ESTRUCTURA DE UNA APLICACIÓN LINEAL

MARÍA J. VALE GONSALVES

1. Introducción

Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión n y f un endomorfismo cuyo polinomio característico tiene sus n raíces en K. En este trabajo se prueba el teorema de Jordan que afirma que f tiene una forma canónica de Jordan y en particular que f es diagonalizable si, y solo si, la multiplicidad de cada autovalor de f coincide con la dimensión del subespacio de vectores propios asociado a ese autovalor. Se prueba el teorema de Cayley-Hamilton, según el cual todo endomorfismo es raíz de su polinomio característico. Se define el concepto de endomorfismo nilpotente y se prueba el teorema de descomposición de Jordan-Chevalley que dice que todo endomorfismo de V tiene una única expresión como suma de un endomorfismo nilpotente y un endomorfismo diagonalizable que conmutan. A partir de este teorema se pueden calcular las potencias de f cuando se conocen sus autovalores.

2. Forma canónica de Jordan

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión $n \geq 1$.

Definición 2.1. Una *combinación lineal* de los elementos $v_1, \ldots, v_r \in V$ es una suma

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, v_i, \quad \lambda_i \in K, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Si S es un subconjunto finito de V, se llama *subespacio generado* por S, y se denota por $\langle S \rangle$, al conjunto de todas las combinaciones lineales de los elementos de S.

Un subconjunto ordenado $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V es una *base* de V si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V; en particular, los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente independientes.

Denotaremos por $C = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $e_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, la *base canónica* de K^n.

Si S es un subconjunto de V, entonces $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

Definición 2.2. Un endomorfismo f de V es una aplicación lineal $f \colon V \to V$.

Denotaremos por $\mathrm{End}_K(V)$ el conjunto de endomorfismos de V. $\mathrm{End}_K(V)$ es una K-álgebra, es decir un espacio vectorial sobre K y un anillo con las operaciones dadas por

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \quad (\lambda \, f)(v) = \lambda \, f(v), \quad (g \circ f)(v) = g(f(v)),$$

y tales que

$$(\lambda \, g) \circ f = g \circ (\lambda \, f) = \lambda \, (f \circ g),$$

para todo $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$, $\lambda \in K$ y $v \in V$.

Definición 2.3. Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ bases de V y f es un endomorfismo de V. Si

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v'_j,\ i = 1, \ldots, n,$$

la matriz

$$f_{BB'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz asociada a f respecto* a las bases B y B'. Si $B = B'$ denotaremos por f_B la matriz f_{BB}.

Definición 2.4. Sean $B = (v_1, \ldots, v_n)$ y $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ bases de un espacio vectorial V y sea

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, v_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

La matriz

$$\mathrm{id}_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de cambio de base* de B' a B.

Definición 2.5. Se dice que las matrices $A, B \in M_n(K)$ son *semejantes* si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$.

La relación "semejantes" es una relación de equivalencia en el conjunto $M_n(K)$.

Ejemplo 2.6. Si $f\colon V \to V$ es una aplicación lineal y B y B' son bases de V, entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. En efecto, $f_{B'} = \mathrm{id}_{BB'}\, f_B\, \mathrm{id}_{B'B}$.

Definición 2.7. Sea f un endomorfismo de V. Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un *autovalor* o *valor propio* de f si existe un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda\, v$. Un vector $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda\, v$ se llama *autovector* o *vector propio* de f asociado a λ.

Definición 2.8. Se llama *polinomio característico* de A al polinomio $P_A(X) = \det(A - XI)$.

Proposición 2.9. *Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Si $A, B \in M_n(K)$ son semejantes, entonces existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1}AP = B$, y entonces

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI) = \det(P^{-1}AP - XI) = \det(P^{-1}AP - XP^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}AP - P^{-1}(XI)P) = \det(P^{-1}(A - XI)P) \\ &= \det(P^{-1})\, \det(A - XI)\, \det(P) = \det(A - XI) = P_A(X). \quad \square \end{aligned}$$

Definición 2.10. Si f es un endomorfismo de V, se llama *polinomio característico* de f al polinomio $P_f(X) = P_{f_B}(X)$, siendo f_B la matriz asociada a f respecto a una base B de V.

Observación 2.11. El polinomio característico de f no depende de la base de V considerada. En efecto, si B y B' son bases de V, entonces las matrices f_B y $f_{B'}$ son semejantes. Por la proposición 2.9, $P_{f_B}(X) = P_{f_{B'}}(X)$.

Proposición 2.12. *Si f es un endomorfismo de V, entonces λ es un autovalor de f si y solo si λ es una raiz del polinomio característico de f.*

Demostración. Si λ es un autovalor de f existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $f(v) = \lambda v$, es decir $(f - \lambda \,\mathrm{id}_V)(v) = 0$. Sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base de V y $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$. Se tiene

$$\lambda \text{ autovalor de } f \iff (f_B - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff P_{f_B}(\lambda) = \det(f_B - \lambda I) = 0. \qquad \square$$

Definición 2.13. Se dice que la matriz $A \in M_n(K)$ es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que

$$P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se dice que un endomorfismo f es *diagonalizable* si existe una base B de V tal que la matriz asociada a f respecto a B es una matriz diagonal; es decir si existe una base B formada por vectores propios de f.

Definición 2.14. Se llama *bloque elemental de Jordan de orden r asociado al escalar $\lambda \in K$* a la siguiente matriz triangular superior:

$$J_\lambda^r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \in M_r(K)$$

Ejemplo 2.15.

$$J_\lambda^1 = (\,\lambda\,), \quad J_\lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_\lambda^3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición 2.16. Una *matriz de Jordan* es una matriz triangular superior de la forma:

$$\begin{pmatrix} J_{\lambda_1}^{r_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}^{r_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda_s}^{r_s} \end{pmatrix}$$

donde las matrices $J_{\lambda_i}^{r_i}$, son bloques elementales de Jordan de orden r_i, para $i = 1, \ldots, s$. Si f es un endomorfismo de V y B es una base de V respecto a la cual la matriz asociada a f es la matriz de Jordan J se dice que B es una *base de Jordan para f* y que J es una *forma canónica de Jordan* o también una *forma de Jordan para f*.

Lema 2.17. *Sea f un endomorfismo de V. La aplicación $\Phi_f \colon K[X] \to \mathrm{End}\,(V)$ dada por*

$$\Phi_f(a_m X^m + \ldots + a_0) = a_m f^m + \ldots + a_0 \,\mathrm{id}_V,$$

es un homomorfismo de K-álgebras, es decir, es una aplicación lineal y verifica que $\Phi_f(q(X)\,h(X)) = \Phi_f(q(X)) \circ \Phi_f((h(X))$, para cualesquiera $q(X), h(X) \in K[X]$. Denotaremos $\Phi_f(q(X))$ por $q(f)$.

Demostración. La demostración es inmediata. $\square$

Observación 2.18. Obsérvese que de la conmutatividad del producto de polinomios de $K[X]$ se deduce que dos endomorfismos de la imagen de Φ_f siempre conmutan, es decir

$$q(f) \circ h(f) = h(f) \circ q(f).$$

Lema 2.19. ([1, Lema 1, p. 319]) *Sea f un endomorfismo de V, λ un autovalor de f.*

(1) *Se tiene la siguiente cadena creciente de subespacios de V:*

$$0 \subsetneq \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V) \subset \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^2 \subset \ldots \subset \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^j \subset \ldots$$

(2) *Existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^m$, para todo $m > q$.*

Demostración. (2) Dado que V tiene dimensión finita, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^{q+1}$. Veamos que $\mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Pongamos $m = q+r$, $r \geq 1$. Razonemos por inducción sobre r. Para $r = 1$ el resultado es cierto. Supongamos el resultado cierto para $r-1 \geq 1$ y veamos que es cierto para r. Si $v \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^{q+r}$, entonces $(f-\lambda \mathrm{id}_V)^{q+r}(v) = 0$, de donde se sigue que $(f-\lambda \mathrm{id}_V)^{q+r-1}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) = 0$, es decir $(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v) \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q+r-1}$. Por hipótesis de inducción, $\mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^{q+r-1} = \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$. Así, $v \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q+1} = \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^q$. $\square$

Lema 2.20. *Sea f un endomorfismo de V, λ un autovalor de f. Sea q el menor entero positivo tal que $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V))^q = \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V))^m$, para todo $m > q$. Consideremos la cadena creciente de subespacios de V*

$$0 \subsetneq \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V) \subsetneq \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q.$$

Sea F_i, $2 \leq i \leq q$, un subespacio suplementario de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{i-1}$ en $\mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^i$,

$$\mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^i = F_i \oplus \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{i-1},$$

y sea $B_i = \{v_1, \ldots, v_r\}$, una base de F_i. Se tiene

(1) *El conjunto*

$$(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(B_i) = \{(f-\lambda \mathrm{id}_V)(v_1), \ldots, (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v_r)\} \subset \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{i-1},$$

es linealmente independiente.

(2) $\langle (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(B_i)\rangle \cap \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{i-2} = \{0\}$, *para $3 \leq i \leq q$.*

Demostración. (1) Supongamos que

$$\sum_{j=1}^{r} a_j (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v_j) = 0, \quad a_j \in K,\ j = 1, \ldots, r,$$

equivalentemente

$$(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)\,(\sum_{j=1}^{r} a_j v_j) = 0.$$

Entonces, para $i \geq 2$

$$\sum_{j=1}^{r} a_j v_j \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V) \cap F_i \subset \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

luego $\alpha_j = 0$ para $j = 1, \ldots, r$.

(2) Sea

$$v = \sum_{j=1}^{r} a_j (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v_j) \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda \mathrm{id}_V)^{i-2}.$$

Se tiene

$$(f-\lambda \mathrm{id}_V)^{i-2}(\sum_{j=1}^{r} a_j (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v_j)) = 0.$$

Así,

$$\sum_{j=1}^{r} a_j v_j \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{i-1} \cap F_i = \{0\},$$

de donde se sigue que $a_j = 0$, para $j = 1, \ldots, r$, y por tanto $v = 0$. $\square$

Definición 2.21. Sean $U_1, \ldots, U_s$ subespacios de V. Se dice que la suma $U_1 + \ldots + U_s$ es *directa* y se denota por $U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ si verifica

$$U_i \cap (\sum_{j\neq i} U_j) = \{0\}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Lema 2.22. *Sean $U_1, \ldots, U_s$ subespacios de V tales que $U_1 + \ldots + U_s = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$. Si B_i es una base de U_i, $i = 1, \ldots, s$, entonces $\bigcup_{i=1}^{s} B_i$ es una base de $U_1 + \ldots + U_s$.*

Demostración. Pongamos $B_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{ir_i}\}$, $i = 1, \ldots, s$. El conjunto $\bigcup_{i=1}^{s} B_i$ es un conjunto de generadores de $U_1 + \ldots + U_s$. Veamos que es linealmente independiente. Si

$$\sum_{j=1}^{r_1} a_{1j} v_{1j} + \ldots + \sum_{j=1}^{r_s} a_{sj} v_{sj} = 0,$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} \in U_i \cap (\sum_{j\neq i} U_j), \quad i = 1, \ldots, s.$$

Puesto que la suma es directa

$$\sum_{j=1}^{r_i} a_{ij} v_{ij} = 0, \quad i = 1, \ldots, s,$$

y por ser B_i , $i = 1, \ldots, s$, linealmente independiente,

$$a_{ij} = 0, \quad j = 1, \ldots, r_i.$$

Así, $a_{ij} = 0$, para todo $j = 1, \ldots, r_i$, $i = 1, \ldots, s$. $\square$

Proposición 2.23. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f. Sea q el menor entero positivo tal que $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Se tiene*

$$f(\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q) \subset \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q.$$

Demostración. (1) Si $v \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$, entonces $(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q f(v) = f(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q(v) = 0$. $\square$

Denotaremos por f_λ el endomorfismo restricción de f a $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\mathrm{id}_V)^q$

$$\begin{aligned} f_\lambda\colon \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q &\longrightarrow \mathrm{Nuc}(f-\ \lambda\mathrm{id}_V)^q \\ v &\longmapsto f(v) \end{aligned}$$

Teorema 2.24. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f. Sea q el menor entero positivo tal que $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^m$, para todo $m > q$. Existe una base B_λ de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$ tal que la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ es una matriz de Jordan.*

Demostración. Consideremos la cadena de subespacios de V

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V) \subsetneq \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q.$$

Sea F_q un subespacio suplementario de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1}$ en $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\mathrm{id}_V)^q$ y sea $B_q = \{v_{q\,1}, \ldots, v_{q\,m_q}\}$ una base de F_q. Pongamos $g = f - \lambda\mathrm{id}_V$. Por el lema 2.20, el conjunto $g(B_q)$ es un subconjunto de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1}$

linealmente independiente y $\langle g(B_q)\rangle \cap \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-2} = 0$. Completamos $g(B_q)$ a una base B_{q-1} de un subespacio F_{q-1} suplementario de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-2}$ en $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1}$. Se tiene

$$B_{q-1} = \{v_{q-1\,1}, \dots, v_{q-1\,m_{q-1}}\}, \quad g(v_{q\,i}) = v_{q-1\,i}, \quad i = 1, \dots, m_q.$$

Siguiendo así, sucesivamente se obtiene una base $B_2 = \{v_{2\,1}, \dots, v_{2\,m_2}\}$ de un subespacio F_2, suplementario de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)$ en $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^2$, y completando $g(B_2)$ obtenemos una base B_1 de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)$ tal que

$$B_1 = \{v_{1\,1}, \dots, v_{1\,m_1}\}, \quad g(v_{2\,i}) = v_{1\,i}, \quad i = 1, \dots, m_2.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q &= \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1} \oplus F_q = \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-2} \oplus F_{q-1} \oplus F_q \\ &= \dots = \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V) \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_q.\end{aligned}$$

Por el lema 2.22, los $m_1 + \dots + m_q$ vectores así construidos forman una base de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$.

El cuadro 1.1 esquematiza la construcción de esta base de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$.

B_q	v_{q1}	$\dots$	$v_{q\,m_q}$										
B_{q-1}	$g(v_{q1})$	$\dots$	$g(v_{q\,m_q})$	$v_{q-1\,m_q+1}$	$\dots$	$v_{q-1\,m_{q-1}}$							
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
B_2	$g^{q-2}(v_{q1})$	$\dots$	$g^{q-2}(v_{q\,m_q})$	$g^{q-3}(v_{q-1\,m_q+1})$	$\dots$	$g^{q-3}(v_{q-1 m_{q-1}})$	$\dots$	$v_{2\,m_3+1}$	$\dots$	v_{2m_2}			
B_1	$g^{q-1}(v_{q1})$	$\dots$	$g^{q-1}(v_{q\,m_q})$	$g^{q-2}(v_{q-1\,m_q+1})$	$\dots$	$g^{q-2}(v_{q-1 m_{q-1}})$	$\dots$	$g(v_{2\,m_3+1})$	$\dots$	$g(v_{2m_2})$	$v_{1\,m_2+1}$	$\dots$	$v_{1\,m_1}$

Cuadro 1: Base de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$

Escribiendo estos vectores por columnas y empezando la última fila del cuadro 1.1 obtenemos la siguiente base de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q$:

$$\begin{aligned}B_\lambda =& \{g^{q-1}(v_{q\,1}), \dots, g(v_{q\,1}), v_{q\,1}\} \cup \overset{m_q}{\dots} \cup \{g^{q-1}(v_{q\,m_q}), \dots, g(v_{q\,m_q}), v_{q\,m_q}\} \cup \\ &\cup \{g^{q-2}(v_{q-1\,m_q+1}), \dots, v_{q-1\,m_q+1}\} \cup \dots \cup \\ &\cup \{g^{q-2}(v_{q-1\,m_{q-1}}), \dots, v_{q-1\,m_{q-1}}\} \cup \dots \cup \\ &\cup \{v_{1\,m_2+1}, \dots, v_{1\,m_1}\}.\end{aligned}$$

Denotemos por J_λ la matriz asociada a f_λ respecto a B_λ. Las m_q primeras columnas del cuadro 1.1 dan cada una un bloque elemental de Jordan de orden q. En efecto, para $j = 1, \dots, m_q$, se tiene

$$\begin{aligned}f(g^{q-1}(v_{qj})) &= (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(g^{q-1}(v_{qj})) + \lambda g^{q-1}(v_{qj}) = \lambda g^{q-1}(v_{qj}), \\ f(g^{2-1}(v_{qj})) &= (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(g^{2-1}(v_{qj})) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}) = g^{q-1}(v_{qj}) + \lambda g^{q-2}(v_{qj}), \\ &\vdots \\ f(v_{qj}) &= (f-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v_{qj}) + \lambda v_{qj} = g(v_{qj}) + \lambda v_{qj}.\end{aligned}$$

Por tanto hay m_q bloques elementales de Jordan colocados en la diagonal de J_λ. Análogamente, dado que cada una de las siguientes $m_{q-1} - m_q$ columnas define un bloque elemental de Jordan de orden $q-1$, tenemos $m_{q-1} - m_q$ bloques elementales de Jordan de orden $q-1$ en la diagonal de J_λ. Siguiendo este proceso llegamos a las $m_1 - m_2$ últimas columnas del cuadro 1.1 que proporcionan $m_1 - m_2$ matrices de Jordan de orden 1 en la diagonal de J_λ. La matriz J_λ es una matriz de Jordan y $\dim \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V) = m_1$ es el número total de bloques elementales de Jordan que hay en J_λ. $\square$

Definición 2.25. Se dice que $\lambda \in K$ es una raíz de multiplicidad r del polinomio $q(X) \in K[X]$ si $q(\lambda) = 0$ y

$$q(X) = (X - \lambda)^r\, c(X), \quad c(\lambda) \neq 0.$$

Proposición 2.26. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f de multiplicidad r. Si q es el menor entero positivo tal que* $\operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q = \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^m$*, para todo $m > q$, entonces* $\dim_K \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q = r$.

Demostración. Supongamos que $\dim_K \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q = s$. Queremos probar que $s = r$. Si $B' = \{v_1, \ldots, v_s\}$ es una base de $\operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} & a_{1s+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} & a_{ss+1} & \ldots & a_{sn} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{s+1s+1} & \ldots & a_{s+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{ns+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (f_\lambda)_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \ldots & a_{ss} \end{pmatrix}.$$

Pongamos $B'' = \{v_{s+1}, \ldots, v_n\}$, $L = \langle B'' \rangle$ y consideremos el endomorfismo $h\colon L \to L$ cuya matriz asociada respecto a la base B'' es la matriz

$$h_{B''} = \begin{pmatrix} a_{s+1s+1} & \ldots & a_{s+1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ns+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Por la demostración del teorema 2.24, $P_{f_\lambda}(X) = (-1)^s (X - \lambda)^s$. Luego

$$P_f(X) = \det(f_B - XI) = P_{f_\lambda}(X)\, P_h(X) = (-1)^s (X - \lambda)^s P_h(X).$$

Veamos que $P_h(\lambda) \neq 0$. Supongamos que $P_h(\lambda) = 0$, es decir, que λ es un autovalor de h. Existe un vector

$$v = \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j v_j \in L, \quad v \neq 0,$$

tal que $h(v) = \lambda\, v$. Se tiene

$$\begin{aligned} (f - \lambda\, \mathrm{id}_V)(v) &= f(v) - \lambda\, v = f(v) - h(v) = \\ &= \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j f(v_j) - \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j h(v_j) \\ &= \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j (\sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k) - \sum_{j=s+1}^{n} \mu_j (\sum_{k=s+1}^{n} a_{kj} v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=s+1}^{n} \mu_j a_{kj}) v_k - \sum_{k=s+1}^{n} (\sum_{j=s+1}^{n} \mu_j a_{kj}) v_k \\ &= \sum_{k=1}^{s} (\sum_{j=s+1}^{n} \mu_j a_{kj}) v_k \in \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q. \end{aligned}$$

Así, $v \in \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^{q+1} = \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q$. Por tanto $v \in \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q \cap L = \{0\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $s = r$. □

Corolario 2.27. *Sea f un endomorfismo de V, λ un autovalor de f de multiplicidad r y q el menor entero positivo tal que* $\operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q = \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^m$*, para todo $m > q$. Se tiene que* $\operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q = \operatorname{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^r$.

Demostración. Dado que $\dim_K \operatorname{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q = r$, se tiene que $q \le r$. $\square$

Lema 2.28. ([2, Lema 6.7.2]) *Sea f un endomorfismo de V. Si $p_1(X),\dots,p_s(X) \in K[X]$ son tales que* m.c.d. $(p_j(X),p_k(X)) = 1$, *para $j \neq k$, entonces*

$$\operatorname{Nuc} p_j(f) \cap \big(\sum_{k\neq j} \operatorname{Nuc} p_k(f)\big) = \{0\}, \quad j = 1,\dots,s.$$

Demostración. Se tiene

$$\sum_{k\neq j} \operatorname{Nuc} p_k(f) \subset \operatorname{Nuc}\big(\prod_{k\neq j} p_k(f)\big). \tag{1}$$

Dado que los polinomios $p_j(X)$ y $\prod_{k\neq j} p_k(X)$ son primos entre sí, por el teorema de Bezout existen polinomios $a(X), b(X) \in K[X]$ tales que

$$a(X)\,p_j(X) + b(X)\prod_{k\neq j} p_k(X) = 1.$$

Por tanto

$$a(f)\,p_j(f) + b(f)\prod_{k\neq j} p_k(f) = \mathrm{id}_V.$$

Si $v \in \operatorname{Nuc} p_j(f) \cap \operatorname{Nuc}(\prod_{k\neq j} p_k(f))$, entonces

$$v = a(f)\,p_j(f)(v) + b(f)\prod_{k\neq j} p_k(f)(v) = 0 + 0 = 0.$$

Luego $\operatorname{Nuc} p_j(f) \cap \operatorname{Nuc}\big(\prod_{k\neq j} p_k(f)\big) = \{0\}$ y el resultado se sigue de (1). $\square$

Proposición 2.29. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Sea q_i el menor entero positivo tal que* $\operatorname{Nuc}(f-\lambda_i\mathrm{id}_V)^{q_i} = \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i\mathrm{id}_V)^{m_i}$, *para todo $m_i > q_i$, $i = 1,\dots,s$. Se tiene*

$$V = \operatorname{Nuc}(f-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{q_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Nuc}(f-\lambda_s\mathrm{id}_V)^{q_s}.$$

Demostración. Dado que m.c.d. $((X-\lambda_i)^{q_i},(X-\lambda_j)^{q_j}) = 1$, para $i \neq j$, se tiene que

$$\operatorname{Nuc}(f-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{q_1} + \dots + \operatorname{Nuc}(f-\lambda_s\mathrm{id}_V)^{q_s} = \operatorname{Nuc}(f-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{q_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Nuc}(f-\lambda_s\mathrm{id}_V)^{q_s}.$$

Por la proposición 2.26, $\dim_K \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i} = r_i$, luego

$$\dim_K V = n = \operatorname{grad} P_f(X) = \sum_{i=1}^{s} r_i = \sum_{i=1}^{s} \dim_K \operatorname{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i} = \dim_K(\operatorname{Nuc}(f-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{q_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Nuc}(f-\lambda_s\mathrm{id}_V)^{q_s},$$

por el lema 2.22. $\square$

Corolario 2.30. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Se tiene*

$$V = \operatorname{Nuc}(f-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{r_1} \oplus \dots \oplus \operatorname{Nuc}(f-\lambda_s\mathrm{id}_V)^{r_s}.$$

Demostración. Se sigue del corolario 2.27 y del teorema 2.29. $\square$

Teorema 2.31. (Teorema de Jordan) *Sea f un endomorfismo de V. Si*

$$P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1}\dots(X-\lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \in K, \ \ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } \ i \neq j.$$

entonces existe una base B de V tal que la matriz asociada a f respecto a esta base es una matriz de Jordan.

Demostración. Por el teorema 2.24, existe una base $B_{\lambda_i} = \{v_{i\,1}, \ldots, v_{i\,r_i}\}$ de $\mathrm{Nuc}(f-\lambda_i \mathrm{id}_V)^{q_i}$, $i = 1, \ldots, s$, tal que la matriz asociada a $f_{\lambda_i}\colon \mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i} \to \mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i}$ respecto a B_{λ_i}, $i = 1, \ldots, s$, es una matriz de Jordan. Por la proposición 2.29 y el lema 2.22, $B = \{v_{11}, \ldots, v_{1r_1}, \ldots, v_{s1}, \ldots, v_{sr_s}\}$ es base de V. La matriz asociada a f respecto a B es

$$f_B = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & J_{\lambda_s} \end{pmatrix},$$

que es una matriz de Jordan. □

La forma de Jordan de f está determinada por las dimensiones de los subespacios $\mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^j$, $j \geq 1$, para los distintos autovalores λ_i de f, por tanto es única salvo el orden de los bloques elementales de Jordan.

Corolario 2.32. *Si A es una matriz de $M_n(K)$ y el polinomio característico de A es de la forma*

$$P_A(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \ldots (X-\lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_i \in K,\ \ \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j\ ,$$

entonces A es semejante a una matriz de Jordan.

Demostración. Sea $f\colon K^n \to K^n$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A. Dado que $P_f(X) = P_A(X)$, por el teorema de Jordan existe una base B de K^n tal que la matriz f_B asociada a f respecto a B es una matriz de Jordan. Así, A y f_B son matrices semejantes. □

Teorema 2.33. (Teorema de diagonalización) *Sea f un endomorfismo de V.*

(1) *Si λ es un autovalor de f de multilicidad r, entonces $\dim_K \mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V) \leq r$.*

(2) *f es diagonalizable si, y solo si, $P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \ldots (X-\lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$ y $\dim_K \mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V) = r_i$, para $i = 1, \ldots, s$.*

Demostración. (1) Se sigue de la proposición 2.26.

(2) Si f es diagonalizable, entonces existe una base B de V tal que f_B es una matriz diagonal. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ son los elementos de la diagonal principal de f_B, entonces

$$P_f(X) = P_{f_B}(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \ldots (X-\lambda_s)^{r_s},\ \ \lambda_i \neq \lambda_j,\ \ \text{si } i \neq j.$$

Además,

$$\dim_K \mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V) = n - \mathrm{rango}\,(f_B - \lambda_i\, I) = n - (n-r_i) = r_i,\ i = 1, \ldots, s.$$

El recíproco se sigue de los teoremas 2.24 y 2.31. □

Corolario 2.34. *La matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si, y solo si, verifica las siguientes condiciones:*

(1) *$P_A(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \ldots (X-\lambda_s)^{r_s}$, donde $\lambda_i \in K$, para $i = 1, \ldots, s$, y $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$.*

(2) *Si $f\colon K^n \to K^n$ es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A, entonces $\dim_K \mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_{K^n}) = r_i$, para $i = 1, \ldots, s$.*

Teorema 2.35. *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{r_1} \ldots (X-\lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces $P_f(f) = (-1)^n (f-\lambda_1\,\mathrm{id}_V)^{r_1} \ldots (f-\lambda_s\,\mathrm{id}_V)^{r_s} = 0$.*

Demostración. Por el corolario 2.30,

$$V = \mathrm{Nuc}(f-\lambda_1 \mathrm{id}_V)^{r_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Nuc}(f-\lambda_s \mathrm{id}_V)^{r_s}.$$

Si $v \in V$, existen vectores $v_i \in \mathrm{Nuc}(f-\lambda_i \mathrm{id}_V)^{r_i}$, $i = 1, \ldots, s$, tales que $v = v_1 + \ldots + v_s$. Dado que $(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{r_i}(v_i) = 0$, $i = 1, \ldots, s$, se tiene

$$(P_f(f))(v) = (-1)^n (f-\lambda_1\,\mathrm{id}_V)^{r_1} \ldots (f-\lambda_s\,\mathrm{id}_V)^{r_s}(v) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^n (f-\lambda_1\,\mathrm{id}_V)^{r_1} \ldots (f-\lambda_s\,\mathrm{id}_V)^{r_s}(v_i) = 0. \ \square$$

Corolario 2.36. *Si $A \in M_n(K)$ y $P_A(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ es su polinomio característico, entonces $P_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_0\, I = 0$.*

Demostración. Dado que existe un cuerpo $\bar{K} \supset K$ donde todo polinomio de $K[X]$ tiene sus raices ($\bar{K}$ se llama la clausura algebraica de K), se tiene que $P_A(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1} \ldots (X-\lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in \bar{K}$ $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$. Sea $f\colon \bar{K}^n \to \bar{K}^n$ el endomorfismo cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A. Dado que

$$P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{r_1} \ldots (X-\lambda_s)^{r_s},$$

por el teorema 2.37, $P_f(f) = 0$. Luego $P_f(A) = 0$. $\square$

Teorema 2.37. (Teorema de Cayley-Hamilton) *Sea f un endomorfismo de V y sea $P_f(X) = (-1)^n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ su polinomio característico. Entonces $P_f(f) = (-1)^n f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \ldots + a_0 \operatorname{id}_V = 0$.*

Demostración. Por el corolario 2.36, si B es una base de V y $A = f_B$, se tiene que $P_A(A) = 0$. Así, $P_f(f) = 0$. $\square$

Ejemplo 2.38. Consideremos la aplicación $\mathbb{R}$-lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x,y,z,t) = (y-4z, 5x-9z, 2x+y-6z, -2t).$$

Se tiene que $P_f(X) = (X+2)^4$. La matriz asociada a f respecto a la base canónica $C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es

$$f_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

luego

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}) = 4 - \operatorname{rango}(f_C + 2\, I) = 4 - \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$

Por tanto, una forma de Jordan de f tiene dos bloques elementales de Jordan asociados al autovalor -2. Dado que

$$(f_C + 2\, I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0-1 & 36 \\ 2 & 0 & -2 & 36 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (f_C + 2\, I)^3 = 0,$$

una forma de Jordan para f tiene un bloque elemental de Jordan de orden 3 y un bloque elemental de Jordan de orden 1. Vamos a construir una base de Jordan para f. Consideremos la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}) \subsetneq \operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})^2 \subsetneq \operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})^3 = \mathbb{R}^4.$$

Se tiene

$$\operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}) = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & -9 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle.$$

Análogamente,

$$\operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})^2 = \langle (1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1) \rangle.$$

Una base de un subespacio F_3 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})^2$ en $\mathbb{R}^4$ es $B_3 = \{(0,0,1,0)\}$. Dado que $(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4}))(0,0,1,0) = (-4,-9,-4,0)$, una base de un subespacio F_2 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f + 2\operatorname{id}_{\mathbb{R}^4})$ en

$\mathrm{Nuc}(f+2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2$ es $B_2=\{(-4,-9,-4,0)\}$. Una base de $\mathrm{Nuc}(f+2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1=\{(-1,-2,-1,0),(0,0,0,1)\}$, donde $(-1,-2,-1,0)=(f+2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}))^2(0,0,1,0)$. Una base de Jordan para f es

$$B=\{(-1,-2,-1,0),(-4,-9,-4,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

y una forma de Jordan para f es

$$f_B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.39. Consideremos la matriz real

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_1}(X)=(X-1)^4$.

Si $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ es la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_1, entonces

$$\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2\\ 4 & 2 & -8 & 0\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\langle(1,2,1,0),(1,-2,0,1)\rangle.$$

Puesto que $\dim_K\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=2$, una forma de Jordan para A_1 tiene dos bloques elementales de Jordan asociados al autovalor 1 y como $(A_1-I)^2=0$, los dos bloques elementales de Jordan son de orden 2. Vamos a construir una base de Jordan para f. Se tiene la cadena de subespacios

$$\{0\}\subsetneq\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})\subsetneq\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})^2=\mathbb{R}^4.$$

Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ en $\mathbb{R}^4$ es $B_2=\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. Dado que

$$(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(0,0,1,0)=(-2,-8,-3,1),\quad (f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})(0,0,0,1)=(2,0,1,1),$$

una base de $\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ es $B_1=\{(-2,-8,-3,1),(2,0,1,1)\}$. Una base de Jordan para f es

$$\{(-2,-8,-3,1),(0,0,1,0),(2,0,1,1),(0,0,0,1)\}.$$

Si tomamos

$$P_1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0\\ -8 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad J_{A_1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_{A_1} es una forma de Jordan para A_1 y se tiene $(P_1)^{-1}A_1P_1=J_{A_1}$.

Ejemplo 2.40. Consideremos la matriz real

$$A_2=\begin{pmatrix} -8 & 10 & 10 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ -5 & 5 & 7 & 0\\ -5 & 10 & 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_2}(X)=(X-2)^2(X+3)^2$. Si $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ es la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_2, entonces

$$\mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=\langle(1,1,0,1),(1,0,1,1)\rangle,\quad \mathrm{Nuc}(f+3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=\langle(2,0,1,0),(0,0,0,1)\rangle.$$

Por el teorema de diagonalización, A_2 es diagonalizable. Una base de Jordan para f es

$$\{(1,1,0,1),(1,0,1,1),(2,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Si tomamos

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

la matriz J_{A_2} es una forma de Jordan para A_2 y $(P_2)^{-1}A_2P_2 = J_{A_2}$.

Ejemplo 2.41. Consideremos la matriz compleja

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & -2 & 2 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1+i & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1+i \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_{A_3}(X) = (i-X)^2(1+i-X)^2$. Si $f\colon \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ es la aplicación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es A_3, entonces

$$\operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle(1,0,0,-1)\rangle, \quad \operatorname{Nuc}(f-(1+i)\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) = \langle(2,0,1,0),(-2,0,0,1)\rangle$$

Por tanto, una forma de Jordan de A_3 tiene un bloque elemental de Jordan de orden 2 para el autovalor i y dos bloques elementales de orden 1 Jordan para el autovalor $1+i$. Se tiene

$$(A_3 - i\,I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\operatorname{Nuc}(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2 = \langle(1,0,0,-1),(1,1,1,0)\rangle.$$

Una base B_2 de un subespacio F_2 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f-i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})$ en $\operatorname{Nuc}(f-i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})^2$ es $B_2 = \{(1,1,1,0)\}$, y dado que $(f - i\,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^4})(1,1,1{,}0) = (1,0,0,-1)$, una base de Jordan para f es

$$\{(1,0,0,-1),(1,1,1,0),(2,0,1,0),(-2,0,0,1)\}.$$

Si tomamos

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{A_3} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix},$$

la matriz J_{A_3} es una forma de Jordan para A_3 y se tiene que $(P_3)^{-1}A_3P_3 = J_{A_3}$.

3. Diagonalización simultánea de dos endomorfismos diagonalizables que conmutan

Lema 3.1. *Sean $U_1,\dots,U_s$ subespacios de V. Si $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_s$ y $f_i \in \operatorname{End}_K(U_i)$, $i = 1,\dots,s$, entonces la aplicación $f_1 \oplus \dots \oplus f_s\colon V \to V$ dada por*

$$(f_1 \oplus \dots \oplus f_s)(u_1 + \dots + u_s) = f_1(u_1) + \dots + f_s(u_s),$$

es un endomorfismo de V.

Demostración. Es inmediata. □

Teorema 3.2. ([4, Ejercicio 15-13]) *Sean f y g dos endomorfismos de V diagonalizables tales que $f \circ g = g \circ f$. Existe una base de V formada por vectores propios de f y g simultáneamente.*

Demostración. Sea $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \ldots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Dado que f es diagonalizable

$$V = \mathrm{Nuc}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Nuc}(f - \lambda_s \mathrm{id}_V).$$

Veamos que $g(\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V) \subset (\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V)$. Puesto que

$$f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda_i \, v) = \lambda_i \, g(v),$$

si $v \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V)$, entonces $g(v) \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V)$.

Si $g_{\lambda_i} \colon \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V) \to \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V)$ es la restricción de g a $\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V)$, para $i = 1, \ldots, s$, entonces

$$g = g_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus g_{\lambda_s}.$$

Sea B una base de vectores propios para f. La matriz asociada a g respecto a B es una matriz diagonal por bloques

$$g_B = \begin{pmatrix} A_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & A_s \end{pmatrix}, \quad A_i \in M_{r_i}(K), \ \ i = 1, \ldots, s.$$

Veamos que cada endomorfismo g_{λ_i} es diagonalizable. Dado que g es diagonalizable,

$$P_g(X) = (-1)^n (X - \mu_1)^{t_1} \ldots (X - \mu_m)^{t_m}, \quad \mu_i \in K, \ \ \mu_i \neq \mu_j, \ \text{ si } \ i \neq j,$$

y $P_f(X) = P_{A_1}(X) \ldots P_{A_s}(X)$, el polinomio $P_{g_{\lambda_i}}(X) = P_{A_i}(X)$ tiene sus r_i raíces en K. Luego, g_{λ_i} tiene una forma de Jordan. Si B'_{λ_i} es una base de Jordan para g_{λ_i}, $i = 1, \ldots, s$, entonces

$$B' = \bigcup_{i=1}^{s} B'_{\lambda_i},$$

es una base de Jordan de g y dado que g es diagonalizable, B' es una base de vectores propios de g. Por tanto cada B'_{λ_i}, $i = 1, \ldots, s$, es una base de vectores propios para g_{λ_i}. Además, dado $v \in B'$ existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $v \in B'_{\lambda_i}$ y como $B'_{\lambda_i} \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_V)$, se tiene que $f(v) = \lambda_i \, v$, Así, B' es también una base de vectores propios de f. □

Corolario 3.3. *Sean $A_1, A_2 \in M_n(K)$ matrices diagonalizables tales que $A_1 \, A_2 = A_2 \, A_1$. Existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1} \, A_1 \, P$ y $P^{-1} \, A_2 \, P$ son matrices diagonales.*

Demostración. Sean f y g los endomorfismos de K^n cuya matrices asociadas en la base canónica son A_1 y A_2, respectivamente. Dado que $A_1 \, A_2 = A_2 \, A_1$, se tiene que $f \circ g = g \circ f$. Por la proposición anterior existe una base B de vectores propios para f y g. Si $P = \mathrm{id}_{BC}$, entonces las matrices $P^{-1} \, A_1 \, P$ y $P^{-1} \, A_2 \, P$ son diagonales. □

Ejemplo 3.4. Consideremos los endomorfismos f y g de $\mathbb{R}^4$ cuyas matrices asociadas respecto a la base canónica son:

$$f_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & -3 & -2 \\ -6 & 5 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad g_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & 4 & 4 \\ -10 & -8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $f \circ g = g \circ f$. Los endomorfismos f y g son diagonalizables puesto que

$$P_f(X) = (1 - X)(2 - X)^2(-1 - X), \quad P_g(X) = (2 - X)(-1 - X)(1 - X)^2.$$

y

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=1, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=2, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Nuc}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=1,$$
$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Nuc}(g-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=1, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Nuc}(g+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=1, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=2.$$

Vamos a buscar una base de vectores propios de f y g, simultaneamente. Dado que

$$\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=\langle(1,0,2,0)\rangle,\ \mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=\langle(1,0,2,-1),(0,1,1,0)\rangle,\ \mathrm{Nuc}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})=\langle(0,0,1,-1)\rangle,$$

una base de vectores propios de f es

$$B=\{(1,0,2,0),(1,0,2,-1),(0,1,1,0),(0,0,1,-1)\},$$

y la matriz asociada a f respecto a B es

$$f_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a g en B es la matriz diagonal por bloques

$$g_B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sean

$$g_1\colon \mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})\to\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}), \quad g_2\colon \mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})\to\mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4},$$
$$g_{-1}\colon \mathrm{Nuc}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})\to\mathrm{Nuc}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}),$$

las restricciones de g a $\mathrm{Nuc}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$, $\mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$ y $\mathrm{Nuc}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})$, respectivamente. Se tiene

$$P_{g_1}(X)=2-X, \quad P_{g_2}(X)=(1-X)(-1-X), \quad P_{g_{-1}}(X)=1-X.$$

El conjunto $B'_1=\{(1,0,2,0)\}$ es una base de vectores propios de g_1 y $B'_{-1}=\{(0,0,1,-1)\}$ es una base de vectores propios de g_{-1} Dado que

$$\mathrm{Nuc}(g_2-\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})})=\left\{x_1(1,0,2,-1)+x_2(0,1,1,0)\ \middle|\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\langle(1,-2,0,-1)\rangle$$

$$\mathrm{Nuc}(g_2+\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})})=\left\{x_1(1,0,2,-1)+x_2(0,1,1,0)\ \middle|\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}=\langle(0,1,1,0)\rangle,$$

una base de vectores propios de g_2 es $B'_2=\{(0,1,1,0),(1,-2,0,-1)\}$. Se tiene

$$(g_1)_{B'_1}=\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad (g_2)_{B'_2}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g_{-1})_{B'_{-1}}=I$$

La base

$$B'=\{(1,0,2,0),(0,1,1,0),(1,-2,0,-1),(0,0,1,-1)\}$$

es una base de vectores propios de g y de f simultáneamente, $f_{B'}=f_B$ y

$$g_{B'}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poniendo

$$P = \mathrm{id}_{B'C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$P^{-1} f_C P = f_{B'}, \quad P^{-1} g_C P = g_{B'}.$$

4. Nilpotencia. Potencias de endomorfismos y de matrices

Definición 4.1. Se dice que el endomorfismo g de V es nilpotente si existe un entero $s \geq 1$ tal que $g^s = 0$. Si $g \neq 0$ es un endomorfismo nilpotente, se llama índice de nilpotencia de g al menor entero $q \geq 2$ tal que $g^{q-1} \neq 0$ y $g^q = 0$.

Se dice que la matriz $A \in M_n(K)$ es nilpotente si existe un entero $s \geq 1$ tal que $A^s = 0$. Si $A \neq 0$ es una matriz nilpotente, se llama índice de nilpotencia de A al menor entero $q \geq 2$ tal que $A^{q-1} \neq 0$ y $A^q = 0$.

Proposición 4.2. *Sea f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f. Sea q el menor entero positivo tal que* $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^q = \mathrm{Nuc}(f - \lambda\, \mathrm{id}_V)^m$*, para todo $m > q$. Se tiene*

(1) *El endomorfismo*

$$\begin{aligned} f_\lambda - \mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)} \colon \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q &\longrightarrow \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q \\ v &\longmapsto f(v) - \lambda\, v \end{aligned}$$

es nilpotente de índice q.

(2) *La matriz de Jordan asociada a $f_\lambda - \mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)}$ respecto a B_λ es nilpotente de índice q.*

Demostración. (1) Veamos que $(f_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q})^q = 0$. En efecto, para todo $v \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$,

$$(f_\lambda - \lambda\, 1_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q})^q(v) = (f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q(v) = 0.$$

Además, se tiene que $(f_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q})^{q-1} \neq 0$, puesto que si $(f_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda\,\mathrm{id}_V)^q})^{q-1}(v) = 0$, para todo $v \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q$, entonces $\mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^q \subset \mathrm{Nuc}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{q-1}$.

(2) Es trivial. □

Teorema 4.3. (Teorema de descomposición de Jordan-Chevalley) *Sea f un endomorfismo de V cuyo polinomio característico tiene sus n raíces en K. Existe un único endomorfismo nilpotente y un único endomorfismo diagonalizable que conmutan y tales que su suma es f.*

Demostración. (1) Sea $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{r_1} \ldots (X - \lambda_s)^{r_s}$, $\lambda_i \in K$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, si $i \neq j$, y q_i el menor entero positivo tal que $\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i} = \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{m_i}$, para todo $m_i > q_i$, $i = 1, \ldots, s$. Se tiene

$$V = \mathrm{Nuc}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V)^{r_1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Nuc}(f - \lambda_s \mathrm{id}_V)^{r_s},$$

y $f = f_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus f_{\lambda_s}$, siendo $f_{\lambda_i} \colon \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i} \to \mathrm{Nuc}(f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i}$, $i = 1, \ldots, s$, la restricción de f a $\mathrm{Nuc}(f - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i}$. La aplicación f_{λ_i} es suma de una aplicación nilpotente y una aplicación diagonalizable. En efecto,

$$f_{\lambda_i} = (f_{\lambda_i} - \lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i}}) + \lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i}},$$

donde $f_{\lambda_i} - \lambda_i\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^q}$ es un endomorfismo nilpotente de índice q_i y $\lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{q_i}}$ es un endomorfismo diagonalizable. El endomorfismo

$$g = (f_{\lambda_1} - \lambda_1\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda_1 \mathrm{id}_V)^{q_1}}) \oplus \ldots \oplus (f_{\lambda_r} - \lambda_s\,\mathrm{id}_{\mathrm{Nuc}(f-\lambda_s \mathrm{id}_V)^{q_s}})$$

es nilpotente y su índice de nilpotencia es el mínimo común múltiplo de $q_1, \dots, q_s$. El endomorfismo

$$h = \lambda_1 \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_1 \operatorname{id}_V)^{q_1}} \oplus \dots \oplus \lambda_s \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_s \operatorname{id}_V)^{q_s}}$$

es diagonalizable. Además

$$f = g + h.$$

Dado que

$$(f_{\lambda_i} - \lambda_i \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}}) \circ \lambda_i \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}} = \lambda_i \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}} \circ (f_{\lambda_i} - \lambda_i \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}}),\ i = 1, \dots, s,$$

se tiene

$$g \circ h = h \circ g,$$

Veamos la unicidad del endomorfismo nilpotente y el endomorfismo diagonalizable en la descomposición de f. Si $f = g' + h'$ donde g' es un endomorfismo nilpotente, h' es un endomorfismo diagonalizable y $g' \circ h' = h' \circ g'$, entonces

$$\begin{aligned} g' \circ f =& g' \circ (g' + h') = g' \circ g' + g' \circ h' = g' \circ g' + h' \circ g' = (g' + h') \circ g' = f \circ g', \\ h' \circ f =& h' \circ (g' + h') = h' \circ g' + h' \circ h' = g' \circ h' + h' \circ h' = (g' + h') \circ h' = f \circ h'. \end{aligned}$$

Asì, g' y h' conmutan con expresión polinómica en f y en particular con $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$ y con $\lambda_i \operatorname{id}_V$, para $i = 1, \dots, s$.

Se tiene que $g'(\operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^q) \subset \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$ y $h'(\operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}) \subset \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$. En efecto, si $v \in \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$, entonces

$$(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}(g'(v)) = g'(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}(v) = 0, \quad (f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}(h'(v)) = h'(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}(v) = 0.$$

Sean $g'_{\lambda_i} \colon \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i} \to \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$ y $h'_{\lambda_i} \colon \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i} \to \operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$ las aplicaciones restricción de g' y h' a $\operatorname{Nuc}(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{q_i}$, para $i = 1, \dots, s$. Se tiene

$$g' = g'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus g'_{\lambda_s}, \quad h' = h'_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus h'_{\lambda_s}, \quad f_{\lambda_i} = g'_{\lambda_i} + h'_{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Dado que g' y h' conmutan con cualquier polinomio en f, entonces g'_{λ_i} y h'_{λ_i} conmutan con cualquier polinomio en f_{λ_i}, para $i = 1, \dots, s$, luego

$$\begin{aligned} g \circ g' =& \big((f_{\lambda_1} - \lambda_i \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_1 \operatorname{id}_V)^{q_1}}) \circ g'_{\lambda_1}\big) \oplus \dots \oplus \big((f_{\lambda_s} - \lambda_s \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_s \operatorname{id}_V)^{q_s}}) \circ g'_{\lambda_s}\big) \\ =& \big(g'_{\lambda_1} \circ (f_{\lambda_1} - \lambda_1 \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_1 \operatorname{id}_V)^{q_1}})\big) \oplus \dots \oplus \big(g'_{\lambda_s} \circ (f_{\lambda_s} - \lambda_s \operatorname{id}_{\operatorname{Nuc}(f-\lambda_s \operatorname{id}_V)^{q_s}})\big) = g' \circ g. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba que $h \circ h' = h' \circ h$. We have

$$g - g' = h' - h.$$

Puesto que g y g' son nilpotentes y conmutan, $g - g'$ es nilpotente. En efecto, si el índice de nilpotencia de g es m y el índice de nilpotencia de g' es n, entonces por el teorema del binomio, $(g - g')^{m+n-1} = 0$.

Dado que h y h' son diagonalizables y conmutan, por el teorema 3.2, entonces existe una base B de V formada por vectores propios para h y para h' simultáneamente, y por tanto, para $h' - h$. Así, $h' - h$ es diagonalizable. Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, entonces $(h' - h)(v_i) = \mu_i\, v_i$, para algún $\mu_i \in K$, $i = 1, \dots, n$ y si $t \geq 1$ es tal que $(g - g')^t = 0$, entonces $(h' - h)^t(v_i) = \mu_i^t\, v_i = 0$. Así, $\mu_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$, luego $h' - h = 0$ y $g - g' = 0$. □

Ejemplo 4.4. Consideremos el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (-2x + y, -x, -x - 2y + 2z).$$

Vamos a calcular f^n, para $n \geq 1$. La matriz asociada a f en la base canónica $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ es

$$f_C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $P_f(X) = (2-X)(X+1)^2$. Consideremos la cadena de subespacios

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \subsetneq \mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2.$$

siendo $\mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(1,1,1)\rangle$ y $\mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle$. Además, $\mathrm{Nuc}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \langle(0,0,1)\rangle$.

Una forma de Jordan de f tiene un bloque elemental de Jordan para el autovalor 2 y dos bloques elementales de Jordan para el autovalor -1. Una base de un subespacio F_2 suplementario de $\mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ en $\mathrm{Nuc}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})^2$ es $B_2 = \{(1,0,0)\}$. Dado que $(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}))(1,0,0) = (-1,-1,-1)$, una base de Jordan para f es

$$\{(-1,-1,-1),(1,0,0),(0,0,1)\}.$$

Una forma de Jordan para f es

$$J_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si tomamos

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces $P^{-1} f_C P = J_f$. Se tiene

$$J_f = D + N,$$

donde

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que índice de nilpotencia de N es 2 y las matrices N y D conmutan, por el teorema del binomio

$$\begin{aligned}
(J_f)^n =& (D+N)^n = \binom{n}{0} D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N \\
=& \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
(f_C)^n =& P\,(J_f)^n\,P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} n & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} (-1)^n n + (-1)^n & (-1)^{n-1} n & 0 \\ (-1)^n n & (-1)^n + (-1)^{n-1} n & 0 \\ (-1)^n n & (-1)^n + (-1)^{n-1} n - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Consideremos la matriz

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular $(M_1)^n$, para $n \geq 1$. Se tiene que $P_{M_1}(X) = (1-X)^3$. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación $\mathbb{R}$-lineal cuya matriz asociada respecto a la base canónica es M_1, entonces

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \subsetneq \operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2 \subsetneq \operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^3 = \mathbb{R}^3.$$

Se tiene

$$\operatorname{Nuc}(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,1,1) \rangle, \quad \operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = \langle (1,0,0), (0,1,1) \rangle.$$

Una forma de Jordan de M_1 tiene un único bloque elemental de Jordan, el correspondiente al autovalor 1. Una base de un subespacio F_3 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ en $\mathbb{R}^3$ es $\{(0,0,1)\}$. Dado que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(0,0,1) = (-1,0,0)$, una base de un subespacio F_2 suplementario de $\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ en $\operatorname{Nuc}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2$ es $B_2 = \{(-1,0,0)\}$. Dado que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})^2(0,0,1) = (1,1,1)$, una base de Jordan para M_1 es

$$B = \{(1,1,1), (-1,0,0), (0,0,1)\}.$$

Si tomamos

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz J_{M_1} es una forma de Jordan para M_1 y $(P_1)^{-1} M_1 P_1 = J_{M_1}$. Se tiene

$$J_{M_1} = I + N$$

donde

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el índice de nilpotencia de N es 3, por el teorema del binomio

$$\begin{aligned}
(J_{M_1})^n =& (I+N)^n = \binom{n}{0} I^n + \binom{n}{1} I^{n-1}\, N + \binom{n}{2} I^{n-2} N^2 \\
=& I + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
(M_1)^n =& P_1\, J_{M_1}^n\, (P_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} 1-n & \dfrac{5n-n^2}{2} & \dfrac{n^2-3n}{2} \\ -n & \dfrac{-n^2+3n+2}{2} & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ -n & \dfrac{3n-n^2}{2} & \dfrac{n^2-n+2}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.6. Consideremos matriz real

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular $(M_2)^n$, para $n \geq 1$. Se tiene que $P_{M_2}(X) = (2-X)^4$, Una forma de Jordan J_{M_2} de M_2 y una matriz regular P_2 tal que $P_2^{-1} M_2 P_2 = J_{M_2}$ son

$$J_{M_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (P_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$J_{M_2} = 2I + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el índice de nilpotencia de N es 4 y las matrices $2I$ y N conmutan, por el teorema del binomio

$$\begin{aligned} (J_{M_2})^n =& (2I+N)^n = \binom{n}{0}(2I)^n + \binom{n}{1}(2I)^{n-1} N + \binom{n}{2}(2I)^{n-2}N^2 + \binom{n}{3}(2I)^{n-3}N^3 \\ =& 2^n I + 2^{n-1}\, n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{n-2}\, \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^{n-3}\, \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}\, n(n-1) & 2^{n-3}\, \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 2^n & 2^{n-1}n & 2^{n-3}\, n(n-1) \\ 0 & 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego,

$$(M_2)^n = P_2\,(J_{M_2}^n\,(P_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n + 2^{n-4}\, \frac{n(n-1)(n-2)}{3} & 2^{n-1}n & -2^{n-3}\, n(n-1) & -2^{n-4}\, \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ 2^{n-3}\, n(n-1) & 2^n & -2^{n-1}n & -2^{n-3}\, n(n-1) \\ -2^{n-1}n & 0 & 2^n & 2^{n-1}n \\ 2^{n-4}\, \frac{n(n-1)(n-2)}{3} & 2^{n-1}n & -2^{n-3}\, n(n-1) & 2^n - 2^{n-4}\, \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \end{pmatrix}$$

Bibliografía

[1] Hernández Rodríguez, E., *Álgebra y geometría*. Addison-Wesley Iberoamericana, S. A., Wilmington, DE, 1994.

[2] Hernández Rodríguez, E., Vázquez Gallo, M. J., Zurro Moro, M. A., *Álgebra lineal y geometría*. Pearson, Madrid, 2012.

[3] Godement, R., *Cours d'algèbre*. Herman, Paris, 1966.

[4] Lang, S., *Algebra*. Aguilar, Madrid, 1971.

[5] Varadarajan, V. S., *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Springer, New York, 1974.