



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Existencia de soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu

Eliseo Pita Vilariño

2023/2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Existencia de soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu

Eliseo Pita Vilariño

Xullo, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Conocimiento: Análisis Matemático
Título: Existencia de soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu
Breve descripción do contido
En este trabajo consideraremos la dinámica de un haz de electrones guiado por un campo magnético periódico axialmente simétrico. Este tipo de mecanismos se conocen como pistola electrónica o válvula de microondas y son una parte de muchos dispositivos electrónicos científicos, industriales y domésticos. Su dinámica se puede modelar a través de la ecuación de Mathieu, la cual es una ecuación de segundo orden con singularidades y que puede ser tratada como un caso particular de la ecuación de Hill. De este modo nos centraremos en el modelado del fenómeno y describiremos algunos resultados que garantizan la existencia de soluciones periódicas de signo constante.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen	VIII
Introducción	XI
1. Modelado del problema	1
1.1. Descripción del problema	1
1.2. Funcionales y ecuación de Euler-Lagrange	2
1.3. Lagrangianos y principio de mínima acción	3
1.4. Campos axialmente simétricos y trayectorias paraxiales	5
1.5. Ecuaciones de Maxwell y energía en campos estáticos	6
1.6. Teorema de Busch y principio de Maupertuis	9
1.7. Ecuaciones diferenciales de trayectoria	10
2. Ecuación de Hill homogénea	17
2.1. Operador de Hill	17
2.2. Teoría de oscilación de Sturm	19
2.3. Propiedades espectrales	22
3. Función de Green	25
3.1. Definición y propiedades	25
3.2. Propiedades de la función de Green periódica	32

3.3. Signo constante de la función de Green	36
3.3.1. Función de Green para la ecuación de dispersión del haz de electrones	40
4. Problemas con dependencia paramétrica	43
4.1. Preliminares y notación	43
4.2. Existencia y multiplicidad de solución	46
Bibliografía	57

Resumen

En este trabajo, se estudiará la existencia de soluciones periódicas de la ecuación de Mathieu, un caso particular de la ecuación de Hill. Para introducir esta ecuación, se presentará brevemente cómo esta modela el comportamiento de un haz de electrones guiado por un campo magnético periódico axialmente simétrico, un fenómeno relevante en diversos dispositivos electrónicos. A continuación, se abordará el concepto de la ecuación de Hill, estudiando el comportamiento de sus soluciones en función del potencial periódico que la define, y se introducirá la función de Green asociada. Posteriormente, aplicando condiciones de contorno periódicas, se obtendrán resultados que permitan analizar el signo de la función de Green en base al potencial asociado. Finalmente, se demostrará la existencia de soluciones periódicas de signo constante para la ecuación de Mathieu.

Abstract

In this work, the existence of periodic solutions of the Mathieu equation, a particular case of the Hill equation, will be studied. To introduce this equation, it will be briefly presented how it models the behavior of an electron beam guided by an axially symmetric periodic magnetic field, a phenomenon relevant in various electronic devices. Next, the concept of the Hill equation will be addressed, studying the behavior of its solutions based on the periodic potential that defines it, moreover the related Green's function will be introduced. Subsequently, by applying periodic boundary conditions, some results will be obtained that allow to analyze the sign of the Green's function based on the associated potential. Finally, the existence of periodic solutions of constant sign for the Mathieu equation will be proved.

Introducción

La pistola electrónica es un mecanismo utilizado para generar haces de electrones en aplicaciones científicas, industriales y domésticas. Este se encuentra presente en dispositivos como tubos de rayos catódicos, de microondas o de rayos X. Por tanto, estudio es relevante en campos como la física, la ingeniería y la medicina.

El siguiente trabajo se divide en 4 capítulos. En el primero, se modelará el comportamiento de un haz de electrones guiado por un campo magnético periódico axialmente simétrico. Para ello, haciendo uso de resultados clásicos de física como las ecuaciones de Maxwell, el teorema de Busch, el principio de Maupertuis o el principio de mínima acción, se obtendrá una ecuación diferencial de segundo orden que describirá la dinámica del haz de electrones. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Mathieu y es un caso particular de la ecuación de Hill.

Una vez modelado el problema, se tratará de buscar bajo qué condiciones la ecuación de Mathieu tiene soluciones periódicas. Para ello, se comenzará introduciendo el operador de Hill, un operador lineal de segundo orden con un coeficiente periódico que viene dado por una función $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, conocida como potencial. En función de este potencial, se estudiará el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Hill mediante la teoría oscilatoria de Sturm y las propiedades espectrales la ecuación homogénea de Hill.

En el tercer capítulo se introducirá el concepto de función de Green asociada a la ecuación de Hill. Esta es una herramienta fundamental para el estudio de la mencionada ecuación, ya que proporciona un método para representar las soluciones en términos de integrales. Se impondrán condiciones de contorno periódicas y se estudiará el comportamiento del signo de la función de Green en función del potencial asociado.

Finalmente, en el último capítulo se pasará a trabajar con el problema no homogéneo de Hill. El objetivo será determinar las condiciones bajo las cuales este tipo de ecuaciones tienen soluciones periódicas de signo constante, lo cual se podrá aplicar al problema modelado en el primer capítulo. Para ello, se impondrán diferentes condiciones sobre los parámetros que definen el problema. Entre ellos destaca el signo de la función de Green, por lo que los resultados del Capítulo 3 serán de especial relevancia.

Capítulo 1

Modelado del problema

En este capítulo introduciremos el problema que queremos resolver. Comenzaremos modelando el comportamiento de un haz de electrones guiado por un campo magnético periódico y con simetría axial siguiendo [7, 6]. Para ello, presentaremos una serie de conceptos matemáticos, como son los funcionales de primer orden y las ecuaciones de Euler-Lagrange que nos permitirán plantear la ecuación de Mathieu. A continuación, trabajaremos con los conceptos de lagrangiano y el principio de mínima acción, que nos permitirán obtener la ecuación de movimiento de un electrón a lo largo del haz, apoyándonos en otros resultados de la física clásica como las ecuaciones de Maxwell, el teorema de Busch y la conservación de la energía en campos estáticos.

1.1. Descripción del problema

Para introducir la ecuación de Mathieu comenzaremos modelando el comportamiento de un haz de electrones guiado por un campo magnético periódico y con simetría axial. Es decir, el campo mantiene simetría alrededor de un eje central y las propiedades magnéticas se repiten regularmente a lo largo de este.

Este tipo de mecanismos se conocen como *cañón de electrones* o *válvula de microondas*. En estos sistemas un cátodo produce un haz de electrones, el cual tiende a dispersarse a lo largo del medio. Para contrarrestar este efecto se colocan una serie de imanes, alternando su polaridad, de forma periódica. Esto permite crear un campo magnético periódico y con simetría axial, que evita la dispersión del haz de electrones. Al trabajar con simetría axial podremos expresar el modelo en coordenadas cilíndricas (r, θ) .

Comenzaremos introduciendo una serie de conceptos matemáticos que nos servirán como herramienta para modelar la ecuación del movimiento de un electrón a lo largo del haz.

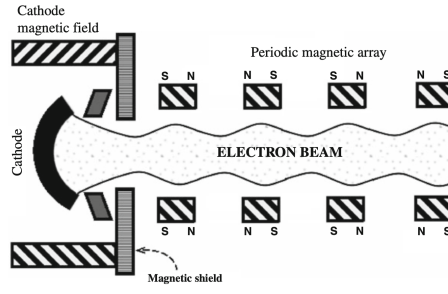


Figura 1.1: Sección longitudinal del haz de electrones, emitido por un cátodo y expuesto a un campo magnético axialmente simétrico y periódico. (Imagen extraída de [6]).

1.2. Funcionales y ecuación de Euler-Lagrange

Los funcionales son una generalización de las funciones. Mientras que las funciones asignan un número real a un punto, los funcionales asignan un número real a una función. En este caso, trabajaremos con funcionales de primer orden, los cuales asignan un número real a una función de clase uno. Para poder trabajar con ellos necesitaremos definir una serie de conceptos matemáticos, basándonos en [4] para los conceptos relacionados con funcionales y en [5] para la ecuación de Euler-Lagrange.

Definición 1.1 (Funcional de primer orden). Sean $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ y $\mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones continuamente diferenciables de $[t_0, t_1]$ en \mathbb{R}^n . Se dice que $\phi : \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es un *funcional de primer orden*. Es decir, ϕ es una aplicación que asigna un número real a una función de clase uno $\hat{\mathbf{x}}$.

A partir de ahora necesitaremos que $\mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ sea un espacio normado. Es por ello que definimos la norma $\|\cdot\|_1$ como:

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \max_{t \in [t_1, t_2]} \|\mathbf{x}(t)\|_\infty + \max_{t \in [t_1, t_2]} \|\mathbf{x}'(t)\|_\infty \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n).$$

Esto nos permite definir una bola abierta centrada en $\hat{\mathbf{x}}$ y con radio δ como:

$$B_\delta(\hat{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) : \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1 < \delta\}.$$

Al igual que con las funciones, se puede definir la continuidad y diferenciabilidad de los funcionales. En este caso, la diferenciabilidad se define a través de la diferencial de Fréchet.

Definición 1.2 (Funcional continuo). Diremos que un funcional $\phi : \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ es *continuo* en $\hat{\mathbf{x}}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_1 < \delta$ entonces

$$|\phi(\mathbf{x}) - \phi(\hat{\mathbf{x}})| < \varepsilon.$$

Definición 1.3 (Funcional Fréchet diferenciable). Sea $\phi : \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional continuo. Diremos que ϕ es *Fréchet diferenciable* en $\hat{\mathbf{x}}$ si existe una aplicación lineal $F_{\hat{\mathbf{x}}} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ tal que:

$$\phi(\hat{\mathbf{x}} + h) - \phi(\hat{\mathbf{x}}) - F_{\hat{\mathbf{x}}}h = \varepsilon(h),$$

donde $\frac{\varepsilon(h)}{\|h\|_1} \rightarrow 0$ cuando $\|h\|_1 \rightarrow 0$. Esta definición de diferencial se conoce como *diferencial de Fréchet*.

Definición 1.4 (Extremo relativo de un funcional). Sea $\phi : \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional y $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$. Diremos que $\hat{\mathbf{x}}$ es un *extremo relativo* de ϕ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\hat{\mathbf{x}})$ se cumple que $\phi(\mathbf{x}) \geq \phi(\hat{\mathbf{x}})$ o bien que $\phi(\hat{\mathbf{x}}) \geq \phi(\mathbf{x})$. En el primer caso diremos que $\hat{\mathbf{x}}$ es un mínimo y en el segundo que $\hat{\mathbf{x}}$ es un máximo.

Teorema 1.5 (Condición necesaria para un extremo relativo). *Sea $\phi : \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional diferenciable. Si ϕ tiene un extremo relativo en $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ entonces:*

$$F_{\hat{\mathbf{x}}}(h) = 0 \quad \forall h \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n).$$

A continuación definiremos un tipo de funcional concreto. Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ una función con condiciones de contorno $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}_2$ y $L : [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $L \in \mathcal{C}^2([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Definimos nuestro funcional $\phi : \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)) dt. \quad (1.1)$$

Esto nos permitirá enunciar el siguiente teorema, el cual nos da una condición necesaria para que ϕ tenga un extremo relativo.

Teorema 1.6 (Ecuaciones de Euler-Lagrange). *Para $L \in \mathcal{C}^2([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, se tiene que para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^1([t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$ que es un extremo relativo de la integral*

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t)) dt$$

se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir, para cada $i = 1, \dots, n$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x_i'} \right) = 0. \quad (1.2)$$

1.3. Lagrangianos y principio de mínima acción

Las funciones lagrangianas son funciones escalares de gran importancia en la física. A partir de ellas se pueden obtener la evolución temporal, las leyes de la conservación y otras propiedades importantes de un sistema dinámico. Es por ello que introducimos la siguiente definición:

Definición 1.7 (Lagrangiano). Un *lagrangiano* es una función escalar $L \in \mathcal{C}^2([t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ que describe el estado de un sistema dinámico en función de la posición, velocidad y tiempo, y que es igual a la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema.

A partir de ahora trabajaremos con la notación usada en la mecánica clásica. Identificaremos \mathbf{x} con \mathbf{q} , vector al que llamaremos vector de *coordenadas generalizadas*. Su derivada $\dot{\mathbf{q}} := \mathbf{q}'$ se llamará vector de *velocidades generalizadas*. L será el *lagrangiano* y $S = \phi$, definido en (1.1), será la *acción*. Por último, llamaremos vector de *momentos generalizados* a $\mathbf{p} := (\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n})$. Esta notación nos permite dar una nueva definición.

Definición 1.8. (Coordenada cíclica) Diremos que una coordenada generalizada q_i es cíclica si el lagrangiano no depende explícitamente de ella, es decir, si:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

En nuestro caso, para modelar el problema, trabajaremos en tres dimensiones ($n = 3$). Además, utilizaremos el lagrangiano de un electrón sometido a un campo electromagnético, el cual tiene la siguiente forma:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \beta^2} - e_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e_0\varphi, \quad (1.3)$$

donde \mathbf{A} es el *potencial magnético*; e_0 , la *carga* de un electrón; m_0 , la *masa en reposo* del electrón; \mathbf{v} , la *velocidad* del electrón; $\beta = \frac{v}{c}$, la *velocidad relativa*; c , la *velocidad de la luz* y φ , el *potencial eléctrico*. Cabe decir que con v nos referimos al módulo del vector velocidad del electrón \mathbf{v} . De forma que podemos reescribir el lagrangiano como:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}} - e_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e_0\varphi.$$

Por lo que el momento generalizado vendría dado por:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = -m_0c^2 \frac{1}{2\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{-2\mathbf{v}}{c^2} - e_0\mathbf{A} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - e_0\mathbf{A} = \mathbf{p} - e_0\mathbf{A},$$

siendo $\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v}$ el *momento lineal*, con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ el *factor de Lorentz*. Y así:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}(1 - \beta^2) - e_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e_0\varphi = -\frac{m\sqrt{1 - \beta^2}c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}(1 - \beta^2) - e_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e_0\varphi \\ &= -mc^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) - e_0\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e_0\varphi = (m\mathbf{v} - e_0\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - mc^2 + e_0\varphi = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - w, \end{aligned}$$

donde $w = mc^2 - e_0\varphi$ es la *energía total* del electrón y $m = \gamma m_0$, la *masa relativista* del electrón.

Para extraer la trayectoria de un electrón a partir del lagrangiano necesitamos utilizar el siguiente teorema, conocido como el *principio de mínima acción*:

Teorema 1.9 (Principio de mínima acción). *El principio de mínima acción nos dice que la trayectoria que sigue un sistema dinámico es aquella que minimiza la acción. Es decir, si $\mathbf{q}(t)$ es la trayectoria que sigue el sistema, cumpliendo que $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}(t_2) = \mathbf{q}_2$, entonces la acción S es mínima si y solo si:*

$$\delta S = 0.$$

En particular, por las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.6), la trayectoria que sigue el sistema es aquella que satisface:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0.$$

1.4. Campos axialmente simétricos y trayectorias paraxiales

Para simplificar el problema asumiremos que el campo electromagnético es axialmente simétrico y que las trayectorias son paraxiales. Esto significará que los electrones no se alejarán mucho de un eje central de simetría, lo cual nos permitirá trabajar con coordenadas cilíndricas y simplificar las ecuaciones de la trayectoria. Por un lado, definimos campo axialmente simétrico de la siguiente forma:

Definición 1.10. (Campo axialmente simétrico) Diremos que un campo es *axialmente simétrico* si es invariante bajo rotaciones alrededor de un eje central.

Cabe decir que a partir de ahora mediante los subíndices θ, r y z nos referiremos a las componentes angular, radial y axial de un vector, respectivamente.

Si trabajamos con coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (Figura 1.2), se cumple que para campos axialmente simétricos, la coordenada angular θ es una coordenada cíclica. Esto quiere decir que tanto φ como \mathbf{A} son independientes de θ :

$$\varphi = \varphi(\mathbf{q}(r, z)), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}(r, z)).$$

En este caso consideraremos la coordenada axial z como coordenada independiente. Así:

$$\mathbf{q}(z) = (r(z) \cos(\theta(z)), r(z) \text{sen}(\theta(z)), z).$$

A continuación, definimos lo que entendemos por trayectoria paraxial como sigue.

Definición 1.11. (Trayectoria paraxial) Diremos que una trayectoria es *paraxial* cuando las desviaciones con respecto al eje de simetría son insignificantes en comparación con la longitud recorrida a lo largo del mismo eje.

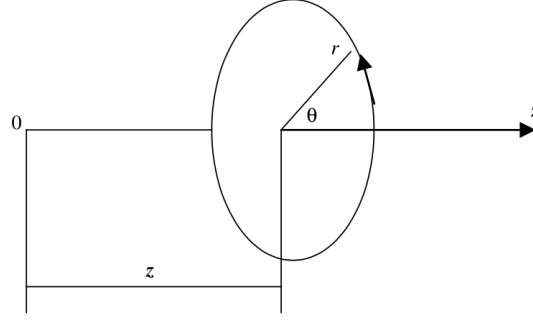


Figura 1.2: Coordenadas cilíndricas. (Imagen extraída de [7])

Esto implica dos condiciones:

1. *Velocidades transversales pequeñas:*

$$\frac{dr}{dt} \ll \frac{dz}{dt} \Rightarrow r' = \frac{dr}{dz} \ll 1, \quad r \frac{d\theta}{dt} \ll \frac{dz}{dt} \Rightarrow r\theta' = r \frac{d\theta}{dz} \ll 1.$$

Como consecuencia:

$$\sqrt{1 + r'^2 + r^2\theta'^2} \approx 1. \quad (1.4)$$

2. *Pequeñas desviaciones al eje z:* Esto significa que las trayectorias no se desvían del eje z más que la distancia donde el potencial es igual al valor en el eje, de forma que:

$$\varphi(r, z) = \varphi(0, z) \equiv \varphi_z(z).$$

Esto, usando que $E = -\nabla\varphi$, también es aplicable a las componentes axiales de los campos:

$$\begin{aligned} E_z(r, z) &= -\frac{\partial\varphi(r, z)}{\partial z} \approx -\frac{d\varphi(0, z)}{dz} \equiv -\varphi'_z(z) = E_z(0, z). \\ B_z(r, z) &\approx B_z(0, z) \equiv B_z(z). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Además, en la aproximación paraxial también es común asumir que la *densidad de carga* ρ es cero, ya que nos encontramos en el vacío.

Una vez que tenemos claros los conceptos de campo axialmente simétrico y de trayectoria paraxial podemos tratar de obtener las ecuaciones de trayectoria. Pero antes deduciremos algunas relaciones y principios clásicos de la física.

1.5. Ecuaciones de Maxwell y energía en campos estáticos

Las ecuaciones de Maxwell describen cómo interactúan los campos eléctricos y magnéticos en el vacío:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (1.6)$$

donde \mathbf{j} es la *densidad de corriente*; ρ , la *densidad de carga* y $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$, la *permitividad en el vacío*.

Partiendo de la tercera relación, llegamos a que:

$$B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

y, como en una aproximación paraxial se tiene que $A_r \ll A_z$:

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = -B_\theta.$$

Ahora consideramos I_r como la corriente que pasa por una circunferencia perpendicular al eje z y de radio r , denotada por S . Si tomamos la segunda relación y tenemos en cuenta un campo estático ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$):

$$\mu_0 I_r = - \int_S \mu_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \text{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

Y tomando el cambio de variable $\mathbf{l}(\theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{B} \cdot r \mathbf{e}_\theta d\theta = 2\pi r B_\theta.$$

Es decir, llegamos a que:

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r}. \quad (1.7)$$

El flujo magnético Ψ que pasa a través de una circunferencia de radio r y es perpendicular al eje z se calcula de la siguiente forma:

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si volvemos a tomar la tercera relación y aplicamos las mismas cuentas que antes, obtenemos:

$$r A_\theta = \frac{\Psi}{2\pi}. \quad (1.8)$$

Por último, tomaremos la primera relación. La divergencia en coordenadas cilíndricas es la siguiente:

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Por trabajar con un campo axialmente simétrico la segunda componente es nula. Y por tomar una aproximación paraxial podemos tomar E_z únicamente en función de z y $\rho = 0$. Así, de (1.6) deducimos que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} + \frac{dE_z(0, z)}{dz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(r E_r)}{\partial r} = -r \frac{dE_z(0, z)}{dz}.$$

De manera que, integrando con respecto a r :

$$E_r = -\frac{r}{2}E'_z(z) + \frac{f(z)}{r}. \quad (1.9)$$

Si $f(z) \neq 0$, significa que hay una singularidad en el eje, lo cual implicaría que hay una carga puntual en el eje. En nuestro caso, como $\rho = 0$, $f(z) = 0$. Así:

$$E_r = \frac{r}{2}\varphi''_z, \quad (1.10)$$

donde $dE_z/dz = -\varphi''(0, z) \equiv -\varphi''$.

Para simplificar el modelado del problema, asumiremos que el campo electromagnético es estático, es decir, que no depende directamente del tiempo:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{q}(t)), \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{q}(t)), \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{q}(t));$$

donde \mathbf{E} es el campo eléctrico.

En los campos estáticos se cumple que la energía de un electrón en movimiento sometido al campo es constante. Es decir:

$$w = mc^2 - e_0\varphi = \text{cte}$$

Esta puede descomponerse en una parte potencial $w_0 = e_0\varphi = m_0c^2$ y una parte cinética $w_k = mc^2$. Así:

$$w_k = w - w_0 = (m - m_0)c^2 = m_0c^2(\gamma - 1).$$

Si $e_0\varphi_c$ es la energía cinética inicial del electrón en el cátodo. Entonces, de acuerdo con la conservación de energía:

$$mc^2 = m_0c^2 + e_0\varphi_c + e_0\varphi, \quad (1.11)$$

donde m y φ son la masa y potencial de un electrón en un punto arbitrario \mathbf{q} . Definiendo la energía reducida en reposo del electrón como $\varphi_0 := \frac{m_0c^2}{e_0}$:

$$mc^2 = e_0\varphi_0 + e_0\varphi_c + e_0\varphi = e_0(\varphi_0 + \varphi^*), \quad (1.12)$$

siendo $\varphi^* = \varphi_c + \varphi$ el *potencial efectivo*.

Si dividimos la ecuación (1.11) por m_0c^2 , tenemos que:

$$\gamma = \frac{m}{m_0} = 1 + \frac{e_0(\varphi + \varphi_c)}{m_0c^2} = 1 + \frac{e_0\varphi^*}{m_0c^2} = 1 + \frac{\varphi^*}{\varphi_0}. \quad (1.13)$$

Tomando la relación $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y despejando β llegamos a:

$$\beta = \frac{\sqrt{\varphi^*(2\varphi_0 + \varphi^*)}}{\varphi_0 + \varphi^*}. \quad (1.14)$$

1.6. Teorema de Busch y principio de Maupertuis

De manera similar a la forma en que la independencia de campo del tiempo conduce a una conservación de energía, cualquier simetría de campos (es decir, independencia del lagrangiano con respecto a alguna de las variables) conduce a la conservación de los momentos correspondientes. Si asumimos que una coordenada generalizada q_i es cíclica, entonces por las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.6):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{cte} \Rightarrow P_i = \text{cte}.$$

Este razonamiento nos servirá para llegar al *teorema de Busch*, que establece que la velocidad angular del electrón depende, únicamente, de la diferencia de flujo magnético entre el punto inicial y el punto a considerar. Reescribimos el lagrangiano en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} L &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} - e_0 \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e_0 \varphi \\ &= -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)} - e_0 (\dot{r} A_r + r \dot{\theta} A_\theta + \dot{z} A_z) + e_0 \varphi \end{aligned}$$

Por trabajar con campos axialmente simétricos la coordenada θ es cíclica. De forma que el *momento angular generalizado* P_θ es constante. Es decir, siguiendo la notación establecida:

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{r^2 \dot{\theta}}{c^2} - e_0 r A_\theta = m r^2 \dot{\theta} - e_0 r A_\theta = m r^2 \dot{\theta} - e_0 \frac{\Psi}{2\pi} = \text{cte}. \quad (1.15)$$

Esto se conoce como la *conservación del momento angular*. Ahora supongamos que el electrón sale del cátodo a una distancia r_c^2 del eje de simetría con una velocidad angular $\dot{\theta}_c$. Entonces:

$$m_c r_c^2 \dot{\theta}_c - e_0 \frac{\Psi_c}{2\pi} = m r^2 \dot{\theta} - e_0 \frac{\Psi}{2\pi}.$$

Llegando así al *teorema de Busch*:

$$\dot{\theta} = \frac{m_c r_c^2}{m r^2} \dot{\theta}_c + \frac{e_0}{2\pi m r^2} (\Psi - \Psi_c) = \frac{\gamma_c}{\gamma} \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 \dot{\theta}_c + \frac{\eta}{2\pi \gamma r^2} (\Psi - \Psi_c), \quad (1.16)$$

donde $\gamma \left(= \frac{m}{m_0} \right)$ y $\gamma_c \left(= \frac{m_c}{m_0} \right)$ son los *factores de Lorentz* en un punto arbitrario y en el cátodo, respectivamente. La constante $\eta = \frac{e_0}{m_0}$ se conoce *carga específica del electrón*.

En este punto disponemos de todas las herramientas para llegar al *principio de Maupertuis*, el cual nos ayudará a deducir las ecuaciones de la trayectoria del electrón.

Aplicamos el *principio de Hamilton* (1.9) al lagrangiano (1.3):

$$S_{min} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - w) dt.$$

Como la energía es constante:

$$S_{min} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dt - w(t_2 - t_1).$$

Dado que el segundo término será igual para cualquier trayectoria \mathbf{q} , podremos omitirlo. Además, tanto \mathbf{P} como \mathbf{v} dependen del tiempo únicamente a través de las coordenadas de posición. Podemos aplicar el cambio de variable $\mathbf{l}(t) = (q_1(t), q_2(t), q_3(t))$, llegando a:

$$S_M = \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} (\mathbf{p} - e_0 \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.17)$$

Esto se conoce como *principio de Maupertuis* y nos dice que de todas las trayectorias con energía constante que conectan los puntos \mathbf{q}_1 y \mathbf{q}_2 , la que sigue el electrón es aquella que minimiza la integral de línea S_M .

1.7. Ecuaciones diferenciales de trayectoria

El siguiente paso será aplicar las ecuaciones de Lagrange a S_M . Para ello trataremos de reescribir la integral. Partiendo de $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, se puede llegar a $p^2 = m^2 c^2 - m_0^2 c^2$, donde p es el módulo del *momento lineal* $\mathbf{p} = m_0 \gamma \mathbf{v}$. De manera que:

$$p^2 = m_0^2 c^2 \left(\frac{m^2 c^2}{m_0^2 c^2} - 1 \right) \Rightarrow p = m_0 c \sqrt{\frac{m^2 c^2}{m_0^2 c^2} - 1}.$$

Aplicando la relación (1.12):

$$p = m_0 c \sqrt{\frac{(e_0(\varphi_0 + \varphi^*))^2}{(e_0 \varphi_0)^2} - 1} = \frac{m_0 c}{\varphi_0} \sqrt{\varphi^*(\varphi^* + 2\varphi_0)} = \frac{e_0}{c} \Phi,$$

donde $\Phi = \sqrt{\varphi^*(\varphi^* + 2\varphi_0)}$.

Por último, asumiremos que una de las coordenadas, z , es independiente y que podemos escribir las demás, q_1 y q_2 , a partir de la primera. Es decir:

$$\mathbf{l}(z) = (q_1(z), q_2(z), z).$$

Aplicando este cambio de variable a (1.17):

$$\begin{aligned} S_M &= \int_{z_1}^{z_2} (\mathbf{p}(\mathbf{q}(z)) - e_0 \mathbf{A}(\mathbf{q}(z))) \cdot \mathbf{q}'(z) dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} (p(\mathbf{q}(z)) \sqrt{1 + q_1'^2(z) + q_2'^2(z)} - e_0 \mathbf{A}(\mathbf{q}(z)) \cdot \mathbf{q}'(z)) dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{e_0}{c} \Phi(\mathbf{q}(z)) \sqrt{1 + q_1'^2(z) + q_2'^2(z)} - e_0 \mathbf{A}(\mathbf{q}(z)) \cdot \mathbf{q}'(z) \right) dz. \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta las ecuaciones de Euler-Lagrange, llegamos a las *ecuaciones diferenciales de trayectoria*:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial N}{\partial q'_1} \right) - \frac{\partial N}{\partial q_1} = 0. \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial N}{\partial q'_2} \right) - \frac{\partial N}{\partial q_2} = 0. \quad (1.19)$$

$$\text{con } N(q_1, q_2, q'_1, q'_2, z) = \frac{e_0}{c} \Phi(\mathbf{q}(z)) \sqrt{1 + q_1'^2(z) + q_2'^2(z)} - e_0 \mathbf{A}(\mathbf{q}(z)) \cdot \mathbf{q}'(z), \quad (1.20)$$

donde N se conoce como *índice reducido de refracción*.

El siguiente paso será aplicar estas ecuaciones a las que hemos llegado a nuestro caso particular, en el cual trabajaremos con un campo con simetría axial.

Como $\mathbf{q}(z) = (r(z) \cos(\theta(z)), r(z) \text{sen}(\theta(z)), z)$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'(z) &= (r'(z) \cos(\theta(z)) - r(z) \text{sen}(\theta(z)) \theta'(z), r'(z) \text{sen}(\theta(z)) + r(z) \cos(\theta(z)) \theta'(z), 1) \\ &= r'(z) \mathbf{e}_r + r(z) \theta'(z) \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

De forma que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}(z)) \cdot \mathbf{q}'(z) = A_\theta(\mathbf{q}(z)) r(z) \theta'(z) + A_r(\mathbf{q}(z)) r'(z) + A_z(\mathbf{q}(z)).$$

Gracias a la aproximación paraxial (1.4) podemos obviar el término radial y sustituir Φ por Φ_z . Teniendo en cuenta esto junto con (1.8) y (1.20), llegamos a:

$$N = e_0 \left(\frac{\Phi_z}{c} \sqrt{1 + r'^2 + r^2 \theta'^2} - A_\theta r \theta' - A_z \right) = e_0 \left(\frac{\Phi_z}{c} \sqrt{1 + r'^2 + r^2 \theta'^2} - \frac{\Psi}{2\pi} \theta' - A_z \right).$$

Como $\theta \equiv q_2$ es una coordenada cíclica, la ecuación (1.19) se reduce a:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial N}{\partial \theta'} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial \theta'} = cte \Rightarrow e_0 \left(\frac{\Phi_z r^2}{c \sqrt{1 + r'^2 + r^2 \theta'^2}} \theta' - \frac{\Psi}{2\pi} \right) = cte.$$

Al trabajar con trayectorias paraxiales, por (1.4) podemos eliminar las raíces presentes en la ecuación anterior. Sustituyendo todas las magnitudes en el cátodo, indicándolo mediante el índice c , llegamos a:

$$\frac{\theta' \Phi_z r^2}{c} = \frac{\Phi_c r_c^2}{c} \theta'_c + \frac{\Psi - \Psi_c}{2\pi} \Rightarrow \frac{\theta'}{c} = \frac{\Phi_c}{\Phi_z} \left(\frac{r_c}{r} \right)^2 \theta'_c + c \frac{\Psi - \Psi_c}{2\pi \Phi_z r^2}, \quad (1.21)$$

donde $\Phi_c = (\Phi_z)_{\varphi=0} = \sqrt{\varphi_c(\varphi_c + 2\varphi_0)}$.

Si ahora hacemos lo mismo con $r \equiv q_1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial N}{\partial r'} \right) - \frac{\partial N}{\partial r} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{e_0}{c} \frac{\Phi_z r'}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}} \right) \\ - \frac{e_0}{c} \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial r} \sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2} + \frac{\Phi_z r \theta'^2}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}} \right) &+ \frac{\partial}{\partial r} \left(e_0 \frac{\Psi \theta'}{2\pi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} (A_z) = 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{\Phi_z r'}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}} \right) - \frac{\partial \Phi_z}{\partial r} \sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2} - \frac{\Phi_z r \theta'^2}{\sqrt{1+r'^2+r^2\theta'^2}} &+ cr B_z \theta' + c \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde hemos usando que los flujos magnéticos en la aproximación paraxial son:

$$\Psi = \pi r^2 B_z(z), \quad \Psi_c = \pi r_c^2 B_z(0). \quad (1.23)$$

Al igual que antes podemos eliminar las raíces presentes en (1.22) y usando (1.7) podemos cambiar $\partial A_z / \partial r$ por $\mu_0 I_r / (2\pi r)$. Aplicando esto a las ecuaciones de trayectoria (1.21) y (1.22), llegamos a:

$$\theta' = \frac{c}{2\Phi_z} \left[Q \frac{r_c^2}{r^2} + B_z(z) \right]. \quad (1.24)$$

$$\frac{d}{dz} (\Phi_z r') - \frac{\partial \Phi_z}{\partial r} - \Phi_z r \theta'^2 + cr B_z(z) \theta' + c \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} = 0. \quad (1.25)$$

donde:

$$Q = \frac{2}{c} \Phi_c \theta'_c - B_z(0), \quad (1.26)$$

$$\Phi_z = \sqrt{\varphi_z^* (\varphi_z^* + 2\varphi_0)} = \beta_z (\varphi_z^* + \varphi_0) = \beta_z \gamma \varphi_0 = \beta_z \gamma \frac{c^2}{\eta} = \frac{c}{e_0} p_z. \quad (1.27)$$

Por un lado, si tomamos $z = z_0$ como el plano donde $\dot{\theta} = 0$:

$$Q = -\frac{\Psi_0}{\pi r_c^2},$$

siendo Ψ_0 el flujo en el plano $z = z_0$.

Aplicando la fórmula para el momento angular generalizado (1.15) llegamos a la siguiente igualdad:

$$Q = \frac{2P_\theta}{e_0 r_c^2}. \quad (1.28)$$

Por otro lado, derivando Φ_z con respecto a r y utilizando (1.14):

$$\frac{\partial \Phi_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\varphi_z^* (\varphi_z^* + 2\varphi_0)} \right) = \frac{\varphi_z^* + \varphi_0}{\sqrt{\varphi_z^* (\varphi_z^* + 2\varphi_0)}} \frac{\partial \varphi_z}{\partial r} = -\frac{E_r}{\beta_z}.$$

Y tomando la ecuación (1.10):

$$\frac{\partial \Phi_z}{\partial r} = -\frac{r}{2\beta_z} \varphi'' \quad (1.29)$$

Introduciendo las ecuaciones (1.24) y (1.29) en la ecuación (1.25), llegamos a:

$$\frac{d}{dz}(\Phi_z r') + \frac{r}{2\beta_z} \varphi'' - \Phi_z r \left[\frac{c}{2\varphi_z} \left(Q \frac{r_c^2}{r^2} + B_z(z) \right) \right]^2 + cr B_z(z) \left[\frac{c}{2\varphi_z} \left(Q \frac{r_c^2}{r^2} + B_z(z) \right) \right] + c \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} = 0.$$

Operando y utilizando (1.27):

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi'_z r'}{\beta_z} + \beta_z (\varphi_z^* + \varphi_0) r'' + \frac{r}{2\beta_z} \varphi'' - \Phi_z r \frac{c^2}{4\Phi_z^2} \left(Q^2 \frac{r_c^4}{r^4} + B_z(z)^2 + 2Q \frac{r_c^2}{r^2} B_z(z) \right) \\ & + \frac{c^2 r B_z(z)}{2\Phi_z} Q \frac{r_c^2}{r^2} + \frac{c^2 r B_z(z)^2}{2\Phi_z} + c \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} = 0. \end{aligned}$$

Reagrupando, obtenemos que:

$$\beta_z (\varphi_z^* + \varphi_0) r'' + \frac{\varphi'_z r'}{\beta_z} + \left[\frac{\varphi''}{2\beta_z} + \frac{c^2 B_z(z)^2}{4\beta_z (\varphi_z^* + \varphi_0)} \right] r - \frac{c^2 Q^2}{4\beta_z (\varphi_z^* + \varphi_0)} \frac{r_c^4}{r^3} + c \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} = 0.$$

Multiplicando ahora por β_z :

$$\frac{\Phi_z^2}{\varphi_z^* + \varphi_0} r'' + \varphi'_z r' + \left[\frac{\varphi''}{2} + \frac{c^2 B_z(z)^2}{4(\varphi_z^* + \varphi_0)} \right] r - \frac{c^2 Q^2}{4(\varphi_z^* + \varphi_0)} \frac{r_c^4}{r^3} + \beta_z c \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} = 0.$$

Si reescribimos Q utilizando la expresión (1.28), llegamos a:

$$\frac{\Phi_z^2}{\varphi_z^* + \varphi_0} r'' + \varphi'_z r' + \left[\frac{\varphi''}{2} + \frac{c^2 B_z(z)^2}{4(\varphi_z^* + \varphi_0)} \right] r - \frac{c^2 Q_1^2}{4(\varphi_z^* + \varphi_0)} \frac{1}{r^3} + \beta_z c \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} = 0,$$

donde $Q_1 = 2P_\theta/e_0$.

Podemos simplificar el último término de la siguiente forma:

$$c \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} = \frac{I_r}{I_0} \frac{2\varphi_0}{r},$$

donde $I_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 c^3}{\eta}$ es la *corriente relativista*.

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{\Phi_z^2}{\varphi_z^* + \varphi_0} r'' + \varphi'_z r' + \left[\frac{\varphi''}{2} + \frac{c^2 B_z(z)^2}{4(\varphi_z^* + \varphi_0)} \right] r - \frac{c^2 Q_1^2}{4(\varphi_z^* + \varphi_0)} \frac{1}{r^3} + \beta_z \frac{I_r}{I_0} \frac{2\varphi_0}{r} = 0.$$

Multiplicando por $\frac{\varphi_z^* + \varphi_0}{\Phi_z^2}$ y utilizando las expresiones (1.27) y (1.13):

$$r'' + \frac{\gamma'_z}{\beta_z^2 \gamma_z} r' + \left[\frac{\gamma''}{2\beta_z^2 \gamma_z} + \left(\frac{\eta B_z}{2\beta_z c \gamma_z} \right)^2 \right] r - \frac{K_r}{r} - \left(\frac{P_\theta}{\beta_z c \gamma_z m_0} \right)^2 \frac{1}{r^3} = 0, \quad (1.30)$$

donde:

$$K_r = -\frac{2I_r}{I_0\beta_z\gamma_z} \quad (1.31)$$

Asumiendo que el campo magnético en el cátodo es uniforme y que la velocidad angular en el cátodo es nula ($\dot{\theta}_c = 0$), tenemos que el momento angular generalizado (1.15) toma la siguiente expresión :

$$P_\theta = -\frac{e_0}{2\pi}\Psi_c = -\frac{e_0r_c^2}{2}B_c.$$

Si además trabajamos con un campo externo nulo, la componente z de la velocidad no se va afectada. Es decir, $\gamma_z = \gamma_0 = cte$, y llegamos a:

$$r'' + \left(\frac{\eta B_z}{2\beta_z c \gamma_0}\right)^2 r - \frac{K_r}{r} - \left(\frac{r_c^2 \eta B_c}{2\beta_z c \gamma_0}\right)^2 \frac{1}{r^3} = 0. \quad (1.32)$$

El último paso será expresar el campo magnético de alguna forma. Para nuestro caso se puede demostrar que la distribución que toma el campo magnético axialmente simétrico es la siguiente:

$$B_z = B_m \cos\left(\frac{2\pi z}{L}\right), \quad (1.33)$$

siendo L la longitud del solenoide (Figura 1.3) y $B_m \in \mathbb{R}$ una constante.

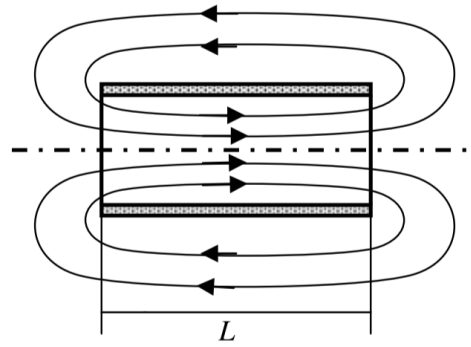


Figura 1.3: Solenoide. (Imagen extraída de [7])

De esta forma la ecuación (1.32) se convierte en:

$$r'' + \left(\frac{\eta B_m}{2\beta_z c \gamma_0}\right)^2 r \cos^2\left(\frac{2\pi z}{L}\right) - \frac{K_r}{r} - \left(\frac{r_c^2 \eta B_c}{2\beta_z c \gamma_0}\right)^2 \frac{1}{r^3} = 0. \quad (1.34)$$

Finalmente, si realizamos el siguiente cambio de variable:

$$Z = \frac{2\pi z}{L}, \quad R = \frac{r}{r_c}.$$

llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 R}{dZ^2} + \alpha(1 + \cos(2Z))R - \frac{2\alpha K_B}{R^3} - \frac{\beta}{R} = 0,$$

donde:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\eta B_m L}{4\pi \beta_z c \gamma_0} \right)^2 \quad \text{es una constante dada por el campo magnético,} \quad (1.35)$$

$$K_B = \frac{B_c^2}{B_m^2} \quad \text{es una constante que depende del aislamiento del cátodo,} \quad (1.36)$$

$$\beta = \frac{K_r L^2}{4\pi^2 r_c^2} \quad \text{viene dada por la suma de cargas.} \quad (1.37)$$

Si asumimos que el cátodo está totalmente aislado, tenemos que $B_c = 0$. De esta forma, llegamos a la ecuación que estabamos buscando, la *ecuación de Mathieu*:

$$\frac{d^2 R}{dZ^2} + \alpha(1 + \cos(2Z))R - \frac{\beta}{R} = 0. \quad (1.38)$$

Capítulo 2

Ecuación de Hill homogénea

La teoría de las ecuaciones diferenciales homogéneas es fundamental en el análisis matemático y tiene diversas aplicaciones, destacando el modelado de distintos fenómenos físicos, como el que se detalla en el anterior capítulo. En concreto, introduciremos el concepto de operador de Hill, el cual nos permitirá definir una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes periódicos. A partir de ahí, exploraremos algunas propiedades de este tipo de ecuaciones homogéneas, como la teoría de oscilación o las propiedades espectrales. La referencia utilizada para la redacción de este capítulo ha sido [2].

2.1. Operador de Hill

A partir de ahora denotaremos por $I := [0, T]$ y por $W^{2,1}(I)$ al conjunto de funciones $u \in C^1(I)$ cuyas derivadas son absolutamente continuas en I , lo cual garantiza que la segunda derivada pertenezca a $L^1(I)$. Además, X será el espacio de Banach, dado por:

$$X = \{u \in W^{2,1}(I) : U_i(u) \equiv \sum_{j=0}^1 (\alpha_j^i u^{(j)}(0) + \beta_j^i u^{(j)}(T)) = 0, \quad i = 1, 2\}, \quad (2.1)$$

donde $\alpha_j^i, \beta_j^i \in \mathbb{R}$ para todo $j \in \{0, 1\}$ e $i \in \{1, 2\}$.

Un caso concreto con el que trabajaremos será el espacio de las funciones con condiciones periódicas en la frontera del intervalo:

$$X_P = \{u \in W^{2,1}(I) : u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)\}.$$

En este tipo de espacios se puede definir el operador de Hill, el cual es un operador diferencial lineal de orden dos que está presente en múltiples problemas que modelan fenómenos físicos,

como el tratado en el capítulo anterior, y que ha sido ampliamente estudiado en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Este puede definirse de la siguiente forma:

Definición 2.1 (Operador de Hill). Dada una función $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in L^p(I)$, $p \geq 1$ y $a(t) = a(t + T)$, c.t.p. $t \in I$, se define el operador de Hill, $L[a] : W^{2,1}(I) \rightarrow L^1(I)$, como el siguiente operador lineal de orden dos:

$$L[a]u(t) \equiv u''(t) + a(t)u(t), \quad \text{c.t.p. } t \in I. \quad (2.2)$$

Uno de los objetivos a la hora de estudiar el operador $L[a]$ es comprobar como se comporta en los espacios definidos anteriormente. En especial, introducimos las siguientes definiciones.

Definición 2.2 (Principio del máximo y antimáximo). Sea X el espacio de Banach definido en (2.1). Por un lado, decimos que $L[a]$ verifica el principio del máximo (MP) en X si y solo si:

$$u \in X, L[a]u \geq 0 \text{ en } I \Rightarrow u \equiv 0 \text{ en } I \quad \text{o} \quad u < 0 \text{ en } (0, T).$$

Por otro lado, decimos que $L[a]$ verifica el principio del antimáximo (AMP) en X si y solo si:

$$u \in X, L[a]u \geq 0 \text{ en } I \Rightarrow u \equiv 0 \text{ en } I \quad \text{o} \quad u > 0 \text{ en } (0, T).$$

Definición 2.3 (Operador no resonante). Decimos que el operador $L[a]$ es no resonante en X si y solo si el problema homogéneo asociado

$$L[a]u(t) = 0, \quad t \in I, u \in X, \quad (2.3)$$

admite únicamente la solución trivial.

Observación 2.4. Es obvio que si $L[a]$ admite el principio del máximo o del antimáximo, entonces es no resonante. Por ejemplo, supongamos que $L[a]$ admite el principio del antimáximo y sea $u \in X$ tal que $L[a]u = 0$. Por un lado, $L[a]u \geq 0$ y por (AMP), $u \geq 0$. Por otro lado, $L[a](u) \leq 0 \Rightarrow L[a](-u) \geq 0$ y por (AMP), $-u \geq 0$. Por tanto, $u \leq 0$ y así,

$$u \leq 0 \leq u \Rightarrow u \equiv 0.$$

Finalmente, introduciremos algo de notación que nos será de utilidad en las siguientes secciones y capítulos.

- Diremos que una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $f \succ 0$ en I si y solo si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$ y $\int_I f(x) dx > 0$.
- Para $1 < \alpha < \infty$, denotamos por α^* al conjugado de Hölder de α , es decir, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^*} = 1$. Si $\alpha = 1$, tomamos $\alpha^* = \infty$ y viceversa.

- Definimos $K(\alpha, T)$ como la mejor constante de Sobolev para la desigualdad

$$C\|u\|_\alpha^2 \leq \|u'\|_2^2, \quad \forall u \in H_0^1(I),$$

dada explícitamente por

$$K(\alpha, T) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\alpha T^{1+\frac{2}{\alpha}}} \left(\frac{2}{2+\alpha}\right)^{1-\frac{2}{\alpha}} \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha})}\right)^2, & 1 \leq \alpha < \infty, \\ \frac{4}{T}, & \alpha = \infty. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.2. Teoría de oscilación de Sturm

En esta sección nos interesará ver como se comporta la ecuación homogénea

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

en función de $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual afectará a la distribución de los ceros de las soluciones del problema homogéneo. Esto será de vital importancia en la teoría espectral que trataremos en la última sección de este capítulo.

Comenzamos introduciendo el siguiente teorema:

Teorema 2.5. *Si $a < 0$ en \mathbb{R} , toda solución no trivial del problema (2.5) tiene, a lo sumo, un cero en \mathbb{R} .*

Demostración. Supongamos que $a(t) < 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y sea u una solución no trivial del problema homogéneo (2.5). Si t_0 es un cero de u , entonces, como u es una solución no trivial, por unicidad de la solución de una EDO lineal homogénea, necesariamente $u'(t_0) \neq 0$.

Supongamos que $u'(t_0) > 0$. En este caso u toma valores positivos en un intervalo a la derecha de t_0 . Como consecuencia, $u''(t) = -a(t)u(t) > 0$ en ese intervalo. Así, $u'(t)$ es creciente a la derecha de t_0 , lo que implica que u no puede tener más ceros a la derecha de t_0 . De la misma forma, se puede concluir que no hay ceros a la izquierda de t_0 .

En el caso de que $u'(t_0) < 0$, el razonamiento es análogo. □

Por otro lado, el siguiente teorema nos proporciona una condición suficiente que asegura la oscilación de las soluciones de la ecuación (2.5).

Teorema 2.6. *Sea u una solución no trivial del problema (2.5), con $a \in L^\infty(\mathbb{R})$. Supongamos que existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $a(t) > 0$ para $t > \bar{t}$ y*

$$\int_{\bar{t}}^{\infty} a(t) dt = \infty.$$

Entonces u tiene un número infinito de ceros mayores que \bar{t} .

Demostración. Supongamos que u se anula en un número finito de puntos en (\bar{t}, ∞) . Esto implica la existencia de un punto $t_0 > \bar{t}$ tal que $u(t) \neq 0$ para todo $t \geq t_0$. Asumamos que $u(t) > 0$ para todo $t \geq t_0$. Definimos la función

$$v(t) = -\frac{u'(t)}{u(t)}, \quad t \geq t_0.$$

para la cual

$$v'(t) = -\frac{u''(t)u(t) - u'(t)^2}{u^2(t)} = a(t) + v^2(t).$$

Así, integrando entre t_0 y t , con $t > t_0$, obtenemos

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t a(s) ds + \int_{t_0}^t v^2(s) ds.$$

De forma que, como por hipótesis $\int_{\bar{t}}^{\infty} a(t) dt = \infty$, para t suficientemente grande, $v(t) > 0$. Por tanto, para esos valores de t , $u(t)$ y $u'(t)$ tienen signo opuesto. En este caso, $u'(t)$ sería negativo. Además, $u''(t) = -a(t)u(t) < 0$ para $t \in (t_0, \infty)$. En resumen, u es cóncava y decreciente para $t > t_0$ suficientemente grande (Figura 2.1). Esto quiere decir que $u(t)$ se anula en un punto $t_1 > t_0$, lo que contradice la hipótesis inicial.

En el caso de $u(t) < 0$ para $t \geq t_0$, el procedimiento sería análogo.

□

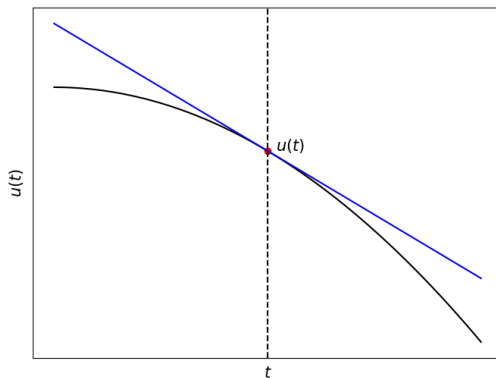


Figura 2.1: Ejemplo de función cóncava y decreciente.

El anterior teorema prueba que, bajo ciertas condiciones, la solución oscila de manera infinita en un intervalo no acotado. Sin embargo, si consideramos un intervalo compacto, la solución no puede oscilar de manera infinita.

Teorema 2.7. *Sea u una solución no trivial del problema (2.5) en el intervalo $[c, d]$, con $a \in L^\infty([c, d])$. Entonces u tiene, a lo sumo, un número finito de ceros en $[c, d]$.*

Demostración. Supongamos que u tiene un número infinito de ceros en el intervalo $[c, d]$. De esta forma, existirá un punto $t_0 \in [c, d]$ y una sucesión de ceros de u , $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [c, d]$, con $t_n \rightarrow t_0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Así, como $u \in \mathcal{C}^1([c, d])$:

$$u'(t_0) = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{u(t_n) - u(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{t_n \rightarrow t_0} \frac{0}{t_n - t_0} = 0.$$

Por lo tanto, $u(t_0) = u'(t_0) = 0$. Por unicidad de solución para el problema de valor inicial, $u \equiv 0$ en $[c, d]$, lo que supone una contradicción con el hecho de que u sea una solución no trivial.

□

Finalmente, introducimos el siguiente resultado que nos proporciona una relación entre el potencial a y la velocidad de oscilación.

Teorema 2.8 (Comparación de Sturm). *Sean u, v soluciones no triviales de las ecuaciones*

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

y

$$v''(t) + r(t)v(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

respectivamente, con $q, r \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $q > r$ en \mathbb{R} . Entonces u se anula al menos una vez entre dos ceros de v .

Demostración. Sean $t_1 < t_2$ dos ceros consecutivos de v . Supongamos que u no se anula en (t_1, t_2) . Entonces, u y v tienen signo constante a lo largo del intervalo (t_1, t_2) . Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u(t) > 0$ y $v(t) > 0$ para $t \in (t_1, t_2)$. Definimos el Wronskiano:

$$W(u, v)(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t).$$

Entonces

$$\begin{aligned} W'(u, v)(t) &= u'(t)v'(t) + u(t)v''(t) - u''(t)v(t) - u'(t)v'(t) = u(t)v''(t) - u''(t)v(t) \\ &= u(t)(-r(t)v(t)) - v(t)(-q(t)u(t)) = (q(t) - r(t))u(t)v(t) > 0, \end{aligned}$$

en el intervalo (t_1, t_2) . Por tanto, $W(u, v)(t)$ es estrictamente creciente en (t_1, t_2) y, entonces, $W(u, v)(t_2) > W(u, v)(t_1)$.

Por otro lado, como $v(t_1) = v(t_2) = 0$ y $v(t) > 0$ en (t_1, t_2) , se tiene que $v'(t_1) \geq 0$ y $v'(t_2) \leq 0$. De forma que,

$$W(u, v)(t_1) = u(t_1)v'(t_1) - u'(t_1)v(t_1) = u(t_1)v'(t_1) \geq 0,$$

$$W(u, v)(t_2) = u(t_2)v'(t_2) - u'(t_2)v(t_2) = u(t_2)v'(t_2) \leq 0.$$

Esto último contradice que $W(u, v)(t_2) > W(u, v)(t_1)$. Por tanto, u se anula al menos una vez en (t_1, t_2) . \square

Observación 2.9. Del anterior resultado podemos deducir que, cuando $a(t) > k^2 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, toda solución de (2.5) debe tener un cero entre cualquier par de ceros consecutivos de la solución $u(t) = \text{sen}(kt)$ de la ecuación

$$u''(t) + k^2 u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Es decir, debe tener un cero en todo intervalo de longitud $\frac{\pi}{k}$.

2.3. Propiedades espectrales

En la sección anterior hemos estudiado cómo se comporta la ecuación homogénea (2.5) en función del signo del potencial a . Es por ello que modificaremos la formulación del problema anterior, introduciendo un parámetro λ que permitirá modificar el signo del potencial. Así, para $a \in L^\infty(I)$, definimos el siguiente problema homogéneo

$$u''(t) + (a(t) + \lambda)u(t) = 0, \quad t \in I, \quad (2.9)$$

que depende de un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 2.10. Bajo estas condiciones, el problema (2.9) con las condiciones iniciales:

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0, \quad (2.10)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad (2.11)$$

tiene solución única en cada caso considerado. Con el objetivo de enfatizar la dependencia de λ , denotamos a estas soluciones por $u_1(\cdot, \lambda)$ y $u_2(\cdot, \lambda)$, respectivamente.

Si extendemos de forma periódica la función a a \mathbb{R} , podemos encontrar un $\lambda \in \mathbb{R}$ lo suficientemente grande, tal que $a(t) + \lambda > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y

$$\int_0^\infty (a(t) + \lambda) dt = \infty.$$

Como consecuencia del Teorema 2.6, toda solución de la ecuación (2.9) tiene un número infinito de ceros en el semieje positivo.

Para esos valores de λ consideremos la solución $u_2(\cdot, \lambda)$ de (2.9),(2.11). Denotamos por $t_0(\lambda)$ al primer cero positivo de $u_2(\cdot, \lambda)$, cuya existencia está garantizada por los teoremas 2.6 y 2.7. Y, como consecuencia del Teorema 2.8, cuanto mayor sea λ , menor será $t_0(\lambda)$.

En particular, por la Observación 2.9, sabemos que si λ es tal que $\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2 < a(t) + \lambda$ para casi todo punto $t \in I$, entonces toda solución del problema (2.9) se anula en un intervalo de longitud $\frac{T}{k}$, es decir, se anula por lo menos k veces en el intervalo $[0, T]$. Por tanto, tomando λ lo suficientemente grande, podemos hacer que las soluciones $u_2(\cdot, \lambda)$ tengan un número finito de ceros en $[0, T]$ tan grande como queramos. Además, todos los ceros deben ser simples ya que de lo contrario, por unicidad de la solución, $u_2(\cdot, \lambda) \equiv 0$, lo que supondría una contradicción.

Observación 2.11. Si λ verifica que

$$\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2 < a(t) + \lambda < \left(\frac{(k+1)\pi}{T}\right)^2, \text{ para casi todo } t \in I,$$

entonces $u_2(\cdot, \lambda)$ tiene exactamente k ceros en $[0, T]$.

Al problema (2.9) le podemos asociar condiciones de tipo Dirichlet:

$$u(0) = u(T) = 0. \quad (2.12)$$

Así, el problema tiene soluciones no triviales si y solo si existe algún λ para el cual $u_2(T, \lambda) = 0$, $u_2(\cdot, \lambda) \not\equiv 0$ en I . Denotamos a ese conjunto por S . Por el Teorema 2.5, sabemos que si λ es tal que $a(t) + \lambda < 0$ para casi todo punto $t \in I$, entonces el problema (2.9),(2.12) no tiene soluciones no triviales. Es decir, S está acotado inferiormente.

Como $t_0(\lambda)$ decrece respecto a λ y converge a cero cuando λ tiende a infinito, por continuidad, deducimos que existe un $\lambda_0^D[a]$ para el que $t_0(\lambda_0^D[a]) = T$. Por tanto, $\lambda_0^D[a] = \min S$, ya que la solución tiene que anularse necesariamente en T .

Aplicando un argumento similar podemos seguir aumentando λ hasta que $u_2(\cdot, \lambda)$ tenga exactamente tres ceros en $[0, T]$. De nuevo, por continuidad, podemos deducir la existencia de:

$$\lambda_1^D[a] = \min\{\lambda > \lambda_0^D[a]; u_2(\cdot, \lambda) \text{ tiene exactamente tres ceros en } [0, T]\}.$$

Necesariamente $u_2(T, \lambda_1^D) = 0$ y, por continuidad,

$$\lambda_1^D[a] = \min\{\lambda \in S \setminus \{\lambda_0^D[a]\}\}.$$

Podemos repetir este proceso de forma indefinida, deduciendo la existencia de una sucesión infinita de valores

$$\lambda_0^D[a] < \lambda_1^D[a] < \lambda_2^D[a] < \dots < \lambda_k^D[a] < \dots$$

para la que el problema (2.9),(2.12) tiene soluciones no triviales $u_2(\cdot, \lambda_k^D[a])$ con exactamente k ceros en $(0, T)$.

Es más, la sucesión anterior no está acotada. De lo contrario, existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a(t) + \lambda_{n_0}^D[a] < \left(\frac{(n_0+1)\pi}{T}\right)^2$ para casi todo $t \in I$ y $k = 0, 1, 2, \dots$. Por tanto, $u_2(\cdot, \lambda_{n_0}^D[a])$ tendría a lo

sumo n_0 ceros en $[0, T]$. Pero, entonces, como consecuencia del Teorema 2.8, todas las soluciones del problema (2.9),(2.12), con $\lambda = \lambda_k^D[a]$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, tendrían como mucho n_0 ceros en $(0, T)$. Lo cual contradice que $u_2(\cdot, \lambda_k^D)$ tenga exactamente k ceros en $(0, T)$ para $k > n_0$. Por lo tanto,

$$\lambda_k^D[a] \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Partiendo de esta base, podemos introducir el siguiente resultado clásico, demostrado en [2].

Teorema 2.12 (Oscilación de Sturm). *Existen dos sucesiones crecientes de números reales*

$$\{\lambda_n^P[a]\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{y} \quad \{\lambda_n^A[a]\}_{n=0}^{\infty},$$

tales que la ecuación (2.9) tiene una solución periódica de periodo T ($u \in X_P$) si y solo si $\lambda = \lambda_n^P[a]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, y una solución antiperiódica ($u(0) = -u(T)$, $u'(0) = -u'(T)$) si y solo si $\lambda = \lambda_n^A[a]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Finalizamos este capítulo con el siguiente resultado, también demostrado en [2], relativo a las soluciones periódicas, que nos será de gran utilidad a lo largo del Capítulo 3.

Teorema 2.13. *Si u_k^P denota la función propia correspondiente al valor propio $\lambda_k^P[a]$ del problema periódico, entonces*

1. *La función propia u_0^P no tiene ceros en $[0, T]$;*
2. *Ambas u_{2n-1}^P y u_{2n}^P tienen exactamente $2n$ ceros en $[0, T]$ para $n \geq 1$.*

Capítulo 3

Función de Green

La función de Green es un concepto de vital importancia en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, siendo ampliamente utilizada para resolver problemas con condiciones de frontera. Nombrada en honor al matemático George Green, esta función proporciona un método para representar las soluciones en términos de integrales, determinados por un núcleo integral.

Así, a lo largo del siguiente capítulo definiremos formalmente el concepto de función de Green, introduciendo diferentes propiedades de la misma, centrándonos especialmente en el caso periódico y, en concreto, en su signo. Además, analizaremos cómo se comporta la función de Green en el caso del problema modelado en el Capítulo 1. La referencia principal seguida a lo largo de este capítulo ha sido [2], apoyándonos también en otros resultados más concretos obtenidos de [1, 3, 8, 9].

3.1. Definición y propiedades

Partiendo del problema homogéneo definido en (2.3), es bien sabido ([1]) que si $L[a]$ es no resonante en el espacio X , definido en (2.1), entonces para todo $\sigma \in L^1(I)$ el problema:

$$L[a]u(t) = \sigma(t), \quad \text{en c.t.p. } t \in I, u \in X, \quad (3.1)$$

tiene una única solución $u \in X$ y existe una única función continua, caracterizada por propiedades que veremos más adelante,

$$G[a] : I \times I \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$u(t) = \int_0^T G[a](t, s)\sigma(s)ds, \quad \forall t \in I.$$

La función $G[a]$ se conoce como la función de Green del operador $L[a]$.

El siguiente teorema establece una equivalencia entre la naturaleza del operador y la simetría de la función de Green, proporcionando una valiosa herramienta para el análisis de las ecuaciones diferenciales lineales.

Teorema 3.1. *El operador $L[a]$ es no resonante y autoadjunto en X si y solo si su función de Green $G[a]$ existe y es simétrica respecto a la diagonal de su cuadrado de definición, es decir:*

$$G[a](t, s) = G[a](s, t), \quad \forall t, s \in I.$$

Obviamente todo esto no sería muy útil si no tuviéramos una forma de calcular la función de Green. Esta puede introducirse haciendo uso de la *función delta de Dirac*.

Definición 3.2 (Función delta de Dirac). Definimos la función delta de Dirac $\delta_s : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ para $s \in \Omega$ como una función que cumple:

- 1.) $\int_{\Omega} \delta_s(t) dt = 1,$
- 2.) $\delta_s(s) = \infty,$
- 3.) $\delta_s(t) = 0, \quad \forall t \in \Omega, \quad \text{tal que } t \neq s.$

Podemos justificar de forma empírica la validez de esta definición mediante la siguiente sucesión funcional en $\Omega = \mathbb{R}$:

$$\delta_n(t) = \begin{cases} 0, & t < s - \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{2}, & s - \frac{1}{n} < t < s + \frac{1}{n}, \\ 0, & t > s + \frac{1}{n}, \end{cases}$$

para la que se cumple que:

- (i) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = \frac{n}{2} \int_{s-\frac{1}{n}}^{s+\frac{1}{n}} dt = 1, \quad \forall n \geq 0,$
- (ii) $\delta_n(s) = \frac{n}{2} \rightarrow \infty,$
- (iii) $\delta_n(t) \rightarrow 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{tal que } t \neq s.$

Además, supongamos que F es la primitiva de una función $f \in L(\Omega)$ integrable. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_n(t) dt = \frac{n}{2} \int_{s-\frac{1}{n}}^{s+\frac{1}{n}} f(t) dt = \frac{n}{2} \left[F \left(s + \frac{1}{n} \right) - F \left(s - \frac{1}{n} \right) \right], \quad \forall n \geq 0.$$

A medida que $n \rightarrow \infty$, la última expresión se aproxima a $F'(s) = f(s)$. Esto nos permite introducir una propiedad muy importante de la función delta de Dirac.

Proposición 3.3. *Sea $f \in L(\Omega)$ una función integrable en Ω . Entonces, se tiene que:*

$$\int_{\Omega} f(t) \delta_s(t) dt = f(s), \quad \forall s \in \Omega.$$

Podemos pensar la función de Green como una función que nos da la respuesta del sistema (3.1) ante una perturbación en el tiempo dada por $\delta_s(t)$, la función delta de Dirac localizada en el punto $s \in I$, lo cual significa:

$$G[a](t, s) = L[a]^{-1}(\delta_s)(t), \quad t, s \in \Omega.$$

De esta forma:

$$L[a]u(t) = L[a] \int_0^T G[a](t, s)\sigma(s) ds = \int_0^T L[a]G[a](t, s)\sigma(s) ds = \int_0^T \delta_s(t)\sigma(s) ds = \sigma(t).$$

Ilustraremos este concepto con un ejemplo:

Ejemplo 3.4. Consideremos el problema de frontera:

$$u''(t) = \sigma(t), \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = u(1) = 0.$$

La función de Green $G[0](t, s)$ asociada a este problema sería:

$$u'' = \delta_s(t), \quad t \in [0, 1], u(0) = u(1) = 0,$$

y por integración obtenemos:

$$u'(t) = \begin{cases} c(s), & t < s, \\ c(s) + 1, & t > s, \end{cases}$$

Y por tanto, usando que $u(0) = 0$:

$$u(t) = \begin{cases} c(s)t, & t < s, \\ c(s)t + (t - s), & t > s, \end{cases}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $u(1) = 0$, llegamos a que $c(s) = s - 1$. Por lo que la función de Green toma la siguiente expresión:

$$G[0](t, s) = \begin{cases} (s - 1)t, & t < s, \\ (t - 1)s, & t > s. \end{cases}$$

De forma que la solución del problema vendría dada por:

$$u(t) = \int_0^1 G[0](t, s)\sigma(s) ds, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Por construcción, la función $G[0]$ cumple la ecuación homogénea excepto en $t = s$,

$$\frac{\partial^2 G[0]}{\partial t^2}(t, s) = 0, \quad \forall t \neq s,$$

junto con las condiciones de frontera:

$$G[0](0, s) = G[0](1, s) = 0.$$

Además, $G[0](t, s)$ es continua y $\frac{\partial G[0]}{\partial t}(t, s)$ tiene una discontinuidad de salto igual a 1 en $t = s$.

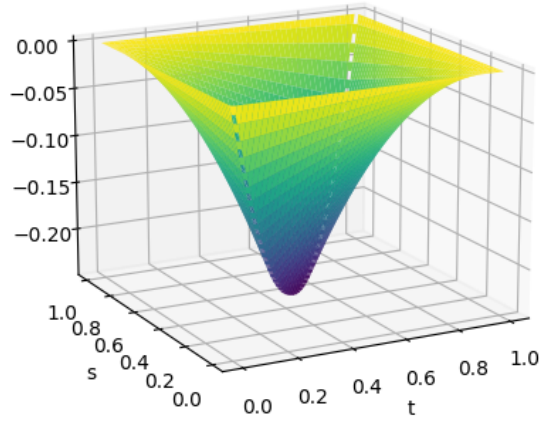


Figura 3.1: Gráfica de la función de Green para el Ejemplo 3.4

Estas propiedades que hemos obtenido de forma empírica a partir del ejemplo son, de hecho, propiedades clave que permiten caracterizar la función de Green.

Definición 3.5 (Función de Green). Decimos que $G[a]$ es una *función de Green* para el problema (2.3) si satisface las siguientes propiedades:

(G1) $G[a]$ es continua en el cuadrado $I \times I$.

(G2) Tanto $\frac{\partial G[a]}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 G[a]}{\partial t^2}$ existen y son continuas en los triángulos $0 \leq s < t \leq T$ y $0 \leq t < s \leq T$.

(G3) Para cada $t \in (0, T)$ existen los límites laterales y son reales:

$$\frac{\partial G[a]}{\partial t}(t, t^+) \quad \text{y} \quad \frac{\partial G[a]}{\partial t}(t, t^-).$$

Además se tiene que:

$$\frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^+, t) - \frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^-, t) = 1.$$

(G4) Para cada $s \in (0, T)$, la función $t \mapsto G[a](t, s)$ es una solución de la ecuación diferencial $L[a]u(t) = 0$ en $t \in [0, s)$ y $t \in (s, T]$. Es decir:

$$\frac{\partial^2 G[a]}{\partial t^2}(t, s) + a(t)G[a](t, s) = 0,$$

en ambos intervalos.

(G5) Para cada $s \in (0, T)$, se tiene que la función $t \mapsto G[a](t, s)$ cumple las condiciones de frontera dadas por $U_i(G[a](\cdot, s)) = 0$, $i = 1, 2$, es decir:

$$\sum_{j=0}^1 \left(\alpha_j^i \frac{\partial^j}{\partial t^j} G(t, s) \Big|_{t=0} + \beta_j^i \frac{\partial^j}{\partial t^j} G(t, s) \Big|_{t=T} \right) = 0, \quad i = 1, 2$$

La prueba del siguiente teorema se puede encontrar en [3].

Teorema 3.6. *Consideremos que el problema homogéneo (2.3) tiene solo la solución trivial. Entonces existe una única función de Green, $G[a]$, asociada al problema.*

Es más, para cada función $\sigma \in L^1(I)$, la única solución del problema (3.1) viene dada por la expresión:

$$u(t) = \int_0^T G[a](t, s) \sigma(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

En la Figura 3.4 podemos observar como la función de Green $G[0]$ es menor o igual que cero en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ y únicamente se anula en la frontera de este. Este ejemplo nos permite introducir una propiedad necesaria que debe cumplir la función de Green para el operador $L[a]$.

Proposición 3.7. *Asumamos que el operador $L[a]$ es no resonante y autoadjunto en X , es decir, la función de Green existe y es simétrica. Si esta no cambia de signo en el cuadrado $I \times I$ y se anula en algún punto (t_0, s_0) de este, entonces o bien (t_0, s_0) pertenece a la diagonal del cuadrado o bien (t_0, s_0) está en la frontera del cuadrado. Es decir, solo se cumple una de las tres siguientes propiedades:*

1. $t_0 = s_0 \in I$,
2. $t_0 = 0$ o $t_0 = T$
3. $s_0 = 0$ o $s_0 = T$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que la función de Green $G[a]$ se anula en un punto (t_0, s_0) que no pertenece a la diagonal ni a la frontera del cuadrado. Es decir, $G[a](t_0, s_0) = 0$ para algún punto $(t_0, s_0) \in (0, T) \times (0, T)$ tal que $t_0 \neq s_0$. Por simetría de la función $G[a]$ podemos asumir que $t_0 > s_0$.

Por definición de la función de Green, sabemos que la función

$$x(t) = G[a](t, s_0), \quad t \in I,$$

es solución de la ecuación

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0, \quad t \in (s_0, T].$$

Además, como $G[a]$ se anula en (t_0, s_0) y es de signo constante, necesariamente $x(t_0) = x'(t_0) = 0$. Por unicidad de la solución de una EDO lineal homogénea, tenemos que $G[a](t, s_0) = 0$ para todo $t \in (s_0, T]$. Por simétrica, se tiene que $G[a](s_0, s) = 0$ para todo $s \in (s_0, T]$

Ahora, fijemos un punto $s \in (s_0, T)$. Razonando de la misma manera que antes, se tiene que la función:

$$y(t) = G[a](t, s), \quad t \in I,$$

es solución de la ecuación

$$y''(t) + a(t)y(t) = 0, \quad t \in [0, s), \quad y(s_0) = y'(s_0) = 0.$$

Así que $G[a](t, s) = 0$ para todo $s \in (s_0, T]$ y para todo $t \in [0, s)$. Es decir:

$$\frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^-, t) = 0, \quad \forall t \in (s_0, T].$$

Por simetría $G[a](t, s) = 0$ para todo $t \in (s_0, T]$ y para todo $s \in [0, t)$. Es decir:

$$\frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^+, t) = 0, \quad \forall t \in (s_0, T].$$

Combinando estas dos últimas igualdades llegamos a:

$$\frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^+, t) - \frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^-, t) = 0, \quad \forall t \in (s_0, T],$$

lo cual contradice la condición **(G3)** de la definición de la función de Green. \square

Para acabar esta sección obtendremos un resultado, relacionado con el signo de la función de Green, que permite deducir el signo de las soluciones en ciertos casos.

Lema 3.8. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) $G[a](t, s) \geq 0$ (≤ 0) en $I \times I$
- (2) Si $u \in X$ y $L[a]u \succ 0$ en I , entonces $u > 0$ (< 0) en $(0, T)$.

Demostración. Supongamos (1). La relación $L[a]u \succ 0$ es equivalente a la existencia de una función $\sigma \in L^1(I)$ tal que $\sigma \succ 0$ en I para la que se cumple la ecuación (3.1), es decir,

$$L[a]u(t) = \sigma(t), \quad u \in X, \quad t \in I.$$

Por el Teorema 3.6, se tiene que:

$$u(t) = \int_0^T G[a](t, s)\sigma(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

Cómo $\sigma \succ 0$ tenemos que $\sigma(s) \geq 0$ para todo $s \in I$ y existe un conjunto $A \subset I$ de medida de Lebesgue no nula tal que $\sigma(s) > 0$ para todo $s \in A$. Dado que $G[a](t, s) \geq 0$ (≤ 0) en $I \times I$, tenemos que $u(t) \geq 0$ para todo $t \in I$.

Además, por la Proposición 3.7, la función de Green $G[a]$ solo se puede anular en conjunto de medida nula. Así que necesariamente $u > 0$ en $(0, T)$. La demostración para el caso en el que la función de Green es negativa es análoga.

Ahora supongamos (2) y que la función de Green $G[a]$ cambia de signo en $I \times I$. La idea será demostrar la existencia de un punto $t_0 \in I$ y $u_1, u_2 \in X$, de forma que $L[a]u_1 \succ 0$, $L[a]u_2 \succ 0$ en I y $u_1(t_0)u_2(t_0) < 0$.

En primer lugar, probaremos que existe $t_0 \in (0, T)$, $s_1, s_2 \in I$ tal que $G[a](t_0, s_1) > 0$ y $G[a](t_0, s_2) < 0$. De lo contrario, si la función $G[a](t, \cdot)$ tiene signo constante para todo $t \in (0, T)$, entonces, por el cambio de signo y la continuidad de $G[a]$, existe $t_1 \in I$ tal que $G[a](t_1, \cdot) \equiv 0$. Por simetría, $G[a](\cdot, t_1) \equiv 0$, lo cual contradice

$$\frac{\partial G[a]}{\partial t}(t_1^+, t_1) - \frac{\partial G[a]}{\partial t}(t_1^-, t_1) = 1,$$

la condición (G3) de la definición de la función de Green. Por tanto, tenemos garantizada la existencia de t_0 .

Así, existe un entorno de s_1 , $A_1 \subset I$, en el que $G[a](t_0, \cdot)$ es positiva. Si escogemos una función f_1 , que sea positiva en A_1 y que se anule en $I \setminus A_1$, deducimos la existencia de una función $u_1 \in X$ tal que $L[a]u_1 = f_1 \succ 0$ y

$$u_1(t_0) = \int_{A_1} G[a](t_0, s)f_1(s) ds > 0.$$

Análogamente, podemos deducir la existencia de un entorno de s_2 , $A_2 \subset I$, en el que $G[a](t_0, \cdot)$ es negativa. Tomando una función f_2 , que sea positiva en A_2 y que se anule en $I \setminus A_2$, tenemos que existe una función $u_2 \in X$ tal que $L[a]u_2 = f_2 \succ 0$ y

$$u_2(t_0) = \int_{A_2} G[a](t_0, s)f_2(s) ds < 0.$$

Llegando a una contradicción con (2). □

El resultado anterior se puede aplicar, en el caso particular del espacio X_P a través del siguiente lema, denotando por G_P a la función de Green correspondiente en este espacio.

Lema 3.9. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (1) $G_P[a](t, s) \geq 0$ (≤ 0) en $I \times I$
- (2) Si $u \in X_P$ y $L[a]u \succ 0$ en I , entonces $u > 0$ (< 0) en $(0, T)$.

3.2. Propiedades de la función de Green periódica

Hasta el momento hemos analizado la ecuación de Hill teniendo en cuenta únicamente funciones definidas en el intervalo $[0, T]$, verificando condiciones de frontera en dos puntos:

$$\sum_{j=0}^1 (\alpha_j^i u^{(j)}(0) + \beta_j^i u^{(j)}(T)) = 0, \quad i = 1, 2,$$

con $\alpha_j^i, \beta_j^i \in \mathbb{R}$.

A partir de ahora, nos centraremos en el caso de las funciones definidas en X_P y las extendemos a todo \mathbb{R} de forma periódica: $u(s) = u(s + T)$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Esto hará que la función de Green sea periódica en la primera componente y que, por simetría, también lo sea en la segunda.

Sea $s \in I$. De la definición de la función de Green, usando la periodicidad de la función a , y denotando por

$$u_s(\cdot) = G_P[a](\cdot, s), \quad (3.2)$$

no es difícil verificar que $u_s \in W^{2,1}(I_s^k)$, donde

$$I_s^k = (s + kT, s + (k + 1)T), \quad k \in \mathbb{Z},$$

y satisface la ecuación

$$u_s''(t) + a(t)u_s(t) = 0, \quad t \in I_s^k. \quad (3.3)$$

Antes de continuar, vamos a presentar un ejemplo que nos permitirá ir introduciendo distintas propiedades que deduciremos de la función de Green en el caso de condiciones periódicas.

Ejemplo 3.10. Consideremos el caso periódico con $a(t) = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2$. Usando [3], obtenemos:

$$G_P[a](t, s) = \frac{T}{2\pi} \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi(t-s)}{T}\right), & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \sin\left(\frac{\pi(t-s+T)}{T}\right), & 0 \leq t < s \leq T. \end{cases}$$

Podemos observar que, en este caso, la función de Green solo se anula en la diagonal y en los puntos $(0, T)$ y $(T, 0)$ (Figura 3.10). Esto nos permite introducir el siguiente resultado.

Lema 3.11. *Supongamos que la función de Green $G_P[a]$ asociada al problema periódico no cambia de signo en el intervalo $I \times I$ y que se anula en algún punto $(t_0, t_0) \in I \times I$. Entonces, $t_0 = s_0$, $(t_0, s_0) = (0, T)$ o $(t_0, s_0) = (T, 0)$.*

Demostración. Por la Proposición 3.7, sabemos que la función de Green solo se puede anular en la diagonal o en la frontera de $I \times I$.

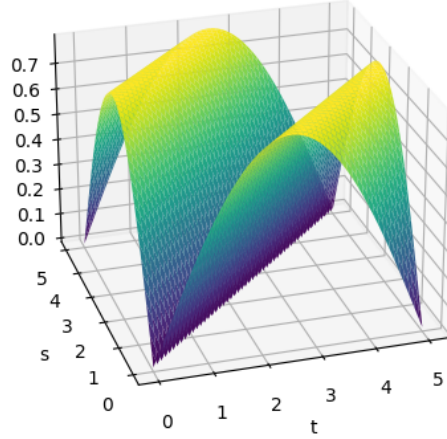


Figura 3.2: Gráfica de la función de Green para el Ejemplo 3.10 con $T = 5$.

Supongamos que $G_P[a](0, s_0) = 0$ para un $s_0 \in (0, T)$ dado. Por (3.2), sabemos que la función $u_{s_0}(t) = G_P[a](t, s_0)$, $t \in \mathbb{R}$, resuelve la ecuación

$$u_s''(t) + a(t)u_s(t) = 0, t \in (s_0 - T, s_0) = I_{s_0}^{-1}.$$

Dado que $G_P[a](t, s) \geq 0$, $\forall (t, s) \in I \times I$, tenemos que u alcanza un mínimo en $t = 0$. Es decir,

$$u_s''(t) + a(t)u_s(t) = 0, t \in (s_0 - T, s_0), \quad u_s(0) = u_s'(0) = 0.$$

Por unicidad de la solución de una EDO lineal homogénea, tenemos que $u(t) = 0$, $\forall t \in (s_0 - T, s_0)$. Pero esto significaría que la extensión periódica de $G_P[a]$ verifica que $G_P[a](t, s_0) = 0$, $\forall t \in (s_0 - T, s_0)$. Pero esto implicaría que

$$\frac{\partial}{\partial t} G_P[a](s_0^-, s_0) - \frac{\partial}{\partial t} G_P[a](s_0^+, s_0) = 0,$$

lo cual contradice la condición **(G3)** de la definición de la función de Green. Así, por periodicidad y simetría de la función de Green se prueba que $G_P[a]$ solo puede anularse en la diagonal o en los puntos $(0, T)$ y $(T, 0)$. \square

Asimismo llegamos al siguiente resultado:

Lema 3.12. *Las siguientes cuatro igualdades son equivalentes:*

1. $G_P[a](T, 0) = 0$.

$$2. G_P[a](0, T) = 0.$$

$$3. G_P[a](T, T) = 0.$$

$$4. G_P[a](0, 0) = 0.$$

Demostración. La demostración es directa a partir del anterior lema, la simetría de la función de Green y su periodicidad. \square

Todos estos resultados nos permiten deducir la siguiente propiedad relativa a las funciones de Green menores o iguales que cero en $I \times I$.

Lema 3.13. *Si $G_P[a](t, s) \leq 0$ en $I \times I$, entonces $G_P[a](t, s) < 0$ en $I \times I$. Es decir, si la función de Green del problema periódico es menor o igual que cero en $I \times I$, entonces es estrictamente negativa en $I \times I$.*

Demostración. Supongamos que la función de Green $G_P[a]$ es menor o igual que cero y que se anula en un punto. De los lemas 3.11 y 3.12 llegamos a dos posibilidades distintas.

1. La función de Green se anula en un punto de la diagonal. Es decir, existe $t_0 \in (0, T)$ tal que $G_P[a](t_0, t_0) = 0$. Al ser $G_P[a] \leq 0$ en $I \times I$, necesariamente t_0 es un máximo de la función $G_P[a](\cdot, t_0)$. Como consecuencia $\frac{\partial G_P[a]}{\partial t}(t_0^-, t_0) \geq 0$. Pero por la condición **(G3)** de la definición de la función de Green:

$$\frac{\partial G_P[a]}{\partial t}(t_0^+, t_0) = \frac{\partial G_P[a]}{\partial t}(t_0^-, t_0) + 1 \geq 1$$

Lo cual indica que $G_P[a]$ es estrictamente positiva en un entorno a la derecha t_0 , llegando a una contradicción.

2. La función se anula en alguna esquina del cuadrado $I \times I$. Gracias al lema 3.12 podemos partir de $G_P[a](0, 0) = 0$.

De nuevo, por la la condición **(G3)** de la definición de la función de Green y de la periodicidad de la función u_0 definida en (3.2), tenemos que:

$$u'_0(0^+) = u'_0(0^-) + 1 = u'_0(T^-) + 1,$$

es particular,

$$u'_0(0^+) > u'_0(T^-).$$

Al ser $u_0 \leq 0$ en I , necesariamente u alcanza un máximo en $t = 0$ y, como consecuencia,

$$u'_0(0^+) \leq 0 \leq u'_0(0^-) = u'_0(T^-) < u'_0(0^+),$$

lo cual supone otra contradicción. \square

El siguiente lema extiende esta propiedad al mostrar la relación entre el signo constante de la función de Green en $I \times I$ y la existencia de soluciones no triviales y de signo constante para el problema con condiciones de frontera correspondiente.

Lema 3.14. *Supongamos la función de Green $G_P[a]$ no cambia de signo en $I \times I$. Entonces es mayor o igual que cero en $I \times I$ y se anula en algún punto $(t_0, t_0) \in I \times I$ si y solo si la ecuación*

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_0 + T) = I_{t_0}^1, \quad u(t_0) = u(T + t_0) = 0$$

tiene una solución no trivial y de signo constante.

Demostración. La condición suficiente se deduce a partir de (3.3) tomando $u_{t_0}(t) = G_P[a](t, t_0)$ como solución de

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_0 + T) = I_{t_0}^1$$

Además como $G_P[a]$ se anula en (t_0, t_0) y es periódica, tenemos que $u_{t_0}(t_0) = u_{t_0}(T + t_0) = 0$.

Para comprobar la condición necesaria, supongamos que la ecuación

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_0 + T) = I_{t_0}^1, \quad u(t_0) = u(T + t_0) = 0$$

tiene una solución no trivial y de signo constante. Sabemos que $u_{t_0}(t) = G_P[a](t, t_0)$ es solución de la ecuación. Por la condición $u(t_0) = u(T + t_0) = 0$, tenemos que $G_P[a]$ se anula en (t_0, t_0) . Por el lema 3.13, si $G_P[a]$ fuera menor o igual que cero, entonces no se podría anular. Por tanto, por ser de signo constante, es necesariamente estrictamente positiva en $(t_0, t_0 + T)$. \square

Definiendo ahora la función

$$a_s(t) = a(t + s), \quad s, t \in I,$$

llegamos al siguiente resultado.

Lema 3.15. *Para todo $t, s \in \mathbb{R}$, tenemos que $G_P[a](t, s) = G_P[a_s](t - s, 0)$.*

Demostración. Por la periodicidad de $G_P[a]$ y la condición **(G3)** de la definición de la función de Green, tenemos que $u_s(\cdot) := G_P[a](\cdot, s)$ es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} u_s''(t) + a(t)u_s(t) &= 0, \quad t \in (s, s + T), \\ u_s(s) &= u_s(s + T), \quad u_s'(s^+) = u_s'(s^-) + 1 = u_s'((s + T)^-) + 1. \end{aligned}$$

De forma que, si definimos $y_s(t) := u_s(t + s)$, tenemos que y_s es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} y_s''(t) + a(t + s)y_s(t) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ y_s(0) &= y_s(T), \quad y_s'(0^+) = y_s'(0^-) + 1 = y_s'(T^-) + 1. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $u_s(s + t) = G_P[a_s](t, 0)$. Es decir, $G_P[a](t, s) = G_P[a_s](t - s, 0)$. \square

Observación 3.16. Este último lema nos permite obtener una propiedad en el caso de que el potencial a sea constante. En ese caso $a = a_s$ para todo $s \in I$, con lo cual $G_P[a](t, s) = G_P[a](t - s, 0)$. Por lo tanto, la función de Green $G_P[a]$ es constante en las rectas de pendiente 1 cuando la función a es constante. Esto es lo que ocurre en el Ejemplo 3.10.

Finalmente, usando el Lema 3.15 permite reescribir el Lema 3.14 de la siguiente forma:

Corolario 3.17. *Supongamos la función de Green $G_P[a]$ no cambia de signo en $I \times I$. Entonces es positiva en $I \times I$ y se anula en algún punto $(t_0, t_0) \in I \times I$ si y solo si la ecuación*

$$u''(t) + a_{t_0}(t)u(t) = 0, \quad t \in I, \quad u(0) = u(T) = 0$$

tiene una solución no trivial y de signo constante en $(0, T)$.

3.3. Signo constante de la función de Green

A lo largo de esta sección utilizaremos el análisis de las propiedades espectrales de la ecuación homogénea (2.3) en el espacio X_P , que se ha desarrollado en la Sección 2.3. Esto nos permitirá describir el signo constante de la función de Green a partir de las propiedades oscilatorias del operador de Hill $L[a]$.

Sea $\lambda_0^P[a]$ el menor valor propio de la ecuación periódica:

$$u''(t) + (a(t) + \lambda)u(t) = 0, \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \quad (3.4)$$

y $\lambda_0^A[a]$ el menor valor propio de la ecuación antiperiódica:

$$u''(t) + (a(t) + \lambda)u(t) = 0, \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = -u(T), \quad u'(0) = -u'(T). \quad (3.5)$$

Gracias al Teorema 2.12 del Capítulo 2 se tiene que $\lambda_0^P[a] < \lambda_0^A[a]$. En [8], M. Zhang obtuvo el siguiente resultado:

Lema 3.18. [8, Theorem 1.1] *Supongamos que $a \in L^1(I)$, entonces:*

1. $L[a]$ verifica MP en X_P si y solo si $\lambda_0^P[a] > 0$.
2. $L[a]$ verifica AMP en X_P si y solo si $\lambda_0^P[a] < 0 \leq \lambda_0^A[a]$

Lema 3.19. *Supongamos que $a \in L^1(I)$, entonces:*

- (i) $\lambda_0^P \leq -\frac{1}{T} \int_0^T a(s) ds$ y la igualdad se da si y solo si a es constante.
- (ii) $\lambda_0^A[a] = \min\{\lambda_0^D[a_s], s \in \mathbb{R}\}$, donde $\lambda_0^D[a_s]$ es el primer valor propio de la ecuación de Dirichlet:

$$u''(t) + (a_s(t) + \lambda)u(t) = 0, \quad \text{c.t.p. } t \in I, \quad u(0) = u(T) = 0.$$

(iii) Si $\|a_+\|_\alpha \leq K(2\alpha^*, T)$, entonces $\lambda_0^A[a] \geq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \left(1 - \frac{\|a_+\|_\alpha}{K(2\alpha^*, T)}\right) \geq 0$, siendo K la constante definida en (2.4).

Demostración. (i) Sea u una solución T -periódica y no trivial asociada a λ_0^P . Es decir,

$$u''(t) + (a(t) + \lambda_0^P[a]) u(t) = 0, \quad t \in I, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T).$$

Por el Teorema 2.13 del Capítulo 2, sabemos que u no se anula. Entonces, podemos definir $h(t) = \frac{u'(t)}{u(t)}$, que satisface $h(0) = h(T)$ y

$$h'(t) = \frac{u''(t)u(t) - (u'(t))^2}{u^2(t)} = -(\lambda_0^P[a] + a(t)) - h^2(t).$$

Integrando en el intervalo $[0, T]$:

$$\begin{aligned} \int_0^T h'(s) ds &= -\lambda_0^P[a]T - \int_0^T a(s) ds - \int_0^T h^2(s) ds \\ \Rightarrow h(T) - h(0) &= -\lambda_0^P[a]T - \int_0^T a(s) ds - \int_0^T h^2(s) ds \\ \Rightarrow \lambda_0^P[a] + \frac{1}{T} \int_0^T a(s) ds &= -\frac{1}{T} \int_0^T h^2(s) ds. \end{aligned}$$

Como el término de la derecha es negativo, $\lambda_0^P[a] \leq -\frac{1}{T} \int_0^T a(s) ds$. Además, se tiene la igualdad si y solo si $h \equiv 0$. Esto último es equivalente a que u sea una solución constante, es decir, a es constante. De esta manera, $a + \lambda_0^P = 0$.

(ii) Ver [9].

(iii) Por la caracterización variacional de los valores propios es bien sabido que

$$\lambda_0^D[a] = \min_{\|u\|_2=1} q(u), \quad u \in H_0^1(I),$$

donde

$$q(u) = \int_0^T (u')^2(s) ds - \int_0^T a(s)u^2(s) ds.$$

Entonces, si $u \in H_0^1(I)$ con $\|u\|_2 = 1$, por la desigualdad de Hölder y la definición de la constante de Sobolev K , introducida en (2.4), tenemos

$$\begin{aligned} q(u) &= \|u'\|_2^2 - \|au^2\|_1 \geq \|u'\|_2^2 - \|a_+u^2\|_1 \geq \|u'\|_2^2 - \|a_+\|_\alpha \|u^2\|_{\alpha^*} = \|u'\|_2^2 - \|a_+\|_\alpha \|u\|_{2\alpha^*}^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{\|a_+\|_\alpha}{K(2\alpha^*, T)}\right) \|u'\|_2^2 \\ &\geq \left(1 - \frac{\|a_+\|_\alpha}{K(2\alpha^*, T)}\right) K(2, T) \|u\|_2^2 = \left(1 - \frac{\|a_+\|_\alpha}{K(2\alpha^*, T)}\right) \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

El último término es positivo gracias a la condición $\|a_+\|_\alpha \leq K(2\alpha^*, T)$. Por tanto, $\lambda_0^D[a] \geq \left(1 - \frac{\|a_+\|_\alpha}{K(2\alpha^*, T)}\right) \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \geq 0$. Ahora, teniendo en cuenta (ii) y que $\|(a_s)_+\|_\alpha = \|a_+\|_\alpha$, para todo $s \in I$, concluimos que

$$\lambda_0^A[a] \geq \left(1 - \frac{\|a_+\|_\alpha}{K(2\alpha^*, T)}\right) \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \geq 0$$

□

Gracias a los lemas 3.18 y 3.19 y el Corolario 3.17, podemos llegar al siguiente teorema:

Teorema 3.20. *Sea R el ínfimo de la distancia entre dos ceros consecutivos de una solución de la ecuación homogénea $L[a]u = 0$. Entonces se tiene que:*

- (i) $G_P[a]$ cambia de signo en $I \times I$ si y solo si $R < T$.
- (ii) $G_P[a]$ es positiva y se anula en algunos puntos en $I \times I$ si y solo si $R = T$.
- (iii) $G_P[a]$ no se anula en ningún punto de $I \times I$ si y solo si $R > T$.

Demostración. (i) Si $R < T$, sabemos que existe un $s \in I$ (trasladamos los ceros al intervalo) para el que, al menos, una solución de la ecuación $u''(t) + a_s(t)u(t) = 0$ tiene al menos un cero en el intervalo $(0, T)$. Ahora bien, por las propiedades espectrales estudiadas en la Sección 2.3 deducimos que $\lambda_0^D[a_s]$, el primer autovalor del problema de Dirichlet

$$L[a_s]u = 0 \text{ en } I, u(0) = u(T) = 0,$$

es estrictamente negativo. De lo contrario, por el Teorema 2.8, toda solución del problema

$$L[a_s + \lambda_0^D[a_s]]u = 0 \text{ en } I, u(0) = u(T) = 0,$$

tendría un cero en $(0, T)$, incumpliendo su definición.

De acuerdo con el Lema 3.19, apartado (ii), se tiene que $\lambda_0^A[a] < 0$. Aplicando el Lema 3.18, concluimos que $G_P[a]$ no satisface ni el Principio del máximo (MP) ni el del antimáximo (AMP). Finalmente, gracias el Lema 3.9, sabemos que $G_P[a]$ cambia de signo en $I \times I$.

(ii) Cuando $R = T$, si seguimos el mismo argumento que antes, llegamos a que $\lambda_0^A[a] = 0$. Por el Lema 3.18, $G_P[a]$ satisface el Principio del antimáximo. Por tanto, gracias el Lema 3.9, $G_P[a]$ es mayor o igual que cero en $I \times I$. Ahora, por el Lema 3.19, apartado (ii), sabemos que existe $s \in I$ tal que $\lambda_0^D[a_s] = 0$. De esta forma, el problema

$$u''(t) + a_s(t)u(t) = 0, \quad t \in I, \quad u(0) = u(T) = 0$$

tiene una solución no trivial, que es de signo constante gracias al principio del antimáximo. Finalmente, por el Corolario 3.17, $G_P[a]$ se anula en algún punto de $I \times I$.

(iii) Veamos que $G_P[a]$ no se anula en ningún punto de $I \times I$ si $R > T$. Por continuidad, esto indicará que $G_P[a]$ tiene signo estrictamente constante en $I \times I$.

Por reducción al absurdo, supongamos que $G_P[a](t_0, s_0) = 0$ para $(t_0, s_0) \in I \times I$. En primer lugar, asumamos que $t_0 \neq 0, T$ y fijemos $s_0 \in (0, T)$.

Supongamos $t_0 \geq s_0$. Por (3.3), la función u_{s_0} es solución de la ecuación $L[a]u = 0$ en el intervalo $I_{s_0}^0 = [s_0, s_0 + T]$. Además, verifica que $u_{s_0}(t_0) = 0$. Como $R > T$, u_{s_0} no puede volver a anularse en $I_{s_0}^0$. Es decir, t_0 es un máximo o mínimo de u_{s_0} en $I_{s_0}^0$. Además, $u_{s_0}(s_0) = u_{s_0}(s_0 + T) \neq 0$, ya que si no, $R \leq T$. Como consecuencia, $u'_{s_0}(t_0) = 0$. Por unicidad de solución del problema de valor inicial, $u_{s_0} \equiv 0$ en $I_{s_0}^0$. Esto último contradice la condición (G3) de la definición de la función de Green:

$$\frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^+, t) - \frac{\partial G[a]}{\partial t}(t^-, t) = 1, \quad \forall t \in I.$$

El caso $t_0 < s_0$ es análogo, pero considerando la función u_{s_0} en el intervalo $I_{s_0}^{-1} = [s_0 - T, s_0]$.

Ahora, supongamos $s_0 = 0$ o $s_0 = T$. De esta forma u_{s_0} es una solución en I donde $u_{s_0}(0) = u_{s_0}(T)$ y con $u_{s_0}(t_0) = 0$. Aplicando el mismo argumento que antes, podemos llegar a la misma contradicción. El caso $t_0 = 0$ o $t_0 = T$ se tiene por simetría. \square

Finalmente, como consecuencia de los lemas 3.18, 3.19 y el teorema anterior, deducimos el siguiente criterio para el caso de la función de Green estrictamente positiva:

Lema 3.21. *Supongamos que $\int_0^T a(t) dt \geq 0$, $a \not\equiv 0$, y que además*

$$\|a_+\|_\alpha \leq K(2\alpha^*, T).$$

Entonces la función de Green asociada $G_P[a]$ es estrictamente positiva en $I \times I$.

Demostración. En primer lugar, demostraremos que la distancia entre dos ceros de una solución no trivial del problema $L[a]u = 0$ es estrictamente mayor que T .

Supongamos que no es así y que, por tanto, existe una solución u no trivial del problema de Dirichlet

$$u''(t) + \check{a}(t)u(t) = 0, \quad t \in I, \quad u(t_1) = u(t_2) = 0, \quad (3.6)$$

donde $0 < t_2 - t_1 \leq T$ y \check{a} es la restricción de a al intervalo $[t_1, t_2]$.

Claramente, de la expresión (2.4), deducimos que $K(\alpha, T)$ es decreciente con respecto a $T > 0$. Por lo tanto,

$$\|\check{a}_+\|_\alpha \leq \|a_+\|_\alpha \leq K(2\alpha^*, T) \leq K(2\alpha^*, t_2 - t_1).$$

Así, por el Lema 3.19, (ii) y (iii), podemos concluir que $\lambda_0^D[\tilde{a}] > 0$, lo cual supone una contradicción con que la ecuación (3.6) tenga una solución no trivial.

Como la distancia entre dos ceros de una solución no trivial del problema $L[a]u = 0$ es estrictamente mayor que T , por el Teorema 3.20, la función de Green $G_P[a]$ tiene signo estrictamente constante en I . Para ver cuál es, consideramos el problema periódico

$$u''(t) + a(t)u(t) = 1, \quad t \in I, \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T).$$

Claramente, su única solución viene dada por la expresión

$$u(t) = \int_0^T G_P[a](t, s) ds.$$

Evidentemente u tiene el mismo signo $G_P[a]$ y no se anula. Así que, dividiendo por $u(t)$ en la ecuación e integrando en I , se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dt}{u(t)} &= \int_0^T \frac{u''(t)}{u(t)} dt + \int_0^T a(t) dt = \int_0^T \left(\frac{u'(t)}{u(t)} \right)' dt + \int_0^T \left(\frac{u'(t)}{u(t)} \right)^2 dt + \int_0^T a(t) dt \\ &= \left[\frac{u'(t)}{u(t)} \right]_0^T + \int_0^T \left(\frac{u'(t)}{u(t)} \right)^2 dt + \int_0^T a(t) dt = \int_0^T \left(\frac{u'(t)}{u(t)} \right)^2 dt + \int_0^T a(t) dt > 0 \end{aligned}$$

Es decir, $u(t) > 0$ en I , lo que implica $G_P[a] > 0$ en $I \times I$. \square

3.3.1. Función de Green para la ecuación de dispersión del haz de electrones

Esta sección estará centrada en demostrar la positividad estricta de la función de Green en el caso particular de la ecuación de dispersión del haz de electrones (1.38). Para ello, antes de nada, necesitaremos introducir una serie de conceptos relacionados con el cálculo de integrales a través de la función Gamma.

Definición 3.22. Sea $\mathbb{C}_{\Re > 0} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$. La función Gamma, $\Gamma : \mathbb{C}_{\Re > 0} \rightarrow \mathbb{C}$, se define como:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (3.7)$$

A partir de la función Gamma, podemos definir la función Beta.

Definición 3.23. Para $x, y \in \mathbb{C}_{\Re > 0}$, la función Beta se define como:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (3.8)$$

Esta última función es de gran utilidad para el cálculo de integrales, tal y como se demuestra a través de la siguiente proposición:

Proposición 3.24. Para $m, n \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$B(m+1, n+1) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}(\theta) \sin^{2n+1}(\theta) d\theta.$$

Demostración. Consideremos el producto de los factoriales de m y n ,

$$m!n! = \Gamma(m+1)\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-u}u^m du \int_0^\infty e^{-v}v^n dv.$$

Aplicando el cambio de variable $u \equiv x^2$ y $v \equiv y^2$, obtenemos:

$$m!n! = 4 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2m+1} dx \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2n+1} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2m+1} y^{2n+1} dx dy.$$

Y utilizando coordenadas polares, con $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \sin(\theta)$, llegamos a:

$$\begin{aligned} m!n! &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2m+1} r^{2n+1} \cos^{2m+1}(\theta) \sin^{2n+1}(\theta) r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2m+2n+3} dr \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}(\theta) \sin^{2n+1}(\theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-p} p^{m+n+1} dp \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}(\theta) \sin^{2n+1}(\theta) d\theta \\ &= 2\Gamma(m+n+2) \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1}(\theta) \sin^{2n+1}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Llegando así a la igualdad buscada. \square

Esta última relación será una herramienta esencial para llegar al resultado deseado. Por el Lema 3.21, la función de Green $G[a]$ tendrá signo estrictamente positivo si su potencial asociado, a , cumple la siguiente condición:

$$\|a_+\|_p \leq K(2p^*, T),$$

donde K es la constante de Sobolev definida en (2.4).

Para el caso de la ecuación (1.38), el potencial viene dado por $a(t) = \alpha(1 + \cos(2t))$. Así, asumiendo $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi a(t)^p dt &= \int_0^\pi \alpha^p (1 + \cos(2t))^p dt = \alpha^p \int_0^\pi (1 + \cos(2t))^p dt = \alpha^p \int_0^\pi \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \cos^k(2t) dt \\ &= \alpha^p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \int_0^\pi \cos^k(2t) dt = \alpha^p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^k(u) du, \end{aligned}$$

tomando el cambio de variable $u \equiv 2t$ en la última igualdad. En concreto, para k impar, la integral anterior es cero. Por tanto, suponemos k par y

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(u) du = \int_{n\frac{\pi}{2}}^{n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \cos^k(u) du, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Así, de la Proposición 3.24, deducimos:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^k(u) du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k(u) du = B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)},$$

Y de esta forma,

$$\|a_+\|_p = |\alpha| H(p), \quad \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1,$$

donde

$$H(p) = \left(\sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor} \binom{p}{2k} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por tanto, la función de Green $G[a]$ será estrictamente positiva en $I \times I$ si se cumple que $|\alpha| \leq \max_{p \geq 1} A(p)$, con

$$A(p) = \frac{K(2p^*, T)}{H(p)}.$$

Observación 3.25. En la Figura 3.3 se pueden ver como varían los valores admisibles obtenidos en función de p , con $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Por ejemplo si $p = 2$, se tiene que $A(p) = 0,65676$. De forma que si $|\alpha| \leq 0,65676$, se cumplirá que la función de Green $G[a]$ asociada a la ecuación (1.38) tiene signo estrictamente positivo.

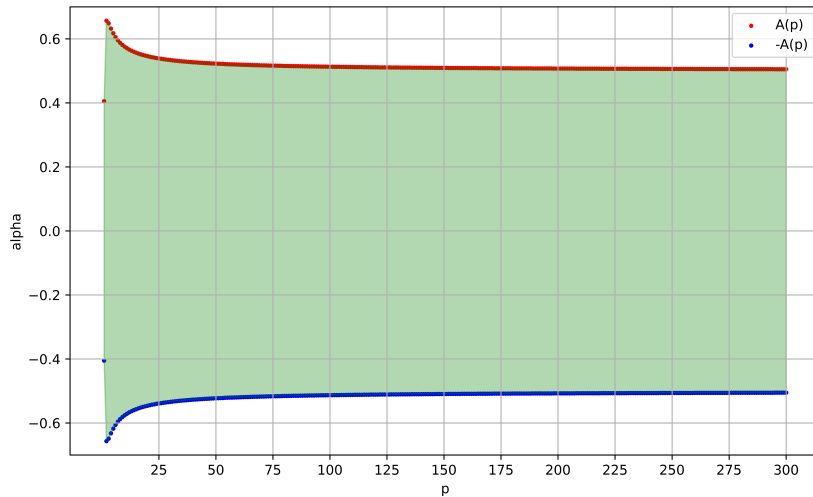


Figura 3.3: Valores admisibles de α para distintos valores de p .

Capítulo 4

Problemas con dependencia paramétrica

A lo largo de este capítulo trabajaremos con el siguiente problema:

$$u''(t) + a(t)u(t) = \lambda g(t)f(u(t)) + c(t), \quad t \in I \quad (4.1)$$

$$u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T), \quad (4.2)$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro y g, c y f son funciones a las cuales impondremos ciertas condiciones a lo largo de este capítulo. En particular, permitiremos que la función f tenga una singularidad en $x = 0$. Además, asumiremos que la función de Green asociada es mayor o igual que cero en $I \times I$, por lo que los resultados del Capítulo 3 son de vital importancia.

Observación 4.1. Nótese que la ecuación de dispersión del haz de electrones (1.38), obtenida a lo largo del Capítulo 1, se corresponde con:

$$a(t) = \alpha(1 + \cos(2t)),$$
$$g(t) = 1, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad c(t) = 0, \quad \lambda = \beta,$$

con $\alpha, \beta > 0$ tal y como se definen en (1.37). Por lo tanto, los resultados que se obtengan para el problema (4.1)-(4.2) serán aplicables al problema de Mathieu siempre que se asegure que la función de Green asociada es mayor o igual que cero en $I \times I$.

A lo largo de este capítulo usaremos como referencia los resultados presentes en [2].

4.1. Preliminares y notación

El objetivo de este capítulo será demostrar la existencia de soluciones positivas para el problema (4.1)-(4.2). Para ello, necesitamos introducir una serie de definiciones y resultados previos.

En primer lugar, nuestro espacio de soluciones será un cono, el cual definimos a continuación.

Definición 4.2 (Cono). Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $K \subset X$ es un cono si es cerrado, $K + K \subset K$, $\lambda K \subset K$ para todo $\lambda \geq 0$ y $K \cap (-K) = \{0\}$.

En este contexto, los operadores compactos son esenciales, fundamentales en el análisis funcional y en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Definición 4.3 (Operador compacto). Sean E y F dos espacios normados, y $M \subset E$. Entonces se dice que el operador $\mathcal{T} : M \rightarrow F$ es *compacto* si y solo si cumple las dos siguientes condiciones:

1. \mathcal{T} es continua.
2. \mathcal{T} lleva conjuntos acotados de M en conjuntos relativamente compactos de F .

Para entender mejor esta definición, es crucial comprender el concepto de conjunto relativamente compacto.

Definición 4.4 (Conjunto relativamente compacto). Sea X un espacio de Banach. Un conjunto $K \subset X$ es un conjunto *relativamente compacto* si su clausura es compacta.

A la hora de comprobar si un conjunto es relativamente compacto, es esencial el teorema de Arzelà-Ascoli, que establece una condición necesaria y suficiente para ello. Antes de enunciarlo, definimos el concepto de equicontinuidad.

Definición 4.5 (Equicontinuidad). Una familia de funciones \mathcal{F} definida en un espacio métrico (X, d_X) que toma valores en otro espacio métrico (Y, d_Y) es *equicontinua* si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall f \in \mathcal{F}$ y para todos los puntos $x, y \in X$ que satisfacen $d_X(x, y) < \delta$, se cumple que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Teorema 4.6 (Arzelà-Ascoli). Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Entonces, un subconjunto $A \subset C(X)$ es *relativamente compacto* si y solo si es equicontinuo y puntualmente acotado.

Para demostrar muchos de los resultados presentes en este capítulo, necesitaremos el famoso Teorema del punto fijo en un cono de Krasnoselskii.

Teorema 4.7 (Teorema del punto fijo en un cono de Krasnoselskii). Sea X un espacio de Banach y $K \subset X$ un cono en X . Sean Ω_1 y Ω_2 dos subconjuntos abiertos y acotados de X , con $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ y sea $\mathcal{T} : K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ un operador compacto (véase en la Definición 4.3), el cual satisface alguna de las dos siguientes propiedades:

$$(i) \quad \|\mathcal{T}u\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1 \quad y \quad \|\mathcal{T}u\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

$$(ii) \|\mathcal{T}u\| \geq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_1 \quad y \quad \|\mathcal{T}u\| \leq \|u\|, \forall u \in K \cap \partial\Omega_2.$$

Entonces \mathcal{T} tiene un punto fijo en $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$.

Los conos con los que trabajaremos serán de la forma:

$$K = \{u \in \mathcal{C}(I), u \geq 0 \text{ en } I : \varphi(u) \geq \sigma\|u\|\},$$

donde $0 < \sigma \leq 1$ es una constante fijada y $\varphi > 0$ es un funcional definido en el conjunto $X = \{u \in \mathcal{C}(I), u \geq 0\}$, que cumple:

- $\varphi(x + y) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, para todo $x, y \in X$.
- $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$, para todo $x \in X$ y $\lambda \geq 0$.

Estas dos últimas condiciones nos aseguran que el conjunto K es un cono.

El potencial a se toma de tal modo que el problema homogéneo (2.3) asociado sea no resonante (Definición 2.3). De esta manera, tenemos asegurada la existencia de la función de Green asociada $G_P[a]$ y, para cada $\lambda > 0$, podemos definir el operador:

$$\mathcal{T}_\lambda : \mathcal{D}(\mathcal{T}_\lambda) \equiv \{u \in \mathcal{C}(I), u \geq 0\} \rightarrow \mathcal{C}(I) \quad (4.3)$$

dado por

$$\mathcal{T}_\lambda u(t) = \lambda \int_0^T G_P[a](t, s)g(s)f(u(s)) ds + \int_0^T G_P[a](t, s)c(s) ds, \quad t \in I. \quad (4.4)$$

Como consecuencia, $u > 0$ es una solución del problema (4.1) si y solo si u es un punto fijo del operador \mathcal{T}_λ , es decir, si y solo si $\mathcal{T}_\lambda u = u$.

A lo largo del capítulo usaremos la siguiente notación:

$$\gamma(t) = \int_0^T G_P[a](t, s)c(s) ds, \quad (4.5)$$

$$m = \min_{t, s \in I} G_P[a](t, s), \quad M = \max_{t, s \in I} G_P[a](t, s), \quad (4.6)$$

y

$$\overline{f_0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}, \quad \overline{f_\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Además, para una función esencialmente acotada h , definimos:

$$h_* = \operatorname{ess\,inf}_{t \in I} h(t) = \sup \{M \in \mathbb{R} : h(t) \geq M \text{ para casi todo } t \in I\},$$

$$h^* = \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} h(t) = \inf \{M \in \mathbb{R} : h(t) \leq M \text{ para casi todo } t \in I\}.$$

4.2. Existencia y multiplicidad de solución

En esta sección, trabajaremos asumiendo distintas condiciones. Entre ellas que la función de Green sea estrictamente positiva. Como aproximación al problema, supondremos que:

$$(H0) \quad \gamma_* > 0 \text{ o } c(t) \equiv 0$$

(H1) $a \in L^p(I)$, $p \geq 1$ y de manera que el problema es no resonante y la función de Green es estrictamente positiva en $I \times I$.

$$(H2) \quad g \in L^1(I), \quad g(t) \geq 0 \text{ en casi todo punto } t \in I \text{ y } \int_0^T g(s) ds > 0.$$

(H3) $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ es continua.

$$(H4) \quad c \in L^1(I).$$

Observación 4.8. La condición (H3) permite que la función f pueda tener una singularidad en el punto $x = 0$. Esto hace que el problema tratado en la Observación 4.1 cumpla todas las condiciones impuestas de forma trivial, exceptuando la condición (H1), que por la Observación 3.25 de la Sección 3.3.1 sabemos que se cumple para $|\alpha| \leq 0,65676$.

Como consecuencia de la condición (H1), se tiene que $m > 0$ y, por tanto, definimos el cono:

$$K := \left\{ u \in \mathcal{C}(I), \min_{t \in I} u(t) \geq \sigma \|u\|_\infty \right\},$$

donde $\|u\|_\infty = \max_{t \in I} |u(t)|$ y

$$\sigma = \min \left\{ \frac{m}{M}, \frac{\gamma_*}{\gamma^*} \right\} \text{ si } \gamma_* > 0 \quad \text{o} \quad \sigma = \frac{m}{M} \text{ si } c(t) \equiv 0.$$

En ambos casos $0 < \sigma < 1$ y para $0 < r < R$ definimos

$$K_{r,R} := \{u \in K, r \leq \|u\|_\infty \leq R\}.$$

Teniendo en cuenta todo esto podemos enunciar el siguiente teorema que aporta una condición suficiente para la existencia de soluciones del problema (4.1)-(4.2).

Teorema 4.9. *Asumamos que se cumplen las condiciones (H0), (H1), (H2), (H3) y (H4). Entonces, para cada $\lambda > 0$ y $0 < r < R$, el operador $\mathcal{T}_\lambda : K_{r,R} \rightarrow K$ definido en (4.4) está bien definido y es compacto. Además, si bien*

$$(i) \quad \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \quad \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r \quad \text{y} \quad \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \quad \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R,$$

o bien

$$(ii) \quad \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \quad \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r \quad \text{y} \quad \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \quad \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R,$$

entonces \mathcal{T}_λ tiene un punto fijo en $K_{r,R}$, lo que significa que el problema (4.1)-(4.2) tiene al menos una solución en $K_{r,R}$.

Demostración. En primer lugar, si $u \in K_{r,R}$, entonces $0 < \sigma r \leq u(t) \leq R$, para todo $t \in I$. De esta manera, $K_{r,R} \subset \mathcal{D}(\mathcal{T}_\lambda)$ y, por tanto, $\mathcal{T}_\lambda : K_{r,R} \rightarrow \mathcal{C}(I)$ está bien definido. Veamos que $\mathcal{T}_\lambda(\mathcal{D}(\mathcal{T}_\lambda)) \subset K$. Para ello, tomamos $u \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\lambda)$ y distinguimos dos casos:

- $c(t) \equiv 0$:

$$\begin{aligned} \min(\mathcal{T}_\lambda u) &= \min\left(\lambda \int_0^T G_P[a](t,s)g(s)f(u(s)) ds\right) \geq \lambda \int_0^T mg(s)f(u(s)) ds \\ &= \frac{m}{M} \left(\int_0^T Mg(s)f(u(s)) ds\right) \geq \sigma \max\left(\int_0^T G_P[a](t,s)g(s)f(u(s)) ds\right) \\ &= \sigma \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \Rightarrow \mathcal{T}_\lambda u \in K. \end{aligned}$$

- $\gamma_* > 0$:

$$\begin{aligned} \min(\mathcal{T}_\lambda u) &= \min\left(\lambda \int_0^T G_P[a](t,s)g(s)f(u(s)) ds + \lambda \int_0^T G_P[a](t,s)c(s) ds\right) \\ &\geq \lambda \int_0^T mg(s)f(u(s)) ds + \gamma_* = \frac{m}{M} \lambda \int_0^T Mg(s)f(u(s)) ds + \frac{\gamma_*}{\gamma^*} \gamma^* \\ &\geq \sigma \lambda \int_0^T Mg(s)f(u(s)) ds + \sigma \gamma^* = \sigma \left(\int_0^T Mg(s)f(u(s)) ds + \gamma^*\right) \\ &\geq \sigma \left(\max\left(\int_0^T G_P[a](t,s)g(s)f(u(s)) ds\right) + \gamma^*\right) \\ &\geq \sigma \max\left(\int_0^T G_P[a](t,s)g(s)f(u(s)) ds + \int_0^T G_P[a](t,s)c(s) ds\right) \\ &= \sigma \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \Rightarrow \mathcal{T}_\lambda u \in K. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{T}_\lambda(\mathcal{D}(\mathcal{T}_\lambda)) \subset K$.

Con el objetivo de aplicar el Teorema de Krasnoselskii, veamos que el operador \mathcal{T}_λ es compacto.

- \mathcal{T}_λ es continuo:

Consideremos una sucesión de funciones $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset K_{r,R}$ que converge a una función $u \in K_{r,R}$, es decir, $\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y veamos que la sucesión $\{\mathcal{T}_\lambda u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\mathcal{T}_\lambda u$. Para ello, nos centraremos únicamente en el primer término de \mathcal{T}_λ , ya que el segundo es una constante. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$0 < \sigma r \leq u_n(t) \leq R, \quad \forall t \in I,$$

y, por lo tanto,

$$0 < \sigma r \leq u(t) \leq R, \quad \forall t \in I.$$

Esto último nos permite aplicar la continuidad de f en $(0, \infty)$ para llegar a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n(t)) = f(u(t)), \quad \forall t \in I.$$

Ahora, por continuidad de $G_P[a]$ en $I \times I$, se tiene que

$$G_P[a](t, s)g(s)f(u_n(s)) \rightarrow G_P[a](t, s)g(s)f(u(s)) \text{ en c.t.p. } s \in I \text{ y } \forall t \in I.$$

Además, al ser $f \in \mathcal{C}([\sigma r, R])$, tenemos que existe $C_1 > 0$ tal que $0 < f(u_n(s)) \leq C_1$, para todo $s \in I$. Así, tomando M como se define en (4.6), tenemos que $|G_P[a](t, s)g(s)f(u_n(s))| \leq MC_1g(s) \in L^1(I)$.

Por lo tanto, por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\mathcal{T}_\lambda u_n \rightarrow \mathcal{T}_\lambda u \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad \forall t \in I.$$

Y, como $MC_1g(s)$ es independiente de t , se tiene que

$$\|\mathcal{T}_\lambda u_n - \mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

- \mathcal{T}_λ lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos:

Sea $B \subset K_{r,R} \subset \mathcal{C}(I)$ un conjunto acotado. Entonces, existe $R_0 > 0$ tal que $\|u\|_\infty \leq R_0$, para todo $u \in B$. Como $0 < \sigma r \leq u(t) \leq R$, se tiene que existe $C_2 > 0$ tal que $0 < f(u(t)) \leq C_2$, para todo $u \in B$ y $t \in I$. Así,

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \lambda \int_0^T Mg(s)f(u(s)) ds + \gamma^* \leq \lambda MC_2 \int_0^T g(s) ds + \gamma^* = \lambda MC_2 \int_0^T g(s) ds + \gamma^* \equiv \bar{C}$$

Es decir, $\mathcal{T}_\lambda(B)$ está acotado.

Como $\mathcal{T}_\lambda(B) \subset \mathcal{C}(I)$, por el Teorema de Arzelà-Ascoli, basta ver que $\mathcal{T}_\lambda(B)$ es equicontinuo para demostrar que es compacto. Para ello, sean $u \in B$ y $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0, T]$. Entonces,

$$\begin{aligned} u(t_1) - u(t_2) &= \lambda \int_0^T (G_P[a](t_1, s) - G_P[a](t_2, s)) g(s) f(u(s)) ds \\ &\quad + \int_0^T (G_P[a](t_1, s) - G_P[a](t_2, s)) c(s) ds. \end{aligned}$$

Como $G_P[a]$ es continua en el compacto $I \times I$, se tiene que $G_P[a]$ es uniformemente continua en $I \times I$. Así,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |G_P[a](t_1, s) - G_P[a](t_2, s)| < \varepsilon, \forall s \in I.$$

Y, por tanto,

$$|u(t_1) - u(t_2)| < \lambda \varepsilon C_2 \int_0^T g(s) ds + \varepsilon \int_0^T c(s) ds = \varepsilon \left(\lambda C_2 \int_0^T g(s) ds + \int_0^T c(s) ds \right) = \varepsilon \bar{C}.$$

Cómo, δ y \bar{C} no dependen de u , se tiene que $\mathcal{T}_\lambda(B)$ es equicontinuo y, por tanto, compacto.

De esta forma, el operador \mathcal{T}_λ es compacto y podemos aplicar el Teorema de Krasnoselskii (4.7). Para ello tomamos los siguiente conjuntos:

$$\Omega_1 = \{u \in K : \|u\|_\infty \leq r\}, \quad \Omega_2 = \{u \in K : \|u\|_\infty \leq R\},$$

de forma que $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ y que $K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) = K_{r,R}$. Y se tiene que \mathcal{T}_λ tiene un punto fijo en $K_{r,R}$, lo que significa que el problema (4.1)-(4.2) tiene al menos una solución en $K_{r,R}$. \square

Para probar la existencia de soluciones para el problema (4.1)-(4.2), haciendo uso del anterior teorema, necesitaremos una serie de lemas auxiliares que demostraremos a continuación. Estos nos permitirán deducir condiciones suficientes para aplicar el teorema.

Lema 4.10. *Supongamos que las condiciones (H0), (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen. Entonces, para cada $R > \gamma^*$ existe $\lambda_0(R) > 0$ de forma que, para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0(R)$, se tiene*

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \quad \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Demostración. Fijemos $R > \gamma^*$ y sea $u \in K$ con $\|u\|_\infty = R$. De esta forma

$$\left. \begin{array}{l} u \in K \Rightarrow \min_{t \in I} u(t) \geq \sigma \|u\|_\infty = \sigma R \\ \|u\|_\infty = R \Rightarrow \max_{t \in I} u(t) = R \end{array} \right\} \implies u(t) \in [\sigma R, R], \quad \forall t \in I.$$

Ahora, definiendo

$$\lambda_0(R) := \frac{R - \gamma^*}{M \max_{u \in [\sigma R, R]} f(u) \int_0^T g(s) ds} > 0,$$

y tomando $0 < \lambda \leq \lambda_0(R)$, se tiene que, para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^T G_P[a](t, s) g(s) f(u(s)) ds + \gamma(t) \\ &\leq \lambda \int_0^T M g(s) \max_{u \in [\sigma R, R]} f(u) ds + \gamma^* = \lambda M \max_{u \in [\sigma R, R]} f(u) \int_0^T g(s) ds + \gamma^* \\ &\leq \lambda_0(R) M \max_{u \in [\sigma R, R]} f(u) \int_0^T g(s) ds + \gamma^* = R = \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. \square

Lema 4.11. *Supongamos que las condiciones (H0), (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen. Entonces, para cada $r > 0$ existe $\lambda_0(r) > 0$ de forma que, para todo $\lambda \geq \lambda_0(r)$, se tiene*

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Demostración. Fijemos $r > 0$ y sea $u \in K$ con $\|u\|_\infty = r$. Razonando como antes, sabemos que $u(t) \in [\sigma r, r]$ para todo $t \in I$. Definiendo

$$\lambda_0(r) := \frac{r}{m \min_{u \in [\sigma r, r]} f(u) \int_0^T g(s) ds} > 0,$$

y tomando $\lambda \geq \lambda_0(r)$, se tiene que, para todo $t \in I$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^T G_P[a](t, s) g(s) f(u(s)) ds + \gamma(t) \\ &\geq \lambda \int_0^T m g(s) \min_{u \in [\sigma r, r]} f(u) ds + \gamma_* = \lambda m \min_{u \in [\sigma r, r]} f(u) \int_0^T g(s) ds + \gamma_* \\ &\geq \lambda_0(r) m \min_{u \in [\sigma r, r]} f(u) \int_0^T g(s) ds + \gamma_* \geq r = \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty$. □

Lema 4.12. *Supongamos que las condiciones (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen y que $c(t) \equiv 0$. Entonces, si $\overline{f_0} = 0$, existe $r_0(\lambda) > 0$ de forma que, para todo $0 < r \leq r_0(\lambda)$, se tiene*

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Demostración. Como $\overline{f_0} = 0$, para $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\lambda M \int_0^T g(s) ds} > 0$, existe $r_0(\lambda) > 0$ tal que $\frac{f(u)}{u} \leq \varepsilon$ para todo $0 < u \leq r_0(\lambda)$. O lo que es lo mismo, $f(u) \leq \varepsilon u$ para todo $0 < u \leq r_0(\lambda)$.

Fijando $0 < r \leq r_0(\lambda)$ y tomando $u \in K$ con $\|u\|_\infty = r$, para todo $t \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^T G_P[a](t, s) g(s) f(u(s)) ds \\ &\leq \lambda \int_0^T M g(s) \varepsilon u(s) ds \\ &\leq \lambda M \int_0^T M g(s) \varepsilon \|u\|_\infty ds = \lambda M \varepsilon \|u\|_\infty \int_0^T g(s) ds = \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. □

Lema 4.13. *Supongamos que las condiciones (H0), (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen. Entonces, si $\overline{f_0} = \infty$, existe $r_0(\lambda) > 0$ de forma que, para todo $0 < r \leq r_0(\lambda)$, se verifica*

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Demostración. Razonando como antes, ya que $\overline{f_0} = \infty$, para $L = L(\lambda) = \frac{1}{\lambda m \sigma \int_0^T g(s) ds} > 0$, existe $r_0(\lambda) > 0$ tal que $f(u) \geq Lu$ para todo $0 < u \leq r_0(\lambda)$.

Fijando $0 < r < r_0(\lambda)$ y tomando $u \in K$ con $\|u\|_\infty = r$, para todo $t \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^T G_P[a](t, s) g(s) f(u(s)) ds + \gamma(t) \\ &\geq \lambda \int_0^T m g(s) L u(s) ds + \gamma_* \\ &\geq \lambda m L \int_0^T g(s) \sigma \|u\|_\infty ds + \gamma_* \\ &\geq \lambda m L \sigma \|u\|_\infty \int_0^T g(s) ds = \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty$. □

Lema 4.14. *Supongamos que las condiciones (H0), (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen. Entonces, si $\overline{f_\infty} = 0$, existe $R_0(\lambda) > 0$ de forma que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se tiene*

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Demostración. Como $\overline{f_\infty} = 0$, para $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = \frac{1}{2\lambda M \int_0^T g(s) ds} > 0$, existe $R_1(\lambda)$ tal que $f(u) \leq \varepsilon u$ para todo $u \geq R_1(\lambda) > 0$. Finalmente definimos $R_0(\lambda) := \max\{\frac{R_1(\lambda)}{\sigma}, 2\gamma^*\}$.

Ahora, fijando $R \geq R_0(\lambda)$ y tomando $u \in K$ con $\|u\|_\infty = R$, para todo $t \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^T G_P[a](t, s) g(s) f(u(s)) ds + \gamma(t) \\ &\leq \lambda \int_0^T M g(s) \varepsilon u(s) ds + \gamma^* \\ &\leq \lambda M \int_0^T g(s) \varepsilon \|u\|_\infty ds + \gamma^* = \lambda M \varepsilon \|u\|_\infty \int_0^T g(s) ds + \gamma^* \\ &= \frac{R}{2} + \gamma^* \leq \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R = \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty$. □

Lema 4.15. *Supongamos que las condiciones (H0), (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen. Entonces, si $\overline{f_\infty} = \infty$, existe $R_0(\lambda) > 0$ de forma que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se verifica*

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Demostración. En este caso, como $\overline{f_\infty} = \infty$, para $L = L(\lambda) = \frac{1}{\lambda m \sigma \int_0^T g(s) ds} > 0$, existe $R_1(\lambda) > 0$ tal que $f(u) \geq Lu$ para todo $u \geq R_1(\lambda)$. Definimos $R_0(\lambda) := \frac{R_1(\lambda)}{\sigma}$.

Fijando $R \geq R_0(\lambda)$ y tomando $u \in K$ con $\|u\|_\infty = R$, para todo $t \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\lambda u(t) &= \lambda \int_0^T G_P[a](t, s)g(s)f(u(s)) ds + \gamma(t) \\ &\geq \lambda \int_0^T mg(s)Lu(s) ds + \gamma_* \\ &\geq \lambda mL \int_0^T g(s)\sigma\|u\|_\infty ds + \gamma_* \\ &\geq \lambda mL\sigma\|u\|_\infty \int_0^T g(s) ds = \|u\|_\infty. \end{aligned}$$

Como consecuencia, $\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty$. □

Combinando los lemas anteriores, podemos llegar a los siguientes resultados que permitirán demostrar la existencia de soluciones para el problema (4.1)-(4.2) en el caso de la que función de Green sea estrictamente positiva. Necesitaremos distinguir dos casos, dependiendo de si $\gamma_* > 0$ o $c(t) \equiv 0$.

Teorema 4.16. *Supongamos que las condiciones (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen y que $\gamma_* > 0$. Entonces se tiene:*

1. *Existe λ_0 de forma que para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.*
2. *Si $\overline{f_\infty} = 0$, el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva para todo $\lambda > 0$.*
3. *Si $\overline{f_\infty} = \infty$, existe λ_0 de forma que para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) tiene dos soluciones positivas.*
4. *Si $\overline{f_0} > 0$ y $\overline{f_\infty} > 0$, existe λ_0 de forma que para todo $\lambda > \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) no tiene soluciones positivas.*

Demostración. Fijando $0 < r < \gamma_*$, tenemos que, para todo $\lambda > 0$ y $u \in K$ con $\|u\|_\infty = r$,

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \mathcal{T}_\lambda u(t) = \lambda \int_0^T G_P[a](t, s)g(s)f(u(s)) ds + \gamma(t) \geq \gamma_* > r = \|u\|_\infty,$$

donde para la segunda igualdad hemos usado que todas las funciones implicadas son positivas gracias a (H1), (H2) y (H3). Partiendo de esto, separaremos la demostración en los distintos casos:

Parte 1. Fijando $R > \gamma^* \geq \gamma_* > r$, por el Lema 4.10, existe $\lambda_0(R) > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda < \lambda_0(R)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

De forma que, por el Teorema 4.9, el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

Parte 2. Como $\overline{f_\infty} = 0$, podemos tomar $R_0(\lambda) > 0$ dado por el Lema 4.14. De esta forma se tiene que, para $R > \max\{R_0(\lambda), r\}$,

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Y, por el Teorema 4.9, el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

Parte 3. Fijamos $R_2 > R_1 > \gamma^* \geq \gamma_* > r$. De acuerdo con el Lema 4.10, existen $\lambda_0(R_1) > 0$ y $\lambda_0(R_2) > 0$ tales que, al tomar $\lambda_0 = \min\{\lambda_0(R_1), \lambda_0(R_2)\}$, para todo $0 < \lambda < \lambda_0$, se cumple que

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R_1 \quad \text{y} \quad \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R_2.$$

Fijando $0 < \lambda < \lambda_0$, como $\overline{f_\infty} = \infty$, gracias al Lema 4.15, existe $R_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Así, tomando $R > \max\{R_0(\lambda), R_2\}$, se tiene que, por el Teorema 4.9, existen dos soluciones positivas $u_1, u_2 \in K$ para el problema (4.1)-(4.2), tales que

$$r \leq \|u_1\|_\infty \leq R_1 < R_2 \leq \|u_2\|_\infty \leq R.$$

Parte 4. Por (H3) sabemos que la función f es estrictamente positiva. Esto junto con $\overline{f_0} > 0$ y $\overline{f_\infty} > 0$, nos permite deducir la existencia de $L > 0$ tal que $f(u) \geq Lu$ para todo $u > 0$. Definimos

$$\lambda_0 := \frac{1}{m\sigma L \int_0^T g(s) ds}.$$

Por reducción al absurdo, supongamos que para $\lambda > \lambda_0$ existe una solución positiva u del problema (4.1)-(4.2). Entonces $u \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\lambda)$ y $\mathcal{T}_\lambda(u) = u$. Así,

$$\begin{aligned} \|u\|_\infty &= \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \mathcal{T}_\lambda u(t) = \lambda \int_0^T G_P[a](t, s)g(s)f(u(s)) ds + \gamma(t) \\ &\geq \lambda \int_0^T mg(s)Lu(s) ds + \gamma_* \\ &\geq \lambda \int_0^T mg(s)L\sigma\|u\|_\infty ds + \gamma_* = \lambda m L \sigma \|u\|_\infty \int_0^T g(s) ds + \gamma_* \\ &> \lambda_0 m L \sigma \|u\|_\infty \int_0^T g(s) ds + \gamma_* = \|u\|_\infty \end{aligned}$$

y llegamos a una contradicción. □

Teorema 4.17. *Supongamos que las condiciones (H1), (H2), (H3) y (H4) se cumplen y que $c(t) \equiv 0$. Entonces se tiene:*

1. Si $\overline{f_0} = \infty$ o $\overline{f_\infty} = \infty$, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.
2. Si $\overline{f_\infty} = 0$, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.
3. Si $\overline{f_0} = \infty$ y $\overline{f_\infty} = 0$, entonces el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva para todo $\lambda > 0$.
4. Si $\overline{f_0} = \infty$ y $\overline{f_\infty} = \infty$, entonces existe λ_0 tal que para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) tiene dos soluciones positivas.
5. Si $\overline{f_0} = 0$ y $\overline{f_\infty} = \infty$, entonces el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva para todo $\lambda > 0$.
6. Si $\overline{f_0} = 0$ y $\overline{f_\infty} = 0$, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) tiene dos soluciones positivas.
7. Si $\overline{f_0} > 0$ y $\overline{f_\infty} > 0$, entonces existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda > \lambda_0$, el problema (4.1)-(4.2) no tiene soluciones positivas.

Demostración. Parte 1. Fijamos $R > \gamma^* = 0$. Por el Lema 4.10, existe $\lambda_0 = \lambda_0(R) > 0$ tal que, para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0(R)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Fijado $0 < \lambda \leq \lambda_0$, podemos distinguir dos casos:

- (i) $\overline{f_0} = \infty$: Por el Lema 4.13, existe $r_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $0 < r \leq r_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Por lo tanto, tomando $r < \min\{R, r_0(\lambda)\}$, por el Teorema 4.9, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

- (ii) $\overline{f_\infty} = \infty$: Por el Lema 4.15, existe $R_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $R' \geq R_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R'.$$

Así, tomando $r > \max\{R, R_0(\lambda)\}$, por el Teorema 4.9, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

En ambos casos, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

Parte 2. Fijamos $r > 0$ y por el Lema 4.11, existe $\lambda_0 = \lambda_0(r) > 0$ tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_0(r)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Fijando $\lambda \geq \lambda_0$, como $\overline{f_\infty} = 0$, por el Lema 4.14, existe $R_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

De manera que, fijando $R > \max\{R_0(\lambda), r\}$, por el Teorema 4.9, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

Parte 3. Sea $\lambda > 0$. Como $\overline{f_0} = \infty$, por el Lema 4.13, existe $r_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $0 < r \leq r_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Fijado $0 < r \leq r_0(\lambda)$, como $\overline{f_\infty} = 0$, por el Lema 4.14, existe $R_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Tomando $R > \max\{r, R_0(\lambda)\}$, por el Teorema 4.9, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

Parte 4. Fijamos $R_2 > R_1 > \gamma^* = 0$. De acuerdo con el Lema 4.10, existen $\lambda_0(R_1) > 0$ y $\lambda_0(R_2) > 0$ tales que, al tomar $\lambda_0 = \min\{\lambda_0(R_1), \lambda_0(R_2)\}$, para todo $0 < \lambda \leq \lambda_0$, se cumple que

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R_1 \quad \text{y} \quad \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R_2.$$

Fijando $0 < \lambda \leq \lambda_0$, como $\overline{f_0} = \infty$, gracias al Lema 4.13, existe $r_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $0 < r \leq r_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Fijamos $0 < r < \min\{R_1, r_0(\lambda)\}$. Por otro lado, como $\overline{f_\infty} = \infty$, por el Lema 4.15, existe $R_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Finalmente, fijamos $R > \max\{R_0(\lambda), R_2\}$. Así, por el Teorema 4.9, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene dos soluciones positivas $u_1, u_2 \in K$ tales que

$$r \leq \|u_1\|_\infty \leq R_1 < R_2 \leq \|u_2\|_\infty \leq R.$$

Parte 5. Sea $\lambda > 0$. Como $\overline{f_0} = 0$, por el Lema 4.12, existe $r_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $0 < r \leq r_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Fijamos $0 < r \leq r_0(\lambda)$. Como $\overline{f_\infty} = \infty$, por el Lema 4.15, existe $R_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Así, tomando $R > \max\{r, R_0(\lambda)\}$, por el Teorema 4.9, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene una solución positiva.

Parte 6. Fijamos $r_2 > r_1 > 0$. De acuerdo con el Lema 4.11, existen $\lambda_0(r_1) > 0$ y $\lambda_0(r_2) > 0$ tales que, al tomar $\lambda_0 = \max\{\lambda_0(r_1), \lambda_0(r_2)\}$, para todo $\lambda \geq \lambda_0$, se cumple que

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r_1 \quad \text{y} \quad \|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \geq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r_2.$$

Fijando $\lambda \geq \lambda_0$, como $\overline{f_0} = 0$, por el Lema 4.12, existe $r_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $0 < r \leq r_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = r.$$

Tomamos $r < \min\{r_1, r_0(\lambda)\}$. Por otro lado, como $\overline{f_\infty} = 0$, por el Lema 4.14, existe $R_0(\lambda) > 0$ tal que, para todo $R \geq R_0(\lambda)$, se tiene

$$\|\mathcal{T}_\lambda u\|_\infty \leq \|u\|_\infty, \forall u \in K \text{ con } \|u\|_\infty = R.$$

Finalmente, tomamos $R > \max\{r, R_0(\lambda)\}$. Así, por el Teorema 4.9, se tiene que el problema (4.1)-(4.2) tiene dos soluciones positivas $u_1, u_2 \in K$ tales que

$$r \leq \|u_1\|_\infty \leq r_1 < r_2 \leq \|u_2\|_\infty \leq R.$$

Parte 7. Mismo argumento que en la Parte 4 de la demostración del Teorema 4.16. □

Observación 4.18. Nótese que la ecuación de Hill tratada en la Observación 4.1 verifica:

$$\begin{aligned} \overline{f_0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty \\ \overline{f_\infty} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

Además $c(t) \equiv 0$. Por lo tanto, si $\alpha \geq 0,65676$ (Observación 3.25), se cumple (H1) y podemos aplicar la *Parte 3* del Teorema 4.17, concluyendo que el problema modelado en el Ejemplo 4.1 tiene una solución positiva para todo $\lambda > 0$.

Bibliografía

- [1] Alberto Cabada. *Green's functions in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Briefs Math. New York, NY: Springer, 2014.
- [2] Alberto Cabada, José Ángel Cid, and Lucía López-Somoza. *Maximum principles for the Hill's equation*. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2018.
- [3] Alberto Cabada, José Ángel Cid, and Beatriz Máquez-Villamarín. Computation of Green's functions for boundary value problems with Mathematica. *Appl. Math. Comput.*, 219(4):1919–1936, 2012.
- [4] Srinivasan Kesavan et al. *Nonlinear functional analysis: a first course*. Springer, 2004.
- [5] Mark Kot. *A first course in the calculus of variations*, volume 72. American Mathematical Society, 2014.
- [6] Pedro J Torres. *Mathematical models with singularities*. Springer, 2015.
- [7] Shulim E Tsimring. *Electron beams and microwave vacuum electronics*. John Wiley & Sons, 2006.
- [8] M. Zhang. Optimal conditions for maximum and anti-maximum principles of the periodic solution problem. *Boundary Value Problems*, 2010. 410986, <http://dx.doi.org/10.1155/2010/410986>, 26pp.
- [9] M. Zhang and W. Li. A lyapunov-type stability criterion using l_α norms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2002. 130, 3325–3333.