



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Criterios de unicidade para sistemas de EDO's de primeira orde

Diego Airas Fernández

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Criterios de unicidade para sistemas de EDO's de primeira orde

Diego Airas Fernández

Xullo, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



# Traballo proposto

<b>Área de Coñecemento: Análise matemática</b>
<b>Título: Criterios de unicidade para sistemas de EDO's de primeira orde</b>
<b>Breve descrición do contido</b>
A existencia e unicidade de solución para o problema de valor inicial forma parte da teoría básica de ecuacións diferenciais ordinarias. Neste traballo, que se centrará na unicidade de solución, presentaranse varias probas alternativas para o Teorema de Picard-Lipschitz. Posteriormente, estudaranse diversas xeneralizacións do mesmo como os criterios de Osgood, Nagumo, Montel-Tonelli, etc, que basicamente esixen condicións máis débiles que o carácter lipschitziano requerido no criterio clásico de Picard-Lipschitz.
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>VI</b>
<b>Introdución</b>	<b>IX</b>
<b>1. O Teorema de Picard-Lipschitz</b>	<b>1</b>
1.1. Introdución . . . . .	1
1.2. O Teorema de Picard-Lipschitz. Distintas probas . . . . .	2
1.2.1. Iterantes de Picard . . . . .	10
1.2.2. A desigualdade de Gronwall . . . . .	14
<b>2. Alternativas ao Teorema de Picard-Lipschitz</b>	<b>19</b>
2.1. O Teorema de Peano . . . . .	19
2.2. O Teorema de Osgood . . . . .	21
2.3. O Teorema de Montel-Tonelli . . . . .	24
2.4. O Teorema de Nagumo . . . . .	26
2.5. Criterios de Non Unicidade . . . . .	30
<b>3. Resultados sobre a variable independente</b>	<b>33</b>
3.1. Motivación . . . . .	33
3.2. Criterios de Unicidade . . . . .	33
3.3. Condición de Lipschitz respecto a un vector arbitrario . . . . .	40



## Resumo

A teoría das ecuacións diferenciais ordinarias é unha das ramas máis salientables da Análise Matemática. Dentro da teoría das ecuacións diferenciais ordinarias, a existencia e unicidade de solución é unha das cuestións máis tratadas polos grandes matemáticos. O obxectivo deste traballo é estudar, dende un punto de vista teórico, que condicións se precisan para garantir a unicidade de solución. Comezarase introducindo unha serie de conceptos básicos que serán necesarios ao longo do texto. A continuación, presentaranse diversas probas alternativas para o Teorema de Picard-Lipschitz, sendo un dos resultados centrais do traballo. Posteriormente, estudaranse varias xeneralizacións do resultado anterior, chegando a criterios nos que se piden condicións máis débiles que no Teorema de Picard-Lipschitz, como son os criterios de Osgood, Nagumo e Montel-Tonelli.

Para rematar, enunciaranse resultados que aseguran unicidade de solución onde as hipóteses sobre a función se cumpran respecto á variable independente, ou respecto a un vector arbitrario de  $\mathbb{R}^2$ , dando lugar a criterios alternativos aos anteriores.

## Abstract

The theory of ordinary differential equations is one of the most important fields of mathematical analysis. Within this theory, the existence and uniqueness of solutions is one of the most studied issues by great mathematicians. The objective of this project is to study, from a theoretical point of view, the conditions needed to guarantee the uniqueness of solutions. We will start by introducing some basic concepts that will be necessary throughout the project. Next, various proofs for the Picard-Lipschitz Theorem will be presented, as it is one of the central results of this work. Afterwards, several generalizations of the previous result will be studied, reaching criteria that require weaker conditions than those in the Picard-Lipschitz Theorem, such as the Osgood, Nagumo and Montel-Tonelli criteria.

Finally, results will be outlined that ensure the uniqueness of solutions where the hypothesis about the function hold with respect to the independent variable or with respect to an arbitrary vector of  $\mathbb{R}^2$ , providing alternative criteria those mentioned before.

# Introdución

As ecuacións diferenciais constitúen unha das áreas centrais da Análise Matemática, con grandes aplicacións en distintos ámbitos científicos. A orixe da teoría das ecuacións diferenciais remóntase ao desenvolvemento do cálculo diferencial e integral durante o século XVII, coas figuras de matemáticos coma Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Unha das cuestións máis salientables sobre as EDO's reside na existencia e unicidade de solución das mesmas. Este tema foi motivo de estudo dalgúns dos grandes matemáticos do século XIX, sobresaíndo a figura do francés Augustin Louis Cauchy, quen foi capaz de demostrar a existencia de solución dunha ecuación diferencial da forma  $x' = f(t, x)$ , dotada dunha condición inicial  $x(t_0) = x_0$  (actualmente coñecido como o problema de Cauchy). Posteriormente, o matemático alemán Rudolf Lipschitz probou a unicidade de solución, de maneira local, do problema de Cauchy baixo certas condicións sobre a función  $f$ . Aproveitando os avances feitos por Lipschitz, o francés Émile Picard desenvolveu un método iterativo (coñecido como iterantes de Picard) para aproximar a solución dunha ecuación diferencial. Picard probou que, baixo a condición de Lipschitz, a sucesión funcional xerada polos iterantes converge á única solución da EDO, dando lugar a un dos resultados máis importantes da teoría das ecuacións diferenciais.

Este tema trátase na asignatura de Introdución as Ecuacións Diferencias Ordinarias, onde se desenvolve unha pequena aproximación ao estudo de existencia e unicidade de solución do problema do valor inicial. O obxectivo deste traballo é complementar o visto en dita asignatura, presentando varias probas alternativas para o Teorema de Picard-Lipschitz, así como outros criterios de unicidade de solución do problema de Cauchy.

No primeiro capítulo, apoiándonos nas referencias [1] e [2], centrarémonos en probar o Teorema de Picard-Lipschitz para o caso  $n$ -dimensional. Para iso, comezaremos presentando unha serie de conceptos básicos. Posteriormente, probaremos o resultado mediante o Teorema do punto fixo de Banach. Tras isto, introduciremos a sucesión dos iterantes de Picard, da que estudaremos a súa converxencia uniforme, para chegar de novo ao Teorema de Picard-Lipschitz. Por último, apoiaremos na desigualdade de Gronwall para probar de xeito alternativo a unicidade de solución do problema de Cauchy.

No seguinte capítulo, estudaremos diversas xeneralizacións do Teorema de Picard-Lipschitz, como son os criterios de Osgood, Nagumo e Montel-Tonelli recollidos na referencia [3], e adaptadas ao caso  $n$ -dimensional neste traballo. Ditos resultados piden condicións máis débiles sobre a función  $f$  para garantir a unicidade de solución do problema de Cauchy. Acompañaremos os enunciados anteriores de exemplos que motivarán a introdución dos distintos criterios.

No último capítulo, abordaremos o estudo da unicidade de solución do problema de Cauchy pedindo que as hipóteses sobre a función  $f$  se cumpran respecto á variable independente, seguindo os artigos [4] e [5]. Para rematar, apoiándonos na referencia [6], estudaremos un resultado que nos asegura unicidade de solución, no que se pide que a condición de Lipschitz se cumpra respecto a un vector de  $\mathbb{R}^2$  arbitrario.

# Capítulo 1

## O Teorema de Picard-Lipschitz

### 1.1. Introducción

A finalidade deste capítulo é presentar un resultado que nos garanta a unicidade de solución do problema do valor inicial. Para iso, primeiro debemos saber en que consiste unha ecuación diferencial ordinaria (EDO), e como se definen as solucións de dita EDO. Apoiarémonos fundamentalmente nas referencias [1] e [2], nas que se recollen os resultados e exemplos deste capítulo.

**Definición 1.1.** Chamamos ecuación diferencial ordinaria de primeira orde a

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

sendo  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua en  $\Omega$ , con  $\Omega$  un aberto.

Diremos que unha función  $\varphi$  é solución de (1.1), se  $\varphi$  é unha función derivable e definida nun intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  cumprindo que

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ para todo } t \in I.$$

Unha vez introducidos ditos conceptos básicos, presentamos o problema sobre o cal se referirán os resultados que enunciaremos ao longo do capítulo.

**Definición 1.2.** Ao problema de resolver unha ecuación diferencial da forma  $x' = f(t, x)$ , dotada dunha condición inicial  $x(t_0) = x_0$ , isto é,

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{PC}$$

chamámoslle problema de Cauchy ou problema do valor inicial. Resolver (PC) consiste en atopar unha función  $\varphi$ , definida nun intervalo  $I$  que conteña a  $t_0$ , e tal que  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ ,  $\forall t \in I$  e  $\varphi(t_0) = x_0$ .

## 1.2. O Teorema de Picard-Lipschitz. Distintas probas

Unha vez formulado o problema sobre o que imos traballar, preguntámonos que condicións se deben cumprir para que (PC) teña unha única solución. Unha posible resposta reside no Teorema de Picard-Lipschitz, que será o resultado central desta sección.

Previamente introducimos o concepto de función Lipschitziana.

**Definición 1.3.** Sexa

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\rightarrow f(t, x) \end{aligned}$$

diremos que  $f$  é lipschitziana en  $\Omega$  con respecto á variable  $x$  se existe  $L \geq 0$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Denotarase como  $f \in L(\Omega, x)$ .

Diremos que  $f$  é localmente lipschitziana en  $\Omega$  con respecto á variable  $x$  se para cada  $(t_0, x_0) \in \Omega$  existe un entorno do punto  $(t_0, x_0)$ ,  $U_0$ , tal que  $f \in L(U_0, x)$ . Neste caso escribiremos  $f \in L_{loc}(\Omega, x)$ .

Vexamos agora unha condición suficiente para que unha función sexa lipschitziana.

**Teorema 1.4.** Sexa  $\Omega = I \times D$ , con  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalo e  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conxunto convexo.

Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  é unha función tal que existen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  e son continuas e limitadas en  $\Omega$ , para  $i, j = 1, \dots, n$ , entón  $f \in L(\Omega, x)$ .

*Demostración.* Queremos probar que existe  $L \geq 0$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Tomemos  $i \in \{1, \dots, n\}$  e fixemos  $t \in I$ . Consideremos a función  $x \rightarrow f_i(t, x)$  e imos aplicar o Teorema dos Incrementos Finitos.

Dados  $x, y \in D$ ,  $\exists c \in L(x, y)$  tal que

$$f_i(t, x) - f_i(t, y) = \nabla_x f_i(t, c)(x - y) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(t, c)(x_1 - y_1) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(t, c)(x_n - y_n).$$

Agora ben, como  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  están limitadas en  $A$ , existe  $M \geq 0$  tal que  $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| \leq M$  en  $\Omega$ . Por conseguinte,

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \leq \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(t, c) \right| |x_1 - y_1| + \dots + \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(t, c) \right| |x_n - y_n| \leq nM\|x - y\|.$$

Así tomando a norma  $\|\cdot\|_\infty$  tense por definición que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |f_i(t, x) - f_i(t, y)|,$$

logo

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty \leq nM\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in \Omega.$$

Como en  $\mathbb{R}^n$  dita norma é equivalente á euclídea usual chegamos ao resultado.  $\square$

**Corolario 1.5.** *Sexan  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que existen  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  e son continuas en  $\Omega$  para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , entón  $f \in L_{loc}(\Omega, x)$ .*

*Demostración.* Fixando  $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Omega$  temos que ver que existe  $U$ , entorno de  $(\bar{t}, \bar{x})$ , tal que  $f \in L(U, x)$ . Podemos tomar  $U = [\bar{t} - r, \bar{t} + r] \times B[\bar{x}, r] \subset \Omega$  e aplicar o resultado anterior.  $\square$

Enunciamos agora o resultado principal deste capítulo.

**Teorema 1.6.** *(Picard-Lipschitz). Sexan  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  un aberto,  $(t_0, x_0) \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  unha función continua e localmente lipschitziana con respecto á segunda variable en  $\Omega$ .*

*Entón existe  $\alpha > 0$  tal que o problema de Cauchy (PC) ten solución única no intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .*

Agora imos ver algúns resultados necesarios para probar o Teorema de Picard-Lipschitz. O primeiro deles asegúranos que o problema de Cauchy equivale ao de atopar as solucións de certa ecuación integral asociada a el.

**Teorema 1.7.** *Dada unha función continua  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in \Omega$  e unha función  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $I$  un intervalo tal que  $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ ,  $\forall t \in I$ , tense que  $\varphi$  é solución do problema de Cauchy (PC) se, e só se,  $\varphi$  é unha solución continua da ecuación integral*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

*Demostración.* Supoñamos que  $\varphi$  é solución do problema de Cauchy (PC), logo  $\varphi$  é continua e así, a función  $t \rightarrow f(t, \varphi(t))$  é continua en  $I$ . Integrando e aplicando a regra de Barrow obtemos que

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

é dicir,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

como queriamos ver.

Agora supoñamos que  $\varphi$  é continua e cumpre que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Como a función  $t \rightarrow f(t, \varphi(t))$  é continua en  $I$ , polo Teorema Fundamental do Cálculo Integral sabemos que a función  $t \rightarrow \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$  é derivable e a súa derivada é  $t \rightarrow f(t, \varphi(t))$ .

Polo tanto,  $\varphi$  é derivable en  $I$ ,  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$  e, ademais,  $\varphi(t_0) = x_0$ . Así concluímos que  $\varphi$  é solución do problema de Cauchy (PC).  $\square$

Este resultado asegúranos que atopar unha solución do problema de Cauchy (PC) equivale a atopar un punto fixo da seguinte aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \\ \varphi &\rightarrow T(\varphi), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} T(\varphi) : I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \rightarrow T(\varphi)(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds. \end{aligned}$$

Así a unicidade de solución do problema de Cauchy equivale a que dita aplicación teña un único punto fixo. Imos enunciar entón un teorema que nos proporciona unha condición suficiente para que unha aplicación teña punto fixo.

**Teorema 1.8.** (*punto fixo de Banach*). *Sexan  $(X, d)$  un espazo métrico completo e  $T : X \rightarrow X$  unha aplicación contractiva, é dicir, unha aplicación que satisface que existe  $c \in [0, 1)$  tal que*

$$d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y), \text{ para calesquera } x, y \in X.$$

*Entón  $T$  ten un único punto fixo en  $X$ , é dicir, existe un único  $\bar{x} \in X$  tal que  $T(\bar{x}) = \bar{x}$ .*

*Demostración.* Imos probar que:

1.  $T$  ten como moito un punto fixo en  $X$ ;
2. existe un punto  $\bar{x} \in X$  tal que  $T(\bar{x}) = \bar{x}$  e, ademais, pode calcularse iterativamente, é dicir, a sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$x_{n+1} := T(x_n)$$

converxe a  $\bar{x}$  para calquera  $x_0 \in X$ ;

3. temos a seguinte estimación do erro:

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supoñamos que existen dous puntos fixos  $x, y \in X$  e empregando que  $T$  é contractiva e que  $c \in [0, 1)$ , tense:

$$d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq cd(x, y) < d(x, y)$$

o cal é unha contradición. Concluimos logo que, se existe punto fixo, é único. Probemos agora o apartado 2. Para iso, consideremos a sucesión  $x_{n+1} = T(x_n)$ ,  $n \geq 0$ , empregando de novo que  $T$  é contractiva temos:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1}) = cd(T(x_{n-1}), T(x_{n-2})) \\ &\leq c^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq c^n d(x_1, x_0) = c^n d(T(x_0), x_0) \end{aligned}$$

polo tanto, chegamos a que  $d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(T(x_0), x_0)$ .

Tomamos agora  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq c^{n+k-1} d(T(x_0), x_0) + c^{n+k-2} d(T(x_0), x_0) + \dots + c^n d(T(x_0), x_0) \\ &= d(T(x_0), x_0) [c^{n+k-1} + c^{n+k-2} + \dots + c^n] \\ &= d(T(x_0), x_0) c^n [c^{k-1} + c^{k-2} + \dots + c^0] = d(T(x_0), x_0) c^n \sum_{j=0}^{k-1} c^j \\ &= d(T(x_0), x_0) \frac{c^n}{1-c} (1 - c^k), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é consecuencia de que a serie é xeométrica. Así, obtemos que:

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(T(x_0), x_0) \frac{c^n}{1-c} (1 - c^k) \leq d(T(x_0), x_0) \frac{c^n}{1-c}.$$

Agora ben, tomando o límite cando  $n$  tende ao infinito, e tendo en conta que  $c \in [0, 1)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{1-c} d(T(x_0), x_0) = 0.$$

En consecuencia, polo Teorema de Compresión tense:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+k}, x_n) = 0,$$

logo a sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é unha sucesión de Cauchy, e por ser  $(X, d)$  un espazo métrico completo, podemos asegurar que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é converxente a un certo  $\bar{x} \in X$ .

Vexamos que dito  $\bar{x}$  é un punto fixo de  $T$ . Como a función  $T$  é contractiva, en particular é lipschitziana, e polo tanto continua. Así,  $T$  é secuencialmente continua, o que nos permite permutar o límite de xeito que temos:

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = T(\bar{x}).$$

Isto é,  $\bar{x}$  é un punto fixo.

Probemos, por último, que se cumpre a estimación do erro:

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Xa vimos que:

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c} (1-c^k) d(T(x_0), x_0), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo tomando o límite cando  $k$  tende ao infinito, tendo en conta que  $c \in [0, 1)$ :

$$d(x_n, \bar{x}) = d(\bar{x}, x_n) \leq \frac{c^n}{1-c} d(T(x_0), x_0)$$

o que remata a proba. □

Para demostrar o Teorema de Picard-Lipschitz empregaremos que o espazo das funcións continuas definidas nun intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $X = \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ , é un espazo métrico completo onde a distancia entre dúas funcións  $u, v \in X$  pode definirse como

$$d(u, v) = \|u - v\|_\infty = \max_{t \in I} \|u(t) - v(t)\|.$$

Para ver que isto é certo, probemos primeiro que  $d$  é unha distancia:

1.  $d(u, v) = 0$  se, e só se,  $u(t) = v(t) \quad \forall t \in I$ .

$$0 = d(u, v) = \max_{t \in I} \|u(t) - v(t)\|, \text{ logo } u(t) = v(t), \quad \forall t \in I.$$

2.  $d(u, v) = d(v, u)$ , para  $u, v \in X$ .

$$d(u, v) = \max_{t \in I} \|u(t) - v(t)\| = \max_{t \in I} \|v(t) - u(t)\| = d(v, u).$$

3.  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ , para  $u, v, w \in X$ .

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \max_{t \in I} \|u(t) - v(t)\| = \max_{t \in I} \|u(t) - w(t) + w(t) - v(t)\| \\ &\leq \max_{t \in I} \|u(t) - w(t)\| + \max_{t \in I} \|w(t) - v(t)\| = d(u, w) + d(w, v). \end{aligned}$$

Polo tanto queda probado que  $d$  é unha distancia, logo  $(X, d)$  é un espazo métrico. Para ver que é completo, temos que probar que toda sucesión de Cauchy é converxente en  $X$  coa distancia  $d$  xa definida. En particular, imos ver que toda sucesión de Cauchy é uniformemente converxente. Recordemos primeiro o concepto de converxencia uniforme.

**Definición 1.9.** Sexa  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de funcións definidas en  $I$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

A sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $g$  en  $I$  se, e soamente se, cumpre que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } [\forall n \geq N, n \in \mathbb{N}],$$

tense que

$$\|g_n(x) - g(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Vexamos agora unha caracterización da converxencia uniforme.

**Proposición 1.10.** *Sexa  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de funcións definidas en  $I$  e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

*Entón, as seguintes afirmacións son equivalentes:*

1. *A sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $g$  en  $I$ .*
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \|g_n(x) - g(x)\| = 0$ .

*Demostración.* Supoñamos que  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $g$  en  $I$ . Isto, por definición, equivale a que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \equiv N(\varepsilon) \text{ tal que } [\forall n \geq N, n \in \mathbb{N}],$$

tense que

$$\|g_n(x) - g(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

Isto é equivalente a dicir que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \equiv N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } [\forall n \geq N, n \in \mathbb{N}],$$

tense que

$$\sup_{x \in I} \|g_n(x) - g(x)\| \leq \varepsilon,$$

o cal é certo se, e só se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} \|g_n(x) - g(x)\| = 0.$$

Polo tanto, queda demostrada a equivalencia. □

Consideremos logo  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  sucesión de Cauchy, e vexamos que é uniformemente converxente. Como  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy, daquela cumpre que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \equiv N \in \mathbb{N} \text{ tal que } [n, m \geq N; n, m \in \mathbb{N}]$$

entón

$$d(u_n, u_m) = \max_{t \in I} \|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \varepsilon.$$

En particular, para cada  $t \in I$ , a sucesión  $\{u_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é unha sucesión de Cauchy de vectores reais. Por ser  $\mathbb{R}^n$  completo, podemos garantir a existencia dunha función  $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converxe puntualmente a  $u$  en  $I$ . De novo, por ser  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de Cauchy, podemos escribir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \equiv N \text{ tal que } [n, k \in \mathbb{N}; n \geq N]$$

entón

$$d(u_n, u_{n+k}) = \max_{t \in I} \|u_n(t) - u_{n+k}(t)\| \leq \varepsilon.$$

Así, tomando o límite cando  $k$  tende a  $\infty$ , concluímos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ , cúmprese que

$$d(u_n, u) = \max_{t \in I} \|u_n(t) - u(t)\| \leq \varepsilon.$$

Logo pola caracterización da converxencia uniforme vista previamente, concluímos que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converxe uniformemente a  $u$  en  $I$ . Agora, quédanos ver que  $u \in X$ . Para iso empregaremos o seguinte resultado:

**Proposición 1.11.** *Sexa  $I$  un intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de funcións definidas en  $I$ , que converxe uniformemente a  $f$  en  $I$ .*

*Se para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  é continua en  $x_0 \in I$ , daquela  $f$  é continua en  $x_0$ . En consecuencia, se para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  é continua en  $I$ , entón  $f$  vai ser continua en  $I$ .*

Polo tanto, como  $u_n \in X$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  e xa vimos que  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converxe uniformemente a  $u$  en  $I$ , concluímos que  $u \in X$ .

Así queda demostrado que o espazo das funcións continuas coa distancia  $d$  previamente definida, é un espazo métrico completo. Estamos entón en condicións de probar o Teorema de Picard-Lipschitz:

*1ª proba.* Por hipótese, sabemos que van existir  $a > 0$  e  $b > 0$  tales que a función  $f$  vai ser continua no rectángulo compacto  $K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$ . Así, como  $f$  é continua no compacto  $K$ , en particular vai estar limitada, é dicir, vai existir un  $M > 0$  tal que  $\|f(t, x)\| \leq M$  para todo  $(t, x) \in K$ . Ademais, como  $f$  é localmente lipschitziana respecto á variable  $x$  en  $K$ , para todo  $(\bar{t}, \bar{x}) \in K$ , existe unha veciñanza  $U_{(\bar{t}, \bar{x})}$  e unha constante  $L_{(\bar{t}, \bar{x})}$  tales que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L_{(\bar{t}, \bar{x})} \|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in U_{(\bar{t}, \bar{x})}.$$

En consecuencia, como cada veciñanza  $U_{(\bar{t}, \bar{x})}$  contén un aberto, podemos construír un recubrimento por abertos de  $K$ , que por ser compacto admite un subrecubrimento finito  $\mathcal{V}$ . Polo tanto, podemos considerar  $L = \max_{U \in \mathcal{V}} L_U$ , é dicir, o máximo das constantes de Lipschitz para cada elemento do subrecubrimento. Así, dados calesquera  $(t, x), (t, y) \in K$  tense que  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$ .

Fixemos agora un valor  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha < \min\{a, b/M, 1/L\}$  e definamos o seguinte intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  e o conxunto

$$X = \{v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) : v(t_0) = x_0, \|v(t) - x_0\| \leq b \text{ para todo } t \in I\}.$$

En  $X$  consideramos a métrica usual:

$$d(u, v) := \max_{t \in I} \|u(t) - v(t)\| \text{ para } u, v \in X$$

coa que xa probamos que o espazo das funcións continuas  $(Y, d)$  é un espazo métrico completo. Agora ben,  $X$  é un subconxunto pechado de  $Y$ , e vexamos que  $(X, d)$  tamén é un espazo métrico completo.

En particular, imos probar que toda sucesión de Cauchy en  $X$  converxe a un elemento de  $X$ . Sexa  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  unha sucesión de Cauchy en  $X$ , como  $X \subset Y$ , entón  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$  e por ser o espazo das funcións continuas coa distancia  $d$  completo, daquela  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converxe a  $u \in Y$ . Agora ben, como dita función é o límite dunha sucesión de elementos de  $X$ , vai ser un punto de acumulación, logo  $u \in X$ . Definimos agora a aplicación  $T : X \rightarrow X$  dada por

$$Tv(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \text{ para cada } t \in I.$$

Vexamos que a aplicación  $T$  está ben definida, é dicir, se  $v \in X$ , probemos que  $Tv \in X$ . A composición  $f(\cdot, v(\cdot))$  é continua en  $I$  e, polo tanto, a función  $Tv : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é continua en  $I$ . Ademais, tense tamén que  $Tv(t_0) = x_0$ .

Por outro lado, como  $v \in X$  temos que  $(t, v(t)) \in K$  para todo  $t \in I$ , así que

$$\|f(t, v(t))\| \leq M \text{ para todo } t \in I,$$

co cal

$$\|Tv(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s))\| ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b$$

para todo  $t \in I$  e, polo tanto,  $Tv \in X$ .

Como consecuencia do Teorema de punto fixo de Banach, vexamos que a aplicación  $T$  ten un único punto fixo en  $X$ . Para iso, só temos que ver que  $T : X \rightarrow X$  é contractiva, é dicir, existe  $c \in [0, 1)$ , tal que:

$$d(Tu, Tv) \leq cd(u, v) \quad \forall u, v \in X.$$

Sexan  $u, v \in X$  fixados. Como  $f$  é localmente lipschitziana respecto á segunda variable, e tendo en conta a definición de  $d(u, v)$ , tense que

$$\begin{aligned} \|Tu(t) - Tv(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| L \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\| ds \right| \leq L|t - t_0| \max_{s \in I} \|u(s) - v(s)\| \leq L\alpha d(u, v) \end{aligned}$$

e como  $\alpha < 1/L$ , obtemos que  $\alpha L \in (0, 1)$ , así que  $T$  é contractiva con  $c = \alpha L$ , logo concluímos que  $T$  ten un único punto fixo en  $X$ .

Para finalizar, vexamos que calquera función  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  que sexa solución do (PC) pertence a  $X$ . Sexa  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  unha solución do (PC), e supoñamos que existe  $t_1 \in I$  tal que  $\|\varphi(t_1) - x_0\| > M\alpha$  (sen perda de xeneralidade podemos supoñer  $t_1 > t_0$ ). Sabemos que  $\varphi$  é continua en  $I$  e  $\varphi(t_0) = x_0$ , logo existe  $t_2 \in (t_0, t_1)$  tal que  $\|\varphi(t_2) - x_0\| = M\alpha$  (polo Teorema de Bolzano). Sexa agora  $t^* = \inf\{t > t_0 : \|\varphi(t) - x_0\| = M\alpha\}$ . Así, polo Teorema dos Incrementos Finitos, existe un  $v \in (t_0, t^*)$  tal que:

$$\|\varphi(t^*) - \varphi(t_0)\| \leq \|\varphi'(v)\| |t^* - t_0| \leq M |t^* - t_0| < M\alpha$$

e chegamos a unha contradición.

Así concluímos que  $\|\varphi(t) - x_0\| \leq M\alpha \leq b$  para todo  $t \in I$ . Polo tanto, as solucións de (PC) no intervalo  $I$  correspóndense cos puntos fixos de  $T$  en  $X$ , así que o problema de Cauchy (PC) ten unha única solución definida en  $I$ .  $\square$

### 1.2.1. Iterantes de Picard

Unha maneira alternativa de probar o Teorema de Picard-Lipschitz pode ser a partir dos iterantes de Picard, que se definen como:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= x_0, \quad \text{para todo } t \in I, \\ \varphi_m(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_{m-1}(s)) ds \quad \text{para todo } t \in I \text{ e } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En particular, imos ver que o límite uniforme en  $I$  da sucesión de iterantes de Picard é a solución proporcionada polo Teorema de Picard-Lipschitz. Comezaremos vendo que dita sucesión é uniformemente converxente seguindo a referencia [1].

**Proposición 1.12.** *A sucesión dos iterantes de Picard  $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  é uniformemente converxente en  $I$ .*

*Demostración.* Consideremos que estamos a traballar no mesmo compacto da proba anterior  $K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq b\}$ . Fixemos de novo un valor  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha < \min\{a, b/M, 1/L\}$  e consideramos o intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

Imos probar por indución que para cada  $m \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)\| \leq \frac{M}{L} \frac{|t - t_0|^{m+1}}{(m+1)!} L^{m+1}, \quad \forall t \in I, \quad (1.2)$$

onde  $M = \max\{\|f(t, x)\|, \text{ con } (t, x) \in K\}$ .

Xa vimos na anterior proba que, por ser  $f$  localmente lipschitziana no compacto  $K$ , en particular vai ser lipschitziana en dito compacto, é dicir, vai existir unha constante  $L \geq 0$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in K.$$

Agora ben, para empregar dita hipótese temos que asegurar que  $(t, \varphi_m(t)) \in K$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ , e para todo  $t \in I$ . Isto é, temos que ver que para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\|\varphi_m(t) - x_0\| \leq b$ ,  $\forall t \in I$ . Probarémolo mediante indución.

Para  $m = 0$ , como  $\varphi_0(t) = x_0$ , claramente  $(t, x_0) \in K$ ,  $\forall t \in I$ .

Supoñamos que se cumpre para un certo  $m \in \mathbb{N}$ , é dicir,  $(t, \varphi_m(t)) \in K$ ,  $\forall t \in I$ , e vexamos que tamén é certo para  $m + 1$ :

$$\varphi_{m+1} = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds.$$

Así, empregando a hipótese de indución e tendo en conta que  $f$  está limitada pola constante  $M$  no compacto  $K$ , tense que

$$\begin{aligned} \|\varphi_{m+1}(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_m(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t M ds \right| = M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b. \end{aligned}$$

Deste xeito, queda probado que  $(t, \varphi_m(t)) \in K$  para todo  $t \in I$  e para todo  $m \in \mathbb{N}$ .

Probemos logo (1.2). Sen perda de xeneralidade, faremos o caso  $t \geq t_0$ , sendo análogo para  $t \leq t_0$ .

Para  $m = 1$ , empregando o feito de que  $f$  é lipschitziana en  $K$  temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, x_0)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, x_0)\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi_1(s) - x_0\| ds, \end{aligned}$$

e tense que

$$\|\varphi_1(s) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^s f(r, x_0) dr \right\| \leq \left| \int_{t_0}^s \|f(r, x_0)\| dr \right| \leq M|s - t_0|, \quad s \in I.$$

Así,

$$\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| \leq ML \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = \frac{ML}{2} |t - t_0|^2, \quad t \geq t_0,$$

polo que queda probado para  $m = 1$ . Agora ben, asumimos que se cumpre (1.2) para  $m - 1$ :

$$\|\varphi_m(t) - \varphi_{m-1}(t)\| \leq \frac{M}{L} \frac{|t - t_0|^m}{m!} L^m, \quad \forall t \in I.$$

Vexamos que se cumpre para  $m$ :

$$\begin{aligned} \|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi_m(s)) - f(s, \varphi_{m-1}(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi_m(s)) - f(s, \varphi_{m-1}(s))\| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\varphi_m(s) - \varphi_{m-1}(s)\| ds \leq L \frac{M L^m}{L m!} \int_{t_0}^t |s - t_0|^m ds \end{aligned}$$

onde na última desigualdade empregamos a hipótese de indución. Así chegamos a que:

$$\|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)\| \leq \frac{M |t - t_0|^{m+1}}{L (m+1)!} L^{m+1}.$$

Polo tanto vemos que se cumpre (1.2) para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Temos entón que:

$$\max_{t \in I} \|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)\| \leq \frac{M \alpha^{m+1} L^{m+1}}{L (m+1)!}.$$

Daquela, observamos que  $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  representa a sucesión de sumas parciais da serie funcional

$$\varphi_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)),$$

xa que

$$\varphi_k(t) = \varphi_0(t) + \sum_{m=0}^{k-1} (\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)).$$

Polo tanto, a converxencia uniforme da serie implicaría a converxencia uniforme da sucesión dos iterantes de Picard.

Agora ben, como temos (1.2) para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t)\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M \alpha^{m+1} L^{m+1}}{L (m+1)!},$$

e como a serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha L)^m}{m!}$$

converxe a  $e^{(\alpha L)}$ , polo criterio maiorante de Weierstrass deducimos que a serie

$$\varphi_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty} (\varphi_{m+1}(t) - \varphi_m(t))$$

converxe uniformemente. Así a sucesión dos iterantes de Picard,  $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ , converxe uniformemente, como queríamos probar.  $\square$

Estamos agora en condicións de presentar unha proba alternativa do Teorema de Picard-Lipschitz:

2ª Proba. Pola proposición anterior, xa sabemos que  $\varphi_m \rightarrow \varphi$  uniformemente en  $I$ , logo tomando o límite cando  $m$  tende a  $\infty$  en

$$\varphi_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds,$$

tense que

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{m+1}(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds \right) \\ &= x_0 + \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds, \end{aligned}$$

e vexamos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \varphi_m(s)) ds = \int_{t_0}^t \lim_{m \rightarrow \infty} f(s, \varphi_m(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

Sabemos que  $\varphi$  é continua en  $I$  por ser límite uniforme de funcións continuas. Polo tanto, a gráfica de  $\varphi$ ,

$$Gr(\varphi) = \{(t, \varphi(t)) : t \in I\}$$

é un compacto contido en  $\Omega$ . Por conseguinte, existe  $\beta > 0$  tal que o conxunto compacto

$$B = \{(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n : \|x - \varphi(t)\| \leq \beta\} \subset \Omega.$$

Como  $f$  é continua e  $B$  é compacto,  $f$  é uniformemente continua en  $B$ , é dicir, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|y - z\| < \delta, \quad y, z \in B \Rightarrow \|f(y) - f(z)\| < \varepsilon.$$

Fixado  $\delta > 0$ , como  $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $\varphi$  en  $I$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$m \geq M \Rightarrow \|\varphi_m(s) - \varphi(s)\| < \delta, \quad \forall s \in I.$$

Polo tanto, se  $m \geq M$ , temos que  $\|(s, \varphi_m(s)) - (s, \varphi(s))\| < \delta, \forall s \in I$  e

$$\|f(s, \varphi_m(s)) - f(s, \varphi(s))\| < \varepsilon, \quad \forall s \in I, m \geq M.$$

Así, se definimos

$$g_m(s) = f(s, \varphi_m(s)), \quad g(s) = f(s, \varphi(s)), \quad s \in I,$$

chegamos a que, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$m \geq M \Rightarrow \|g_m(s) - g(s)\| < \varepsilon, \quad \forall s \in I,$$

é dicir,  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $g$  en  $I$ . Isto implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t g_m(s) ds = \int_{t_0}^t \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(s) ds = \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

Logo temos que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

e xa vimos que isto equivale a que sexa solución do (PC). Quédanos ver que é única.

Consideramos un intervalo  $|t - t_0| \leq \delta$ , onde  $\delta$  é tal que  $L\delta < 1$  e vemos que calesquera dúas solucións coinciden en dito intervalo.

Sexan  $\varphi$  e  $\psi$  dúas solucións, entón para calquera  $t \in I$  tense que:

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \right| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|\varphi(s) - \psi(s)\| ds \right| \\ &\leq L|t - t_0| \max_{|t-t_0| \leq \delta} \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq L\delta \max_{|t-t_0| \leq \delta} \|\varphi(t) - \psi(t)\|. \end{aligned}$$

Tomando o máximo na parte esquerda chegamos a que:

$$\max_{|t-t_0| \leq \delta} \|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq L\delta \max_{|t-t_0| \leq \delta} \|\varphi(t) - \psi(t)\|.$$

Chamando  $k = \max_{|t-t_0| \leq \delta} \|\varphi(t) - \psi(t)\| > 0$  e dividindo por  $k$  temos que  $1 \leq L\delta$ , o cal é unha contradición.

Polo tanto,  $\max_{|t-t_0| \leq \delta} \|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0$  o que implica que  $\varphi(t) = \psi(t)$  no intervalo  $|t - t_0| \leq \delta$ . Polo tanto, tomando  $\alpha = \delta$ , chegamos a que  $\varphi(t) = \psi(t)$  no intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , como queríamos probar.  $\square$

### 1.2.2. A desigualdade de Gronwall

Imos ver agora outro resultado, seguindo [2], que nos permitirá chegar a unha proba alternativa do Teorema de Picard-Lipschitz.

**Teorema 1.13.** (*Desigualdade de Gronwall*). *Sexa  $\phi \in \mathcal{C}(I, [0, +\infty))$ , sendo  $a, b \geq 0$  e  $t_0 \in I$ . Se temos que*

$$\phi(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^t \phi(s) ds \right|$$

para todo  $t \in I$ , entón

$$\phi(t) \leq a e^{b|t-t_0|}$$

para todo  $t \in I$ .

*Demostración.* Comezamos vendo o caso  $t \leq t_0$ . Como  $\phi : I \rightarrow [0, +\infty)$  é non negativa, dado  $t \in (-\infty, t_0] \cap I$ , cúmprese que

$$\left| \int_{t_0}^t \phi(s) ds \right| = \int_t^{t_0} \phi(s) ds,$$

entón, temos que

$$\phi(t) \leq a + b \int_t^{t_0} \phi(s) ds, \quad \forall t \in (-\infty, t_0] \cap I.$$

Vexamos logo que

$$\phi(t) \leq ae^{b(t_0-t)}, \quad \forall t \in (-\infty, t_0] \cap I.$$

Definimos

$$\psi(t) := a + b \int_t^{t_0} \phi(s) ds,$$

logo tense que  $\phi(t) \leq \psi(t)$ ,  $\forall t \in (-\infty, t_0] \cap I$ . Se derivamos obtemos que

$$\psi'(t) = -b\phi(t),$$

e por ser  $b$  non negativo, se multiplicamos a desigualdade anterior por  $b$  tense que

$$\psi'(t) = -b\phi(t) \geq -b\psi(t).$$

Agora ben, multiplicamos por  $e^{-b(t_0-t)}$  e chegamos a

$$\psi'(t)e^{-b(t_0-t)} + b\psi(t)e^{-b(t_0-t)} \geq 0$$

ou, equivalentemente, que

$$(\psi(t)e^{-b(t_0-t)})' \geq 0.$$

Así, como a función é monótona crecente no intervalo  $[t, t_0]$  e tendo en conta que  $\psi(t_0) = a$ , tense que

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq \psi(t_0)e^{b(t_0-t)} = ae^{b(t_0-t)},$$

como queriamos ver.

Para o caso  $t > t_0$ , dado  $t \in [t_0, +\infty) \cap I$ , cúmprese que

$$\left| \int_{t_0}^t \phi(s) ds \right| = \int_{t_0}^t \phi(s) ds$$

entón temos que

$$\phi(t) \leq a + b \int_{t_0}^t \phi(s) ds, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \cap I,$$

e queremos ver que

$$\phi(t) \leq ae^{b(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, +\infty) \cap I.$$

Definimos novamente

$$\psi(t) := a + b \int_{t_0}^t \phi(s) ds,$$

e xa sabemos que  $\phi(t) \leq \psi(t)$ ,  $\forall t \in [t_0, +\infty) \cap I$ . En particular, se derivamos obtemos que  $\psi'(t) = b\phi(t)$  e como  $b$  é non negativo, multiplicamos por  $b$  na desigualdade obtendo que

$$\psi'(t) = b\phi(t) \leq b\psi(t).$$

Agora ben, multiplicando por  $e^{-b(t-t_0)}$  tense que

$$\psi'(t)e^{-b(t-t_0)} - b\psi(t)e^{-b(t-t_0)} \leq 0$$

e isto equivale a que

$$(\psi(t)e^{-b(t-t_0)})' \leq 0.$$

Así, como a función é monótona decrecente no intervalo  $[t_0, t]$  e tendo en conta que  $\psi(t_0) = a$  chegamos a que

$$\phi(t) \leq \psi(t) \leq \psi(t_0)e^{b(t-t_0)} = ae^{b(t-t_0)}$$

como queriamos ver.

Polo tanto, queda probado que

$$\phi(t) \leq ae^{b|t-t_0|}, \quad \forall t \in I.$$

□

O seguinte resultado é consecuencia inmediata da desigualdade de Gronwall e vains resultar de gran axuda á hora de probar o Teorema de Picard-Lipschitz.

**Corolario 1.14.** *Sexa  $\varphi \in \mathcal{C}(I, [0, +\infty))$ ,  $b \geq 0$  e  $t_0 \in I$ . Se se cumpre que*

$$\varphi(t) \leq b \left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right|$$

para todo  $t \in I$ , entón  $\varphi(t) = 0$  no intervalo  $I$ .

Vexamos agora unha proba alternativa ao Teorema de Picard-Lipschitz. Neste caso, non imos probar unicidade de solución senón que, en caso de existir solución, esta é única.

*3ª Proba.* Consideremos dúas solucións do problema de Cauchy (PC),  $\varphi$  e  $\psi$ , definidas nos respectivos intervalos  $I_1 = [t_0 - \alpha_1, t_0 + \alpha_1]$  e  $I_2 = [t_0 - \alpha_2, t_0 + \alpha_2]$ . Temos que  $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$  e queremos ver logo que

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad \forall t \in I_1 \cap I_2.$$

Sexa  $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$  arbitrario (supoñemos que  $\bar{t} > t_0$  pois o outro caso sería análogo). Así,  $[t_0, \bar{t}] \subset I_1 \cap I_2$  e como  $\varphi$  e  $\psi$  son solucións, tense que

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

e

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds$$

para todo  $t \in [t_0, \bar{t}]$ , onde  $x_0 = \varphi(t_0) = \psi(t_0)$ .

Polo tanto,

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \psi(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right\| = \left\| \int_{t_0}^t (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))) ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds, \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}]. \end{aligned}$$

Como  $\varphi$  e  $\psi$  son continuas, a imaxe da restrición ao intervalo compacto  $[t_0, \bar{t}]$  vai ser un compacto. Definimos  $K$  como un rectángulo compacto que contén ás imaxes de  $\varphi$  e  $\psi$ . Entón, por ser  $f$  lipschitziana respecto da segunda variable, existe  $L_K \geq 0$  tal que

$$\|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| \leq L_K \|\varphi(s) - \psi(s)\|, \quad s \in [t_0, \bar{t}].$$

Logo temos que

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq L_K \int_{t_0}^t \|\varphi(s) - \psi(s)\| ds, \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}].$$

Así, polo corolario anterior, concluímos que  $\|\varphi(t) - \psi(t)\| = 0, \forall t \in [t_0, \bar{t}]$ . Por conseguinte  $\varphi(t) = \psi(t), \forall t \in [t_0, \bar{t}]$ , en particular,  $\varphi(\bar{t}) = \psi(\bar{t})$ . Como  $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$  era arbitrario, chegamos ao resultado.  $\square$

Para rematar o capítulo imos ver un par de exemplos para refozar a idea que estamos a tratar. No primeiro imos aplicar o Teorema de Picard-Lipschitz para asegurar unicidade de solución.

**Exemplo 1.15.** Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = |x|, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

A función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t, x) = |x|$  é lipschitziana respecto á variable  $x$  con constante de Lipschitz  $L = 1$ :

$$|f(t, x) - f(t, y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Polo tanto, aplicando o Teorema de Picard-Lipschitz, concluímos que existe un  $\alpha > 0$  tal que (1) ten unha única solución,  $\varphi$ , definida nun intervalo  $I = [-\alpha, \alpha]$ .

Vemos, por último, un exemplo que nos servirá de motivación para o seguinte capítulo, pois trátase dun caso onde a función non é localmente lipschitziana, mais o problema de Cauchy ten unicamente unha solución.

**Exemplo 1.16.** Consideramos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = 1 + x^{2/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

A función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t, x) = 1 + x^{2/3}$  é continua en  $\mathbb{R}^2$ , pero non é localmente lipschitziana respecto á variable  $x$  nunha veciñanza da condición inicial  $(0, 0)$ :

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |1 + x^{2/3} - 1 - y^{2/3}| = |x^{2/3} - y^{2/3}|.$$

Daquela temos que ver se existe unha constante  $L_K \geq 0$  tal que

$$|x^{2/3} - y^{2/3}| \leq L_K |x - y|, \quad \forall (x, y) \in K,$$

onde  $K$  é unha veciñanza da condición inicial  $(0, 0)$ . Se isto fose certo, tomando  $y = 0$ , teríase que  $1 \leq L_K |x^{1/3}|$  o cal non se cumpre nun entorno de  $x = 0$ .

Non obstante, vexamos que (2) ten unha única solución. Usando separación de variables tense que

$$\int \frac{dx}{1 + x^{2/3}} = \int dt.$$

Para resolver a primeira integral empregamos o cambio de variable  $z = x^{1/3}$  e chegamos a que  $3(z - \arctan z) = t$ , logo desfacendo o cambio de variable, a solución de (2) virá dada implicitamente por

$$3(x^{1/3} - \arctan x^{1/3}) = t.$$

Este exemplo fai que nos preguntemos se existen outros resultados que nos aseguren a unicidade de solución de (PC), sen necesidade de que a función  $f$  sexa localmente lipschitziana respecto á segunda variable. Isto será o que estudaremos no seguinte capítulo.

## Capítulo 2

# Alternativas ao Teorema de Picard-Lipschitz

Recordemos que estamos a traballar co problema do valor inicial ou problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{PC})$$

No primeiro capítulo, probamos o Teorema de Picard-Lipschitz, un resultado que nos proporciona unha condición suficiente para ter unicidade de solución para o problema de Cauchy, (PC), nun certo intervalo  $I$ .

Como dito teorema precisa que a función  $f(t, x)$  sexa lipschitziana respecto á variable  $x$ , preguntámonos se existen outros resultados que precisen de hipóteses distintas e que nos aseguren unicidade de solución de (PC). Para iso, seguiremos a referencia [3], onde se atopan os resultados e exemplos que desenvolveremos ao longo deste capítulo.

### 2.1. O Teorema de Peano

Imos comezar por un resultado que é de gran utilidade para funcións  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pois as hipóteses que se piden para  $f$  son fáciles de verificar.

**Teorema 2.1.** (*Peano*). *Sexa  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  con  $a, b > 0$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua.*

*Se  $f$  é monótona crecente con respecto a  $x$  para cada  $t$  no intervalo  $[t_0 - \alpha, t_0]$ , entón o problema de Cauchy (PC) ten unha única solución no intervalo  $[t_0 - \alpha, t_0]$ .*

Se  $f$  é monótona decrescente con respecto a  $x$  para cada  $t$  no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , entón o problema de Cauchy (PC) ten unha única solución no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

*Demostración.* Comezamos probando o caso  $t \geq t_0$ . Supoñamos que  $\varphi_1$  e  $\psi_1$  son dúas solucións de (PC) distintas no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

Supoñamos que  $\psi_1(t) > \varphi_1(t)$ , para  $t_1 < t \leq t_1 + \varepsilon \leq t_0 + \alpha$  e  $\varphi_1(t) = \psi_1(t)$ , para  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Así, para todo  $t \in (t_1, t_1 + \varepsilon]$ , temos que  $f(t, \varphi_1(t)) \geq f(t, \psi_1(t))$  por ser  $f$  monótona decrescente en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ , logo  $\varphi_1'(t) \geq \psi_1'(t)$ . Isto implica que a función  $u_1 = \psi_1 - \varphi_1$  é monótona decrescente. Ademais, como  $u_1(t_1) = 0$ , teremos que  $u_1(t) \leq 0$ , para  $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon]$ , polo tanto chegamos a unha contradición e así concluimos que  $\varphi_1(t) = \psi_1(t)$  en  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

Consideremos agora o caso  $t \leq t_0$ , e vexamos que vai ser análogo.

Sexan  $\varphi_2$  e  $\psi_2$  dúas solucións de (PC) distintas en  $[t_0 - \alpha, t_0]$ . Supoñamos que  $\psi_2(t) < \varphi_2(t)$  para  $t_0 - \alpha \leq t_2 - \varepsilon \leq t < t_2$  e  $\psi_2(t) = \varphi_2(t)$  para  $t_2 \leq t \leq t_0$ . Así, para todo  $t \in [t_2 - \varepsilon, t_2)$ , temos que  $f(t, \varphi_2(t)) \geq f(t, \psi_2(t))$  por ser  $f$  monótona crecente en  $[t_0 - \alpha, t_0]$ , logo  $\varphi_2'(t) \geq \psi_2'(t)$ . Isto implica que a función  $u_2 = \psi_2 - \varphi_2$  é monótona decrescente. Ademais, como  $u_2(t_2) = 0$ , terase que  $u_2(t) \geq 0$  en  $[t_2 - \varepsilon, t_2]$ . Así, chegamos a unha contradición, o que implica que  $\varphi_2(t) = \psi_2(t)$  en  $[t_0 - \alpha, t_0]$ .  $\square$

Presentamos un exemplo no que podemos aplicar o anterior resultado.

**Exemplo 2.2.** Consideremos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = -|x|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

onde

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

A función  $f(t, x) = -|x|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x)$  non é localmente lipschitziana respecto á variable  $x$  nun entorno da condición inicial. Se o fose, existiría unha constante  $L_K \geq 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = | -|x|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x) + |y|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(y) | \leq L_K |x - y| \text{ para } (t, x), (t, y) \in K,$$

onde  $K$  é unha veciñanza do  $(0, 0)$ .

En particular, para  $(t, x) \in K$ , con  $x > 0$ , teríase que

$$|f(t, x) - f(t, 0)| = |x|^{\frac{1}{2}} \leq L_K |x|,$$

logo

$$\frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{|x|} = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{2}}} \leq L_K,$$

o cal non se cumpre en calquera veciñanza do  $(0, 0)$ .

Porén, podemos ver que a función  $f$  verifica as hipóteses do Teorema de Peano, pois  $f$  é continua para  $0 \leq t < \infty$ ,  $|x| < \infty$  e monótona decrecente con respecto a  $x$  para  $t \in [0, \infty)$ . Polo tanto,  $\varphi(t) \equiv 0$  vai ser a única solución de (3) en  $[0, \infty)$ .

## 2.2. O Teorema de Osgood

Presentamos agora unha xeneralización do Teorema de Picard-Lipschitz, para o cal precisamos do seguinte lema.

**Lema 2.3.** *Sexa  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  continua e monótona crecente tal que  $g(0) = 0$ ,  $g(z) > 0$  para  $z > 0$  e, ademais*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = \infty. \quad (2.1)$$

*Sexa  $\phi$  unha función continua e non negativa definida en  $[0, a]$ . Se*

$$\phi(t) \leq \int_0^t g(\phi(s)) ds, \quad 0 < t \leq a, \quad (2.2)$$

*tense que*

$$\phi(t) = 0, \quad \forall t \in [0, a].$$

*Demostración.* Definimos  $\psi(t) = \max_{0 \leq s \leq t} \phi(s)$  e supoñamos que  $\psi(t) > 0$ , para  $0 < t \leq a$ . Así, tense que  $\phi(t) \leq \psi(t)$ , e para cada  $t$ , existirá un  $\bar{t} \leq t$  tal que  $\phi(\bar{t}) = \psi(t)$ .

Temos logo que

$$\psi(t) = \phi(\bar{t}) \leq \int_0^{\bar{t}} g(\phi(s)) ds \leq \int_0^t g(\psi(s)) ds,$$

é dicir, a función  $\psi$  cumpre (2.2).

Sexa  $\bar{\psi}(t) = \int_0^t g(\psi(s)) ds$ , así  $\bar{\psi}(0) = 0$ ,  $\psi(t) \leq \bar{\psi}(t)$  e  $\bar{\psi}'(t) = g(\psi(t)) \leq g(\bar{\psi}(t))$ , por ser  $g$  monótona crecente.

Polo tanto, para  $0 < \delta < a$ , cúmprese que

$$\int_{\delta}^a \frac{\bar{\psi}'(t)}{g(\bar{\psi}(t))} dt \leq a - \delta \leq a.$$

Porén, vemos que

$$\int_{\delta}^a \frac{\bar{\psi}'(t)}{g(\bar{\psi}(t))} dt = \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{dz}{g(z)},$$

onde  $\bar{\psi}(\delta) = \varepsilon$  e  $\bar{\psi}(a) = \alpha$ . Así, tendo en conta que se cumpre (2.1) tense que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^a \frac{\bar{\psi}'(t)}{g(\bar{\psi}(t))} dt = \infty.$$

Polo tanto chegamos a unha contradición, logo  $\psi(t)$  non pode ser positiva, é dicir,  $\psi(t) \equiv 0$ , de onde concluímos que  $\phi(t) = 0$  en  $[0, a]$ .  $\square$

*Observación 2.4.* Tomando  $g(z) = bz$  con  $b > 0$ , dita función atópase nas condicións do lema anterior e, en particular, temos o Corolario 1.14.

**Teorema 2.5.** (*Osgood*). *Sexan  $a, b > 0$  e  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e tal que, para calesquera  $(t, x), (t, y) \in D$ , cúmprese a condición de Osgood*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq g(\|x - y\|),$$

onde  $g$  é unha función nas condicións do lema anterior.

Entón, existe un  $\alpha > 0$  tal que o problema do valor inicial, (PC), ten solución única no intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

*Demostración.* Supoñamos que  $\varphi$  e  $\psi$  son dúas solucións de (PC) en  $I$ . Vexamos que  $\varphi(t) = \psi(t)$ ,  $t \geq t_0$ , sendo o caso  $t \leq t_0$  análogo.

Como  $f$  satisface a condición de Osgood, temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t_0 + \bar{t}) - \psi(t_0 + \bar{t})\| &\leq \int_{t_0}^{t_0 + \bar{t}} \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \leq \int_{t_0}^{t_0 + \bar{t}} g(\|\varphi(s) - \psi(s)\|) ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} g(\|\varphi(z + t_0) - \psi(z + t_0)\|) dz, \end{aligned}$$

para  $\bar{t} \in [0, \alpha]$ .

Así, tomando  $\phi(\bar{t}) = \|\varphi(t_0 + \bar{t}) - \psi(t_0 + \bar{t})\|$ , tense que  $\phi$  está nas condicións do lema anterior, logo  $\phi(\bar{t}) = 0$ , para todo  $\bar{t} \in [0, \alpha]$ , o cal implica que  $\varphi(t) = \psi(t)$ , para todo  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ . Como o caso  $t \leq t_0$  sería análogo, concluímos a proba.  $\square$

Vexamos logo un exemplo onde se pode aplicar o resultado anterior.

**Exemplo 2.6.** Consideramos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = Lx, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

onde  $L > 0$ .

Se consideramos a función  $g(z) = Lz$ , continua e monótona crecente no intervalo  $[0, \infty)$ . Ademais,  $g(0) = 0$ ,  $g(z) > 0$  para  $z > 0$ , e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = \frac{1}{L} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{\varepsilon} = \infty.$$

Polo tanto, a función  $g(z)$  satisface as hipóteses do lema anterior.

Agora ben, dados calesquera  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |Lx - Ly| = g(|x - y|),$$

logo cúmprese a condición de Osgood. Así, podemos aplicar o Teorema de Osgood e concluimos que (4) ten solución única, que será, en particular,  $\varphi(t) \equiv 0$ .

Este exemplo móstranos que o Teorema de Osgood é unha xeneralización do Teorema de Picard-Lipschitz, xa que considerando a función  $g(z) = Lz$  con  $L > 0$ , vemos que estamos aplicando, en particular, o Teorema de Picard-Lipschitz pois temos que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq g(\|x - y\|) = L\|x - y\|.$$

Imos presentar agora un exemplo onde o Teorema de Picard-Lipschitz non é aplicable, mais si estaremos en condicións de empregar o Teorema de Osgood.

**Exemplo 2.7.** Consideremos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

onde

$$f(t, x) = \begin{cases} -x \log x & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{e}, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Vexamos que dita función non está nas condicións do Teorema de Picard-Lipschitz.

A función  $f$  é continua para  $t \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq x \leq \frac{1}{e}$  pois

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -x \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\log(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Porén,  $f$  non é localmente lipschitziana con respecto á variable  $x$  en ningún dominio contendo a  $x = 0$ . Se fose certo teríase que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |-x \log x + y \log y| \leq L_K |x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in K,$$

sendo  $K$  unha veciñanza de  $(0, 0)$ .

Entón, podemos tomar  $y = 0$  e teríase que  $|x \log x| \leq L_K|x|$  polo tanto  $|\log x| \leq L_K$ , o cal non é certo en calquera veciñanza de  $x = 0$ .

Intentemos aplicar o Teorema de Osgood. Consideremos

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z = 0, \\ -z \log z & \text{se } 0 < z \leq \frac{1}{e}, \\ \frac{1}{e} & \text{se } z > \frac{1}{e}. \end{cases}$$

Razonando de maneira análoga a como fixemos anteriormente, pódese probar que  $g$  é continua en  $[0, \infty)$ . Ademais,  $g$  é monótona crecente e cumpre que  $g(0) = 0$  e  $g(z) > 0$  para  $z > 0$ .

Por outra parte, tense que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon} \frac{dz}{g(z)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon} \frac{dz}{-z \log z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log(\log(1/\varepsilon)) = \infty.$$

Polo tanto,  $g$  está nas condicións do Lema 2.3.

Agora ben, tendo en conta que  $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = -\frac{1}{x} < 0$ , para  $0 < x \leq 1/e$ , é dicir,  $f$  é cóncava. Como consecuencia, considerando (sen perda de xeneralidade)  $0 < y < x \leq 1/e$  cúmprese que

$$\frac{f(t, x-y) - f(t, 0)}{x-y} \geq \frac{f(t, x) - f(t, y)}{x-y},$$

é dicir,

$$-(x-y) \log(x-y) \geq -x \log x + y \log y.$$

Así,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |(-x \log x) - (-y \log y)| \leq -|x-y| \log|x-y| = g(|x-y|).$$

Polo tanto, podemos aplicar o Teorema de Osgood e concluímos que existe  $\alpha > 0$  tal que o problema do valor inicial (5) ten solución única no intervalo  $I = [-\alpha, \alpha]$ .

### 2.3. O Teorema de Montel-Tonelli

Imos ver unha xeneralización do Teorema de Osgood que acabamos de probar. Imos precisar dun resultado previo, que será, en particular, unha adaptación do Lema 2.3.

**Lema 2.8.** *Sexa  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  continua e monótona crecente tal que  $g(0) = 0$ ,  $g(z) > 0$  para  $z > 0$  e, ademais, cumprindo a condición (2.1).*

*Consideremos  $\phi$  unha función continua e non negativa definida en  $[0, a]$ , e  $h$  unha función integrable en dito intervalo e tal que  $h(t) \geq 0$ . Se se cumpre que*

$$\phi(t) \leq \int_0^t h(s)g(\phi(s))ds, \quad 0 < t \leq a, \quad (2.3)$$

daquela tense que

$$\phi(t) = 0, \text{ para todo } t \in [0, a].$$

A proba deste resultado é análoga á do Lema 2.3. Estamos así en condicións de presentar o resultado principal desta sección.

**Teorema 2.9.** (*Montel-Tonelli*). *Sexa  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sendo  $D$  o conxunto definido no Teorema de Osgood, e tal que para calesquera  $(t, x), (t, y) \in D$  cúmprese a condición de Montel-Tonelli*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq h(t)g(\|x - y\|), \quad (2.4)$$

onde  $h$  é unha función integrable no intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  e tal que  $h(t) \geq 0$ . Ademais,  $g(z) > 0$  é unha función continua para  $0 < z \leq 2b$  tal que  $g(0) = 0$  e que cumpre a condición (2.1).

Entón, o problema do valor inicial (PC) ten unha única solución no intervalo  $I$ .

*Demostración.* O razonamento vai ser similar ao empregado na proba do Teorema de Osgood, apoiándonos neste caso no Lema 2.8.

Supoñamos que  $\varphi$  e  $\psi$  son dúas solucións de (PC) en  $I$ . Vexamos que  $\varphi(t) = \psi(t)$  para  $t \geq t_0$ , sendo o outro caso análogo.

Como  $f$  satisface (2.4), temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(t_0 + \bar{t}) - \psi(t_0 + \bar{t})\| &\leq \int_{t_0}^{t_0 + \bar{t}} \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \leq \int_{t_0}^{t_0 + \bar{t}} h(s)g(\|\varphi(s) - \psi(s)\|) ds \\ &= \int_0^{\bar{t}} h(z + t_0)g(\|\varphi(z + t_0) - \psi(z + t_0)\|) dz, \end{aligned}$$

para  $\bar{t} \in [0, \alpha]$ .

Así pois, tomando  $\phi(\bar{t}) = \|\varphi(t_0 + \bar{t}) - \psi(t_0 + \bar{t})\|$ , vemos que  $\phi$  está nas condicións do lema anterior, o cal implica que  $\phi(\bar{t}) = 0$ , para todo  $\bar{t} \in [0, \alpha]$ , é dicir,  $\varphi(t) = \psi(t)$ , para todo  $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ .  $\square$

*Observación 2.10.* Nas condicións do Teorema de Montel-Tonelli, se tomamos como función  $g$  a identidade, tense que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq h(t)\|x - y\|.$$

Observamos entón que estamos a mellorar o Teorema de Picard-Lipschitz pois acotabamos por unha constante  $L \geq 0$  para garantir a unicidade de solución. Neste caso,  $h$  é unha función que depende da variable  $t$ , integrable en  $I$  e tal que  $h(t) \geq 0$ . Poderíamos considerar, por exemplo,  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$  que diverxe a  $\infty$  cando  $t \rightarrow 0^+$ .

## 2.4. O Teorema de Nagumo

**Definición 2.11.** Sexa  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diremos que  $f$  cumpre a condición de Nagumo no seu dominio  $\Omega$  se existe  $K \leq 1$  tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq K \frac{\|x - y\|}{|t - t_0|}, \text{ con } t \neq t_0, \quad (2.5)$$

para calesquera  $(t, x), (t, y) \in \Omega$ .

Para o Teorema de Nagumo, precisaremos do seguinte lema.

**Lema 2.12.** Sexa  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  e  $\phi : I \rightarrow [0, +\infty)$  unha función tal que  $\phi(t_0) = 0$ . Supoñamos ademais que  $\phi$  é diferenciable en  $t = t_0$ , con  $\phi'(t_0) = 0$ .

Entón, a desigualdade

$$\phi(t) \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{\phi(s)}{s - t_0} ds \right|,$$

implica que  $\phi(t) = 0, \forall t \in I$ .

*Demostración.* Sexa  $t \geq t_0$ , definimos  $u(t) = \int_{t_0}^t \frac{\phi(s)}{s - t_0} ds$ . Esta función está ben definida xa que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\phi(t)}{t - t_0} = \phi'(t_0) = 0.$$

Ademais, temos que

$$u'(t) = \frac{\phi(t)}{t - t_0} \leq \frac{u(t)}{t - t_0},$$

logo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u(t)}{t - t_0} \right) = \frac{(t - t_0)u'(t) - u(t)}{(t - t_0)^2} \leq 0,$$

o cal implica que  $\frac{u(t)}{t - t_0}$  é monótona decrecente.

Así, como  $u(t_0) = 0$ , terase que  $u(t) \leq 0$ , e como, por definición,  $u(t) \geq 0$ , entón  $u(t) \equiv 0$  e así  $\phi(t) = 0$  no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ .

O caso  $t \in [t_0 - \alpha, t_0]$  é análogo, o que remata a proba. □

Presentamos daquela o Teorema de Nagumo.

**Teorema 2.13.** (*Nagumo*). Sexan  $a, b \geq 0$ ,  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e cumprindo a condición de Nagumo (2.5) en  $D$ .

Entón, existe  $\alpha > 0$  tal que o problema do valor inicial (PC) ten unha única solución en  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

*Demostración.* Sexan  $\varphi$  e  $\psi$  dúas solucións distintas do (PC) no intervalo  $I$ .

Pola acotación modular e tendo en conta que  $f$  cumpre a condición de Nagumo, tense que

$$\|\varphi(t) - \psi(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\| ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{\|\varphi(s) - \psi(s)\|}{|s - t_0|} ds \right|.$$

Consideramos  $\phi(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|$ , que verifica que

$$\phi(t) \leq \left| \int_{t_0}^t \frac{\phi(s)}{s - t_0} ds \right|,$$

no intervalo  $I$ . Ademais,  $\phi$  é continua en  $I$  e  $\phi(t_0) = 0$ , temos así que

$$\phi'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t_0 + h) - \phi(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(t_0 + h) - \psi(t_0 + h)\|}{h},$$

e por ser  $\varphi$  e  $\psi$  solucións de (PC),  $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ , logo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varphi(t_0 + h) - \psi(t_0 + h)\|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|(\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)) - (\psi(t_0 + h) - \psi(t_0))\|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h\varphi'(t_0 + \theta_1 h) - h\psi'(t_0 + \theta_2 h)\|}{h}, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1, \end{aligned}$$

polo Teorema do Valor Medio.

Polo tanto, tense que

$$\phi'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \|\varphi'(t_0 + \theta_1 h) - \psi'(t_0 + \theta_2 h)\| = (\operatorname{sgn} h) \lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi'(t_0 + \theta_1 h) - \psi'(t_0 + \theta_2 h)\| = 0,$$

por ser  $\varphi$  e  $\psi$  solucións de (PC).

Así, temos que  $\phi(t) = \|\varphi(t) - \psi(t)\|$  está nas condicións do lema anterior, polo tanto  $\phi(t) \equiv 0$ , logo  $\varphi(t) = \psi(t)$ ,  $\forall t \in I$ , como queriamos ver.  $\square$

*Observación 2.14.* Xa vimos que, nas condicións do Teorema de Montel-Tonelli, mellorabamos o Teorema de Picard-Lipschitz pois, considerando  $g$  a función identidade chegabamos a que se  $f$  cumpre a condición

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq h(t)\|x - y\|,$$

temos unicidade de solución para (PC).

Agora ben, como  $h$  tiña que ser integrable, poderíamos tomar, por exemplo  $h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ , pero non  $h(t) = \frac{1}{t}$  pois dita función non é integrable en ningunha veciñanza de  $t = 0$ .

Porén, grazas ao Teorema de Nagumo, se estamos a traballar con  $t_0 = 0$ , tomando  $K = 1$  se se cumpre que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \frac{1}{|t|}\|x - y\|,$$

entón temos asegurada a unicidade de solución. Observamos así, como estamos chegando a mellores acotacións para garantir a unicidade de solución. A pesar disto, debemos sinalar que se tomamos, por exemplo,  $K = 2$ , a desigualdade

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \frac{2}{|t|} \|x - y\|,$$

xa non nos servirá para asegurar a unicidade de solución.

O feito de que a condición (2.5) non nos garante unicidade de solución se  $K > 1$  ímolo visualizar no seguinte exemplo.

**Exemplo 2.15.** Consideremos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

onde

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, x \leq 0 \\ \frac{\delta x}{t}, & 0 \leq t \leq 1, 0 < x < t^\delta, \\ \delta t^{\delta-1}, & 0 \leq t \leq 1, t^\delta \leq x \end{cases}$$

sendo  $\delta > 1$ .

Podemos ver que a función  $f$  é continua nos puntos  $(0, x)$ , para  $0 < x < t^\delta$  xa que

$$\left| \frac{\delta x}{t} \right| < \frac{\delta t^\delta}{t} \rightarrow 0, \text{ cando } t \rightarrow 0^+.$$

Así, a función  $f$  é continua no conxunto  $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1, |x| < \infty\}$ .

Ademais,  $f$  satisface a condición de Nagumo pero para  $K = \delta > 1$ , como vemos a continuación.

- Supoñamos primeiro  $0 < x, y < t^\delta$ , daquela

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{\delta x}{t} - \frac{\delta y}{t} \right| = \frac{\delta}{t} |x - y|.$$

- Sexan  $0 < x < t^\delta \leq y$ , entón

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= \left| \frac{\delta x}{t} - \delta t^{\delta-1} \right| = \frac{\delta}{t} |x - t^\delta| \\ &= \frac{\delta}{t} (t^\delta - x) \leq \frac{\delta}{t} |x - y|. \end{aligned}$$

- Dados  $x \leq 0 < y < t^\delta$ , cúmprese que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| 0 - \frac{\delta y}{t} \right| \leq \frac{\delta}{t} |x - y|.$$

- Se  $x \leq 0$ ,  $t^\delta \leq y$ , tense que

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t, y)| &= |0 - \delta t^{\delta-1}| = \frac{\delta}{t} t^\delta \leq \frac{\delta y}{t} \\ &\leq \frac{\delta}{t} |x - y|. \end{aligned}$$

Porén, o problema do valor inicial (6) ten infinitas solucións  $\varphi(t) = ct^\delta$  no intervalo  $I = [0, 1]$ , onde  $c$  é unha constante arbitraria tal que  $0 < c < 1$ .

Presentamos agora un exemplo onde si é aplicable o Teorema de Nagumo.

**Exemplo 2.16.** Consideramos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

onde

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & t = 0, |x| < \infty \\ \frac{1}{2}t^\varepsilon, & 0 < t \leq 1, -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{2}t^\varepsilon - \frac{x}{t}, & 0 < t \leq 1, 0 \leq x \leq t^{1+\varepsilon} \\ -\frac{1}{2}t^\varepsilon, & 0 < t \leq 1, t^{1+\varepsilon} < x < \infty \end{cases},$$

sendo  $\varepsilon > 0$ .

Claramente a función  $f$  é continua no conxunto  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1, |x| < \infty\}$ .

Ademais,  $f$  satisface a condición de Nagumo para  $K = 1$ . Para velo temos en conta os seguintes casos:

- sexan  $0 < t \leq 1$ ,  $0 \leq x, y \leq t^{1+\varepsilon}$ , tense que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{1}{2}t^\varepsilon - \frac{x}{t} - \frac{1}{2}t^\varepsilon + \frac{y}{t} \right| = \frac{1}{t} |x - y|.$$

- Dados  $0 < t \leq 1$ ,  $-\infty < x < 0$  e  $0 \leq y \leq t^{1+\varepsilon}$ ,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{1}{2}t^\varepsilon - \frac{1}{2}t^\varepsilon + \frac{y}{t} \right| = \frac{1}{t} |y| \leq \frac{1}{t} |x - y|.$$

- Se  $0 < t \leq 1$ ,  $-\infty < x < 0$ ,  $t^{1+\varepsilon} < y < \infty$ , entón

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{1}{2}t^\varepsilon + \frac{1}{2}t^\varepsilon \right| = t^\varepsilon \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t} |x - y|.$$

- Por último, se  $0 < t \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq t^{1+\varepsilon} < y < \infty$ ,

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \left| \frac{1}{2}t^\varepsilon - \frac{x}{t} + \frac{1}{2}t^\varepsilon \right| = \left| t^\varepsilon - \frac{x}{t} \right| = \frac{1}{t} |t^{1+\varepsilon} - x| \leq \frac{1}{t} |x - y|.$$

Polo tanto, estamos en condicións de aplicar o Teorema de Nagumo, logo o problema de Cauchy (7) ten solución única nun intervalo  $I$  que contén á condición inicial  $t_0 = 0$ .

*Observación 2.17.* Sinalemos que, no exemplo anterior, non estamos en condicións de aplicar o Teorema de Montel-Tonelli. Para que iso fose certo, teriamos que atopar unha función,  $h$ , integrable nunha veciñanza de  $t_0 = 0$  e tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq h(t)g(|x - y|), \quad \forall (t, x), (t, y) \in D.$$

En particular, tomando como función  $g$  a identidade, se consideramos  $0 < t \leq 1$ ,  $0 \leq x, y \leq t^{1+\varepsilon}$ , tería que cumprirse que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{1}{t}|x - y| \leq h(t)|x - y|,$$

é dicir,

$$\frac{1}{t} \leq h(t), \quad 0 < t \leq 1.$$

Como  $h$  ten que ser integrable, observamos que isto non se cumpre.

Concluimos así que neste exemplo non é aplicable o Teorema de Montel-Tonelli.

## 2.5. Criterios de Non Unicidade

Na práctica, pode suceder que o problema de Cauchy co que estamos a traballar non cumpra as condicións dos teoremas xa presentados, pero como ditos resultados son condicións suficientes para a unicidade de solución, isto non nos asegura que vaia existir máis dunha solución.

En consecuencia, resúltanos de interese presentar algún criterio que nos garanta a existencia de, polo menos, dúas solucións. Isto será o que trataremos neste apartado onde os resultados que imos introducir farán referencia, en particular, ao seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{PC0})$$

onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.18.** (*Lakshmikantham*). *Supoñamos que:*

1. a función  $g$  é continua no conxunto  $\{0 < t \leq a, 0 \leq z \leq 2b\}$ , e cumpre que  $g(t, 0) \equiv 0$  e  $g(t, z) > 0$ , para  $z > 0$ ;

2. para cada  $t_1$ ,  $0 < t_1 < a$ ,  $z(t) \neq 0$  é unha función diferenciable no intervalo aberto  $(0, t_1)$  e continua no pechado  $[0, t_1]$ , tal que existe  $z'_+(0)$ , é dicir, a derivada lateral pola dereita no 0. Ademais, supoñamos que

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad 0 < t < t_1$$

e

$$z(0) = z'_+(0) = 0;$$

3. a función  $f$  é continua no conxunto  $A = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq \alpha, |x| \leq \beta\}$  e tal que, para todo  $(t, x), (t, y) \in A$ , con  $t \neq 0$ ,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \geq g(t, |x - y|).$$

Entón, o problema do valor inicial (PC0) ten, polo menos, dúas solucións no intervalo  $[0, \alpha]$ .

**Teorema 2.19.** (Tamarkine). Sexa  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq \alpha, |x| \leq \beta\}$  continua no seu dominio e tal que, para calquera  $(t, x) \in D$ ,

$$|f(t, x) - f(t, \varphi(t))| \geq g(|x - \varphi(t)|),$$

onde  $\varphi$  é unha solución de (PC0).

Ademais,  $g(z)$  é unha función crecente para  $z \geq 0$ ,  $g(0) = 0$  e  $\int_{\varepsilon} \frac{dz}{g(z)}$  converge cando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Entón, o problema de Cauchy (PC0) ten, polo menos, dúas solucións no intervalo  $I = [-\alpha, \alpha]$ .

Non imos profundizar na proba dos teoremas anteriores, pois precisan de resultados sobre existencia de solución minimal que se saen do marco deste traballo. Ditas probas pódense consultar na referencia [3].

O seguinte exemplo é un caso onde podemos aplicar o Teorema de Tamarkine para concluír que o problema do valor inicial dado terá máis dunha solución.

**Exemplo 2.20.** Consideramos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Claramente  $\varphi \equiv 0$  é solución do problema considerado.

Vexamos entón que a función  $f(t, x) = \sqrt{x}$  satisface as condicións do Teorema de Tamarkine. A función  $f$  é continua no seu dominio e, considerando  $g(z) = \sqrt{z}$ , tense que

$$|f(t, x) - f(t, 0)| = |\sqrt{x} - 0| = |\sqrt{x}| \geq \sqrt{|x|} = g(|x - 0|).$$

Ademais, a integral  $\int_{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{z}} dz$  converxe cando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Polo tanto, aplicando o Teorema de Tamarkine, concluimos que o problema do valor inicial (8) ten, polo menos, dúas solucións.

Podemos observar unha certa similitude entre o Teorema de Tamarkine e o Teorema de Osgood, pois en ámbolos dous resultados pídese que a función  $f$  sexa continua nun certo dominio e a función  $g$  ten que cumprir hipóteses similares, sendo a única diferenza que no Teorema de Osgood pídese que  $\int_{\varepsilon} \frac{dz}{g(z)}$  diverxa cando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mentres que no Teorema de Tamarkine, dita integral debe converxer.

Porén, sinalamos que no Teorema de Osgood tíñase que, se para calesquera par de puntos  $(t, x)$ ,  $(t, y)$  no dominio de  $f$ ,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq g(\|x - y\|),$$

entón tíñamos unha única solución. Vemos así que ao cambiar a desigualdade de sentido pasamos de ter unha única solución a ter, como mínimo, dúas.

Existen máis resultados que determinan distintas condicións para asegurar a unicidade ou non do problema do valor inicial (PC), para profundizar pode seguirse a referencia [3].

Para rematar este capítulo, destacamos que, nos criterios presentados ata o momento, para estudar a unicidade de solución do problema de Cauchy (PC) pediamos condicións para a función  $f(t, x)$  sobre a variable  $x$ .

Preguntámonos agora que sucede se pedimos que se cumpran as condicións con respecto á variable  $t$ , se chegamos a resultados similares, ou se temos que modificar certas hipóteses para garantir ou non a unicidade de solución. Isto será o que trataremos no seguinte capítulo.

## Capítulo 3

# Resultados sobre a variable independiente

### 3.1. Motivación

Nos dous primeiros capítulos presentamos unha serie de criterios que nos aseguran a unicidade de solución do problema do valor inicial (PC). Podemos observar que todos os enunciados fan referencia a distintas hipóteses que debe cumprir a función  $f$  con respecto á variable dependente  $x$ .

Porén, resulta de interese preguntarse se podemos atopar resultados similares pedindo que as hipóteses se satisfagan con respecto á variable independente  $t$ , ou ben se non podemos garantir a unicidade de solución a non ser que pidamos certas condicións sobre a variable dependente. Isto será a finalidade deste último capítulo do traballo, onde seguiremos a estrutura da referencia [4].

Imos traballar co caso bidimensional, é dicir, consideraremos unha función  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , e o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{PC})$$

Supoñemos ademais que a función  $f$  é continua no seu dominio  $\Omega$ , logo teremos asegurado que o problema de Cauchy (PC) vai ter solución nunha veciñanza da condición inicial.

### 3.2. Criterios de Unicidade

Comezamos introducindo un pequeno resultado técnico que nos facilitará algunha das probas.

**Proposición 3.1.** *Sexa  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \subset \Omega$  unha veciñanza de  $(t_0, x_0)$  e supoñamos que o problema do valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f|_V(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*ten unha única solución, onde  $f|_V$  é a restrición de  $f$  a  $V$ .*

*Entón o problema de Cauchy (PC) ten unha única solución nun intervalo  $I$  que contén a  $t_0$ .*

Isto permítenos pasar, sen perda de xeneralidade, a veciñanzas máis pequenas cando estudemos a unicidade.

Presentemos o resultado fundamental do capítulo.

**Teorema 3.2.** *Sexa  $\Omega$  unha veciñanza do punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\Omega$ .*

*Se  $f(t_0, x_0) \neq 0$ , entón (PC) ten unha única solución se, e só se, o problema*

$$\begin{cases} t' = \frac{1}{f(t, x)}, \\ t(x_0) = t_0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

*ten unha única solución.*

*Demostración.* Como  $f(t_0, x_0) \neq 0$  e  $f$  é continua en  $(t_0, x_0)$ , existe unha veciñanza de  $(t_0, x_0)$  onde  $f$  ten signo constante. Por simplicidade, supoñamos que  $f$  ten signo constante en  $\Omega$ .

Agora ben, imos ver que se  $\varphi$  é unha solución de (PC), daquela  $\phi = \varphi^{-1}$  é solución de (P) e, equivalentemente, se  $\phi$  é solución de (P), entón  $\varphi = \phi^{-1}$  é solución de (PC).

Sexa logo  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  unha solución de (PC), entón para todo  $t \in I$ ,  $(t, \varphi(t)) \in \Omega$  e  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  polo que  $\varphi'$  ten signo constante en  $I$ . Así, polo Teorema da Función Inversa,  $\varphi$  vai ter inversa  $\varphi^{-1} : \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$  e vexamos que  $\phi = \varphi^{-1}$  é solución de (P).

En primeiro lugar,  $J = \varphi(I)$  é un intervalo que contén a  $x_0$  e  $\phi(x_0) = t_0$ . Empregando agora o Teorema da Derivada da Función Inversa, para todo  $x \in J$  temos que

$$\phi'(x) = (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{f(\phi(x), x)}.$$

De maneira análoga próbase que se  $\phi$  é solución de (P), entón  $\varphi$  é solución de (PC).

Finalmente, supoñamos que (PC) ten unha única solución, mentres que (P) ten máis dunha solución. Nese caso, consideremos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  dúas solucións de (P) diferentes nalgúns puntos arbitrariamente próximos a  $x_0$ . En consecuencia,  $\varphi_i = \phi_i^{-1}$ ,  $i = 1, 2$  son solucións de (PC) que toman valores distintos en puntos arbitrariamente próximos a  $t_0$ , o cal contradí que (PC) teña solución única.

De maneira análoga probaríase que unicidade para (P) implica unicidade para (PC), rematando así a proba.  $\square$

A clave teórica deste resultado reside no feito de que a variable dependente e a independente intercambian os seus roles ao pasar de (PC) a (P).

Podemos desta forma adaptar algúns dos teoremas xa vistos para obter resultados similares que nos garanten a unicidade de solución. Vexamos, por exemplo, outra versión do Teorema de Picard-Lipschitz.

**Teorema 3.3.** *Sexa  $\Omega$  unha veciñanza dun punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  e sexa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\Omega$ .*

*Se  $f(t_0, x_0) \neq 0$  e  $f$  cumpre a condición de Lipschitz respecto á primeira variable en  $\Omega$ , é dicir, existe unha constante  $L > 0$  tal que dados calesquera  $(t, x), (s, x) \in \Omega$  entón*

$$|f(t, x) - f(s, x)| \leq L|t - s|,$$

*entón (PC) ten unha única solución definida nunha veciñanza de  $t_0$ .*

*Demostración.* Como  $f(t_0, x_0) \neq 0$ , podemos aplicar o Teorema 3.2, logo chéganos con ver que (P) ten solución única.

Para probalo, tendo en conta a continuidade de  $f$  existe unha veciñanza  $V$  de  $(t_0, x_0)$  onde

$$r := \frac{|f(t_0, x_0)|}{2} \leq |f(t, x)|, \quad \forall (t, x) \in V.$$

Sen perda de xeneralidade, supoñamos que isto se cumpre en  $\Omega$ , entón dados  $(t, x), (s, x) \in \Omega$  tense que

$$\left| \frac{1}{f(t, x)} - \frac{1}{f(s, x)} \right| = \left| \frac{f(s, x) - f(t, x)}{f(t, x)f(s, x)} \right| \leq \frac{L}{r^2}|t - s|.$$

Tendo en conta que en (P) a variable dependente é  $t$ , polo Teorema de Picard-Lipschitz concluímos que (P) ten unha única solución.  $\square$

**Corolario 3.4.** *Sexa  $\Omega$  unha veciñanza dun punto  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\Omega$ .*

*Se  $f(t_0, x_0) \neq 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial t}$  é continua en  $\Omega$ , entón (PC) ten unha única solución nun intervalo  $I$  que contén a  $t_0$ .*

*Demostración.* Sexa  $K$  unha veciñanza compacta de  $(t_0, x_0)$  tal que  $K \subset \Omega$ . Como  $\frac{\partial f}{\partial t}$  é continua en  $K$ , sabemos que vai existir unha constante  $L > 0$  tal que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq L, \quad \forall (t, x) \in K.$$

Consideramos agora  $(t, x), (s, x) \in K$ ,  $t \neq s$  (sen perda de xeneralidade tomamos  $t < s$ ), polo Teorema do Valor Medio, existe  $r \in (t, s)$  tal que

$$|f(t, x) - f(s, x)| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(r, x) \right| |t - s| \leq L|t - s|,$$

logo, polo Teorema 3.3 concluímos que (PC) ten solución única nun intervalo  $I$  contendo a  $t_0$ .  $\square$

Vexamos un exemplo onde podemos aplicar o corolario anterior, mais non estamos en condicións de aplicar o Teorema de Picard-Lipschitz.

**Exemplo 3.5.** Consideramos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = \cos t + t(x)^{1/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Probemos que  $f(t, x) = \cos t + t(x)^{1/3}$  non é localmente Lipschitziana respecto a  $x$ . Se isto fose certo, para calquera veciñanza  $K$  de  $(0, 0)$  existiría unha constante  $L_K \geq 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| = |t(x)^{1/3} - t(y)^{1/3}| = |t||x^{1/3} - y^{1/3}| \leq L_K|x - y|.$$

En particular, tomando  $y = 0$ , tense que

$$|f(t, x) - f(t, 0)| = |t||x^{1/3}| \leq L_K|x|,$$

é dicir,

$$|t| \frac{|x^{1/3}|}{|x|} = \frac{|t|}{|x^{2/3}|} \leq L_K,$$

o cal non é certo en calquera veciñanza de  $(0, 0)$ .

Non obstante,  $f(0, 0) = 1 \neq 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial t} = -\sin t + x^{1/3}$ , que é continua en  $\mathbb{R}^2$ . Así, polo corolario anterior concluímos que (9) ten solución única nun intervalo  $I = [-\alpha, \alpha]$  con  $\alpha > 0$ .

Un caso particular do anterior corolario é o das ecuacións diferenciais autónomas, isto é, unha EDO que non depende da variable independente  $t$ :

$$x' = g(x),$$

onde  $g : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Corolario 3.6.** *Sexa  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  sendo  $J$  un intervalo que contén a  $x_0$ . Se  $g(x_0) \neq 0$ , entón o problema do valor inicial*

$$\begin{cases} x' = g(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

*ten unha única solución definida nun intervalo  $I$  contendo a  $t_0$ .*

*Observación 3.7.* Retomamos o Exemplo 1.16, no cal tiñamos o seguinte problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = 1 + x^{2/3}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Xa vimos que a función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t, x) = 1 + x^{2/3}$  non é localmente lipschitziana respecto á variable  $x$  en ningunha veciñanza da condición inicial  $(0, 0)$ .

Así e todo, cando tratamos este problema, vimos que ten unha soa solución, a pesar de non estar nas condicións do Teorema de Picard-Lipschitz. Para xustificar a unicidade de solución, observamos que  $f$  se atopa nas condicións do corolario anterior, pois  $f$  só depende da variable  $x$  e, ademais,  $f(0) \neq 0$ .

Vexamos agora un exemplo no que observamos que a EDO non é autónoma e só temos que  $f(t_0, x_0) \neq 0$ , e vemos que isto non é suficiente para garantir unicidade de solución.

**Exemplo 3.8.** Consideramos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = 3(x - t)^{2/3} + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Temos que  $f(t, x) = 3(x - t)^{1/3} + 1$ , logo  $f(t_0, x_0) = 1$ , mais  $\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{2}{(x-t)^{1/3}}$  que non é continua en  $(0, 0)$ , polo que non podemos aplicar o Corolario 3.4.

En particular, vemos que  $\varphi(t) = t$  e  $\psi(t) = t^3 + t$  son solucións de dito problema.

O Teorema 3.2 sírvenos como ferramenta para establecer versións alternativas dos resultados presentados neste traballo, transferindo as hipóteses da variable  $x$  á variable  $t$ . Observamos que, para poder aplicar este teorema precisamos que  $f(t_0, x_0) \neq 0$ , así pois resulta de interese estudar se é posible prescindir de dita condición.

Retomando o Exemplo 2.20, vemos que non podemos renunciar a dita hipótese sen engadir algunha condición, pois tiñamos o seguinte problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = \sqrt{x}, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Claramente a función  $f(t, x) = \sqrt{x}$  só depende da variable  $x$ , logo é lipschitziana respecto a variable  $t$ , e  $f(0, 0) = 0$ .

Observamos así que desfacéndonos da hipótese  $f(t_0, x_0) \neq 0$ , non temos asegurada a unicidade de solución, xa que  $\varphi(t) \equiv 0$  e  $\psi(t) = \frac{2}{3}x^{3/2}$  son solucións do problema considerado.

Imos ver que é posible renunciar a dita hipótese, mais temos que engadir unha serie de condicións máis específicas. Para iso, seguiremos a referencia [5], onde se recolle o seguinte resultado.

**Teorema 3.9.** Sexan  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  e  $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  con  $a, b > 0$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua e cumprindo as seguintes condicións:

1. existen constantes  $c > 0$  e  $r \in (0, 1/2)$  tal que

$$|f(t, x)| \geq c|x - x_0|^r \text{ para todo } (t, x) \in D;$$

2.  $f(t, x_0)$  non é idénticamente nula nalgúns intervalos  $(t_0 - \varepsilon, t_0)$  e  $(t_0, t_0 + \varepsilon)$ , con  $0 < \varepsilon < a$ ;

3. existe  $L \geq 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(s, x)| \leq L|t - s| \text{ para calesquera } (t, x), (s, x) \in D.$$

Entón existe  $\alpha > 0$  tal que o problema do valor inicial (PC) ten solución única no intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

*Demostración.* Consideremos unha solución  $\varphi$  de (PC) e definimos o conxunto pechado

$$B = \{t \in [t_0, t_0 + a] : \varphi'(t) = 0\}.$$

Supoñamos que  $\varphi$  non é estritamente monótona en ningún intervalo da forma  $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ , daquela o conxunto  $B$  é infinito e  $t_0 \in B$ . Sexa  $t_1 = \sup B \in B$  por ser  $B$  pechado e consideremos o conxunto  $(t_0, t_1) \setminus B$  que vai ser aberto e, pola segunda hipótese, non baleiro. Ademais, existe un intervalo  $(t', t'') \subseteq (t_0, t_1) \setminus B$  con  $t', t'' \in B$ , é dicir,  $\varphi'(t') = \varphi'(t'') = 0$ . Así, pola primeira hipótese, tense que  $\varphi(t') = \varphi(t'') = x_0$  e polo Teorema do Valor Medio sabemos que existe  $r \in (t', t'')$  tal que  $\varphi'(r) = 0$ . Chegamos entón a unha contradición pois  $r \in B \cap (t', t'') = \emptyset$ . Polo tanto, toda solución de (PC) é estritamente monótona e, ademais, invertible nun intervalo  $[t_0, t_0 + \delta_1)$ .

Consideremos agora  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$  dúas solucións monótonas de (PC) con inversas  $\phi$  e  $\bar{\phi}$ , que serán, en particular, solucións de (P). Polo tanto, tense que

$$|\phi(x) - \bar{\phi}(x)| \leq |\phi(y) - \bar{\phi}(y)| + \int_y^x \frac{|f(\phi(s), s) - f(\bar{\phi}(s), s)|}{|f(\phi(s), s)||f(\bar{\phi}(s), s)|} ds$$

para  $x \geq y > x_0$ .

Entón, polas hipóteses (1) e (3),

$$|\phi(x) - \bar{\phi}(x)| \leq |\phi(y) - \bar{\phi}(y)| + \frac{L}{c^2} \int_y^x \frac{|\phi(s) - \bar{\phi}(s)|}{|s - x_0|^{2r}} ds.$$

Aplicando o Teorema 1.13 chegamos a que

$$|\phi(x) - \bar{\phi}(x)| \leq |\phi(y) - \bar{\phi}(y)| e^{\frac{L}{c^2} \int_y^x \frac{ds}{|s - x_0|^{2r}}}.$$

Tomando agora o límite cando  $y \rightarrow x_0^+$  e tendo en conta que  $r \in (0, 1/2)$ ,

$$\int_y^x \frac{ds}{|s - x_0|^{2r}} \text{ converge cando } y \rightarrow x_0^+.$$

Así, como  $|\phi(y) - \bar{\phi}(y)| \rightarrow 0$ , tense que  $\phi(x) = \bar{\phi}(x)$  nun intervalo  $[x_0, x(t_0 + \delta_1)]$ , logo  $\varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$ , para  $t \in [t_0, t_0 + \delta_1)$ .

Polo tanto, concluímos que ao sumo existirá unha solución monótona de (PC) no intervalo  $[t_0, t_0 + \delta_1)$ . Como toda solución de (PC) é monótona, concluímos que existe  $\alpha > 0$  tal que (PC) ten solución única no intervalo  $[t_0, t_0 + \alpha]$ . De maneira análoga probaríase para o intervalo  $[t_0 - \alpha, t_0]$ .  $\square$

Vexamos agora un exemplo onde podemos aplicar o resultado que acabamos de probar

**Exemplo 3.10.** Consideremos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = g(t) + h(t)|x|^r, \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

onde  $g$  e  $h$  son funcións non negativas, continuas e lipschitzianas. Ademais  $g(0) \neq 0$  e  $0 < r < 1/2$ .

Sexan  $a, b > 0$  e  $K = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t| \leq a, |x| \leq b\}$  unha veciñanza compacta do  $(0, 0)$ , probemos que a función  $f : K \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(t, x) = g(t) + h(t)|x|^r$  cumpre as hipóteses do teorema anterior.

Se consideramos  $(t, x) \in K$ , entón

$$|f(t, x)| = |g(t) + h(t)|x|^r| \geq |h(t)||x|^r \geq c|x|^r,$$

sen máis que considerar  $c = \min_{|t| < a} h(t)$ .

Ademais, observamos que  $f(t, 0) = g(t)$ , e como  $g(0) \neq 0$  e  $g$  é continua, vai existir unha veciñanza de  $t = 0$  onde  $f(t, 0)$  non é idénticamente nula.

Por último, dados  $(t, x), (s, x) \in K$  temos que

$$|f(t, x) - f(s, x)| = |g(t) + h(t)|x|^r - g(s) - h(s)|x|^r| \leq |g(t) - g(s)| + |h(t) - h(s)||x|^r,$$

e por ser  $g$  e  $h$  lipschitzianas,

$$|f(t, x) - f(s, x)| \leq L_1|t - s| + L_2|x|^r|t - s| \leq L_1|t - s| + L_2b^r|t - s|.$$

En consecuencia, vai existir unha constante  $L \geq 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(s, x)| \leq L|t - s|.$$

Polo tanto, polo Teorema 3.9, concluímos que existe  $\alpha > 0$  tal que (11) ten unha única solución no intervalo  $I = [-\alpha, \alpha]$ .

### 3.3. Condición de Lipschitz respecto a un vector arbitrario

Ao longo deste traballo presentamos unha serie de criterios de unicidade onde se pedía que a función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  fose localmente lipschitziana respecto á variable  $x$ , ou respecto á variable  $t$ .

Para rematar este traballo imos ver que tamén se pode chegar a un resultado que nos asegure unicidade de solución do problema de Cauchy, (PC), pedindo que a condición de Lipschitz se cumpra respecto a un vector calquera de  $\mathbb{R}^2$ , tal e como se trata na referencia [6].

Presentamos logo o resultado principal deste apartado.

**Teorema 3.11.** *Sexa  $\Omega$  unha veciñanza de  $(t_0, x_0)$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\Omega$ .*

*Consideremos unha veciñanza aberta de  $t_0$ ,  $U_0$ , e  $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in \mathcal{C}^1(U_0)$  con compoñentes reais e tal que:*

1.  $v_2(t_0) \neq f(t_0, x_0)v_1(t_0)$ ;
2. para cada  $k \in \mathbb{R}$  e dada unha constante  $L \geq 0$

$$|f(t, x) - f(t + kv_1(t), x + kv_2(t))| \leq L|k| \quad (3.1)$$

*sempre que os argumentos de  $f$  estén ben definidos e pertenzan a  $\Omega$ .*

*Entón, existe  $\alpha > 0$  tal que (PC) ten solución única no intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .*

Para probar este resultado imos precisar do Teorema da Función Implícita, que recordamos a continuación.

**Teorema 3.12.** *(da Función Implícita). Sexa  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un aberto,  $(x_0, y_0) \in \Omega$  e  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$  e  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .*

*Entón existen  $U_1$  e  $U_2$  veciñanzas abertas de  $x_0$  e  $y_0$  respectivamente, e unha aplicación*

$$\begin{aligned} g : \bar{U}_1 &\rightarrow \bar{U}_2 \\ x &\rightarrow g(x) \end{aligned}$$

*continua en  $\bar{U}_1$  e de clase 1 en  $U_1$  cumprindo:*

1.  $g(x_0) = y_0$ .
2.  $F(x, g(x)) = 0, \forall x \in \bar{U}_1$ .
3. Se  $x \in \bar{U}_1$  e  $y \in \bar{U}_2$  tales que  $F(x, y) = 0$ , entón  $y = g(x)$ .
4.  $g'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} F(x, g(x))$ .

Pasemos entón á proba do Teorema 3.11.

*Demostración.* Como  $f$  é continua no seu dominio  $\Omega$ , sabemos que (PC) ten polo menos unha solución  $\varphi : [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \rightarrow \mathbb{R}$  para algún  $\alpha_0 > 0$ .

Pola regularidade das funcións e pola primeira hipótese do teorema, vai existir  $\alpha \in (0, \alpha_0]$  tal que  $v_2(t) \neq f(t, \varphi(t))v_1(t)$  para  $t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ . Imos ver que  $\varphi$  é a única solución de (PC) no intervalo  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ . Para iso, supoñamos que existe outra solución  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$  de (PC) tal que  $\varphi \neq \psi$  en  $[t_0, t_0 + \alpha]$  e chegaremos a unha contradición.

Denotemos por  $t_1 := \sup\{t \in [t_0, t_0 + \alpha) : \varphi(s) = \psi(s), s \in [t_0, t]\}$ , entón temos que  $t_1 \in [t_0, t_0 + \alpha]$ ,  $\varphi(t_1) = \psi(t_1) =: x_1$  e, ademais,

$$v_2(t_1) \neq f(t_1, x_1)v_1(t_1). \quad (3.2)$$

Probemos agora que a ecuación

$$\psi(t + k(t)v_1(t)) = \varphi(t) + k(t)v_2(t) \quad (3.3)$$

ten solución única con respecto a  $k \equiv k(t)$  nun subintervalo de  $I$ .

Sexa  $F(t, k) := \psi(t + kv_1(t)) - \varphi(t) - kv_2(t)$ , que está definida nun aberto contendo a  $(t_1, 0)$  e cumprindo que

$$F(t_1, 0) = \psi(t_1) - \varphi(t_1) = 0.$$

Ademais, como

$$\frac{\partial F}{\partial k}(t, k) = f(t + kv_1(t), \psi(t + kv_1(t)))v_1(t) - v_2(t),$$

e tendo en conta (3.2)

$$\frac{\partial F}{\partial k}(t_1, 0) = f(t_1, x_1)v_1(t_1) - v_2(t_1) \neq 0.$$

Estamos así en condicións de aplicar o Teorema da Función Implícita, daquela vai existir unha única función  $k \equiv k(t)$  tal que  $k \in \mathcal{C}^1(I_1)$ , con  $I_1 \subset I$  contendo a  $t_1$ , cumprindo que  $k(t_1) = 0$  e  $F(t, k(t)) = 0, \forall t \in I_1$ .

Vexamos que  $k(t) \equiv 0$  nun subintervalo de  $I_1$ . Como se ten (3.2), existe unha constante  $\beta > 0$  e un intervalo aberto contendo a  $t_1$ ,  $I_2 \subset I_1$  tal que

$$|f(t + k(t)v_1(t), \psi(t + k(t)v_1(t)))v_1(t) - v_2(t)| \geq \beta \text{ para todo } t \in I_2.$$

Ademais, sabemos que vai existir unha constante  $M \geq 0$  tal que

$$|f(t + k(t)v_1, \psi(t + k(t)v_1(t)))| \leq M, \quad |v_1'(t)| \leq M, \quad |v_2'(t)| \leq M, \quad t \in I_2. \quad (3.4)$$

Consideramos agora a función  $\omega(t) := k^2(t)$ , definida en  $I_2$ . Derivando na ecuación (3.3), para  $t \in I_2$  tense que

$$\psi'(t + k(t)v_1(t))(1 + k'(t)v_1(t) + k(t)v_1'(t)) = \varphi'(t) + k'(t)v_2(t) + k(t)v_2'(t).$$

Polo tanto,

$$\begin{aligned} \omega'(t) &= 2k(t)k'(t) = 2k(t) \frac{\varphi'(t) - \psi'(t + k(t)v_1(t))(1 + k(t)v_1'(t)) + k(t)v_2'(t)}{\psi'(t + k(t)v_1(t))v_1(t) - v_2(t)} \\ &= 2k(t) \frac{f(t, \varphi(t)) - f(t + k(t)v_1(t), \psi(t + k(t)v_1(t)))(1 + k(t)v_1'(t)) + k(t)v_2'(t)}{f(t + k(t)v_1(t), \psi(t + k(t)v_1(t)))v_1(t) - v_2(t)} \\ &= 2k(t) \frac{f(t, \varphi(t)) - f(t + k(t)v_1(t), \varphi(t) + k(t)v_2(t))(1 + k(t)v_1'(t)) + k(t)v_2'(t)}{f(t + k(t)v_1(t), \psi(t + k(t)v_1(t)))v_1(t) - v_2(t)}. \end{aligned}$$

Tendo en conta (3.1) e (3.4), cúmprese que

$$\omega'(t) \leq 2 \frac{L + M^2 + M}{\beta} k^2(t) = 2 \frac{L + M^2 + M}{\beta} \omega(t).$$

Isto equivale a que

$$\frac{d}{dt}(\omega(t)e^{-2\frac{L+M^2+M}{\beta}(t-t_1)}) \leq 0.$$

Como  $\omega(t_1) = k^2(t_1) = 0$ , daquela  $\omega(t) = k^2(t) \equiv 0$  en  $I_2$ , é dicir,  $\varphi(t) = \psi(t)$ ,  $\forall t \in I_2$ , o que contradí a definición de  $t_1$ , chegando así ao resultado.  $\square$

*Observación 3.13.* Se consideramos no teorema anterior o vector  $v(t) = (0, 1)$ , temos a condición de Lipschitz respecto á variable  $x$ . Ademais, considerando o vector  $v(t) = (1, 0)$ , obtemos a condición de Lipschitz respecto á variable  $t$ , chegando así aos criterios de unicidade que xa vimos ao longo deste traballo.

Para rematar, presentamos un exemplo onde podemos aplicar o teorema anterior.

**Exemplo 3.14.** Consideremos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

onde

$$f(t, x) = \begin{cases} 1 + x, & x < t^2, \\ 1 + x + \sqrt{x - t^2}, & x \geq t^2. \end{cases}$$

Vexamos primeiro que  $f$  non é localmente lipschitziana respecto a  $x$  en ningunha veciñanza de  $(0, 0)$ . Se iso fose certo, dado un entorno  $K$  de  $(0, 0)$ , existiría unha constante  $L_K \geq 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L_K|x - y| \quad \forall (t, x), (t, y) \in K.$$

Fixando  $t = 0$  e tomando  $x > 0$  e  $y = 0$  temos

$$|f(0, x) - f(0, 0)| = |1 + x + \sqrt{x} - 1| = |x + \sqrt{x}| = |x| + |\sqrt{x}| \leq L_K |x|.$$

É dicir,

$$1 + \frac{1}{|\sqrt{x}|} \leq L_K,$$

o cal non é certo nunha veciñanza de 0.

Porén, imos ver que estamos nas condicións do Teorema 3.11 tomando o vector  $v(t) = (1, 2t)$ . A primeira hipótese satisfácese trivialmente pois  $v_2(0) = 0 \neq 1 = f(0, 0)v_1(0)$ .

Consideramos de novo unha veciñanza  $K$  da condición inicial e sexa

$$M = \sup\{|t| : (t, x) \in K\} < \infty.$$

Definimos  $L := 2M + 1$  e imos ver que

$$|f(t, x) - f(t + k, x + 2kt)| \leq L|k|$$

para cada  $k \in \mathbb{R}$  e  $(t, x), (t + k, x + 2kt) \in K$ .

Teremos varios casos, que estudaremos por separado:

- se  $x < t^2$  e  $x + 2kt < (t + k)^2$ , entón

$$|f(t, x) - f(t + k, x + 2kt)| = |1 + x - 1 - x - 2kt| = 2|k||t| \leq 2M|k| \leq L|k|.$$

- Se  $x \geq t^2$  e  $x + 2kt < (t + k)^2$ , tense

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t + k, x + 2kt)| &= \left| 1 + x + \sqrt{x - t^2} - 1 - x - 2kt \right| = \left| \sqrt{x - t^2} - 2kt \right| \\ &\leq \left| \sqrt{x - t^2} \right| + 2|k||t| \end{aligned}$$

e tendo en conta que  $x + 2kt < (t + k)^2$ , logo  $x - t^2 < k^2$ , polo que

$$|f(t, x) - f(t + k, x + 2kt)| \leq \left| \sqrt{x - t^2} \right| + 2|k||t| \leq |k| + 2M|k| = L|k|.$$

- Se  $x \geq t^2$  e  $x + 2kt \geq (t + k)^2$ , entón

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(t + k, x + 2kt)| &= \left| 1 + x + \sqrt{x - t^2} - 1 - x - 2kt - \sqrt{x + 2kt - (t + k)^2} \right| \\ &\leq 2|k||t| + \left| \sqrt{x - t^2} - \sqrt{x + 2kt - (t + k)^2} \right|. \end{aligned}$$

Agora ben, multiplicando e dividindo polo conxugado de  $\left| \sqrt{x-t^2} - \sqrt{x-t^2-k^2} \right|$  e tendo en conta que  $x+2kt \geq (t+k)^2$ , terase que

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t+k,x+2kt)| &\leq 2|k||t| + \frac{\left| \sqrt{x-t^2} - \sqrt{x-t^2-k^2} \right|}{\left| \sqrt{x-t^2} + \sqrt{x-t^2-k^2} \right|} \left| \sqrt{x-t^2} + \sqrt{x-t^2-k^2} \right| \\ &= 2|k||t| + \left| \frac{k^2}{\sqrt{x-t^2} + \sqrt{x-t^2-k^2}} \right| \leq 2M|k| + \left| \frac{k^2}{\sqrt{x-t^2}} \right| \\ &\leq 2M|k| + \left| \frac{k^2}{k} \right| = 2M|k| + |k| = L|k|. \end{aligned}$$

Por último, sinalamos que o caso  $x < t^2$  e  $x+2kt \geq (t+k)^2$  non é posible.

Así, podemos aplicar o Teorema 3.11 e concluimos que (12) vai ter solución única nun intervalo  $I = [-\alpha, \alpha]$ , con  $\alpha > 0$ .

# Bibliografía

- [1] S. Ahmad e A. Ambrosetti (2015). *A Textbook on Ordinary Differential Equations*, 2, Springer Nature.
- [2] R. Precup (2018). *Ordinary Differential Equations : Example-driven, Including Maple Code*, De Gruyter; Berlin, Boston.
- [3] R. P. Agarwal e V. Lakshmikantham (1993). *Uniqueness and Nonuniqueness Criteria for Ordinary Differential Equations, Series in Real Analysis*, 6, World Scientific, Singapore.
- [4] J. Á. Cid e R. L. Pouso (2009). Does Lipschitz with respect to  $x$  imply uniqueness for the differential equation  $y' = f(x,y)$ ?, *Amer. Math. Monthly* **116**, 1, 61-66.
- [5] J. T. Hoag (2013). Existence and uniqueness of a local solution for  $x' = f(t,x)$  using inverse functions, *Electronic Journal of Differential Equations*, **124**, 1-3.
- [6] J. Diblík, C. Nowak e S. Siegmund (2014). A general Lipschitz uniqueness criterion for escalar ordinary differential equations, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **34**, 1-6.