FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Grupos de transformaciones

Juan Manuel Lorenzo Naveiro

Curso 2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Grupos de transformaciones

Juan Manuel Lorenzo Naveiro

Julio, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: Grupos de transformacións
Breve descrición do contido
Segundo Felix Klein, a xeometría é o estudo daquelas propiedades dun espazo que permanecen invariantes baixo a acción dun grupo de transformacións. O obxectivo deste traballo é comeza-lo estudo dos grupos de transformacións continuas, coa idea de aplicar estes coñecementos á Xeometría Diferencial.
Recomendacións
Cursar "Variedades diferenciables".
Outras observacións

Índice general

Resumen

Los grupos de transformaciones están ligados a la noción de simetrías de un espacio dado y han alcanzado gran notoriedad en diversas ramas de las Matemáticas desde su aparición en el siglo XIX. El objetivo de este trabajo es hacer un estudio de los grupos de transformaciones desde el punto de vista de la Geometría Diferencial y, en menor medida, de la Topología. Se hará hincapié en las acciones propias de los grupos de Lie sobre las variedades diferenciables, así como en las acciones isométricas sobre variedades de Riemann. Con este fin, se hará una breve introducción a los fibrados vectoriales y a las variedades de Riemann. También se dedicará una parte del trabajo a la demostración de tres teoremas fundamentales relativos a las las acciones propias: el *Teorema de la Variedad Cociente*, el *Slice Theorem* y el *Teorema de la Órbita Principal*.

Abstract

Transformation groups are linked to the notion of symmetry of a given space and have attained great notoriety among several branches of Mathematics since their appearance in the nineteenth century. The aim of this work is to study transformation groups from the perspective of Differential Geometry and, to a lesser extent, Topology. Special interest will be devoted to proper Lie group actions on differentiable manifolds, as well as isometric actions on Riemannian manifolds. With this objective in mind, there will be a brief introduction to vector bundles and Riemannian manifolds. Furthermore, a part of this project will be dedicated to proving three fundamental theorems regarding proper actions: the *Quotient Manifold Theorem*, the *Slice Theorem* and the *Principal Orbit Theorem*.

Introducción

En la actualidad, la Teoría de Grupos es una rama indispensable de las Matemáticas vinculada a la idea de simetría, pero ¿qué es simetría? Mientras que en un contexto informal la simetría hace alusión a la idea de belleza o proporción, en Matemáticas se tiene una definición concreta de lo que es *una simetría*:

Una simetría es una transformación que preserva la estructura de cierto objeto.

Dependiendo del objeto en consideración, estas "simetrías" existen bajo diversos nombres: las simetrías de un espacio vectorial se conocen como *isomorfismos lineales*, las de un espacio topológico, *homeomorfismos*, y las de una variedad de Riemann, *isometrías*, por poner algunos ejemplos.

Una de las motivaciones iniciales de la Teoría de Grupos, alejada de la perspectiva de la Geometría Diferencial, fue determinar si era posible resolver una ecuación de grado mayor que 4 utilizando solamente las operaciones elementales de $\mathbb{C}$ (sumas, restas, productos y divisiones) junto con el cálculo de raíces. En términos modernos, este problema se entiende como el de averiguar si un polinomio general $f(x)$ de grado 5 o superior es resoluble por radicales. A día de hoy, gracias a la Teoría de Grupos finitos, sabemos que la respuesta a este problema es negativa, por medio del *Teorema de Abel-Ruffini*. De modo más general, el *Gran Teorema de Galois* da una condición necesaria y suficiente para saber cuando un polinomio es resoluble en términos de su grupo de Galois.

A raíz del éxito que había tenido la Teoría de Galois para las ecuaciones algebraicas, Sophus Lie (1842-1899) se interesó por estudiar si se podría hacer un análogo de la misma para las ecuaciones diferenciales: emplear la idea de simetría para simplificar y resolver ecuaciones diferenciales. En este caso, las distintas simetrías de una ecuación diferencial ya no tenían por qué formar un grupo finito, como en el contexto anterior, lo que propicia el nacimiento de los homónimos *grupos de Lie*.

Posteriormente, Felix Klein (1849-1925) da un vínculo entre Geometría y Teoría de Grupos en el *Programa de Erlangen* de 1872. En este, afirma que el problema fundamental de la Geometría es el siguiente:

Dado un espacio y un grupo de transformaciones del mismo; desarrollar la teoría de los invariantes relativos al grupo.

No solo es importante el grupo en sí, sino las transformaciones que son representadas por sus elementos. Esta representación viene dada por una aplicación, llamada *acción* del grupo sobre el espacio. Desde luego, a un espacio se le pueden asociar distintos grupos y varias acciones, lo que da una gran versatilidad a esta formulación del problema. Mediante el uso de acciones podremos extraer información tanto del grupo como del espacio.

Merece ser resaltado que la idea de simetría no ha quedado relegada al ámbito matemático, sino que ha permeado otras disciplinas científicas. Un caso de este fenómeno sería el *Teorema de Noether* en Física, que relaciona las simetrías de un sistema físico con las leyes de conservación del mismo. Este teorema implica la conservación de algunas cantidades conocidas en Física clásica. Por ejemplo, las leyes de Newton son invariantes por traslaciones temporales, lo que implica la conservación de la energía de un sistema. De modo similar, la invariancia por traslaciones espaciales implica la conservación del momento lineal, y la invariancia por rotaciones, la conservación del momento angular.

En este trabajo nos proponemos estudiar los grupos de transformaciones de un modo sistemático, adoptando una mentalidad orientada a las acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables, en especial a las acciones propias. Estas últimas generalizan las acciones de grupos compactos, conservando sus propiedades favorables. Por ejemplo, si una acción es propia, las órbita de cualquier punto (es decir, el conjunto de todas las posiciones que este adopta al aplicar todas las posibles transformaciones) es una variedad diferenciable que se puede obtener como un cociente del grupo. Concretamente, se tiene la equivalencia entre espacios:

$$G \cdot p \cong G/G_p \tag{1}$$

En la equivalencia anterior, $G \cdot p$ denota la órbita del punto p, siendo G el grupo que actúa sobre la variedad. Por otro lado, G_p es el subgrupo de G formado por todas las transformaciones que dejan fijo p, conocido como el subgrupo de isotropía de p.

Gran parte del peso de este trabajo está destinado a demostrar resultados fuertes sobre la teoría de acciones propias. Los dos de mayor importancia serán el *Teorema de la Variedad Cociente* y el *Slice Theorem*.

En primer lugar, el *Teorema de la Variedad Cociente* afirma que una acción propia y libre (es decir, una acción que solamente permita que la identidad tenga puntos fijos) de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable hace del espacio de órbitas una variedad diferenciable. Este resultado es de utilidad para construir variedades homogéneas, como pueden ser los espacios proyectivos o las variedades de Grassmann.

Implícitamente, también se comprueba que es posible dar un sistema de coordenadas local alrededor de cualquier punto que refleje las simetrías de la variedad. Más concretamente, si la dimensión del grupo es k, y la de la variedad es m, se puede dar en un entorno de cualquier punto p unas coordenadas locales $(x_1, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_m) = (x, y)$ de manera que dos puntos $(x, y), (x', y')$ pertenecen a la misma órbita si y solamente si $y = y'$. Un ejemplo serían las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$: el grupo $SO(2)$ de todas las posibles rotaciones en el plano actúa sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ haciendo que las órbitas sean circunferencias con centro común $(0,0)$. Por lo tanto, dados dos puntos $(r, \theta), (r', \theta')$ se tendrá que están en la misma órbita precisamente cuando $r = r'$. La existencia de este tipo de sistemas de coordenadas permite reducir la complejidad de algunos problemas a partir del conocimiento de sus simetrías: por ejemplo, si una función $f \colon M \to \mathbb{R}$ permanece invariante ante la acción de G, este resultado nos permite dar sistemas de coordenadas (x, y) de M en los que f solamente depende de y. Esto resulta en una reducción de la dimensión en algunos casos. Una posible instancia de ello se puede encontrar en la mecánica clásica: dada una masa puntual que se desplaza en el plano bajo la acción de la fuerza gravitatoria ejercida por una segunda masa (como podría ser un planeta), la determinación de su trayectoria se basa en resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Dicho sistema sería casi imposible de resolver *a priori*. No obstante, si suponemos que la segunda masa se sitúa en el origen de coordenadas, las leyes de gravitación de Newton permanecen invariantes ante rotaciones de $SO(2)$, de modo que se puede convertir este sistema de ecuaciones en una única ecuación diferencial involucrando únicamente la variable r, hecho que simplifica este problema.

En segundo lugar, el *Slice Theorem* nos permite describir el comportamiento de una acción propia alrededor de un punto p a partir de la acción de un grupo compacto (concretamente, G_p) sobre una subvariedad más pequeña, que conocemos como *slice*. En el caso de las acciones propias e isométricas de grupos de Lie sobre variedades de Riemann, veremos que existen un tipo especial de slices conocidos como *slices normales en p*, para los cuales la acción de G_p sobre ellos es equivalente a una acción ortogonal (es decir, una acción tal que las transformaciones que induce el grupo son isometrías lineales) sobre una bola abierta, lo que nos permite restringir nuestra atención a este tipo de acciones sin perder generalidad en nuestras afirmaciones. Entre las consecuencias de dicho Teorema, destacamos el *Teorema de la Órbita Principal*, que establece que si la variedad es conexa, entonces existen órbitas maximales (con respecto a una relación de orden que definiremos), y la unión de todas ellas es un abierto denso de la variedad. Estas órbitas, llamadas *órbitas principales*, resultan de utilidad en el estudio de acciones isométricas, en el sentido de que si un grupo de Lie actúa propia e isométricamente sobre una variedad de Riemann completa, a partir de una órbita principal y unos campos de vectores conocidos como *campos normales equivariantes*, se pueden determinar las demás órbitas de la acción (como se puede ver en [1, Sección 3.4] o en [3, Sección 2.1.8]).

Este trabajo consta de tres capítulos:

En el primer capítulo, estudiaremos las acciones de grupos desde una perspectiva puramente topológica. Se introducirán formalmente los grupos topológicos y las acciones continuas, para después construir los conceptos básicos relativos a ellas que estudiaremos durante el resto del trabajo (espacios de órbitas, tipos de órbitas y acciones propias). También se verán las propiedades elementales de las acciones continuas.

En el segundo capítulo, se introducen los grupos de Lie y sus acciones sobre las variedades diferenciables. Probaremos además el Teorema de la Variedad Cociente, el cual utilizaremos con el fin de justificar otros resultados como la equivalencia (1). Antes de ello, necesitaremos hacer un breve estudio de los fibrados vectoriales y las álgebras de Lie, que nos proporcionarán herramientas para abordar los Teoremas del capítulo.

En el tercer capítulo, veremos la noción de acciones isométricas sobre una variedad de Riemann. El uso de herramientas propias de Geometría de Riemann nos facilitará probar el Slice Theorem para acciones propias. Una vez demostrado, justificaremos que toda acción propia se puede pensar como una acción isométrica (dándole a la variedad una métrica adecuada), hecho que nos permitirá probar el Teorema de la Órbita Principal.

Capítulo 1

Grupos topológicos de transformaciones

Nuestro punto de partida va a ser estudiar los grupos de transformaciones desde el punto de vista topológico teniendo siempre las variedades en mente. Daremos la definición de grupo topológico, así como la de acción de un grupo sobre un conjunto. Más adelante, construiremos el espacio de órbitas para una acción, definiendo además una noción de equivalencia entre las órbitas. Finalmente, daremos una primera aproximación a las acciones propias, las cuales nos permitirán decir más sobre la topología del espacio de órbitas y de las propias órbitas.

1.1. Preliminares: variedades topológicas

Vamos a repasar algunos conceptos de Topología que vamos a necesitar a lo largo del trabajo. Toda la labor que queremos desempeñar aquí va a estar orientada a las variedades diferenciables, con lo que introducimos algunas definiciones y resultados relativos a variedades topológicas, o espacios similares, a los que acudiremos conforme sea necesario. Como libros introductorios a la Topología General, sugerimos por ejemplo [12] y [13].

Definición 1.1. Sea m un entero no negativo. Una **variedad topológica de dimensión $\boldsymbol{m}$** es un espacio topológico M que es Hausdorff, segundo numerable y localmente euclidiano de dimensión m (entendiendo que M es discreto si $m = 0$). Su dimensión se denota por $\dim M$.

Teorema 1.2 (Lema del Entorno Tubular Generalizado)**.** *Sean X e Y espacios topológicos, y $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ subespacios compactos. Si $W \subseteq X \times Y$ es un abierto que contiene a $A \times B$, entonces existen abiertos $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ de modo que $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$.*

Definición 1.3. Un espacio topológico X se dice **paracompacto** si dado un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, es posible encontrar un refinamiento localmente finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$.

Lema 1.4 ([11, Teorema 1.15] y [12, Teorema 4.77])**.** *Todo espacio topológico X segundo numerable, localmente compacto y Hausdorff es paracompacto. Más precisamente, dado un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X y una base $\mathcal{B}$ de la topología de X, existe un refinamiento localmente finito de $\mathcal{U}$ formado por elementos de $\mathcal{B}$.*

Lema 1.5 ([12, Teorema 4.84])**.** *Sea X un espacio topológico paracompacto y Hausdorff. Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto arbitrario de X, entonces existe un refinamiento localmente finito $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\overline{V_i} \subseteq U_i$ para todo $i \in I$.*

Definición 1.6. Una aplicación continua $f \colon X \to Y$ se dice **propia** si es cerrada y para cada $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y) \subseteq X$ es un conjunto compacto.

Teorema 1.7 ([5, Capítulo 1, §10, Teorema 1 y Proposición 7])**.** *Sean X e Y dos espacios topológicos y $f \colon X \to Y$ una aplicación continua. Si f es propia, entonces para todo $K \subseteq Y$ compacto, su imagen recíproca $f^{-1}(K) \subseteq X$ es compacto. Además, si X e Y son Hausdorff, e Y es localmente compacto, el recíproco también es cierto.*

1.2. Grupos topológicos. Acciones de grupos

Introducimos aquí la definición de grupo topológico, junto con el concepto de acción de un grupo topológico sobre un espacio Hausdorff. Seguiremos la exposición de [6] y [8] para este apartado.

Definición 1.8. Un conjunto G es un **grupo topológico** si es un espacio topológico Hausdorff, dotado de una estructura de grupo (cuyo elemento neutro denotamos por e) de manera que las aplicaciones

$$\begin{aligned} \alpha \colon G \times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto gh \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \beta \colon G &\to G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

son continuas (tomando en $G \times G$ la topología producto). La aplicación α se conoce como **multiplicación**, mientras que se dice que β es la **inversión**.

Notación 1.9. Si G es un grupo topológico, para cada $g \in G$ se definen las aplicaciones

$$\begin{aligned} L_g \colon G &\to G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} R_g \colon G &\to G \\ h &\mapsto hg. \end{aligned}$$

Ambas aplicaciones son continuas, debido a la continuidad de α. También se deduce de la definición de grupo que $L_e = R_e = \mathrm{Id}_G$, así como que $L_g \circ L_{g'} = L_{gg'}$ y $R_g \circ R_{g'} = R_{g'g}$ para cualesquiera $g, g' \in G$. Por lo tanto, L_g y R_g son homeomorfismos, verificando que $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$, $R_g^{-1} = R_{g^{-1}}$. Las aplicaciones L_g y R_g se conocen respectivamente como **traslación por la izquierda** y **traslación por la derecha**.

Ejemplo 1.10. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es un grupo topológico con la suma de vectores. En efecto, es una variedad topológica de dimensión n, y las aplicaciones α y β estarían dadas por $\alpha(x, y) = x + y$, $\beta(x) = -x$ para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ambas aplicaciones son continuas, por ser sus componentes funciones polinómicas.

Ejemplo 1.11 (El grupo lineal general)**.** Denotamos por $GL(n, \mathbb{R})$ al grupo de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes reales. Es decir,

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\colon \det(A) \neq 0\}.$$

Puesto que la aplicación $\det\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es continua, al ser polinómica, se tiene que $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es una variedad topológica de dimensión n^2 por ser un abierto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La multiplicación α es continua: si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son dos matrices de $GL(n, \mathbb{R})$, entonces se tiene que para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, que es una función polinómica en las entradas de A y B.

Probemos que la inversión β es continua. Para cualquier matriz $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$, podemos tener en cuenta que para $i, j \in \{1, ..., n\}$, la entrada (i, j) de A^{-1} es

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} \det(A_{[j,i]}),$$

siendo $A_{[j,i]}$ la submatriz de A obtenida al eliminar la fila j-ésima y la columna i-ésima. Así, la entrada (i, j) de A^{-1} es una función racional en los coeficientes de A, donde el denominador no se anula. Por consiguiente, β es una aplicación continua, y $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo topológico.

Ejemplo 1.12 (Subgrupos cerrados de $GL(n, \mathbb{R})$)**.** Consideremos los siguientes subgrupos de $G = GL(n, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} SL(n, \mathbb{R}) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R})\colon \det(A) = 1\}, \\ O(n) &= \{A \in GL(n, \mathbb{R})\colon A^T A = I_n\}, \\ SO(n) &= SL(n, \mathbb{R}) \cap O(n). \end{aligned}$$

Puesto que el determinante $\det\colon GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y la aplicación $g\colon GL(n, \mathbb{R}) \to S_n$ con valores en el espacio de las matrices simétricas $n \times n$ dada por $g(A) = A^T A$ son aplicaciones continuas, deducimos que $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ y $O(n) = g^{-1}(I_n)$ son subconjuntos cerrados de $GL(n,\mathbb{R})$, lo que implica que $SO(n)$ también es cerrado. Ya que $GL(n,\mathbb{R})$ era un grupo topológico, es claro que los subgrupos $SL(n,\mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$ vuelven a ser grupos topológicos.

De hecho, $O(n)$ es acotado: para cualquier matriz $A \in O(n)$, las columnas de A deben formar una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. En consecuencia, $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = n$, de donde $||A|| = \sqrt{n}$ (donde $||A||$ denota la norma de Frobenius de la matriz A, pensada como vector de $\mathbb{R}^{n^2}$). Así, el Teorema de Heine-Borel nos permite concluir que $O(n)$ es compacto. El mismo argumento nos permite concluir que $SO(n)$ también es un grupo topológico compacto.

Definición 1.13. Sea X un conjunto y G un grupo. Una **acción** de G sobre X es una aplicación $\varphi\colon G \times X \to X$ verificando que

$$\varphi(g_1g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x)), \qquad \varphi(e, x) = x, \tag{1.1}$$

para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$. Usualmente emplearemos la notación $g \cdot x = \varphi(g, x)$, de modo que (1.1) se puede reescribir como

$$(g_1g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x), \qquad e \cdot x = x \tag{1.2}$$

La terna (X, G, φ) recibe el nombre de **grupo de transformaciones**, y se dice que X es un G-**conjunto**. También emplearemos la notación $G \curvearrowright X$ para decir que hay una acción de G sobre X.

En el caso de que G sea un grupo topológico, X sea un espacio Hausdorff y φ sea continua, decimos que (X, G, φ) es un **grupo topológico de transformaciones**.

En las condiciones anteriores podemos definir las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \varphi_g\colon X &\to X \\ y &\mapsto g \cdot y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi^x\colon G &\to X \\ h &\mapsto h \cdot x. \end{aligned}$$

Debido a las identidades (1.1), se deduce que $\varphi_e = \mathrm{Id}_X$, y $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ para todos $g, h \in G$. De esa manera, vemos que cada aplicación φ_g es biyectiva, con inversa $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$. De hecho, si estamos ante un grupo topológico de transformaciones, las aplicaciones anteriormente descritas son continuas, siendo además φ_g un homeomorfismo para todo $g \in G$.

Ejemplo 1.14. Sea G un grupo arbitrario, y $H \leq G$ un subgrupo. Entonces H actúa de modo natural sobre G mediante la aplicación $\varphi\colon H \times G \to G$ dada por $\varphi(h, g) = hg$. En el caso de que G sea un grupo topológico, la terna (G, H, φ) es un grupo topológico de transformaciones, ya que φ no es más que la restricción de la multiplicación a $H \times G$.

Ejemplo 1.15. Sean G y H en las condiciones anteriores. Otra posible acción de H sobre G es $h \cdot g = gh^{-1}$ para todo $h \in H, g \in G$. De nuevo, la acción es continua si G es un grupo topológico.

Ejemplo 1.16. Sea G un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ (por ejemplo, $G = O(n)$ o $G = SO(n)$). La aplicación

$$\begin{aligned} \varphi\colon G \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (A, x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

define una acción continua de G sobre $\mathbb{R}^n$, ya que para cada $i \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $[Ax]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ es una función polinómica en las entradas de A y las de x.

Definición 1.17. Sean (X, G, φ) e (Y, G, ψ) dos grupos de transformaciones. Una aplicación $f\colon X \to Y$ se dice que es ***G*-equivariante** (o simplemente equivariante) si se cumple que $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para todo $x \in X$ y para cualquier $g \in G$.

Se puede probar con facilidad que la composición de aplicaciones equivariantes es equivariante, así como que la inversa de una aplicación equivariante y biyectiva vuelve a ser equivariante.

Definición 1.18. Sea (X, G, φ) un grupo de transformaciones. Para cada $x \in X$, se definen:

(i) La **órbita** de x como:

$$G \cdot x = \{g \cdot x \colon g \in G\} = \varphi^x(G).$$

(ii) El **subgrupo de isotropía** de x como:

$$G_x = \{g \in G \colon g \cdot x = x\} = (\varphi^x)^{-1}(x).$$

Dados $A, A' \subseteq G$, $B \subseteq X$, definimos

$$\begin{aligned} AA' &= \{ab \colon a \in A, b \in A'\} = \alpha(A \times A'), \\ A \cdot B &= \{a \cdot b \colon a \in A, b \in B\} = \varphi(A \times B), \\ A^{-1} &= \{a^{-1} \colon a \in A\} = \beta(A). \end{aligned}$$

En particular, si $G \cdot B = B$ diremos que el conjunto B es G-invariante (o simplemente invariante). Fijémonos en que si B es invariante, la acción $G \curvearrowright X$ se restringe a B.

De la definición de acción, se puede comprobar que dado un grupo de transformaciones (X, G, φ) y $x \in X$ el subgrupo de isotropía G_x es en efecto un subgrupo de G. Además, en el caso de que (X, G, φ) sea un grupo topológico de transformaciones se cumple que G_x es cerrado en G. Si $g \in G$, se verifica que $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$, igualdad que emplearemos a la hora de tratar los tipos de órbitas.

Definición 1.19. Sea (X, G, φ) un grupo de transformaciones. Diremos que φ es:

- **Libre** si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$.
- **Efectiva** si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$ (es decir, si para todo $g \in G$ que cumple $g \cdot x = x$ para cada $x \in X$, se tiene que $g = e$).
- **Transitiva** si para todo $x \in X$, $G \cdot x = X$. En este caso, también se dice que X es un G-**espacio homogéneo**.

1.3. Espacios de órbitas. Tipos de órbitas

Si (X, G, φ) es un grupo topológico de transformaciones, podemos dotar al conjunto de todas las órbitas de una estructura de espacio topológico. Para ello, obtendremos dicho conjunto como un cociente de X bajo cierta relación de equivalencia, lo que nos permitirá darle la topología cociente. En esta sección definiremos dicha relación, y veremos las propiedades básicas de este cociente, conocido como el espacio de órbitas. Además, definiremos los tipos de órbitas para una acción y daremos una relación entre ellos que bajo condiciones favorables nos permitirá dar un orden parcial entre los tipos de órbitas.

Definición 1.20. Sea $G \curvearrowright X$ una acción de un grupo G sobre un conjunto X. Podemos definir una relación $\sim$ en X de la siguiente manera:

$$x \sim y \iff y = g \cdot x \text{ para algún } g \in G.$$

Esta relación es de equivalencia, donde la clase de equivalencia de cada $x \in X$ es precisamente $G \cdot x$. El conjunto cociente de la relación $\sim$ se conoce como el **espacio de órbitas** para la acción y se denota por X/G. Cuando la acción es continua, X/G recibe la topología cociente inducida por la proyección canónica $\pi \colon X \to X/G$.

Proposición 1.21. *Sea (X, G, φ) un grupo topológico de transformaciones. Dado $A \subseteq G$ y $B \subseteq X$, se tiene que:*

(i) Si B es abierto en X, entonces $A \cdot B$ también es abierto en X.

(ii) Si A es compacto y B es cerrado en X, entonces $A \cdot B$ es cerrado en X.

Demostración. En primer lugar, si B es un abierto de X, usando que φ_g es un homeomorfismo para todo $g \in G$, podemos observar lo siguiente:

$$A \cdot B = \{a \cdot b \colon a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a \in A} \{a \cdot b \colon b \in B\} = \bigcup_{a \in A} \varphi_a(B).$$

Por tanto, $A \cdot B$ es abierto en X por ser unión de abiertos de X.

Por otro lado, supongamos que A es compacto y B es cerrado. Observemos que para cualquier conjunto $C \subseteq X$, se tiene que $C \subseteq X \setminus (A \cdot B)$ si y solamente si $A^{-1} \cdot C \subseteq X \setminus B$.

Tomemos un punto $y \in X \setminus (A \cdot B)$, con lo que $A^{-1} \cdot y \subseteq X \setminus B$. En consecuencia, $A^{-1} \times \{y\} \subseteq \varphi^{-1}(X \setminus B)$, que es abierto en $G \times X$. Por lo tanto, ya que $A^{-1} = \beta(A)$ es compacto, por serlo A, e $\{y\}$ es compacto, el Lema del Entorno Tubular Generalizado nos permite encontrar abiertos $U \subseteq G$, $V \subseteq X$ de modo que $A^{-1} \times \{y\} \subseteq U \times V \subseteq \varphi^{-1}(X \setminus B)$. Entonces, $U \cdot V \subseteq X \setminus B$, con lo que $A^{-1} \cdot V \subseteq X \setminus B$. Deducimos entonces que $y \in V \subseteq X \setminus (A \cdot B)$, lo que implica que y es punto interior de $X \setminus (A \cdot B)$. Ya que la elección de y fue arbitraria, concluimos que $A \cdot B$ es cerrado en X. $\square$

Corolario 1.22. *La proyección canónica $\pi\colon X \to X/G$ es una identificación abierta. Si G es compacto, π es también una aplicación cerrada.*

Demostración. Para cualquier $A \subseteq X$, $\pi(A)$ es abierto (respectivamente, cerrado) en X/G si y solo si $\pi^{-1}(\pi(A))$ es abierto (respectivamente, cerrado) en X. Basta tener en cuenta que

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(A)) &= \{x \in X\colon \pi(x) = G \cdot x \in \pi(A)\} = \{x \in X\colon \text{existe } y \in A \text{ con } G \cdot y = G \cdot x\} \\ &= \{x \in X\colon \text{existen } y \in A, g \in G \text{ tales que } x = g \cdot y\} = G \cdot A\end{aligned}$$

y aplicar la Proposición 1.21. $\square$

Ejemplo 1.23 (Cociente por un subgrupo)**.** Sea G un grupo topológico y $H \leq G$ un subgrupo cerrado. Recordamos que el cociente G/H es el espacio

$$G/H = \{gH\colon g \in G\}$$

dotado de la topología de identificación inducida por la proyección canónica $\pi\colon G \to G/H$. Precisamente, G/H es el espacio de órbitas para la acción $H \curvearrowright G$ dada por $h \cdot g = gh^{-1}$, con lo que π es una aplicación abierta. En consecuencia, $\pi \times \pi$ es una identificación abierta (en general, el producto de identificaciones no es una identificación, con lo que es necesario aprovechar que π es abierta), lo que nos permite justificar que G/H es Hausdorff. En efecto, basta comprobar que la diagonal de G/H

$$\Delta = \{(g_1H, g_2H) \in G/H \times G/H\colon g_1H = g_2H\}$$

es cerrada en $G/H \times G/H$, lo que equivale ahora a que $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta)$ sea cerrado en $G \times G$. Definiendo la aplicación continua $\gamma\colon G \times G \to G$ mediante $\gamma(g,h) = g^{-1}h$, se tiene que

$$(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) = \{(g_1, g_2) \in G \times G\colon g_1H = g_2H\} = \{(g_1, g_2) \in G\colon g_1^{-1}g_2 \in H\} = \gamma^{-1}(H)$$

es cerrado en $G \times G$. Así, el cociente G/H es un espacio Hausdorff.

Podemos definir una acción φ de G sobre G/H mediante la ecuación

$$g \cdot xH = gxH, \quad g \in G, \; xH \in G/H.$$

No es difícil comprobar que la acción está bien definida y es continua. Por último, fijémonos en que la acción es transitiva, puesto que cualquier $xH \in G/H$ se puede escribir como $xH = x \cdot eH$. De ese modo, $G/H = G \cdot eH$ es un espacio homogéneo.

Ahora vamos a establecer los tipos de órbitas para la acción, que van a estar ligados a una relación de equivalencia entre las órbitas. Esta relación va a estar completamente vinculada a una relación de equivalencia entre los subgrupos de isotropía de la acción, lo que nos da lugar a una *dualidad* órbitas-isotropías. Comenzaremos trabajando con los subgrupos de un grupo G, para más adelante construir los tipos de órbitas para una acción arbitraria $G \curvearrowright X$.

Definición 1.24. Sea G un grupo cualquiera. Dos subgrupos H y K se dicen **conjugados** si existe un elemento $g \in G$ verificando que $gHg^{-1} = K$. La relación *ser conjugados* es claramente de equivalencia. Para cada subgrupo $H \leq G$, denotamos por (H) a la clase de equivalencia de H bajo esta relación, que se conoce como la **clase de conjugación** de H.

Si $G \curvearrowright X$ es una acción, entonces para cualquier $x \in X$ y $g \in G$, se verifica que $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$, con lo que $(G_{g\cdot x}) = (G_x)$. Por lo tanto, a cada órbita le corresponde una única clase de conjugación entre los subgrupos de isotropía de la acción, conocida como el **tipo de isotropía** de la órbita $G \cdot x$.

Definición 1.25. Sea G un grupo. Definimos la relación $\leq$ entre las clases de conjugación de los subgrupos de G de modo que

$$(H) \leq (K) \iff gHg^{-1} \subseteq K \text{ para algún } g \in G, \quad H, K \leq G.$$

Definición 1.26. Sea $G \curvearrowright X$ una acción de un grupo sobre un conjunto, y $x, y \in X$. Decimos que las órbitas $G \cdot x$ y $G \cdot y$ **tienen el mismo tipo** si existe una aplicación biyectiva y equivariante $f \colon G \cdot x \to G \cdot y$.

Es inmediato que la relación *tener el mismo tipo de órbita* es de equivalencia. Para cada órbita $G \cdot x$, la clase de equivalencia $[G \cdot x]$ se conoce como el **tipo de órbita** de $G \cdot x$.

La siguiente Proposición nos explicita la dualidad entre órbitas e isotropías que habíamos vaticinado.

Proposición 1.27. *Sea (X, G, φ) un grupo de transformaciones. Dos órbitas $G \cdot x$ y $G \cdot y$ tienen el mismo tipo si y solo si $(G_x) = (G_y)$.*

Demostración. Por un lado, si $f\colon G\cdot x\to G\cdot y$ es una biyección equivariante existe un $b\in G$ de modo que $f(x)=b\cdot y$. Así, para cada $g\in G$ se tiene que

$$g\cdot x=x\Leftrightarrow f(g\cdot x)=f(x)\Leftrightarrow g\cdot f(x)=f(x)\Leftrightarrow g\cdot(b\cdot y)=b\cdot y\Leftrightarrow(b^{-1}gb)\cdot y=y.$$

Por consiguiente, $G_x=bG_yb^{-1}$, lo que implica que $(G_x)=(G_y)$.

Por otro lado, si G_x y G_y son conjugados, y $b\in G$ es un elemento tal que $G_x=bG_yb^{-1}$, definimos la aplicación $f\colon G\cdot x\to G\cdot y$ mediante la ecuación $f(g\cdot x)=(gb)\cdot y$ para cada $g\in G$. Esta aplicación está bien definida: dados $g_1,g_2\in G$ tales que $g_1\cdot x=g_2\cdot x$, se verifica que $g_1^{-1}g_2\in G_x$. Por lo tanto, $b^{-1}g_1^{-1}g_2b\in G_y$, y obtenemos que $(b^{-1}g_1^{-1}g_2b)\cdot y=y$, lo que implica que $(g_1b)\cdot y=(g_2b)\cdot y$. También es equivariante: dados $g\in G$, $h\cdot x\in G\cdot x$, observamos que $f(g\cdot(h\cdot x))=f((gh)\cdot x)=(ghb)\cdot x=g\cdot((hb)\cdot x)=g\cdot f(h\cdot x)$.

De modo análogo, ya $G_y=b^{-1}G_xb$ vemos que la aplicación $q\colon G\cdot y\to G\cdot x$ dada por $q(g\cdot y)=(gb^{-1})\cdot x$ está bien definida y es G-equivariante. Esta aplicación es la inversa de f: dado cualquier $g\cdot x\in G\cdot x$ se verifica que $q(f(g\cdot x))=q((gb)\cdot y)=[(gb)b^{-1}]\cdot x=g\cdot x$. Por el mismo razonamiento, llegamos a que $f(q(g\cdot y))=g\cdot y$ para cada $g\in G$, con lo que $q=f^{-1}$ y concluimos que f es una biyección equivariante. □

Definición 1.28. Sea $G\curvearrowright X$ una acción. Definimos la relación $\leq$ entre los tipos de órbitas de la acción de modo que

$$[G\cdot x]\leq[G\cdot y]\iff\text{existe una aplicación equivariante } f\colon G\cdot y\to G\cdot x.$$

Se puede demostrar, con el mismo argumento que se utilizó en la Proposición 1.27, que $[G\cdot x]\leq[G\cdot y]$ si y solo si $(G_y)\leq(G_x)$, de modo que al pasar de órbitas a isotropías, la relación se "invierte".

Por último, aportamos aquí la definición de órbita principal, que tomará un papel central en el último capítulo.

Definición 1.29. Sea $G\curvearrowright X$ una acción continua. Una órbita $G\cdot x$ se dice **principal** si existe un abierto U invariante que contiene a x, cumpliendo que para cada $y\in U$, $[G\cdot y]\leq[G\cdot x]$ (o equivalentemente, $(G_x)\leq(G_y)$).

Observación 1.30. En general, si G es un grupo la relación $\leq$ no tiene por que definir un orden parcial entre las clases de conjugación de sus subgrupos, como se pone de manifiesto en el ejemplo que planteamos a continuación. No obstante, en [8, Sección 1.7] se demuestra que si G es un grupo topológico compacto, entonces la relación $\leq$ sí determina un orden entre dichas clases. Más adelante, veremos que en el contexto diferenciable podemos afirmar que la relación es de orden entre los subgrupos compactos de G, lo que será suficiente para nuestros propósitos.

Ejemplo 1.31. Consideremos los siguientes subgrupos cerrados de $GL(3,\mathbb{R})$.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \text{ es una matriz conforme}, b \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} I_2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}^2 \right\} \leq G$$
$$K = \left\{ \begin{pmatrix} I_2 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b = (m, 2n)^T \text{ para algunos } m, n \in \mathbb{Z} \right\} \leq G$$

donde decimos que A es una matriz conforme si es de la forma $A = \alpha C$, siendo $\alpha \neq 0$ y $C \in SO(2)$ (se puede pensar que una matriz es conforme si la aplicación lineal que determina en $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ es la multiplicación por un número complejo). Por construcción, $K \subseteq H$. Además, si tomamos $g \in G$ tal que

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

un cálculo directo nos indica que $gHg^{-1} \subseteq K$. No obstante, H y K no son conjugados. En efecto, supongamos que existe una matriz $a \in G$ de manera que $aHa^{-1} = K$. Entonces, a va a tomar la forma

$$a = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha C & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se puede comprobar que la inversa de a es

$$a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} C^T & -\frac{1}{\alpha} C^T b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tomemos un elemento arbitrario de H:

$$x = \begin{pmatrix} I_2 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = (d_1, d_2)^T \in \mathbb{Z}^2.$$

Se tiene que

$$axa^{-1} = \begin{pmatrix} I_2 & \alpha C d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K,$$

con lo que para cada $d \in \mathbb{Z}^2$, $\alpha C d$ tiene que ser de la forma $(m, 2n)^T$, siendo m y n números enteros. Si decimos que la matriz αC es

$$\alpha C = \begin{pmatrix} \alpha\cos(\theta) & -\alpha\sin(\theta) \\ \alpha\sin(\theta) & \alpha\cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$

deberá cumplirse que $c_2d_1 + c_1d_2$ es un número par para cualesquiera $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$, lo que implica que c_1 y c_2 son números pares. Por consiguiente, $c_1d_1 - c_2d_2$ es par, independientemente de la elección de d, lo que impide que $K \subseteq aHa^{-1}$. Esto contradice la elección de a, con lo que podemos deducir que en realidad H y K no son subgrupos conjugados de G. En definitiva, la relacion $\leq$ no es antisimétrica en general.

1.4. Acciones propias

En esta sección introducimos las acciones propias. Esencialmente, una acción continua $G \curvearrowright X$ se dice propia cuando, dado un subconjunto *pequeño* (donde por *pequeño* entendemos compacto) C de X, todos los elementos de G, salvo un subconjunto *pequeño* de G, trasladan C lo suficientemente lejos como para que no corte a su posición inicial. Esta condición nos va a dar lugar a propiedades favorables con respecto a las órbitas y al espacio X/G, tales como que este último es Hausdorff.

Comenzamos dando la definición estándar de acción propia. Posteriormente, veremos las propiedades fundamentales de este tipo de acciones.

Definición 1.32. Una acción $G \curvearrowright X$ de un grupo topológico sobre un espacio Hausdorff se dice **propia** si la aplicación $\theta\colon G \times X \to X \times X$ definida por $\theta(g, x) = (g \cdot x, x)$ es propia.

En el caso de que G y X sean variedades topológicas, podemos dar una caracterización de las acciones propias basada en el hecho de que en espacios Hausdorff y segundo numerables, la compacidad equivale a la compacidad secuencial (véase [12, Teorema 4.45]).

Proposición 1.33. *Sea G un grupo topológico segundo numerable actuando sobre una variedad topológica M. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) La acción es propia.

(ii) Para dos sucesiones $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de G y M, respectivamente, si $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(g_i \cdot p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes en M, entonces $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en G.

(iii) Para cualquier compacto $K \subseteq M$, el conjunto $G_K = \{g \in G\colon g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ es compacto.

Demostración. Comencemos viendo que (i) implica (ii): supongamos que la acción $G \curvearrowright M$ es una acción propia. Entonces, la aplicación $\theta\colon G \times M \to M \times M$ es propia. Tomemos dos sucesiones $(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq G$, $(p_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq M$ verificando que $p_i \to p$, $g_i \cdot p_i \to q$ para ciertos puntos $p, q \in M$. En tal caso, $(\theta(g_i, p_i))_{i\in\mathbb{N}} = ((g_i \cdot p_i, p_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente al punto

(q,p), luego $K = \{(g_i \cdot p_i, p_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{(q,p)\}$ es un subconjunto compacto de $M \times M$. Ahora bien, por definición de K, la sucesión $(g_i, p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ está contenida en $\theta^{-1}(K)$, que es también un conjunto compacto al ser θ una aplicación propia. En particular, $\theta^{-1}(K)$ es secuencialmente compacto, con lo que $(g_i, p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admitirá una subsucesión $(g_{i_k}, p_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en $\theta^{-1}(K)$. Así, tendremos que $(g_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente de $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tal y como queríamos demostrar.

Ahora, comprobaremos que (ii) implica (iii). Sea $K \subseteq M$ un subconjunto compacto de la variedad M, tendremos que ver que G_K es un compacto de G. Para ello, estudiaremos si es secuencialmente compacto.

Tomemos una sucesión $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de G_K. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$, como $g_i \cdot K \cap K \neq \emptyset$, es posible encontrar un elemento p_i de K de modo que $p_i, g_i \cdot p_i \in K$. Como K es secuencialmente compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(g_i \cdot p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes a dos puntos de K (que llamaremos p y q, respectivamente). Por tanto, aplicando la propiedad (ii), sabemos que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admitirá una subsucesión convergente en G. Llamemos $(g_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ a dicha subsucesión, y sea g su límite. Solo nos queda ver que $g \in G_K$. Basta observar que, al ser $p, q \in K$:

$$g \cdot p = \lim_{k\to\infty} g_{i_k} \cdot p_{i_k} = q \in g \cdot K \cap K.$$

Por lo tanto, $g \in G_K$. En definitiva, llegamos a que G_K es compacto.

Para terminar, veamos que (iii) implica (i), aplicando la caracterización de aplicaciones propias que nos proporciona el Teorema 1.7. Sea L un subconjunto compacto de $M \times M$, tenemos que verificar que $\theta^{-1}(L)$ es un compacto de $G \times M$. Para ello, definimos $K = \pi_1(L) \cup \pi_2(L)$, siendo $\pi_j \colon M \times M \to M$ la j-ésima proyección para $j = 1, 2$. Por continuidad de las proyecciones, K es un subconjunto compacto de M. Además, observemos que para cada $(g,p) \in \theta^{-1}(L)$, se tiene que $g \cdot p, p \in K$, de modo que $g \in G_K$. Por consiguiente, $\theta^{-1}(L) \subseteq G_K \times K$, que es un compacto de $G \times M$ al ser G_K y K compactos. Finalmente, por la continuidad de θ, se tiene que $\theta^{-1}(L)$ es un cerrado de $G \times M$ contenido en un compacto, lo que nos garantiza que $\theta^{-1}(L)$ es compacto. Llegamos así a que para cualquier compacto $L \subseteq M \times M$, su imagen recíproca $\theta^{-1}(L)$ es un compacto. En consecuencia, tenemos que la aplicación θ es propia, lo que termina la demostración del resultado. □

Corolario 1.34. *En las condiciones anteriores, si G es compacto entonces la acción es propia.*

Demostración. Nos bastará comprobar que se cumple la condición (ii) de la Proposición 1.33. Si $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de elementos de G y M, respectivamente, de modo que $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(g_i \cdot p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son convergentes, por la compacidad (secuencial) de G ya deducimos que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene que admitir subsucesiones convergentes. □

Teorema 1.35. *Sea $\varphi\colon G \curvearrowright X$ una acción continua y propia de un grupo topológico G sobre un espacio Hausdorff X. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) El espacio de órbitas X/G es Hausdorff.

(ii) Para cada $x \in X$, el subgrupo de isotropía G_x es un subconjunto compacto de G.

(iii) Para todo $x \in X$, la órbita $G \cdot x$ es cerrada en X. Además, existe un homeomorfismo G-equivariante $\psi\colon G/G_x \to G \cdot x$.

Demostración. Sea θ la aplicación propia dada por $\theta(g, x) = (g \cdot x, x)$ para todo $(g, x) \in G \times X$. Recordemos que la proyección canónica $\pi\colon X \to X/G$ es una identificación abierta gracias al Corolario 1.22, y por tanto $\pi \times \pi$ también es una identificación abierta. Para ver que X/G es Hausdorff, es necesario y suficiente comprobar si la diagonal Δ de X/G es cerrada en $X/G \times X/G$. Para ello, calcularemos su imagen recíproca por $\pi \times \pi$:

$$\begin{aligned}(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) &= \{(x, y) \in X \times X\colon \pi(x) = \pi(y)\} = \{(x, y) \in X \times X\colon G \cdot x = G \cdot y\} \\ &= \{(x, y) \in X \times X\colon \text{existe } g \in G \text{ tal que } x = g \cdot y\} \\ &= \{(g \cdot y, y) \in X \times X\colon (g, y) \in G \times X\} = \theta(G \times X).\end{aligned}$$

Al ser θ una aplicación propia, es cerrada, con lo que $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) = \theta(G \times X)$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$. Usando que $\pi \times \pi$ es una identificación, llegamos a que Δ es un cerrado de $X/G \times X/G$, lo que nos garantiza que el espacio cociente X/G es Hausdorff. Tenemos así demostrada la propiedad (i).

Probaremos ahora la afirmación (ii). Escogemos un punto $x \in X$ arbitrario. Aplicando que θ es una aplicación propia, tenemos que la fibra $\theta^{-1}(x, x)$ debe ser un subconjunto compacto de $G \times X$. Basta notar que

$$\theta^{-1}(x, x) = \{(g, y) \in G \times X\colon \theta(g, y) = (g \cdot y, y) = (x, x)\} = G_x \times \{x\},$$

con lo que G_x deberá ser compacto, ya que lo es $G_x \times \{x\}$.

Ahora, estudiemos la veracidad de la propiedad (iii). Sea $x \in X$ un punto cualquiera. La aplicación $\varphi^x\colon G \to X$ es cerrada. En efecto, para cualquier cerrado $F \subseteq G$, ya que θ es cerrada, se tiene que $\theta(F \times \{x\}) = F \cdot x \times \{x\}$ es un subconjunto cerrado de $X \times X$, con lo que necesariamente $\varphi^x(F) = F \cdot x$ es cerrado en X. Llegamos así a que $G \cdot x = \varphi^x(G)$ es un conjunto cerrado en X.

Por otro lado, vamos a ver que la aplicación φ^x pasa al cociente como un homeomorfismo $\psi\colon G/G_x \to G \cdot x$. Supongamos dos elementos $g, h \in G$ tales que $gG_x = hG_x$. En ese caso, tenemos que $h = ga$ siendo $a \in G_x$. De ese modo, $\varphi^x(h) = h \cdot x = (ga) \cdot x = g \cdot (a \cdot x) = g \cdot x = \varphi^x(g)$. En consecuencia, existirá una única aplicación $\psi\colon G/G_x \to G \cdot x$ verificando que, si $q\colon G \to G/G_x$ es la proyección canónica, entonces $\varphi^x = \psi \circ q$, y estará dada por $\psi(gG_x) = g \cdot x$ para todo $gG_x \in G/G_x$.

La equivariancia de ψ es inmediata. Basta notar que para cada $g \in G$, $hG_x \in G/G_x$ se tiene que $\psi(g \cdot hG_x) = \psi(ghG_x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot \psi(hG_x)$.

Solo nos queda probar que ψ define un homeomorfismo. Para ello, notemos que es continua, sobreyectiva y cerrada, gracias a que lo es $\varphi^x\colon G \to G \cdot x$. También es inyectiva: si $\psi(gG_x) = \psi(hG_x)$ para dos elementos $g, h \in G$, se tiene que $g \cdot x = h \cdot x$, con lo que $(g^{-1}h) \cdot x = x$. Así, $g^{-1}h \in G_x$, lo que prueba que $gG_x = hG_x$. Llegamos así a que ψ es una aplicación continua, biyectiva y cerrada, lo que nos permite concluir que ψ es, en efecto, un homeomorfismo. □

1.5. Ejemplos de acciones continuas

Ejemplo 1.36. Sean $G = SO(n)$ y $M = \mathbb{S}^n$. El grupo $SO(n)$ actúa sobre $\mathbb{S}^n$ mediante rotaciones de eje e_{n+1}. Es decir, si $\mathbb{S}^n = \{p = (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon ||x||^2 + t^2 = 1\}$, tenemos una acción $SO(n) \curvearrowright \mathbb{S}^n$ dada por

$$A \cdot (x,t) = (Ax, t), \quad A \in SO(n), (x,t) \in \mathbb{S}^n.$$

La compacidad de $SO(n)$ nos permite afirmar que la acción es propia. Además, las órbitas de la acción son las distintas intersecciones de $\mathbb{S}^n$ con los hiperplanos $t = c$, donde $c \in [-1,1]$. En efecto, dados dos puntos $p = (x,t)$, $q = (y,s)$ de $\mathbb{S}^n$, se tiene que $SO(n) \cdot p = SO(n) \cdot q$ si y solo si $t = s$ y $||x|| = ||y||$ (esto es consecuencia de que dados dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$, existe una matriz $A \in SO(n)$ de modo que $w = Av$ si y solo si $||v|| = ||w||$). En realidad cuando $t = s$ se tiene que $||x|| = \sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-s^2} = ||y||$. Por consiguiente, se verifica que $SO(n) \cdot p = SO(n) \cdot q$ exactamente cuando $t = s$. Concretamente, cuando $|t| = 1$ (es decir, cuando $p = \pm e_{n+1}$), tendremos que $SO(n) \cdot p = \{p\}$, mientras que si $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{\pm e_{n+1}\}$, la órbita $SO(n) \cdot p = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\colon ||x||^2 = 1 - t^2\}$ es homeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. La Figura 1.1 muestra las órbitas de la acción en el caso $n = 2$.

Como consecuencia de que $SO(n) \cdot p = \{p\}$ si $p = \pm e_{n+1}$, podemos deducir que $SO(n)_{\pm e_{n+1}} = SO(n)$ es el total. Por otro lado, dada cualquier otra órbita de la forma $t = c$, donde $c \in (-1,1)$, consideramos el punto $p = (x, 0, ..., 0, c)$, siendo $x = \sqrt{1-c^2}$ para que la órbita coincida con $SO(n) \cdot p$. Se tendrá que una matriz $A \in SO(n)$ pertenece a $SO(n)_p$ si y solamente si $A(x, 0, ..., 0) = (x, 0, ..., 0)$. Así, la primera columna de A debe ser e_1, y el hecho de que $A \in SO(n)$ nos permite deducir que

$$SO(n)_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} : B \in SO(n-1) \right\} \cong SO(n-1)$$

Ahora, hallemos el espacio de órbitas $\mathbb{S}^n/SO(n)$: el hecho de que dos puntos $(x,t),(y,s)$ pertenecientes a $\mathbb{S}^n$ estén en la misma órbita si y solo si $t = s$ nos garantiza que la aplicación $f\colon \mathbb{S}^n \to [-1,1]$ dada por $f(x,t) = t$ pasa al cociente como una biyección continua $\tilde{f}\colon \mathbb{S}^n/SO(n) \to [-1,1]$. Puesto que $\mathbb{S}^n/SO(n)$ es compacto, al ser cociente de un espacio compacto, y $[-1,1]$ es Hausdorff, podemos afirmar que $\tilde{f}$ es un homeomorfismo, con lo que $\mathbb{S}^n/SO(n) \cong [-1,1]$.

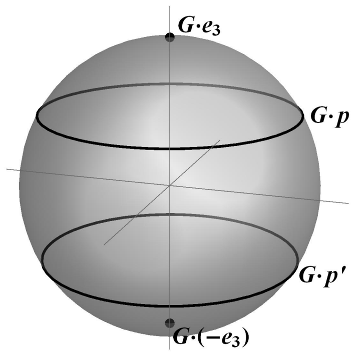

Figura 1.1: Órbitas para la acción $SO(2) \curvearrowright \mathbb{S}^2$. Observamos como las órbitas del polo norte y el polo sur son puntos, mientras que el resto de órbitas son los paralelos de la esfera.

El ejemplo anterior pone de manifiesto lo siguiente: aunque M y G sean variedades topológicas, el espacio de órbitas no tiene por qué ser una variedad. En el próximo capítulo veremos una condición suficiente para poder afirmar que M/G sea una variedad topológica, por medio del *Teorema de la Variedad Cociente*.

Para finalizar, vamos a ver un caso de una acción que no es propia, con el fin de ilustrar las situaciones patológicas que se pueden dar cuando no exigimos el carácter propio.

Ejemplo 1.37 (Flujo irracional del toro)**.** Sean $M = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro pensado como espacio cociente del plano euclidiano y $\alpha \in \mathbb{R}$ un número irracional. Se tiene que la aplicación $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\tilde{\varphi}(t,(x,y)) = (x+t, y+\alpha t)$ es continua y compatible con la relación de equivalencia dada por $\mathbb{Z}^2$. Como consecuencia de este hecho, se tiene que $\tilde{\varphi}$ pasa al cociente como una aplicación continua $\varphi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, definida mediante

$$t\cdot[x,y] = [x+t, y+\alpha t], \quad t \in \mathbb{R}, [x,y] \in \mathbb{T}^2.$$

Es fácil comprobar que esta aplicación verifica (1.2), de modo que define una acción $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{T}^2$. Además, ya que α es irracional, la acción es libre.

Esta acción no es propia. En realidad, sucede que las órbitas de la misma son subconjuntos densos del toro, como vamos a ver a continuación.

Consideremos un punto arbitrario $[\overline{x}, \overline{y}] \in \mathbb{T}^2$. Tenemos que $\mathbb{R} \cdot [\overline{x}, \overline{y}] = \mathbb{R} \cdot [0, y]$, siendo $y = \overline{y} - \alpha\overline{x}$, y es igual a $\{[t, y + \alpha t] : t \in \mathbb{R}\}$. El hecho de que $\mathbb{R} \cdot [0, y]$ es denso en $\mathbb{T}^2$ se basa en que el subgrupo de $\mathbb{R}$ generado por 1 y α es denso en $\mathbb{R}$ (se puede probar, por ejemplo, con el *Teorema de Aproximación de Dirichlet* [11, Lema 4.21]). Dado un punto $[a, b] \in \mathbb{T}^2$, existen dos sucesiones de números enteros $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $n_i + \alpha m_i \to b - \alpha a - y$. En consecuencia, se verifica que

$$\begin{aligned}[a, b] =& [a, b - \alpha a - y + \alpha a + y] = \lim_{i\to\infty} [a, n_i + \alpha m_i + \alpha a + y] = \lim_{i\to\infty} [a, y + \alpha(a + m_i)] \\ =& \lim_{i\to\infty} (a + m_i) \cdot [0, y] \in \overline{\mathbb{R} \cdot [0, y]}.\end{aligned}$$

Como la elección de $[a, b]$ fue arbitraria, deducimos que $\overline{\mathbb{R} \cdot [0, y]} = \mathbb{T}^2$, lo que justifica la densidad de las órbitas (notemos que hay una infinidad de órbitas distintas: dados dos racionales distintos $p, q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, las órbitas $\mathbb{R} \cdot [0, p]$ y $\mathbb{R} \cdot [0, q]$ son disjuntas). En consecuencia, las órbitas no son cerradas, con lo que la acción no es propia. La Figura 1.2 muestra como es una órbita cualquiera de esta acción.

De hecho, la topología de $\mathbb{T}^2/\mathbb{R}$ es trivial a pesar de haber más de una órbita. Dado cualquier cerrado no vacío $F \subseteq \mathbb{T}^2/\mathbb{R}$, tomado un elemento $\pi[a, b] \in F$, siendo $\pi\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2/\mathbb{R}$ la proyección canónica, se tiene que $\mathbb{R} \cdot [a, b] \subseteq \pi^{-1}(F)$. Como F es cerrado, $\pi^{-1}(F)$ también lo es, de modo que $\mathbb{T}^2 = \overline{\mathbb{R} \cdot [a, b]} \subseteq \pi^{-1}(F)$, con lo que $\pi^{-1}(F) = \mathbb{T}^2$. De esa manera, obtenemos que $F = \mathbb{T}^2/\mathbb{R}$, lo que prueba que los únicos posibles cerrados de $\mathbb{T}^2/\mathbb{R}$ son $\emptyset$ y $\mathbb{T}^2/\mathbb{R}$. La topología es entonces trivial y el espacio de órbitas no es Hausdorff.

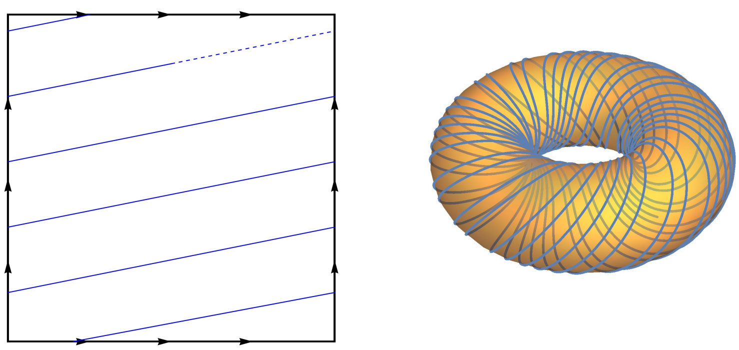

Figura 1.2: Una órbita (azul) de la acción $\mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{T}^2$. Izquierda: tomando el modelo del toro como cociente del cuadrado unidad; derecha: tomando el modelo del toro como superficie de revolución. El hecho de que α sea irracional hace que la órbita dé vueltas alrededor del toro sin autointersecarse nunca, dando lugar a un subconjunto denso de $\mathbb{T}^2$.

Capítulo 2

Grupos diferenciables de transformaciones

El origen de la teoría de los grupos de Lie se sitúa a finales del siglo XIX [4] de la mano de Sophus Lie (que trabajó con lo que actualmente se conoce como *grupos de Lie locales*), motivada por su colaboración con Felix Klein (parte de la cual acabó en el *Programa de Erlangen*) y su observación de que algunos métodos de integración de clases particulares de ecuaciones diferenciales se basaban en el hecho de que existieran grupos uniparamétricos de transformaciones (acciones diferenciables de grupo $\mathbb{R}$) que dejasen la ecuación invariante, de modo que a partir de una solución se podía obtener una familia de soluciones nuevas. También surgieron en este período las *álgebras de Lie*, asociadas a la idea de transformación infinitesimal y que permitían traspasar algunos problemas a un contexto puramente algebraico.

En este capítulo, buscaremos desarrollar la teoría de las acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables. Antes de poder comenzar a trabajar sobre ellas, vamos a necesitar hacer dos paradas: la primera, en el estudio de los fibrados vectoriales; la segunda, para definir los grupos de Lie y explorar algunos conceptos asociados a dichos grupos (tales como las álgebras de Lie o la integral de Haar). Posteriormente, veremos las propiedades de las acciones propias en el contexto diferenciable, demostrando el *Teorema de la Variedad Cociente*, así como que la relación que se definió entre los tipos de órbitas es de orden.

2.1. Preliminares: variedades diferenciables

Comenzamos recordando las nociones básicas de cálculo diferencial en variedades, junto con algunos teoremas que emplearemos constantemente en nuestro estudio de los grupos de Lie y las G-variedades. Para más información sobre variedades diferenciables se puede consultar [11] o [22].

Una **variedad diferenciable de dimensión $\boldsymbol{m}$** es una variedad topológica M de dimensión m dotada de una estructura diferenciable (equivalentemente, de un atlas maximal). Para cada $p \in M$, definimos el **espacio tangente a $\boldsymbol{M}$ en $\boldsymbol{p}$** como el conjunto de todas las derivaciones en p (también conocidos como **vectores tangentes**), y lo denotaremos por $T_p(M)$. El conjunto

$$T(M) = \coprod_{p \in M} T_p(M) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p(M)$$

recibe el nombre de **fibrado tangente a $\boldsymbol{M}$**, y es también una variedad diferenciable, esta vez de dimensión $2m$. Está dotado de una proyección $\pi\colon T(M) \to M$ dada por $\pi(p, v) = p$.

Una aplicación $f\colon M \to N$ entre variedades diferenciables se dice **diferenciable** o **de clase $\boldsymbol{\mathcal{C}^\infty}$** si para cada punto $p \in M$ existe una expresión en coordenadas de f en p que sea una aplicación de clase $\mathcal{C}^\infty$ entre abiertos euclidianos. En tal caso, f induce una aplicación lineal $f_{*p}\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$, conocida como la **diferencial de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{p}$**, cuyo rango se conoce como el **rango de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{p}$**, denotado por $\operatorname{rang}_p(f)$. Si f es biyectiva y su inversa es diferenciable, se dice que f es un **difeomorfismo**. El anillo de todas las funciones diferenciables de M en $\mathbb{R}$ lo denotaremos por $\mathfrak{F}(M)$.

Una aplicación diferenciable $f\colon M \to N$ es una **inmersión** (respectivamente **sumersión** o **difeomorfismo local**) si para cada $p \in M$, la aplicación f_{*p} es inyectiva (respectivamente sobreyectiva o biyectiva). Si $E \subseteq M$ es una variedad diferenciable y la inclusión $i\colon E \hookrightarrow M$ es una inmersión, se dice que E es una **subvariedad inmersa** de M. Si además E es un subespacio topológico de M, entonces E es una **subvariedad regular** de M.

Un **campo de vectores** sobre una variedad diferenciable M es una aplicación $X\colon M \to T(M)$ cumpliendo que $X_p \in T_p(M)$ para todo $p \in M$ (es decir, si $\pi \circ X = \mathrm{Id}_M$). Se dice que el campo de vectores es **diferenciable** si lo es como aplicación entre las variedades M y $T(M)$ (equivalentemente, si induce una derivación $X\colon \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$). El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre M lo denotamos por $\mathfrak{X}(M)$, y es un álgebra de Lie con el **corchete de Lie**, definido mediante la ecuación $[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$.

2.2. Fibrados vectoriales

Los fibrados vectoriales son un tipo especial de variedades que localmente se asemejan al producto topológico de otra variedad diferenciable (llamada *base*) por un espacio vectorial. También podemos pensar un fibrado vectorial como una familia de espacios vectoriales parametrizada de modo diferenciable por la base. Mostraremos aquí las nociones básicas de estos fibrados, con especial interés hacia el fibrado tangente de una variedad. Como referencias para profundizar sobre este tema, sugerimos [21, Capítulos 3,4 y 5] y [7].

Definición 2.1. Un **fibrado vectorial de rango *k*** es una terna (E, π, M), donde M y E son variedades diferenciables, y $\pi\colon E \to M$ es una aplicación diferenciable y sobreyectiva que cumple las siguientes propiedades:

- Para cada $p \in M$, la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.
- Existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de M y difeomorfismos $\varphi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$ que hacen que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "p_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

  sea conmutativo (siendo p_1 la proyección sobre el primer factor).
- Para cada $p \in U_i$, la restricción $\varphi_i\colon E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Se deduce de la definición que $\dim E = k + \dim M$, así como que π es una sumersión sobreyectiva. Normalmente, nos referiremos al fibrado (E, π, M) por $\pi\colon E \to M$, o simplemente E si esto no provoca confusión.

Notación 2.2. Se dice que E es el **espacio total del fibrado**, M es la **base del fibrado**, π es la **proyección**, U_i es un **abierto de trivialidad** y φ_i es una **trivialización local**.

Ejemplo 2.3 (El fibrado tangente)**.** Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. Vamos a comprobar que $(T(M), \pi, M)$ es un fibrado vectorial de rango m, siendo $\pi\colon T(M) \to M$ la proyección. Para probar esta afirmación, recordemos como se obtenían las cartas de $T(M)$ a partir de las de M.

Sea (U, φ) una carta de M, con funciones coordenadas $\varphi = (x^1, ..., x^m)$. Entonces, se puede construir una carta $(\pi^{-1}(U), \tilde{\varphi})$ de $T(M)$ de la siguiente manera: para cada $(p, v) \in T(M)$, sabemos que existen unos únicos números reales $a_1, ..., a_m$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i (\partial_{x^i})_p.$$

Definimos entonces $\tilde{\varphi}\colon \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ mediante la fórmula

$$\tilde{\varphi}(p, v) = (\varphi(p), a_1, ..., a_m).$$

Esta aplicación define un sistema de coordenadas en $\pi^{-1}(U)$, y nos permite ver que U es un abierto de trivialidad de $\pi\colon T(M) \to M$. En efecto, la composición $\psi = (\varphi^{-1} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}) \circ \tilde{\varphi}$ está dada por

$$\begin{aligned} \psi\colon \pi^{-1}(U) &\to U \times \mathbb{R}^m \\ (p, v) &\mapsto (p, a_1, ..., a_m), \end{aligned}$$

que es un difeomorfismo por ser composición de difeomorfismos y está en las condiciones de la Definición 2.1. Como la elección de la carta (U, φ) era arbitraria, podemos deducir que existe un recubrimiento de M formado por abiertos de trivialidad de π. Así, llegamos a que el fibrado tangente es, ciertamente, un fibrado vectorial de rango m.

En general, denotaremos a cada vector $(p, v) \in T(M)$ por v_p, o simplemente v si no hay ambigüedad sobre el punto en el que v es tangente.

Ejemplo 2.4. Mediante un procedimiento análogo al de la construcción del fibrado tangente a una variedad M de dimensión m, se puede construir el espacio

$$T^*(M) \otimes T^*(M) = \coprod_{p \in M} T_p^*(M) \otimes T_p^*(M)$$

donde para cada $p \in M$, $T_p^*(M) \otimes T_p^*(M)$ es el espacio vectorial formado por todas las formas bilineales definidas en $T_p(M)$. Dicho espacio tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión $m+m^2$, y con la proyección canónica $\pi\colon T^*(M) \otimes T^*(M) \to M$ dada por $\pi(g_p) = p$ para cada $g_p \equiv (p, g) \in T^*(M) \otimes T^*(M)$ se obtiene que $(T^*(M) \otimes T^*(M), \pi, M)$ es un fibrado vectorial de rango m^2.

Definición 2.5. Sea $\pi\colon E \to M$ un fibrado vectorial de rango k, y $S \subseteq M$ una subvariedad regular de M. Se define la **restricción de $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{S}$** como la terna $(E|_S, \pi, S)$, donde definimos $E|_S = \pi^{-1}(E) = \bigcup_{p \in S} E_p$, y $\pi\colon E|_S \to S$ es la restricción de $\pi\colon E \to M$ a S. Se puede demostrar que $E|_S$ es un fibrado vectorial con base S y de rango k [11, Ejemplo 10.8].

Definición 2.6. Dado un fibrado vectorial $\pi\colon E \to M$, una **sección de $\boldsymbol{\pi\colon E \to M}$** es una aplicación diferenciable $\sigma\colon M \to E$ de modo que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$.

Si $U \subseteq M$ es un abierto, y $\sigma\colon U \to E$ es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$ que cumple que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$, se dice que σ es una **sección local de $\boldsymbol{\pi\colon E \to M}$**.

El conjunto de secciones de $\pi\colon E \to M$ se denota por $\Gamma(E)$. Tiene una estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial, así como de módulo sobre $\mathfrak{F}(M)$, con las operaciones usuales.

Una sección $\sigma\colon M \to E$ no es nada más que una asignación diferenciable que a cada punto de M le hace corresponder un vector perteneciente a su fibra. Notemos que en el caso de que E sea el fibrado tangente de M, las secciones de $\pi\colon T(M) \to M$ son precisamente los campos de vectores diferenciables.

2.2.1. Subfibrados de un fibrado vectorial

Los subfibrados de un fibrado vectorial constituyen una generalización de las secciones a dimensiones superiores. Mientras que podemos pensar un fibrado vectorial $\pi\colon E \to M$ como una familia de espacios vectoriales parametrizada por M, un subfibrado de E se puede interpretar como una familia de subespacios vectoriales de las fibras de E, también parametrizada por M.

Definición 2.7. Dado un fibrado vectorial $\pi\colon E \to M$, un **subfibrado vectorial de (E, π, M)** es un fibrado vectorial $\pi\colon D \to M$, de modo que $D \subseteq E$ es una subvariedad regular de E y para cada $p \in M$, $D_p = D \cap E_p$ es un subespacio vectorial de E_p. La aplicación $\pi\colon D \to M$ es la restricción de $\pi\colon E \to M$ a D. Si E es el fibrado tangente, se dice que $\pi\colon D \to M$ (o simplemente, D) es una **distribución sobre M**.

El siguiente criterio nos permite determinar cuando la unión de una familia de subespacios $D_p \subseteq E_p$ es un subfibrado de E, en términos de secciones de E:

Teorema 2.8 ([11, Lema 10.32])**.** *Sea $\pi\colon E \to M$ un fibrado vectorial de rango k. Para cada $p \in M$, tomemos un subespacio vectorial D_p de E_p de dimensión n, con $n < k$. Entonces, tomando $D = \bigcup_{p\in M} D_p$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *$\pi\colon D \to M$ es un subfibrado vectorial de $\pi\colon E \to M$.*

(*ii*) *Para cada punto $p \in M$, existen unas secciones locales de E, $\sigma_1, ..., \sigma_n\colon U \to E$, definidas en un entorno U de p, de modo que para cada $q \in M$, $\{\sigma_1(q), ..., \sigma_n(q)\}$ es una base de D_q.*

2.2.2. El Teorema de Frobenius global

Para acabar con este apartado sobre fibrados vectoriales, vamos a enunciar el Teorema de Frobenius global para distribuciones. Al ser las distribuciones una generalización de los campos de vectores, la noción de curva integral de un campo de vectores se extiende al concepto de variedad integral: si D es una distribución sobre una variedad M, una subvariedad $N \subseteq M$ es integral si $T_p(N) = D_p$ para todo punto $p \in N$. Nos podríamos preguntar entonces si dado cualquier $p \in M$ existe una variedad integral que contenga a p. En caso afirmativo, el Teorema que enunciaremos nos da información sobre cómo están "dispuestas" las variedades integrales de dicha distribución.

Definición 2.9. Dada una distribución D sobre una variedad diferenciable M, y $A \subseteq M$ una subvariedad inmersa de M. Se dice que M es una **variedad integral de D** si se verifica que $T_p(A) = D_a$ para todo $a \in A$. Si todo punto de M está contenido en una variedad integral de D, entonces diremos que D es una distribución **integrable**.

Definición 2.10. Una **foliación de dimensión** $\boldsymbol{k}$ de una variedad diferenciable M es una familia $\mathcal{F}$ formada por subvariedades inmersas de M, de dimensión k, conexas, disjuntas, cuya unión es M y que cumplen la siguiente propiedad: para cada $p \in M$ existe una carta (U, φ) de M centrada en p (es decir, tal que $\varphi(p) = 0$) tal que $\varphi(U) = (-\delta, \delta)^m$, y de modo que para cada $A \in \mathcal{F}$, o bien $A \cap U = \emptyset$ o, de ser $A \cap U \neq \emptyset$, entonces $\varphi(A \cap U)$ es la unión finita o numerable de conjuntos de la forma $(-\delta, \delta)^k \times \{c\}$, siendo $c \in (-\delta, \delta)^{m-k}$.

Ejemplo 2.11. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La colección $\mathcal{F} = \{\mathbb{S}^{n-1}(r) \colon r > 0\}$ formada por todas las esferas de radio positivo centradas en el origen conforma una foliación $(n-1)$-dimensional de M.

Ejemplo 2.12. Dada una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $k \in \mathbb{R}$, sea F_k la gráfica de la función $f + k$. La familia $\mathcal{F} = \{F_k \colon k \in \mathbb{R}\}$ es una foliación de dimensión 1 de $\mathbb{R}^2$.

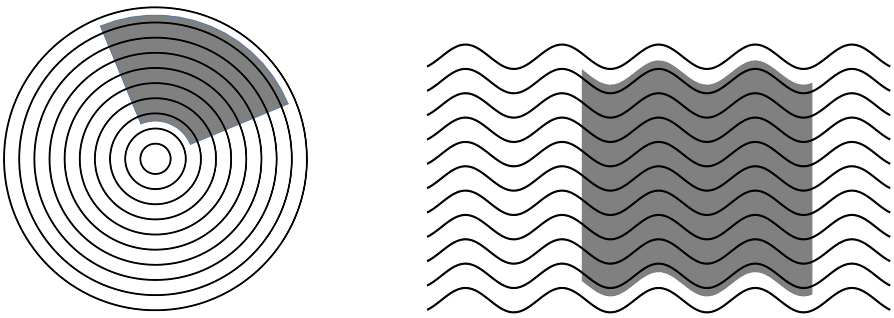

Figura 2.1: Representación de las foliaciones de los Ejemplos 2.11 y 2.12. Las regiones grises representan posibles cartas adaptadas a cada foliación.

Teorema 2.13 (de Frobenius global, [11, Teoremas 19.3, 19.12 y 19.21])**.** *Sea D una distribución integrable de rango k sobre una variedad diferenciable M. La familia $\mathcal{F}$ formada por todas las variedades integrales de D, que son conexas y maximales con respecto de la inclusión, es una foliación k-dimensional de M.*

2.3. Grupos de Lie

Comenzamos con la definición de grupo de Lie, que se puede ver como el análogo diferenciable al grupo topológico. Seguiremos la estructura de [11], aunque otras posibles referencias para esta sección son [20] o [23].

Definición 2.14. Se dice que un conjunto G es un **grupo de Lie** si tiene una estructura de grupo y una estructura de variedad diferenciable de modo que las aplicaciones α y β son diferenciables (tomando en $G \times G$ la estructura de variedad producto).

Observación 2.15. En el caso de los grupos de Lie, tendremos que la diferenciabilidad de α implica que tanto L_g como R_g son difeomorfismos para todo $g \in G$.

Observación 2.16. Si G es un grupo topológico y $H \leq G$ es un subgrupo de G, entonces se tiene de modo inmediato que H es de nuevo un grupo topológico. En el caso de que G sea un grupo de Lie, un subgrupo $H \leq G$ no tiene por que ser un grupo de Lie. Por ejemplo, H podría no ser una variedad diferenciable. Este hecho es el que motiva la siguiente definición:

Definición 2.17. Sea G un grupo de Lie. Se dice que un subconjunto $H \subseteq G$ es un **subgrupo de Lie** de G si $H \leq G$ es un subgrupo de G, con estructura de grupo de Lie y tal que $i\colon H \hookrightarrow G$ es una inmersión.

El siguiente teorema (de difícil demostración) nos da una condición suficiente para determinar cuando un subgrupo de un grupo de Lie G es un subgrupo de Lie de G. Su prueba se puede encontrar por ejemplo en [8, Sección 3.7] y en [11, Teorema 20.12].

Teorema 2.18 (de Cartan)**.** *Si G es un grupo de Lie, y $H \leq G$ es un subgrupo cerrado de G, entonces H es un subgrupo de Lie embebido (es decir, una subvariedad regular) de G.*

Ejemplo 2.19. Todos los grupos topológicos del capítulo anterior son grupos de Lie. El hecho de que $\mathbb{R}^n$ y $GL(n, \mathbb{R})$ sean grupos de Lie se prueba con la misma argumentación que empleamos para justificar que son grupos topológicos. Por otro lado, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ y $SO(n)$ son grupos de Lie por ser subgrupos cerrados de $GL(n, \mathbb{R})$, gracias al Teorema 2.18.

Definición 2.20. Un **homomorfismo de grupos de Lie** es una aplicación diferenciable $f\colon G \to G'$ tal que f es un homomorfismo de grupos. Si f es biyectiva y su inversa $f^{-1}\colon G' \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, se dice que f es un **isomorfismo de grupos de Lie**.

Usando la Regla de la Cadena, es fácil comprobar que un homomorfismo de grupos de Lie tiene rango constante.

2.3.1. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

En esta sección se define el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G. Como ya sabemos, cada $g \in G$ induce una traslación $L_g\colon G \to G$ que es un difeomorfismo. El álgebra de Lie de G es el conjunto de los campos de vectores definidos en G que permanecen invariantes por todas las traslaciones por la izquierda de G.

Definición 2.21. Sea G un grupo de Lie. Un campo de vectores $X\colon G \to T(G)$ es **invariante (por la izquierda)** si para cualquier $g, h \in G$, se verifica la igualdad:

$$(L_g)_{*h}(X_h) = X_{gh}.$$

El conjunto de todos los campos invariantes definidos en G se denota por $\mathfrak{g}$ o $\mathrm{Lie}(G)$ y se conoce como el **álgebra de Lie** de G. Se puede comprobar que $\mathfrak{g}$ tiene una estructura de espacio vectorial con la suma de campos de vectores y el producto por escalares reales. A continuación, veremos que dicho espacio es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(G)$ (es decir, que todo campo de vectores invariante es diferenciable) isomorfo al espacio tangente $T_e(G)$.

Proposición 2.22. *Sea G un grupo de Lie y $v \in T_e(G)$. Entonces existe un único campo de vectores invariante que cumple que $X_e = v$ y es diferenciable.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $X\colon G \to T(G)$ es un campo de vectores invariante de modo que $X_e = v$. Entonces, para cada $g \in G$ se cumple que $X_g = X_{ge} = (L_g)_{*e}(X_e) = (L_g)_{*e}(v)$. Esta igualdad prueba automáticamente la unicidad de X, ya que el último término de la igualdad depende solamente de v. Además, ahora también es inmediata la existencia del campo: basta tomar $X_g = (L_g)_{*e}(v)$ para todo $g \in G$, y hemos encontrado el campo deseado. Queda comprobar que X es un campo invariante y diferenciable. Por un lado para cada $g, h \in G$:

$$X_{gh} = (L_{gh})_{*e}(v) = (L_g \circ L_h)_{*e}(v) = (L_g)_{*h}((L_h)_{*e}(v)) = (L_g)_{*h}(X_h),$$

de modo que el campo es invariante. Por otro lado, el hecho de que la multiplicación sea diferenciable nos permite construir una aplicación:

$$\begin{aligned} \Gamma : G \times T(G) &\to T(G) \\ (g, v_h) &\mapsto (L_g)_{*h}(v_h), \end{aligned}$$

que es diferenciable (esto se puede comprobar tomando coordenadas). En consecuencia, como $X_g = (L_g)_{*e}(v) = \Gamma(g, v)$ para cada $g \in G$, deducimos que X es diferenciable. $\square$

Como consecuencia de esto y de que la aplicación de evaluación en e es lineal, podemos identificar $\mathfrak{g}$ con $T_e(G)$ como espacios vectoriales de dimensión finita.

2.3.2. La integral de Haar en un grupo de Lie compacto

Definimos la integral de Haar para un grupo de Lie compacto siguiendo la argumentación que aparece en [20]. Esta integral nos va a permitir "promediar" los valores de una función continua $f\colon G \to \mathbb{R}$ de un modo que dicho promedio sea invariante por traslaciones.

Teorema 2.23 ([20, Teorema 1.46]). *Sea G un grupo de Lie compacto. Existe un funcional lineal $I\colon \mathcal{C}(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, verificando las siguientes propiedades:*

(i) *I es positivo: si $f\colon G \to \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa, entonces $I(f) \geq 0$.*

(ii) *$I(1) = 1$.*

(iii) *$I(f \circ L_g) = I(f \circ R_g) = I(f)$ para cada $g \in G$.*

*Dicho funcional se conoce como la **integral de Haar**, y se denota por*

$$I(f) = \int_G f(g)dg, \quad f \in \mathcal{C}(G,\mathbb{R}).$$

Cuando G es un grupo de Lie compacto de dimensión m, este funcional se puede construir aprovechando la integración de m-formas continuas. En primer lugar, se construye (de un modo idéntico a como se construyeron los campos de vectores invariantes) una forma de volumen ω definida en G que verifica $(L_g)^*\omega = \omega$ para cada $g \in G$ (se dice que las formas de este estilo son invariantes por la izquierda). Dividiendo ω por $\int_G \omega$, se obtiene una forma de volumen η que vuelve a ser invariante por la izquierda. El funcional I se definiría mediante la fórmula

$$\int_G f(g)dg = \int_G f\eta, \quad f \in \mathcal{C}(G,\mathbb{R}).$$

De todos modos, la existencia de la integral de Haar no se limita a los grupos de Lie compactos. En [19], el Teorema 20 demuestra la existencia y unicidad de la integral de Haar para cualquier grupo topológico compacto y segundo numerable (los grupos de Lie se encuentran dentro de ese contexto), aplicando un procedimiento totalmente diferente al que acabamos de comentar. Se puede encontrar un estudio más pormenorizado de las propiedades de esta integral en [8, Sección 2.7].

2.4. Acciones diferenciables

Comencemos introduciendo la definición de acción diferenciable de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable:

Definición 2.24. Un **grupo diferenciable de transformaciones** es un grupo de transformaciones (M, G, φ) en el cual G es un grupo de Lie, M es una variedad diferenciable y $\varphi\colon G \times M \to M$ es una aplicación $\mathcal{C}^\infty$.

En esta situación, tendremos que para cada $p \in M$ y $g \in G$ las aplicaciones φ^p y φ_g son diferenciables, siendo además φ_g un difeomorfismo de M.

Se puede comprobar, de nuevo empleando la Regla de la Cadena, que se verifica lo siguiente:

Proposición 2.25. *Sea G un grupo de Lie, y $f\colon M \to N$ una aplicación diferenciable y equivariante entre dos G-variedades diferenciables. Entonces el rango de f es constante en las órbitas de la acción $G \curvearrowright M$. En particular, si M es homogénea el rango de f es constante.*

Desde aquí hasta el final de la sección, nos centraremos en probar dos resultados para acciones propias y diferenciables: por un lado, el Teorema de la Variedad Cociente, que afirma que el espacio de órbitas para una acción libre y propia es una variedad diferenciable; por otro lado, que las órbitas de una acción propia son subvariedades regulares de la G-variedad en cuestión (de hecho, probaremos que el homeomorfismo $G/G_p \cong G \cdot p$ pasa a ser un difeomorfismo de variedades).

Lema 2.26. *Sea $f\colon M \to N$ una aplicación diferenciable de rango constante. Si f es inyectiva, entonces f es una inmersión.*

Demostración. Sean $m = \dim M$ y $n = \dim N$. Si f no fuese una inmersión, entonces el rango de f sería $r < m$. En consecuencia, para cualquier $p \in M$, el Teorema del Rango nos garantiza que existen cartas (U, φ), (V, ψ) de M y N respectivamente de manera que $p \in U$, $\varphi(p) = 0$, $f(U) \subseteq V$ y la expresión en coordenadas $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f es de la forma $F(u_1, ..., u_m) = (u_1, ..., u_r, 0, ..., 0)$. Por lo tanto, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, tendríamos que $F(0, ..., 0, \varepsilon) = F(0)$. De ese modo, obtenemos que $f(p) = f(\varphi^{-1}(0, ..., 0, \varepsilon))$, lo que implica que f no sería inyectiva. $\square$

Teorema 2.27. *Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable M. Para cada $p \in M$, la órbita $G \cdot p$ es cerrada en M. Además, si $G_p = \{e\}$ entonces $G \cdot p$ es una subvariedad regular de M difeomorfa a G.*

Demostración. La primera mitad del enunciado es parte del Teorema 1.35. Solamente nos queda comprobar que $G \cdot p$ es una subvariedad regular y que existe un difeomorfismo entre G y $G \cdot p$.

Vimos en el Teorema 1.35 que la aplicación $\varphi^p\colon G \to G \cdot p$ pasa el cociente como un homeomorfismo $\psi\colon G/G_p \to G \cdot p$. De la hipótesis $G_p = \{e\}$ se sigue que en realidad la propia aplicación φ^p es un homeomorfismo. Probaremos que $\varphi^p\colon G \to M$ es un embebimiento regular, lo que nos permitirá justificar que $G \cdot p$ es una subvariedad.

La aplicación φ^p es diferenciable y G-equivariante. Al ser G un G-espacio homogéneo, podemos aplicar la Proposición 2.25 para deducir que φ^p es una aplicación de rango constante. Basta utilizar ahora el Lema 2.26 para deducir que $\varphi^p\colon G \to M$ es una inmersión.

De ese modo, φ^p es un embebimiento regular de G en M, lo que nos permite afirmar que $G \cdot p = \varphi^p(G)$ posee una única estructura de subvariedad regular de M que hace de $\varphi^p \colon G \to G \cdot p$ un difeomorfismo, lo que prueba el Teorema. $\square$

Ahora, estamos en condiciones de probar el teorema central de este capítulo.

Teorema 2.28 (Teorema de la Variedad Cociente)**.** *Sea G un grupo de Lie actuando de modo libre y propio sobre una variedad diferenciable M. Entonces, el espacio cociente M/G es una variedad topológica que admite una única estructura diferenciable de modo que la proyección canónica $\pi \colon M \to M/G$ es una sumersión sobreyectiva. Además, se tiene que* $\dim M/G = \dim M - \dim G$.

Demostración. Sea $k = \dim G$, $m = \dim M$ y $n = m - k$. La acción de G sobre M la escribiremos como $\varphi \colon G \times M \to M$.

Empecemos viendo el carácter Hausdorff y segundo numerable de M/G. Por un lado, el espacio de órbitas es Hausdorff al ser la acción propia. Por otro lado, como la proyección canónica es continua, sobreyectiva y abierta, el hecho de que M sea segundo numerable implica que M/G también lo es.

Nuestro objetivo para ver que M/G es una variedad diferenciable será definir un atlas diferenciable sobre M/G que haga de M/G una variedad cociente de M. Para ello, vamos a buscar una familia de cartas de M que sean compatibles con la acción $G \curvearrowright M$ con las que podremos crear un atlas sobre M/G. Definimos entonces esta noción de compatibilidad entre las cartas y la acción.

Sea (U, ψ) una carta de M. Diremos que (U, ψ) es una carta **adaptada a la acción de $\boldsymbol{G}$** si cumple las siguientes propiedades:

(1) $\psi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ es un cubo de la forma $(-\delta, \delta)^m = (-\delta, \delta)^k \times (-\delta, \delta)^n$, donde $\delta > 0$.

(2) Escribiendo el sistema de coordenadas como $\psi = (x, y) = (x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)$, entonces para cualquier órbita $G \cdot p$ de la acción, o bien $U \cap G \cdot p = \emptyset$ o bien $\psi(U \cap G \cdot p) = (-\delta, \delta)^k \times \{c\}$ para una constante $c \in (-\delta, \delta)^n$.

Informalmente, esto significa que cada órbita o bien corta a nuestro abierto coordenado en un subconjunto k-dimensional de la forma $y = c$, o bien no lo corta. La clave para demostrar este teorema será probar la siguiente afirmación:

Para todo punto $p \in M$, existe una carta adaptada a la acción de G centrada en p.

Observemos que, al ser la acción libre y propia, tenemos en virtud del Teorema 2.27 que todas las órbitas $G \cdot p$ son subvariedades regulares de M difeomorfas a G (y por lo

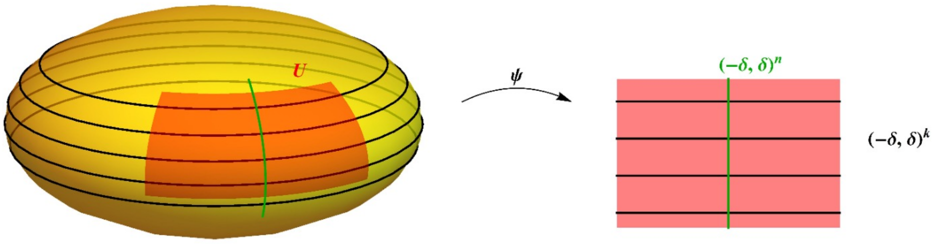

Figura 2.2: Representación de una carta (U, ψ) adaptada a la acción de G.

tanto, tendrán dimensión k). Entonces, podemos definir un subconjunto D de $T(M)$, dado por:

$$D = \bigcup_{p \in M} D_p,$$

siendo $D_p = T_p(G \cdot p)$, $p \in M$. Veremos que D es una distribución de rango k sobre M.

Para cada campo de vectores $X \in \mathfrak{g}$, se puede construir un nuevo campo de vectores $\hat{X} \colon M \to T(M)$ dado por $\hat{X}_p = (\varphi^p)_{*e}(X_e)$, para cada $p \in M$. $\hat{X}$ es un campo de vectores diferenciable, al ser φ una acción diferenciable. Además, como φ^p tiene por imagen $G \cdot p$, se deduce que $\hat{X}_p \in T_p(G \cdot p)$ para todo $p \in M$.

Sean $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{g}$ campos que formen una base de $\mathfrak{g}$. Como ya vimos en el Teorema 2.27, φ^p es una inmersión para cada $p \in M$ al ser la acción libre. Por tanto, $(\varphi^p)_{*e}$ es inyectiva, lo que implica que $\{(\hat{X}_1)_p, ..., (\hat{X}_k)_p\}$ es una base de $T_p(G \cdot p)$ para cada $p \in M$. Así, $(\hat{X}_1, ..., \hat{X}_k)$ es una k-tupla de secciones $\mathcal{C}^\infty$ de $T(M)$ que, al evaluar en cada $p \in M$, nos da una base de $T_p(G \cdot p) = D_p$. Empleando la caracterización del Teorema 2.8 de subfibrados de un fibrado vectorial llegamos a que D es una distribución de rango k sobre M.

Más aún, es claro por construcción que la distribución D es integrable, con lo que el Teorema de Frobenius global 2.13 nos garantiza que la familia $\mathcal{F}$ formada por todas las variedades integrales de D, conexas y maximales con respecto de la inclusión, forman una foliación k-dimensional de M. Fijémonos en que las órbitas de la acción son cerradas, con lo que sus componentes conexas (que también son cerradas) son hojas de la foliación $\mathcal{F}$. Veamos brevemente por qué ese resultado es cierto.

Claramente, si N es una componente conexa de $G \cdot p$, es una subvariedad regular y k-dimensional de M, puesto que es un abierto de $G \cdot p$. Como $T_p(G \cdot p) = T_p(N)$ para cada $p \in N$, esta también es una variedad integral de D. Notemos que es una variedad conexa maximal, pues dada $E \subseteq M$ una variedad integral conexa, de modo que $N \subseteq E$, N es cerrada en E, ya que N es a su vez un subconjunto cerrado de $G \cdot p$ (a su vez cerrado en M), y también es abierta en E, ya que en esas condiciones, N es una subvariedad regular de E con la misma dimensión que E. Así, por ser E conexa, necesariamente $N = E$. Tenemos así asegurado que $N \in \mathcal{F}$.

Ahora, empleando la foliación $\mathcal{F}$, ya estamos en condiciones de probar la existencia de cartas adaptadas. Sea $p \in M$ arbitrariamente fijado. Ya que $\mathcal{F}$ conforma una foliación de M de dimensión k, sabemos que existe una carta (U, ψ) de M centrada en p que satisface las siguientes propiedades:

(a) $\psi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ es el cubo $(-\varepsilon, \varepsilon)^m$, para un $\varepsilon > 0$.

(b) Denotando por $\psi = (x, y) = (x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_n)$, entonces para cualquier hoja de la foliación $N \in \mathcal{F}$ se tiene que $N \cap U = \emptyset$ o $\psi(N \cap U)$ es la unión, a lo sumo numerable, de subconjuntos de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \{c_j\}$, con $c_j \in (-\varepsilon, \varepsilon)^n$.

Ya que toda variedad diferenciable tiene como mucho una cantidad numerable de componentes conexas y la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, es claro que la condición (b) también se va a verificar para cualquier órbita de la acción, al ser sus componentes conexas hojas de $\mathcal{F}$. Como podemos observar, las propiedades de la carta (U, ψ) son muy similares a las propiedades que se piden para las cartas adaptadas a la acción de G. Demostraremos ahora que existe un subconjunto abierto $U_0 \subseteq U$ de modo que (U_0, ψ) es una carta de M adaptada a la acción.

Supongamos, por reducción al absurdo, que no existe el abierto U_0 deseado. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, definimos los siguientes subconjuntos de U:

$$U_i = \psi^{-1}\left(\left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)^m\right), \qquad Y = \psi^{-1}(\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)^n), \qquad Y_i = Y \cap U_i.$$

Por un lado, Y va a ser una subvariedad regular de M de dimensión n gracias a su definición. Por otro lado, sabemos que (U_i, ψ) no puede ser una carta adaptada a la acción, por hipótesis. Eso significa que para cada i, debe haber una órbita de modo que su intersección con U_i contenga, por lo menos, a un conjunto de la forma $\psi^{-1}\big(\big(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\big)^k \times \{c_{i,1}, c_{i,2}\}\big)$, siendo $c_{i,1}, c_{i,2} \in \big(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\big)^n$ distintos. Por tanto, podemos escoger dos puntos de Y_i, $p_i = \psi^{-1}(0, c_{i,1})$ y $\tilde{p}_i = \psi^{-1}(0, c_{i,2})$ que, siendo distintos, pertenecen a la misma órbita. Notemos que, por la naturaleza de su elección, se tiene que $p_i \to p$, y $\tilde{p}_i \to p$.

Tenemos, pues, que $p_i, \tilde{p}_i \in Y_i$ son puntos distintos tales que $G \cdot p_i = G \cdot \tilde{p}_i$. Así, tiene que existir un $g_i \in G$ de modo que $\tilde{p}_i = g_i \cdot p_i$. Ahora bien, las sucesiones $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(\tilde{p}_i)_{i\in\mathbb{N}} = (g_i \cdot p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son convergentes a p, por lo que, como la acción es propia, la Proposición 1.33 nos permite deducir que $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente. Supongamos sin pérdida de generalidad que la sucesión $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $h \in G$. Es fácil comprobar que $h \cdot p = \lim_{i\to\infty} g_i \cdot p_i = \lim_{i\to\infty} \tilde{p}_i = p$, y como la acción es libre, tenemos que $h = e$.

Ahora, denotemos por $\varphi^Y : G \times Y \to M$ a la restricción de φ a la subvariedad $G \times Y$ de $G \times M$. Definimos las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned} i_p : G &\to G \times Y \\ g &\mapsto (g, p) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} j_e : Y &\to G \times Y \\ q &\mapsto (e, q). \end{aligned}$$

Las composiciones de φ^Y con dichas inclusiones nos dan lugar a las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned} \varphi^Y \circ i_p : G &\to M \\ g &\mapsto g \cdot p \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \varphi^Y \circ j_e : Y &\to M \\ q &\mapsto q. \end{aligned}$$

Es decir, $\varphi^Y \circ i_p = \varphi^p$ y $\varphi^Y \circ j_e = l\colon Y \hookrightarrow M$. Usando que $T_p(M) = T_p(G \cdot p) \oplus T_p(Y)$, se deduce que

$$(\varphi^Y)_{*(e,p)}(T_{(e,p)}(G \times Y)) = (\varphi^p)_{*e}(T_e(G)) + T_p(Y) = T_p(G \cdot p) + T_p(Y) = T_p(M),$$

con lo que φ^Y es una sumersión en (e, p), luego un difeomorfismo local en ese punto, al tener su dominio y su rango dimensión m. En particular, en un entorno de (e, p) en $G \times Y$, φ^Y es una aplicación inyectiva. Por lo tanto, como $(g_i, p_i) \in G \times Y$, $(g_i, p_i) \to (e, p)$, entonces para algún i suficientemente grande, observamos que:

$$\varphi^Y(g_i, p_i) = g_i \cdot p_i = \tilde{p}_i = e \cdot \tilde{p}_i = \varphi^Y(e, \tilde{p}_i).$$

y así, necesariamente $g_i = e$, y $p_i = \tilde{p}_i$, lo que entra en contradicción con la elección de p_i y $\tilde{p}_i$ como puntos distintos. Así, hemos llegado a un absurdo, venido de suponer que no existe el abierto U_0 deseado.

Llegamos, en definitiva, a que tiene que haber un abierto $U_0 \subseteq U$, tal que la carta (U_0, ψ) es una carta de M adaptada a la acción de G y centrada en p. Con esto, ya podemos demostrar el resto del teorema.

M/G es localmente euclidiano: Sea $\pi(p) = G \cdot p$ un elemento cualquiera de M/G. Escogemos una carta de M, (U, ψ), que sea centrada en p y adaptada a la acción de G. Tomemos $Y = \psi^{-1}(\{0\} \times (-\delta, \delta)^n)$, y $V = \pi(U)$, que es un entorno abierto de $\pi(p)$. Veamos que la restricción de π a Y, $\pi_Y\colon Y \to V$, es un homeomorfismo, comprobando que es continua, biyectiva y abierta.

- π_Y es inyectiva: dados $q, q' \in Y$ de modo que $\pi_Y(q) = \pi_Y(q')$, se tiene que q y q' están en una órbita común. Así, al ser la carta (U, ψ) adaptada a la acción de G, tenemos que $\psi(q), \psi(q') \in (-\delta, \delta)^k \times \{c\}$ para alguna constante c. Por otro lado, $q, q' \in Y$, con lo que $\psi(q) = (0, c) = \psi(q')$. Por consiguiente, $q = q'$.
- π_Y es sobreyectiva: tomemos $\pi(z) \in V$, de modo que $z \in U$. Entonces, como $\psi(z) = (x(z), y(z))$ y la carta está adaptada a la acción de G, sabemos que $z' = \psi^{-1}(0, y(z)) \in Y$ está en la órbita de z. Por lo tanto, $\pi(z) = \pi(z') = \pi_Y(z')$.

- π_Y es continua: esto es consecuencia de que es la restricción en dominio y rango de la aplicación continua π.
- π_Y es abierta: sea $W \subseteq Y$ un abierto de Y. En tal caso, $\psi(W) = \{0\} \times W'$, siendo $W' \subseteq (-\delta, \delta)^n$ un conjunto abierto. Al estar la carta (U, ψ) adaptada a la acción de G, es fácil comprobar que la saturación de W dentro de U es $O = \psi^{-1}((-\delta, \delta)^k \times W')$, que es un abierto de M. Por lo tanto, $\pi_Y(W) = \pi(W) = \pi(O)$ es un abierto de M/G, y en particular lo es dentro de V.

Así, tenemos que π_Y es un homeomorfismo de Y en V, cuya inversa denotaremos por $\sigma \colon V \to Y$. Combinando σ con ψ y con el homeomorfismo $p_2 \colon \{0\} \times (-\delta, \delta)^n \to (-\delta, \delta)^n$ dado por $p_2(0, y) = y$, obtenemos que $\eta = p_2 \circ \psi \circ \sigma \colon V \to (-\delta, \delta)^n$ es un homeomorfismo del entorno V en un abierto de $\mathbb{R}^n$, dándonos así una carta (V, η) sobre M/G. Como la elección de $\pi(p)$ era arbitraria, deducimos finalmente que M/G es localmente euclidiano de dimensión $n = \dim M - \dim G$.

Tenemos ya probado que el espacio topológico M/G es una variedad topológica de dimensión n. Para completar la demostración, vamos a dotar a M/G de una estructura diferenciable a partir de las cartas de la forma (V, η), y luego probaremos su unicidad.

M/G admite una estructura diferenciable: Sean dos cartas adaptadas a la acción de G, (U, ψ) y $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$, con funciones coordenadas $\psi = (x, y)$, $\tilde{\psi} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, de modo que sus cartas sobre M/G correspondientes (V, η), $(\tilde{V}, \tilde{\eta})$ se cortan. Probaremos que los cambios de cartas $\tilde{\eta} \circ \eta^{-1}$ y $\eta \circ \tilde{\eta}^{-1}$ son aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$.

Primero, vamos a suponer que las cartas adaptadas están centradas en un mismo punto $p \in M$. Para cada $(u, v) = (u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_n) \in \psi(U \cap \tilde{U})$, escribimos el cambio de cartas en M como $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}(u, v) = (A(u, v), B(u, v))$, siendo A y B funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$. La función B no depende de u. En efecto, dados $(u, v), (u', v) \in \psi(U \cap \tilde{U})$, tenemos que $\psi^{-1}(u, v)$ y $\psi^{-1}(u', v)$ están en una misma órbita, al tener la misma segunda componente y ser ambas cartas adaptadas a la acción de G. Por lo tanto, $B(u, v) = \tilde{y}(\psi^{-1}(u, v)) = \tilde{y}(\psi^{-1}(u', v)) = B(u', v)$. Por consiguiente, podemos escribir $B(u, v) = B(v)$ para todo $(u, v) \in \psi(U \cap \tilde{U})$. En ese caso, recuperando las notaciones establecidas en la construcción de (V, η), se tendrá que para cada $v \in \eta(V \cap \tilde{V})$

$$\tilde{\eta} \circ \eta^{-1}(v) = p_2 \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{\sigma}(\pi(\psi^{-1}(0, v))) = p_2(\tilde{\psi}(\psi^{-1}(0, v))) = p_2(A(0, v), B(v)) = B(v)$$

de donde $\tilde{\eta} \circ \eta^{-1}$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^\infty$ en su dominio. Un argumento simétrico nos permite demostrar que $\eta \circ \tilde{\eta}^{-1}$ también es de clase infinito, y así, las cartas (V, η) y $(\tilde{V}, \tilde{\eta})$ son compatibles.

Ahora, veamos que en general las cartas (V, η) y $(\tilde{V}, \tilde{\eta})$ son compatibles: si $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, entonces tiene que haber un punto $p \in U$, y otro punto $\tilde{p} \in \tilde{U}$, de modo que $\pi(p) = \pi(\tilde{p})$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que las cartas están centradas en p y $\tilde{p}$, respectivamente (de no estarlo, compondríamos los sistemas de coordenadas con traslaciones para hacer que estén centradas en dichos puntos). Como $\pi(p) = \pi(\tilde{p})$, tiene que existir un elemento $g \in G$ de manera que $\tilde{p} = g \cdot p = \varphi_g(p)$. Al ser φ_g un difeomorfismo de M, podemos considerar la carta $(\tilde{U}', \tilde{\psi}')$, donde $\tilde{U}' = \varphi_g^{-1}(\tilde{U})$ y $\tilde{\psi}' = \tilde{\psi} \circ \varphi_g$. Esta nueva carta está centrada en p y es adaptada a la acción de G, por construcción, pues φ_g es un difeomorfismo que lleva órbitas en órbitas. Además, si $\tilde{\sigma} \colon \tilde{V} \to \tilde{Y}$ es la sección de π asociada a la carta $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$, entonces la sección $\tilde{\sigma}' \colon \tilde{V} \to \tilde{Y}' = \varphi_g^{-1}(\tilde{Y})$ asociada a $(\tilde{U}', \tilde{\psi}')$ es precisamente $\tilde{\sigma}' = \varphi_g^{-1} \circ \tilde{\sigma}$. En consecuencia, para la carta $(\tilde{V}, \tilde{\eta}')$ construida a partir de $(\tilde{U}', \tilde{\psi}')$, se cumplirá que $\tilde{\eta}' = p_2 \circ \tilde{\psi}' \circ \tilde{\sigma}' = p_2 \circ \tilde{\psi} \circ \varphi_g \circ \varphi_g^{-1} \circ \tilde{\sigma} = p_2 \circ \tilde{\psi} \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\eta}$. Así, aplicando lo visto en el caso anterior a las cartas (U, ψ) y $(\tilde{U}', \tilde{\psi}')$, deducimos que los cambios de cartas $\tilde{\eta}' \circ \eta^{-1} = \tilde{\eta} \circ \eta^{-1}$ y $\eta \circ \tilde{\eta}'^{-1} = \eta \circ \tilde{\eta}^{-1}$ son aplicaciones $\mathcal{C}^\infty$, y así, las cartas (U, ψ) y $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$ son cartas compatibles.

En conclusión, tenemos que la familia $\mathcal{A}$ de todas las cartas de la forma (V, η) obtenidas a partir de las cartas adaptadas a la acción de G conforman un atlas diferenciable de la variedad topológica M/G. Por lo tanto, M/G, con la estructura inducida por el atlas $\mathcal{A}$, es una variedad diferenciable de dimensión n.

π es una sumersión: Para cualquier $p \in M$, tomamos (U, ψ) una carta adaptada a la acción de G que esté centrada en p, y (V, η) la carta de M/G asociada a (U, ψ). Se obtiene entonces una expresión local de π en p, que es:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi"'] & V \arrow[d, "\eta"] \\ (-\delta, \delta)^m \arrow[r, "F"'] & (-\delta, \delta)^n \end{tikzcd}$$

donde $F(u, v) = \eta \circ \pi \circ \psi^{-1}(u, v) = p_2(\psi(\sigma(\pi(\psi^{-1}(u, v))))) = p_2(\psi(\psi^{-1}(0, v))) = p_2(0, v) = v$. Por lo tanto, el rango de π en p es exactamente $n = \dim M/G$. Así, π_{*p} es una aplicación lineal sobreyectiva para todo $p \in M$, lo que implica que π es una sumersión sobreyectiva.

M/G no admite otra estructura diferenciable que haga de π una sumersión sobreyectiva: Supongamos una estructura diferenciable $[\mathcal{B}]_\infty$ sobre M/G que hace que la aplicación π sea una sumersión sobreyectiva. Denotemos por $M/G_{\mathcal{B}}$ a la variedad diferenciable dada por dotar a M/G de la estructura $[\mathcal{B}]_\infty$, y sea $M/G_{\mathcal{A}}$ la variedad diferenciable que construimos anteriormente. Para ver que $M/G_{\mathcal{A}} = M/G_{\mathcal{B}}$, es necesario y suficiente comprobar que la aplicación $\mathrm{Id}_{M/G}$ es un difeomorfismo entre estas variedades.

Se considera el siguiente diagrama de aplicaciones:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ M/G_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\mathrm{Id}_{M/G}"'] & M/G_{\mathcal{B}} \end{tikzcd}$$

Se tiene que $\pi = \mathrm{Id}_{M/G} \circ \pi$ es una aplicación diferenciable, ya que es una sumersión. Por lo tanto, el hecho de que π sea diferenciable como aplicación de M a $M/G_{\mathcal{B}}$, junto con que π es una sumersión sobreyectiva de M en $M/G_{\mathcal{A}}$ nos permite deducir que $\mathrm{Id}_{M/G} \colon M/G_{\mathcal{A}} \to M/G_{\mathcal{B}}$ es una aplicación diferenciable. Por un argumento simétrico, su inversa $\mathrm{Id}_{M/G} \colon M/G_{\mathcal{B}} \to M/G_{\mathcal{A}}$ también es una aplicación diferenciable. Por consiguiente, $\mathrm{Id}_{M/G}$ es un difeomorfismo entre ambas variedades, lo que implica que $M/G_{\mathcal{A}} = M/G_{\mathcal{B}}$, como queríamos demostrar. En definitiva, la estructura $[\mathcal{A}]_\infty$ es la única estructura diferenciable sobre M/G que hace de esta una variedad diferenciable, tal que π sea una sumersión. Concluímos así la demostración del Teorema de la Variedad Cociente. $\square$

Corolario 2.29. *Sea G un grupo de Lie y $H \leq G$ un subgrupo cerrado. Entonces el cociente G/H admite una única estructura de variedad diferenciable que hace que la proyección canónica $\pi \colon G \to G/H$ sea una sumersión sobreyectiva. Además, $\dim G/H = \dim G - \dim H$.*

Demostración. Recordemos que G/H se podía obtener como el espacio de órbitas de la acción $H \curvearrowright G$ dada por $h \cdot g = gh^{-1}$. Esta acción es claramente libre, ya que si $g \in G$ y $h \in H$ son tales que $h \cdot g = gh^{-1} = g$, entonces $h = e^{-1} = e$. También es propia: dadas dos sucesiones $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de G y H respectivamente, si $g_i \to g$ y $h_i \cdot g_i = g_i h_i^{-1} \to k$, entonces se verifica que $h_i = (g_i^{-1} g_i h_i^{-1})^{-1} \to (g^{-1}k)^{-1} = k^{-1}g$. Por lo tanto, la sucesión $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente (luego una subsucesión convergente de ella misma), lo que prueba que la acción es propia. El resultado se deduce ahora del Teorema 2.28. $\square$

En estas condiciones, $(G/H, G, \varphi)$ es un grupo diferenciable de transformaciones, ya que la acción φ del Ejemplo 1.23 es diferenciable. Así, G/H es una G-variedad homogénea. Sabiendo esto, podemos completar el Teorema 2.27 demostrando que todas las órbitas de una acción propia son subvariedades regulares.

Teorema 2.30. *Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M. Para cada $p \in M$, la órbita $G \cdot p$ es una subvariedad regular cerrada de M difeomorfa a G/G_p.*

Demostración. Sabemos, en virtud del Teorema 1.35 que la aplicación $\varphi^p \colon G \to G\cdot p$ induce un homeomorfismo G-equivariante $\psi \colon G/G_p \to G \cdot p$, lo que significa que $\psi \colon G/G_p \to M$

es un embebimiento. Por otra parte, el hecho de que φ^p sea diferenciable, junto con que $\pi\colon G \to G/G_p$ es una sumersión sobreyectiva nos permite deducir que $\psi\colon G/G_p \to M$ es de nuevo diferenciable. Aplicando el carácter equivariante de ψ, obtenemos gracias a la Proposición 2.25 que ψ tiene rango constante, de modo que ψ tendrá que ser una inmersión por el Lema 2.26, lo que justifica que es un embebimiento regular de G/G_p en M.

Ahora que sabemos que ψ es un embebimiento regular, podemos afirmar que la órbita $G \cdot p = \psi(G/G_p)$ admite una única estructura de subvariedad regular de M que hace de ψ un difeomorfismo, lo que termina la prueba del Teorema. $\square$

2.5. Dos ejemplos de variedades homogéneas

Como aplicación de los resultados anteriores, vamos a presentar dos espacios homogéneos. El adjetivo *homogéneo* hace alusión a la propiedad fundamental de estos espacios: la transitividad de la acción implica que estos espacios "siempre tienen la misma apariencia independientemente de por donde se están observando". Esta familia de espacios es de gran importancia en Geometría, llegando hasta tal punto que una *geometría de Klein* es un espacio homogéneo, donde el grupo que actúa sobre él se considera su grupo de simetrías.

Ejemplo 2.31 (Variedades de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$)**.** Sean n un entero positivo y $1 \leq k \leq n$. Una referencia ortonormal de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ es una k-tupla de vectores $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_k)$ de $\mathbb{R}^n$ verificando que $\{v_1, ..., v_k\}$ es un subconjunto ortonormal de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de todas las referencias ortonormales de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ lo denotaremos por $V_k(\mathbb{R}^n)$. En este ejemplo, obtendremos $V_k(\mathbb{R}^n)$ como órbita de una acción propia.

Fijémonos, en primer lugar, en que $V_k(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto de $(\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^{nk}$. Podemos dar una acción propia $O(n) \curvearrowright \mathbb{R}^{nk}$ mediante la siguiente fórmula:

$$A \cdot \boldsymbol{v} = A \cdot (v_1, ..., v_k) = (Av_1, ..., Av_k), \quad A \in O(n), \;\; \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{nk}.$$

El carácter propio es consecuencia directa de que $O(n)$ es compacto. Además, para $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e} = (e_1, ..., e_k)$, donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se puede comprobar fácilmente que $O(n) \cdot \boldsymbol{e} = V_k(\mathbb{R}^n)$, lo que nos garantiza que es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^{nk}$ difeomorfa a $O(n)/O(n)_{\boldsymbol{e}}$. Hallemos entonces la isotropía de $\boldsymbol{e}$.

Dada cualquier matriz $A \in O(n)$, tenemos que $A \in O(n)_{\boldsymbol{e}}$ si y solo si $Ae_i = e_i$ para todo $i = 1, ..., k$. Como A es ortogonal, esta condición es equivalente a que

$$A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

siendo $B \in O(n-k)$. De ese modo, $O(n)_{\boldsymbol{e}} \cong O(n-k)$. Llegamos así a que tenemos el siguiente difeomorfismo de $O(n)$-espacios homogéneos:

$$V_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(n-k).$$

Ejemplo 2.32 (Variedades de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$)**.** Sea n un entero positivo, y $k \in \{1, ..., n-1\}$. Denotamos por $G_k(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todos los subespacios k-dimensionales de $\mathbb{R}^n$. Vamos a dotar a este conjunto de una estructura de variedad diferenciable por medio del Teorema de la Variedad Cociente.

Consideremos el grupo compacto $G = O(n)$. Se puede definir una acción de $O(n)$ sobre $G_k(\mathbb{R}^n)$ mediante la fórmula

$$A \cdot U = AU = \{Ax \colon x \in U\}, \quad A \in O(n),\ U \in G_k(\mathbb{R}^n).$$

Es decir, dada una matriz $A \in O(n)$ y un subespacio k-dimensional $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \cdot U$ es el subespacio obtenido al aplicarle el isomorfismo lineal A a U. Esta fórmula verifica claramente (1.2), dando así lugar a un grupo de transformaciones $(G_k(\mathbb{R}^n), O(n), \varphi)$. Además, como consecuencia del *Proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt* se sigue que esta acción es transitiva. En particular, si $V_0 = \mathrm{Span}\{e_1, ..., e_k\}$, siendo $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, obtenemos que $O(n) \cdot V_0 = G_k(\mathbb{R}^n)$, de modo que tendremos una biyección de $O(n)/O(n)_{V_0}$ en $G_k(\mathbb{R}^n)$. Identifiquemos entonces el subgrupo de isotropía $O(n)_{V_0}$:

Dada una matriz $A \in O(n)$, se verifica que $A \cdot V_0 = V_0$ si y solamente si es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

donde $B \in O(k)$ y $C \in O(n-k)$. Por lo tanto, $O(n)_{V_0} \cong O(k) \times O(n-k)$ y es cerrado en $O(n)$. En consecuencia, tenemos que existe una biyección

$$\psi \colon O(n)/[O(k) \times O(n-k)] \to G_k(\mathbb{R}^n),$$

donde gracias al Teorema de la Variedad Cociente 2.28, podemos afirmar que el dominio de ψ es una variedad diferenciable. Esto nos permite darle a $G_k(\mathbb{R}^n)$ una estructura de variedad diferenciable que hace de ψ un difeomorfismo. Cuando tomamos $k = 1$, el espacio resultante es precisamente el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^{n-1}$.

2.6. Tipos de órbitas

Dada una acción $G \curvearrowright X$, habíamos definido una relación binaria $\leq$ entre los tipos de órbitas de dicha acción, la cual estaba vinculada a una relación entre las clases de conjugación de los subgrupos de isotropía. El Ejemplo 1.31 ilustraba que en general, dicha relación no era de orden. No obstante, cuando tenemos una acción propia $G \curvearrowright M$, recordemos que los grupos de isotropía son compactos. Vamos a ver entonces que la relación $\leq$ restringida a clases de subgrupos compactos sí es de orden, con lo que tendremos definido un orden parcial entre los tipos de órbitas. Necesitamos dos Lemas para poder demostrarlo:

Lema 2.33. *Sea $f\colon M \to N$ una inmersión entre dos variedades diferenciables de la misma dimensión. Si M es compacta y N es conexa, entonces f es sobreyectiva.*

Demostración. Por ser f una inmersión y $\dim M = \dim N$, tenemos que f es a su vez una sumersión, lo que implica que f es una aplicación abierta. En consecuencia, $f(M) \subseteq N$ es un abierto de N. También se cumple que $f(M)$ es cerrado, ya que M es compacto y f es continua, lo que implica que $f(M)$ es compacto. Aplicando que N es conexa, deducimos que $f(M) = N$, con lo que f es sobreyectiva. $\square$

Lema 2.34. *Sean G un grupo de Lie y $H \leq G$ un subgrupo compacto de G. Para cualquier $g \in G$, se verifica que:*

$$gHg^{-1} \subseteq H \implies gHg^{-1} = H.$$

Demostración. Al ser H un subgrupo compacto de G, deducimos que H es un subgrupo de Lie de G, en virtud del Teorema 2.18. Además, H admite una descomposición en una cantidad finita de componentes conexas $\{H_1, ..., H_n\}$, que son a su vez subvariedades regulares de G, puesto que son abiertas en H. Más aún, al ser cada H_i abierto en H, tenemos que $\dim H_i = \dim H$ para cada $i = 1, ..., n$.

Sea entonces $g \in G$ un elemento tal que $gHg^{-1} \subseteq H$. La aplicación de conjugación $C_g\colon G \to G$ dada por $C_g(x) = gxg^{-1}$ para cada $x \in G$ es un difeomorfismo del grupo de Lie G. Vamos a ver que para cada $i \in \{1, ..., n\}$ existe un único $\sigma(i) \in \{1, ..., n\}$ de tal manera que $C_g(H_i) = H_{\sigma(i)}$.

Fijemos $i \in \{1, ..., n\}$. Tenemos que, por hipótesis, $C_g(H_i) \subseteq C_g(H) \subseteq H$. Además, $C_g(H_i)$ es un conjunto conexo debido a la continuidad de C_g. Por lo tanto, $C_g(H_i)$ debe estar contenido en alguna componente conexa de H; es decir, existe una única componente $H_{\sigma(i)}$ de manera que $C_g(H_i) \subseteq H_{\sigma(i)}$, y $C_g\colon H_i \to H_{\sigma(i)}$ es una inmersión ya que C_g era un difeomorfismo. Ahora, recordando que las subvariedades H_i y $H_{\sigma(i)}$ son conexas y compactas (al ser cerradas en el compacto H), con dimensión igual a $\dim H$, podemos deducir aplicando el Lema 2.33 que $C_g(H_i) = H_{\sigma(i)}$, como queríamos demostrar.

Fijémonos ahora en que la aplicación $\sigma\colon \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ es inyectiva, puesto que la conjugación es una aplicación inyectiva y las componentes conexas de H son disjuntas. Como tenemos solamente una cantidad finita de componentes conexas, deducimos que σ

es biyectiva. De ese modo:

$$gHg^{-1} = C_g(H) = C_g\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} C_g(H_i) = \bigcup_{i=1}^{n} H_{\sigma(i)} = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = H,$$

con lo que tenemos probada la afirmación del enunciado. □

Teorema 2.35. *Si G es un grupo de Lie, la relación $\leq$ entre clases de conjugación de subgrupos compactos de G es una relación de orden parcial.*

Demostración. Tenemos que ver que la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Para cada $H \leq G$, $eHe^{-1} = H$, con lo que $(H) \leq (H)$. Así, la relación es reflexiva.

Si $(H) \leq (K)$, y $(K) \leq (L)$, existen $g, g' \in G$ de modo que $gHg^{-1} \subseteq K$ y $g'K(g')^{-1} \subseteq L$. Por lo tanto, $(g'g)H(g'g)^{-1} = g'(gHg^{-1})(g')^{-1} \subseteq g'K(g')^{-1} \subseteq L$, de donde $(H) \leq (L)$. De esa manera, la relación es transitiva.

Finalmente, supongamos que $(H) \leq (K)$ y $(K) \leq (H)$. Entonces, existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1Hg_1^{-1} \subseteq K$ y $g_2Kg_2^{-1} \subseteq H$. Por consiguiente, $g_2g_1Hg_1^{-1}g_2^{-1} \subseteq g_2Kg_2^{-1} \subseteq H$, y aplicando el Lema 2.34, tendremos que $g_2g_1Hg_1^{-1}g_2^{-1} = H$, de donde $K = g_1Hg_1^{-1} = g_2^{-1}Hg_2$. Llegamos entonces a que $(H) = (K)$, y deducimos que la relación es antisimétrica.

Al cumplir $\leq$ las tres propiedades anteriores, hemos demostrado que es en efecto una relación de orden entre las clases de conjugación de G. □

Para acciones propias de un grupo de Lie G sobre una variedad M, vamos a definir dos nuevas clases de órbitas, sabiendo que son subvariedades regulares de M

Definición 2.36. Sea $G \curvearrowright M$ una acción diferenciable y propia. Decimos que $p \in M$ es un **punto regular** si $G \cdot p$ es una órbita principal. En caso contrario, diremos que p es un **punto singular**. Denotaremos a los conjuntos formados por los puntos regulares y singulares de M por M_R y M_S, respectivamente. De modo equivalente, M_R es la unión de todas las órbitas principales para la acción, mientras que M_S es la unión de todas las órbitas no principales. Una órbita $G \cdot p$ es **singular** si tiene dimensión inferior a una órbita principal. Por otra parte, si $G \cdot p$ tiene la misma dimensión que una órbita principal, pero ella misma no lo es, se dice que es una órbita **excepcional**.

Nos podríamos preguntar, ahora que sabemos que $\leq$ es una relación de orden entre tipos de órbitas, si existe un tipo de órbita máximo. Es decir, querríamos saber cuáles son las órbitas más "grandes". El *Teorema de la Órbita Principal* nos da una respuesta a esta pregunta empleando los slices para una acción propia. Veremos en el siguiente Capítulo qué es un slice, y probaremos su existencia. Este resultado se conoce como el *Slice Theorem*, demostrado por Montgomery y Yang en 1957 para el caso de grupos compactos [15], y por Richard S. Palais en 1961 para cualquier acción propia [17].

Capítulo 3

Acciones isométricas

La *Geometría de Riemann* permite extender la Teoría de Superficies en $\mathbb{R}^3$ a objetos de dimensiones superiores que no tienen por qué estar contenidos dentro de un espacio euclidiano. Pasamos de las superficies a las *variedades de Riemann*, variedades diferenciables que están dotadas de lo que conocemos como una métrica de Riemann (un análogo a la primera forma fundamental de una superficie). En parte, esta nació motivada por la teoría de geometrías no euclidianas, siendo sus primeros impulsores Karl Gauss (1777-1855) y Bernhard Riemann (1826-1866), quien fue el primero en introducir estas variedades (véase [2]). A día de hoy, juegan un papel importante en Matemáticas y en Física.

En este capítulo utilizaremos las variedades de Riemann como una herramienta más que nos permita ampliar nuestros conocimientos de acciones propias. Comenzaremos introduciendo formalmente las variedades de Riemann, con nuestra atención dirigida a las isometrías y a la aplicación exponencial de las mismas (seguiremos la exposición de [10] y [16]). Hecho esto, veremos como es posible usar los rudimentos de esta disciplina para probar el *Slice Theorem*, resultado que nos permite estudiar localmente las acciones propias a partir de las acciones ortogonales de un grupo de Lie compacto sobre un espacio euclídeo. Finalmente, demostraremos por medio del *Slice Theorem* el *Teorema de la Órbita Principal*, que sitúa a las órbitas principales de una acción propia sobre una variedad conexa como los elementos máximos de la relación $\leq$, afirmando también que su unión es un abierto denso de la variedad.

3.1. Variedades de Riemann

Empezamos estableciendo la definición de variedad de Riemann, así como la de isometría de variedades de Riemann.

Definición 3.1. Sea M una variedad diferenciable. Una **métrica de Riemann** sobre M

es una sección g del fibrado vectorial $T^*(M) \otimes T^*(M)$ de modo que para cada $p \in M$, $g_p\colon T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$ es un producto escalar en $T_p(M)$. Una **variedad de Riemann** es un par (M, g), donde M es una variedad diferenciable y g es una métrica de Riemann sobre M. Por simplicidad, denotaremos por M a la variedad de Riemann, en vez de (M, g).

En general, nos referiremos a la métrica de Riemann g con el símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Además, escribiremos normalmente $\langle v, w \rangle = \langle v, w \rangle_p$ para $v, w \in T_p(M)$.

Si E es una subvariedad regular de M, entonces para cada $p \in E$, tenemos que $T_p(M) = T_p(E) \oplus (T_p(E))^\perp$. Denotaremos por $\nu_p(E)$ al complemento ortogonal de $T_p(E)$ en $T_p(M)$.

Definición 3.2. Sea $f\colon M \to N$ una inmersión entre variedades diferenciables. Si N es una variedad de Riemann con métrica g, se define el **pullback de g** como la aplicación $f^*g\colon M \to T^*(M) \otimes T^*(M)$ definida por $(f^*g)_p(v, w) = g_{f(p)}(f_{*p}(v), f_{*p}(w))$ para todo $p \in M$, $v, w \in T_p(M)$. Es sencillo probar que f^*g define una métrica de Riemann sobre M.

Definición 3.3. Sean (M, g) y (N, h) variedades de Riemann. Una **isometría** entre M y N es un difeomorfismo $f\colon M \to N$ que verifica que $g = f^*h$. En particular, f cumple que $\langle f_{*p}(v), f_{*p}(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para cualquier $p \in M$, $v, w \in T_p(M)$. Se dice que M y N son **isométricas** si existe una isometría entre M y N.

Ejemplo 3.4. Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión m. Tomada una base ortonormal $\{u_1, ..., u_m\}$, se considera el isomorfismo lineal $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^m$ que lleva cada u_i en e_i. Entonces, la aplicación $\varphi = (x^1, ..., x^m)$ induce un sistema de coordenadas en todo V y es una isometría lineal. Podemos definir entonces $g = (dx^1)^2 + ... + (dx^m)^2$, y tenemos que g es una métrica de Riemann en la variedad diferenciable V. Con esta métrica, se tiene que toda isometría lineal $f\colon V \to V$ es una isometría de la variedad de Riemann V.

Ahora nos centraremos en definir la conexión de Levi-Civita en variedades de Riemann. En general, una conexión generaliza la noción de derivada direccional para los campos de vectores.

Definición 3.5. Sea $\pi\colon E \to M$ un fibrado vectorial. Una **conexión en E** es una aplicación $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$,
- $\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2$,
- $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

para cualesquiera $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y, Y_1, Y_2 \in \Gamma(E)$, $f, f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(M)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Si $E = T(M)$, diremos simplemente que ∇ es una **conexión afín en M**.

Usando particiones de la unidad se puede demostrar que cualquier variedad diferenciable admite una conexión afín (véase [10, Proposición 4.12]), pero no tiene por qué ser única. Para variedades de Riemann exigiremos dos condiciones adicionales. La primera de estas refleja la compatibilidad de la conexión con la métrica de Riemann. Estas dos condiciones nos caracterizan una única conexión sobre la variedad, conocida como la *conexión de Levi-Civita*.

Teorema 3.6 (Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann, [10, Teorema 5.10], [16, Página 61])**.** *Sea (M, g) una variedad de Riemann. Existe una única conexión ∇ en $T(M)$, llamada* ***conexión de Levi-Civita*** *que verifica las identidades $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ y $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

3.1.1. Derivada covariante y geodésicas

A partir de la conexión de Levi-Civita es posible derivar campos de vectores que están únicamente definidos a lo largo de una curva $\alpha\colon I \subseteq \mathbb{R} \to M$ (en particular, su velocidad α'). Esto nos permitirá entender la aceleración de la curva α como el resultado de aplicar dicha derivada a α'. Las geodésicas de una variedad de Riemann serán precisamente las curvas cuya aceleración sea nula.

Definición 3.7. Sea M una variedad diferenciable y $\alpha\colon I \subseteq \mathbb{R} \to M$ una curva $\mathcal{C}^\infty$. Un **campo de vectores tangente a M a lo largo de α** es una aplicación diferenciable $V\colon I \to T(M)$ cumpliendo que $V(t) \in T_{\alpha(t)}(M)$ para cada $t \in I$.

Denotamos por $\mathfrak{X}(\alpha)$ al conjunto de todos los campos tangentes a M a lo largo de α. Es sencillo comprobar que $\mathfrak{X}(\alpha)$ tiene una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, así como de $\mathfrak{F}(I)$-módulo.

Teorema 3.8 ([10, Teorema 4.24], [16, Página 65])**.** *Sea M una variedad de Riemann y $\alpha\colon I \to M$ una curva diferenciable definida sobre un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Existe una única aplicación $\mathbb{R}$-lineal $D_t\colon \mathfrak{X}(\alpha) \to \mathfrak{X}(\alpha)$, llamada* ***derivada covariante a lo largo de α****, que cumple las siguientes propiedades:*

(*i*) *$D_t(fW) = f'W + fD_tW$ para todo $W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$ diferenciable.*

(*ii*) *Si V admite una extensión a un campo $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(M)$, entonces para todo $t \in I$ se cumple $D_tV(t) = (\nabla_{\alpha'(t)}\tilde{V})_{\alpha(t)}$.*

Definición 3.9. Sea M una variedad de Riemann y $\alpha\colon I \to M$ una curva diferenciable. Se dice que un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es **paralelo a lo largo de α** si $D_tV = 0$. En el caso de que $V = \alpha'$ sea paralelo, diremos que α es una **geodésica** de M.

Cuando se toman sistemas de coordenadas locales, se puede comprobar que los campos paralelos y las geodésicas están caracterizados por una ecuación diferencial ordinaria involucrando los *símbolos de Christoffel* de la métrica. Imponiendo condiciones iniciales a dicha ecuación, se llega al siguiente Teorema, que resulta de aplicar el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales dadas:

Teorema 3.10 ([10, Teorema 4.27 y Corolario 4.28])**.** *Si M es una variedad de Riemann, $p \in M$ y $v \in T_p(M)$, entonces existe una única geodésica maximal $\gamma_v \colon I_v \to M$ que verifica que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma_v'(0) = v$.*

3.1.2. La aplicación exponencial de una variedad de Riemann

Si M es una variedad de Riemann y $p \in M$, sabemos que para cualquier vector tangente $v \in T_p(M)$ existe una única geodésica maximal con condiciones iniciales p y v. Permitiendo variar p y v, se recogen todas las geodésicas en una única aplicación, que se conoce como la *aplicación exponencial*.

Definición 3.11. Sea M una variedad de Riemann. Definimos el **dominio de la aplicación exponencial** como $\mathcal{E} = \{v \in T(M) \colon 1 \in I_v\}$, donde para cada $v \in T_p(M)$ I_v es el intervalo de definición de la geodésica maximal γ_v verificando $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma_v'(0) = v$.

En estas condiciones, definimos la **aplicación exponencial** $\exp\colon \mathcal{E} \to M$ mediante la fórmula

$$\exp(v) = \gamma_v(1) \qquad v \in \mathcal{E}.$$

Para cada $p \in M$, definimos $\mathcal{E}_p = \mathcal{E} \cap T_p(M)$, y la restricción de la exponencial a $\mathcal{E}_p$ la denotaremos por $\exp_p \colon \mathcal{E}_p \to M$.

Teorema 3.12 (Propiedades de la aplicación exponencial, [10, Proposiciones 5.19 y 5.20])**.** *Sean M una variedad de Riemann y $\exp\colon \mathcal{E} \to M$ la aplicación exponencial. El dominio $\mathcal{E}$ es un abierto estrellado de $T(M)$ que contiene a la sección nula. Además, $\exp$ es diferenciable, siendo $\exp_p$ un difeomorfismo local en $0_p \in T_p(M)$ para todo $p \in M$.*

Si $f\colon M \to N$ es una isometría entre variedades de Riemann y $\tilde{\mathcal{E}}$ es el dominio de la aplicación exponencial de N, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_p \arrow[r, "f_{*p}"] \arrow[d, "\exp_p"'] & \tilde{\mathcal{E}}_{f(p)} \arrow[d, "\exp_{f(p)}"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $p \in M$.

Terminamos la sección definiendo las acciones isométricas, que son las acciones compatibles con la métrica de Riemann de una variedad M.

Definición 3.13. Sea $\varphi\colon G \curvearrowright M$ una acción diferenciable de un grupo de Lie G sobre una variedad de Riemann $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Se dice que la acción φ es **isométrica** si, para cada $g \in G$, φ_g es una isometría. También se dice que la métrica de Riemann $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es ***G*-invariante**.

Observación 3.14. Si $G \curvearrowright M$ es una acción diferenciable de un grupo de Lie compacto G sobre una variedad diferenciable M, entonces siempre es posible encontrar una métrica G-invariante en M. Tomando una métrica arbitraria $(\cdot,\cdot)$ sobre M (que sabemos que siempre existe), entonces podemos definir un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que

$$\langle v, w\rangle_p = \int_G ((\varphi_g)_{*p}(v), (\varphi_g)_{*p}(w))_{g\cdot p} dg, \quad v, w \in T_p(M), p \in M.$$

Por la linealidad y positividad de la integral de Haar, se tiene que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ determina un producto interior en $T_p(M)$ para todo $p \in M$. Además, observemos que

$$\begin{aligned}\langle(\varphi_h)_{*p}(v), (\varphi_h)_{*p}(w)\rangle_{h\cdot p} &= \int_G ((\varphi_g)_{*h\cdot p}((\varphi_h)_{*p}(v)), (\varphi_g)_{*h\cdot p}((\varphi_h)_{*p}(w)))dg \\ &= \int_G ((\varphi_{gh})_{*p}(v), (\varphi_{gh})_{*p}(w))dg \\ &= \int_G ((\varphi_g)_{*p}(v), (\varphi_g)_{*p}(w))dg = \langle v, w\rangle_p\end{aligned}$$

para cada $v, w \in T_p(M)$ y $h \in G$. Por lo tanto, esta nueva métrica es G-invariante, como queríamos demostrar.

3.2. Slices para una acción propia

Dada una acción diferenciable y propia $G \curvearrowright M$, un slice nos proporciona una herramienta para entender el comportamiento local de la acción. Dado un punto $p \in M$, un slice $S \subseteq M$ en p será una subvariedad regular para la cual estudiar la acción de G sobre un entorno invariante de p se reduce a describir la acción de G_p sobre S. Seguiremos la exposición de [1], [14] y [18] a la hora de definir y ver las propiedades fundamentales de los slices, aunque también sugerimos [3] para ver una aproximación alternativa a los slices en el caso de acciones isométricas sobre variedades geodésicamente completas o [9] en el caso de que el grupo G sea compacto.

Definición 3.15. Sea (M, G, φ) un grupo diferenciable de transformaciones y $p \in M$ tal que $G \cdot p$ es una subvariedad regular de M. Se dice que un subconjunto $S \subseteq M$ es un **slice en *p*** si existe un abierto $U \subseteq M$ tal que $G \cdot p \subseteq U$, U es invariante, y existe una retracción diferenciable y G-equivariante $r\colon U \to G \cdot p$ tal que $S = r^{-1}(p)$.

Como consecuencia directa de la definición, se tiene que r es una sumersión, con lo que $S = r^{-1}(p)$ es una subvariedad regular de M. Además, su dimensión es $\dim S = \dim U - \dim G \cdot p = \dim M - \dim G \cdot p$.

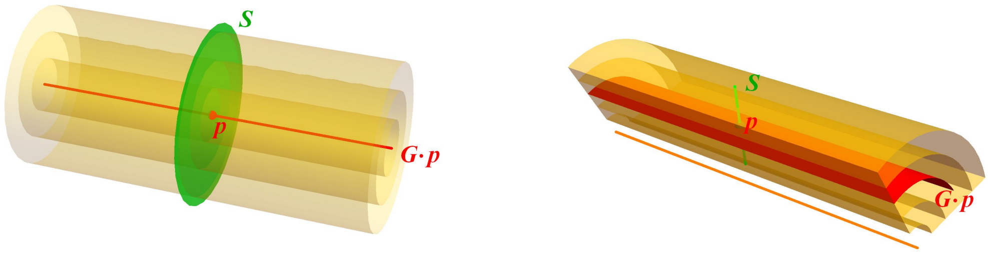

Figura 3.1: Slices en $p = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ para la acción $SO(2) \times \mathbb{R} \curvearrowright \mathbb{R}^3$ dada por $(A, t) \cdot (x, y, z) = (A(x, y), z+t)$ según los valores de p (izquierda: p es de la forma $(0, 0, c)$; derecha: p es de la forma (a, b, c) con $(a, b) \neq (0, 0)$).

Nota 3.16. En este trabajo hemos optado por preservar la nomenclatura anglosajona de *slice* debido a que no existe una traducción estándar al castellano de este nombre. Una posibilidad sería referirse a un slice como *sección*, aunque habría riesgo de que se confundiese con otros conceptos de mismo nombre (por ejemplo, secciones de las acciones polares).

Proposición 3.17 (Propiedades de los slices)**.** *Sea $G \curvearrowright M$ una acción de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable M. Supongamos que $S \subseteq M$ es un slice en $p \in M$, siendo $r\colon U \to G \cdot p$ la retracción asociada. Entonces se verifica:*

(i) *$p \in S$. Además, $G_p \cdot S \subseteq S$.*

(ii) *Para cualquier $g \in G$, si $g \cdot S \cap S \neq \emptyset$, entonces $g \in G_p$.*

(iii) *El abierto U coincide con $G \cdot S$.*

(iv) *$T_p(M) = T_p(G \cdot p) \oplus T_p(S)$.*

Demostración. Comencemos probando la primera afirmación. Por un lado, en virtud de la definición de slice, se tiene que $p \in G \cdot p \subseteq U$, y $r(p) = p$, ya que r es una retracción. En consecuencia, $p \in r^{-1}(p) = S$, como queríamos demostrar.

Por otro lado, dados $g \in G_p$, $s \in S$ arbitrarios, se tiene que $r(g \cdot s) = g \cdot r(s) = g \cdot p = p$, con lo que $g \cdot s \in r^{-1}(p) = S$. Así, llegamos a que $G_p \cdot S \subseteq S$, lo que prueba (i).

Veamos ahora (ii). Supongamos que para un $g \in G$ se tiene que $g \cdot S \cap S \neq \emptyset$. En tal caso, existirán $s_1, s_2 \in S$ tales que $g \cdot s_1 = s_2$, de donde $g \cdot p = g \cdot r(s_1) = r(g \cdot s_1) = r(s_2) = p$. Por lo tanto, $g \in G_p$.

Pasamos a demostrar el apartado (iii). Como $S = r^{-1}(p) \subseteq U$, y U es invariante, tenemos que $G \cdot S \subseteq G \cdot U = U$. Además, dado cualquier $q \in U$, observamos que $r(q) = g \cdot p$ para algún $g \in G$. Si definimos $q' = g^{-1} \cdot q \in U$, gracias a la equivariancia de r deducimos que $r(q') = r(g^{-1} \cdot q) = g^{-1} \cdot r(q) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$, lo que implica que $q' \in S$. De ese modo, $q = g \cdot q' \in G \cdot S$, y podemos concluir que $G \cdot S = U$.

Finalmente, comprobemos la última igualdad. Llamemos $i \colon G \cdot p \hookrightarrow M$ y $j \colon S \hookrightarrow M$ a las inclusiones. Si para $v \in T_p(G \cdot p)$, $w \in T_p(S)$ arbitrarios, se tiene que $i_{*p}(v) = j_{*p}(w)$, tenemos que demostrar que $v = 0$ y $w = 0$. En efecto, tenemos que $r \circ i = \mathrm{Id}_{G \cdot p}$, así como que $r \circ j$ es la aplicación constante igual a p. En consecuencia, $r_{*p} \circ i_{*p} = \mathrm{Id}_{T_p(G \cdot p)}$, y $r_{*p} \circ j_{*p} = 0$. Aplicando entonces r_{*p} a $i_{*p}(v) = j_{*p}(w)$ deducimos que $v = 0$, lo que también implica que $w = 0$. Llegamos así a que $T_p(G \cdot p) \cap T_p(S) = \{0\}$, y como además $\dim T_p(G \cdot p) + \dim T_p(S) = \dim G \cdot p + \dim S = \dim M$, se tiene la igualdad dada en el enunciado. □

Si la acción es propia, los slices verifican las siguientes propiedades adicionales.

Corolario 3.18. *Si $G \curvearrowright M$ es una acción propia y S es un slice en $p \in M$, se tiene:*

- (i) *S es una G_p-variedad diferenciable, y la acción $G_p \curvearrowright S$ es propia.*
- (ii) *Para cada $s \in S$, $G_s \subseteq G_p$.*
- (iii) *Si la órbita $G \cdot p$ es principal, entonces $G_s = G_p$ para todo $s \in S$ en un entorno de p. En particular, se puede escoger S de manera que todas las órbitas que pasan por S sean principales.*
- (iv) *Dados $s_1, s_2 \in S$ cualesquiera, si las órbitas $G_p \cdot s_1$ y $G_p \cdot s_2$ tienen el mismo tipo (como órbitas de la acción $G_p \curvearrowright S$), entonces $G \cdot s_1$ y $G \cdot s_2$ tienen el mismo tipo (como órbitas de la acción $G \curvearrowright M$).*

Demostración. Como vimos en la Proposición 3.17, $G_p \cdot S \subseteq S$, con lo que la acción $\varphi \colon G \times M \to M$ se restringe a una aplicación $\varphi \colon G_p \times S \to S$. Dicha aplicación sigue siendo diferenciable, ya que S es una subvariedad regular de M y G_p es un subgrupo de Lie de G (ya que es cerrado), y verifica (1.1). Por lo tanto, (S, G_p, φ) es un grupo diferenciable de transformaciones. Además, en virtud del Teorema 1.35, G_p es un grupo de Lie compacto, con lo que la acción de G_p sobre S es propia. En consecuencia, tenemos demostrado (i).

Ahora, probemos la afirmación (ii). Fijado un $s \in S$, cualquier elemento g de G_s cumple que $g \cdot S \cap S \neq \emptyset$ (pues $g \cdot s = s \in g \cdot S \cap S$). Por consiguiente, la Proposición 3.17 nos garantiza que $g \in G_p$, con lo que deducimos que $G_s \subseteq G_p$.

Veamos ahora el apartado (iii). Sean $r\colon U \to G \cdot p$ la retracción garantizada por la definición de slice, y $W \subseteq M$ un entorno invariante de $G \cdot p$ para el cual $(G_p) \leq (G_q)$ si $q \in W$. La restricción $r\colon U \cap W \to G \cdot p$ sigue siendo una retracción diferenciable y equivariante, dando lugar a un nuevo slice $\tilde{S} = r^{-1}(S) \cap W$ en p, tal que todas las órbitas que cortan a $\tilde{S}$ son principales. En efecto, dado cualquier $s \in \tilde{S}$, se cumple, en virtud del apartado (ii), que $G_s \subseteq G_p$. Además, como $s \in W$, se tiene que $(G_p) \leq (G_s)$, y existe un $g \in G$ tal que $gG_pg^{-1} \subseteq G_s$. Así, $G_s \subseteq G_p \subseteq g^{-1}G_sg$, de donde $G_s = g^{-1}G_sg$ en virtud del Lema 2.34. Por tanto, $G_s = G_p$, lo que demuestra (iii).

Por último, observemos que para cada $s \in S$, $[G_p]_s = G_s$, donde $[G_p]_s$ es el subgrupo de isotropía de s para la acción de G_p sobre S. La inclusión $[G_p]_s \subseteq G_s$ es inmediata de la definición de subgrupo de isotropía, mientras que la inclusión $G_s \subseteq [G_p]_s$ es consecuencia de que $G_s \subseteq G_p$. De ese modo, si $G_p \cdot s_1$ y $G_p \cdot s_2$ tienen el mismo tipo, existirá un $g \in G_p$ tal que $[G_p]_{s_2} = g[G_p]_{s_1}g^{-1}$, verificándose entonces que $G_{s_2} = gG_{s_1}g^{-1}$. Así, las órbitas $G \cdot s_1$ y $G \cdot s_s$ tienen el mismo tipo. Queda entonces demostrada la última afirmación. □

Los resultados anteriores nos confirman lo que habíamos afirmado al inicio de la sección, con lo que nos conviene saber si dada cualquier acción propia $G \curvearrowright M$ todo punto $p \in M$ admite un slice. El *Slice Theorem* nos da una respuesta afirmativa a esta pregunta. Con el propósito de demostrar dicho Teorema, vamos a necesitar construir un G-espacio que está basado en la noción de *fibrados asociados* [8, Sección 2.3].

Definición 3.19. Sea $G \curvearrowright M$ una acción diferenciable y propia, y $H \leq G$ un subgrupo compacto de G. Se define una acción de H sobre $G \times M$ mediante la ecuación $h \cdot (g, q) = (gh^{-1}, h \cdot q)$. Esta acción es libre y propia, con lo que el Teorema de la Variedad Cociente 2.28 nos permite deducir que el cociente

$$G \times_H M = (G \times M)/H$$

es una variedad diferenciable. Sobre esta variedad definimos una acción $G \curvearrowright G \times_H M$ dada por

$$g \cdot [g', q] = [gg', q], \quad g \in G, \ [g', q] \in G \times_H M.$$

También necesitaremos el siguiente Lema previo.

Lema 3.20. *Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia, y $p \in M$. Para cualquier entorno abierto W de G_p existe un entorno V de p tal que $G_V = \{g \in G\colon g \cdot V \cap V \neq \emptyset\} \subseteq W$.*

Demostración. Al ser la acción de G sobre M propia, sabemos, en virtud del Teorema 1.35, que G_p es un subgrupo compacto de G.

En primer lugar, fijémonos en que $G_V \subseteq W$ si y solamente si $(G \setminus W) \cdot V \cap V = \emptyset$, lo que equivale a que $V \subseteq M \setminus [(G \setminus W) \cdot V]$. Por lo tanto, buscaremos el abierto V dentro de $M \setminus [(G \setminus W) \cdot p]$. Observemos que, debido al carácter propio de la acción, la aplicación $\theta\colon G \times M \to M \times M$ definida por $\theta(g, p) = (g \cdot p, p)$ es propia. Por lo tanto, puesto que $G \setminus W$ es cerrado en G, deducimos que $\theta((G \setminus W) \times \{p\}) = (G \setminus W) \cdot p \times \{p\}$ es cerrado en $M \times M$, con lo que $(G \setminus W) \cdot p$ es cerrado en M. Por consiguiente, $M \setminus [(G \setminus W) \cdot p]$ es un abierto de M. Además, ya que $G \setminus W \subseteq G \setminus G_p$, se tiene que $p \in M \setminus [(G \setminus W) \cdot p]$.

Tomemos un entorno compacto $U \subseteq M \setminus [(G \setminus W) \cdot p]$ de p. Al ser la acción propia, la Proposición 1.33 nos garantiza que G_U es un subconjunto compacto de G. En particular, $K = G_U \setminus W$ vuelve a ser un conjunto compacto, que además verifica que

$$K \cdot p = (G_U \setminus W) \cdot p \subseteq (G \setminus W) \cdot p \subseteq M \setminus U.$$

De ese modo, $K \times \{p\} \subseteq \varphi^{-1}(M \setminus U)$, que es un abierto de $G \times M$. Aplicando entonces el Lema del Entorno Tubular Generalizado, podemos obtener un entorno abierto $\tilde{V}$ de p cumpliendo que $K \cdot \tilde{V} \subseteq M \setminus U$, de modo que $V = \tilde{V} \cap \mathring{U}$ vuelve a ser un entorno abierto de p tal que $K \cdot V \subseteq M \setminus U$. Entonces, V es el abierto deseado, ya que

$$(G \setminus W) \cdot V \cap V = (G_U \setminus W) \cdot V \cap V = K \cdot V \cap V \subseteq (M \setminus U) \cap U = \emptyset,$$

lo que implica que $G_V \subseteq W$, como queríamos demostrar. $\square$

Con lo que hemos visto, ya podemos abordar el teorema central de este capítulo: el *Slice Theorem.*

Teorema 3.21 (Slice Theorem, [14, Teorema 6.26])**.** *Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia. Para cualquier $p \in M$, existe un slice S en p.*

Demostración. Para comenzar, dotaremos a M de una métrica que haga que cada φ_g sea una isometría si $g \in G_p$. Recordemos que, en virtud del Teorema 1.35, el subgrupo de isotropía G_p es compacto.

Sea $(\cdot, \cdot)$ una métrica de Riemann arbitraria en M. Definimos una nueva métrica mediante la siguiente ecuación:

$$\langle v, w \rangle_q = \int_{G_p} ((\varphi_g)_{*q}(v), (\varphi_g)_{*q}(w))_{g \cdot q} dg, \quad v, w \in T_q(M), \; q \in M.$$

Como ya vimos en la Observación 3.14, esta es una métrica de Riemann sobre M, tal que G_p actúa por isometrías sobre M.

Aplicando que $\exp_p$ es un difeomorfismo local en 0_p, tomemos un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que $\exp_p\colon B_{0_p}(\varepsilon) \to M$ sea un difeomorfismo en su imagen. Definimos

$$\tilde{S} = \exp_p(B_{0_p}(\varepsilon) \cap \nu_p(G \cdot p)),$$

que es una subvariedad regular de M invariante por G_p. Efectivamente, dados $g \in G_p$, $\exp_p(v) \in \tilde{S}$, se verifica que $g \cdot \exp_p(v) = \exp_{g \cdot p}((\varphi_g)_{*p}(v)) = \exp_p((\varphi_g)_{*p}(v)) \in \tilde{S}$, ya que $(\varphi_g)_{*p}(v) \in B_{0_p}(\varepsilon) \cap \nu_p(G \cdot p)$, como consecuencia de que $(\varphi_g)_{*p}$ es una isometría lineal.

Por otra parte, puesto que la proyección canónica $\pi \colon G \to G/G_p$ es una sumersión, podemos encontrar una sección local $\chi \colon U \subseteq G/G_p \to G$ de π tal que $\chi(eG_p) = e$. Esto nos permite definir una nueva aplicación diferenciable $f \colon U \times \tilde{S} \to M$, dada por $f(u, s) = \chi(u) \cdot s$, para cualesquiera $(u, s) \in U \times \tilde{S}$. Observemos que f es una aplicación entre variedades de la misma dimensión, ya que

$$\begin{aligned} \dim(U \times \tilde{S}) &= \dim U + \dim \tilde{S} = \dim G/G_p + \dim \tilde{S} \\ &= \dim G/G_p + \dim M - \dim G \cdot p = \dim M. \end{aligned}$$

Más aún, f es una sumersión en (eG_p, p). Las inclusiones

$$\begin{aligned} i_p \colon U &\to U \times \tilde{S} \\ u &\mapsto (u, p) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} j_{eG_p} \colon \tilde{S} &\to U \times \tilde{S} \\ q &\mapsto (eG_p, q) \end{aligned}$$

cumplen que las composiciones $f \circ i_p$, $f \circ j_{eG_p}$ coinciden con ψ y $l \colon \tilde{S} \hookrightarrow M$ respectivamente (donde $\psi \colon G/G_p \to G \cdot p$ es el difeomorfismo dado por $\psi(gG_p) = g \cdot p$). De ese modo, deducimos que

$$\begin{aligned} f_{*(eG_p,p)}(T_{(eG_p,p)}(U \times \tilde{S})) =& \psi_{*eG_p}(T_{eG_p}(G/G_p)) + l_{*p}(T_p(\tilde{S})) = T_p(G \cdot p) + T_p(\tilde{S}) \\ =& T_p(G \cdot p) + \nu_p(G \cdot p) = T_p(M). \end{aligned}$$

Así, $f_{*(eG_p,p)}$ es sobreyectiva, lo que demuestra que f es una sumersión en (eG_p, p). De hecho, al ser $\dim(U \times \tilde{S}) = \dim M$, se tiene que en realidad f es un difeomorfismo local en ese punto. Escojamos entonces U y ε suficientemente pequeños como para que f defina un difeomorfismo en su imagen.

Tomemos ahora $W = \pi^{-1}(U)$, entorno abierto de G_p. Vamos a encontrar un abierto $\tilde{W} \subseteq G$ cumpliendo que $G_p \subseteq \tilde{W}$ y $G_p\tilde{W} \subseteq W$. Si $\alpha \colon G \times G \to G$ es la multiplicación de G, se cumple que $G_p \times G_p \subseteq \alpha^{-1}(W)$, debido a la definición de W. Como $\alpha^{-1}(W)$ es abierto, y G_p es compacto, el Lema del Entorno Tubular Generalizado nos permite encontrar un abierto $\tilde{W}$ de G tal que $G_p \times G_p \subseteq G_p \times \tilde{W} \subseteq \alpha^{-1}(W)$, con lo que $G_p \subseteq \tilde{W}$ y $G_p\tilde{W} \subseteq W$, como buscábamos.

El Lema 3.20 nos garantiza la existencia de un entorno $V' \subseteq M$ de p, tal que $G_{V'} \subseteq \tilde{W}$. Por lo tanto, el conjunto $V = G_p \cdot V'$ es un abierto G_p-invariante de M, que además cumple que $G_V \subseteq W$. Veamos esta última afirmación.

Para cualquier $g \in G_V$, se cumple que $g \cdot V \cap V = gG_p \cdot V' \cap G_p \cdot V' \neq \emptyset$. Así, existirán elementos $g_1, g_2 \in G_p$, $v_1, v_2 \in V'$ tales que $gg_1 \cdot v_1 = g_2 \cdot v_2$. En consecuencia,

$g_2^{-1}gg_1 \cdot v_1 = v_2 \in g_2^{-1}gg_1 \cdot V' \cap V'$. Por consiguiente, $g_2^{-1}gg_1 \in G_{V'}$, de donde

$$g \in g_2 G_{V'} g_1^{-1} \subseteq G_p G_{V'} G_p \subseteq G_p \tilde{W} G_p \subseteq W G_p = W.$$

En resumen, hemos obtenido un entorno G_p-invariante V de p tal que $G_V \subseteq W$. Con él construimos $S = \tilde{S} \cap V$, y veremos que S es el slice que estábamos buscando.

Por un lado, $G_S = \{g \in G \colon g \cdot S \cap S \neq \emptyset\} = G_p$. La inclusión $G_p \subseteq G_S$ es consecuencia directa de que tanto $\tilde{S}$ como V son G_p-invariantes, así como de que $S = \tilde{S} \cap V$. Tenemos que ver entonces que $G_S \subseteq G_p$. Si $g \in G_S$, sabemos que existirán $s_1, s_2 \in S$ de manera que $g \cdot s_1 = s_2$. En particular, $g \in G_V \subseteq W = \pi^{-1}(U)$, con lo que $\pi(g) = \pi(\chi(\pi(g)))$, lo que implica que existe un $h \in G_p$ tal que $\chi(\pi(g)) = gh$. Por consiguiente:

$$f(\pi(e), s_2) = s_2 = g \cdot s_1 = \chi(\pi(g))h^{-1} \cdot s_1 = f(\pi(g), h^{-1} \cdot s_1).$$

Puesto que f es inyectiva por ser un embebimiento, concluimos que $\pi(e) = \pi(g)$, de donde $g \in G_p$.

Estamos ya en condiciones de probar que S es el slice buscado: la acción φ se restringe a una aplicación diferenciable $\varphi \colon G \times S \to M$ cuya imagen es $G \cdot S$ (nótese que aún no sabemos si $G \cdot S$ es abierto en M o no). Si $\eta \colon G \times S \to G \times_{G_p} S$ es la proyección canónica, vemos que φ pasa al cociente como una aplicación diferenciable $F \colon G \times_{G_p} S \to M$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ G \times_{G_p} S \arrow[r, "F"'] & M \end{tikzcd}$$

sea conmutativo (porque $\varphi(gh^{-1}, h \cdot s) = (gh^{-1}) \cdot h \cdot s = \varphi(g, s)$ para cualesquiera $g \in G$, $s \in S$, $h \in G_p$). Dicha aplicación es inyectiva: si $F[g_1, s_1] = F[g_2, s_2]$, tendríamos que $g_1 \cdot s_1 = g_2 \cdot s_2$, con lo que $s_2 = g_2^{-1}g_1 \cdot s_1 \in g_2^{-1}g_1 S \cap S$. Así, $h = g_2^{-1}g_1 \in G_S = G_p$, y cumple que $h \cdot (g_1, s_1) = (g_2, s_2)$. Por lo tanto, $[g_1, s_1] = [g_2, s_2]$. Además, F es equivariante: para $g \in G$, $[h, s] \in G \times_{G_p} S$, vemos que $F(g \cdot [h, s]) = F[gh, s] = gh \cdot s = g \cdot F[h, s]$.

Fijémonos en que φ es una sumersión en (e, p). En efecto, se puede comprobar que $\varphi_{*(e,p)}(T_{(e,p)}(G \times S)) = (\varphi^p)_{*e}(T_e(G)) + (\varphi_e)_{*p}(T_p(S)) = T_p(G \cdot p) + T_p(S) = T_p(M)$. Por lo tanto, reduciendo el valor de ε si fuese necesario, podemos suponer que φ es una sumersión en todo su dominio En realidad, solo podríamos suponer que φ es sumersión en un abierto de la forma $\Omega \times S$, pero φ es equivariante respecto de la acción $G \curvearrowright M$ y la acción $\omega \colon G \curvearrowright G \times S$ dada por $\omega(g, (g', s)) = (gg', s)$. Puesto que el rango de φ es constante en cada órbita, y las órbitas de ω son de la forma $G \times \{s\}$, donde $s \in S$, podemos concluir que φ es una sumersión en todo $G \times S$. En consecuencia, $G \cdot S = \varphi(G \times S)$ es abierto en

M, y como $\varphi = F \circ \eta$, F es una sumersión sobreyectiva de $G \times_{G_p} S$ en $G \cdot S$. De hecho, F es un difeomorfismo, al ser

$$\dim G \times_{G_p} S = \dim G + \dim S - \dim G_p = \dim G + \dim M - \dim G \cdot p - \dim G_p = \dim M,$$

lo que nos permitirá construir la retracción $r \colon G \cdot S \to G \cdot p$ necesaria para concluir.

Se considera $\gamma \colon G \times_{G_p} S \to G/G_p$ tal que $\gamma[g, s] = gG_p$ para cada $[g, s] \in G \times_{G_p} S$. Es una aplicación bien definida, diferenciable y equivariante, gracias a que $\gamma[gh^{-1}, hs] = gh^{-1}G_p = gG_p$ si $h \in G_p$. Definimos entonces

$$\begin{array}{ccc} G \cdot S & \xrightarrow{\ r\ } & G \cdot p \\ {\scriptstyle F^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\ G \times_{G_p} S & \xrightarrow{\ \gamma\ } & G/G_p \end{array}$$

donde $r = \psi \circ \gamma \circ F^{-1}$. Por construcción, r es una retracción diferenciable. También es G-equivariante, por ser composición de aplicaciones equivariantes. Por último, observamos que

$$\begin{aligned} r^{-1}(p) &= (\psi \circ \gamma \circ F^{-1})^{-1}(p) = F(\gamma^{-1}(\psi^{-1}(p))) = F(\gamma^{-1}(eG_p)) = F(\eta(G_p \times S)) \\ &= \varphi(G_p \times S) = G_p \cdot S = S, \end{aligned}$$

lo que significa que $S = r^{-1}(p)$ es un slice en p. □

Definición 3.22. Sea $\varphi \colon G \curvearrowright M$ una acción propia e isométrica. Dado $p \in M$, un slice en p de la forma $S = \exp_p(B_{0_p}(\varepsilon) \cap \nu_p(G \cdot p))$, donde $\exp_p$ es un difeomorfismo en $B_{0_p}(\varepsilon)$, se conoce como **slice normal en *p***.

El grupo de Lie G_p actúa sobre $\nu_p(G{\cdot}p)$ mediante $g{\cdot}v = (\varphi_g)_{*p}(v)$. Como φ es isométrica, entonces cada elemento $g \in G_p$ induce una isometría lineal de $\nu_p(G{\cdot}p)$. Por ello, se dice que la acción es **ortogonal**. Denotando por $O(V)$ al grupo de isometrías lineales de un espacio euclídeo, se deduce que tenemos un homomorfismo de grupos $G_p \to O(\nu_p(G \cdot p))$, dado por la asignación $g \mapsto (\varphi_g)_{*p}$. Este homomorfismo se conoce como la **representación slice**.

Notemos que, en estas condiciones, el difeomorfismo $\exp_p$ es G_p-equivariante, pues se tiene que para cualquier $g \in G_p$ y $v \in \nu_p(G \cdot p)$:

$$\exp_p(g \cdot v) = \exp_p((\varphi_g)_{*p}(v)) = \exp_{g \cdot p}((\varphi_g)_{*p}(v)) = \varphi_g(\exp_p(v)) = g \cdot \exp_p(v).$$

3.3. Consecuencias del Slice Theorem

Para terminar este capítulo, vamos a ver dos aplicaciones del Slice Theorem, centrándonos en su uso para el estudio de las órbitas principales. En primer lugar, veremos que toda acción propia $G \curvearrowright M$ se puede hacer isométrica tomando una métrica de Riemann adecuada, para después ver las propiedades del conjunto M_R (que era la unión de todas las órbitas principales para la acción), recogidas en el Teorema de la Órbita Principal.

Teorema 3.23 (Existencia de métricas G-invariantes, [17, Teorema 4.3.1])**.** *Sea $\varphi\colon G \curvearrowright M$ una acción propia. Entonces es posible encontrar una métrica de Riemann G-invariante para la acción.*

Demostración. Denotemos por $\pi\colon M \to M/G$ a la proyección canónica. Al ser la acción $G \curvearrowright M$ una acción propia, el Slice Theorem 3.21 nos garantiza que podemos encontrar, para cada $p \in M$, un slice S_p en p (y $\pi(S_p)$ es abierto en M/G en virtud de la Proposición 3.17). Además, en vista de la demostración de dicho teorema, es claro que podemos escoger los slices tan pequeños como queramos, y relativamente compactos (pues son imagen por un embebimiento de una bola abierta en un espacio vectorial). Esto implica que la colección de todos los abiertos de la forma $\pi(S)$, donde S es un slice para la acción, es una base de la topología de M/G. Además, M/G es localmente compacto, Hausdorff y segundo numerable, gracias a que π es abierta y al Teorema 1.35, con lo que el Lema 1.4 nos garantiza que M/G es paracompacto, y podemos encontrar una sucesión (finita o numerable) de slices $(S_{p_n})_n$ relativamente compactos de manera que $\{\pi(S_{p_n})\}_n$ es un recubrimiento abierto y localmente finito del espacio M/G (y por lo tanto $\{G \cdot S_{p_n}\}_n$ es un recubrimiento abierto y localmente finito de M). En consecuencia, el Lema 1.5 nos garantiza la existencia de un refinamiento $\{C_n\}_n$ de $\{\pi(S_{p_n})\}_n$ tal que $\overline{C_n} \subseteq \pi(S_{p_n})$ para todo n.

Definimos, para cada n, $K_n = \pi^{-1}(C_n) \cap S_{p_n}$. Por construcción, K_n es abierto en S_{p_n}, y la clausura $\overline{K_n}$ está contenida en S_{p_n}. En efecto, si $x \in \overline{K_n}$, tenemos que $\pi(x) \in \pi(\overline{K_n}) \subseteq \overline{\pi(K_n)} = \overline{C_n} \subseteq \pi(S_{p_n})$, con lo que existen $g \in G$, $s \in S_{p_n}$ de modo que $x = g{\cdot}s \in g{\cdot}S_{p_n} \cap S_{p_n}$. De ese modo, $g \in G_{p_n}$, con lo que $x \in S_{p_n}$ (al ser S_{p_n} invariante por G_{p_n}). Observemos que como S_{p_n} es relativamente compacto, entonces K_n también tiene clausura compacta, siendo además $\mathrm{Cl}_{S_{p_n}}(K_n) = \overline{K_n}$.

Escogemos ahora una función $f_n\colon S_{p_n} \to \mathbb{R}$ que sea diferenciable, no negativa, tal que f_n sea positiva en el compacto K_n y cuyo soporte sea un subconjunto compacto de S_{p_n}. Podemos suponer que f_n es invariante por G_{p_n}: de no ser el caso, empleando la compacidad de G_{p_n} sustituiríamos f_n por

$$\tilde{f}_n(s) = \int_{G_{p_n}} f(g \cdot s)dg, \quad s \in S_{p_n},$$

que es también diferenciable, no negativa, positiva en K_n y con soporte contenido en el soporte de f_n, siendo esta además invariante por G_{p_n}. Podemos extender el dominio de f_n a $G \cdot S_{p_n}$ recordando que tenemos un difeomorfismo $F_n\colon G \times_{G_{p_n}} S_{p_n} \to G \cdot S_{p_n}$ dado por $F_n[g,s] = g \cdot s$. Al ser f_n invariante por G_{p_n}, la aplicación $\gamma_n \colon G \times_{G_{p_n}} S_{p_n} \to \mathbb{R}$ dada por $\gamma_n[g,s] = f_n(s)$ está bien definida, es diferenciable e invariante. De ese modo, la composición $\gamma_n \circ F_n^{-1}$ es una extensión de f_n a todo $G \cdot S_{p_n}$, cumpliendo que $f_n(g \cdot s) = f_n(s)$ para cada $g \in G$, $s \in S_{p_n}$. Por consiguiente, f_n es G-invariante. Si además definimos $f_n(p) = 0$ para cada $p \in M \setminus G \cdot S_{p_n}$, obtenemos una función $f_n \colon M \to \mathbb{R}$ que sigue siendo diferenciable y G-invariante, tal que $G \cdot K_n \subseteq \operatorname{sop}(f_n) \subseteq G \cdot S_{p_n}$.

Construiremos ahora una métrica de Riemann β_n en cada $G \cdot S_{p_n}$ que sea invariante por G. Ya que S_{p_n} es una G_{p_n}-variedad, y G_{p_n} es compacto, podemos definir una métrica β_n en $T(M)|_{S_{p_n}}$ que sea G_{p_n}-invariante empleando la integral de Haar. Podemos extender β_n a todo $G \cdot S_{p_n}$ por medio de la fórmula:

$$(\beta_n)_{g\cdot s}(v,w) = (\beta_n)_s((\varphi_{g^{-1}})_{*g\cdot s}v, (\varphi_{g^{-1}})_{*g\cdot s}w), \quad v,w \in T_{g\cdot s}(M), g \in G, s \in S_{p_n}.$$

Esta extensión está bien definida, ya que si $x = g_1 \cdot s_1 = g_2 \cdot s_2$, donde $g_1, g_2 \in G$, $s_1, s_2 \in S_{p_n}$, vemos que $s_2 = g_2^{-1}g_1 \cdot s_1 \in g_2^{-1}g_1 \cdot S_{p_n} \cap S_{p_n}$, de donde $g_2^{-1}g_1 \in G_{p_n}$ como consecuencia de la Proposición 3.17. Aplicando que $\varphi_{g_2^{-1}g_1}$ es una isometría respecto de β_n, obtenemos lo siguiente: para cada $v, w \in T_x(M)$,

$$\begin{aligned}
&(\beta_n)_{s_1}((\varphi_{g_1^{-1}})_{*g_1\cdot s_1}v, (\varphi_{g_1^{-1}})_{*g_1\cdot s_1}w) \\
&\quad = (\beta_n)_{s_2}((\varphi_{g_2^{-1}g_1})_{*s_1}((\varphi_{g_1^{-1}})_{*g_1\cdot s_1}v), (\varphi_{g_2^{-1}g_1})_{*s_1}((\varphi_{g_1^{-1}})_{*g_1\cdot s_1}w)) \\
&\quad = (\beta_n)_{s_2}((\varphi_{g_2^{-1}})_{*g_2\cdot s_2}v, (\varphi_{g_2^{-1}})_{*g_2\cdot s_2}w).
\end{aligned}$$

El carácter G-invariante de β_n se demuestra de modo similar: tomados $g \cdot s \in G \cdot S_{p_n}$, $h \in G$, $v, w \in T_{g\cdot s}(M)$, se verifica:

$$\begin{aligned}
&(\beta_n)_{h\cdot(g\cdot s)}((\varphi_h)_{*g\cdot s}v, (\varphi_h)_{*g\cdot s}w) \\
&\quad = (\beta_n)_s((\varphi_{g^{-1}h^{-1}})_{*(hg)\cdot s}((\varphi_h)_{*g\cdot s}v), (\varphi_{g^{-1}h^{-1}})_{*(hg)\cdot s}((\varphi_h)_{*g\cdot s}w)) \\
&\quad = (\beta_n)_s((\varphi_{g^{-1}})_{*g\cdot s}v, (\varphi_{g^{-1}})_{*g\cdot s}w) = (\beta_n)_{g\cdot s}(v,w),
\end{aligned}$$

Ya estamos en condiciones de construir la métrica G-invariante: sea

$$\beta = \sum_n f_n \beta_n.$$

Esta suma está bien definida y es diferenciable, ya que para cada n se tiene que $\operatorname{sop}(f_n\beta_n) \subseteq G \cdot S_{p_n}$, con lo que la familia de los soportes de cada sumando es localmente finita. Además, puesto que $\sum_n f_n$ es una función positiva por construcción, tenemos que β es una métrica de Riemann sobre M. Finalmente, del carácter invariante de las aplicaciones f_n y β_n concluimos que β es invariante, lo que termina la prueba. □

Nuestro objetivo a partir de ahora va a ser aplicar los Teoremas 3.21 y 3.23 para demostrar el Teorema de la Órbita Principal, que nos permitirá describir la estructura de las órbitas principales para una acción propia de un grupo de Lie sobre una variedad conexa. El enunciado de dicho Teorema es el siguiente:

Teorema 3.24 (de la Órbita Principal)**.** *Si $G \curvearrowright M$ es una acción propia de un grupo de Lie sobre una variedad diferenciable conexa, entonces:*

(*i*) *Todas las órbitas principales tienen el mismo tipo, que es además el máximo entre los tipos de órbitas de $G \curvearrowright M$.*

(*ii*) *M_R, la unión de todas las órbitas principales, es un abierto denso de M.*

(*iii*) *El abierto $\pi(M_R)$ es un subconjunto conexo de M/G, siendo π la proyección canónica.*

La demostración de este resultado va a ser considerablemente larga, con lo que probaremos sus afirmaciones separadamente.

Teorema 3.25. *Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia. El conjunto M_R formado por todos los puntos regulares de M es un abierto denso de M. En particular, siempre existen órbitas principales para cualquier acción propia.*

Demostración. Veamos que M_R es abierto en M: si $p \in M$ es un punto regular de M, entonces en virtud del *Slice Theorem* 3.21 existe un slice S en p. Además, aplicando el Corolario 3.18, podemos suponer que cada órbita que pasa por $G \cdot S$ es principal, lo que implica que $G \cdot S$ es un entorno abierto de p contenido en M_R. Así, p es punto interior de M_R. Ya que la elección de p era arbitraria, deducimos que M_R es un conjunto abierto.

Ahora, probemos que M_R es denso en M viendo que para cada abierto $U \subseteq M$ no vacío, se tiene $M_R \cap U \neq \emptyset$. Dado U en las condiciones anteriores, tomemos $p \in U$ un punto cualquiera, y sea $S \subseteq M$ un slice en p (de nuevo, la existencia de S está garantizada por el Teorema 3.21). Escogemos $q \in (G \cdot S) \cap U$ de modo que la dimensión de G_q sea $n = \text{mín}\{\dim G_x : x \in (G \cdot S) \cap U\}$ y G_q tenga k componentes conexas, siendo k el número mínimo de componentes conexas que tiene cualquier subgrupo de isotropía G_x, donde $x \in (G \cdot S) \cap U$ y $\dim G_x = n$. Tomamos un slice S_q en q, de modo que $W = (G \cdot S) \cap (G \cdot S_q) \cap U$ es un abierto que contiene a q. Vamos a ver que $V = G \cdot W$ es un entorno invariante de $G \cdot q$ tal que $(G_q) \leq (G_x)$ para todo $x \in V$.

Si $x \in V$, entonces $x = h \cdot y$, donde $h \in G$, $y \in W$, con lo que $(G_x) = (G_y)$. Ya que $y \in W \subseteq G \cdot S_q$, existirá un $g \in G$ tal que $y \in g \cdot S_q$ (que es un slice en $g \cdot q$). Por lo tanto, el Corolario 3.18 nos permite afirmar que $G_y \subseteq G_{g \cdot q} = gG_qg^{-1}$. Probaremos que por la elección de q debe ser $G_y = gG_qg^{-1}$. En efecto, como la conjugación es un difeomorfismo, tenemos que gG_qg^{-1} tiene dimensión n y k componentes conexas. Como

$y \in W$, tenemos que $\dim G_y \geq n$; también se tiene que $\dim G_y \leq n$, al ser $G_y \subseteq gG_qg^{-1}$, con lo que $\dim G_y = n$. En consecuencia, G_y es una subvariedad abierta de gG_qg^{-1}, y es también cerrada por ser compacta. Se deduce entonces que G_y es la unión de una subfamilia de las componentes conexas de gG_qg^{-1} (que son a lo sumo k). Como G_y tiene k o más componentes conexas, necesariamente G_y posee exactamente k componentes conexas, lo que fuerza que $G_y = gG_qg^{-1}$. De esa manera, $(G_x) = (G_y) = (G_q)$, como queríamos demostrar.

En resumen, hemos llegado a que $q \in M_R \cap U$, de donde $M_R \cap U \neq \emptyset$. Así, M_R es denso en M, ya que la elección de U era arbitraria. $\square$

Teorema 3.26. *Sea $\varphi\colon G \curvearrowright M$ una acción propia de un grupo de Lie sobre una variedad conexa M. Si $\pi\colon M \to M/G$ es la proyección canónica, entonces $\pi(M_R)$ es un subconjunto conexo de M/G.*

Demostración. En virtud del Teorema 3.25, sabemos que M_R es un subconjunto abierto y denso de M. Por lo tanto, $\pi(M_R)$ es abierto en M/G, y es denso, ya que $M/G = \pi(M) = \pi(\overline{M_R}) \subseteq \overline{\pi(M_R)}$. La demostración de este resultado se basa en dos observaciones.

Primera observación: Por ser M una variedad conexa, necesariamente M es conexa por caminos, lo que implica que M/G es conexo por caminos. Por otra parte, decimos que un subconjunto $A \subseteq M/G$ *no desconecta localmente a* M/G si todo punto $x \in M/G$ admite un entorno abierto $U \subseteq M/G$ tal que $U \setminus A$ es conexo. Vamos a ver que si $(M/G) \setminus \pi(M_R) = \pi(M_S)$ no desconecta localmente a M/G, entonces $\pi(M_R)$ es conexo.

Sean $x, y \in \pi(M_R)$ dos puntos cualesquiera. Ya que M/G es conexo por caminos, es posible encontrar un camino $\alpha\colon [0,1] \to M/G$ de manera que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Ahora, aceptando que $\pi(M_S)$ no desconecta localmente a M/G, podemos dar un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de M/G de manera que para todo $U \in \mathcal{U}$, $U \setminus \pi(M_S) = U \cap \pi(M_R)$ es conexo. Aplicando entonces la compacidad del intervalo $[0,1]$, podemos dar una partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ de $[0,1]$ tal que $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i$ para todo $i = 1, ..., n$, siendo $U_i \in \mathcal{U}$.

Por construcción, sabemos que $U_1 \cap \pi(M_R)$ y $U_2 \cap \pi(M_R)$ son conexos. Además, $U_1 \cap U_2$ es un abierto no vacío, puesto que $\alpha(t_1) \in U_1 \cap U_2$. Aplicando la densidad de $\pi(M_R)$, deducimos que $U_1 \cap U_2 \cap \pi(M_R) \neq \emptyset$, de modo que $(U_1 \cap \pi(M_R)) \cup (U_2 \cap \pi(M_R)) = (U_1 \cup U_2) \cap \pi(M_R)$ es conexo. Siguiendo este argumento por recurrencia, podemos llegar a probar que $(U_1 \cup ... \cup U_n) \cap \pi(M_R) \subseteq \pi(M_R)$ es un conjunto conexo que contiene a x e y. En consecuencia, como la elección de $x, y \in M/G$ era arbitraria, $\pi(M_R)$ es conexo.

Segunda observación: Debemos comprobar que en efecto $\pi(M_S)$ no desconecta localmente a M/G. Es decir, tendremos que probar que cualquier elemento $x = \pi(p) \in M/G$ admite un entorno $U \subseteq M/G$ de modo que $U \cap \pi(M_R)$ es conexo.

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ una métrica de Riemann G-invariante para la acción, que sabemos que existe en virtud del Teorema 3.23, y escojamos un slice $\Sigma = \exp_p(B_{0_p}(\varepsilon) \cap \nu_p(G \cdot p))$ normal en p. Nuestro objetivo será probar que $\pi(\Sigma)$ es el abierto deseado. Se define la aplicación $f\colon \Sigma/G_p \to \pi(\Sigma)$ dada por $f[s] = \pi(s)$. Ya que $G_p \subseteq G$, es claro que f está bien definida y es continua en su dominio. También es inmediato que f es sobreyectiva, y se puede probar que es inyectiva: si $[s], [s'] \in \Sigma/G_p$ son tales que $f[s] = \pi(s) = \pi(s') = f[s']$, se deduce que existirá un $g \in G$ de manera que $s' = g \cdot s \in g \cdot \Sigma \cap \Sigma$. En consecuencia $g \in G_p$ por la Proposición 3.17, de donde $[s] = [s']$. Finalmente, suponiendo que $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño como para que $\varphi\colon G \times \Sigma \to G \cdot \Sigma$ sea una sumersión (y por tanto, abierta), deducimos que f es una aplicación abierta, lo que significa que $f\colon \Sigma/G_p \to \pi(\Sigma)$ es un homeomorfismo. Así, ver que $\pi(\Sigma) \setminus \pi(M_S)$ es conexo es equivalente a ver que $(\Sigma/G_p) \setminus f^{-1}(\pi(M_S))$ es conexo.

Fijémonos también en que si $G_p \cdot s$ es una órbita principal para la acción $G_p \curvearrowright \Sigma$, entonces $G \cdot s$ es principal, como consecuencia del Corolario 3.18 y de la definición de órbita principal. En consecuencia si $q\colon \Sigma \to \Sigma/G_p$ es la proyección canónica, $f^{-1}(\pi(M_S)) \subseteq q(\Sigma_S)$, de donde $q(\Sigma_R) = (\Sigma/G_p) \setminus q(\Sigma_S) \subseteq (\Sigma/G_p) \setminus f^{-1}(\pi(M_S))$. Por densidad de $q(\Sigma_R)$ en S/G_p, tendremos que si $q(\Sigma_R)$ es conexo, entonces $(\Sigma/G_p) \setminus f^{-1}(\pi(M_S))$ es también conexo. Nos centraremos entonces en demostrar que $q(\Sigma_R)$ es conexo.

Por ser $\exp_p\colon B_{0_p}(\varepsilon) \cap \nu_p(G \cdot p) \to \Sigma$ un difeomorfismo equivariante, induce un homeomorfismo entre los espacios de órbitas que preserva las órbitas principales. Además, la acción de G_p sobre $\nu_p(G \cdot p)$ es ortogonal, de manera que nos será suficiente probar la siguiente afirmación:

Si $G \curvearrowright V$ es una acción ortogonal de un grupo de Lie compacto sobre un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $\pi(V_R)$ es conexo, siendo π la proyección canónica.

Probaremos la afirmación por inducción en $\dim V$. En el caso de que $\dim V = 1$, podemos suponer directamente que $V = \mathbb{R}$. Las únicas transformaciones ortogonales que admite $\mathbb{R}$ son $\pm \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Si G actúa solamente mediante la aplicación identidad, entonces el espacio de órbitas es $\mathbb{R}$, y todas las órbitas son principales, de modo que $\pi(\mathbb{R}_R) = \mathbb{R}$ es conexo. Si existen $g, g' \in G$ tales que $g \cdot x = x$ y $g' \cdot x = -x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, todas las órbitas salvo la de 0 son principales, y la asignación $\pi(x) \in \mathbb{R}/G \mapsto |x| \in [0, \infty)$ define un homeomorfismo, de modo que $\pi(\mathbb{R}_R) \cong (0, \infty)$ es conexo.

Supongamos ahora que el resultado es cierto cuando $\dim V < n$, y tomemos una acción $G \curvearrowright V$ en las condiciones anteriores, siendo $\dim V = n$. Al ser la acción ortogonal, tenemos que cada esfera $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ es G-invariante. Aplicando la hipótesis de inducción, el hecho de que cualquier slice para la acción $G \curvearrowright \mathbb{S}^{n-1}(r)$ tiene dimensión inferior a n, la representación slice y la primera observación, tenemos garantizado que las órbitas principales de la acción $G \curvearrowright \mathbb{S}^{n-1}(r)$ conforman un subespacio conexo por caminos de $\mathbb{S}^{n-1}(r)/G \cong \pi(\mathbb{S}^{n-1}(r))$. Además, para una órbita $G \cdot v$ contenida en $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ es equivalente que sea principal para $G \curvearrowright \mathbb{S}^{n-1}(r)$ a que lo sea para $G \curvearrowright V$. Teniendo todo ello en cuenta, podemos probar que $\pi(V_R)$ es conexo por caminos:

Tomamos $\pi(x), \pi(y) \in \pi(V_R)$ puntos cualesquiera. Salvo que la acción sea trivial, necesariamente $x, y \neq 0$. Si $\tilde{x} = x/||x||$, entonces el camino $\gamma(t) = \pi((1-t)x + t\tilde{x})$ une x con $\tilde{x}$. Además, puesto que las homotecias $v \mapsto \lambda v$ son difeomorfismos G-equivariantes para cada $\lambda > 0$, tenemos que cada $\gamma(t)$ es una órbita principal, ya que lo era $\pi(x) = \gamma(0)$. Por lo tanto, los puntos $\pi(x)$ y $\pi(\tilde{x})$ están conectados por un camino en $\pi(V_R)$. Del mismo modo, $\pi(y)$ y $\pi(\tilde{y})$ están conectados por un camino en $\pi(V_R)$, siendo $\tilde{y} = y/||y||$. Aplicando ahora que $\pi(\mathbb{S}^{n-1}) \cap \pi(V_R)$ es conexo por caminos, encontramos un tercer camino en $\pi(V_R)$ que conecta $\pi(\tilde{x})$ con $\pi(\tilde{y})$. Concatenando esos tres caminos, obtenemos un camino de $\pi(x)$ a $\pi(y)$, con lo que hemos demostrado que $\pi(V_R)$ es conexo por caminos tal y como queríamos demostrar.

En definitiva, llegamos a que $\pi(\Sigma)$ es un entorno de $\pi(p)$ tal que $\pi(\Sigma) \setminus \pi(M_S)$ es conexo. Por lo tanto, $\pi(M_S)$ no desconecta localmente a M/G, y concluimos que $\pi(M_R)$ es conexo, lo que termina la demostración. □

Corolario 3.27. *Si G es un grupo de Lie que actúa propiamente sobre una variedad conexa M, entonces todas las órbitas principales tienen el mismo tipo.*

Demostración. Sea $\pi\colon M \to M/G$ la proyección canónica. Por el Teorema 3.26, sabemos que $\pi(M_R)$ es un subconjunto conexo de M/G.

Tomemos $p \in M_R$ un punto arbitrario, y denotemos por $[G \cdot p]$ al tipo de la órbita de p. Veremos que si $G \cdot q$ es una órbita principal, entonces $[G \cdot q] = [G \cdot p]$.

Consideremos $A = \pi(\{q \in M_R \colon [G \cdot q] = [G \cdot p]\}) \neq \emptyset$. Por un lado A es abierto en $\pi(M_R)$. En efecto, si $\pi(q) \in A$, entonces en virtud del Slice Theorem 3.21 y del Corolario 3.18, podemos encontrar un slice S en q de manera que para cada $s \in S$, $G_s = G_q$, con lo que $[G \cdot s] = [G \cdot q] = [G \cdot p]$, y $G \cdot s$ es una órbita principal. Por lo tanto, $\pi(S) \subseteq \pi(M_R)$ es un subconjunto abierto de M/G (y por tanto, de $\pi(M_R)$) que contiene a $\pi(q)$ y tal que $\pi(S) \subseteq A$. Así, tenemos probado que A es abierto en $\pi(M_R)$.

Por otro lado, A también es cerrado en $\pi(M_R)$: dado cualquier $\pi(q) \in \pi(M_R) \setminus A$, tenemos que $G \cdot q$ es una órbita principal con $[G \cdot q] \neq [G \cdot p]$. Tomado un slice S en q tal que $G_s = G_q$ para todo $s \in S$, y $G \cdot s$ es principal, volvemos a deducir que $\pi(S) \subseteq \pi(M_R)$ es un conjunto abierto que contiene a $\pi(q)$. Como $[G \cdot s] = [G \cdot q] \neq [G \cdot p]$ para todo $s \in S$, tendremos que $\pi(S) \subseteq \pi(M_R) \setminus A$. Por consiguiente, $\pi(M_R) \setminus A$ es abierto en $\pi(M_R)$, de donde A es cerrado en $\pi(M_R)$.

Recordando ahora que $\pi(M_R)$ es conexo, el hecho de que A sea tanto abierto como cerrado en $\pi(M_R)$ obliga a que necesariamente $A = \pi(M_R)$. Así, tenemos demostrada la afirmación. □

Teorema 3.28. *Sea $G \curvearrowright M$ una acción propia de un grupo de Lie sobre una variedad conexa. Entre todos los tipos de órbitas para la acción, existe un tipo máximo: el de las órbitas principales.*

Demostración. Sabemos que encontrar un tipo de órbita máximo para la acción es equivalente a encontrar una clase de conjugación mínima entre los subgrupos de isotropía. Probaremos que la clase de conjugación de los subgrupos de isotropía asociados a órbitas principales (que es única gracias al Corolario 3.27) es mínima para la acción, viendo que si $\tilde{p} \in M_R$, entonces $(G_p) \geq (G_{\tilde{p}})$ para todo $p \in M$.

En primer lugar, demostraremos que para cualquier clase de conjugación (G_p), existe una clase minimal (G_q) tal que $(G_q) \leq (G_p)$. Supongamos que no fuese cierto el resultado, entonces podemos dar un $p \in M$ de manera que no existe una clase minimal menor o igual a G_p. Al ser (G_p) un elemento no minimal, existe un subgrupo de isotropía G_{p_1} de modo que $(G_{p_1}) < (G_p)$. En particular, existe un $g \in G$ tal que $G_{g \cdot p_1} = gG_{p_1}g^{-1} \subsetneq G_p$. Por lo tanto, escogiendo $q_1 = g \cdot p_1$, tenemos que $G_{q_1} \subset G_p$.

Ya que (G_p) no está acotado inferiormente por un elemento minimal, necesariamente (G_{q_1}) no es minimal. Repitiendo el razonamiento anterior, encontramos un elemento $q_2 \in M$ tal que $G_{q_2} \subset G_{q_1}$. Siguiendo este proceso por recurrencia, podemos obtener una sucesión estrictamente decreciente de subgrupos de isotropía $G_p \supset G_{q_1} \supset G_{q_2} \supset G_{q_3} \supset \ldots$

En particular, la sucesión $(\dim G_{q_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente. Definimos entonces $k = \text{mín}\{\dim G_{q_i} : i \in \mathbb{N}\}$, y sea $t = \text{mín}\{\Gamma(G_{q_i}) : i \in \mathbb{N}, \dim G_{q_i} = k\}$, siendo $\Gamma(G_{q_i})$ el número de componentes conexas de G_{q_i} (que es finito, ya que G_{q_i} es compacto). Escogemos un $j \in \mathbb{N}$ de manera que $\dim G_{q_j} = k$ y G_{q_j} tenga exactamente t componentes conexas. El subgrupo $G_{q_{j+1}} \subset G_{q_j}$ es abierto en G_{q_j}, al tener dimensión k (gracias a que la sucesión es decreciente y k es mínimo), y cerrado en G_{q_j} por ser compacto. En consecuencia, $G_{q_{j+1}}$ es unión de componentes conexas de G_{q_j} (que lo son a su vez de $G_{q_{j+1}}$), y como tiene t componentes conexas, la única posibilidad es que $G_{q_{j+1}} = G_{q_j}$, hecho que contradice que la sucesión $(G_{q_i})_{i \in \mathbb{N}}$ sea estrictamente decreciente.

Llegamos entonces a que toda clase de conjugación (G_p) tiene que estar acotada inferiormente por una clase minimal (G_q). Lo único que nos queda por ver es que $G \cdot q$ es una órbita principal.

Tomemos un slice S en q, garantizado por el Teorema 3.21. Tenemos que $G_s \subseteq G_q$ para cada $s \in S$, gracias al Corolario 3.18, con lo que $(G_s) \leq (G_q)$. Aplicando la minimalidad de (G_q), obtenemos que $(G_s) = (G_q)$ para todo $s \in S$, de modo que si $g \in G$, $s \in S$, tenemos $(G_{g \cdot s}) = (G_s) = (G_q)$. Así, el conjunto $G \cdot S$ es un abierto G-invariante que contiene a q cumpliendo que $(G_z) \leq (G_q)$ para todo $z \in G \cdot S$. Por lo tanto, la órbita $G \cdot q$ es principal, lo que implica que $(G_q) = (G_{\tilde{p}})$.

En definitiva, hemos visto que para cualquier punto $p \in M$, existe una órbita principal $G \cdot q$ tal que $(G_q) \leq (G_p)$, de modo que $(G_{\tilde{p}}) \leq (G_p)$. Así, $[G \cdot \tilde{p}] \geq [G \cdot p]$ para todo $p \in M$, con lo que concluimos que $[G \cdot \tilde{p}]$ es el tipo de órbita máximo para la acción. $\square$

Ya tenemos demostradas todas las afirmaciones del Teorema 3.24 justificadas, con lo que queda demostrado el Teorema de la Órbita Principal.

Ejemplo 3.29 (Una órbita excepcional)**.** En el Ejemplo 1.36, habíamos estudiado la acción $SO(n) \curvearrowright \mathbb{S}^n$ por rotaciones de eje e_{n+1}. No es difícil comprobar que esta acción desciende al espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$. De ese modo, la acción $SO(n) \curvearrowright \mathbb{RP}^n$ dada por

$$A \cdot [x, t] = [Ax, t], \quad A \in SO(n), [x, t] \in \mathbb{RP}^n,$$

está bien definida y es propia. Estudiemos los tipos de órbitas en el caso de la acción $SO(2) \curvearrowright \mathbb{RP}^2$.

Supongamos un punto cualquiera $p = [x, y, z] \in \mathbb{RP}^2$. Se dan tres situaciones distintas según el valor de $z \in [-1, 1]$.

En primer lugar, si $z = 1$ o $z = -1$, tenemos que $[x, y, z] = [0, 0, 1] = [0, 0, -1]$. En este caso, es inmediato que $SO(2) \cdot p = \{p\}$ y $SO(2)_p = SO(2)$.

En segundo lugar, si $0 < |z| < 1$, podemos tomar $z > 0$. La órbita $SO(2) \cdot p$ coincide con $D = \{[x', y', z'] \in \mathbb{RP}^2 \colon z' = \pm z\}$ por un argumento idéntico al empleado en el Ejemplo 1.36. Suponiendo además que $p = [r, 0, z]$, con $r = \sqrt{1 - z^2} > 0$, tenemos que una matriz $A \in SO(2)$ pertenece a $SO(2)_p$ exactamente cuando $A(r, 0) = (r, 0)$. La única matriz ortogonal que cumple esto es $A = I_2$, con lo que $SO(2)_p = \{I_2\}$, y la órbita $SO(2) \cdot p$ es principal, pues $(SO(2)_p)$ es mínimo.

En último lugar, supongamos $z = 0$. La órbita de $p = [x, y, 0]$ es $G \cdot p = \{[x, y, 0] \in \mathbb{RP}^2\}$. Podemos suponer que $p = [1, 0, 0]$, y una matriz $A \in SO(2)$ pertenece a $SO(2)_p$ si y solamente si $A(1, 0) = (1, 0)$ o $A(1, 0) = (-1, 0)$. Esto obliga a que $A = I_2$ o bien $A = -I_2$, lo que implica que $SO(2)_p = \{\pm I_2\} \cong \mathbb{Z}_2$. Así, la órbita $SO(2) \cdot [1, 0, 0]$ no es principal pero tiene la misma dimensión que las órbitas principales, de modo que es una órbita excepcional.

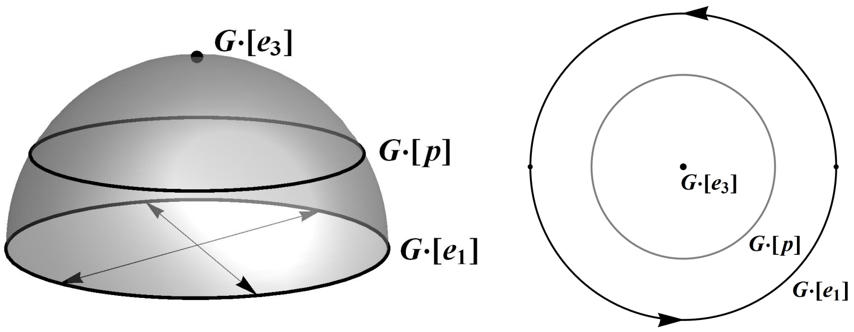

Figura 3.2: Órbitas para la acción $SO(2) \curvearrowright \mathbb{RP}^2$. Izquierda: modelo del plano proyectivo como cociente de $\mathbb{S}^2$; derecha: modelo del plano proyectivo como cociente de $B_0[1]$.

Los tres tipos de órbitas distintos aparecen representados en la Figura 3.2. Cabe destacar que $\mathbb{RP}^2_R = \{[x, y, z] \in \mathbb{RP}^2 \colon |z| \in (0, 1)\}$, que cumple todas las propiedades garantizadas por el Teorema de la Órbita Principal.

Ejemplo 3.30 ([6, Página 42])**.** Se considera el subespacio vectorial de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formado por todas las matrices simétricas con traza cero:

$$M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \colon X^T = X, \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

Sobre este espacio definimos un producto interior mediante $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}(XY)$, que hace de M un espacio euclídeo de dimensión 5. Por lo tanto, M es una variedad de Riemann.

Definimos una acción $\varphi \colon SO(3) \curvearrowright M$ de la siguiente manera:

$$A \cdot X = AXA^{-1} = AXA^T, \quad A \in SO(3), X \in M.$$

La acción es diferenciable y propia. Además, cada φ_A es una isometría lineal, lo que implica que esta acción es isométrica.

Para poder estudiar esta acción nos conviene recordar el *Teorema Espectral Real*: si $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, entonces todos sus autovalores son reales, y existe una matriz $P \in SO(3)$ de modo que PAP^T es diagonal (siendo los elementos de la diagonal sus autovalores). Más aún, dada otra matriz simétrica $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la existencia de una matriz $Q \in SO(3)$ cumpliendo que $Y = QXQ^T$ es equivalente a que X e Y tengan los mismos autovalores (incluyendo multiplicidades). Como consecuencia directa, podemos deducir que el subespacio vectorial $\Sigma \subseteq M$ formado por las matrices diagonales de traza nula interseca a todas las órbitas de la acción.

Vamos a estudiar los tipos de órbitas que posee esta acción. Para ello, tomemos una órbita $SO(3) \cdot X$ arbitraria. Ya que Σ corta a todas las órbitas, podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es una matriz diagonal. Pongamos entonces que $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$. Se pueden dar tres situaciones distintas en función de cuantos de los autovalores de X son distintos.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, la condición de traza nula obliga a que $\lambda = 0$. En consecuencia, $X = 0$, y la órbita correspondiente es $SO(3) \cdot 0 = \{0\}$. La isotropía, en este caso, es $SO(3)_0 = SO(3)$.

Estudiamos ahora el caso de que dos autovalores sean iguales. Pongamos que $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ (el caso $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$ es análogo), y supongamos que $A = (a_1|a_2|a_3)$ es una matriz de $SO(3)$ que verifica $A \cdot X = AXA^{-1} = X$. En tal caso, $XA = AX$, de manera que $Xa_3 = \lambda_3 a_3$. En consecuencia, $a_3 \in \ker(X - \lambda_3 I_3) = \mathrm{Span}\{e_3\}$, y por ser A ortogonal, se cumple que $a_3 = \pm e_3$. Aplicando que A debe ser ortogonal y de determinante positivo, obtenemos que el subgrupo de isotropía de X es

$$SO(3)_X = \left\{ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} : B \in O(2), |c| = 1, \det(B) = c \right\} = H \cong S(O(2) \times O(1)) \cong O(2).$$

Así, la órbita $SO(3) \cdot X$ es difeomorfa a $SO(3)/H$. Este cociente es a su vez difeomorfo al plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$: si se considera la acción propia $SO(3) \curvearrowright \mathbb{RP}^2$ definida mediante $A \cdot [x] = [Ax]$, se comprueba fácilmente que la acción es transitiva y que el subgrupo de isotropía de $[0, 0, 1]$ es H. Por consiguiente, $SO(3)/H \cong \mathbb{RP}^2$.

Finalmente, veamos el caso en el que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Si $A = (a_1|a_2|a_3) \in SO(3)$ es una matriz que verifica que $A \cdot X = AXA^{-1} = X$, volvemos a obtener que $Xa_i = \lambda_i a_i$ para todo $i = 1, 2, 3$. Así, $a_i \in \ker(X - \lambda_i I_3) = \mathrm{Span}\{e_i\}$, de donde $a_i = c_i e_i$ con $c_i = \pm 1$. Tenemos pues que el subgrupo de isotropía de X es

$$\begin{aligned} SO(3)_X =& \{\mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3) \colon c_i = \pm 1, c_1 c_2 c_3 = 1\} \\ =& \{\mathrm{diag}(1, 1, 1), \mathrm{diag}(1, -1, -1), \mathrm{diag}(-1, 1, -1), \mathrm{diag}(-1, -1, 1)\}. \end{aligned}$$

Este grupo es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, al no tener elementos de orden 4. Obtenemos entonces que $SO(3) \cdot X$ es difeomorfa a $SO(3)/\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, y es una órbita principal, ya que la isotropía $SO(3)_X$ tiene dimensión 0, la menor posible.

Vamos a encontrar ahora el espacio de órbitas $M/SO(3)$. Lo haremos en dos pasos. Primero, veremos quién es el espacio $\mathbb{S}M/SO(3)$, siendo $\mathbb{S}M$ la esfera unidad del espacio euclídeo M dada por $\mathbb{S}M = \{X \in M \colon \langle X, X \rangle = 1\}$, para después obtener M/G como el cono de $\mathbb{S}M/SO(3)$.

Empecemos hallando $\mathbb{S}M/SO(3)$, y sea $\eta \colon \mathbb{S}M \to \mathbb{S}M/SO(3)$ la proyección canónica. Notemos que este cociente tiene sentido, ya que al ser la acción isométrica, las esferas son invariantes. Basándonos en el *Teorema Espectral Real*, construimos el subconjunto de $\mathbb{R}^3$

siguiente:

$$\Omega = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \colon \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1\}.$$

Ya que dos matrices de $\mathbb{S}M$ pertenecen a la misma órbita si y solamente si tienen los mismos autovalores, deducimos que la aplicación

$$\begin{aligned} f\colon \Omega &\to \mathbb{S}M/SO(3) \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &\mapsto \eta(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \end{aligned}$$

es una biyección continua. Puesto que Ω es compacto, por ser cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$, y $\mathbb{S}M/SO(3)$ es Hausdorff, concluimos que f es un homemorfismo.

A la vista de la Figura 3.3, vemos que el conjunto Ω es un arco de circunferencia homeomorfo a $[0, 1]$. Así, ya tenemos determinado el espacio de órbitas $\mathbb{S}M/SO(3)$, que es precisamente $\mathbb{S}M/SO(3) \cong [0, 1]$.

Finalmente, observemos que $M/SO(3)$ es homeomorfo al cono $C(\mathbb{S}M/SO(3))$, donde entendemos que el cono de un espacio topológico X es el cociente de $X \times [0, \infty)$ bajo la relación de equivalencia que colapsa $X \times \{0\}$ a un único punto. En efecto, un posible homeomorfismo entre ambos espacios es

$$\begin{aligned} g\colon C(\mathbb{S}M/SO(3)) &\to M/SO(3) \\ [\eta(X), t] &\mapsto \pi(tX) \end{aligned}$$

Se llega así a que

$$M/SO(3) \cong C(\mathbb{S}M/SO(3)) \cong C([0, 1]) \cong [0, \infty) \times [0, \infty),$$

donde un homeomorfismo de $C([0, 1])$ en $[0, \infty) \times [0, \infty)$ es la aplicación que a cada $[s, t] \in C([0, 1])$ le asigna $(t - ts, st) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$. La Figura 3.3 muestra que $M/SO(3)$ también se puede ver como el cono generado por A en $\mathbb{R}^3$. Nuevamente, $\pi(M_R)$ es un abierto denso y conexo del espacio de órbitas $M/SO(3)$, correspondiéndose con $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Observación 3.31. En general, si $G \curvearrowright V$ es una acción ortogonal y propia de un grupo de Lie sobre un espacio euclídeo, siempre se verifica que $C(\mathbb{S}V/G) \cong V/G$, ya que el homeomorfismo que dimos en el caso de M es válido para cualquier espacio euclídeo V.

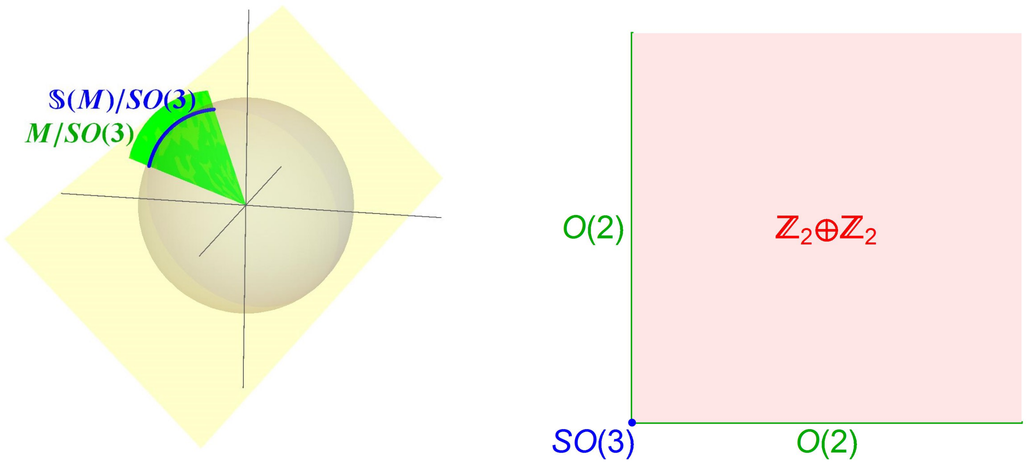

Figura 3.3: Izquierda: representación gráfica del conjunto $\Omega \cong \mathbb{S}M/SO(3)$ (azul), junto con su cono $C(\Omega) \cong M/SO(3)$ (verde), embebido en $\mathbb{R}^3$ como el cono generado por Ω. Derecha: representación del espacio de órbitas $M/SO(3) \cong [0,\infty) \times [0,\infty)$ coloreado según el tipo de isotropía de sus órbitas.

Bibliografía

[1] M. M. Alexandrino, R. G. Bettiol, *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*, Springer, Cham, 2015.

[2] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[3] J. Berndt, S. Console, C. E. Olmos, *Submanifolds and Holonomy*, 2nd ed., Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[4] A. Borel, Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups, *History of Mathematics 21, American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, Cambridge*, 2001.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*, Hermann, Paris, 1971.

[6] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Mathematics 46, Academic Press, New York-London, 1972.

[7] J. Dupont, *Fibre bundles and Chern-Weil theory*, Lecture Notes Series 69, Aarhus Universitet, 2003.

[8] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Translated from the 1987 Japanese edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991.

[9] L. Kennard, *Lecture notes for Math 260P: Group actions*, https://www.math.upenn.edu/~wziller/math661/LectureNotesLee.pdf (Notas). Consultado por última vez: julio 2020.

[10] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*, 2nd ed., Springer, Cham, 2018.

[11] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 218, Springer, New York, 2013.

[12] J. M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 202, Springer, New York, 2011.

[13] X. M. Masa Vázquez, *Curso de topoloxía: Dos números reais ao Grupo de Poincaré*, Manuais Universitarios 22, Universidade de Santiago de Compostela, Servizo de Publicacións e Intercambio Científico, 2019.

[14] P. Michor, *Topics in Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 93, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[15] D. Montgomery, C.T. Yang, The existence of a slice, *Ann. of Math.* **65** no. 2 (1957), 108–116.

[16] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and Applied Mathematics 103, Academic Press, New York, 1983.

[17] R. S. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups. *Ann. of Math.* **73** no. 2 (1961), 295–323.

[18] R. S. Palais, C. Terng, *Critical point theory and submanifold geometry*, Lecture Notes in Mathematics 1353, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[19] L. Pontrjagin, *Topological Groups*, Translated from the Russian by Emma Lehmer. Princeton Mathematical Series 2, Princeton University Press, Princeton, 1939.

[20] M. R. Sepanski, *Compact Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics 235, Springer, New York, 2007.

[21] C. H. Taubes, *Differential geometry. Bundles, connections, metrics and curvature*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 23, Oxford University Press, Oxford, 2011.

[22] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, 2nd ed., Universitext. Springer, New York, 2011.

[23] W. Ziller, *Lie Groups. Representation Theory and Symmetric Spaces*, https://www.math.upenn.edu/~wziller/math650/LieGroupsReps.pdf (Notas). Consultado por última vez: julio 2020.