



FACULTADE DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDADE DE SANTIAGO
DE COMPOSTELA

Juan José
Nieto Roig

Tese de doutoramento

Problemas no lineales en
resonancia

Santiago de Compostela, 1983

Departamento de Ecuaciones Funcionales y Análisis Numérico

ECUACIONES

Nº 15

FUNCIONALES

Y

ANÁLISIS NUMÉRICO

PROBLEMAS NO LINEALES
EN RESONANCIA

JUAN JOSE NIETO ROIG

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES FUNCIONALES
FACULTAD DE MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE SANTIAGO

La presente Memoria, para optar al Grado de Doctor, fué elaborada en el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Santiago de Compostela, bajo la dirección del Dr. D. Gerardo Rodriguez López.

Fué leída el día 11 de Octubre de 1983 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE:

Cat. Dr. D. Antonio Valle Sánchez. Universidad de Sevilla.

VOCALES:

Cat. Dr. D. Gerardo Rodriguez López. Universidad de Santiago.

Prof. Agreg. Dr. D. Pablo Carpintero Organero. Universidad de Santiago.

Prof. Agreg. Dr. D. Pedro Martínez Amores. Universidad de Granada.

VOCAL-SECRETARIO:

Prof. Agreg. Dr. D. Fernando Costal Pereira. Universidad de Santiago.

CALIFICACION:

Sobresaliente "Cum Laude"

INDICE

	PAG.
NOTACIONES PRINCIPALES	11
INTRODUCCION	15
CAPITULO 1. PROBLEMAS NO LINEALES EN RESONANCIA: ALGUNOS RESULTADOS ABSTRACTOS	21
1.1.- EL METODO DE LA ALTERNATIVA Y RESULTADOS DE EXIS- TENCIA PARA PROBLEMAS NO LINEALES EN RESONANCIA ..	21
1.2.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES DE LA ECUA- CION $Lu = Nu$	30
1.3.- DESIGUALDADES DIFERENCIALES	33
1.4.- EL METODO DE LAS SUBSOLUCIONES Y SOBRESOLUCIONES ..	38
CAPITULO 2. SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFEREN- CIALES DE PRIMER ORDEN	43
2.1.- UN RESULTADO DE EXISTENCIA	44
2.2.- LOS CASOS MONOTONOS	49
2.3.- GENERALIZACION DE LOS CASOS MONOTONOS	55

	PAG.
2.4.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES	59
2.5.- SISTEMAS DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	64
CAPITULO 3. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO	
ELIPTICO	71
3.1.- EXISTENCIA DE SOLUCION PARA EL PROBLEMA EN RESO- NANCIA	76
3.2.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES	91
CAPITULO 4. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO	
PARABOLICO	99
4.1.- EL PROBLEMA DE DIRICHLET-PARABOLICO	102
4.2.- UNA GENERALIZACION A PROBLEMAS CON PARTE NO LINEAL NO ACOTADA	105
4.3.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES: UN EJEMPLO	110
BIBLIOGRAFIA	117

NOTACIONES PRINCIPALES

Ω : abierto de \mathbb{R}^n .

$\partial\Omega$: frontera de Ω .

ν : normal exterior a $\partial\Omega$.

$\Omega_n = \{ x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \}$ para $n \geq 1$ natural .

$L^p(\Omega)$: espacio de las funciones medibles de potencia p -ésima sumables en Ω con norma

$$\|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad \text{si } p < \infty$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess. } |f(x)| \quad \text{si } p = \infty .$$

Si $p = 2$ y $f, g \in L^2(\Omega)$, $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$

$W^{m,p}(\Omega)$: espacio de Sobolev de orden m , formado por las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tal que $D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)$ para $|\alpha| \leq m$ con norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_p^p \right]^{1/p} .$$

Si $p = 2$, $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$. En particular,

$H^1(0, 2\pi) = \{ u \in L^2(0, 2\pi) : u \text{ es absolutamente continua y } u' \in L^2(0, 2\pi) \}$
con norma

$$\|u\|_{H^1(0,2\pi)}^2 = (\|u\|_2 + \|u'\|_2)^2$$

$$\|u\|_* = \sup_{0 < t < 2\pi} |u(t)| + \|u'\|_2$$

$C^k(\bar{\Omega})$: espacio de las funciones k -continuamente diferenciable en $\bar{\Omega}$.

$C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$: espacio de las funciones $u \in C^k(\bar{\Omega})$ tal que $D^\beta u$, $|\beta| = k$, son Hölder continuas con exponente $\alpha \in (0,1)$.

Para $\alpha \in (0,1)$ y $a, b \in \mathbb{R}$, sea $D = \bar{\Omega} \times [a,b]$, $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [a,b]$,

$C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])$: espacio de las funciones u tal que

$$H_\alpha^D(u) = \sup \frac{|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)|}{[|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|]^{\alpha/2}} < +\infty$$

con norma

$$\|u\|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])} = \sup_{(x,t) \in D} |u(x,t)| + H_\alpha^D(u)$$

$C^{1+\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])$: espacio de las funciones u tal que u , u_{x_i} son elementos de $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])$.

$C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])$: espacio de las funciones u tal que u , u_t , u_{x_i} y $u_{x_i x_j}$ son elementos de $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])$.

$C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$: espacio de las funciones u tal que $u \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

$C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$: espacio de las funciones u tal que u pertenece a $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [a,b])$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

$C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [a,b])$: espacio de las funciones u tal que u, u_t, u_{x_i} y $u_{x_i x_j}$ pertenecen a $C(\bar{\Omega} \times [a,b])$.

A_{21} : completación del espacio

$\{ u \in C^\infty((0,\pi) \times \mathbb{R}) : u(0,t)=u(\pi,t)=0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } u \text{ es } 2\pi\text{-periódica en } t \}$

dotado de la norma $\|u\|_{A_{21}}^2 = \|u_t\|_2^2 + \|u_{xx}\|_2^2$.

$W_p^{2,1}((0,\pi) \times (0,2\pi))$: espacio de las funciones u tal que u, u_t, u_x y u_{xx} pertenecen a $L^2((0,\pi) \times (0,2\pi))$.

$\text{Ker } L$: nucleo de L .

$\text{Im } L$: imagen de L .

$D(L)$: dominio de L .

L^* : adjunto de L .

$\text{Int } (A)$: interior del conjunto A .

\bar{A} : clausura de A .

$F(A)$: frontera de A .

$\text{gr}(f, \Omega, p)$: grado topológico de f relativo a Ω y p .

$\text{gr-a}(\xi, 0)$: grado asintótico de ξ en 0 .

$\tilde{H}_n(X)$: cohomología reducida de Čech de un espacio topológico X con coeficientes enteros.

INTRODUCCION

Es muy amplio el conjunto de problemas cuya modelización matemática conduce a una ecuación diferencial o, en general, a una ecuación funcional cuyo estudio se aborda en el marco de unos convenientes espacios abstractos.

Así, un gran número de situaciones llevan a una ecuación del tipo:

$$(1) \quad Lu = Nu$$

donde L y N son dos operadores, el primero lineal y el segundo, en general, no lineal y continuo, sobre unos adecuados espacios normados.

Si L es invertible, la ecuación (1) puede escribirse en la forma:

$$(2) \quad (I - L^{-1} \cdot N)u = 0$$

ecuación del tipo de Hammerstein para la que existen una gran cantidad de resultados y métodos (vease [28] y las referencias citadas) dependiendo de la estructura del operador $L^{-1} \cdot N$; así, por ejemplo, si $L^{-1} \cdot N$ es compacto, se puede aplicar la teoría del grado topológico [59,65] y, si $L^{-1} \cdot N$ es "pequeño", técnicas basadas en la teoría de los puntos fijos [24], permiten obtener resultados de existencia.

Sin embargo, en muchos de los problemas a estudiar en la

teoría de las ecuaciones diferenciales, se presenta el fenómeno de que el operador lineal L es no invertible o, equivalentemente, su núcleo es no trivial. Este es el caso si, por ejemplo, se desea estudiar la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales ordinarias o la existencia de soluciones para problemas de frontera en ecuaciones diferenciales en los que aparece un autovalor correspondiente a un cierto operador diferencial.

Otra situación importante en la que se presenta la no invertibilidad de la parte lineal es en el estudio de sistemas físicos, químicos, biológicos, etc... dependientes de un parámetro al cruzar éste ciertos valores críticos (autovalores) asociados a la parte lineal: se pueden presentar, entonces, fenómenos de bifurcación y de "resonancia" entre otros.

Si se define el operador $F = L - N$, la ecuación (1) es equivalente a la:

$$(3) \quad F(u) = 0 \quad ,$$

con lo que el problema original se reduce a la búsqueda de los ceros de un operador F . Como es bien sabido, si F es diferenciable y en algún punto u_0 la diferencial $F'_u(u_0)$ es un operador de Fredholm, la ecuación (3) se puede reducir, en un entorno de u_0 , usando el método de Lyapunov-Schmidt [79] a un sistema finito de ecuaciones con un número finito de incógnitas. Este método tiene sus orígenes en los trabajos de Poincaré [70] sobre mecánica celeste, en los de Lyapunov [61] sobre la existencia y comportamiento de los estados de equilibrio de un fluido en rotación y en los de Schmidt [73] sobre el estudio de la existencia de soluciones

de ecuaciones integrales no lineales.

Durante los años de 1940 a 1960, diversas modificaciones y extensiones del método de Lyapunov-Schmidt fueron desarrolladas por Cesari [15], Cronin [23], Bartle [9] y Hale [37] entre otros. No obstante, en todos estos trabajos, se requiere que el operador no lineal N sea "pequeño" en diferentes sentidos.

Fue Cesari en 1964 [16] quien extendió dichos métodos al caso en que el operador N no necesariamente verifica la aludida condición de ser "pequeño". Asimismo, puso ya de manifiesto que sería posible un estudio global de la ecuación (1), estudio que en efecto fue llevado a cabo por Mawhin en los años setenta [62,35,63] por medio de la llamada teoría del grado de coincidencia. Al mismo tiempo y posteriormente, han sido utilizadas otras técnicas y desarrollados nuevos métodos para afrontar el estudio de problemas en resonancia, que es como usualmente se denomina a los del tipo (1) cuando el núcleo de la parte lineal es no trivial.

La teoría de puntos fijos, métodos variacionales, teoría de operadores monótonos y valores críticos son algunos de los nuevos métodos más usuales, para cuyo estudio pueden verse, por ejemplo, [19], [22], [13], [5], respectivamente.

En los últimos años se han desarrollado nuevas ideas y métodos para estudiar tales problemas en resonancia y al mismo tiempo se han extendido las técnicas ya conocidas a situaciones más generales (problemas no autoadjuntos, núcleo de L de dimensión infinita, ecuaciones diferenciales estocásticas, etc....). Uno de los más conocidos es el llamado "método de la alternativa", desarrollado esencialmente

por Cesari [17] y sus colaboradores. Este método es expuesto con detalle en la sección 1 del Capítulo 1 de esta memoria, así como algunas de las más recientes contribuciones relativas a la existencia de solución para problemas del tipo (1) que están en resonancia; en particular, el resultado presentado en el teorema 1.4, que extiende un conocido teorema de Cesari y Kannan [19], y que será de gran utilidad en el estudio de problemas con parte no lineal no acotada.

En la segunda sección, se presentan varios resultados relativos a la estructura del conjunto de soluciones de (1). Así, se dan condiciones suficientes bajo las cuales dicho conjunto de soluciones es: i) compacto , ii) conexo y iii) acíclico .

En la sección 3, se presentan algunos resultados de la teoría de las desigualdades diferenciales mientras que en la sección 4, se expone el método de las subsoluciones y sobresoluciones para tres tipos de problemas que se tratan en los capítulos siguientes.

Todos estos resultados del primer capítulo serán usados repetidamente a lo largo de esta memoria.

En el Capítulo 2 se estudia el problema de la existencia de soluciones periódicas para ecuaciones diferenciales de primer orden, dando condiciones necesarias y suficientes para ello (§1-§3), así como resultados acerca de la estructura del conjunto de soluciones (§4). Finalmente, en la sección 5, se extienden algunos de los resultados de existencia, por medio de las cuasi-funciones de Lyapunov, a sistemas diferenciales de primer orden. Dichas cuasi-funciones han sido utilizadas en el estudio de otros tipos de problemas de frontera como, por ejemplo, en sistemas diferenciales de segundo orden con condiciones del

tipo de Neumann [66] o periódicas [67] y en varios tipos de ecuaciones en derivadas parciales [52, Vol. II].

En el Capítulo 3 se estudia una problemática similar a la de las tres primeras secciones del anterior para problemas de tipo elíptico con condiciones de frontera bien del tipo de Dirichlet o Neumann. Más concretamente, en el teorema 3.3 se da un resultado de existencia que al mismo tiempo pone de manifiesto que el resultado abstracto del teorema 1.3 es más general que algunos de los resultados (teoremas 3.1 y 3.2) expuestos en [47]; mediante un contraejemplo, se muestra la no equivalencia de ambos resultados. Asimismo, en los teoremas 3.6 y 3.7 se mejoran, en diferentes aspectos, ciertos resultados en torno a la temática desarrollada en [13] y [47]. Por último, y en la sección 2, se prueba que, bajo ciertas condiciones, el conjunto de soluciones es compacto, conexo y acíclico ó bien cerrado, conexo y no acotado. Asimismo, se muestra que si una de las hipótesis se elimina, puede perderse el carácter conexo del conjunto de soluciones.

En el Capítulo 4 se trata el problema de Dirichlet-periódico para ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico, presentando la teoría general para dicho problema (§1) y extendiendo en §2 algunos de los resultados conocidos al caso en que la parte no lineal no es necesariamente acotada por medio del método de las subsoluciones y sobresoluciones. Concretamente, el teorema 4.3 mejora los resultados de [14].

En la última sección de este capítulo, se estudia, de forma similar a lo hecho en los dos capítulos anteriores, la estructura del conjunto de soluciones para el problema parabólico planteado.

CAPITULO 1

PROBLEMAS NO LINEALES EN RESONANCIA; ALGUNOS RESULTADOS ABSTRACTOS

En este capítulo se reúnen una serie de resultados de análisis funcional y de la teoría de ecuaciones diferenciales que serán utilizados a lo largo de la memoria y que permitirán afrontar su lectura con una mínima autonomía.

1.1.- EL METODO DE LA ALTERNATIVA Y RESULTADOS DE EXISTENCIA PARA PROBLEMAS NO LINEALES EN RESONANCIA.

Los problemas que se estudian en los siguientes capítulos, como ya se adelantó en la introducción, pueden ser escritos generalmente en la forma de una ecuación funcional del tipo

$$(1) \quad Lu = Nu$$

donde $L: D(L) \subset E \rightarrow F$ y $N: D(N) \subset E \rightarrow F$ son un operador lineal y un operador, en general, no lineal respectivamente y E y F sendos espacios de Banach.

El deseo de resolver la ecuación (1) nos lleva a imponer a los dominios de ambos operadores el requisito previo de que

$$D(L) \cap D(N) \neq \emptyset$$

Definición 1: Se dice que el problema (1) está en resonancia cuando $\text{Ker}L \neq \{0\}$.

Es precisamente esta situación la que se presentará en los casos que se estudiarán más adelante en los que, como es obvio, el operador L es no invertible.

Siguiendo las líneas del método de Lyapunov-Schmidt, es posible descomponer la ecuación (1) en un sistema de dos ecuaciones bajo hipótesis muy generales sobre los operadores L y N .

Teorema 1: Supóngase que existen proyecciones

$$P: E \longrightarrow E \quad \text{y} \quad Q: F \longrightarrow F$$

y un operador lineal

$$H: (I-Q)F \longrightarrow (I-P)E$$

tal que

- i) $H(I-Q)Lu = (I-P)u, \forall u \in D(L)$
- ii) $QLu = LPu, \forall u \in D(L)$
- iii) $LH(I-Q)Nu = (I-Q)Nu, \forall u \in D(N)$.

Entonces, la ecuación (1) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$(2) \quad u = Pu + H(I-Q)Nu$$

$$(3) \quad Q(Lu - Nu) = 0$$

Demostración: Adviértase, en primer lugar, que toda solución, tanto de (1) como del sistema (2)-(3), ha de pertenecer a $D(L) \cap D(N)$.

Si $Lu = Nu$, se obtiene trivialmente (3), así como la igualdad

$$H(I-Q)Lu = H(I-Q)Nu$$

de la que, usando i), resulta la ecuación (2).

Recíprocamente, supóngase que $u \in E$ verifica (2) y (3).

Aplicando L a la primera de las ecuaciones, se tiene:

$$Lu = LPu + LH(I-Q)Nu$$

expresión, que utilizando ii) y iii), es equivalente a la:

$$Lu - QLu = (I-Q)Nu .$$

De esta forma y sin más que tener en cuenta (3), se llega a que:

$$Lu - Nu = Q(Lu - Nu) = 0$$

y de ahí se concluye que u es solución de (1).

#

Definición 2: La ecuación (2) se llamará la *ecuación auxiliar* y la (3) la *ecuación de bifurcación*.

En todo lo que sigue, se supondrá que se verifican las hipótesis del teorema 1.

La existencia de las proyecciones P y Q , asegura que los espacios E y F pueden escribirse como las sumas directas

$$E = E_0 \oplus E_1 \quad y \quad F = F_0 \oplus F_1$$

donde: $E_0 = PE$, $E_1 = (I-P)E$, $F_0 = QF$ y $F_1 = (I-Q)F$

siendo entonces H un operador cuyo dominio es F_1 y cuya imagen está contenida en E_1 .

En la mayor parte de los casos que se presentan en la práctica, se tiene que:

$$E_0 = \text{Ker}L \quad y \quad F_1 = \text{Im}L$$

y

$$D(H) = F_1 = \text{Im}L \quad e \quad \text{Im}H = E_1$$

por lo que, salvo que se advierta lo contrario, ésta será la situación que consideraremos en el futuro.

El resultado que se prueba a continuación justifica el nombre de *inversa parcial* de L que corrientemente se da a la aplicación H.

Lema 1: La aplicación H, inversa parcial de L, verifica:

a) $LHv = v \quad \forall v \in F_1$

b) $HLu = u \quad \forall u \in E_1 \cap D(L)$

Además, $QLu = 0$, con lo que la ecuación de bifurcación se reduce a la $QNu = 0$.

Demostración: Se probará en primer lugar que la aplicación $H: F_1 \longrightarrow E_1$ es inyectiva. Sean, para ello, v_1, v_2 en F_1 tales que $Hv_1 = Hv_2$. Como $v_i \in F_1 = \text{Im } L$, $i = 1, 2$, se verifica que, por una parte, $v_i = (I-Q)v_i$ y, por otra, existen u_1 y u_2 tales que $v_1 = Lu_1$ y $v_2 = Lu_2$. Basta con aplicar H a las dos igualdades $v_i = (I-Q)Lu_i$, $i = 1, 2$ para obtener que $(I-P)u_1 = (I-P)u_2$ y de ahí que $v_1 = v_2$.

a) Si $v \in F_1$, se obtiene, por i), que:

$$H(I-Q)LHv = (I-P)Hv = Hv$$

ya que $\text{Im } H = E_1$. Teniendo en cuenta el caracter inyectivo de H, resulta que $(I-Q)LHv = v$ y, como $LHv \in F_1$, se puede concluir que $LHv = v$ para todo $v \in F_1$.

b) Si $u \in E_1 \cap D(L)$, es evidente que:

$$HLu = H(I-Q)Lu = (I-P)Lu = u.$$

Finalmente, puesto que $F_1 = \text{Im } L$ y Q es un proyector que aplica F en F_0 , se tiene que $QLu = LPu = 0$ y, en consecuencia, la ecuación (3) se reduce a la $QNu = 0$.

#

Habida cuenta del tipo de problemas que se estudian en capítulos posteriores, no será demasiado restrictivo suponer que $\dim E_0 = \dim F_0 = 1$. No obstante, ésta condición puede reemplazarse, sin que ello suponga una excesiva complicación adicional, por la de $\dim E_0 = \dim F_0 < +\infty$.

También se supondrá que existen aplicaciones continuas $B: E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ y $J: F_0 \longrightarrow E_0$ tales que:

- (4) B es una aplicación bilineal y J es una biyección.
- (5) Si $v_0 \in F_0$, se tiene que $v_0 = 0$ si y sólo si $B(u_0, v_0) = 0$ para todo $u_0 \in E_0$.
- (6) $Jv_0 = 0$ si y sólo si $v_0 = 0$.
- (7) $B(Jv_0, v_0) \geq 0$ para todo $v_0 \in F_0$.
- (8) $B(Jv_0, v_0) = 0$ si y sólo si $v_0 = 0$.
- (9) $B(u_0, J^{-1}u_0) = 0$ si y sólo si $u_0 = 0$.
- (10) $B(u_0, v_0) = B(Jv_0, J^{-1}u_0)$ para todo $u_0 \in E_0$ y $v_0 \in F_0$.

Nótese que (7) implica que $B(u_0, J^{-1}u_0) \geq 0$ para todo $u_0 \in E_0$.

Bajo el conjunto de hipótesis introducidas a lo largo de la sección, es ya posible formular algunos resultados generales de existencia de soluciones para (1). Se verá, concretamente, como dicho problema se puede reducir a un problema de puntos fijos en el espacio E ; necesitaremos para ello, los resultados que se establecen en los siguientes lemas y se supondrá a partir de ahora que $D(N) = E$.

Lema 2: Las soluciones de (1) coinciden con los puntos fijos del operador $T: E \longrightarrow E$ definido por:

$$Tu = Pu + H(I-Q)Nu + JQNu$$

Demostración: Si u es solución de (1), (2) y (3) se verifican, esto es $u = Pu + H(I-Q)Nu$ y $QNu = 0$. Por (6) se tiene que $JQNu = 0$ y, en consecuencia, $Tu = u$.

Recíprocamente, el hecho de que u sea un punto fijo de T se

traduce en la igualdad,

$$u - Pu - H(I-Q)Nu = JQNu$$

cuyo primer miembro es un elemento de E_1 y el segundo de E_0 . Por ello,

$$u - Pu - H(I-Q)Nu = 0, \quad JQNu = 0$$

y, en vista de las propiedades de J, se puede concluir que u verifica

(2) y (3); esto es, $Lu = Nu$.

#

De este modo, siendo la obtención de los puntos fijos de T un camino para la resolución de (1), conviene analizar las condiciones que garanticen la existencia de dichos puntos fijos.

Lema 3: Supóngase que el operador H es compacto y que el N es continuo y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. Entonces, T es compacto.

Demostración: Evidentemente, las hipótesis del lema implican la continuidad de T.

Si $M \subset E$ es un subconjunto acotado, $N(M)$ es acotado y, por ser H compacto, $H(I-Q)N(M)$ es relativamente compacto. De esto y del hecho de que PE y QE son de dimensión finita se sigue la compacidad del operador T.

#

Ahora, con estos preliminares, se puede probar ya un resultado de existencia en el que se usará el siguiente resultado de la teoría de puntos fijos.

Teorema 2: Sea S un conjunto acotado, cerrado y convexo de E conteniendo al elemento 0 en su interior. Sea $H: [0,1] \times S \rightarrow E$ una homotopía verificando:

- i) Para cada $\lambda \in [0,1]$, $H(\lambda, \cdot)$ es una transformación compacta.
- ii) $H(0, \partial S) \subset S$ y $H(\lambda, u) \neq u$ para todo $(\lambda, u) \in [0,1] \times \partial S$.

Entonces, $H(1, \cdot)$ tiene un punto fijo en S.

Demostración: Véase [60,pág. 70]

#

Teorema 3: Supóngase que las condiciones establecidas anteriormente (a saber: hipótesis del teorema 1, $\text{Ker}L = E_0$, $\text{Im}L = F_1$, $\text{Im}H = E_1$, H es un operador compacto, N es continuo y aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados y condiciones (4)-(10)) se verifican.

Además, supóngase que:

$$(11) \quad \text{Existe } J_0 > 0 \text{ tal que } \|Nu\|_F \leq J_0 \text{ para todo } u \in E.$$

$$(12) \quad \text{Existe } R_0 > 0 \text{ tal que } B(u_0, QNu) \leq 0 \text{ para todo } u = u_0 + u_1, \\ u_0 \in E_0, u_1 \in E_1, \text{ tal que } \|u_0\|_E = R_0 \text{ y } u_1 = H(I-Q)N(u_0 + u_1).$$

Entonces, la ecuación (1) tiene al menos una solución.

Demostración: Sea $h = \|H(I-Q)\|$ y $r_0 > h \cdot J_0$.

Claramente el conjunto

$$S = \{ u_0 + u_1 : u_0 \in E_0, u_1 \in E_1, \|u_0\|_E \leq R_0, \|u_1\|_E \leq r_0 \}$$

es acotado, cerrado, convexo y contiene al elemento 0 en su interior.

La aplicación $H: [0,1] \times S \rightarrow E$ dada por

$$H(\lambda, u) = \lambda Pu + H(I-Q)Nu + \lambda JQNu$$

es una homotopía de transformaciones compactas que para todo $u \in \partial S$ verifica:

$$H(0, u) = H(I-Q)Nu \in F_1 \\ \|H(0, u)\|_F \leq h \cdot J_0 < r_0$$

y, en consecuencia, $H(0, \partial S) \subset S$.

Se comprueba ahora que $H(\lambda, u) \neq u$ cuando $(\lambda, u) \in [0,1] \times \partial S$.

Nótese que, si $u \in \partial S$, $u = u_0 + u_1$ con $\|u_0\|_E = R_0$ ó $\|u_1\|_E = r_0$.

Además, si

$$H(\lambda, u) = u_0 + u_1$$

forzosamente se ha de verificar que

$$u_0 = \lambda Pu + \lambda JQNu \quad \text{y} \quad u_1 = H(I-Q)N(u_0 + u_1).$$

Supongamos, entonces, que $H(\lambda, u) = u$ para $\lambda \in [0, 1)$ y $u \in \partial S$. Si fuese

$\|u_1\| = r_0$ se obtendría la contradicción

$$r_0 = \|u_1\| = \|H(I-Q)N(u_0 + u_1)\| \leq h \cdot J_0 < r_0.$$

Si $\|u_0\| = R_0$, de la relación $u_0 = \lambda Pu + \lambda QNu$ se sigue que:

$$(1-\lambda)u_0 = JQN(u_0 + u_1)$$

y de ahí la desigualdad,

$$B((1-\lambda)u_0, J^{-1}u_0) = B(JQN(u_0 + u_1), J^{-1}u_0) > 0$$

dado que $\lambda < 1$ y $\|u_0\| = R_0$.

Por otra parte, teniendo en cuenta (10) y (12) se puede escribir

$$B(JQN(u_0 + u_1), J^{-1}u_0) \leq 0$$

hecho que está en contradicción con la desigualdad obtenida con anterioridad. Hay que concluir, pues, que $H(\lambda, u) \neq u$ para todo $(\lambda, u) \in [0, 1) \times \partial S$ y en virtud del teorema 2, $H(1, \cdot)$, es decir el operador T , tiene un punto fijo; en consecuencia, (1) admite al menos una solución.

#

Nótese que la condición (11) implica automáticamente la de que N aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. De hecho, $N(E)$ es acotado en F .

A continuación se presenta otro resultado de existencia que será de utilidad con posterioridad y en el que no se requiere la "acotación total" (hipótesis (11)) de N .

Teorema 4: Supóngase que se verifican las condiciones del teorema 3 y que las hipótesis (11) y (12) se reemplazan respectivamente por:

(13) El conjunto

$$C = \{u : u = \lambda H(I-Q)N(u_0 + u_1) \text{ para algún } \lambda \in [0, 1] \text{ y } u_0 \in E_0 \text{ con}$$

$$\|u_0\| \leq R\}$$

es acotado.

(14) Existe $R_0 > 0$ tal que $B(u_0, QNu) < 0$ para todo $u = u_0 + u_1$,
 $u_0 \in E_0$, $u_1 \in E_1$ tal que $\|u_0\| = R_0$ y $u_1 = \lambda H(I-Q)N(u_0 + u_1)$,
 $\lambda \in [0, 1]$.

Entonces, la ecuación (1) tiene al menos una solución.

Demostración: Sea $r > 0$ tal que $\|u\|_E < r$ para todo elemento u del conjunto C .

Sea $r_0 > r$ y considérese, como antes, el conjunto S .

En este caso, la homotopia $H: [0, 1] \times S \rightarrow E$ se define como

$$H(\lambda, u) = \lambda Pu + \lambda H(I-Q)Nu + \lambda JQNu$$

con lo que $H(0, u) = 0$ y, en consecuencia $H(0, \partial S) \subset S$.

Si $\lambda \in [0, 1)$ y $u \in \partial S$ son tales que $H(\lambda, u) = u$, hay dos posibilidades:

a) $\|u_1\| = r_0$. Como $u_1 = \lambda H(I-Q)N(u_0 + u_1)$ y $\|u_0\| < R_0$, por (13) se tiene que $\|u_1\| < r$ lo cual esta en contradicción con la elección de r_0 .

b) $\|u_0\| = R_0$. Entonces, como en el teorema 3, se obtiene

$$0 < B((1-\lambda)u_0, J^{-1}u_0) = \lambda B(QN(u_0 + u_1), u_0)$$

lo que contradice (14).

Así, en cualquier caso, $H(\lambda, u) \neq u$ para todo $(\lambda, u) \in [0, 1) \times \partial S$ y, por el teorema 2, $H(1, \cdot) = T$ tiene un punto fijo.

#

Es importante observar que la solución de (1), cuya existencia está garantizada por los teoremas 3 y 4, pertenece al conjunto S .

Además, los teoremas 3 y 4 permanecen válidos si la condición $B(u_0, QNu) < 0$ de (12) y (14) se reemplaza por la $B(u_0, QNu) > 0$. Basta con tomar la homotopía $H(\lambda, u) = \lambda Pu + H(I-Q)Nu - \lambda JQNu$ ó la $H(\lambda, u) = \lambda Pu + \lambda H(I-Q)Nu - \lambda JQNu$.

1.2.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES DE LA ECUACION

$$Lu = Nu$$

Los resultados de la sección precedente dan condiciones suficientes para la existencia de solución de la ecuación $Lu = Nu$ cuando está en resonancia. En esta sección se presentan otros resultados que, además de garantizar la existencia de solución para dicho problema, proporcionan información acerca de la estructura del conjunto de soluciones de la ecuación (1).

A lo largo de esta sección, se supondrá que los operadores L y N verifican:

(15) L es un operador continuo de Fredholm de índice cero.

(16) N es un operador continuo y compacto.

Con relación a la ecuación (1) se definen los siguientes conjuntos:

(17) $S_1 = \{ u \in E : Lu = Nu \} :=$ Conjunto de soluciones.

(18) $S_0 = \{ u \in \text{Ker}L : Nu \in \text{Im}L \}$

(19) $S_+ = \{ u \in E : Lu = \lambda Nu, \text{ para algún } \lambda \in (0,1) \}$

Si S_1 es no vacío y existe una sucesión de operadores $N_n : E \rightarrow F$, $n \geq 1$, continuos y compactos tal que N_n converge a N uniformemente en conjuntos acotados de E , se define para cada $n \geq 1$ y $u^* \in S_1$ el conjunto:

(20) $S_n(u^*) = \{ u \in E : Lu - N_n u = Lu^* - N_n u^* \}$

En el lema 2 se mostró como la ecuación (1) se puede reducir a un problema de puntos fijos en el espacio E . Pues bien, también es posible reducir (1) a un problema de puntos fijos en el espacio F y de

esta forma se obtiene el siguiente

Teorema 5: Supóngase que L y N verifican (15) y (16) y que existen un conjunto abierto Γ en E y aplicaciones lineales continuas $G: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ y $G_1: F \rightarrow \mathbb{E}$ tal que:

(21) $S_0 \cap \Gamma = \emptyset$

(22) $S_+ \cap \Gamma = \emptyset$

(23) $G(\mathbb{E}) = E_0$, $\text{Ker } G_1 = F_1$ y $\text{Im } G_1 = \mathbb{E}$.

(24) $\text{gr} (G_1 \cdot N \cdot G, G^{-1}(\Gamma \cap E_0), 0) \neq 0$

Entonces, el conjunto de soluciones, S_1 , es no vacío y compacto.

Demostración: Véase [10].

#

Para probar la conexidad del conjunto de soluciones de $Lu = Nu$, se usará el siguiente resultado:

Teorema 6: Si las hipótesis del teorema 5 se verifican y existe una sucesión de operadores $N_n: E \rightarrow F$, $n \geq 1$, continuos y compactos tal que N_n converge uniformemente a N en conjuntos acotados de E y los conjuntos $S_n(u^*)$ son conexos para todo $n \geq 1$ y $u^* \in S_1$, entonces S_1 es conexo.

Demostración: Véase [10].

#

Al objeto de aplicar los resultados precedentes a algunos casos concretos, se define a continuación el grado asintótico de una función continua.

Definición 3: Dada $h: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ una función continua, se dice que el *grado asintótico* (abreviado g.a.) de h en 0 es d si existe $M > 0$ tal que $\text{gr} (h, (-r,r), 0)$ está bien definido y es igual a d para todo $r \geq M$.

El g.a. de h se denotará por $\text{gr-a}(h,0)$.

Como una inmediata consecuencia de los teoremas 5 y 6 se tiene el siguiente

Corolario 1: Sean L, N, G y G_1 verificando las hipótesis del teorema 5. Si S_0 y S_+ son acotados y $\text{gr-a}(G_1 \cdot N \cdot G, 0) \neq 0$, el conjunto de soluciones de (1) es no vacío y compacto. Además, si existe una sucesión de operadores $N_n : E \rightarrow F$ continuos y compactos que convergen uniformemente a N en conjuntos acotados de E y los conjuntos $S_n(u^*)$, $n \geq 1$, $u^* \in S_1$, son conexos, entonces S_1 es conexo.

#

En algunas situaciones que se presentarán, el conjunto de soluciones tiene adicionales propiedades topológicas y algebraicas.

Definición 4: Se dice que un espacio topológico X es *acíclico* si para todo natural $n \geq 0$ se tiene que $\tilde{H}_n(X) = 0$ donde \tilde{H}_n representa la cohomología reducida de Čech del espacio X con coeficientes en \mathbb{Z} .

Definición 5: El conjunto de soluciones S_1 de (1) es acíclico si con la topología inducida (como subconjunto de E) es acíclico en el sentido de la definición anterior.

Para una discusión más amplia del concepto de aciclicidad, puede consultarse [57 y 78] y las referencias allí citadas.

El resultado que se presenta a continuación da condiciones bajo las cuales el conjunto de soluciones es acíclico.

Teorema 7: Supóngase que las condiciones (15) y (16) se verifican, S_0 y S_+ son acotados y que $\text{gr-a}(G_1 \cdot N \cdot G, 0) \neq 0$ donde G y G_1 son como en el teorema 5 y satisfacen la condición (23). Si además existe $\rho > 0$ y una sucesión de operadores $N_n : E \rightarrow F$ tal que verifican las tres condiciones siguientes:

$$(25) \quad S_0 \cap S_+ \quad \{ u \in E : \|u\|_E < \rho \}$$

$$(26) \quad \text{Sup} \{ \|N_n(u) - N(u)\| : \|u\| = \rho \} = r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \text{ cuando } n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty .$$

(27) La ecuación $Lu = N_n(u) + v$ tiene a lo sumo una solución para cada $v \in E$ con $\|v\| \leq r_n$

entonces el conjunto de soluciones es no vacío, compacto y acíclico.

Demostración: Véase [10] .

#

1.3.- DESIGUALDADES DIFERENCIALES.

En esta sección se presentan algunos resultados de la teoría de las desigualdades diferenciales que tendrán su utilidad, fundamentalmente, con vistas a la demostración de la existencia de soluciones periódicas para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, (véase §2.5) .

Dada $g \in C([0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ se considera el *problema de frontera periódico* :

$$(28) \quad u' = g(t, u) \quad , \quad u(0) = u(2\pi) .$$

El contenido de la presente sección se apoya en los conceptos y notaciones que se introducen en las definiciones que siguen.

Definición 6: Considerada la función $v \in C[0, 2\pi]$, sea

$$p: (t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow p(t, u) = \max \{ v(t), u \} .$$

La función:

$$\tilde{g}(t, u) = g(t, p(t, u)) + \frac{p(t, u) - u}{1 + u^2} .$$

se dice que es la *modificada de g relativa a v* .

Definición 7: Dada $m \in C[0, 2\pi]$ se define la *derivada inferior por la izquierda*, de m en t , mediante la expresión:

$$D_-m(t) = \liminf_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{m(t+h) - m(t)}{h}$$

Analogamente,

$$D^+m(t) = \limsup_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{m(t+h) - m(t)}{h}$$

es la *derivada superior por la derecha*.

Definición 8: La función $\alpha \in C[0, 2\pi]$ es una *subsolución débil* para (28) si se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- a) $\alpha \in C^1[0, 2\pi]$, $\alpha'(t) \leq g(t, \alpha(t)) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$, $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$.
- b) $D_- \alpha(t) \leq g(t, \alpha(t)) \quad \forall t \in (0, 2\pi]$, $D^+ \alpha(0) \leq g(0, \alpha(0)) + 1 + |\alpha(0)|$.

Así, se tiene el siguiente resultado de comparación, debido a Shendge y Vatsala [77] y que no es más que una generalización de un resultado del autor [66].

Teorema 8: Sea $m \in C[0, 2\pi]$ y supóngase que:

- i) $D_-m(t) \leq g(t, m(t)) \quad \forall t \in (0, 2\pi]$
- ii) Para cualquiera que sea $v \in C[0, 2\pi]$, subsolución débil de (28), el *problema modificado*

$$u' = \tilde{g}(t, u) \quad , \quad u(0) = u(2\pi) .$$
admite solución.
- iii) El problema (28) tiene una solución maximal $r(t)$.
- iv) $m(0) \leq m(2\pi) \quad \text{ó} \quad D^+m(0) \leq g(0, m(0)) + 1 + |m(0)|$.

Entonces, $m(t) \leq r(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Demostración: Sin más que tener en cuenta las hipótesis i) y iv), re-

sulta que m es una subsolución débil de (28), por lo que el problema modificado relativo a $v = m$ admite una solución u .

Si se demuestra que

$$m(t) \leq u(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

resulta que $p(t, u(t)) = u(t)$, y entonces u es solución del problema (28) dado que en este caso ambos coinciden. Basta entonces con tener en cuenta la hipótesis ii) para concluir que

$$m(t) \leq u(t) \leq r(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

De no ser cierta aquella desigualdad, existirían $\epsilon > 0$ y $t_0 \in [0, 2\pi]$ verificando:

$$(29) \quad m(t_0) = u(t_0) + \epsilon, \quad m(t) \leq u(t) + \epsilon \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

situación que se analizará en los distintos casos que pueden presentarse.

Si $t_0 \in (0, 2\pi]$ se tendría

$$D_- m(t_0) \geq u'(t_0) = g(t_0, p(t_0, u(t_0))) + \frac{p(t_0, u(t_0)) - u(t_0)}{1 + u^2(t_0)} =$$

$$g(t_0, m(t_0)) + \frac{m(t_0) - u(t_0)}{1 + u^2(t_0)} > g(t_0, m(t_0))$$

que estaría en contradicción con i).

Si $t_0 = 0$ y en iv) se verifica que $m(0) \geq m(2\pi)$, entonces $m(2\pi) \geq m(0) = u(0) + \epsilon = u(2\pi) + \epsilon$ y, por (29), se obtiene que

$D_- m(2\pi) \geq u'(2\pi)$ lo cual, como antes, supone una contradicción. Si en iv) se tiene que

$$D^+ m(0) \geq g(0, m(0)) + 1 + |m(0)|$$

se obtiene la desigualdad

$$D^+ m(0) \leq u'(0) = g(0, m(0)) + \frac{m(0) - u(0)}{1 + u^2(0)} \leq g(0, m(0)) + m(0) + \frac{1}{2} <$$

$$g(0, m(0)) + m(0) + 1$$

que también contradice la hipótesis iv), concluyendo la demostración del teorema.

#

Teorema 9: Sean $m, \beta \in C[0, 2\pi]$ tal que:

a) $m(0) < m(2\pi)$, $D_m(t) < g(t, m(t)) \quad \forall t \in (0, 2\pi]$.

b) $\beta(0) > \beta(2\pi)$, $D_\beta(t) > g(t, \beta(t)) \quad \forall t \in (0, 2\pi]$.

Entonces, cualquiera de las condiciones :

- i) g es estrictamente decreciente en u para todo $t \in [0, 2\pi]$ fijo.
- ii) Existe $z \in C^1[0, 2\pi]$ tal que $z(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$, $z(0) > z(2\pi)$ y para $\lambda > 0$ se tiene que

$$\lambda z' > g(t, \beta + \lambda z) - g(t, \beta) \quad \text{en } [0, 2\pi]$$

implica que $m(t) < \beta(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Demostración: Si se verifica i) y la tesis del teorema es falsa, existen $t_0 \in [0, 2\pi]$ y $\epsilon > 0$ tales que:

$$(30) \quad m(t_0) = \beta(t_0) + \epsilon \quad \text{y} \quad m(t) < \beta(t) + \epsilon \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

Si $t_0 \in (0, 2\pi]$ entonces $D_m(t_0) > D_\beta(t_0)$. De esta forma,

$$g(t_0, m(t_0)) > D_m(t_0) > D_\beta(t_0) > g(t_0, \beta(t_0))$$

y, debido al caracter monótono decreciente de g , se puede concluir que

$$\beta(t_0) > m(t_0)$$

hecho que está en contradicción con (30).

Si $t_0 = 0$, entonces para $h > 0$, suficientemente pequeño se tiene que:

$$m(2\pi-h) - m(2\pi) < m(2\pi-h) - m(0) < \beta(2\pi-h) + \epsilon - \beta(0) - \epsilon < \beta(2\pi-h) - \beta(2\pi)$$

lo cual implica que $D_m(2\pi) < D_\beta(2\pi)$, y, como anteriormente, que

$\beta(2\pi) > m(2\pi)$ de manera que $\beta(0) > \beta(2\pi) > m(2\pi) > m(0)$. De nuevo se

ha llegado a una contradicción, que permite establecer la validez de la tesis del teorema en el primer caso.

Si ii) se verifica entonces existe $t_1 \in [0, 2\pi]$ tal que

$m(t_1) > \beta(t_1)$ en el caso en que la tesis del teorema fuese falsa. Por tanto el máximo de la función $m - \beta$ en $[0, 2\pi]$ es estrictamente positivo. Como $z(t) > 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, se puede encontrar λ suficientemente grande tal que:

$$\delta(\lambda) = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \{ m(t) - \beta(t) - \lambda z(t) \} < 0 .$$

Sea $\lambda_0 = \inf \{ \lambda > 0 : \delta(\lambda) < 0 \}$. De esta forma, $\delta(\lambda_0) = 0$ y $\lambda_0 > 0$. En consecuencia, existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tal que:

$$(31) \quad m(t_0) = \beta(t_0) + \lambda_0 z(t_0) \quad \text{y} \quad m(t) \leq \beta(t) + \lambda_0 z(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Si $t \in (0, 2\pi]$, se obtiene

$$D_- m(t_0) \geq D_- \beta(t_0) + \lambda_0 z'(t_0) > g(t_0, \beta(t_0)) + g(t_0, \beta(t_0) + \lambda_0 z(t_0)) - g(t_0, \beta(t_0)) = g(t_0, m(t_0))$$

lo que contradice las propiedades de m .

$$\text{Si } t_0 = 0, \quad m(0) = \beta(0) + \lambda_0 z(0) \quad \text{y} \quad m(2\pi) \geq m(0) =$$

$$\beta(0) + \lambda_0 z(0) \geq \beta(2\pi) + z(2\pi). \quad \text{Ahora bien, usando (31), se puede escri-$$

bir:

$$m(2\pi) \leq \beta(2\pi) + \lambda z(2\pi)$$

con lo que

$$m(2\pi) = \beta(2\pi) + \lambda_0 z(2\pi)$$

y se puede tomar t_0 en (31) igual a 2π , lo cual conduce a una contradicción como en el caso en que $t_0 \in (0, 2\pi]$.

#

1.4.- EL METODO DE LAS SUBSOLUCIONES Y SOBRESOLUCIONES.

En esta sección se exponen una serie de resultados que dan condiciones suficientes para la existencia de solución para ciertos problemas de frontera de ecuaciones diferenciales en resonancia.

En esencia, y generalizando, el método es como sigue: Planteada la ecuación abstracta (1), supóngase que existen $w, v \in E$ tal que:

$$Lw \leq Nw \quad \text{y} \quad Lv \geq Nv$$

donde las desigualdades han de ser entendidas en el sentido de un orden inducido por cierto cono del espacio F [6] .

Entonces, existe $u \in E$ solución de (1) verificando $w \leq u \leq v$.

A continuación, se presenta el mencionado método para tres tipos de problemas de frontera concretos y que serán de utilidad en los capítulos siguientes.

ECUACIONES DE PRIMER ORDEN.-

Considérese el problema de frontera periódico (28).

Definición 9: Se dice que $\alpha \in C^1[0, 2\pi]$ es una *subsolución* para (28) si

$$\alpha'(t) \leq g(t, \alpha(t)) \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad \text{y} \quad \alpha(0) \leq \alpha(2\pi) .$$

Análogamente, $\beta \in C^1[0, 2\pi]$ es una *sobresolución* para (28) si

$$\beta'(t) \geq g(t, \beta(t)) \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad \text{y} \quad \beta(0) \geq \beta(2\pi)$$

De esta forma, se tiene el siguiente resultado de existencia.

Teorema 10: Supóngase que existen $\alpha, \beta \in C^1[0, 2\pi]$, subsolución y sobresolución respectivamente para (28), tal que $\alpha \leq \beta$ en $[0, 2\pi]$. Entonces, existe u solución de (28) tal que $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

Demostración: Vease [53]

#

ECUACIONES ELIPTICAS.-

Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera, $\partial\Omega$, de clase $C^{2+\alpha}$.

Considérese el problema elíptico

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} Au = f(x,u) \quad \text{en} \quad \Omega \\ Bu = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

donde A es un operador elíptico en Ω definido por

$$A \equiv - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} - c$$

y tal que

$$a_{ij}, b_i, c \in C^{0+\alpha}(\bar{\Omega}) .$$

Además se supondrá que $f \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$. Bu representa las condiciones de frontera, bien del tipo de Dirichlet ($Bu = u = 0$) ó del tipo de Neumann ($Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, donde ν es la normal exterior a $\partial\Omega$).

También se supondrá que A es *uniformemente elíptico*, esto es, existe $\mu > 0$ tal que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \text{ y } x \in \bar{\Omega} .$$

Definición 10: Se dice que $w \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ es una *subsolución* para (32) si

$$Aw \leq f(x,w) \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad Bw \leq 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega .$$

De modo similar, $v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ es una *sobresolución* para (32) si

$$Av \geq f(x,v) \quad \text{en} \quad \Omega \quad \text{y} \quad Bv \geq 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega .$$

Teorema 11: Supóngase que existen $w, v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, subsolución y sobresolución respectivamente para (32). Entonces, existe $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ solución de (32) tal que $w < u < v$ en $\bar{\Omega}$.

Demostración: Vease [25,72] .

#

ECUACIONES PARABOLICAS.-

Sea Ω como anteriormente y $T > 0$. Se considerará el problema parabólico de frontera Dirichlet-periódico siguiente:

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - Au = g(u) + h(x,t) \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ u(x,t) = u(x,t+T) \quad , \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \\ u(x,t) = 0 \quad , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{array} \right.$$

A es un operador definido por:

$$Au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u$$

dónde los coeficientes pertenecen a $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y son periódicos en t con periodo T. Además, se supondrá que el operador $u_t - Au$ es *uniformemente parabólico*, esto es, existe $\mu > 0$ tal que:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$$

En cuanto a las funciones g y h, se supondrá que $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y que $h \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y es T-periódica en t.

Definición 11: Una *subsolución* para (33) es una función $w \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T_1])$

con $T_1 > T$, tal que:

$$\begin{aligned}
 & w_t - Aw \leq g(w) + h(x,t) \quad \text{en } \bar{\Omega} \times [0, T_1] \\
 \text{y} \quad & w(x,0) \leq w(x,T) \quad , \quad x \in \bar{\Omega} \\
 & w(x,t) \leq 0 \quad , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T_1] \quad .
 \end{aligned}$$

Análogamente, una *sobresolución* para (33) es una función $v \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T_1])$ verificando:

$$\begin{aligned}
 & v_t - Av \geq g(v) + h(x,t) \quad \text{en } \bar{\Omega} \times [0, T_1] \\
 \text{y} \quad & v(x,0) \geq v(x,T) \quad , \quad x \in \bar{\Omega} \\
 & v(x,t) \geq 0 \quad , \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0, T_1] \quad .
 \end{aligned}$$

Teorema 12: Sean $w, v \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0, T_1])$ subsolución y sobresolución para (33) respectivamente y tal que $w(x,0) \leq v(x,0)$, $\forall x \in \bar{\Omega}$. Entonces, existe $u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ solución de (33) tal que $w \leq u \leq v$ en $\bar{\Omega} \times [0, T_1]$.

Demostración: Vease [50,51] .

#

CAPITULO 2

SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

En este capítulo se estudia el problema periódico de primer orden:

$$(1) \quad u'(t) + f(t, u(t)) = e(t) \quad , \quad u(0) = u(2\pi)$$

donde $f \in C([0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $e \in L^2(0, 2\pi)$.

Definición 1: Una solución del problema (1) es una función $u \in H^1(0, 2\pi)$ satisfaciendo casi por doquier la relación $u'(t) + f(t, u(t)) = e(t)$ en $[0, 2\pi]$ y tal que $u(0) = u(2\pi)$.

Nótese que si e es continua, $u \in C^1[0, 2\pi]$ y que si e es 2π -periódica y f es 2π -periódica en t , u es una solución periódica; esto es, u puede ser extendida a \mathbb{R} por periodicidad verificando la relación $u'(t) + f(t, u(t)) = e(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En las secciones de este capítulo, se estudiarán diversos aspectos del problema planteado, cuando f y e verifican ciertas hipótesis que se especificarán en cada caso.

2.1.- UN RESULTADO DE EXISTENCIA.

Se supondrá a lo largo de esta sección que existe $p > 1$ verificando:

$$(2) \quad f(t,u) \cdot u \geq a(t) + b |u|^{p+1}$$

$$(3) \quad |f(t,u)| \leq c(t) + d |u|^p$$

donde b, d son constantes positivas y $a, c \in L^2(0, 2\pi)$.

Con estas hipótesis de crecimiento para f , y utilizando los resultados relativos a la existencia de soluciones para ecuaciones del tipo $Lu = Nu$ en resonancia, a los que se ha hecho referencia en el Capítulo 1, se probará a continuación un resultado de tal tipo para el problema periódico planteado. A tal objeto, se considerarán los espacios de Banach

$$F = L^2(0, 2\pi) \quad \text{y} \quad E = \{ u \in H^1(0, 2\pi) : u(0) = u(2\pi) \}$$

el primero de ellos dotado del producto interior y norma usuales, y el segundo con los inducidos por los de $H^1(0, 2\pi)$.

Teorema 1: El conjunto de soluciones del problema periódico (1) es no vacío y compacto en $H^1(0, 2\pi)$.

Demostración: Definiendo el par de operadores de E en F

$$Lu = u' \quad , \quad [Nu](t) = e(t) - f(t, u(t))$$

es claro que el problema (1) es equivalente a la ecuación operacional $Lu = Nu$.

Dado que:

$$\text{Ker } L = \{ u \in E : u \text{ es constante} \} \quad \text{y} \quad \text{Im } L = \{ v \in F : \int_0^{2\pi} v(s) ds = 0 \}$$

puede fácilmente comprobarse que L es un operador de Fredholm de índice cero y, por otra parte, el operador N es compacto ya que la inclusión de E en $C[0, 2\pi]$ es compacta.

Al objeto de comprobar la verificación de las hipótesis del teorema 1.5, se probará en primer lugar que los conjuntos S_0 y S_+ allí definidos son acotados.

a) S_0 es acotado. En efecto, si $v \in S_0$, v es una constante y además $[Nv](t) = e(t) - f(t, v)$ pertenece a la imagen de L , por lo que se tiene:

$$\int_0^{2\pi} [e(t) - f(t, v)] dt = 0$$

y de ahí:

$$v \cdot \int_0^{2\pi} e(t) dt = \int_0^{2\pi} v \cdot f(t, v) dt \geq \int_0^{2\pi} a(t) dt + b \int_0^{2\pi} |v|^{p+1} dt = A + B |v|^{p+1}$$

siendo $A \in \mathbb{R}$ y $B > 0$. De esta forma, y mediante un sencillo razonamiento, puede fácilmente concluirse que S_0 es acotado.

b) S_+ es acotado. Si $u \in S_+$, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que u es solución del problema

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda f(t, u(t)) = \lambda e(t) & , t \in [0, 2\pi] \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases}$$

y de ahí, teniendo en cuenta que $\langle u, u' \rangle_{L^2} = 0$, se llega a que

$$\int_0^{2\pi} f(t, u(t)) u(t) dt = \int_0^{2\pi} e(t) u(t) dt .$$

Como $u \in E$, se tiene que $u \in L^{p+1}(0, 2\pi)$ y, como $e \in L^2(0, 2\pi)$, $e \in L^r(0, 2\pi)$ para $r \in [1, 2]$. Por ello, si r es el conjugado de $p+1$, se tiene:

$$\left| \int_0^{2\pi} e(t) u(t) dt \right| \leq \|e\|_r \cdot \|u\|_{p+1} .$$

Usando ahora la hipótesis (2), se puede escribir:

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t, u(t)) u(t) dt \right| \geq \int_0^{2\pi} a(t) dt + b \int_0^{2\pi} |u(t)|^{p+1} dt \geq -\|a\|_1 + b (\|u\|_{p+1})^{p+1}$$

desigualdad que, combinada con la obtenida con anterioridad, conduce a

$$-\|a\|_1 + \|u\|_{p+1} (b \|u\|_{p+1}^p - \|e\|_r) \leq 0$$

la cual implica que existe una constante $K_{p+1} > 0$ tal que $\|u\|_{p+1} \leq K_{p+1}$

para todo elemento $u \in S_+$ y, puesto que $p > 1$, se verifica que:

$$\|u\|_2 \leq K_2 \quad \forall u \in S_+$$

donde K_2 es una constante que depende sólo de K_{p+1} .

Por otra parte, usando la hipótesis (3), se obtiene para u' la estimación:

$$|u'(t)| \leq \lambda |e(t)| + \lambda |f(t, u(t))| \leq \lambda |e(t)| + \lambda |c(t)| + \lambda d |u(t)|^p$$

c.p.d. en $[0, 2\pi]$.

la cual, tras sencillas consideraciones relativas a la teoría de los espacios L^p , muestra que existe K' tal que:

$$\|u'\|_1 \leq K' \quad \forall u \in S_+.$$

A partir de la representación:

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$$

se deduce que:

$$\int_0^{2\pi} |u(0)| dt \leq \int_0^{2\pi} |u(t)| dt + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t |u'(s)| ds \right) dt \leq \|u\|_1 + 2\pi K'$$

lo que implica:

$$|u(0)| \leq \frac{1}{2\pi} (\|u\|_1 + 2\pi K') \leq K_2 + K' = K_0$$

Finalmente, teniendo en cuenta la acotación:

$$|u(t)| \leq |u(0)| + \left| \int_0^t u'(s) ds \right| \leq K_0 + K'$$

la continuidad de f y la definición de S_+ , se puede llegar a la conclusión de que también $\|u'\|_2$ está acotado y que, en consecuencia,

$$\left\{ \|u\|_{H^1(0, 2\pi)} = \left(\|u\|_2^2 + \|u'\|_2^2 \right)^{1/2} : u \in S_+ \right\}$$

es un conjunto acotado; esto es, S_+ está acotado.

A continuación se verifica la hipótesis (1.24) del teorema 5.

Para ello, sean $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$ y $G_1: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{E}$ definidas como:

$$G(r) = r, \quad G_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt$$

De esta forma, se tiene que:

$$G_1 \cdot N \cdot G(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [e(t) - f(t, r)] dt$$

Ahora, sea $\epsilon > 0$, entonces:

$$G^{-1}(B(0, \epsilon) \cap \text{Ker } L) = (-\epsilon, \epsilon)$$

donde $\epsilon' = \epsilon \cdot (2\pi)^{-1/2}$.

Por otra parte, la condición (2) implica que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \pm\infty} \int_0^{2\pi} f(t, \epsilon) dt = \pm\infty$$

y, por tanto:

$$G_1 \cdot N \cdot G(\epsilon) > 0 > G_1 \cdot N \cdot G(-\epsilon)$$

para ϵ suficientemente grande. Así, se puede concluir que:

$$\text{gr-a}(G_1 \cdot N \cdot G, 0) \neq 0$$

Este último hecho, junto con la acotación de los conjuntos S_0 y S_+ , implica, por el corolario 1.1, que el conjunto de soluciones de (1) es no vacío y compacto en E . Por último, como E es un subespacio cerrado de $H^1(0, 2\pi)$, el conjunto de soluciones es compacto en $H^1(0, 2\pi)$.
#

Si se reemplaza la hipótesis (2) por la

$$(4) \quad f(t, u) \cdot u \leq a(t) - b|u|^{p+1}$$

donde $a \in L^2(0, 2\pi)$ y $b > 0$, la demostración del teorema anterior muestra la validez del siguiente resultado.

Teorema 2: Si las condiciones (4) y (3) se verifican, el problema (1) tiene al menos una solución. Además, el conjunto de soluciones es compacto en $H^1(0, 2\pi)$.
#

A continuación, se presentan varios ejemplos que ilustran los resultados obtenidos en esta sección.

Ejemplo 1: Sea $f(t,u)=p(t)u^n$ donde $p \in C[0,2\pi]$ y n es un natural impar con $n \geq 3$.

Sean $p_0 = \min_{0 \leq t \leq 2\pi} p(t)$ y $p_1 = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} p(t)$.

Si $p_0 > 0$ entonces f satisface las condiciones (2) y (3) sin más que tomar $a = c = 0$, $b = p_0$, $d = p_1$ y $p = n$.

Por tanto, la ecuación $u'(t) + p(t)u^n(t) = e(t)$ tiene al menos una solución verificando $u(0) = u(2\pi)$ para todo $e \in L^2(0,2\pi)$.

Ejemplo 2: Si f es como en el ejemplo anterior, pero en vez de $p_0 > 0$ se tiene que $p_1 < 0$ entonces la condición (4) se verifica y, en consecuencia, la ecuación del ejemplo 1 admite al menos una solución verificando $u(0) = u(2\pi)$ para todo $e \in L^2(0,2\pi)$.

Como los teoremas 1 y 2 dan la compacidad del conjunto de soluciones, se podría pensar que dicho conjunto consta de un solo elemento. El ejemplo que viene a continuación, muestra que, en general, las hipótesis (2) y (3) no implican unicidad y que el conjunto de soluciones de (1) puede tener una estructura muy variada.

Ejemplo 3: Sea f definida como sigue:

$$f(t,u) = \begin{cases} u^3 & \text{si } u \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ (u-1)^3 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

y $e=0$, con lo que el problema (1) se escribe:

$$(5) \quad \begin{cases} u'(t) + f(t,u(t)) = 0 \\ u(0) = u(2\pi) \end{cases} .$$

Para $a \in [0,1]$, se define $u_a \in C[0,2\pi]$ como $u_a(t)=a, \forall t \in [0,2\pi]$. Así, u_a es solución de (5) puesto que $f(t,u)=0$ para todo $0 \leq u \leq 1$. Por tanto, el conjunto de soluciones contiene al

$$\{ u_a : a \in [0,1] \}$$

Además, f verifica las condiciones (2) y (3). En efecto, tomando $p=3$, la condición (2) se satisface con $b=\frac{1}{2}$ y $a=-\frac{1}{2}$. Por otra parte, eligiendo $c=0$ y $d=1$, (3) se cumple.

2.2.- LOS CASOS MONOTONOS.

A lo largo de esta sección se supondrá que $f(t,u)$ es independiente de t , esto es, $f(t,u)=f(u)$, y que f es monótona creciente ($u \leq v$ implica $f(u) \leq f(v)$) ó monótona decreciente ($u \leq v$ implica $f(u) \geq f(v)$). Además, se supondrá que $e \in C[0,2\pi]$.

Debido a la diferente naturaleza del problema

$$(7) \quad u' + f(u) = e \quad , \quad u(0) = u(2\pi)$$

para f creciente y decreciente, se estudian a continuación ambos casos separadamente.

CASO I: f es MONOTONA CRECIENTE.

Por ser f creciente, los límites

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = f(\infty) \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = f(-\infty)$$

existen (pudiendo tomar valores no finitos) y además se tiene que:

$$(8) \quad f(-\infty) \leq f(u) \leq f(\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Si el problema (7) tiene una solución u , integrando entre 0 y 2π se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} f(u(t))dt = \int_0^{2\pi} e(t)dt$$

y teniendo en cuenta (8), se puede concluir que:

$$2\pi \cdot f(-\infty) \leq \int_0^{2\pi} e(t)dt \leq 2\pi \cdot f(\infty) .$$

Definiendo

$$\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(t)dt$$

se tiene necesariamente que:

$$(9) \quad \omega \in \overline{\text{Im } f}$$

donde $\overline{\text{Im } f}$ denota la clausura de la imagen de f .

Esto demuestra que la condición (9) es necesaria para que el problema (7) tenga una solución. El siguiente resultado prueba que la condición

$$(10) \quad \omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$$

donde $\text{Int}(\text{Im } f)$ denota el interior de la imagen de f , es suficiente para que el problema (7) admita una solución.

Teorema 3: Si (10) se verifica, existen $\alpha, \beta \in C^1[0, 2\pi]$, subsolución y sobresolución de (7) respectivamente, tales que $\alpha \leq \beta$ en $[0, 2\pi]$ y, en consecuencia, existe u , solución de (7) tal que $\alpha \leq u \leq \beta$ en $[0, 2\pi]$.

Demostración: Puesto que (10) se cumple, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$. Entonces, el problema lineal

$$(11) \quad u' + f(r) = e, \quad u(0) = u(2\pi)$$

tiene solución. Sea v la solución de (11) tal que $\int_0^{2\pi} v(s)ds = 0$. Elijiendo $R > 0$ suficientemente grande, se tiene que:

$$\alpha(t) = -R + v(t) \leq r \leq R + v(t) = \beta(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

Claramente, $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$ y $\beta(0) = \beta(2\pi)$. Ahora, utilizando que f es

creciente, se tiene:

$$\alpha'(t) = v'(t) = e(t) - f(r) \leq e(t) - f(\alpha(t))$$

$$\beta'(t) = v'(t) = e(t) - f(r) \geq e(t) - f(\beta(t))$$

lo que muestra que α es una subsolución y β es una sobresolución para el problema (7), de donde se sigue la tesis del teorema sin más que aplicar el resultado del teorema 1.10.

#

Puesto que la condición (9) es necesaria y la (10) es suficiente para la existencia de solución para (7), es natural el preguntarse que sucede en el caso en que

$$\omega \in F(\text{Im } f)$$

donde $F(\text{Im } f)$ denota la frontera de la imagen de f . El siguiente resultado da una respuesta completa a dicha cuestión.

Teorema 4: Si $\omega \in F(\text{Im } f)$, el problema (7) tiene solución si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$.

Demostración: Nótese en primer lugar que $\omega = f(\infty)$ (ó $= f(-\infty)$) ya que $\omega \in F(\text{Im } f)$. Se da la demostración sólo en el caso en que $\omega = f(\infty)$ ya que el razonamiento es totalmente análogo si $\omega = f(-\infty)$.

SUFICIENCIA: Si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$, el problema (11) tiene solución. Sea v una tal solución y elíjase $R > 0$ tal que $u(t) = R + v(t) \geq r$. Así, $f(u(t)) = \omega = f(r)$ y u es una solución para (7).

NECESIDAD: Si (7) admite una solución u , entonces se tiene:

$$\int_0^{2\pi} f(u(t)) dt = \int_0^{2\pi} e(t) dt.$$

Si $f(r) < \omega$ para todo $r \in \mathbb{R}$, $f(u(t)) < \omega$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y se tendría:

$$2\pi\omega = \int_0^{2\pi} e(t) dt = \int_0^{2\pi} f(u(t)) dt < 2\pi\omega$$

lo cual es una contradicción y prueba que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$.

#

CASO II: f es MONOTONA DECRECIENTE.

En esta situación, el método de las subsoluciones y sobresoluciones pierde su interés práctico como pone de manifiesto el siguiente

Lema 1: Sean α y β subsolución y sobresolución, respectivamente, de (7) tal que $\alpha \leq \beta$ en $[0, 2\pi]$. Entonces, si f es estrictamente decreciente ($u < v$ implica $f(u) > f(v)$), se tiene que $\alpha = \beta$ en $[0, 2\pi]$ y, en consecuencia $\alpha = \beta$ es una solución de (7).

Demostración: Utilizando la definición de subsolución y sobresolución, se obtiene:

$$0 \leq \int_0^{2\pi} [f(\beta(t)) - f(\alpha(t))] dt \leq \int_0^{2\pi} [\beta'(t) - \alpha'(t)] dt =$$

$$\beta(2\pi) - \beta(0) - \alpha(2\pi) + \alpha(0) \leq 0$$

con lo cual

$$\int_0^{2\pi} [f(\beta(t)) - f(\alpha(t))] dt = 0$$

lo que implica, por ser f estrictamente decreciente, que $\alpha = \beta$ en $[0, 2\pi]$.

#

Si el problema (7), con f decreciente, tiene solución, la condición (9) se verifica. Este hecho y que el único autovalor del problema

$$u' + \lambda u = 0 \quad , \quad u(0) = u(2\pi)$$

es $\lambda = 0$, sugiere que resultados análogos a los del caso monótono creciente son válidos. En efecto, el siguiente resultado así lo demuestra.

Teorema 5: Para el problema (7) con f decreciente, se tiene:

- i) Si (7) tiene solución, entonces $\omega \in \overline{\text{Im } f}$.
- ii) Si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, el problema (7) admite solución.
- iii) Si $\omega \in \mathbb{R} \setminus \overline{\text{Im } f}$, (7) tiene solución si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$.

Demostración: La parte i) se prueba como en el caso monótono-creciente.

Para demostrar ii) se usará el teorema 1.4. Sean E y F los espacios de Banach introducidos en el teorema 1 con normas $\| \cdot \|_*$ y $\| \cdot \|_2$ respectivamente. Definiendo L y N como en el citado teorema, (7) es equivalente a la ya conocida ecuación funcional

$$Lu = Nu .$$

Si se definen las proyecciones $P:E \rightarrow E$ y $Q:F \rightarrow F$ definidas como:

$$P(u) = u(0) \quad \text{y} \quad Qu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s) ds$$

claramente se tiene que:

$$E_0 = PE = \text{Ker } L \quad , \quad F_1 = (I-Q)F = \text{Im } L$$

con lo que $E = E_0 \oplus E_1$ y $F = F_0 \oplus F_1$ donde $F_0 = E_0$ y $E_1 = (I-P)E = E \cap F_1$.

Así, la inversa parcial de L, $H:F_1 \rightarrow E_1$, se puede definir mediante:

$$Hv = u \quad \text{si y sólo si} \quad u' = v \quad \text{y} \quad u(0) = u(2\pi) = 0$$

Facilmente, puede verse que las condiciones i)-iii) del teorema 1.1 se verifican en este caso.

Tomando $B:(u,v) \in E \times F \rightarrow B(u,v) = \int_0^{2\pi} u(t)v(t) dt \in \mathbb{R}$ y $J:F_0 \rightarrow E_0$ como

la identidad, las condiciones (1.4)-(1.10) también se satisfacen.

Si $u \in E$, se escribirá, como es habitual, $u = u_0 + u_1$, $u_0 \in E_0$ y $u_1 \in E_1$.

En primer lugar, se prueba que las soluciones de la ecuación

$$(12) \quad u_1 = \lambda H(I-Q)N(u_0 + u_1)$$

son acotadas en E, independientemente de $u_0 \in E$ y $\lambda \in [0,1]$. En efecto, dado que (12) es equivalente a

$$u_1' = \lambda(I-Q)N(u_0 + u_1) \quad , \quad u_1(0) = u_1(2\pi) = 0$$

basta tener en cuenta que $u' = u_1' \in \text{Im } L$ para llegar a la igualdad

$$\langle u_1', u' \rangle = \langle \lambda(I-Q)N(u_0 + u_1), u' \rangle = \lambda \langle e, u' \rangle - \lambda \langle f(u), u' \rangle$$

Por otra parte, si se tiene en cuenta que

$$\langle f(u), u' \rangle = \int_0^{2\pi} f(u(t)) u'(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_0^u f(\xi) d\xi \right) dt = 0,$$

$$\langle u'_1, u'_1 \rangle = \langle u'_1, u'_1 \rangle = \|u'_1\|_2^2$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se llega a la desigualdad:

$$\|u'_1\|_2^2 \leq \lambda \|e\|_2 \cdot \|u'_1\|_2$$

Utilizando ahora la representación

$$u_1(t) = u_1(0) + \int_0^t u'_1(s) ds$$

y teniendo en cuenta que $u_1(0) = 0$, se puede concluir que existe $M > 0$ (independiente de u_0 y λ) tal que

$$\|u_1\|_* \leq M \quad \forall u_1 \text{ solución de (12)},$$

lo cual prueba la primera de las hipótesis del teorema 1.4.

Consecuentemente, dado $\epsilon > 0$, se puede elegir $R = R(\epsilon)$ tal que:

$$R - M > \epsilon \quad \text{y} \quad -R + M < -\epsilon$$

Además, puesto que $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$f(u) < \omega < f(v) \quad \text{siempre que} \quad u > \epsilon_1 \quad \text{y} \quad v < -\epsilon_1$$

con lo cual, eligiendo $R = R(\epsilon_1)$, se tiene que:

$$(13) \quad f(R_0 + u_1(t)) < \omega < f(-R_0 + u_1(t)) \quad \forall u_1 \text{ solución de (12) y } t \in [0, 2\pi].$$

Si $u_0 \in E_0$ y $\|u_0\|_* = R_0$, u_0 es la función constante igual a R_0 ó $-R_0$.

De esta forma, para $\|u_0\|_* = R_0$ y u_1 solución de (12), se tiene:

$$B(N(u_0 + u_1), u_0) = \int_0^{2\pi} u_0 [e(t) - f(u_0 + u_1(t))] dt =$$

$$u_0 [2\pi\omega - \int_0^{2\pi} f(u_0 + u_1(t)) dt] > 0$$

sin más que tener en cuenta (13), concluyendo de este modo la verificación de las hipótesis del teorema 1.4. En consecuencia, se puede afirmar que cuando $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, existe al menos una solución para (7) con f decreciente.

Finalmente, la parte iii) se demuestra como en el teorema 4.

#

Observación: El método utilizado en la demostración de la parte ii) del teorema 5 se puede usar para probar el teorema 3. Sin embargo, se usó el método de las subsoluciones y sobresoluciones en el caso creciente ya que dicho método es aplicable a ecuaciones diferenciales de segundo orden [43,52] y a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo elíptico y parabólico, tal y como se verá en los capítulos 3 y 4 de esta memoria.

2.3.- GENERALIZACION DE LOS CASOS MONOTONOS.

En la demostración del teorema 5, se puede observar que el carácter monótono de f no es decisivo, sino que, en esencia, se usa la condición (10) y las desigualdades

$$(14) \quad f(\infty) \leq f(u) \leq f(-\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Igualmente, en el caso en que $\omega \in F(\text{Im } f)$, no es utilizado el carácter monótono de f completamente, sino sólo las desigualdades (8) ó (14). Estos hechos junto con la observación de la sección anterior ponen de manifiesto la validez del siguiente resultado.

Teorema 6: Sea el problema de frontera periódico

$$(15) \quad u' + f(u) = e, \quad u(0) = u(2\pi)$$

donde $f \in \tilde{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $e \in C[0, 2\pi]$ y existen los límites

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = f(\infty) \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = f(-\infty).$$

Si (8) ó (14) se verifica, se tiene:

- i) Si (15) admite solución, $\omega \in \overline{\text{Im } f}$
- ii) Si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, el problema (15) tiene solución

iii) Si $\omega \in F(\text{Im } f)$, (15) admite solución si y sólo si $f(r) = \omega$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

#

Considérese ahora la ecuación:

$$(16) \quad u' + f(t, u) = e$$

donde $f \in C[[0, 2\pi] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, $e \in C[0, 2\pi]$, f es 2π -periódica en t y e es 2π -periódica.

Con estas condiciones, cualquier solución de (16) verificando $u(0) = u(2\pi)$ es periódica.

Se define para todo $a \in \mathbb{R}$

$$(17) \quad \xi(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(t, a) - e(t)] dt$$

y sean $\underline{e} = \min \{ e(t) : 0 \leq t < 2\pi \}$ y $\bar{e} = \max \{ e(t) : 0 \leq t < 2\pi \}$

Los resultados que se probarán más adelante requerirán la verificación, entre otras, de alguna de las condiciones que seguidamente se enuncian en términos de las notaciones anteriores.

$$(18) \quad \liminf_{a \rightarrow \infty} \xi(a) > 0 > \limsup_{a \rightarrow -\infty} \xi(a)$$

$$(19) \quad \limsup_{a \rightarrow \infty} \xi(a) < 0 < \liminf_{a \rightarrow -\infty} \xi(a)$$

$$(20) \quad \limsup_{a \rightarrow -\infty} f(t, a) < \underline{e} < \bar{e} < \liminf_{a \rightarrow \infty} f(t, a)$$

$$(21) \quad \liminf_{a \rightarrow -\infty} f(t, a) > \underline{e} > \bar{e} > \limsup_{a \rightarrow \infty} f(t, a)$$

donde en (20) y en (21), los límites son uniformes en $t \in [0, 2\pi]$.

Así, los resultados de la sección precedente, se pueden ge-

neralizar en la siguiente forma:

Teorema 7: Supóngase que se verifica una de las condiciones (18), (19) y una de las (20), (21). Entonces, el problema (16) tiene al menos una solución.

Demostración: Sean E y F los espacios de Banach introducidos en el teorema 5 y los operadores L y N allí definidos. Para probar la existencia de solución, se divide la demostración en tres partes y se hará uso del corolario 1.1.

a) S_0 es acotado: Sea $u \in S_0$; entonces $\xi(u) = 0$ y cualquiera de las condiciones (18) ó (19) implica que el conjunto S_0 es acotado.

b) S_+ es acotado: Sea $u \in S_+$; entonces existe $\lambda \in (0,1)$ tal que:

$$u'(t) = \lambda e(t) - \lambda f(t, u(t)) \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad , \quad u(0) = u(2\pi) .$$

Poniendo $w(t) = u^2(t)$, trivialmente existe $t_0 \in [0, 2\pi]$ tal que

$w(t_0) = (\|u\|_\infty)^2$. Por otra parte, es claro que $w(0) = w(2\pi)$ y $w'(0) = w'(2\pi)$, con lo que $w'(t_0) = 2u(t_0)u'(t_0)$; esta última igualdad implica que $u'(t_0) = 0$ ya que si fuese $u(t_0) = 0$, u sería idénticamente nula en $[0, 2\pi]$.

Con esto se deduce que $e(t_0) = f(t_0, u(t_0))$ y la verificación de (20) ó (21) implica que

$$(\|u\|_\infty : u \in S_+)$$

es un conjunto acotado, de donde se deduce que S_+ es acotado en E.

c) Sean $G: E \rightarrow E$ y $G_1: F \rightarrow E$ las aplicaciones lineales definidas por

$$G(a) = a \quad \text{y} \quad G_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt$$

con lo cual $G_1 \cdot N \cdot G(a) = \xi(a)$.

Ahora usando una de las condiciones (18) ó (19), se tiene que

$$\xi(a) \cdot \xi(-a) < 0$$

siempre que $|a|$ sea suficientemente grande, y por lo tanto

$$u \rightarrow \pm\infty \text{ as } t \rightarrow \pm\infty.$$

Combinando las tres partes, se ve que las hipótesis del Corolario 1.1 se verifican y, en consecuencia, el problema (16) tiene al menos una solución.

#

Como inmediatas consecuencias se tienen los siguientes resultados.

Corolario 1: Si $\lim_{a \rightarrow \pm\infty} f(t, a) = \pm\infty$ (ó $\mp\infty$), uniformemente en t , entonces el problema (16) admite al menos una solución periódica.

Corolario 2: Supóngase que existen constantes $p > 1$, $K > 0$ y $M > 0$ tal que una de las siguientes condiciones es válida:

$$i) \quad K \cdot |u|^p < f(t, u)u \quad \forall |u| > M, t \in [0, 2\pi]$$

$$ii) \quad -K \cdot |u|^p > f(t, u)u \quad \forall |u| > M, t \in [0, 2\pi]$$

Entonces, el problema (16) tiene una solución 2π -periódica.

Corolario 3: La ecuación $u' + P_n(u) = e$, donde P_n es un polinomio de grado impar, tiene una solución 2π -periódica.

Demostración: Si $n \geq 3$, el resultado se sigue del corolario 2 y si $n=1$ el resultado es también válido puesto que el problema

$$u' + a_1 u + a_0 = e, \quad u(0) = u(2\pi), \quad a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

con $a_1 \neq 0$ tiene siempre solución.

#

El resultado del corolario 2 había sido probado en [34] para sistemas de primer orden (vease [74] también).

Si f es 2π -periódica en t y la función e es continua, el teorema 7 generaliza los resultados de la sección 1.

2.4.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES.

En las secciones anteriores de este capítulo se ha probado la existencia de soluciones, bajo diferentes condiciones, del problema (1), pero ninguno de los resultados obtenidos hace alusión a la posible unicidad. En este sentido, es bien conocido el hecho de que, cuando f es estrictamente monótona, el problema (7) admite a lo sumo una solución. Sin embargo, como se verá a continuación, la unicidad puede dejar de darse incluso en los casos monótonos.

Ejemplo 4: Si f está definida como en el ejemplo 3, f es monótona creciente (pero no estrictamente) y (7) tiene un número infinito de soluciones.

No obstante, el conjunto de soluciones tiene cierta estructura que se estudia a continuación.

Así, se tiene:

Teorema 8: a) Con las hipótesis del teorema 1, el conjunto de soluciones de (1) es compacto en $H^1(0, 2\pi)$.

b) Con las hipótesis del teorema 6, el conjunto de soluciones de (15) es compacto en $H^1(0, 2\pi)$ siempre que $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$.

c) Bajo las hipótesis del teorema 7, el conjunto de soluciones es compacto en $H^1(0, 2\pi)$.

Demostración: La parte a) está contenida en el teorema 1. Para la parte c), el resultado se sigue del corolario 1.1 puesto que S_0 y S_+ son acotados y $\text{gr-}a(\xi, 0) \neq 0$ (vease la demostración del teorema 7).

Finalmente, se prueba la parte b) por medio del corolario 1.1. En primer lugar, si $u \in S_0$, u es constante y además

$$\int_0^{2\pi} f(u(t)) dt = \int_0^{2\pi} e(t) dt .$$

Como $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, se sigue que S_0 es acotado. Por otra parte, si $u \in S_+$, u satisface para algún $\lambda \in (0,1)$ lo siguiente:

$$u' + \lambda f(u) = \lambda e, \quad u(0) = u(2\pi)$$

con lo que, si se escribe $u = u_0 + u_1$, $u_1 \in E_1$, se ha de verificar

$$u_1' = \lambda e - \lambda f(u), \quad u_1(0) = u_1(2\pi) = 0 .$$

Razonando ahora como en la demostración del teorema 5 (vease a partir de (12)) se obtiene la acotación de u_1 para $u = u_0 + u_1 \in S_+$, independientemente de $u_0 \in E_0$ y $\lambda \in (0,1)$. Ahora bien, usando el hecho de que $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$ y que u_1 es acotado, se puede concluir que u_0 es acotado con lo que S_+ es acotado.

Por último, definiendo $G_1: F \rightarrow E$ y $G: E \rightarrow E$ como

$$G_1(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt \quad \text{y} \quad G(a) = a$$

entonces de modo similar a la parte c) de la demostración del teorema 7 se tiene que $gr-a(G_1 \cdot N \cdot G, 0) \neq \emptyset$, hecho que en vista del corolario 1.1 prueba que S_1 es compacto en $H^1(0, 2\pi)$.

#

En el caso en que f sea monótona, es posible dar más información sobre el conjunto de soluciones.

Teorema 9: Si f es monótona y $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, el conjunto de soluciones de (7) es conexo y acíclico.

Demostración: Puesto que $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, S_0 y S_+ son acotados y $gr-a(\xi, 0) \neq \emptyset$ donde $\xi = G_1 \cdot N \cdot G$ tiene el significado usual.

Supóngase que f es monótona creciente.

Sean los operadores $N_n: u \in E \rightarrow N_n(u) = N(u) - \frac{1}{n} u \in F$, $n \geq 1$, n natural.

Entonces, $\|N(u) - N_n(u)\| = \frac{1}{n} \|u\|_F$ y la sucesión N_n converge uniformemente a N en conjuntos acotados de E .

Dado $u^* \in S_1$ y $n > 1$, para todo $u \in S_n(u^*)$, se verifica:

$$(22) \quad u' + f(u) + \frac{1}{n} u = u^{*'} - f(u^*) - \frac{1}{n} u^* \quad , \quad u(0) = u(2\pi)$$

ó equivalentemente

$$u' + \tilde{f}(u) = v \quad , \quad u(0) = u(2\pi) .$$

donde $\tilde{f}(u) = f(u) + \frac{1}{n} u$ y $v = u^{*'} - f(u^*) - \frac{1}{n} u^*$.

La imagen de la parte no lineal \tilde{f} es \mathbb{E} , por lo que (22) tiene solución y como \tilde{f} es estrictamente creciente, el problema (22) tiene una única solución. Consecuentemente, el conjunto $S_n(u^*)$ es conexo puesto que consta de un sólo elemento. Esto en vista del teorema 1.6 prueba que S_1 es conexo.

Por último, se prueba que S_1 es acíclico. Sea $\rho > 0$ tal que

$$B_\rho = \{ u \in E : \|u\|_* < \rho \} \supset S_0 \cup S_+$$

Entonces,

$$r_n = \text{Sup} \{ \|N_n(u) - N(u)\| : u \in E, \|u\|_* = \rho \} = \frac{1}{n} \rho \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty .$$

Por otra parte, el problema $Lu = N_n(u) + v$ con $v \in E, \|v\|_* < r$ es equivalente al

$$u' + f(u) + \frac{1}{n} u = e + v \quad , \quad u(0) = u(2\pi)$$

y éste, como el (22), tiene una única solución, con lo cual, en vista del teorema 1.7, queda probado que S_1 es acíclico.

Si f es decreciente, se obtiene el mismo resultado sin más que definir

$$N_n(u) = N(u) + \frac{1}{n} u .$$

#

Si f es monótona y (7) tiene solución, entonces $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$ (caso estudiado más arriba) ó $\omega \in F(\text{Im } f)$ y existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$

En esta última situación se tiene el siguiente resultado:

Teorema 10: Si f es monótona, $\omega \in F(\text{Im } f)$ y existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$ entonces el conjunto de soluciones de (7) es homeomorfo a uno de los

subconjuntos de la recta real del siguiente tipo:

$$(23) \quad [a, \infty) , (-\infty, b] \text{ ó } \mathbb{R} .$$

Por tanto, S_1 es cerrado y conexo. Además, S_1 es no acotado.

Demostración: Supóngase que f es creciente y $\omega = f(\infty)$ (los demás casos son análogos).

Si $f(u) = \omega$ para todo $u \in \mathbb{R}$ entonces el conjunto de soluciones de (7) viene dado por

$$S_1 = \left\{ u \in \mathbb{R} : u(t) = a + \int_0^{2\pi} [e(s) - \omega] ds , a \in \mathbb{R} \right\}$$

que es no acotado y homeomorfo a \mathbb{R} .

Si existe u tal que $f(u) < \omega$, sean

$$\Delta = \{ u : f(u) = \omega \} \quad \text{y} \quad \lambda = \min \Delta .$$

Claramente Δ es no vacío ya que $r \in \Delta$.

A continuación se prueba que el conjunto de soluciones viene dado por

$$S = \left\{ u \in \mathbb{R} : u(t) = a + \int_0^{2\pi} [e(s) - \omega] ds , a \in \mathbb{R}, u(t) \geq \lambda \quad \forall t \in [0, 2\pi] \right\}$$

Puesto que f es creciente, $f(u) = \omega$ para todo $u \geq \lambda$ y entonces $S \subset S_1$. Si $u \in S_1$, sin más que integrar entre 0 y 2π la igualdad $u' + f(u) = e$ se tiene:

$$(24) \quad \int_0^{2\pi} f(u(t)) dt = \int_0^{2\pi} e(t) dt = 2\pi\omega$$

Si $u(t_1) < \lambda$ para algún $t_1 \in [0, 2\pi]$ entonces $f(u(t_1)) < \omega$ y se tendría

$$\int_0^{2\pi} f(u(t)) dt < 2\pi\omega \text{ lo que contradice a (24).}$$

De esta forma, $u(t) \geq \lambda$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y $u \in S_1$. En consecuencia, se verifica $u' = e - \omega$ y $u \in S_1$. Por último, S_1 es homeomorfo a un intervalo del tipo $[a, \infty)$ y por tanto es conexo y cerrado. Además es evidente que S_1 es no acotado.

#

Combinando lo expuesto hasta ahora en esta sección, se tiene el siguiente resultado que resume lo obtenido en el caso monótono.

Teorema 11: Si f es monótona, entonces el conjunto de soluciones S_1 de (7) satisface una, y sólo una, de las siguientes condiciones:

- a) S_1 es compacto, conexo y acíclico.
- b) S_1 es cerrado, conexo y no acotado. Además, en este caso, S_1 es homeomorfo a uno de los intervalos indicados en (23).

Teniendo a la vista los teoremas 8 y 9, uno podría preguntarse si la conexidad se conserva al reemplazar el caracter monótono de f por (8) ó (14). El siguiente ejemplo muestra que no es así.

Ejemplo 5: Sea f definida por

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq -3 \\ u+2 & \text{si } -3 < u \leq -2 \\ -u-2 & \text{si } -2 < u \leq -1 \\ u & \text{si } -1 < u \leq 0 \\ 0 & \text{si } u > 0 \end{cases}$$

En este caso $f(\infty)=0$, $f(-\infty)=-1$ y $-1 < f(u) \leq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

Planteado el problema $u'+f(u)=0$, $u(0)=u(2\pi)$, tiene solución puesto que $0 \in F(\text{Im } f)$ y $f(0)=0$.

Si u es una de sus soluciones, integrando se ve que $\int_0^{2\pi} f(u(t))dt = 0$.

Si $u(t_0)=-2$ para algún $t_0 \in [0, 2\pi]$ entonces $u(t)=-2$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Si $u(t_0) \in [0, \infty)$ para algún $t_0 \in [0, 2\pi]$ entonces $u(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y u es una solución no negativa de $u'=0$.

En resumen, se ha llegado a la conclusión de que el conjunto de soluciones viene dado por

$$S_1 = \{ u \in H^1(0, 2\pi) : u = -2 \text{ ó } u = a \text{ con } a > 0 \}$$

que evidentemente es homeomorfo a $\{-2\} \cup [0, \infty)$ que no es conexo.

Es posible modificar ligeramente el ejemplo precedente, para poner de manifiesto que, aún cuando $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, el conjunto de soluciones puede ser no conexo.

Ejemplo 6: Sea f como en el ejemplo precedente, excepto que $f(u) = u-1$ para $u > 1$. Entonces, $\text{Im } f = [-1, \infty)$ y $\omega = 0 \in \text{Int}(\text{Im } f)$.

Dado $a \in \mathbb{R}$ sea u_a la solución de

$$u' + f(u) = 0, \quad u(0) = a.$$

Si $-1 < a < 0$, existe $\delta_a > 0$ tal que u verifica $u'(t) + f(u(t)) = 0$ para todo $t \in (0, \delta_a)$. Como $-1 < a \cdot e^{-t}$ en $[0, 2\pi]$ se sigue que $u(t) = a \cdot e^{-t}$, solución que no satisface las condiciones periódicas.

Ahora, dado que $u_a(t) = a$ para $a = -2$ ó $a \in [0, 1]$ se tiene que:

$$\{ u : u = -2 \text{ ó } u = b \text{ con } b \in [0, 1] \} \subset S_1$$

hecho que, junto con lo observado anteriormente para $a \in (-1, 0)$, permite probar que S_1 es un conjunto no conexo.

2.5.- SISTEMAS DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.

Como ha quedado puesto de manifiesto en las secciones precedentes, el método de la alternativa combinado con las técnicas de la teoría de las desigualdades diferenciales es muy útil en el estudio de problemas periódicos para ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas técnicas pueden asimismo ser aplicadas a problemas de frontera de ecuaciones diferenciales de segundo orden [12,43,44,52].

Sin embargo, si se desea extender los resultados a sistemas diferenciales, o bien a ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, se necesita modificar los métodos ya que las desigualdades a utilizar no

son escalares.

Hay, entonces, dos métodos a utilizar; a saber:

1) El método de las subsoluciones y sobresoluciones utilizando el orden inducido por un cono (vease por ejemplo [54,55]) .

ó

2) La teoría de las inecuaciones diferenciales junto con el uso de las llamadas *cuasi-funciones de Lyapunov*.

Aquí, se utilizará el segundo método para probar la existencia de soluciones de sistemas diferenciales con condiciones periódicas.

Así, sea el problema periódico:

$$(25) \quad u' = h(t,u) \quad , \quad u(0) = u(2\pi)$$

donde $h \in C([0,2\pi] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Nótese que si $n=1$, el problema (25) es equivalente al (1) haciendo $h(t,u) = e(t) - f(t,u)$ en el caso en que $e \in C[0,2\pi]$.

Definición 1: $u \in L^2([0,2\pi], \mathbb{R}^n)$ es una solución de (25) si u es una función absolutamente continua, $u' \in L^2([0,2\pi], \mathbb{R}^n)$, $u(0)=u(2\pi)$ y u satisface la ecuación $u'(t) = h(t,u(t))$ casi por doquier en $[0,2\pi]$.

Dada $V \in C([0,2\pi] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ se define

$$(26) \quad D_{-} V_{\lambda h}(t,u) = \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{V(t+\delta, u+\delta h(t,u)) - V(t,u)}{\delta}$$

Definición 2: Dada $g \in C([0,2\pi] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, se dice que $V \in C([0,2\pi] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$ es una *cuasi-función de Lyapunov relativa a g para el problema (25)* si para todo $\lambda \in [0,1]$ se tiene que

$$D_{-} V_{\lambda h}(t,u) \leq g(t, V(t,u)) \quad , \quad \forall (t,u) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}^n .$$

Además se pide que V sea localmente Lipchitziana en u .

Para utilizar el concepto de las cuasi-funciones de Lyapunov se define la función modificada \tilde{g} de g relativa a una $v \in C[0, 2\pi]$ como en la definición 1.6.

Nótese que $\tilde{g}, g \in C([0, 2\pi] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ y que $\tilde{g}(t, u) \geq g(t, u)$ para todo $(t, u) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^n$.

Para $M > 0$, sea $\eta_M \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ la función definida por

$$\eta_M(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq s \leq M \\ -s+M+1 & \text{si } M \leq s \leq M+1 \\ 0 & \text{si } s \geq M+1 \end{cases}$$

De esta forma, se define

$$h_M(t, u) = \eta_M(|u|) \cdot h(t, u)$$

Así, se puede considerar el siguiente problema modificado correspondiente a (25):

$$(27) \quad u' = h_M(t, u) \quad , \quad u(0) = u(2\pi)$$

en el que puede observarse que h es continua y acotada en $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^n$.

Con respecto al problema (27), se tiene el siguiente resultado de existencia.

Lema 2: El problema modificado (27) tiene solución para todo $M > 0$.

Demostración: Sean $F = (L^2(0, 2\pi))^n$ y $E = \{ u = (u_1, \dots, u_n) \in F : u_i \text{ son absolutamente continuas, } u_i \in L^2(0, 2\pi) \text{ y } u_i(0) = u_i(2\pi) \}$, dotados con las normas:

$$\|u\|_F = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_2 \quad \text{y} \quad \|u\|_E = \sum_{i=1}^n (\|u_i\|_2 + \|u_i'\|_2)$$

respectivamente.

Nótese que F es isomorfo a $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^n)$.

Sea $L: E \rightarrow F$ el operador lineal definido por $Lu = u'$ y $N: E \rightarrow F$ de-

finido como $[N(u)](t) = h_M(t, u(t))$ con lo que el estudio del problema (27) es equivalente al de la ecuación $Lu = Nu$. El nucleo de L está constituido por las funciones constantes y su imagen es el conjunto de funciones de F con promedio 0 en $[0, 2\pi]$; esto es:

$$\text{Ker } L = \{ u \in E : u \text{ es constante en } [0, 2\pi] \} \approx \mathbb{R}^n$$

$$\text{Im } L = \left\{ u \in F : \int_0^{2\pi} u(s) ds = 0 \right\}$$

De esta forma, se puede escribir $E = E_0 \oplus E_1$ y $F = F_0 \oplus F_1$ donde $F_0 = E_0 = \text{Ker } L$, $F_1 = \text{Im } L$ y $E_1 = E \cap \text{Im } L$.

Al igual que en el caso escalar, se definen $P: F \rightarrow E$ y $Q: F \rightarrow F$ como

$$Pu = u(0) \quad \text{y} \quad Qu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s) ds.$$

La inversa parcial de L , $H: F_1 \rightarrow E_1$, es tal que:

$$Hv = u \quad \text{si y sólo si} \quad u' = v \quad \text{y} \quad u(0) = u(2\pi) = 0$$

con lo que, fácilmente se ve que las condiciones i)-iii) del teorema 1.1 se cumplen. Tomando ahora $B: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$B(u, v) = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v_i \rangle$$

y $J: F_0 \rightarrow E_0$ como la identidad, se puede comprobar, sin dificultad, que las condiciones (1.4)-(1.10) se satisfacen.

Además, puesto que h_M es acotada, también (1.11) se verifica.

Si $u_1 \in E_1$ es tal que $u_1 = H(I-Q)N(u_0 + u_1)$, entonces, puesto que H es acotado, se tiene que $\|u_1\|_E \leq \|H(I-Q)\| \cdot J_0 = c_1$ y, en consecuencia, existe $c > 0$ tal que

$$\|u_1\|_\infty \leq c$$

para todo u_1 solución de $u_1 = H(I-Q)N(u_0 + u_1)$.

Nótese que c es independiente de $u_0 \in E_0$.

Sea $R_0 = M + c + 1$. Entonces, para $u_0 \in E_0$ con $|u_0| = R_0$ y u_1 solución de $u_1 = H(I-Q)N(u_0 + u_1)$ se tiene que:

$$B(u_0, N(u_0 + u_1)) = \sum_{i=1}^n u_{0_i} \int_0^{2\pi} h_M^i(t, u_0 + u_1(t)) dt =$$

$$\sum_{i=1}^n u_{0_i} \int_0^{2\pi} \eta_M(|u_0 + u_1(t)|) \cdot h_M^i(t, u_0 + u_1(t)) dt$$

donde $u_0 = (u_{0_1}, \dots, u_{0_n})$ y $h_M = (h_M^1, \dots, h_M^i)$.

Pero, como usando la acotación de u_1 se tiene que

$$|u_0 + u_1(t)| \geq |u_0| - |u_1(t)| \geq R_0 - c = M + 1$$

resulta que

$$\eta_M(|u_0 + u_1(t)|) = 0$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$. Esto muestra que

$$B(u_0, N(u_0 + u_1)) = 0$$

y la condición (1.12) se verifica. En consecuencia, y por el teorema 1.3, el problema (27) tiene solución.

#

Como $\eta_M(s) = 1$ para $s \leq M$ entonces, $h_M(t, u) = h(t, u)$ si $|u| \leq M$,

lo que implica que si la solución del problema (27), cuya existencia está garantizada por el lema precedente, es tal que está contenida en la bola $\bar{B}(0, M) = \{u \in \mathbb{R}^n : |u| \leq M\}$, la solución del problema modificado será realmente una solución del problema original (25). Por ello, se hace esencial el buscar una cota "a priori" de las soluciones del problema modificado (27) y que esta cota sea independiente de $M > 0$. Esto se consigue por medio de las cuasi-funciones de Lyapunov.

Teorema 12: Sea $g \in C([0, 2\pi] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y $V \in C([0, 2\pi] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ una cuasi-función de Lyapunov relativa a g para (25). Supóngase además que:

- i) $\lim_{|u| \rightarrow \infty} V(t, u) = \infty$ uniformemente en $t \in [0, 2\pi]$
- ii) El problema periódico $u' = g(t, u)$, $u(0) = u(2\pi)$ tiene una solución maximal $r(t)$.
- iii) Si v es una subsolución débil de $u' = g(t, u)$, $u(0) = u(2\pi)$ entonces, el problema modificado $u' = \tilde{g}(t, u)$, $u(0) = u(2\pi)$ tiene solución.
- iv) Una de las condiciones siguientes se verifica:
 - a) Si u es una solución de (27) entonces $V(0, u(0)) < V(2\pi, u(0))$
 - b) $D^+(V(t, u(t)))|_{t=0} > g(0, V(0, u(0))) + 1 + |V(0, u(0))|$

Demostración: Sea u una solución de (27) la cual existe por el lema 1 (la elección de $M > 0$ para el problema modificado se especificará más adelante). Definiendo

$$m(t) = V(t, u(t))$$

se tiene, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño, que:

$$m(t+\delta) - m(t) = V(t+\delta, u(t+\delta) + \delta h(t, u(t)) + \varepsilon(\delta)) - V(t, u(t))$$

donde

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{-1} \varepsilon(\delta) = 0$$

Como V es localmente Lipchitziana en u (vease definición 2) se tiene que:

$$D_- m(t) < g(t, m(t)) .$$

Utilizando ahora el teorema de comparación 1.8 y teniendo en cuenta ii), iii) y iv) se puede concluir que

$$m(t) < r(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi] .$$

Nótese que aunque m depende de la elección de $M > 0$, r es independiente de M , y de esta forma, existe K tal que:

$$0 \leq m(t) \leq K \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Por i), se ve que existe $M_1 > 0$ tal que

$$|u(t)| \leq M_1 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

y M_1 depende sólo de r (o sea de g).

Eligiendo $M=M_1$ se ve que $|u(t)| \leq M \quad \forall t \in [0, 2\pi]$ y como $n_M(u)=1$ si $|u| \leq M$, la solución del problema modificado lo es también del original.

#

Utilizando el teorema de comparación 1.9, se obtiene un resultado similar al del teorema anterior.

Teorema 13: Sea V una cuasi-función de Lyapunov relativa a g para (25) y supóngase que además de las hipótesis i) y iii) del teorema 12, se verifican las siguientes:

- v) Existe $\beta \in C[0, 2\pi]$ tal que $D_- \beta(t) \geq g(t, \beta(t)) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$ y $\beta(0) \geq \beta(2\pi)$.
- vi) La función g es estrictamente decreciente en u para t fijo.
- vii) Si u es una solución de (27), $V(0, u(0)) \leq V(2\pi, u(0))$.

Entonces, el problema (25) admite una solución.

Demostración: Definiendo $m(t) = V(t, u(t))$ como en el teorema 12 se tiene que $D_- m(t) \leq g(t, m(t))$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Ahora, por el teorema de comparación 1.9, se sigue que

$$m(t) \leq \beta(t)$$

lo que implica que u está acotada independientemente de $M > 0$, lo cual como en la demostración del teorema anterior prueba la existencia de solución para (25).

#

CAPITULO 3

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO ELIPTICO

En todo este capítulo, Ω denotará un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera $\partial\Omega$ que se supondrá que es suficientemente regular (por ejemplo, es suficiente suponer que $\partial\Omega$ es de clase $C^{2+\alpha}$ donde $\alpha \in (0,1)$).

Sea A el operador elíptico en Ω definido por

$$A \equiv - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} - c$$

Se supondrá que

- (1) A es *uniformemente elíptico*, esto es, existe $\mu > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

para todo $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

- (2) a_{ij} , b_i , $c \in C^{0+\alpha}(\bar{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq n$ donde $\alpha \in (0,1)$. Además,

no se pierde generalidad al suponer $a_{ij} = a_{ji}$.

De esta forma, si $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $Au \in C^{0+\alpha}(\bar{\Omega})$. Además, no se requiere que c sea positiva en $\bar{\Omega}$.

Las condiciones de frontera que se asociarán al operador A serán denotadas por $Bu = 0$. Estas serán del tipo de Dirichlet ($Bu = u$) ó del tipo de Neumann ($Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$ donde ν es la normal exterior a $\partial\Omega$).

Considerando el problema de autovalores

$$(3) \quad \begin{cases} Au = \lambda u & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

es bien sabido que existe una sucesión $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ de autovalores tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$. Teniendo en cuenta la teoría de operadores positivos [49], se tiene que λ_1 es simple y la autofunción es de signo constante en Ω . Por ello, se puede elegir una correspondiente autofunción ϕ tal que:

$$\phi(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Además de esta propiedad, se tienen los siguientes importantes hechos:

(4) En el caso de condiciones de Dirichlet, se tiene que $\frac{\partial \phi}{\partial \nu} < 0$ en $\partial\Omega$ ya que ϕ no puede alcanzar su mínimo en el interior de Ω .

(5) En el caso de condiciones de Neumann, $\phi(x) > 0$ para todo $x \in \bar{\Omega}$.

Teniendo en cuenta estas dos propiedades se obtiene el siguiente resultado [47] que será básico en el desarrollo de este capítulo

Lema 1: Si F es un subconjunto acotado de $C^1(\bar{\Omega})$ y $Bu=0$ en $\partial\Omega$ para todo $u \in F$, entonces existen constantes α y β tales que

$$\alpha\phi(x) < u(x) < \beta\phi(x) \quad \forall x \in \Omega, u \in F$$

Si además de (2) se supone que

$$(6) \quad a_{ij} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad b_i \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \quad 1 \leq i \leq n,$$

se puede definir el *problema adjunto* de (3) como

$$(7) \quad \begin{cases} A^* u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde A^* es el operador adjunto del A con las condiciones de frontera B .

Sea ψ la autofunción asociada al problema adjunto de

$$Au = \lambda_1 u \quad \text{en } \Omega, \quad Bu = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

verificando

$$\int_{\Omega} \psi(x)\phi(x) dx = 1$$

Es conocido que dicha autofunción verifica algunas propiedades análogas a las de ϕ , esto es, $\psi > 0$ en Ω y satisface (4) y (5).

Sean los espacios

$$E = \{ u \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) : Bu = 0 \text{ en } \partial\Omega \} \quad \text{y} \quad F = C^{0+\alpha}(\bar{\Omega})$$

dotados con la norma inducida por la de $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ el primero y con la usual el segundo. De esta forma, E y F son espacios de Banach.

Sea L el operador lineal definido por

$$L: u \in D(L) \subset E \longrightarrow Lu = Au - \lambda_1 u \in F$$

donde

$$D(L) = \{ u \in E : u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) \}$$

al que se le puede asociar el

$$L^* : u \in D(L^*) \subset E \longrightarrow L^* u = A^* u - \lambda_1 u \in F$$

siendo $D(L^*) = D(L)$,

Por el teorema de la alternativa de Fredholm se tiene que

$$\text{Ker } L = \text{Ker } (A - \lambda_1 I) = \langle \phi \rangle$$

$$\text{Im } L = \left\{ u \in F : \int_{\Omega} u(x) \psi(x) dx = 0 \right\}$$

$$\text{Ker } L^* = \langle \psi \rangle$$

$$\text{Im } L^* = \left\{ u \in F : \int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx = 0 \right\}$$

lo que muestra que L es un operador de Fredholm de índice cero.

En lo que sigue, se estudiará el problema no lineal en resonancia

$$(8) \quad \begin{cases} Au - \lambda_1 u = g(x, u) & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $g \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

En el caso en que $n=1$, basta la continuidad de g para asegurar que los resultados son válidos, ya que en ese caso $C^{m+\alpha}(\bar{\Omega}) = C^m(\bar{\Omega})$.

Observación: Como en [11], la hipótesis sobre g puede ser reemplazada por la verificación de las condiciones siguientes:

- i) g es Lipchiciana en u (uniformemente en $x \in \bar{\Omega}$)
- ii) $g(\cdot, u) \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ (uniformemente en conjuntos acotados de u)

con lo cual, los resultados que siguen, continúan teniendo validez. No obstante, por razones de simplicidad en la exposición se supondrá que $g \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Ahora, basta con definir el operador $N: E \longrightarrow F$ mediante

$$[N(u)](x) = g(x, u(x))$$

para que el problema (8) sea equivalente a la ya conocida ecuación funcional

$$Lu = Nu$$

En esta situación, el operador no lineal N satisface las condiciones de los resultados abstractos del capítulo 1. En efecto, se tiene el siguiente

Lema 2: N es un operador continuo y compacto y, en consecuencia, aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Demostración: En primer lugar, nótese que $C^1(\bar{\Omega}) \subset C^{0+\alpha}(\bar{\Omega})$ por ser $\partial\Omega$ regular [29]. Ahora, considérense las siguientes inclusiones

$$i_1: E \longrightarrow C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$$

$$i_2: C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^1(\bar{\Omega})$$

$$i_3: C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^{0+\alpha}(\bar{\Omega})$$

que son, todas ellas, continuas y además i_3 es compacta.

Sea

$$\tilde{N}: C^1(\bar{\Omega}) \longrightarrow C^1(\bar{\Omega})$$

el operador definido por

$$[\tilde{N}(u)](x) = g(x, u(x))$$

que claramente es continuo y lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Con ésto, la continuidad y compacidad de N se sigue del hecho de que

$$N = i_3 \circ \tilde{N} \circ i_2 \circ i_1 .$$

#

3.1.- EXISTENCIA DE SOLUCION PARA EL PROBLEMA EN RESONANCIA.

A lo largo de la presente sección, se establecerán algunos resultados de existencia de soluciones para el problema que ha sido planteado con anterioridad. En sus demostraciones serán utilizados, entre otras, las condiciones, que habiendo sido estudiadas en [47], se enuncian a continuación.

Condición A_+ : Existe un número s_+ y una función $g_+ \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, que es acotada, tal que si u es una función verificando $u(x) > s_+ \phi(x)$, $x \in \Omega$, entonces:

$$g(x,u) \leq g_+(x,u) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} g_+(x,u(x)) \cdot \psi(x) dx \leq 0.$$

Condición A_- : Existe un número s_- y una función $g_- \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, que es acotada, tal que si u es una función verificando $u(x) < s_- \phi(x)$, $x \in \Omega$, entonces:

$$g(x,u) \geq g_-(x,u) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} g_-(x,u(x)) \cdot \psi(x) dx \geq 0.$$

Teorema 1: Si g verifica las condiciones A_+ y A_- , el problema (8) tiene al menos una solución.

El método utilizado por Kazdan y Warner para probar este resultado está basado esencialmente en el método de las subsoluciones y sobresoluciones.

Allí también se prueba que:

Teorema 2: Si $g_u(x,u) \leq 0$ para todo $(x,u) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, el problema (8) tiene una solución si y sólo si las condiciones A_+ y A_- se verifican.

A continuación se prueba que si las condiciones A_+ y A_- se cumplen, el problema (8) satisface las hipótesis del teorema abstracto 1.4. No obstante, como se mostrará mediante un contraejemplo, la implicación recíproca no es válida.

Teorema 3: Si se dan las condiciones A_+ y A_- , las hipótesis del teorema 1.4 se verifican.

Demostración: Sea la ecuación abstracta

$$Lu = Nu$$

que, como se vio anteriormente, es equivalente al problema (8).

Poniendo, $E_0 = \text{Ker } L = \langle \phi \rangle$, $F_0 = \text{Ker } L^*$, $F_1 = \text{Im } L$ y $E_1 = E \cap \text{Im } L$

se puede escribir : $E = E_0 \oplus E_1$ y $F = F_0 \oplus F_1$.

Las usuales proyecciones vienen dadas en este caso por:

$$P: u \in E \longrightarrow Pu = \rho_1 \left[\int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx \right] \phi \in E$$

$$Q: u \in F \longrightarrow Qu = \rho_2 \left[\int_{\Omega} u(x) \psi(x) dx \right] \psi \in F$$

donde ρ_1 y ρ_2 son constantes positivas elegidas a fin de que $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$.

La inversa parcial de L , $H: F_1 \longrightarrow E_1 \cap D(L)$, está definida por:

$$Hv = u \text{ si y sólo si } Au - \lambda_1 u = v \text{ en } \Omega, Bu = 0 \text{ en } \partial\Omega \text{ y } Pu = 0.$$

Con todo esto, fácilmente se puede verificar que para todo $u \in E$, se tiene que: $H(I-Q)Lu = (I-P)u$, $QLu = LPu$ y $LH(I-Q)Nu = (I-Q)Nu$.

Además, H es un operador compacto pues la inclusión de $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ en $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$ es compacta.

Por otra parte, y teniendo en cuenta el lema 2, N aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados.

Definiendo para $(u, v) \in E \times F$

$$B(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

y $J: F_0 \rightarrow E_0$ como la identidad, las hipótesis relativas a B y J se verifican.

Sea, como de costumbre, $u = u_0 + u_1 \in E$, $u_0 \in E_0$, $u_1 \in E_1$. Si u_1 es solución de la ecuación

$$(9) \quad u_1 = \lambda H(I-Q)N(u_0 + u_1) \quad , \quad \lambda \in [0, 1]$$

entonces, se verifica:

$$\begin{cases} Au_1 - \lambda_1 u_1 = \lambda(I-Q)[N(u_0 + u_1)] & \text{en } \Omega \\ Bu_1 = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Utilizando las desigualdades de los espacios L^p [2,3] se tiene que:

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{W^{2,p}(\Omega)} &\leq c \|Av - \lambda_1 v\|_p \leq c\lambda \| (I-Q)N(u_0 + u_1) \|_p \leq \\ &c\lambda k (\text{Vol } \Omega)^{1/p} \end{aligned}$$

siendo k una cota de g en $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, cuya existencia está asegurada al ser g_+ y g_- acotadas.

Con ello, $\|u_1\|_{W^{2,p}(\Omega)}$ está acotado independientemente de $u_0 \in E_0$.

Ahora, si $p > n$ y utilizando la inclusión de $W^{2,p}(\Omega)$ en $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$, se tiene que el conjunto

$$\{ u_1 : u_1 \text{ es solución de (9) para algún } u_0 \in E_0 \}$$

es acotado en $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$. Consecuentemente, la hipótesis (1.13) se cumple.

Así, por el lema 1, se pueden elegir constantes α y β tales que:

$$(10) \quad \alpha\phi(x) < u_1(x) < \beta\phi(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ y } u_1 \text{ solución de (9)}$$

Sea $R > \max \{ s_+ - \alpha, \beta - s_- \}$ y $R_0 = R \|\phi\|$. Así, si $u_0 \in E_0$ es tal que $\|u_0\| = R_0$, se tiene que $u_0 = R\phi$ ó $u_0 = -R\phi$. Considérese ahora el primero de los casos, $u_0 = R\phi$, y sea u_1 solución de (9). Entonces,

$$\begin{aligned} B(u_0, QN(u_0 + u_1)) &= \int_{\Omega} R\phi(x) \left[\rho_2 \int_{\Omega} g(x, R\phi(x) + u_1(x)) \psi(x) dx \right] \psi(x) dx \\ &= \rho_2 \left[\int_{\Omega} g(x, R\phi(x) + u_1(x)) \psi(x) dx \right] \end{aligned}$$

con lo que el signo de $B(u_0, QN(u_0 + u_1))$ depende solamente del de

$$\int_{\Omega} g(x, R\phi(x) + u_1(x)) \psi(x) dx .$$

Por ser u_1 solución de (9) se tiene, usando (10) y la elección de R , que:

$$R\phi(x) + u_1(x) > R\phi(x) + \alpha\phi(x) > s_+\phi(x)$$

Por otra parte, de la condición A_+ se deduce que

$$g(x, R\phi(x) + u_1(x)) \leq g_+(x, R\phi(x) + u_1(x))$$

con lo que

$$\int_{\Omega} g(x, R\phi(x) + u_1(x)) \psi(x) dx \leq \int_{\Omega} g_+(x, R\phi(x) + u_1(x)) \psi(x) dx \leq 0$$

y $B(u_0, QN(u_0 + u_1)) \leq 0$ como se quería mostrar.

Análogamente se procedería en el caso en que $u_0 = -R\phi$ sin más que utilizar la condición A_- . Ello completa la demostración.

#

Como ya se adelantó, las condiciones A_+ y A_- no son equivalentes a las hipótesis del teorema 1.4.

Ejemplo 1: Considerados el dominio $\Omega = (0, \pi)$ y el operador $Au = -u''$, el problema de Dirichlet

$$-u'' = \lambda u, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

admite como primer autovalor $\lambda_1 = 1$ y se puede tomar $\phi(x) = \text{sen } x$. Nótese que al ser el problema autoadjunto, $\psi(x) = a\phi(x)$ con a conveniente. Sea

$$g(x,u) = \frac{u}{1+u^2} \text{sen } x + \cos x$$

que es una función acotada en $[0,\pi] \times \mathbb{R}$.

De esta forma, las soluciones de (9) son acotadas en $C^1[0,\pi]$, esto es, existe $k > 0$ tal que

$$\|u_1\|_{C^1[0,\pi]} \leq k \quad \forall u_1 \text{ solución de (9)}.$$

Sea ahora R tal que

$$-R \text{sen } x < u_1(x) < R \text{sen } x \quad \forall x \in (0,\pi) \text{ y } u_1 \text{ solución de (9)}$$

con lo cual, si $u_0(x) = R \text{sen } x$, se tiene que el signo de

$$B(u_0, QN(u_0 + u_1))$$

es el mismo que el de

$$\int_0^\pi g(R \text{sen } x + u_1(x)) \text{sen } x \, dx = \int_0^\pi \frac{R \text{sen } x + u_1(x)}{1+[R \text{sen } x + u_1(x)]^2} \text{sen } x \, dx$$

Ahora bien, esta última expresión es de signo positivo por ser

$$R \text{sen } x + u_1(x) > 0 \quad \forall x \in (0,\pi).$$

Idéntico resultado se obtiene cuando $u_0 = -R \text{sen } x$, lo cual prueba que las hipótesis del teorema 1.4 se verifican.

Ahora se verá que, para este problema, las condiciones A_+ y A_- no se pueden verificar.

Supóngase que A_+ es cierta y sea $a > s_+$ y $a > 0$. Entonces,

$$g_+(x, a \text{sen } x) > g(x, a \text{sen } x) \quad \forall x \in (0,\pi)$$

con lo que

$$0 \lesssim \int_0^\pi g_+(x, a \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x \, dx \gtrsim \int_0^\pi g(x, a \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x \, dx \gtrsim$$

$$\int_0^\pi \frac{a}{1 + [a \operatorname{sen} x]^2} \operatorname{sen}^2 x \, dx > 0$$

lo cual es una contradicción. A análogo resultado se llega si se supone que A_- se verifica.

Observación: Nótese que este ejemplo no contradice el teorema 2, ya que g_u no satisface la condición de dicho teorema.

Se verá ahora que cuando g es de un cierto tipo, es posible establecer condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones del problema (8).

Así, sea el problema

$$(11) \quad \begin{cases} Au - \lambda_1 u + f(u) = h(x) & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde se supondrá que existen

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = f(\infty) \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = f(-\infty)$$

y además

$$(12) \quad f(-\infty) \leq f(u) \leq f(\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Nótese que tales condiciones son verificadas cuando f es creciente, en cuyo caso, $g(x, u) = h(x) - f(u)$ es tal que $g_u \leq 0$.

Supóngase que (11) admite una solución u ; entonces,

$$\int_{\Omega} [(Au)(x) - \lambda_1 u(x) + f(u(x))] \psi(x) \, dx = \int_{\Omega} h(x) \psi(x) \, dx$$

Como ψ es una autofunción del problema adjunto correspondiente al auto-

valor λ_1 , se tiene que:

$$\int_{\Omega} [(Au)(x) - \lambda_1 u(x)] \psi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) [(A^* \psi)(x) - \lambda_1 \psi(x)] dx = 0$$

por lo que

$$\int_{\Omega} f(u(x)) \psi(x) dx = \int_{\Omega} h(x) \psi(x) dx .$$

De (12) y del hecho de que $\psi > 0$ en Ω , se sigue que

$$f(-\infty) \cdot \int_{\Omega} \psi(x) dx \leq \int_{\Omega} h(x) \psi(x) dx \leq f(\infty) \cdot \int_{\Omega} \psi(x) dx$$

con lo cual, si (11) tiene solución, se puede escribir que:

$$(13) \quad \omega \in \overline{\text{Im } f}$$

$$\text{donde } \omega = \frac{\int_{\Omega} h(x) \psi(x) dx}{\int_{\Omega} \psi(x) dx} .$$

Por ello, las consideraciones anteriores sugieren un estudio de la relación entre ω , $\text{Im } f$ y la existencia de soluciones para el problema (11). Así, por ejemplo, en el siguiente teorema, se verá que bajo ciertas condiciones,

$$(14) \quad \omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$$

es suficiente para la existencia de soluciones.

Teorema 4: Sea f acotada y verificando la condición (12). Entonces, si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, el problema (11) tiene al menos una solución.

Demostración: Sean L y N definidos como en el teorema 3, donde ahora N toma la forma

$$[N(u)](x) = h(x) - f(u(x)) .$$

Por ser f acotada, razonando como en la demostración de dicho teorema,

se ve que el conjunto

$$\{ u_1 \in E : u_1 = \lambda H(I-Q)N(u_0 + u_1), u_0 \in E_0, \lambda \in [0,1] \}$$

es acotado en $C^{1+\alpha}(\bar{\Omega})$.

Por tanto, existen constantes α, β tal que:

$$\alpha \phi(x) < u_1(x) < \beta \phi(x) \quad \forall x \in \Omega, u_1 \text{ solución de (9)}.$$

Como $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, existe $\delta > 0$ tal que $(\omega - \delta, \omega + \delta) \subset (f(-\infty), f(\infty))$, y

se puede elegir $M > 0$ tal que:

$$f(u) > \omega + \delta \quad \text{si } u > M \quad \text{y} \quad f(u) < \omega - \delta \quad \text{si } u < -M.$$

Para n natural suficientemente grande, se define

$$\Omega_n = \{ x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \}$$

Puesto que $\phi > 0$ en Ω , se puede construir una sucesión $\{R_n\}$ (creciente)

tal que:

$$(R_n - \alpha)\phi(x) > M \quad \text{y} \quad (-R_n + \beta)\phi(x) < -M \quad \forall x \in \Omega_n$$

Claramente, la medida del conjunto $\Omega - \Omega_n$ tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Por

ello, es posible elegir N tal que para todo $n > N$ se tenga:

$$[f(-\infty) + \omega] \int_{\Omega - \Omega_n} \psi(x) dx + \delta \int_{\Omega_n} \psi(x) dx > 0$$

y

$$[f(\infty) - \omega] \int_{\Omega - \Omega_n} \psi(x) dx - \delta \int_{\Omega_n} \psi(x) dx < 0.$$

Así, para $n > N$ se tiene:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} f(R_n \phi(x) + u_1(x)) \psi(x) dx &= \int_{\Omega_n} + \int_{\Omega - \Omega_n} > \int_{\Omega_n} (\omega + \delta) \psi(x) dx + \int_{\Omega - \Omega_n} f(-\infty) \psi(x) dx = \\ \int_{\Omega} h(x) \psi(x) dx + \omega \int_{\Omega - \Omega_n} \psi(x) dx + \delta \int_{\Omega_n} \psi(x) dx + f(-\infty) \int_{\Omega - \Omega_n} \psi(x) dx &> \int_{\Omega} h(x) \psi(x) dx. \end{aligned} \right.$$

en vista de la elección de N .

Análogamente, si $n > N$, se obtiene:

$$(16) \quad \int_{\Omega} f(-R_n \phi(x) + u_1(x)) \psi(x) dx < \int_{\Omega} h(x) \psi(x) dx$$

Nótese que las anteriores desigualdades se verifican para toda u_1 solución de (9).

Sea ahora $R_0 = R_N ||\phi||^{-1}$. Si $u_0 \in E_0$ y $||u_0|| = R_0$, $u_0 = R_N \phi$ ó

$$u_0 = -R_N \phi.$$

En ambas situaciones,

$$B(u_0, QN(u_0 + u_1))$$

tiene el mismo signo que el de

$$\int_{\Omega} [h(x) - f(u_0(x) + u_1(x))] \psi(x) dx$$

expresión que, en vista de las desigualdades (15) y (16), es negativa.

Por lo tanto, las hipótesis del teorema abstracto 1.4 se verifican y, en consecuencia, el problema $Lu = Nu$, o su equivalente (11), tiene al menos una solución.

#

Si en vez de (12), f satisface

$$(17) \quad f(\infty) \leq f(u) \leq f(-\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

se puede probar un análogo al teorema 4 sin más que repetir la demostración punto por punto con las desigualdades invertidas.

Así, se tiene:

Teorema 5: Sea f acotada y verificando (17). Entonces, si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$ el problema (11) tiene al menos una solución.

La hipótesis de la acotación de f , aparentemente muy restrictiva, puede, en ciertas situaciones, ser suprimida. Así, utilizando el método de las subsoluciones y sobresoluciones, se probará un resultado en ese sentido.

A tal objeto, se define para $R \in \mathbb{R}$

$$z(R) = \frac{\int_{\Omega} f(R\phi(x))\psi(x)dx}{\int_{\Omega} \psi(x)dx}$$

Con relación a esta función, se tiene:

Lema 3: Sea f creciente. Entonces, existen $\lim_{R \rightarrow \infty} z(R)$ y $\lim_{R \rightarrow -\infty} z(R)$, y coinciden respectivamente con $f(\infty)$ y $f(-\infty)$. Además, z es una función creciente.

Demostración: En primer lugar, nótese que z es una función creciente puesto que ϕ y ψ son positivas en Ω y f es creciente.

Para todo $R > 0$ se tiene que

$$\int_{\Omega} f(R\phi(x))\psi(x)dx \leq f(\infty) \int_{\Omega} \psi(x)dx$$

lo cual prueba que

$$z(\infty) \leq f(\infty).$$

Para probar la otra desigualdad, esto es, $f(\infty) \leq z(\infty)$, sea Ω_n como en el teorema 4. Puesto que $\phi > 0$ en Ω , para cada n se puede elegir $R_n > 0$ tal que $\{R_n\}$ es una sucesión creciente, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ y

$$R_n \phi(x) > n \quad \forall x \in \Omega_n.$$

Entonces,

$$z(R_n) \int_{\Omega} \psi(x)dx = \int_{\Omega} f(R_n \phi(x))\psi(x)dx + \int_{\Omega - \Omega_n} f(R_n \phi(x))\psi(x)dx > f(n) \int_{\Omega_n} \psi(x)dx + f(0) \int_{\Omega - \Omega_n} \psi(x)dx$$

y tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$z(\infty) \int_{\Omega} \psi(x) dx \geq f(\infty) \int_{\Omega} \psi(x) dx$$

lo que implica que

$$z(\infty) \geq f(\infty)$$

y, en consecuencia, $z(\infty) = f(\infty)$.

La demostración de que $z(-\infty) = f(-\infty)$ es análoga.

#

Teorema 6: Sea f creciente. Si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, existen $w, v \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ tal que $w \leq v$ en $\bar{\Omega}$, subsolución y sobresolución para (11) respectivamente. En consecuencia, existe u solución de (11) tal que $w \leq u \leq v$ en $\bar{\Omega}$.

Demostración: Puesto que $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, teniendo en cuenta el lema 3, se ve que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $z(r) = \omega$.

Entonces, el problema lineal

$$\begin{cases} Au - \lambda_1 u = h(x) - f(r\phi(x)) & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución puesto que $\int_{\Omega} [h(x) - f(r\phi(x))] \psi(x) dx = 0$.

Sea ϕ la solución de dicho problema lineal tal que $\int_{\Omega} \phi(x) \psi(x) dx = 0$.

Puesto que $\phi \in E$, se puede elegir $R > 0$ verificando:

$$\phi - R\phi < r\phi < \phi + R\phi \quad \text{en } \Omega$$

Sea $w = \phi - R\phi$ y $v = \phi + R\phi$. Entonces, $Aw - \lambda_1 w = h - f(r\phi)$ puesto que $A\phi - \lambda_1 \phi = 0$, y por el carácter monótono de f , se puede concluir que:

$$Aw - \lambda_1 w = h - f(r\phi) \leq h - f(\phi - R\phi) = h - f(w) \quad \text{en } \Omega$$

Además, $Bw = 0$ en $\partial\Omega$ puesto que $B\phi = B\phi = 0$ en $\partial\Omega$. Esto prueba que w es una subsolución.

Análogamente,

$$Av - \lambda_1 v = h - f(r\phi) \stackrel{\delta}{\approx} h - f(\phi + R\phi) = h - f(v) \quad \text{en } \Omega .$$

y $Bv = 0$ en $\partial\Omega$, lo que muestra que v es una sobresolución.

Ahora, sin más que utilizar el teorema 1.11, se puede concluir que (11) tiene una solución u tal que $w \leq u \leq v$ en $\bar{\Omega}$.

#

Desafortunadamente, el teorema 6 no tiene su equivalente en el caso en que f sea decreciente ya que en tal caso, como muestra el siguiente ejemplo, pueden aparecer otros autovalores.

Ejemplo 2: Sea $f(u) = (\lambda_1 - \lambda_2)u$ donde λ_1 y λ_2 son los dos primeros autovalores de (3). Puesto que $\lambda_1 < \lambda_2$, la función f es decreciente.

Sea ξ una autofunción del problema

$$\begin{cases} A^* u = \lambda_2 u & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces, el problema (11) con $h = \xi$ se escribe:

$$\begin{cases} Au - \lambda_2 u = \xi & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

que, al ser $\xi \in \text{Im} (A^* - \lambda_2 I)$, no admite solución.

Efectuando un pequeño resumen de lo obtenido en el caso en que f es una función creciente, se llega a la siguiente cadena de implicaciones:

$$\omega \in \text{Int} (\text{Im } f) \Rightarrow (11) \text{ tiene solución} \Rightarrow \omega \in \overline{\text{Im } f}$$

A la vista de ello, es natural preguntarse qué sucede cuando $\omega \in F (\text{Im } f)$.

El siguiente resultado da una respuesta completa a esta cuestión.

Teorema 7: Si $\omega \in F (\text{Im } f)$, se tiene:

a) Si las condiciones de frontera son del tipo de Dirichlet, el problema (11) tiene solución si y sólo si $f(0) = \omega$.

b) Si las condiciones de frontera son del tipo de Neumann, el problema (11) tiene solución si y sólo si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$.

Demostración: Puesto que $\omega \in F(\text{Im } f)$, se tiene que $\omega = f(\infty)$ ó $\omega = f(-\infty)$. Se supondrá que $\omega = f(\infty)$ ya que el caso $\omega = f(-\infty)$ se trata análogamente.

a) Si (11) tiene solución,

$$(18) \quad \int_{\Omega} f(u(x))\psi(x)dx = \int_{\Omega} h(x)\psi(x)dx = \omega \int_{\Omega} \psi(x)dx$$

y, en el caso en que $f(0) \neq \omega$, necesariamente $f(0) < \omega$ puesto que f es creciente.

Como $Bu = u = 0$ en $\partial\Omega$, el conjunto $\{x \in \Omega : f(u(x)) < \omega\}$ es de medida positiva y, en consecuencia,

$$\int_{\Omega} f(u(x))\psi(x)dx < \omega \int_{\Omega} \psi(x)dx$$

lo que contradice las igualdades anteriormente obtenidas en (18).

Recíprocamente, si $f(0) = \omega = f(\infty)$, se tiene que $f(u) = \omega$ para todo $u \geq 0$.

Sea ξ una solución del problema

$$\begin{cases} Au - \lambda_1 u = h(x) - \omega & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Basta entonces con elegir $R > 0$ suficientemente grande para tener que

$$\xi + R\phi > 0 \quad \text{en } \Omega.$$

y de esta forma, la función $u(x) = \xi(x) + R\phi(x)$ es una solución de (11) puesto que

$$Au - \lambda_1 u = A\xi - \lambda_1 \xi = h(x) - \omega = h(x) - f(u) \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega.$$

b) Si (11) tiene solución, se verifica (18). Entonces, si $f(r) < \omega$ para todo $r \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\omega \int_{\Omega} \psi(x) dx = \int_{\Omega} f(u(x)) \psi(x) dx < \omega \int_{\Omega} \psi(x) dx$$

lo que contradice (18).

Recíprocamente, si $r \in \mathbb{R}$ es tal que $f(r) = \omega$, $f(u) = \omega$ para todo $u \geq r$.

Sea ξ una solución del problema

$$\begin{cases} Au - \lambda_1 u = h(x) - \omega & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Como $\phi > 0$ en $\bar{\Omega}$, se puede elegir $R > 0$ tal que $\xi + R\phi > r$ en $\bar{\Omega}$ y de esta forma $u = \xi + R\phi$ es solución de (11) ya que

$$Au - \lambda_1 u = A\xi - \lambda_1 \xi = h(x) - \omega = h(x) - f(u) \text{ en } \Omega \text{ y } \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

#

Corolario 1: En el caso de condiciones de Neumann, el problema (11) admite solución si y sólo si $\omega \in \text{Im } f$.

Demostración: Si (11) tiene solución, ya ha sido probado que $\omega \in \overline{\text{Im } f}$.

Si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, claramente $\omega \in \text{Im } f$ y si $\omega \in F(\text{Im } f)$, por el teorema anterior, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(r) = \omega$ y $\omega \in \text{Im } f$.

Recíprocamente, si $\omega \in \text{Im } f$, $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$ ó $\omega \in F(\text{Im } f)$. En el primer caso el problema (11) tiene solución en vista del teorema 6 y en el segundo por la parte b) del teorema 7.

#

Corolario 2: En el caso de condiciones de Dirichlet si el problema (11) tiene solución, $\omega \in \text{Im } f$.

Demostración: Si (11) tiene solución, es conocido que $\omega \in \overline{\text{Im } f}$. Ahora bien, si $\omega \notin \text{Im } f$ se tiene que $\omega \in F(\text{Im } f)$ y por la parte a) del teorema 7, $f(0) = \omega$, hecho que está en contradicción con lo supuesto.

#

Finalmente, el ejemplo siguiente muestra que la condición $\omega \in \text{Im } f$ no es suficiente para que (11) con condiciones de frontera del tipo de Dirichlet admita una solución.

Ejemplo 3: Considérese el problema de Dirichlet

$$-u'' - u + f(u) = 0 \quad , \quad u(0) = u(\pi)$$

donde f está definida por

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq 1 \\ u-2 & \text{si } 1 < u \leq 2 \\ 0 & \text{si } u > 2 \end{cases}$$

para el cual, siendo $\omega = 0$ y $\omega \in \text{Im } f$, no existe solución.

En efecto, de existir una solución u del problema, se tendría:

$$\int_0^\pi f(u(x)) \text{ sen } x \, dx = 0$$

Como $f(u) \leq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, $f(u(x)) \leq 0$ para todo $x \in (0, \pi)$.

Pero al ser $u(0) = 0$, existiría $\delta > 0$ tal que $f(u(x)) < -\frac{1}{2}$ si $x \in (0, \delta)$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\pi f(u(x)) \text{ sen } x \, dx = \int_0^\delta f(u(x)) \text{ sen } x \, dx + \int_\delta^\pi f(u(x)) \text{ sen } x \, dx < \\ &-\frac{1}{2} \int_0^\delta \text{ sen } x \, dx < 0 \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción y, en consecuencia, el problema no puede tener solución.

3.2.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES.

Tras haber establecido en la sección precedente ciertas condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones del problema (11), esto es:

$$\begin{cases} Au - \lambda_1 u + f(u) = h(x) & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

se desarrollará ahora un estudio del conjunto de tales soluciones para dicho problema.

Se supondrá que f es acotada y que verifica (12).

En primer lugar, se debe notar que el hecho de que f sea acotada implica que existe $K > 0$ tal que si u_1 es una solución de (9), se tiene que:

$$(19) \quad \|u_1\|_{C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})} \leq K$$

donde K es una constante que depende solamente de f y Ω .

Al objeto de aplicar los resultados abstractos obtenidos en §1.2, se definen las aplicaciones:

$$G: \mathbb{R} \longrightarrow G(r) = r\phi(x) \in E$$
$$G_1: v \in F \longrightarrow G_1(v) = \frac{\int_{\Omega} [f(v(x)) - h(x)] \psi(x) dx}{\int_{\Omega} \psi(x) dx} \in \mathbb{R}$$

co lo que $\xi(r) = G_1 \circ N \circ G(r) = z(r) - \omega$.

Lema 4: Si se verifican (12) y (14), los conjuntos S_0 y S_+ correspon-

dientes a (11) son acotados en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Además $\text{gr-a}(\xi, 0) \neq 0$.

Demostración:

a) S_0 es acotado: Si $u \in S_0$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $u = a\phi$ y $Nu \in \text{Im } L$, por lo que

$$\int_{\Omega} f(a\phi(x))\psi(x)dx = \int_{\Omega} h(x)\psi(x)dx = \omega \int_{\Omega} \psi(x)dx.$$

Ahora bien, si S_0 no es acotado, o equivalentemente a no lo es, la anterior igualdad estaría en contradicción con el resultado del lema 3.

b) S_+ es acotado: Si $u \in S_+$, verifica:

$$\begin{cases} Au - \lambda_1 u + \lambda f(u) = \lambda h & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

para algún $\lambda \in (0, 1)$.

Sea $u = u_0 + u_1$, $u_0 \in E_0$, $u_1 \in E_1$. Por ser f acotada, y teniendo en cuenta (19), se tiene que el conjunto

$$S_+^1 = \{u_1 : u_0 + u_1 \in S_+\}$$

es acotado en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$. Por tanto, para probar la acotación de S_+ es suficiente mostrar que el conjunto

$$S_+^0 = \{u_0 : u_0 + u_1 \in S_+\}$$

lo es en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

En efecto, si S_+^0 no fuese acotado, para todo $a > 0$, existiría $u_0 \in S_+^0$ tal que:

$$|u_0 + u_1| > a\phi \quad \text{en } \Omega$$

lo que estaría en contradicción con el resultado del lema 3.

Todo esto permite concluir que S_+ es acotado en $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

c) $\text{gr-a}(\xi, 0) \neq 0$: Como $z(\pm\infty) = f(\pm\infty)$ y $\omega \in \text{Int}(\text{Im } f)$, existe $M > 0$ tal que $f(-r) < \omega < f(r)$ siempre que $r > M$. Ello permite afirmar que

$\xi(-r) \cdot \xi(r) < 0$ si $r > M$, y, en consecuencia, $\text{gr-}a(\xi, 0) \neq 0$.

#

La situación en la cual el teorema abstracto que va a ser aplicado es válido, obliga a efectuar ciertos reajustes en la elección de los espacios y operadores a utilizar en el planteamiento de la ecuación abstracta que representa al problema (11).

Se adoptará por ello

$$X = \{ u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}) : Bu = 0 \} \quad \text{y} \quad Y = C^{0+\alpha}(\bar{\Omega})$$

el primero con la norma inducida por la de $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ y el segundo con la habitual.

Los operadores $L: X \rightarrow Y$ y $N: X \rightarrow Y$ tienen el significado usual. Así, L es un operador de Fredholm de índice cero y N además de ser continuo, es compacto, como puede verse razonando de modo similar a lo hecho en la sección anterior.

De esta forma, se obtiene el siguiente resultado de estructura.

Teorema 8: Bajo las condiciones (12) y (14), el conjunto de soluciones de (11) es compacto en X .

Demostración: El resultado se sigue claramente del corolario 1.1 y el lema 4.

#

Si en vez de (12), f verifica (17), el teorema 5 pone de manifiesto la validez del siguiente

Teorema 9: Si (17) y (14) se verifican, el conjunto de soluciones de (11) es compacto en X .

Con alguna condición adicional sobre f , es posible dar una descripción más precisa sobre la estructura del conjunto de soluciones

de (11).

Así, se tiene:

Teorema 10: Si f es monótona y se verifica (14), el conjunto de soluciones es conexo y acíclico.

Demostración: Sea f creciente. Se definen

$$N_n : u \in X \longrightarrow N_n(u) = N(u) - \frac{1}{n}u \in Y$$

Si $u^* \in S_1$ y $u \in S_n(u^*)$,

$$Lu - N_n(u) = Lu^* - N(u^*)$$

y u verifica:

$$\begin{cases} Lu + f(u) + \frac{1}{n}u = Lu^* - N_n(u^*) & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Como la parte no lineal de este problema tiene por imagen \mathbb{R} , el problema admite una única solución por ser la parte no lineal estrictamente creciente.

Esto prueba que los conjuntos $S_n(u^*)$ son conexos y la conexidad del conjunto de soluciones, se sigue del corolario 1.1.

Además, por la definición de N_n , se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, donde r_n está definido como en (1.26). Por otra parte, razonando como anteriormente, se ve que la ecuación

$$Lu = N_n(u) + v$$

admite una única solución para cada $v \in X$ y por el teorema 1.7, S_1 es acíclico.

En el caso en que f es decreciente, basta con definir

$$N_n(u) = N(u) + \frac{1}{n}u$$

y proceder de modo similar.

#

En el siguiente ejemplo, se muestra que, bajo las hipótesis del teorema 10, el conjunto de soluciones no consta, en general, de un sólo elemento.

Ejemplo 4: Sea el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -u'' - u + f(u) = \cos t & , t \in (0, \pi) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

donde f está definida por

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq -1 \\ u & \text{si } -1 < u \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < u \leq 10 \\ u-10 & \text{si } 10 < u \leq 11 \\ 1 & \text{si } 11 < u \end{cases}$$

Como se tiene que

$$\left\{ \left(c - \frac{t}{2} \right) \sin t : \frac{\pi}{2} \leq c \leq \pi \right\} \subset S_1$$

obviamente, S_1 contiene más de un elemento.

Teorema 11: Sea f monótona. Si el problema (11) admite solución y $\omega \in F(\text{Im } f)$, el conjunto de soluciones es homeomorfo a uno de los subconjuntos de la recta real del siguiente tipo:

$$[a, \infty) , (-\infty, b] \quad \text{ó} \quad \mathbb{R} .$$

Por tanto, S_1 es cerrado y conexo. Además, S_1 es no acotado.

Demostración: Supóngase que f es creciente y que $\omega = f(\infty)$. Si $f(u) = \omega$ para todo $u \in \mathbb{R}$, el conjunto de soluciones de (11), es homeomorfo a \mathbb{R} .

Si existe u tal que $f(u) < \omega$, sea ϕ la solución del problema

$$\begin{cases} Au - \lambda_1 u = h(x) - \omega & \text{en } \Omega \\ Bu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

tal que $\int_{\Omega} \phi(x)\phi(x)dx = 0$.

Considérese ahora para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$m(\lambda) = \min_{\bar{\Omega}} (\Phi + \lambda\phi)$$

y

$$a = \inf \{ \lambda : m(\lambda) \geq 0 \} .$$

Así, el conjunto de soluciones de (11) viene dado por

$$S_1 = \{ \Phi + \lambda\phi : \lambda \geq a \}$$

que es homeomorfo al semiintervalo infinito $[a, \infty)$. Además, es evidente que el conjunto de soluciones, S_1 , es no acotado.

#

A modo de resumen, se enuncia el siguiente

Teorema 12: Si f es monótona y acotada, el conjunto de soluciones S_1 de (11) satisface una y sólo una de las siguientes condiciones:

- a) S_1 es compacto, conexo y acíclico.
- b) S_1 es cerrado, conexo y no acotado. Además en este caso, es homeomorfo a uno de los intervalos indicados en el teorema 11.

En la obtención de los resultados de los teoremas 10 y 11 se requirió el caracter monótono de f ; como a continuación se ve, la hipótesis (12) no es suficiente para poder afirmar que el conjunto de soluciones es conexo y acíclico.

Ejemplo 5: Sea el problema de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} -u'' + f(u) = 0 \quad \text{en } (0, \pi) \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{array} \right.$$

donde f está definida por

$$f(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \leq -1 \\ u & \text{si } -1 < u \leq 0 \\ -u & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ u-2 & \text{si } 1 < u \leq 2 \\ 0 & \text{si } u > 2 \end{cases}$$

Si u es una solución del problema planteado,

$$\int_0^{\pi} f(u(x)) dx = 0$$

y, como $f \leq 0$, se tiene que

$$f(u(x)) = 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$$

con lo cual

$$u(x) = 0 \quad \text{ó} \quad u(x) > 2 \quad .$$

Por continuidad se sigue que si u es una solución,

$$u \equiv 0 \quad \text{ó} \quad u > 2 \quad .$$

Si $u > 2$, $f(u) = 0$ y u es solución de

$$-u'' = 0 \quad \text{en } (0, \pi) \quad \text{y} \quad u'(0) = u'(\pi) = 0$$

esto es, u es constante. Consecuentemente,

$$S_1 = \{ u : u \equiv 0 \quad \text{ó} \quad u \equiv c, \quad c > 2 \}$$

conjunto que no es conexo ni acíclico.

CAPITULO 4

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE TIPO PARABOLICO

En este capítulo, como en el anterior, Ω denotará un dominio acotado de \mathbb{R}^n con frontera, $\partial\Omega$, de clase $C^{2+\alpha}$ para algún $\alpha \in (0,1)$. En todo lo que sigue T será un número positivo fijo.

Se considerarán los siguientes espacios de Banach:

$$F = \{ f \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) : f(x, t+T) = f(x, t) \}$$

$$E = \{ u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) : u(x, t+T) = u(x, t) \text{ y } u(x, t) = 0 \ \forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} \}$$

con normas definidas por:

$$\|f\|_F = \|f\|_{C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])}$$

y

$$\|u\|_E = \|u\|_{C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])}$$

respectivamente. (Vease [14] y [30] para una discusión más amplia de estos espacios).

Sea L el operador parabólico en Ω definido por

$$Lu = u_t - Au = u_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - c(x, t)u$$

para $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Se supondrá que

(1) Los coeficientes de L pertenecen a $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y son periódicos con período T .

(2) L es *uniformemente parabólico*, esto es, existe $\mu > 0$ tal que para todo $(x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ y $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

Si además de (1), se supone que

(3) $a_{ij} \in C^{2+\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $b_i \in C^{1+\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y $c \in C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$

entonces, se puede definir el adjunto, L^* , de L mediante

$$(4) \quad L^* u = - (u_t + A^* u)$$

para $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Aquí, A^* está definido por:

$$(5) \quad A^* u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^*(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c^*(x, t) u$$

donde

$$b_i^* = -b_i + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{y} \quad c^* = c - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}$$

De esta forma, por (3), los coeficientes de L^* , a_{ij}^* , b_i^* y c^* son elementos de $C^{\alpha, \alpha/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Para $f, g \in L^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$, se define:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) g(x, t) \, dx \, dt$$

El siguiente teorema resume algunos resultados relativos al autovalor principal λ_1 del operador parabólico L actuando sobre funciones del espacio E , así como caracteriza el núcleo y la imagen de los operadores $L - \lambda_1 I$ y $L^* - \lambda_1 I$.

Teorema 1: Supóngase que L satisface las condiciones (1) y (2). Entonces, existe un número λ_1 y una función $\phi \in E$ tal que $L\phi = \lambda_1 \phi$. Además $\phi(x, t) > 0$ para todo $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ y si $x \in \partial\Omega$ entonces $\frac{\partial\phi}{\partial\nu}(x, t) < 0$ para todo t (ν denota, como de costumbre, la normal exterior a $\partial\Omega$). De esta forma, $\text{Ker}(L - \lambda_1 I) = \langle \phi \rangle$ y λ_1 es el número más pequeño λ para el cual el problema $Lu = \lambda u$, $u \in E$ tiene una solución no trivial.

Si además (3) se verifica, existe $\phi^* \in E$ tal que $L^*\phi^* = \lambda_1 \phi^*$, $\phi^*(x, t) > 0$ para todo $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ y $\langle \phi, \phi^* \rangle = 1$.

Con todo esto, se tiene:

$$\begin{aligned} f \in \text{Im}(L - \lambda_1 I) & \text{ si y sólo si } \langle f, \phi^* \rangle = 0 \\ f \in \text{Im}(L^* - \lambda_1 I) & \text{ si y sólo si } \langle f, \phi \rangle = 0 \\ v \in \text{Ker}(L - \lambda_1 I) & \text{ si y sólo si } \langle f, v \rangle = 0 \quad \forall f \in \text{Im}(L^* - \lambda_1 I) \end{aligned}$$

Demostración: Véase [14].

Los siguientes hechos serán de utilidad más tarde.

(6) Si $u, v \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ son T-periodicas y $u(x, t) = u(x, t) = 0$

$\forall (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$, integrando por partes, se ve que:

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^* v \rangle$$

(7) Si $u \in E$, existe una constante $R = R(u) > 0$ tal que:

$$R\phi(x, t) + u(x, t) \geq 0 \geq -R\phi(x, t) + u(x, t) \quad \forall (x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

4.1.- EL PROBLEMA DE DIRICHLET-PERIODICO.

Se estudia ahora el problema llamado de Dirichlet-periodico siguiente:

$$(8) \quad \begin{cases} Lu - \lambda_1 u + g(u) = h(x, t) & , (x, t) \in \Omega \times [0, T] \\ u(x, t) = u(x, t+T) & , (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \\ u(x, t) = 0 & , (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R} . \end{cases}$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y es tal que $\lim_{u \rightarrow \infty} g(u) = g(\infty)$ y $\lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = g(-\infty)$ existen, son finitos y verifican:

$$(9) \quad g(-\infty) \leq g(u) \leq g(\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R} .$$

Si (8) tiene una solución u , se tiene:

$$\langle Lu - \lambda_1 u + g(u), \phi^* \rangle = \langle h, \phi^* \rangle$$

y, utilizando (6), se puede escribir que

$$\langle g(u), \phi^* \rangle = \langle h, \phi^* \rangle$$

Ahora bien, como $\phi^*(x,t) > 0$ para todo $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ y además (9) se verifica, se llega a que

$$g(-\infty) \cdot \int_0^T \int_{\Omega} \phi^*(x,t) \, dx \, dt \leq \langle h, \phi^* \rangle \leq g(\infty) \cdot \int_0^T \int_{\Omega} \phi^*(x,t) \, dx \, dt$$

o de forma equivalente,

$$(10) \quad \omega \in \overline{\text{Im } g}$$

donde
$$\omega = \frac{\langle h, \phi^* \rangle}{c} \quad \text{y} \quad c = \int_0^T \int_{\Omega} \phi^*(x,t) \, dx \, dt .$$

En [14] se prueba el siguiente resultado de existencia para (8).

Teorema 2: Supóngase que además de (9), g verifica que

$$g(-\infty) < g(u) < g(\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Entonces, si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } g)$, el problema (8) tiene al menos una solución.

Tal y como se pone de manifiesto allí, el mismo resultado se mantiene si, siendo g acotada, se tiene que

$$g(\infty) < g(u) < g(-\infty) \quad \forall u \in \mathbb{R} .$$

Ahora, definiendo los operadores $\mathcal{L}: E \longrightarrow F$ y $N: E \longrightarrow F$,

$$\mathcal{L}u = Lu - \lambda_1 u \quad , \quad [N(u)](x,t) = h(x,t) - g(u(x,t))$$

se tiene que el problema (8) es equivalente a la ecuación abstracta

$$L_u = Nu$$

Sea $E_0 = \langle \phi \rangle$, $E_1 = \{ u \in E : \langle u, \phi \rangle = 0 \}$, $F_0 = \langle \phi^* \rangle$ y

$F_1 = \{ f \in F : \langle f, \phi^* \rangle = 0 \}$. Claramente, $E = E_0 \oplus E_1$ y $F = F_0 \oplus F_1$.

Además, $E_0 = \text{Ker} (L - \lambda_1 I)$ y $F_1 = \text{Im} (L - \lambda_1 I)$ y por tanto,

$L - \lambda_1 I: E_1 \longrightarrow F_1$ es una aplicación lineal (biyectiva) acotada, y la in-

versa $H: F_1 \longrightarrow E_1$ es continua por el teorema de la aplicación abierta.

Sean $P: E \longrightarrow E$ y $Q: F \longrightarrow F$ definidas por:

$$Pu = \rho_1 \left[\int_0^T \int_{\Omega} u(x,t) \phi(x,t) dx dt \right] \phi$$

$$Qf = \rho_2 \left[\int_0^T \int_{\Omega} f(x,t) \phi^*(x,t) dx dt \right] \phi^*$$

donde ρ_1 y ρ_2 se eligen a fin de que $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$.

De esta forma H está definida por:

$$Hf = u \text{ si y sólo si } Lu - \lambda_1 u + g(u) = f \text{ en } \Omega \times [0, T] \text{ y } Pu = 0.$$

Facilmente, puede verse que las hipótesis del teorema 1.1 se verifican, así como las condiciones (1.4)-(1.10) sin más que definir

$$B: (u, f) \in E \times F \longrightarrow B(u, f) = \langle u, f \rangle$$

y

$$J: f_0 \in F_0 \longrightarrow J(f_0) = f_0 \in E_0$$

Esto muestra que los resultados abstractos del capítulo 1 son aplicables al problema de tipo parabólico planteado.

4.2.- UNA GENERALIZACION A PROBLEMAS CON PARTE NO LINEAL NO ACOTADA.

Al objeto de eliminar la hipótesis de la acotación de g requerida en el teorema 2, se define para $R \in \mathbb{R}$

$$\mu(R) = \int_0^T \int_{\Omega} g(R\phi(x,t)) \phi^*(x,t) \, dx \, dt$$

De esta forma, se tiene el siguiente resultado:

Lema 1: Los límites $\lim_{R \rightarrow \infty} \mu(R) = \mu(\infty)$ y $\lim_{R \rightarrow -\infty} \mu(R) = \mu(-\infty)$ existen y
 $\mu(\infty) = c \cdot g(\infty)$, $\mu(-\infty) = c \cdot g(-\infty)$.

Demostración: Se da la prueba sólo para el caso en que $R \rightarrow \infty$ ya que el caso $R \rightarrow -\infty$ se trata de forma análoga.

Para N entero positivo, se define

$$\Omega_N = \left\{ x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{N} \right\} .$$

Puesto que $\phi^* > 0$ en $\Omega \times [0, T]$, para todo $R > 0$ se tiene que

$$\mu(R) \leq g(\infty) \int_0^T \int_{\Omega} \phi^* = c \cdot g(\infty)$$

y así $\mu(\infty) \leq c \cdot g(\infty)$.

Para probar que $\mu(\infty) \geq c \cdot g(\infty)$, se distinguen dos casos:

i) $g(\infty)$ es finito. Así, en este caso, existe K_+ tal que $|g(u)| \leq K_+$ para todo $u \geq 0$. Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, es posible elegir N tal que

$$(11) \quad \int_0^T \int_{\Omega - \Omega_N} \phi^*(x,t) \, dx \, dt < \frac{\epsilon}{3K_+} ,$$

$$(12) \quad g(\infty) \cdot \int_0^T \int_{\Omega - \Omega_N} \phi^*(x,t) \, dx \, dt \leq \frac{\epsilon}{3} ,$$

y

$$(13) \quad g(\infty) - g(u) < \frac{\epsilon}{3c} \quad \forall u \geq N .$$

Dado que $\phi > 0$ en $\Omega_N \times [0, T]$, se puede elegir $M > 0$ tal que $M\phi(x,t) \geq N$ para todo $(x,t) \in \Omega_N \times [0, T]$. Sea $R > M$. Entonces,

$$\mu(R) = \int_0^T \int_{\Omega_N} g(R\phi(x,t))\phi^*(x,t) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\Omega - \Omega_N} g(R\phi(x,t))\phi^*(x,t) \, dx \, dt$$

Como $R\phi \geq M\phi \geq N$ en $\Omega_N \times [0, T]$, se tiene usando (13) y (11):

$$\begin{aligned} \mu(R) &\geq \left(g(\infty) - \frac{\epsilon}{3c}\right) \int_0^T \int_{\Omega_N} \phi^* - K_+ \int_0^T \int_{\Omega - \Omega_N} \phi^* \geq \\ &g(\infty) \cdot \int_0^T \int_{\Omega_N} \phi^* - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} . \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g(\infty) \cdot \int_0^T \int_{\Omega_N} \phi^* - \mu(R) \leq \frac{2\epsilon}{3} ,$$

o equivalentemente

$$c \cdot g(\infty) - \mu(R) \leq \frac{2\epsilon}{3} + g(\infty) \int_0^T \int_{\Omega - \Omega_N} \phi^*$$

lo que muestra, teniendo en cuenta (12), que $c \cdot g(\infty) - \mu(R) \leq \epsilon$ para $R > M$. Esto prueba que $\lim_{R \rightarrow \infty} \mu(R) = c \cdot g(\infty)$.

ii) $g(\infty) = \infty$. Sea K_- tal que $K_- \leq g(u)$ para todo $u \geq 0$. Dado $\epsilon > 0$, se puede elegir N tal que

$$(14) \quad \int_0^T \int_{\Omega - \Omega_N} \phi^* \geq \frac{\epsilon}{4} ,$$

$$(15) \quad K_- \int_0^T \int_{\Omega - \Omega_N} \phi^* \geq \frac{\epsilon}{2} ,$$

$$(16) \quad g(u) \geq \frac{2\varepsilon}{c} = \varepsilon_1 \quad \text{para todo } u \geq N.$$

Sea ahora M una constante positiva tal que $M\phi(x,t) \geq N$ para todo $(x,t) \in \Omega_N \times [0,T]$. Entonces, usando las desigualdades (14)-(16), se tiene

$$\begin{aligned} \mu(R) &= \int_0^T \int_{\Omega_N} g(R\phi)\phi^* + \int_0^T \int_{\Omega-\Omega_N} g(R\phi)\phi^* \geq \\ &\varepsilon_1 \int_0^T \int_{\Omega_N} \phi^* + \int_0^T \int_{\Omega-\Omega_N} g(R\phi)\phi^* \geq \varepsilon_1 c - \varepsilon_1 \int_0^T \int_{\Omega-\Omega_N} \phi^* + K \int_0^T \int_{\Omega-\Omega_N} \phi^* \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, en este caso, $\lim_{R \rightarrow \infty} \mu(R) = \infty = c \cdot g(\infty)$.

#

Utilizando el resultado de este lema, se puede probar el siguiente

Teorema 3: Supóngase que g es una función creciente y que $\omega \in \text{Int}(\text{Im } g)$. Entonces, existen $w, v \in E$, subsolución y sobresolución respectivamente para (8), tal que $w \leq v$ en $\bar{\Omega} \times [0,T]$. Consecuentemente, existe u solución de (8) tal que $w \leq u \leq v$ en $\bar{\Omega} \times [0,T]$.

Demostración: Usando el hecho de que $\omega \in \text{Int}(\text{Im } g)$ y el lema anterior, se ve que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(r) = c\omega$.

Considérese ahora el problema lineal

$$(17) \quad Lu - \lambda_1 u = h - g(r\phi), \quad u \in E$$

el cual admite solución ya que $\langle h - g(r\phi), \phi^* \rangle = 0$. Así, sea $z \in E$ la solución de (17) tal que $\langle z, \phi \rangle = 0$. Por (7), existe $R > 0$ tal que

$$v = R\phi + z \geq r\phi \geq -R\phi + z = w$$

Ahora bien,

$$Lv - \lambda_1 v = Lz - \lambda_1 z = h - g(r\phi) \geq h - g(v)$$

$$Lw - \lambda_1 w = Lz - \lambda_1 z = h - g(r\phi) \leq h - g(w)$$

y puesto que $w, v \in E$, las anteriores desigualdades muestran que w es una subsolución para (8) y que v es una sobresolución para (8). Además, claramente $w \leq v$ en $\bar{\Omega} \times [0, T]$.

Usando el teorema 1.12, se puede concluir que existe $u \in E$, solución de (8), tal que $w \leq u \leq v$ en $\bar{\Omega} \times [0, T]$.

#

Teorema 4: Si $\omega \in F(\text{Im } g)$, el problema (8) tiene solución si y sólo si $g(0) = \omega$.

Demostración: Se supondrá que $\omega = g(\infty)$ ya que el caso en que $\omega = g(-\infty)$ se trata análogamente.

Sea u solución de (8). Si $g(0) < \omega$, existe $\delta > 0$ tal que $g(u) < \omega$ para $|u| < \delta$. Puesto que $u(x, t) = 0$ para $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$, se ve que

$$g(u(x, t)) < \omega,$$

en un conjunto $BC \bar{\Omega} \times [0, T]$ de medida positiva, con lo que

$$\omega \cdot c = \langle h, \phi^* \rangle = \int_0^T \int_{\Omega} g(u(x, t)) \phi^*(x, t) \, dx \, dt < \omega \int_0^T \int_{\Omega} \phi^*(x, t) \, dx \, dt = \omega \cdot c$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, $g(0) = \omega$ es una condición necesaria para que (8) admita solución.

Ahora, sea $g(0) = \omega = g(\infty)$. Como g es creciente, se tiene que $g(u) = \omega$ para todo $u \geq 0$.

Sea el problema lineal

$$Lu - \lambda_1 u = h - \omega, \quad u \in E$$

el cual tiene solución puesto que $\langle h - \omega, \phi^* \rangle = 0$. Sea z la solución de dicho problema lineal tal que $\langle z, \phi \rangle = 0$. Eligiendo $R > 0$ suficientemente grande, se obtiene que

$$R\phi + z \geq 0 \quad \text{en} \quad \bar{\Omega} \times [0, T]$$

Facilmente, puede comprobarse que $u = R\phi + z$ es una solución de (8).

#

El siguiente teorema resume lo obtenido en el caso en que g es una función creciente.

Teorema 5: Con relación al problema (8) con g creciente, se tiene:

- i) Si el problema (8) admite solución, $\omega \in \overline{\text{Im } g}$
- ii) Si $\omega \in \text{Int}(\text{Im } g)$, el problema (8) tiene solución
- iii) Si $\omega \in F(\text{Im } g)$, el problema (8) tiene solución si y sólo si $g(0) = \omega$.

#

Desafortunadamente, y de modo similar a lo visto en el estudio de las ecuaciones elípticas, si g es decreciente, no hay resultados análogos a los expuestos tal y como pone de manifiesto el siguiente

Ejemplo 1: Sea $\Omega = (0, \pi)$ y $T = 2\pi$. Si $Lu = u_t - u_{xx}$, los autovalores del problema

$$Lu = \lambda u, \quad u \in E$$

o equivalentemente del

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} = \lambda u, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, t+2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

vienen dados por $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \dots, \lambda_n = n^2$ con autofunciones asociadas $\phi_n(x, t) = \text{sen } nx$ (vease [21]).

De esta forma, el problema (8) con $g(u) = -3u$ y $h(x, t) = \text{sen } 2x$, no puede tener solución.

4.3.- ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE SOLUCIONES: UN EJEMPLO.

En primer lugar, nótese que si g es estrictamente creciente, la condición $\omega \in \text{Int}(\text{Im } g)$ es necesaria y suficiente para que (8) tenga solución. En ese caso, el problema admite una única solución. En efecto, si u_1 y u_2 son dos soluciones,

$$\int_0^T \int_{\Omega} [g(u_1(x,t)) - g(u_2(x,t))] \phi^*(x,t) \, dx \, dt = 0$$

y teniendo en cuenta las propiedades de ϕ^* y el carácter estrictamente monótono de g , se puede concluir que

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) \quad \forall (x,t) \in \bar{\Omega} \times [0,T]$$

Sin embargo, y aún siendo g creciente, no se da la unicidad de solución en general.

Ejemplo 2: Considérese el problema de Dirichlet-periódico siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} - u + g(u) = 0 \quad , \quad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R} \\ u(x,t+2\pi) = u(x,t) \quad , \quad (x,t) \in (0,\pi) \times \mathbb{R} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es una función creciente tal que

$$g(u) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{si } u < -2 \\ 0 & \text{si } -1 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 2 \end{array} \right.$$

Entonces, las funciones

$$u_a(x,t) = a \, \text{sen } x \quad , \quad |a| < 1$$

son soluciones del problema y, en consecuencia, hay un número infinito de soluciones.

En este caso, $\text{Im } g = [-1, 1]$ y $\omega = 0$ por lo que (como se verá más abajo) el conjunto de soluciones es compacto, conexo y acíclico (en el espacio de Banach que se especificará).

A continuación, se estudia la estructura del problema siguiente:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_t - u_{xx} - u + g(u) = h(x, t) \quad , \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R} \\ u(x, t+2\pi) = u(x, t) \quad , \quad (x, t) \in (0, \pi) \times \mathbb{R} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es una función creciente y acotada.

Como ya se ha visto, $\lambda_1 = 1$ y $\phi(x, t) = \text{sen } x$ para el problema

$$u_t - u_{xx} = \lambda u \quad , \quad u \in E$$

y, por ser éste autoadjunto, $\phi^*(x, t) = \text{sen } x$.

Además, se supondrá que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi h(x, t) \text{sen } x \, dx \, dt = 0 \quad .$$

Al objeto de poder aplicar los resultados abstractos de §1.2 al problema (18), se introducen ahora los siguientes espacios de Banach.

$$Y = L^2((0, \pi) \times (0, 2\pi)) \quad \text{con la norma usual } || \cdot ||_2$$

$$X = A_{21} \quad \text{con norma dada por } ||u||_X^2 = ||u_t||_2^2 + ||u_{xx}||_2^2 \quad .$$

El espacio A_{21} es la completión del espacio

$\{u \in C^\infty((0, \pi) \times \mathbb{R}) : u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } u \text{ es } 2\pi\text{-periódica en } t\}$

con respecto a la norma $\| \cdot \|_X$. (Para un estudio más detallado de los espacios A_{pm} y en particular del A_{21} , puede verse [20]).

Nótese que si $u \in A_{21}$, $u_t, u_x, u_{xx} \in Y$, y además u es continua en $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

Se definen ahora los operadores $L: X \longrightarrow Y$ y $N: X \longrightarrow Y$ por

$$Lu = u_t - u_{xx} - u$$

$$Nu = h - g(u)$$

con lo que el problema (18) es equivalente a la ecuación abstracta

$$(19) \quad Lu = Nu$$

Teniendo en cuenta el teorema 1, puede verse fácilmente que

$$\text{Ker } L = \langle \text{sen } x \rangle$$

$$\text{Im } L = \left\{ f \in Y : \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x, t) \text{sen } x \, dx \, dt = 0 \right\}$$

Así, si $X_0 = Y_0 = \text{Ker } L$, $Y_1 = \text{Im } L$ y $X_1 = Y_1 \cap X$, se tiene que

$$X = X_0 \oplus X_1, \quad Y = Y_0 \oplus Y_1.$$

Por tanto, L es un operador de Fredholm de índice cero. Además, N es un operador compacto, lo que puede verse razonando como en el lema 3.2 y teniendo en cuenta el teorema de Rellich-Kondrachov [1] y que

$$A_{21} C_W^{2,1}((0, \pi) \times (0, 2\pi)).$$

Sean ahora $G_1: Y \longrightarrow \mathbb{R}$ y $G: \mathbb{R} \longrightarrow X$ las aplicaciones lineales definidas por:

$$G(a) = a \text{sen } x, \quad G_1(u) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(x, t) \text{sen } x \, dx \, dt$$

con lo que

$$\xi(a) = G_1 \cdot N \cdot G(a) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(a \sin x) \sin x \, dx \, dt \quad .$$

Lema 2: Los conjuntos S_0 y S_+ correspondientes a (19) son acotados y $gr-a (\xi, 0) \neq 0$.

Demostración:

a) S_0 es acotado: Si $u \in S_0$, $u(x,t) = a \sin x$ y

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(a \sin x) \sin x \, dx \, dt = 0 \quad ,$$

lo cual, en vista del lema 1, muestra que S_0 es acotado.

b) S_+ es acotado: Si $u \in S_+$, existe $\lambda \in (0,1)$ tal que:

$$u_t - u_{xx} - u = \lambda h(x,t) - \lambda g(u) \quad , \quad u \in X \quad .$$

Poniendo $u = u_0 + u_1$, $u_0 \in X_0$, $u_1 \in X_1$, u verifica:

$$(20) \quad u_1 = H(I-P)[\lambda h - \lambda g(u_0 + u_1)]$$

$$(21) \quad P[h - g(u_0 + u_1)] = 0 \quad .$$

Del hecho de que g es acotada, se sigue que

$$\| \lambda h - \lambda g(u_0 + u_1) \|_Y$$

está acotado independientemente de $\lambda \in (0,1)$, $u_0 \in X_0$ y $u_1 \in X_1$.

En consecuencia, existe K_1 tal que

$$\|u_1\|_X \leq K_1 \quad \forall u_0 + u_1 \in S_+ \quad .$$

Ahora bien, para el espacio A_{21} es bien conocido [20, pág.763] que existe

$\mu_0 > 0$ tal que:

$$\|u\|_\infty \leq \mu_0 \|u\|_X \quad \forall u \in X \quad .$$

y, en consecuencia,

$$(22) \quad \|u_1\|_\infty \leq \mu_0 K_1 = K \quad \forall u_0 + u_1 \in S_+$$

Ahora, usando (21), se ve que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(u_0(x,t) + u_1(x,t)) \sin x \, dx \, dt = 0$$

Esta última igualdad prueba, en vista del lema 1 y de (22), que S_+ es un subconjunto acotado de X .

c) $gr-a(\xi, 0) \neq 0$. Por el lema 1, se tiene que

$$\xi(a) \cdot \xi(-a) < 0$$

para $|a|$ suficientemente grande y, consecuentemente, $gr-a(\xi, 0) \neq 0$.

#

Ahora, ya se está en condiciones de probar el siguiente

Teorema 6: El conjunto de soluciones, S_1 , de (18) es compacto, conexo y acíclico (como subconjunto de X).

Demostración: La compacidad de S_1 se sigue inmediatamente del corolario 1.1 y del lema precedente.

Para probar la conexidad de S_1 , defínanse los operadores

$$N_n : u \in X \longrightarrow N_n(u) = N(u) - \frac{1}{n} u \in Y.$$

Así, $\|N_n(u) - N(u)\| = \frac{1}{n} \|u\|$ y N_n converge a N uniformemente en conjuntos acotados de X .

Sea $u^* \in S_1$. Si $u \in S_n(u^*)$,

$$u_t - u_{xx} - u + g(u) + \frac{1}{n} u = Lu^* - N_n(u^*), \quad u \in X$$

problema que tiene una única solución y por tanto el conjunto S_1 es conexo.

Por otra parte, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ donde r_n está definido como en (1.26). Además, el problema

$$\mathcal{L}u = N_n(u) + v$$

tiene una única solución para cualquier $v \in X$ y por el teorema 1.7, S_1 es acíclico.

#

A continuación se presenta un resultado, cuya demostración es totalmente análoga a la del teorema 3.11, sobre la estructura del conjunto de soluciones en el caso en que $\omega \in F(\text{Im } g)$.

Teorema 7: Si $\omega \in F(\text{Im } g)$ y $g(0) = \omega$, el conjunto de soluciones de (18) es cerrado, conexo y no acotado. Además, en este caso, S_1 es homeomorfo a uno de los subconjuntos de la recta real del siguiente tipo:

$$[a, \infty) , (-\infty, b] , \mathbb{R} .$$

#

Por último, cabe señalar que utilizando los espacios de Sobolev apropiados, es posible probar resultados de estructura análogos a los teoremas 6 y 7 para el problema (8).

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADAMS, R.A. Sobolev Spaces , Academic Press. 1975.
- [2] AGMON, S. "The L^p approach to the Dirichlet problem" , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol 13 (1959) , 405-448.
- [3] AGMON, S., DOUGLIS, A. y NIRENBERG, L. "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I " , Comm. pure appl. Math 12 (1959) , 623-727.
- [4] AGMON, S. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems , Van Nostrand . 1965.
- [5] AHMAD, S., LAZER, A.C. y PAUL, J.L. "Elementary critical point theory and perturbations of elliptic Boundary Value Problems" , Indiana University Math. J. 25 (1976) , 933-944.
- [6] AMMAN, H. "Fixed point equations and nonlinear eigenvalue in ordered Banach spaces" , SIAM Review 18 (1976) , 620-709.
- [7] AMANN, H. "Periodic solutions of semilinear parabolic equations" , Nonlinear Analysis, a volume in honor of E. H. Rothe , Academic Press (1978) , 1-29.
- [8] ARONSZAJN, N. "Le correspondant topologique de l'unicité dans la théorie des équations différentielles" , Annals of Math. , Vol 43 (1942) , 730-738.
- [9] BARTLE, R.G. "Singular points of functional equations" , Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953) , 366-384.
- [10] BEBERNES, J. y MARTELLI, M. "On the structure of the solution set for periodic boundary value problems" , Nonlinear Analysis, Vol 4 (1980) , 821-830.

- [11] BERESTYCKI, H. y LIONS, P.L. "Sharp existence results for a class of semilinear elliptic problems" University of Wisconsin, Madison, MRC Technical Summary Report #2111 (1980).
- [12] BERNFELD, S. y LAKSHMIKANTHAM, V. An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems , Academic Press , 1974.
- [13] BREZIS, H. y HARAUX, A. "Image d'une somme d'operateurs monotones et applications" , Israel Journal of Math., Vol 23 (1976) , 165-186.
- [14] CASTRO, A. y LAZER, A.C. "Results on periodic solutions of parabolic equations suggested by elliptic theory" , Bolletino U.M.I.(6) 1-B (1982) , 1089-1104.
- [15] CESARI, L. "Sulla stabilitá delle soluzioni dei sistemi di equozioni differenziali lineari a coefficienti periodici" , Atti Accad. Ital. Mem. Cl. Fis. Mat. Nat. (6) 11 (1940) , 633-692.
- [16] CESARI, L. "Functional analysis and Galerkin's method" , Michigan Math. J. 11 (1964) , 385-414.
- [17] CESARI, L. "Functional analysis, nonlinear differential equations and the alternative method" , Proc. of Conf. of Nonlinear Functional Analysis and Differential Equations (Eds. Cesari, Kannan y Schuur) , Marcel Dekker (1976) , 1-197.
- [18] CESARI, L. y KANNAN, R. "Functional analysis and nonlinear differential equations" , Bulletin Amer. Math. Soc. 79 (1973) , 1216 - 1219.
- [19] CESARI, L. y KANNAN, R. "An abstract theorem at resonance" , Proc. Amer. Math. Soc. 63 (1977) , 221-225.
- [20] CESARI, L. y KANNAN, R. "Solutions of nonlinear hyperbolic equations at resonance" , Nonlinear Analysis, Vol. 6 (1982) , 751-805.
- [21] CESARI, L. y KANNAN, R. "An existence theorem for periodic solutions of nonlinear parabolic equations" , Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (aparecerá).

- [22] CHOW, S.N. y HALE, J.K. Methods in Bifurcation Theory , Spriger Verlag. 1982.
- [23] CRONIN, J. "Branch points of solutions of equations in Banach spaces" , Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950) , 208-231.
- [24] CRONIN, J. "Fixed Points and topological degree in nonlinear analysis" , Amer. Math. Soc. Surveys 11 (1964).
- [25] de FIGUEIREDO, D.G. Equações elípticas não lineares , 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA. 1977.
- [26] de FIGUEIREDO, D.G. Lecture on Boundary Value Problems of the Ambrosetti-Prodi type , Atas do 12º Seminario Brasileiro de Análise, Sao Paulo , 1980.
- [27] de FIGUEIREDO, D.G. y NI, W-M. "Perturbations of second order linear elliptic problems by nonlinearities without Landesman-Lazer condition" , Nonlinear Analysis, Vol. 3 (1979) , 1-10.
- [28] DOLPH, C.L. y MINTY, G.J. "On linear integral equations of the Hammerstein type" , Integral Equations, University of Wisconsin Press (1964) , 99-154.
- [29] FRAENKEL, L.E. "On the embedding of $C^1(\bar{\Omega})$ in $C^{0+\alpha}(\bar{\Omega})$ " , J. London Math. Soc. (2), 26 (1982) , 290-298.
- [30] FRIEDMAN, A. Partial Differential Equations of Parabolic Type , Prentice-Hall , 1964.
- [31] FUCIK, S. "Further remarks on a theorem by E. Landesman and A.C. Lazer" , Comment. Math. Univ. Carolinae 15 (1974) , 259-271.
- [32] FUCIK, S. Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems , D. Reidel Publ. Co. , 1980.
- [33] FUCIK, S. y KRBEK, M. "Boundary Value Problems with bounded non-linearity and general Null-Space of the linear part" , Math. Z. 155 (1977) , 129-138.

- [34] FURI, M., MARTELLI, M. y VIGNOLI, A. "On the solvability of Nonlinear Operator Equations in Banach spaces" , *Annali di Mat. Pura ed Appl.* 124 (1980) , 321-343.
- [35] GAINES, R. y MAWHIN, J. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations , *Lecture Notes in Mathematics*, No.568 , Springer-Verlag , 1977.
- [36] GILBARG, D. y TRUDINGER, N. Elliptic Partial Differential Equations, Springer-Verlag , 1977.
- [37] HALE, J.K. "Evaluations concerning products of exponential and periodic functions" , *Riv. Mat. Univ. Parma* 5 (1954) , 63-81.
- [38] HALE, J.K. Applications of Alternative Problems , *Lecture Notes of Brown University* , 1971.
- [39] HAMMERSTEIN, A. "Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendung" , *Acta Math.* 54 (1930) , 117-176.
- [40] HARAUX, A. "Equations d'evolution non linéaires: Solutions bornées et périodiques" , *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 28 (1978) , 201-220.
- [41] HARTMAN, P. Ordinary Differential Equations , John Wiley , 1964.
- [42] HESS, P. "A remark on the preceding paper of Fucik and Krbec" , *Math. Z.* 155 (1977) , 139-141.
- [43] KANNAN, R. y LAKSHMIKANTHAM, V. "Periodic solutions of nonlinear boundary value problems" , *Nonlinear Analysis*, Vol. 6 (1982) , 1-10.
- [44] KANNAN, R. y LAKSHMIKANTHAM, V. "Existence of periodic solutions of nonlinear boundary value problems and the method of upper and lower solutions" , *The University of Texas at Arlington, Technical Report #173*, 1983.
- [45] KANNAN, R., LAKSHMIKANTHAM, V. y NIETO, J.J. "Sufficient conditions for existence of solutions of nonlinear boundary value problems at resonance" , *Nonlinear Analysis* (aparecerá).

- [46] KANNAN,R., NIETO,J.J. y RAY,M.B. "A class of nonlinear boundary value problems without Landesman-Lazer condition" , J. Math. Anal. Appl. (aparecerá).
- [47] KAZDAN,J.L. y WARNER,F.W. "Remarks on some quasilinear elliptic equations" , Comm. Pure Appl. Math. 28 (1975) , 567-597.
- [48] KRASNOSELSKII,M.A. Translations along trajectories of differential equations , Translations of Math. Monographs, Vol. 19, Amer. Math. Soc., 1968.
- [49] KREIN,M.G. y RUTMAN,M.A. "Linear operators which leave a cone in a Banach space invariant" , Amer. Math. Soc. Trans. Series I, No.26 , 1950.
- [50] KOLESOV,J.S. "A test for the existence of periodic solutions to parabolic equations" , Soviet Math. Dokl. 7 (1966) , 1318-1320.
- [51] KOLESOV,J.S. "Periodic solutions of quasilinear parabolic equations of second order" , Trans. Moscow Math. Soc., Vol. 21 (1970), 114-146.
- [52] LAKSHMIKANTHAM,V. y LEELA,S. Differential and Integral Inequalities, Vol. I y Vol. II, Academic Press. 1969.
- [53] LAKSHMIKANTHAM,V. y LEELA,S. "Existence and monotone method for periodic solutions of first order differential equations" , J. Math. Anal. Appl. 91 (1983) , 237-243.
- [54] LAKSHMIKANTHAM,V. y LEELA,S. "On the method of upper and lower solutions in abstract cones" , Annales Polonici Mathematici (aparecerá).
- [55] LAKSHMIKANTHAM,V., LEELA,S. y VATSALA,A.S. "Method of quasi-upper and lower solutions in abstract cones" , Nonlinear Analysis, Vol. 6 (1982) , 833-838.
- [56] LANDESMAN,E.M. y LAZER,A.C. "Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance" , J. Math. Mech. 19 (1970) , 609-623.

- [57] LASRY, J. y ROBERT, R. "Analyse Nonlinéaire Multivoque", U.E.R. Mathématiques de la Decision , No.249. Université de Paris-Dauphine, 1974.
- [58] LAZER, A.C. y MCKENNA, P.J. "New multiplicity results for a class of semilinear elliptic and parabolic boundary value problems" (aparecerá).
- [59] LERAY, J. y SCHAUDER, J. "Topologie et équations fonctionnelles" , Ann. Sci. Ecole Norm.Supp. 3, 51 (1934) , 45-78.
- [60] LLOYD, N.G. Degree theory , Cambridge University Press, 1978.
- [61] LYAPUNOV, A.M. "Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation" , Zap. Akad. Nauk St. Petersburg 1 (1906) , 1-225.
- [62] MAWHIN, J. "Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory for some maps in locally convex topological spaces" , J. Differential Equations 12 (1976) , 610-636.
- [63] MAWHIN, J. Topological degree methods in nonlinear boundary value problems , Amer. Math. Soc. Regional Conferences in Math. , No.40, 1979.
- [64] MCKENNA, P.J. The alternative method in nonselfadjoint semilinear problems , University of Michigan, Tesis Doctoral, 1975.
- [65] NAGUMO, M. "Degree of mappings in convex linear topological spaces", Amer. J. Math. 73 (1951) , 497-511.
- [66] NIETO, J.J. "Problems at resonance for first and second order differential equations via Lyapunov-like functions" , Nonlinear Analysis, Vol. 7 (1983) , 61-69.
- [67] NIETO, J.J. "Nonlinear problems at resonance via Lyapunov-like functions" , Proc. "Vth International Conference on Trends in Theory and Practice of Nonlinear Differential Equations " (Ed. Lakshmikantham) , Marcel Dekker (1983) , 419-424.

- [68] NIRENBERG,L. Topics in Nonlinear Functional Analysis , Courant Institute Math. Sci. Lecture Notes . 1974.
- [69] NIRENBERG,L. "Variational and topological methods in nonlinear problems" , Bulletin Amer. Math. Soc. 4 (1981) , 267-302.
- [70] POINCARÉ,H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Gauthier-Villars (París), 1892-1899. (Edición en inglés: Dover, New York. 1957).
- [71] PROTTER,M. y WEINBERGER,H. Maximun Principles in Differential Equations , Printice-Hall. 1967.
- [72] SATTINGER,D.H. Topics in Stability and Bifurcation Theory , Lecture Notes in Mathematics, No. 309, Springer-Verlag. 1973.
- [73] SCHMIDT,E. "Zur theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen und der Verzweigung ihrer Losungen" , Math. Ann. 65 (1908) , 370-399.
- [74] SCHMITT,K. y GUSTAFSON,G. "Nonzero solutions of boundary value problems for damped nonlinear differential systems" , Diff. Eq. 30 Symposium US-Mexico 1975 (1976) , 227-241.
- [75] SCORZA-DRAGONI,G. "Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali del secóndo ordine" , Bolletino U.M.I. 14 (1935) , 225-230.
- [76] SHAW,H.C. Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance, University of Michigan, Tesis Doctoral. 1975.
- [77] SHENDGE,G.R. y VATSALA,A.S. "Comparison results for first and second order boundary value problems at resonance" , Applied Math. and Computation (aparecerá).
- [78] SPANIER,E. Algebraic Topology , McGraw Hill Series. 1966.
- [79] VAINBERG,M.M. y TRENIGIN,V.A. "The method of Lyapunov and Schmidt in the theory of nonlinear equations and their further development" , Russian Math. Surveys 17 (1962) , 1-60.

- [80] WILLIAMS,S.A. "A connection between the Cesari and Leray-Schauder methods" , Michigan Math. J. 15 (1968) , 441-448.
- [81] WILLIAMS,S.A. "A sharp sufficient condition for solution of a nonlinear elliptic boundary value problem" , J. Differential Equations 8 (1970) , 580-586.

Es muy amplio el conjunto de problemas cuya modelización matemática conduce a una ecuación diferencial o, en general, a una ecuación funcional cuyo estudio se aborda en el marco de unos convenientes espacios abstractos.