos discretizar el operador  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  al operador DFT :  $l^2(N) \rightarrow l^2(N)$ , conocido como **transformada de Fourier discreta**, (*discrete Fourier transform*) dado por

$$\text{DFT}\{f\}(k) = \langle f, e_k \rangle_2 = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Análogamente, tras discretizar  $\mathcal{F}^{-1}$ , obtenemos el operador

$$\text{IDFT}\{g\}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) e^{\frac{2\pi i}{N} kn}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Como  $(e_k)_{k=0}^{N-1}$  es una base ortogonal de  $l^2(N)$ , DFT e IDFT son isomorfismos mutuamente inversos y se satisface una versión adaptada del teorema de Plancherel. Con todo lo anterior, se puede demostrar un teorema de muestreo uniforme para señales digitales de banda acotada (*vid.* [1]).

De la misma forma, es posible discretizar el operador  $\mathcal{W}_\psi$  como

$$\text{DWT}_\psi\{f\}(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle_2$$

y obtener la fórmula de inversión correspondiente, pero no entraremos en muchos detalles para amenizar la lectura. Esta transformada discreta tiene infinidad de aplicaciones en el campo de la compresión de datos (*e.g.*, véase [15]).

En última instancia, resaltamos la importancia de las ondículas en otros aspectos más teóricos y presentamos algunos ejemplos paradigmáticos de ondículas. Por un lado, si consultamos ([5], Chapter 6), encontraremos caracterizaciones de algunos espacios funcionales insignes como los espacios de Lebesgue y Sobolev ( $L^p$  y  $H^p$ ) a través de la teoría de ondículas. Por otro lado, una de las primeras ondículas descubiertas fue la ondícula de Haar:  $\psi = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1)}$ , la cual proviene del AMR definido por la función de escala  $\varphi = \chi_{[-1,0)}$ . Otra ondícula que proviene de un AMR

es la de Shannon:  $\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{i\xi/2}\chi_I\}(x) = -2\frac{\text{sen}(2\pi x) + \cos(\pi x)}{\pi(2x+1)}$ , donde  $I = [-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]$  y  $\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\chi_{[-\pi,\pi]}(x) = \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x}$ . Además, existen otros ejemplos de ondículas que vienen dadas como soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias u otros procedimientos más sofisticados, de modo que ni siquiera se necesita tener una expresión explícita de la ondícula madre. En esta descripción entran las ondículas de Legendre o las de Daubechies.

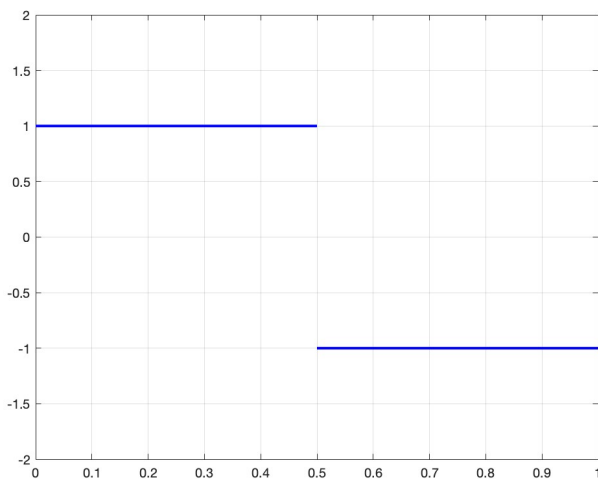


Figura 4.1: ondícula de Haar

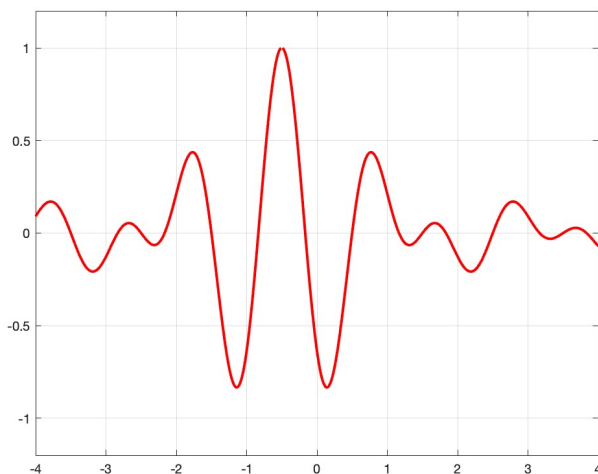


Figura 4.2: ondícula de Shannon



# Bibliografía

- [1] **M. Almira.** *Matemáticas para la recuperación de señales: una introducción*, Editorial (GEU) Grupo Editorial Universitario, 2005.
- [2] **C. K. Chui.** *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, 1992.
- [3] **I. Daubechies.** *Ten Lectures of Wavelets*, Springer-Verlag, 1992.
- [4] **J. Gomes y L. Velho.** *From Fourier Analysis to Wavelets*, Springer, 2015.
- [5] **E. Hernández y G. Weiss.** *A First Course on Wavelets*, CRC Press, 1996.
- [6] **E. Hewitt y K. Stromberg.** *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, 1965.
- [7] **G. Kaiser.** *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhäuser, 1994.
- [8] **Y. Katznelson.** *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge University Press, 2004.
- [9] **R. López Pouso.** *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales: una introducción con Maple y ejercicios resueltos*, Universidade de Santiago de Compostela, Servizo de Publicacións, 2019.
- [10] **R. E. Megginson.** *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer, 1998.
- [11] **M. A. Pinsky.** *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, Graduate Studies in Mathematics, Pacific Grove, 2002.
- [12] **H. I. Royden y P. M. Fitzpatrick.** *Real Analysis*, Prentice Hall, 2010.
- [13] **W. Rudin.** *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [14] **R. S. Strichartz.** *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1994.
- [15] **D. F. Walnut.** *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser, 2004.
- [16] **P. Wunsch.** *Wavelet descriptors for multiresolution representation and recognition of hand-printed characters*, Master's thesis, University of Florida, 1993.