



FACULDADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

TEORÍA DE SUB Y SOBRE
SOLUCIONES APLICADA A LAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS.

Ana Lamas Rodríguez

Curso 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo Fin de Grado

**TEORÍA DE SUB Y SOBRE
SOLUCIONES APLICADA A LAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
ORDINARIAS.**

Ana Lamas Rodríguez

Curso 2024/2025

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Trabajo propuesto

Área de Coñecemento: Análise Matemática
Título: Teoría de sub e sobresolucións aplicada as ecuacións diferenciais ordinarias.
Breve descripción do contido
<p>Neste traballo estudarase a existencia de solución de problemas de contorno, fundamentalmente periódicos, modelados por ecuacións diferenciais ordinarias non lineais.</p> <p>A técnica utilizada é a das denominadas sub e sobre solucións, consiste en que, asumindo a existencia dun par de funcións, ben ordenadas, que satisfagan unhas desigualdades prefixadas, é posible deducir a existencia de solución do problema considerado, localizada entre ambas.</p> <p>Será preciso utilizar técnicas iterativas así como teoremas de punto fixo en espazos abstractos.</p>
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Definiciones y Preliminares.	1
1.1. Notación general.	1
1.2. Definiciones	2
1.3. Preliminares	3
2. Sub y sobresoluciones bien ordenadas.	5
2.1. Problema periódico con parte no lineal independiente de u'	5
2.2. Problema periódico con parte no lineal dependiente de u'	17
3. El método monótono	27
3.1. Problemas lineales de orden n	27
3.2. El método monótono	34
3.3. Ejemplos resueltos mediante el método monótono	38
I. Método monótono en Python	55
Bibliografía	61

Resumen

El método de sub y sobresoluciones ha sido objeto de estudio desde la última década del siglo XIX, debido a su eficacia en el análisis de ecuaciones diferenciales no lineales. Este enfoque permite establecer la existencia de soluciones sin necesidad de resolver explícitamente el problema. En este trabajo se presenta, en primer lugar, la aplicación del método de sub y sobresoluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con condiciones de periodicidad. Se demuestran distintos resultados de existencia de solución, que, además, garantizan que dicha solución o soluciones están entre la sub y sobresolución. Posteriormente, se expone el método monótono, una técnica constructiva basada en funciones de Green y en la elección adecuada de un par de sub y sobresoluciones. A diferencia del caso anterior, este método se aplica a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden arbitrario y bajo condiciones de contorno generales, no necesariamente periódicas. El procedimiento genera sucesiones monótonas, dadas como las únicas soluciones de correspondientes problemas lineales asociados, que convergen hacia las soluciones extremales localizadas entre la sub y la sobresolución, del problema no lineal estudiado.

Abstract

The method of lower and upper solutions has been studied since the last decade of the 19th century due to its effectiveness in the analysis of nonlinear differential equations. This approach allows the establishment of the existence of solutions without the need to solve the problem explicitly. In this work, we first present the application of the lower and upper solution method to second-order ordinary differential equations with periodic conditions. Various existence results are proved, which also ensure that the solution or solutions are bounded by the lower and the upper solution. Next, we describe the monotone method, a constructive technique based on Green's functions and the appropriate choice of a pair of lower and upper solutions. Unlike the previous case, this method is presented to ordinary differential equations of arbitrary order and under general boundary conditions, not necessarily periodic. The procedure generates monotone sequences that converge to the extremal solutions of the problem.

Introducción

El método de sub y sobresoluciones es una técnica utilizada para probar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Es especialmente útil para ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y en derivadas parciales (EDP) no lineales, fundamentalmente de segundo orden, si bien es aplicable a cualquier orden de derivación. Consiste en probar la existencia de solución de la ecuación estudiada y situarla entre una función inferior (subsolución) y una superior (sobresolución). Usando además el denominado método monótono, es posible obtener algunas de esas soluciones como límite de soluciones de problemas lineales relacionados.

La historia del desarrollo de este método se remonta hasta la introducción por parte de Picard de las iteraciones monótonas a partir de una subsolución (en 1890 para EDPs [22] y en 1893 para EDOs [23]).

Independientemente, Perron [21] introdujo algunas de las ideas básicas del método en el estudio del problema de Cauchy para ecuaciones de primer orden y posteriormente Müller extendió este trabajo a sistemas de ecuaciones diferenciales [20]. Estos autores dedujeron la existencia de solución junto con su localización entre unas funciones ordenadas que satisfacen ciertas desigualdades diferenciales (sub y sobresoluciones). Sin embargo, estos avances están restringidos al problema de Cauchy.

El mayor descubrimiento acerca de este método fue realizado por Scorza Dragoni que introdujo el concepto de las sub y sobre soluciones para el problema con condiciones de frontera tipo Dirichlet no homogéneas.

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in I := [a, b], \quad u(a) = A, \quad u(b) = B.$$

Para ello, asumiendo la existencia de dos funciones $\alpha, \beta \in C^2(I)$ tales que $\alpha \leq \beta$ en I y

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)), \quad t \in I, \quad \alpha(a) \leq A, \quad \alpha(b) \leq B,$$

y

$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)), \quad t \in I, \quad \beta(a) \geq A, \quad \beta(b) \geq B,$$

demostró, al igual que para el problema de Cauchy, la existencia de solución u localizada entre la sub y la sobresolución ($\alpha \leq u \leq \beta$) en I del problema considerado ([25, 26]).

Posteriormente, Amann [2] asoció lo que se conoce como el grado a una pareja de sub y sobre soluciones estrictas (se cumplen las desigualdades anteriores de manera estricta para todo t), lo cual sería esencial para problemas más avanzados, como aquellos con múltiples soluciones.

Otro avance importante fue debido (independientemente) a Chang [9] [8], de Figueiredo y Solimini [13], quienes señalaron que la función alcanza un mínimo entre la sub y la sobre solución, siendo esto un punto de partida para distintos resultados que hacen uso del método variacional.

Aunque una teoría similar podría aplicarse a múltiples tipos de problemas de frontera, como de tipo Dirichlet o Neumann, entre otros, nos vamos a restringir al problema periódico:

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)), \quad t \in I, \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b), \quad (0.1)$$

Además, el tipo de no linealidades ($f : D \subset I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ fijado) en las que nos vamos a centrar son las funciones de Carathéodory, que son aquellas que verifican las siguientes propiedades:

- Para casi todo $t \in I$, la función $f(t, \cdot)$ con dominio $\{z \in \mathbb{R}^n \mid (t, z) \in D\}$ es continua.
- Para todo $z \in \mathbb{R}^n$, la función $f(\cdot, z)$ con dominio $\{t \in I \mid (t, z) \in D\}$ es medible.

Es más, diremos que f es una función L^p -Carathéodory si para algún $p \in [1, \infty]$ la función de Carathéodory satisface que para todo $r > 0$ existe $h_r \in L^p(I)$ tal que para todo $(t, z) \in D$ con $z \in \mathbb{R}^n$ y $\|z\|_\infty \leq r$, se verifica $|f(t, z)| \leq h_r(t)$. Con esta condición se demuestra en [4] que la composición de f con funciones continuas es una función de $L^p(I)$.

El método de sub y sobre soluciones se desarrolló, en primer lugar, para funciones no lineales continuas, pero su generalización a funciones L^p -Carathéodory es trivial y permitirá una mejor comprensión del método.

El presente trabajo está dedicado al estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, con especial atención a aquellas de segundo orden. A lo largo del desarrollo se emplean distintas herramientas analíticas y constructivas que permiten abordar problemas de existencia y localización de soluciones en diferentes contextos.

En el Capítulo 1 se presentan los preliminares necesarios para el resto del trabajo. Este apartado incluye definiciones, notación y resultados auxiliares que, si bien no forman parte del núcleo del estudio, serán fundamentales para la correcta formulación y demostración de los teoremas posteriores.

El Capítulo 2 se centra en el método de sub y sobresoluciones aplicado a problemas periódicos de segundo orden. En una primera parte se estudian aquellos casos en los que la no linealidad no depende de la derivada de la incógnita, y posteriormente se abordan problemas con dependencia respecto de u' . En ambos casos, se establecen distintos resultados relativos a la existencia y localización de soluciones.

El Capítulo 3 está dedicado al método monótono, que permite, bajo ciertas condiciones adicionales, probar la existencia y aproximar las soluciones extremales (minimal y maximal) de un problema. Este método se aplica en un contexto más general, sin requerir periodicidad ni restringirse a ecuaciones de segundo orden. Finalmente, se exponen varios ejemplos ilustrativos que muestran, de forma gráfica, el funcionamiento del método iterativo y la convergencia hacia las soluciones buscadas, así como la multiplicidad de las mismas para un problema dado.

Capítulo 1

Definiciones y Preliminares.

En este capítulo se recopilan las definiciones, notaciones y resultados básicos que se emplearán a lo largo del trabajo. Aunque muchos de estos conceptos no forman parte del núcleo temático del presente TFG, son herramientas necesarias para el desarrollo riguroso de los resultados principales y por tanto, se presentan aquí con el fin de dotar de claridad y coherencia a la exposición. Cuando sea pertinente, se incluirán enunciados sin demostración, especialmente si se trata de resultados estándar ampliamente conocidos o disponibles en la bibliografía.

1.1. Notación general.

Durante este estudio usaremos las siguientes notaciones:

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}.$$

$$C(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua en } I\}.$$

$$C_0(I) := \{f \in C(I), f(a) = f(b) = 0\}.$$

$$C^1(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable en } I \text{ y } f' \in C(I)\}.$$

$$C_0^1(I) := \{f \in C^1(I) \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

El conjunto $L^p(I)$ [18] (con $p \in [1, \infty)$) está formado por todas las funciones medibles $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que la norma L^p de f sea finita, es decir:

$$\|f\|_{L^p(I)} := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Donde se está asumiendo que $f \sim g$ si y solo si $f(t) = g(t)$ en c.t.p $t \in I$.

El siguiente espacio se conoce como el de las funciones absolutamente continuas en I :

$AC(I) := \{f \in C(I), \exists f'(t)$ en casi todo punto $t \in I, f' \in L^1(I), f(t) - f(s) = \int_s^t f'(v)dv, \forall t, s \in I\}$.

$H_0^1(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \in AC(I), f(a) = f(b) = 0$ y $f' \in L^2(I)\}$.

$W^{n,p}(I) := \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^{n-1}(I)$ tales que $f^{(n-1)} \in AC(I)$ y $f^{(n)} \in L^p(I)\}$, $p \in [1, \infty), n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, dados α y $\beta \in C(I)$ definimos el sector

$$[\alpha, \beta] = \{u \in C(I) \mid \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \forall t \in I\}$$

1.2. Definiciones

Presentamos aquí las definiciones clave que constituirán la base terminológica del trabajo. La mayoría son estándar, pero se introducen con el propósito de hacer explícitas las hipótesis y facilitar la exposición.

Definición 1.1. (*Derivada débil.*)[16] Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un abierto y $u \in L^2(\Omega)$, diremos que u tiene derivada débil en $L^2(\Omega)$ si y solo si existe una función $g \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi'(x) dx = - \int_{\Omega} g(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega).$$

En tal caso, la función g es llamada la derivada débil de u y la denotaremos por u' . En el caso de que $u \in C^1(I)$ entonces la derivada débil coincide con la derivada usual.

Definición 1.2. (*Extensión periódica.*) La extensión periódica de una función $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ es la función $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $u(t) \equiv u(t + b - a), \forall t \in \mathbb{R}$.

Definición 1.3. (*Derivadas de Dini*)[19]. Sea J un intervalo de \mathbb{R} , $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ una función, $x \in J$. Para cada x en J con $x < \sup(J)$, definimos las derivadas de Dini del siguiente modo:

$$D^+ f(x) := \limsup_{t \rightarrow x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

y

$$D_+ f(x) := \liminf_{t \rightarrow x^+} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Para cada x en J con $x > \inf(J)$

$$D^- f(x) := \limsup_{t \rightarrow x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x - h) - f(x)}{-h},$$

y

$$D_- f(x) := \liminf_{t \rightarrow x^-} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x - h) - f(x)}{-h}.$$

D^+ y D^- se denotan como derivadas superiores de Dini por la derecha y por la izquierda y D_+ y D_- serán las correspondientes derivadas inferiores de Dini.

Notemos que estos límites superiores e inferiores siempre existen, al menos en el sentido extendido, es decir, como elementos de $[-\infty, +\infty]$.

De las propiedades generales de los límites superiores e inferiores se sigue que

$$(D^+ f)(x) \geq (D_+ f)(x), \quad (D^- f)(x) \geq (D_- f)(x).$$

Además, es evidente que para toda $c \in \text{int}(J)$, la función f tiene derivada finita en el punto c si, y solo si,

$$D^+ f(c) = D_+ f(c) = D^- f(c) = D_- f(c) \in \mathbb{R}.$$

En este caso, los valores de las derivadas de Dini coinciden con $f'(c)$.

Definición 1.4. Si X es un espacio normado y $E \subset X$, una función $f : E \rightarrow X$ se dice compacta si f es continua y $\overline{f(A)}$ es compacto para cualquier A subconjunto acotado de E .

Definición 1.5. [12, Definición 11.5.1] Un conjunto dirigido superiormente (o hacia arriba), es un conjunto preordenado (S, \preceq) tal que para cada par $s, s' \in S$, existe un $s'' \in S$ tal que $s \preceq s''$ y $s' \preceq s''$.

Definición 1.6. [12] Un conjunto dirigido inferiormente (o hacia abajo), es un conjunto preordenado (S, \preceq) tal que para cada par $s, s' \in S$, existe un $s'' \in S$ tal que $s \succeq s''$ y $s' \succeq s''$.

Un conjunto se dirá dirigido si es dirigido inferior y superiormente.

1.3. Preliminares

Finalmente, enunciaremos varios resultados clásicos del Análisis Funcional que serán útiles para el desarrollo de esta memoria.

Teorema 1.7. (*Punto Fijo de Schauder*) [3] Sea E un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de un espacio normado X . Si $f : E \rightarrow E \subset X$ es una función compacta, entonces existe al menos un punto fijo de f en E , es decir:

$$\exists x_0 \in E / f(x_0) = x_0.$$

Nótese que ese punto fijo de f puede no ser único.

Proposición 1.8. (*Propiedad de la intersección finita*). Sea una familia de conjuntos $F = \{A_j\}_{j \in J}$, donde $J \subset \mathbb{R}$ es un conjunto dado, con un número infinito de valores. Se dice que F tiene la propiedad de la intersección finita si para cada subfamilia finita y no vacía de F , la intersección de sus elementos es no vacía:

$$\text{Para cada } \emptyset \neq J_0 \subset J \text{ finito, } \bigcap_{j \in J_0} A_j \neq \emptyset.$$

Teorema 1.9. (*Arzelà-Ascoli*) [14]. Sea $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(I)$ un conjunto de funciones reales continuas definidas en un intervalo cerrado y acotado I . Entonces, son equivalentes:

1. \mathcal{F} es un conjunto uniformemente acotado y equicontinuo.
2. Cualquier sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones de \mathcal{F} tiene una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uniformemente convergente.

Teorema 1.10. [24] (*Teorema de Dini*). Sea X un espacio métrico compacto y $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones en $C(X)$ que converge puntualmente a una función continua $f \in C(X)$. Entonces, la convergencia es uniforme.

Capítulo 2

Sub y sobresoluciones bien ordenadas.

En los siguientes apartados se introducen diferentes resultados relacionados con la existencia de solución de distintos problemas en presencia de sub y sobresoluciones bien ordenadas.

En este capítulo se tratarán los problemas periódicos, aquellos en los que se busca una solución cuyos valores se repiten cada cierto tiempo fijado, es decir, que cumple una condición de periodicidad.

Se abordarán temas como la posible existencia de solución tanto para el problema periódico con parte no lineal independiente de u' como para el que sí depende de u' .

2.1. Problema periódico con parte no lineal independiente de u' .

Vamos a comenzar centrándonos en el problema periódico de segundo orden con parte no lineal independiente de u' y f una función de tipo L^1 -Carathéodory:

$$u''(t) = f(t, u(t)), \text{ para casi todo } t \in I, \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b). \quad (2.1)$$

Por pertenecer $u''(t)$ a las funciones de tipo L^1 -Carathéodory, las soluciones de la ecuación (2.1) van a pertenecer a $W^{2,1}(I)$ y por este motivo, buscaremos sub y sobresoluciones que también pertenezcan (o a trozos) a $W^{2,1}(I)$.

Al ser una función periódica en I , por simplicidad, podemos extender $f(t, u)$ por periodicidad del siguiente modo:

$$f(t, u) = f(t + b - a, u) \text{ para todo } (t, u) \in \mathbb{R}^2.$$

Así para cualquier $t \in \mathbb{R}$ la función periódica evalúa f dentro del valor de la ecuación en el intervalo I .

Fijémonos en que la extensión periódica de f , que seguimos denotando por f , en general, no va a ser continua en la variable temporal. Al ser f una función de L^1 -Carathéodory en I , tendremos que $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ para todo $u \in C(I)$.

A continuación introducimos los conceptos de sub y sobre solución para el problema periódico (2.1), (véase [6]).

Definición 2.1. Una función $\alpha \in C(I)$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ es una subsolución del problema (2.1) si su extensión periódica en \mathbb{R} es tal que, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, se cumple una de las siguientes propiedades:

- $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$, (véase la Figura 2.1 a),
- existe un intervalo abierto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ y, para casi todo $t \in I_0$ se verifica

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

De igual manera, una función $\beta \in C(I)$ tal que $\beta(a) = \beta(b)$ es una sobresolución del problema (2.1) si su extensión periódica en \mathbb{R} es tal que, para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$, se cumple una de las siguientes dos propiedades:

- $D^-\beta(t_0) > D_+\beta(t_0)$, (véase la Figura 2.1 b),
- existe un intervalo abierto I_0 tal que $t_0 \in I_0$, $\beta \in W^{2,1}(I_0)$ y, para casi todo $t \in I_0$ se verifica

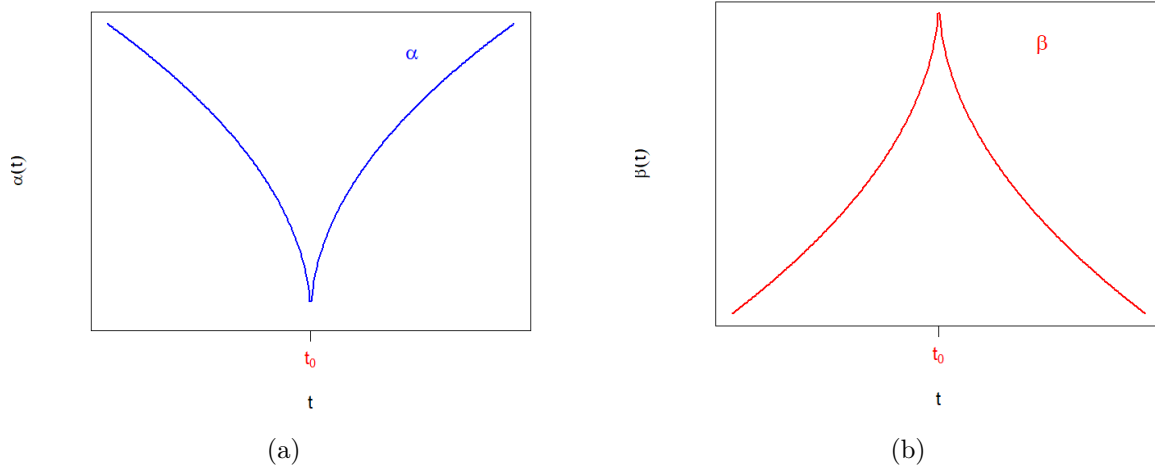
$$\beta''(t) \leq f(t, \beta(t)).$$

Observación 2.2. La condición $D_-\alpha(t_0) < D^+\alpha(t_0)$ en la práctica solo se cumplirá para un número finito de puntos $\{t_1, \dots, t_k\}$. Por ejemplo, una subsolución α se obtendrá habitualmente como una solución a un problema auxiliar, que pertenecerá a $W^{2,1}(I \setminus \{t_1, \dots, t_k\})$ y satisface, para casi todo $t \in I \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$, la siguiente desigualdad:

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)), \quad \alpha(a) = \alpha(b), \quad \alpha'(a) \geq \alpha'(b).$$

El mismo comentario es válido para una sobresolución.

El siguiente teorema es el resultado básico de existencia del método de sub y sobresoluciones para el problema periódico (2.1).

Figura 2.1: Representación de α y β .

Teorema 2.3. *Supongamos que existen α y β un par de sub y sobre soluciones de (2.1), tales que $\alpha \leq \beta$ en I . Definamos el conjunto*

$$E = \{(t, u) \in I \times \mathbb{R} \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\} \quad (2.2)$$

y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función L^1 -Carathéodory. Entonces el problema (2.1) tiene al menos una solución $u \in W^{2,1}(I)$ tal que para todo $t \in I$ se verifica:

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Demostración. Consideremos el siguiente problema modificado

$$u''(t) - u(t) = f(t, \gamma(t, u(t))) - \gamma(t, u(t)), \text{ para casi todo } t \in I \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b), \quad (2.3)$$

donde (véase la Figura 2.2)

$$\gamma(t, u) := \max\{\alpha(t), \min\{u, \beta(t)\}\}, \quad \forall t \in I, \quad (2.4)$$

una función continua, pero no necesariamente diferenciable, para todo $t \in I$.

Dividiremos la prueba en distintos pasos.

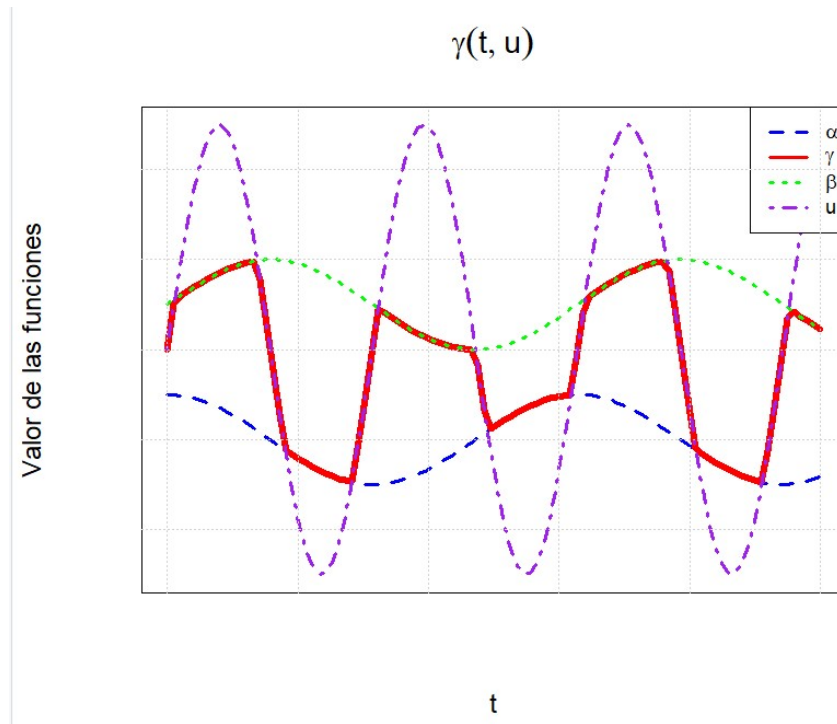


Figura 2.2: Ejemplo de una representación de $\gamma(t, u)$

Paso 1.

Comenzaremos probando que el problema (2.3) tiene por lo menos una solución.

Para ello vamos a escribirlo como una ecuación integral equivalente haciendo uso de la función de Green correspondiente.

El uso de funciones de Green facilita la resolución de problemas no lineales en ecuaciones diferenciales, al transformar el problema original en una integral que incorpora las condiciones de contorno específicas del sistema. Así pues, tenemos que las soluciones del problema (2.3) son las soluciones de la siguiente ecuación integral

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)[f(s, \gamma(s, u(s)) - \gamma(s, u(s)))] ds, \quad \forall t \in I,$$

siendo $G : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ la denominada función de Green del problema lineal correspondiente a (2.3)

$$u''(t) - u(t) = 0, \quad \text{para casi todo } t \in I, \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b).$$

Es bien conocido, [5], que la función G , asociada al problema (2.3), es única y viene dada como la única función $G : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

- $\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, s) - G(t, s) = 0, \forall t \in [a, s) \cup (s, b],$ con $s \in (a, b)$ fijado.

- $G(a, s) = G(b, s)$ y $\frac{\partial G}{\partial t}(a, s) = \frac{\partial G}{\partial t}(b, s)$, para todo $s \in (a, b)$.
- $G \in C(I \times I)$, $G \in C^2((I \times I) \setminus (t = s))$ y la primera derivada presenta una discontinuidad de salto en la diagonal del cuadrado,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s^-, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(s^+, s) = 1, \quad \forall s \in (a, b).$$

En [5, Appendix B.2] se verifica que la expresión de la función de Green en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ viene dada por la siguiente expresión

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{s-t+1} + e^{t-s}}{2-2e}, & 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{e^{s-t} + e^{-s+t+1}}{2-2e}, & 0 < t < s \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

En particular $G(t, s) = G(s, t)$, para todo $(t, s) \in I \times I$ (véase la Figura 2.3).

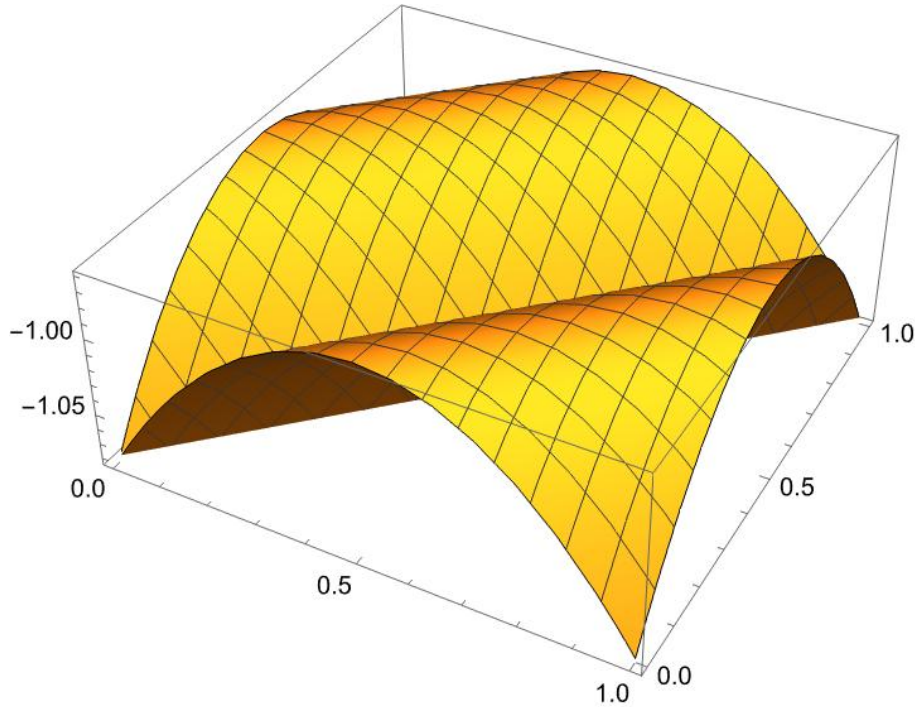


Figura 2.3: Representación de la función de Green en $[0, 1] \times [0, 1]$.

Además, la función $G(t, s)$ que acabamos de definir es continua y acotada, veámoslo:

- Como ambas expresiones están compuestas por funciones exponenciales es continua en las regiones abiertas $\{(t, s) : s < t\}$ y $\{(t, s) : t < s\}$. Ahora, debemos evaluar la continuidad sobre la diagonal $t = s$.

$$\lim_{s \rightarrow t^-} G(t, s) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{e^{s-t+1} + e^{t-s}}{2-2e} = \frac{e+1}{2-2e} = G(t, t),$$

$$\lim_{s \rightarrow t^+} G(t, s) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{e^{s-t} + e^{-s+t+1}}{2 - 2e} = \frac{1 + e}{2 - 2e} = G(t, t).$$

Mostrando así que G es una función continua.

- Para ver que es acotada, simplemente observamos que los exponentes involucrados en la función $G(t, s)$ están acotados en el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$. Por ende, las funciones exponenciales que aparecen en $G(t, s)$ toman valores en intervalos acotados y la función está acotada.

Definamos ahora el operador $T : C(I) \rightarrow C(I)$, como

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t, s)[f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s))]ds, \quad \forall t \in I,$$

y veamos que se trata de un operador compacto. Para ello nos vamos a centrar primero en demostrar que si B es un conjunto acotado entonces la clausura de $T(B)$ ($\overline{T(B)}$) será compacta. Para ello tenemos que demostrar que $\overline{T(B)}$ es acotada, cerrada y equicontinua:

- **Cerrada:** Al ser la clausura de un conjunto, es cerrada por definición.
- **Acotada:** Sabemos que γ es acotada por definición, y además, a partir de la expresión de la función de Green $G(t, s)$, dada en (2.5), sabemos que la función G también lo es, como mostramos anteriormente. Por tanto existe una constante $M_\gamma > 0$ tal que para todo $s \in I$ y para todo $u \in B$, $|\gamma(s, u(s))| \leq M_\gamma$, y existe otra constante C_G tal que $|G(t, s)| \leq C_G$ para todo $(t, s) \in I \times I$. Además, como mencionamos en la introducción, en [4] se demuestra que la composición de una función L^1 -Carathéodory, como f , con una función continua, como γ , será también una función de $L^1(I)$. Entonces existe una función $h_{M_\gamma} \in L^1(I)$ tal que

$$|f(s, \gamma(s, u(s)))| \leq h_{M_\gamma}(s), \quad \text{c.t.p. } s \in I,$$

y

$$|Tu(t)| \leq \int_a^b |G(t, s)| (h_{M_\gamma}(s) + M_\gamma) ds \leq C_G M_\gamma (b - a) + C_G \|h_{M_\gamma}\|_1 < \infty.$$

Concluimos así que $T(B)$ está acotada en $C(I)$ y por tanto $\overline{T(B)}$ también lo estará.

- **Equicontinua:** $G(t, s)$ es continua en el compacto $I \times I$. Por ende $G(t, s)$ es uniformemente continua en $I \times I$. En particular,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 / \text{ si } |t_1 - t_2| < \delta(\epsilon) \text{ entonces } |G(t_1, s) - G(t_2, s)| < \epsilon \quad \forall s \in I.$$

Por tanto, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $|t_1 - t_2| < \delta(\epsilon)$ entonces

$$|Tu(t_1) - Tu(t_2)| \leq \int_a^b |G(t_1, s) - G(t_2, s)| (|f(s, \gamma(s, u(s))) - \gamma(s, u(s))|) ds$$

$$< \epsilon(M_\gamma(b-a) + \int_a^b h_{M_\gamma}(s) ds), \quad \forall u \in B,$$

y al estar h_{M_γ} en $L^1(I)$, podemos tomar un ϵ suficientemente pequeño para que se cumpla la desigualdad. De esta manera, $T(B)$ es equicontinuo, y por tanto $\overline{T(B)}$ también lo será.

Hemos probado que $\overline{T(B)}$ es compacto y en consecuencia $T(B)$ es pre compacto.

Ahora, haciendo uso de la Definición 1.4, podemos finalmente afirmar que T es un operador compacto, y por consiguiente, nos encontramos en las hipótesis del Teorema del punto fijo de Schauder (Teorema 1.7). Esto nos permite afirmar que T tiene al menos un punto fijo $u \in \overline{B}$ y este será la solución de (2.3).

Paso 2: Ahora, debemos ver que todas las soluciones u de (2.3) satisfacen $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$ para todo $t \in I$.

Si asumimos lo contrario, entonces para algún $t_0 \in I$ se verifica

$$\min_{t \in I} \{u(t) - \alpha(t)\} = u(t_0) - \alpha(t_0) < 0.$$

Extendemos la función por periodicidad a todo \mathbb{R} para asegurar que las derivadas de $u(t)$ están bien definidas en todos los puntos de I . Al alcanzar $u - \alpha$ un mínimo en t , tenemos que necesariamente se verifica

$$D_-(u - \alpha)(t_0) = u'(t_0) - D_-\alpha(t_0) \leq 0 \leq u'(t_0) - D^+\alpha(t_0) = D^+(u - \alpha)(t_0),$$

y, por la definición de subsolución, deducimos que $u'(t_0) - \alpha'(t_0) = 0$.

Además, por la Definición 2.1, sabemos que existe un intervalo abierto I_0 con $t_0 \in I_0$ y $\alpha \in W^{2,1}(I_0)$ verificando para casi todo $t \in I_0$:

$$\alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t)).$$

Por tanto para $t \geq t_0$ suficientemente próximo a t_0 , al ser $\gamma(t, u(t)) = \alpha(t)$, deducimos que:

$$u'(t) - \alpha'(t) = \int_{t_0}^t (u''(s) - \alpha''(s)) ds \leq \int_{t_0}^t [f(s, \alpha(s)) + u(s) - \alpha(s) - f(s, \alpha(s))] ds < 0,$$

lo cual implica que t_0 no puede ser un mínimo y llegamos así a una contradicción con la hipótesis.

El caso $u \leq \beta$ en I es análogo.

Dado que $\gamma(t, u(t)) = u(t)$ para todo $t \in I$, concluimos que todas las soluciones de (2.3) son soluciones de (2.1), probando así el resultado. \square

Nótese que este teorema prueba la existencia de solución, pero también nos permite dar una estimación de la localización de la solución encontrada.

Veamos a continuación un resultado que mejora el anterior.

Teorema 2.4. Sean α_i ($i = 1, \dots, n$) subsoluciones y β_j ($j = 1, \dots, m$) sobresoluciones de (2.1). Consideramos $\alpha := \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ y $\beta := \min_{1 \leq j \leq m} \beta_j$, tales que $\alpha \leq \beta$ en I .

Se define E como en la ecuación (2.2), y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función L^1 -Carathéodory, entonces el problema (2.1) tiene al menos una solución $u \in W^{2,1}(I)$ tal que para todo $t \in I$ se verifica

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Demostración. Para realizar esta demostración vamos a considerar el siguiente problema modificado:

$$u''(t) - u(t) = \bar{f}(t, u(t)) - \gamma(t, u(t)), \text{ c.t.p } t \in I, \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b), \quad (2.6)$$

donde $\gamma(t, u)$ está definida como en (2.4) ($\gamma(t, u) = \max\{\alpha(t), \min\{u, \beta(t)\}\}$).

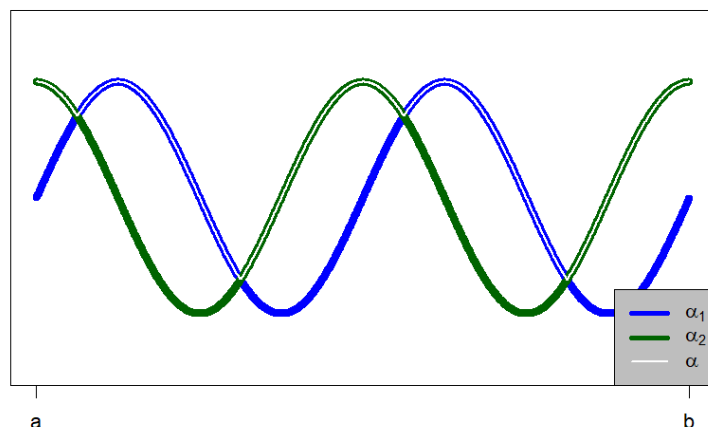
Sea ahora $\bar{f} : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida del siguiente modo:

$$\bar{f}(t, u) = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq n} f(t, \max\{\alpha_i(t), u\}), & \text{si } u \leq \alpha(t), \\ f(t, u), & \text{si } \alpha(t) < u < \beta(t), \\ \max_{1 \leq j \leq m} f(t, \min\{\beta_j(t), u\}), & \text{si } \beta(t) \leq u. \end{cases}$$

Primero vamos a demostrar la existencia de solución para el problema modificado y después probaremos que toda solución de este también lo será de (2.1).

Tendremos, que al ser α_i ($i = 1, \dots, n$) subsoluciones, entonces $\alpha := \max_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ será una subsolución ya que si todas las α_i cumplen la Definición 2.1, entonces el máximo de todas las α_i ($i = 1, \dots, n$), al ser un número finito de funciones, también la cumplirá (véase la Figura 2.4).

De la misma manera, al ser β_i ($i = 1, \dots, n$) sobresoluciones, $\beta := \min_{1 \leq i \leq n} \beta_i$ será una sobresolución.

Figura 2.4: $\alpha := \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$

Esto nos permite saber que nos encontramos en las hipótesis del Teorema 2.3, ya que contamos con α y β sub y sobresoluciones tales que $\alpha \leq \beta$ en I . Además, aunque en las demostraciones anteriores se utilizase la función $f(t, \gamma(t, u(t)))$ y ahora $\bar{f}(t, u)$ podemos ver que estas son equivalentes.

- Si $u \leq \beta(t)$ entonces $\min\{u, \beta_j(t)\} = u$, con lo cual $\gamma(t, u) = \max\{\alpha(t), u\}$.
- Si $\alpha(t) < u < \beta(t)$ entonces $\min\{u, \beta_j(t)\} = u$, $\max\{\alpha_i(t), u\} = u$ y entonces $\gamma(t, u) = u$.
- Si $u \geq \alpha(t)$ entonces $\max\{\alpha_i(t), u\} = u$ y $\gamma(t, u) = \min\{u, \beta(t)\}$.

Por consiguiente, siguiendo el argumento de la demostración del Teorema 2.3, podemos definir un operador compacto $T : C(I) \rightarrow C(I)$

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t, s) [\bar{f}(s, u(s)) - \gamma(s, u(s))] ds, \quad \forall t \in I,$$

donde $G(t, s)$ es la correspondiente función de Green. Como demostramos antes, este operador tiene al menos un punto fijo que será la solución de (2.6), $u \in W^{2,1}(I)$.

Finalmente, al ser α subsolución y β sobresolución, se cumple que

$$\alpha_i(t) \leq \alpha(t) \leq u \leq \beta(t) \leq \beta_j(t) \quad \forall t \in I,$$

y, por tanto, todas las soluciones de (2.6) serán soluciones de (2.1) demostrando así el resultado. \square

El siguiente teorema refina estas conclusiones, asegurando la existencia de soluciones extremas acotadas por α y β .

Teorema 2.5. [10] Sean α y β una sub y una sobresolución de (2.1) tales que $\alpha \leq \beta$. Definimos E como (2.2) y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función L^1 -Carathéodory. Entonces el problema (2.1) tiene solución minimal (u_{min}) y máxima (u_{max}) en $[\alpha, \beta]$ tal que

$$\alpha \leq u_{min} \leq u_{max} \leq \beta \text{ en } I$$

y cualquier otra solución de (2.1) con $\alpha \leq u \leq \beta$ satisface

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \text{ en } I.$$

Demostración. En el teorema 2.3, se demostró que las soluciones del problema (2.1) son los puntos fijos del operador

$$T : C(I) \rightarrow C(I)$$

definido por

$$(Tu)(t) = \int_a^b G(t, s)[f(s, u(s)) - u(s)]ds,$$

donde $G(t, s)$ es la función de Green para la ecuación (2.3):

$$u''(t) - u(t) = 0, \quad t \in I, \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b),$$

dada por la expresión (2.5).

Definamos ahora el conjunto de puntos fijos de dicho operador:

$$S = \{u \mid u = Tu, \alpha \leq u \leq \beta\}.$$

Sabemos, por el Teorema 2.4 que nos garantiza la existencia de solución, que $S \neq \emptyset$. Además podemos demostrar que S es compacto:

- S está acotado por definición por α y β .
- Veamos ahora que S es cerrado. Sea $\{u_n\} \subset S$ y $u \in C(I)$, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_\infty = 0$. Por la definición de S , tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n - u\|_\infty = 0$. Al ser T un operador continuo,

tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tu_n - Tu\|_\infty = 0$. Con lo cual, de la unicidad del límite, deducimos que $u = Tu$, o, lo que es lo mismo, que $u \in S$.

Como T es un operador compacto, sabemos que lleva conjuntos acotados en precompactos. Por tanto, al ser S acotado y cerrado, sabemos que $T(S) = S = \overline{S}$ es un conjunto compacto.

Para finalizar la demostración de teorema vamos a probar el siguiente lema:

Lema 2.6. [10, Theorem 2.1] *El operador T tendrá un punto fijo máximo (o mínimo) si y solo si S es un conjunto dirigido hacia arriba (abajo) (Definiciones 1.5 y 1.6).*

Demostración. Por una parte, si T tiene un punto fijo máximo es obvio que S va a estar dirigido hacia arriba. Por otra parte, si consideremos que S está dirigido hacia arriba entonces la siguiente familia:

$$\mathbb{F}_1 = \{[x] \cap S : x \in S\} \text{ tal que } [x] = \{y \in X \mid y \geq x\}$$

cumple con la propiedad de la intersección finita (1.8). Probemoslo:

Tomemos un subconjunto $J_0 = \{1, 2, \dots, N\} \neq \emptyset$ y finito. Definamos para $j = i, x = x_i$ entonces si definimos

$$\bar{x} = \text{máx}\{x_1, \dots, x_n\} \text{ tenemos que } \bigcap_{j \in J_0} \mathbb{F}_1 = \{x \in S \mid x \geq \bar{x}\} \neq \emptyset.$$

y está acotado superiormente, ya que $\bigcap_{j \in J_0} \mathbb{F}_1 \subset S$. Por tanto, por el axioma del supremo y su unicidad existe un único punto x^* supremo de $\bigcap_{j \in J_0} \mathbb{F}_1$. Además, dicho conjunto $\bigcap_{j \in J_0} \mathbb{F}_1$ es cerrado, por ser intersección entre un conjunto compacto S y un intervalo. Por tanto, el supremo $x^* \in \bigcap_{j \in J_0} \mathbb{F}_1 \subset S$. Es inmediato verificar que el punto x^* cumple que $x^* \in S$ y $x^* \geq x \forall x \in S$, siendo así el máximo punto fijo de T , con lo que queda demostrado el resultado. \square

Una vez probado el lema continuamos con la demostración. Debemos probar que efectivamente S es un conjunto dirigido hacia arriba con respecto al orden inducido en $C(I)$ por el cono de funciones no negativas:

Dadas u_1 y u_2 no negativas, $u_1, u_2 \in S$, por el Teorema 2.4 podemos afirmar que $\alpha_1 := \text{máx}\{u_1, u_2\} \leq \beta$ es una subsolución de (2.1) y existe una solución de (2.1), u_3 , entre α_1 y β . Debido a que $u_3 \in S$, $u_1 \leq u_3$ y $u_2 \leq u_3$, demostramos así que S es un conjunto dirigido hacia arriba y por tanto, que existe un punto fijo maximal, $u_{\text{máx}}$, de T .

Este punto $u_{\text{máx}}$ será la solución maximal del problema (2.1) con $\alpha \leq u_{\text{máx}} \leq \beta$ en I .

La existencia de solución minimal se obtendría con un argumento análogo. \square

En el siguiente teorema probaremos que si f es creciente con respecto a u entonces tenemos un continuo de soluciones, es decir, entre cualquier par de soluciones dentro de este conjunto, siempre existen otras soluciones de la ecuación.

Teorema 2.7. *Asumiendo que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.5 y que f es creciente respecto a u . Entonces el conjunto de soluciones de (2.1) con $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ es tal que para cualquier $t_0 \in I$ y $u^* \in [u_{\min}(t_0), u_{\max}(t_0)]$, existe u , solución de (2.1), tal que $u(t_0) = u^*$.*

Demostración. Sean $t_0 \in I$ y u^* tales que $u_{\min}(t_0) \leq u^* \leq u_{\max}(t_0)$ y tomemos un $\epsilon > 0$ suficientemente grande de manera que $u_{\max} - \epsilon \leq u_{\min} + \epsilon$. Podemos definir $\alpha_1(t)$ y $\beta_1(t)$ de la siguiente manera:

$$\alpha_1(t) = \max\{u_{\min}(t), u_{\max}(t) - \epsilon\}, \quad \beta_1(t) = \min\{u_{\max}(t), u_{\min}(t) + \epsilon\}.$$

Veamos primero que $u_{\max} - \epsilon$ y $u_{\min} + \epsilon$ son respectivamente sub y sobre soluciones de (2.1). Para ello, verificamos que satisfacen la segunda propiedad de la Definición 2.1:

Dado que u_{\max} es una solución del problema, cumple la ecuación $u_{\max}'' = f(t, u_{\max})$. Restando ϵ , obtenemos $(u_{\max} - \epsilon)'' = u_{\max}'' = f(t, u_{\max})$. Como f es creciente, se cumple que $f(t, u_{\max}) \geq f(t, u_{\max} - \epsilon)$ y por tanto:

$$(u_{\max}(t) - \epsilon)'' = f(t, u_{\max}(t)) \geq f(t, u_{\max}(t) - \epsilon),$$

y para casi todo punto $t \in I$,

$$(u_{\max}(a) - \epsilon) = (u_{\max}(b) - \epsilon) \text{ y } (u_{\max}(a) - \epsilon)' = (u_{\max}(b) - \epsilon)',$$

lo que demuestra que $u_{\max} - \epsilon$ es una subsolución.

De manera análoga, al ser u_{\min} solución, se cumple que $u_{\min}'' = f(t, u_{\min})$ y obtendremos

$$(u_{\min}(t) + \epsilon)'' = u_{\min}''(t) = f(t, u_{\min}(t)) \leq f(t, u_{\min}(t) + \epsilon),$$

y para casi todo punto $t \in I$,

$$(u_{\min}(a) + \epsilon) = (u_{\min}(b) + \epsilon) \text{ y } (u_{\min}(a) + \epsilon)' = (u_{\min}(b) + \epsilon)'$$

lo que demuestra que, efectivamente, $u_{\min} + \epsilon$ es una sobresolución.

Por consiguiente, por el Teorema 2.4, el Problema (2.1) tiene una solución u_1 tal que para todo $t \in I$

$$u_{\min}(t) \leq u_1(t) \leq u_{\min}(t) + \epsilon, \quad u_{\max}(t) - \epsilon \leq u_1(t) \leq u_{\max}.$$

Ahora vamos a realizar el mismo procedimiento, pero tomando $u^* \in [u_{\min}(t_0), u_1(t_0)]$, y definimos $\alpha_2(t)$ y $\beta_2(t)$ del siguiente modo:

$$\alpha_2(t) = \max\{u_{\min}(t), u_1(t) - \epsilon/2\}, \quad \beta_2(t) = \min\{u_1(t), u_{\min}(t) + \epsilon/2\}.$$

En este caso, obtendremos de nuevo una solución, u_2 , tal que para todo $t \in I$

$$u_{\min}(t) \leq u_2(t) \leq u_{\min}(t) + \epsilon/2, \quad u_1(t) - \epsilon/2 \leq u_2(t) \leq u_1(t).$$

Se procederá de manera similar para cada caso $u^* \in (u_1(t_0), u_{\max}(t_0)]$. Este proceso definirá una sucesión de soluciones $(u_k)_k$ que satisface $|u_k(t_0) - u^*| \leq \epsilon/2^{k-1}$. En consecuencia, al ser uniformemente acotado y equicontinuo, aplicando el teorema de Arzelà-Ascoli (*Teorema 1.9*) existe una subsucesión $(u_{k_n})_n$ tal que, para algún $u \in C(I)$, u_{k_n} converge a u en $C(I)$.

Finalmente, se obtiene así que u es solución del problema (2.1) y además $u(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n}(t_0) = u^*(t_0)$. \square

Observación 2.8. Nótese que las soluciones que se encuentran entre la sub y la sobre solución no tienen que estar necesariamente ordenadas.

Con este resultado concluimos la sección dedicada al estudio del problema periódico con parte no lineal independiente de u' . A lo largo de ella, se han presentado diversos teoremas relativos a la existencia de soluciones bajo la hipótesis de la existencia de un par (o una familia) de sub y sobresoluciones bien ordenadas, así como resultados sobre la localización de dichas soluciones y ciertas propiedades del conjunto que las contiene.

2.2. Problema periódico con parte no lineal dependiente de u' .

Ahora, nos vamos a centrar en el problema periódico de orden dos con parte no lineal dependiente de u' :

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(a) = u(b), u'(a) = u'(b). \quad (2.7)$$

En la anterior sección hemos visto que la existencia de un par de sub y sobresoluciones bien ordenadas nos permite garantizar la existencia de solución del problema periódico (2.1), siempre

que la parte no lineal f solo depende de t y $u(t)$. Sin embargo, ese resultado no es válido en general cuando la función f también depende de $u'(t)$.

Para mostrarlo exponemos en el siguiente ejemplo un caso de un problema con un par de sub y sobresoluciones bien ordenadas, pero para el cual no existe solución.

Ejemplo 2.9. [15] Consideremos el problema

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} \right) = u - p(t), \quad u(0) = u(T), \quad u'(0) = u'(T). \quad (2.8)$$

donde para r fijado tal que $0 < r < T/2$, la función p se define del siguiente modo (Véase la Figura 2.5)

$$p(t) = \begin{cases} -2, & 0 \leq t \leq r, \\ 2, & T - r \leq t \leq T \end{cases}$$

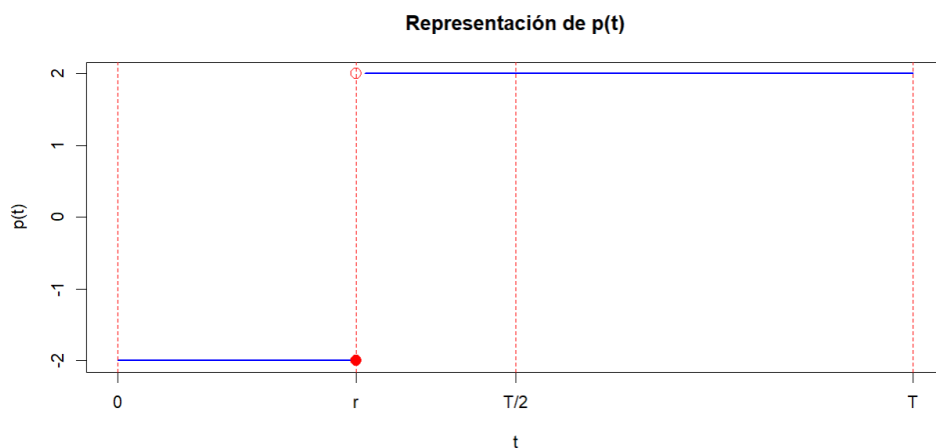


Figura 2.5: Representación de $p(t)$

En este caso, es inmediato verificar que $\alpha = -3$ y $\beta = 3$ son un par de sub y sobresoluciones bien ordenadas del problema (2.8). Vamos a demostrar que si $r > \sqrt{2}$ entonces el problema no tiene solución.

Consideremos el problema

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} \right) = u + 2 \quad (2.9)$$

PASO 1.1: Veamos que la energía del problema debe mantenerse constante. Para ello partimos de la ecuación (2.9)

Denotemos $p = u'$, entonces la ecuación se convierte en:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) = u + 2.$$

Dado que se tiene la siguiente igualdad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \right) = \frac{p'}{(1+p^2)^{3/2}},$$

la ecuación se reduce a:

$$\frac{p'}{(1+p^2)^{3/2}} = u + 2.$$

Ahora multiplicamos ambos lados por $u' = p$:

$$\frac{pp'}{(1+p^2)^{3/2}} = (u+2)p, \quad (2.10)$$

y teniendo en cuenta que el lado izquierdo puede escribirse como una derivada total

$$\frac{pp'}{(1+p^2)^{3/2}} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right).$$

Por lo tanto, la ecuación (2.10) se convierte en:

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) = (u+2)p.$$

Por último, vamos a integrar para obtener la energía E . Para ello reorganizamos los términos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right) + (u+2)p = 0,$$

donde $(u+2)p$ puede escribirse como

$$(u+2)p = \frac{d}{dt} \left(\frac{(u+2)^2}{2} \right)$$

con lo que llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{(u+2)^2}{2} \right) = 0. \quad (2.11)$$

y obtenemos que la energía del sistema viene dada por:

$$E_1(u, p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{(u+2)^2}{2},$$

es decir,

$$E_1(u, u') = \frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}} + \frac{(u+2)^2}{2}$$

que por (2.11), será constante a lo largo de las soluciones de (2.9).

PASO 1.2: Supongamos que $E_1(u, u') = E \geq 2$ entonces no podrá existir ninguna solución de (2.9) en un intervalo de I de longitud $b - a > \sqrt{2}$. Comprobémoslo:

En el caso de que existiese, si $u(t) > -2$ definimos t_0 como el punto donde $u(t)$ alcanza su valor mínimo. Como u alcanza un mínimo en t_0 , tenemos que $u'(t_0) = 0$ y, sustituyendo en la expresión de la energía obtendremos que

$$E = 1 + \frac{(u(t_0) + 2)^2}{2}.$$

Por otra parte si despejamos u' de la ecuación de energía llegamos a que

$$u' = \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{1}{\left(E - \frac{(u+2)^2}{2}\right)^2} - 1} \quad \text{y} \quad dt = \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{\left(E - \frac{(u+2)^2}{2}\right)^2} - 1}}.$$

Integrando la expresión anterior:

$$t - t_0 = \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{\left(E - \frac{(u+2)^2}{2}\right)^2} - 1}} = \int_{u(t_0)}^{u(t)} \frac{E - (u+2)^2/2}{\sqrt{1 - (E - (u+2)^2/2)^2}} du. \quad (2.12)$$

Sea $w = E - (u+2)^2/2 \in (0, 1]$, y por tanto $dw = (u+2)dt$, veamos como reescribir la ecuación. Nótese, antes de realizar el cambio de variable que, como

$$E = \frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}} + \frac{(u+2)^2}{2},$$

entonces

$$\frac{(u+2)^2}{2} = E - \frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}} \geq E - 1$$

y, por tanto, $w \leq E - (E - 1) = 1$.

Despejando $u+2$ en la expresión de w y teniendo en cuenta que $w \leq 1$ y $E \geq 2$ obtenemos:

$$u+2 = \sqrt{2(E-w)} \geq \sqrt{2(E-1)} \geq \sqrt{2} \implies \frac{1}{u+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ahora, reescribiendo la ecuación (2.12) y aplicando la desigualdad anterior, dado que $0 < w(t) \leq w(t_0) \leq 1$, para todo $t \in [0, T]$, llegamos a

$$t-t_0 = \int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{-w}{\sqrt{1-w^2}} \frac{dw}{u+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{w(t_0)}^{w(t)} \frac{-w}{\sqrt{1-w^2}} dw = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-w^2} \Big|_{w(t_0)}^{w(t_1)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1-w^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De manera análoga se puede demostrar el caso $u(t) < -2$, y comprobamos así que no puede existir solución en un intervalo I de longitud $b-a > \sqrt{2}$.

PASO 2: Por otra parte, razonando de manera análoga, si consideramos el problema

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right) = u - 2$$

con

$$E_2(u, u') = \frac{1}{\sqrt{1+u'^2}} + \frac{(u-2)^2}{2} \geq 2,$$

tampoco puede existir una solución $u(t)$ definida en un intervalo I de longitud mayor que $\sqrt{2}$.

En conclusión, si $u(t)$ fuese solución de (2.8) y fijamos un $r > \sqrt{2}$ entonces, si $u(0) > 0$, tenemos que $E_1(u(t_0), u'(t_0)) \geq 2$ y por el paso 1 no existirá solución en $[0, r]$. En cambio si $u(0) < 0$ se deduce por las condiciones de frontera que $u(T) < 0$, lo que implica que $E_2(u(T), u'(T)) \geq 2$ y, por el Paso 2, no existirá solución en $[T-r, T]$. Por tanto, el problema no tiene solución. □

De este modo, hemos visto que la simple hipótesis de la existencia de un par bien ordenado de sub y sobresoluciones para un problema con dependencia no lineal respecto de u' no es suficiente para asegurar la existencia de solución del problema considerado. En este caso, vamos a necesitar cotas a priori de las derivadas de las posibles soluciones.

Primero mostremos que dichas cotas a priori sobre la derivada pueden deducirse de la estructura de la ecuación. Para ello utilizaremos un ejemplo, el problema periódico para una ecuación de Rayleigh:

$$u'' + g(u') + h(t, u) = 0, \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b). \quad (2.13)$$

Proposición 2.10. *Sea $h : I \times [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Carathéodory tal que para alguna función $h_0 \in L^2(I)$, para casi todo $t \in I$ y todo $u \in [-r, r]$, se cumple que $|h(t, u)| \leq h_0(t)$. Entonces, existe $R > 0$ tal que para toda función $g \in C(\mathbb{R})$, cualquier solución u de (2.13) con $\|u\|_\infty \leq r$ satisface $\|u'\|_\infty < R$.*

Demostración. Para comenzar, definimos el valor como

$$R := \sqrt{b-a} \|h_0\|_{L^2} + 1 > 0,$$

que utilizaremos en el desarrollo del argumento. Dado que g es una función continua de \mathbb{R} y supongamos u una solución de la ecuación (2.13) tal que $\|u\|_\infty \leq r$, si multiplicamos ambos miembros de (2.13) por u'' e integramos, llegaremos a la siguiente expresión:

$$\|u''\|_{L^2}^2 = - \int_a^b g(u'(t))u''(t)dt - \int_a^b h(t, u(t))u''(t)dt$$

y por la hipótesis de h del enunciado,

$$\left| \int_a^b h(t, u(t))u''(t)dt \right| \leq \left(\int_a^b |h(t, u(t))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |u''(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|h_0\|_{L^2} \|u''\|_{L^2}.$$

Además si tomamos $G' = g$ entonces, dado que $u'(a) = u'(b)$, se verifica:

$$- \int_a^b g(u'(t))u''(t)dt = -(G(u'(b)) - G(u'(a))) = 0.$$

Por consiguiente, deducimos que

$$\|u''\|_{L^2}^2 \leq \|h_0\|_{L^2} \|u''\|_{L^2}.$$

Nótese que una consecuencia directa de la condición $u(a) = u(b)$ es que existe algún $t_0 \in I$ tal que $u'(t_0) = 0$. Luego, para todo $t \in I$ se tiene:

$$|u'(t)| = |u'(t) - 0| = \left| \int_{t_0}^t u''(s)ds \right| = \left| \int_{t_0}^t u''(s) \cdot 1ds \right| \leq \left(\int_{t_0}^t |u''(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^t 1^2 ds \right)^{1/2}$$

y

$$\left(\int_{t_0}^t |u''(s)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^t 1^2 ds \right)^{1/2} = \|u''\|_{L^2(t_0, t)} \sqrt{t - t_0} \leq \sqrt{b - a} \|h_0\|_{L^2} < R.$$

Como el resultado anterior se cumple para cualquier $t \in I$, se cumplirá también para $|u'(t)| = \|u'\|_\infty$ y se concluye, por tanto, el resultado propuesto. \square

No obstante, también pueden presentarse situaciones en las que la ecuación no posea una estructura especial. En tales casos, es posible obtener cotas a priori sobre la derivada con no linealidades, siempre que estas no crezcan demasiado rápido respecto a la derivada. Para funciones continuas, este tipo de control está formalizado mediante las condiciones de Nagumo.

Veamos un resultado acerca de esto.

Definición 2.11. Se dice que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con f función de Carathéodory y $\Omega \subset I \times [-r, r] \times \mathbb{R}$, satisface una condición de Naguno respecto a v si existe una función $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continua tal que

$$|f(t, u, v)| \leq \psi(|v|), \quad \forall u \in [-r, r] \text{ y para casi todo } t \in I, \quad (2.14)$$

y además se cumple

$$\int_0^{\infty} \frac{s}{\psi(s)} ds = +\infty. \quad (2.15)$$

El objetivo de la condición de Naguno es controlar el crecimiento de f respecto a u' (representada por v) y así definir una cota a priori. $\psi(|v|)$ acota a f respecto a v , y en el caso de que $\psi(s)$ crezca muy rápido, la integral (2.15) va a converger y va a incumplir la condición.

Veamos como, haciendo uso de esta condición, podemos garantizar la existencia de solución de forma genérica para problemas periódicos con parte no lineal dependiente de u' .

Proposición 2.12. *Sea Ω , como en la definición anterior, un conjunto no vacío y sea $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua que satisface (2.15). Entonces existe un $R > 0$ tal que para función de Carathéodory $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface una condición de Naguno y para cada solución u del problema*

$$u''(t) = f(t, u(t), u'(t)) \quad (2.16)$$

tal que $\|u\|_{\infty} \leq r$, se verifica que $\|u'\|_{\infty} < R$.

Demostración. Para esta demostración vamos a definir $R > 0$ de manera que

$$\int_{\frac{2r}{b-a}}^R \frac{s ds}{\psi(s)} > 2r. \quad (2.17)$$

Esto es posible porque la integral (2.15) diverge, así que podemos tomar un R suficientemente grande para que la integral desde un valor positivo arbitrario (como $\frac{2r}{b-a}$) hasta R sea mayor que la constante $2r$.

Sea u una solución de (2.16) tal que $(t, u(t), u'(t)) \in \Omega$ en c.t.p $t \in I$, vamos a probar que para todo $t \in I$, $|u'| < R$.

Dado que $u(t) \in [-r, r]$, $\forall t \in I$, sabemos que existe $t^* \in I$ con $|u'(t^*)| \geq \frac{2r}{b-a}$. Supongamos que existe un intervalo $I = [t_0, t_1]$ tal que $u'(t_0) = \frac{2r}{b-a}$, $u'(t_1) \geq R$ y $u'(t) \in \left[\frac{2r}{b-a}, R\right]$ en $I \setminus \{t_0, t_1\}$. Deducimos entonces que

$$\int_{\frac{2r}{b-a}}^R \frac{s ds}{\psi(s)} \leq \int_{u'(t_0)}^{u'(t_1)} \frac{s ds}{\psi(s)} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u'(t)u''(t)}{\psi(u'(t))} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{u'(t)f(t, u(t), u'(t))}{\psi(u'(t))} dt \leq |u(t_1) - u(t_0)| \leq 2r,$$

lo que contradice (2.17).

De manera similar, podemos probar que para cualquier $t \in I$, $u'(t) < -R$ nos llevaría a una contradicción, demostrando así la proposición. \square

Para la generalización de este resultado es necesario introducir las condiciones de Nagumo unilaterales. Esto se aplica para los problemas en los que las alguna cota a priori de las derivadas se conoce en los puntos a y b .

Nótese que este resultado es independiente de las condiciones de frontera que verifiquen la solución del problema (2.16).

Utilizando el mismo argumento que para la Proposición 2.12 se demuestra también el siguiente resultado.

Proposición 2.13. *Sean $\Omega \subset I \times [-r, r] \times \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, $k \geq 0$ y $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua que satisface (2.15). Entonces, existe $R > 0$ tal que para toda función de Carathéodory $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la condición de Nagumo unilateral:*

$$f(t, u, v) \leq \psi(|v|), \quad \forall (u, v) \in [-r, r] \times \mathbb{R}, \text{ c.t.p } t \in I, \quad (2.18)$$

y para toda solución u de (2.16) definida en I tal que $\|u\|_\infty \leq r$, $u'(a) \leq k$ y $u'(b) \geq -k$, se cumple que $\|u'\|_\infty < R$.

Introducimos ahora un resultado que, gracias a las condiciones de Nagumo introducidas anteriormente, nos permite demostrar la existencia de solución para los problemas tratados en esta sección. En este teorema, por simplicidad, se pide que f sea continua y no de $L^1(I)$, aunque podría generalizarse para funciones de L^1 -Caratheodory.

Teorema 2.14. *Tomemos un par de sub y sobresoluciones del problema (2.7), $\alpha, \beta \in C(I)$, y definamos*

$$G = \{(t, u, v) \in I \times \mathbb{R}^2 \mid \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}.$$

Sea $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua y positiva que satisface la condición:

$$\int_0^\infty \frac{s}{\varphi(s)} ds = +\infty,$$

y $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que satisface la condición de Nagumo. Entonces, el problema (2.7) admite al menos una solución $u \in C^2(I)$ tal que, para todo $t \in I$,

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t).$$

Demostración. Consideremos el problema modificado:

$$u'' = f(t, \gamma(t, u), u') + \varphi(|u'|)(u - \gamma(t, u)), \text{ en c.t.p } t \in I, \quad u(a) = u(b), u'(a) = u'(b), \quad (2.19)$$

donde $\gamma(t, u)$ está definida como en (2.4).

Dado que f , α y β son funciones continuas y $\varphi(0) > 0$, podemos tomar un $r > 0$ suficientemente grande verificando, para todo $t \in I$:

$$-r < \alpha(t) \leq \beta(t) < r,$$

$$f(t, \alpha(t), 0) + \varphi(0)(-r - \alpha(t)) < 0,$$

y

$$f(t, \beta(t), 0) + \varphi(0)(r - \beta(t)) > 0.$$

En lo que sigue, vamos a probar que toda solución u del problema modificado (2.19) va a estar en el intervalo $[-r, r]$.

Supongamos que no es cierto y buscaremos llegar a una contradicción. Asumamos que existe un t_0 tal que $u(t_0) = \min_{t \in I} u(t) \leq -r$ entonces, por ser un mínimo de $u \in C^2(I)$:

$$0 \leq u''(t_0) = f(t_0, \alpha(t_0), 0) + \varphi(0)(u(t_0) - \alpha(t_0)) < 0,$$

llegando así a una contradicción.

Hemos obtenido que $\|u\|_\infty \leq r$. Por tanto, por la Proposición 2.12, definiendo

$$\psi(x) = \varphi(x)(1 + 2r),$$

tenemos que

$$|f(t, \gamma(t, u), u') + \varphi(|u'|)(u - \gamma(t, u))| \leq \psi(|u'|),$$

sabemos que existe un $R > 0$ tal que $\|u'\|_\infty < R$.

Definamos ahora los siguientes operadores:

$$T_1 : D \rightarrow C(I) : u \rightarrow u'' - u,$$

$$T_2 : D \rightarrow C(I) : u \rightarrow f(t, \gamma(t, u), u') + \varphi(|u'|)(u - \gamma(t, u)) - u,$$

donde $D = \{u \in C^2(I) \mid u(a) = u(b), u'(a) = u'(b)\}$.

Además, sabemos que el operador T_1 es invertible en D , al contar con una única función de Green, dada en (2.5).

Finalmente, podemos definir el operador T de la siguiente manera:

$$T(u) = T_1^{-1}T_2(u), \quad u \in D.$$

De manera similar a la demostración realizada en el Teorema 2.3 se puede verificar que $T : D \rightarrow D$ es también un operador compacto.

Por tanto, al ser T un operador compacto y al saber que $\|u\|_\infty < r$ y que $\|u'\|_\infty < R$ estamos en las hipótesis del Teorema de Schauder (Teorema 1.7) y el operador T tendrá al menos un punto fijo que será solución del problema (2.19). Además, de forma análoga al Teorema 2.3 podemos probar que toda solución u del problema (2.19) satisface que $\alpha \leq u \leq \beta$ en I y, por tanto, toda solución de (2.19) será también solución de (2.7). \square

Concluimos este capítulo observando una diferencia fundamental entre los problemas periódicos cuya no linealidad depende o no de la derivada. Mientras que, en el caso en que la parte no lineal es independiente de u' , la existencia de un par de sub y sobresoluciones bien ordenadas basta para garantizar la existencia de solución, este criterio no es suficiente cuando la no linealidad depende de u' . A pesar de ello, hemos probado que, bajo ciertas condiciones adicionales, como la condición de Naguno, podemos conseguir cotas a priori de las derivadas de todas las posibles soluciones del problema considerado, lo que nos permite obtener resultados de existencia.

Capítulo 3

El método monótono

En este capítulo se estudia el denominado método monótono, que permite obtener soluciones extremales para ciertos problemas de contorno asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias de orden arbitrario. Para ello, en la primera sección, se presentan distintos resultados teóricos que relacionan la invertibilidad de operadores lineales con el signo de la correspondiente función de Green. Estos resultados, además de tener interés propio, serán fundamentales en la justificación del método que se desarrollará a continuación.

En la segunda sección se introducen las definiciones necesarias para formalizar el método monótono y se demuestra un teorema general que garantiza la existencia de soluciones bajo condiciones adecuadas. Finalmente, en la tercera sección se aplican los resultados obtenidos a la resolución de diversos problemas con diferentes condiciones de contorno. Estas aplicaciones se llevan a cabo mediante la implementación computacional del método en Python, lo que permite ilustrar su comportamiento y analizar su convergencia en función de ciertos parámetros del problema.

3.1. Problemas lineales de orden n

En este capítulo utilizaremos la siguiente notación para la ecuación diferencial de orden n ,

$$L_n u(t) = f(t), \quad t \in I, \quad U_i(u) = h_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

donde

$$U_i(u) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_j^i u^{(j)}(a) + \beta_j^i u^{(j)}(b) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

son las condiciones de contorno en el intervalo I y el operador diferencial L_n viene dado por

$$L_n u(t) \equiv u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)u'(t) + a_n(t)u(t), \quad t \in I. \quad (3.3)$$

Aquí, α_j^i , β_j^i , y h_i son constantes reales para todo $i = 1, \dots, n$ y $j = 0, \dots, n-1$, y además f , $a_k \in L^1(I)$ para todo $k = 1, \dots, n$. Los resultados se recogen en [5].

Definición 3.1. Sean U_i , con $i = 1, \dots, n$, las condiciones de contorno definidas en (3.2), y definamos el espacio X_U como el conjunto de todas las funciones u en el espacio $W^{n,1}(I)$ que cumplen con la restricción de que las condiciones de frontera sean iguales a 0 en los extremos del intervalo:

$$X_U := \{u \in W^{n,1}(I) \mid U_i(u) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}. \quad (3.4)$$

Decimos que $X(U) \subset W^{n,1}(I)$ es un *conjunto relacionado con X_U* , si satisface las siguientes propiedades:

1. $X_U \subset X(U)$.
2. Si $u, v \in X(U)$, entonces $\gamma u + \delta v \in X(U)$ para todo $\gamma, \delta \geq 0$.

Nótese que, para un mismo X_U , existen múltiples conjuntos relacionados. En el siguiente ejemplo se expone la construcción de diferentes $X(U)$ para unas condiciones de contorno periódicas.

Ejemplo 3.2. Consideremos las condiciones de contorno periódicas de orden n ,

$$u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b), \quad i = 0, \dots, n.$$

Naturalmente, podríamos definir $X(U)$ como simplemente X_U . Sin embargo, esta elección no es única, existen muchas maneras diferentes de construirlos. Por ejemplo:

$$X(U) = \{u \in W^{n,1}(I), u^{(i)}(a) \geq u^{(i)}(b), i = 1, \dots, n\}. \quad (3.5)$$

Veamos que (3.5) cumple ambas propiedades de la Definición 3.1:

1. Es inmediato que $X_U \subset X(U)$.
2. Por definición de $X(U)$ sabemos que si $u, v \in X(U)$ entonces $u^{(i)}(a) \geq u^{(i)}(b)$ y por tanto $\gamma u^{(i)}(a) \geq \gamma u^{(i)}(b)$ para $\gamma \geq 0$. De igual manera $\delta v^{(i)}(a) \geq \delta v^{(i)}(b)$ para $\delta \geq 0$ y podemos afirmar que, $\gamma u^{(i)}(a) + \delta v^{(i)}(a) \geq \gamma u^{(i)}(b) + \delta v^{(i)}(b)$ para $\gamma, \delta \geq 0$. Así, $\gamma u + \delta v \in X(U)$ cumpliendo la segunda propiedad.

Para construir otro ejemplo podríamos considerar la igualdad en las condiciones de contorno excepto para un índice concreto.

$$X(U) = \{u \in W^{n,1}(I, \mathbb{R}), u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b), i = 1, \dots, n \text{ con } i \neq j, u^{(i)}(a) \leq u^{(j)}(b)\}.$$

Tras haber introducido estas definiciones podemos ahora presentar los conceptos de operador diferencial inverso negativo e inverso positivo en un conjunto dado.

Definición 3.3. Sea $X(U)$ un conjunto asociado a X_U , se dice que el operador diferencial lineal de orden n L_n , definido en (3.3), es inverso negativo en $X(U)$ si, y solo si, se cumple la siguiente propiedad para todo $u \in X(U)$:

Si $L_n u(t) \geq 0$ para casi todo $t \in I$, entonces $u(t) \leq 0$ para todo $t \in I$.

Definición 3.4. Sea $X(U)$ un conjunto asociado a X_U , se dice que el operador L_n es inverso positivo en $X(U)$ si, y solo si, para toda función $u \in X(U)$ se cumple la siguiente condición:

Si $L_n u(t) \geq 0$ para casi todo $t \in I$, entonces $u(t) \geq 0$ para todo $t \in I$.

Otra propiedad relevante a considerar en el estudio de los operadores es la invertibilidad, la cual requiere que el operador sea tanto sobreyectivo como inyectivo. A continuación, se presenta un ejemplo donde esta condición no se cumple, evidenciando que el operador no es necesariamente invertible.

Ejemplo 3.5. Tomemos $n = 1$ y $a_n(t) = 0$ para L_n y veamos que el operador $L_1 u(t) = u'(t)$ no es invertible en el espacio de las funciones periódicas,

$$\{u \in C^1(I), u(a) = u(b)\}.$$

Supongamos $L_1 u(t) = 0$ entonces $u'(t) = 0$ y esto implica que u debe ser una constante. Si ahora miramos que cumpla las condiciones de periodicidad, para cualquier u constante se cumple que $u(a) = u(b)$ y habría infinitas soluciones. Demostramos así que el operador no es inyectivo, y por tanto, tampoco invertible.

Antes de enunciar y demostrar los resultados principales de esta sección, vamos a enunciar un teorema que utilizaremos más adelante para distintas demostraciones.

Teorema 3.6. *El problema*

$$L_n u(t) = f(t), \quad t \in J; \quad U_i(u) = h_i, \quad i = 1, \dots, n;$$

tiene una solución única si y sólo si existe una única función de Green asociada a dicho problema. Este teorema está demostrado en [5, Theorem 1.4.2].

Exponemos a continuación un resultado que garantiza la invertibilidad de L_n .

Proposición 3.7. *Si el operador L_n es inverso negativo (o positivo) en $X(U)$, entonces L_n es invertible en X_U .*

Demostración. Realizaremos únicamente la prueba para inverso negativo, puesto que para inverso positivo sería análoga. Tomemos $u \in X_U$ tal que $L_n u = 0$. Dado que $X_U \subset X(U)$, podemos aplicar la propiedad de inverso negativo del operador L_n . En particular, como $L_n u(t) = 0$ para casi todo $t \in I$, se sigue que $u(t) \leq 0$ para todo $t \in I$.

Consideremos ahora la función $-u$, que también pertenece a X_U . Por la condición 2 de la Definición 3.1, obtenemos que $L_n(-u) = 0$. Por la propiedad de inverso negativo, también se concluye que $-u(t) \leq 0$ para todo $t \in I$. Entonces se tiene simultáneamente que $u(t) \leq 0$ y $u(t) \geq 0$, lo cual implica que $u(t) = 0$ para todo $t \in I$. Por lo tanto, el núcleo del operador L_n restringido al espacio X_U es trivial, es decir, $\ker(L_n) = \{0\}$.

Esto implica que la única solución del problema homogéneo

$$L_n u(t) = 0, \text{ con } u \in X_U$$

es la trivial.

Es obvio que entonces la solución de $L_n u = f$ va a ser única. Supongamos que existen dos soluciones u y v , tales que $L_n u = f$ y $L_n v = f$. Entonces, por estar en un espacio vectorial, tenemos que $L_n(u - v) = 0$, y como el problema homogéneo admite solo la solución trivial tendremos que $u = v$ y por tanto la solución es única.

Además, de acuerdo con el Teorema 3.6, al tener el problema solución única, entonces existe una única función de Green correspondiente. De la existencia y unicidad de la función de Green se obtiene directamente la invertibilidad del operador L_n . \square

Nótese que la invertibilidad del operador se garantiza solo en X_U y no en $X(U)$. Esto se debe a que $X(U)$ no es necesariamente un espacio vectorial y no podemos garantizar que $u - v \in X(U)$.

Observación 3.8. *Nótese que en el Ejemplo 3.5, con operador no invertible, el operador no es ni inverso negativo ni inverso positivo.*

Centrémonos ahora en el problema (3.1) con $h = 0$, es decir, el problema:

$$L_n u(t) = f(t), \quad t \in I, \quad U_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

y veamos un resultado que nos permite relacionar el signo de la función de Green con el carácter inverso negativo o inverso positivo del operador diferencial L_n en el espacio X_U .

Proposición 3.9. *El operador L_n es inverso negativo en X_U si y solo si la función de Green asociada al problema (3.6) es menor o igual que cero en su dominio de definición.*

Proposición 3.10. *El operador L_n es de inversa positiva en X_U si y solo si la función de Green asociada al problema (3.6) es mayor o igual que cero en su dominio de definición.*

Demostración. Demostraremos solo esta última proposición, la demostración de la *Proposición 3.9* es análoga.

Veamos la condición suficiente:

Partimos de que L_n es un operador inverso positivo en X_U y supongamos que la función de Green asociada al problema (3.6) toma algún valor negativo en su dominio de definición. Supongamos también que el problema tiene solución única, entonces, por el Teorema 3.6 sabemos que existe una única función de Green asociada a dicho problema.

La continuidad de la función de Green en los triángulos $t < s$ y $s < t$ implica que, si $G(t_0, s_0) < 0$ para algún $(t_0, s_0) \in I \times I$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t_0 \neq s_0$. En consecuencia, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset I$ y se cumple que $G(t_0, s) < 0$ para todo $s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$.

Podemos definir la función f del siguiente modo:

$$f_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } |s - s_0| < \varepsilon, \\ 0, & \text{si } |s - s_0| \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (3.7)$$

Es inmediato que $f_0 \geq 0$ en I , (véase la Figura 3.1).

Sea entonces u_0 la única solución del *Problema* (3.6). Por la definición de la función de Green, se tiene que

$$u_0(t_0) = \int_a^b G(t_0, s) f_0(s) ds = \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} G(t_0, s) f_0(s) ds < 0.$$

Por tanto, $L_n u_0 = f_0(t) \geq 0$ en I , pero $u_0 \not\geq 0$ en I y concluimos que el operador L_n no es inverso positivo en X_U llegando así a una contradicción.

Probemos ahora la condición necesaria:

Dado que $G(t, s) \geq 0$ en $I \times I$, consideramos cualquier $f \in C(I)$ tal que $f(s) \geq 0$ para todo $s \in I$. La solución u del Problema (3.6) se puede representar como sigue:

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds.$$

Como $G(t, s) \geq 0$ y $f(s) \geq 0$, se tiene que $G(t, s) f(s) \geq 0$ para todo $(t, s) \in I \times I$. Por lo tanto,

$$u(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds \geq 0 \quad \text{para todo } t \in I.$$

Esto implica que, si $L_n u = f(t) \geq 0$, entonces $u \geq 0$ y, por definición, esto significa que el operador L_n es inverso negativo en X_U . \square

Cabe señalar que la elección de la función $f_0(s)$ en el teorema anterior no es única; existen múltiples funciones posibles que permiten alcanzar el mismo resultado. En particular, aunque la función utilizada en la demostración no es continua, dicha demostración no depende de su regularidad. Podríamos haber seleccionado, por ejemplo,

$$f_0(s) = \begin{cases} \exp\left(-1/\left(1 - \left(\frac{s-s_0}{\varepsilon}\right)^2\right)\right), & \text{si } |s - s_0| < \varepsilon, \\ 0, & \text{si } |s - s_0| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad (3.8)$$

una función de clase infinito, sin que afecte a la validez del argumento (véase la Figura 3.2).

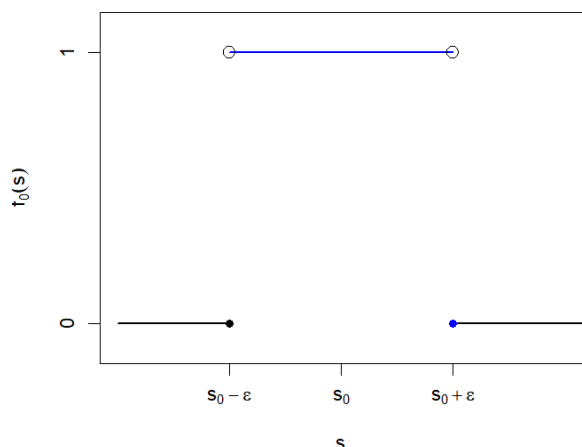


Figura 3.1: Representación de (3.7)

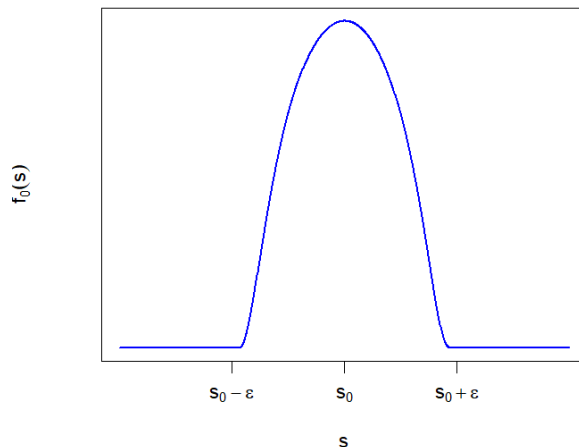


Figura 3.2: Representación de (3.8)

A continuación se expone un ejemplo que muestra cómo, si la función de Green asociada cambia de signo, se puede construir fácilmente una función f tal que la solución u correspondiente también cambie de signo. En particular, consideraremos un problema con condiciones de Neumann en el que, al elegir un parámetro k adecuado, se verifica que la función de Green cambia de signo en todo su dominio.

Ejemplo 3.11. Tomemos, para este ejemplo, el problema de orden dos con condiciones de contorno de tipo Neumann:

$$u'' + k^2 u = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad u'(0) = u'(1) = 0. \quad (3.9)$$

La función de Green correspondiente al problema homogéneo relacionado viene dada por:

$$G_k(t, s) = \begin{cases} \frac{\cos(ks) \cos(k-kt)}{k \sin(k)}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{\cos(k-ks) \cos(kt)}{k \sin(k)}, & \text{si } 0 < t < s \leq 1, \end{cases}$$

que será positiva si y solo si $k \in (0, \frac{\pi}{2})$ (véase [5, Appendix B.2]).

Tomemos, por ejemplo, el valor $k = \frac{\pi}{2} + 0,1$, y véase en la Figura 3.3 que esta función cambia de signo en un entorno de 0.

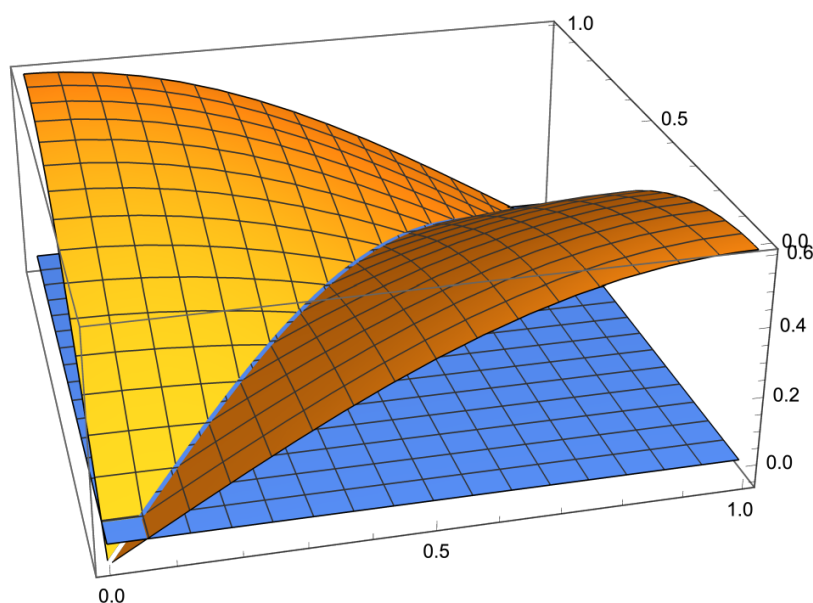


Figura 3.3: Representación de $G_{\frac{\pi}{2}+0,1}(t, s)$

Consideremos ahora la siguiente función f :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < 0,05, \\ 0, & \text{si } t \geq 0,05. \end{cases}$$

y calculamos (en Matlab) la solución del problema como

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds.$$

Obtenemos así una solución que en un entorno de 0 cambia de signo (véase la Figura 3.4) y por tanto el operador no puede ser ni inverso positivo ni inverso negativo, tal y como mostrabamos en las proposiciones anteriores.

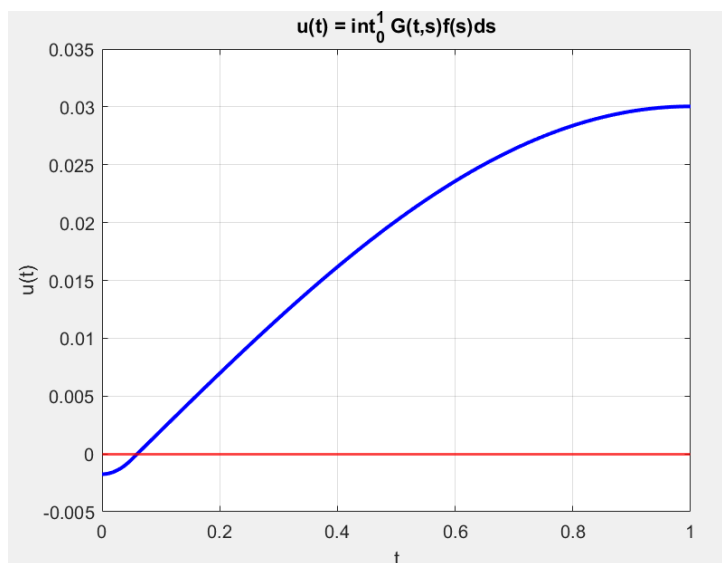


Figura 3.4: Solución $u(t)$ en $[0, 1]$.

Los resultados presentados en esta sección nos permiten introducir y demostrar a continuación el denominado método monótono para la resolución de problemas diferenciales.

3.2. El método monótono

En esta sección, nos vamos a enfocar de nuevo en resolver el problema no lineal

$$L_n u(t) = f(t, u(t)), \text{ para c.t.p } t \in I, \quad U_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Para ello vamos a utilizar las Proposiciones 3.9 y 3.10 que introdujimos en la sección anterior, donde se exponía la importancia de que la función de Green sea de signo constante. Esto nos será útil para probar la existencia de distintas soluciones que, suponiendo que existan α y β , se encontrarán entre la subsolución y la sobresolución del problema.

A lo largo de este trabajo hemos empleado el concepto de sobresolución y subsolución que definimos en el Capítulo 1, concretamente en la Definición 2.1. Sin embargo, en esta sección, vamos a presentar una definición generalizada para problemas de orden n .

Definición 3.12. Sea $X(U)$ un conjunto relacionado de X_U entonces $\alpha \in X(U)$ será una subsolución del problema (3.10) si

$$L_n \alpha(t) \geq f(t, \alpha(t)) \text{ para c.t.p } t \in I. \quad (3.11)$$

Definición 3.13. Sea $X(U)$ un conjunto relacionado de X_U entonces β será una sobresolución

del problema (3.10) si $-\beta \in X(U)$ y

$$L_n \beta(t) \leq f(t, \beta(t)) \text{ para c.t.p } t \in I. \quad (3.12)$$

El método monótono es un método iterativo, que se basa en construir dos sucesiones monótonas cuyos primeros iterantes son α y β , que vienen dadas como las soluciones únicas de determinados problemas lineales asociados a (3.10).

Antes de introducir dicho método debemos definir el siguiente operador diferencial

$$T_n[M]u(t) = L_n u(t) + Mu(t), t \in I, \quad (3.13)$$

donde L_n es el operador diferencial de orden n definido en (3.3).

A su vez, asumimos que la función f cumple la siguiente condición:

$$\text{existe } M \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(t, x) + Mx \leq f(t, y) + My \text{ para casi todo } t \in I \text{ y } \alpha(t) \leq y \leq x \leq \beta(t). \quad (3.14)$$

Esta condición nos dice que $f(t, x) + Mx$ es decreciente en x para $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ lo que nos permite, como veremos a continuación, convertir el problema no lineal en uno que puede analizarse con operadores lineales.

Podemos ahora introducir, en el siguiente teorema, el método monótono iterativo.

Teorema 3.14. (Método monótono). *Supongamos que existe un par de funciones α y β en I tales que $\alpha \leq \beta$, siendo respectivamente una sub y una sobresolución para el problema (3.10). Además, se asume que la función f satisface la condición (3.14) para cierto $M \in \mathbb{R}$ tal que $T_n[M]$ es inverso negativo en $X(U)$. Entonces existen dos sucesiones monótonas, $\{\alpha_m\}$ creciente y $\{\beta_m\}$ decreciente, con $\alpha_0 = \alpha$ y $\beta_0 = \beta$, que convergen uniformemente a las soluciones extremales (maximales y minimales) del problema contenidas en el intervalo $[\alpha(t), \beta(t)]$.*

Demostración. Tomemos $\nu \in L^1(I)$ tal que $\alpha(t) \leq \nu(t) \leq \beta(t)$ para casi todo $t \in I$. Si consideramos el siguiente problema lineal:

$$T_n[M]u(t) = f(t, \nu(t)) + M\nu(t), \text{ para c.t.p } t \in I; \quad U_i(u) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.15)$$

tomando $M \in \mathbb{R}$ de tal manera que el operador $T_n[M]$ sea inverso negativo en $X(U)$, entonces, por la Proposición 3.9 sabemos que $T_n[M]$ es invertible en X_U y por tanto el problema tiene solución única.

PASO 1:

Veamos que u , la única solución de (3.15), va a estar contenida entre α y β . Para ello, comencemos mostrando que $T_n[M](\alpha - u) \geq 0$ en casi todo punto de I . Usamos la linealidad del

operador $T_n[M]$:

$$T_n[M](\alpha - u) = T_n[M]\alpha(t) - T_n[M]u(t), \text{ para c.t.p. } t \in I. \quad (3.16)$$

Por como definimos el operador $T_n[M]$ en (3.13) sabemos que

$$T_n[M]\alpha(t) = L_n\alpha(t) + M\alpha(t), \text{ para c.t.p. } t \in I$$

y además por la Definición 3.12 sabemos que $L_n\alpha(t) \geq f(t, \alpha(t))$. Entonces

$$T_n[M]\alpha(t) \geq f(t, \alpha(t)) + M\alpha(t), \text{ para c.t.p. } t \in I.$$

Podemos ahora reescribir (3.16) de la siguiente manera:

$$T_n[M](\alpha - u) \geq f(t, \alpha(t)) + M\alpha(t) - (f(t, \nu(t)) + M\nu(t)), \text{ para c.t.p. } t \in I.$$

Si utilizamos ahora la condición (3.14), como supusimos que $\alpha(t) \leq \nu(t)$ en I , tenemos que

$$f(t, \alpha(t)) + M\alpha(t) \geq f(t, \nu(t)) + M\nu(t) \text{ en c.t.p. } t \in I$$

y por tanto $T_n[M](\alpha - u) \geq 0$.

Al ser $T_n[M]$ inverso negativo en $X(U)$ y $\alpha - u \in X(U)$, decimos que $\alpha \leq u$ en I .

De forma análoga se puede demostrar que $u \leq \beta$ y obtenemos así que $\alpha \leq u \leq \beta$ en I .

PASO 2:

Sean ahora u_1 y u_2 las únicas soluciones de (3.15) para ν_1 y ν_2 respectivamente. Obviamente, $u_1 - u_2 \in X_U$, al ser este un espacio vectorial, y podemos demostrar que $u_1 \leq u_2$ en I , ya que:

$$T_n[M](u_1 - u_2) = (f(t, \nu_1(t)) + M\nu_1(t)) - ((f(t, \nu_2(t)) + M\nu_2(t)))$$

y, de nuevo, por la condición (3.14), al ser $u_1 \leq u_2$

$$f(t, \nu_1(t)) + M\nu_1(t) \geq f(t, \nu_2(t)) + M\nu_2(t) \text{ en c.t.p. } t \in I,$$

entonces tenemos que $T_n[M](u_1 - u_2) \geq 0$ y es inverso negativo, por lo que $u_1 \leq u_2$ en I .

Vamos a construir ahora dos sucesiones, $\{\beta_m\}$ y $\{\alpha_m\}$, que se obtienen por recurrencia.

Para $\{\alpha_m\}$:

1. Para $m = 0$ definimos $\alpha_0 = \alpha$,
2. Para $m \geq 1$ definimos $\alpha_m \in W^{n,1}(I)$ como la única solución del siguiente problema:

$$T_n[M]\alpha_m(t) = f(t, \alpha_{m-1}(t)) + M\alpha_{m-1}(t) \text{ para c.t.p. } t \in I; \quad U_i(\alpha_m) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

De manera análoga para $\{\beta_m\}$:

1. Para $m = 0$ definimos $\beta_0 = \beta$,
2. Para $m \geq 1$ se define $\beta_m \in W^{n,1}(I)$ como la única solución del problema:

$$T_n[M]\beta_m(t) = f(t, \beta_{m-1}(t)) + M\beta_{m-1}(t) \text{ en c.t.p. } t \in I; \quad U_i(\beta_m) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (3.18)$$

Es inmediato verificar que las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ están acotadas en el espacio $W^{n,1}(I)$, ya que en la construcción que expusimos antes, el lado derecho de la ecuación,

$$f(t, \alpha_{m-1}(t)) + M\alpha_{m-1}(t), \quad (3.19)$$

depende de α_{m-1} y por tanto el término (3.19) está acotado. Entonces, por las propiedades de la función de Green asociada al operador $T_n[M]$ podemos afirmar que dichas sucesiones están acotadas en el espacio $W^{n,1}(I)$.

En [17] se demuestra que $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ convergen uniformemente. Esto se debe a que ambas sucesiones son monótonas y además convergen puntualmente a una función continua. Entonces, por el Teorema de Dini (Teorema 1.10) podemos afirmar que la convergencia es uniforme en I .

Supongamos que convergen respectivamente a Γ y Ψ , es inmediato probar que tales funciones son un par de soluciones del problema (3.15).

Finalmente, podemos demostrar que Γ es la solución minimal y Ψ la solución maximal del problema (3.15) en $[\alpha, \beta]$. Para ver esto, simplemente tomamos una solución x de problema (3.15) tal que $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$ y $\alpha_m \leq x \leq \beta_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, tomando límites cuando m tiende a ∞ se obtiene que $\Gamma \leq x \leq \Psi$. \square

Observación 3.15. *Para el caso $\alpha \geq \beta$ podemos construir un resultado similar que se demuestra de manera análoga. Ahora tendríamos que asumir que la función f cumple la condición*

$$f(t, x) + Mx \geq f(t, y) + My \text{ para casi todo } t \in I \text{ e } \alpha(t) \leq y \leq x \leq \beta(t), \quad (3.20)$$

para cierto $M \in \mathbb{R}$ tal que $T_n[M]$ es inverso positivo en $X(U)$.

Entonces existen dos sucesiones monótonas, $\{\alpha_m\}$ decreciente y $\{\beta_m\}$ creciente, con $\alpha_0 = \alpha$ y $\beta_0 = \beta$, que convergen uniformemente a las soluciones extremales del problema contenidas en el intervalo $[\beta, \alpha]$.

3.3. Ejemplos resueltos mediante el método monótono

En esta sección se exponen distintos problemas que serán resueltos utilizando el método monótono, mediante un código implementado en Python, que se presenta en el Anexo 1. Este código construye y representa las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ definidas considerando la demostración del Teorema 3.14 como las soluciones de los problemas (3.17) y (3.18) respectivamente. Para la construcción de estas usaremos la integración numérica, una suma de Riemann que aproxima las soluciones en cada paso temporal.

Cuando se cumplen las condiciones del método monótono, puede observarse como estas sucesiones convergen, a medida que aumenta el número de iteraciones, hacia las soluciones extremales del problema planteado. La visualización de dicha convergencia permite ilustrar de forma clara la validez y potencia del método.

Durante estos ejemplos consideraremos

$$\{X_U = \{u \in W^{2,1}(I) \mid u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)\}\}$$

y

$$\{X(U) = \{u \in W^{2,1}(I) \mid u(0) = u(1), u'(0) \geq u'(1)\}\}$$

Ejemplo 3.16. Comencemos exponiendo un ejemplo en el que se resuelve el siguiente problema periódico de segundo orden:

$$L_n u(t) = f(t, u(t)) \text{ en c.t.p. } t \in I \quad u(a) = u(b), u'(a) = u'(b). \quad (3.21)$$

En concreto, tomemos $L_n u(t) = u''(t)$ e $I = [0, 1]$, entonces podemos reescribir nuestro problema como el siguiente:

$$u''(t) = f(t, u(t)) \text{ en c.t.p. } t \in [0, 1], \quad u(0) = u(1), u'(0) = u'(1). \quad (3.22)$$

Para poder aplicar el método monótono necesitamos que se cumplan las hipótesis del teorema. Primero debemos encontrar un par de sub y sobresoluciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ con $\alpha(t) \leq \beta(t)$ que cumplan las condiciones de contorno, es decir,

$$\alpha(0) = \alpha(1), \alpha'(0) \geq \alpha'(1), \beta(0) = \beta(1) \text{ y } \beta'(0) \leq \beta'(1).$$

Cualquier función constante va a cumplir estas condiciones, tomemos $\alpha = -1$ y $\beta = 1$.

Para que α y β sean un par de sub y sobresoluciones deben cumplirse las Definiciones 3.12 y 3.13, entonces:

$$\alpha''(t) = 0 \geq f(t, \alpha(t)) = f(t, -1)$$

y

$$\beta''(t) = 0 \leq f(t, \beta(t)) = f(t, 1).$$

Tomemos por ejemplo $f(t, u) = t \cdot u^3 + t^5$ (véase la Figura 3.5) y comprobemos:

$$f(t, -1) = -t + t^5 = t(t^4 - 1) \leq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1],$$

$$f(t, 1) = t + t^5 = t(t^4 + 1) \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

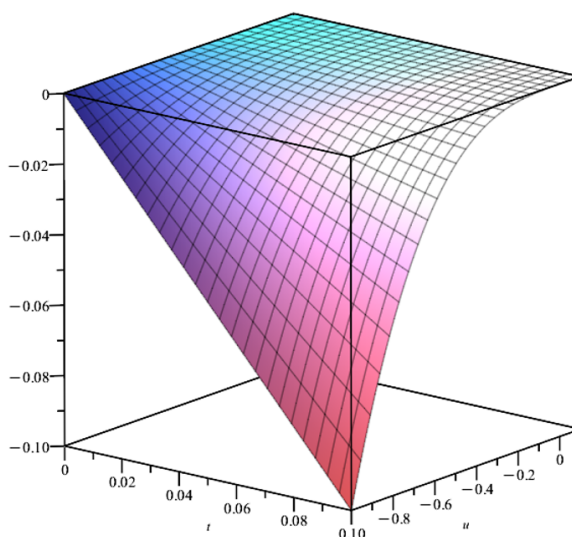


Figura 3.5: Representación de $f(t, x) = t \cdot x^3 + t^5$

Por último, para que f se encuentre en las hipótesis del método monótono debe cumplir la condición (3.14) y, a su vez, ese $M \in \mathbb{R}$ debe ser tomado de manera que $T_n[M]$ sea inverso negativo. Por simplicidad, tomemos $M = -k^2 < 0$, con $k > 0$.

El operador $T_n[M]u(t)$ se define como

$$T_n[M]u(t) = L_n u(t) - k^2 u(t) = u''(t) - k^2 u(t), \quad t \in I.$$

Por el Teorema 3.9 sabemos que este operador va a ser inverso negativo si y solo si la función de Green del problema homogéneo asociado,

$$u''(t) - k^2 u(t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1), \quad (3.23)$$

toma únicamente valores menores o iguales a 0. En [5, Appendix B.2] puede verse que la función de Green asociada a dicho problema viene dada por la siguiente expresión::

$$G_k(t, s) = \begin{cases} \frac{e^{k+k(s-t)} + e^{-k(s-t)}}{2k - 2ke^k}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{e^{k(s-t)} + e^{k-k(s-t)}}{2k - 2ke^k}, & \text{si } 0 < t < s \leq 1, \end{cases} \quad (3.24)$$

que es negativa para todo $M = -k^2 < 0$.

Por tanto, simplemente falta comprobar para que valores de k la función f cumple la condición (3.14), es decir, para que valores la función $f(t, u) - k^2u$ será decreciente respecto a u con $u \in [-1, 1]$ y $t \in I$. Para ello buscamos $k > 0$ que cumpla:

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(t, u) - k^2u) = 3tu^2 - k^2 \leq 0, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [-1, 1].$$

Esto se cumple si $k^2 \geq 3$.

Por tanto, ya estamos en condiciones de aplicar el método monótono al siguiente problema

$$u''(t) = t \cdot u^3 + t^5, \quad t \in [0, 1] \quad u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1), \quad (3.25)$$

y con $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $k = \sqrt{3}$.

Ejecutamos el código en Python, presentado en el Anexo 1, introduciendo un número suficiente de nodos espaciales y pasos temporales, y obtenemos las Figuras 3.6 y 3.7 que representan la convergencia de las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ respectivamente.

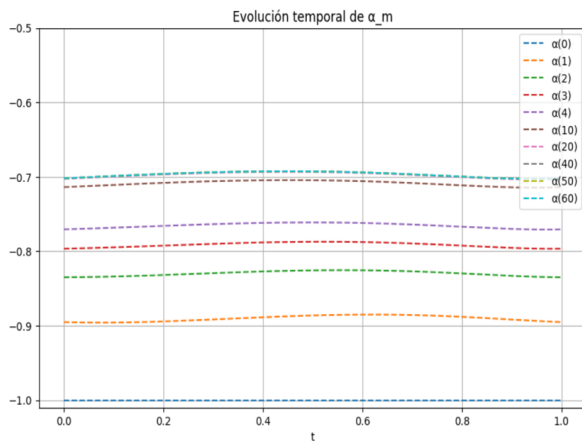


Figura 3.6: Evolución de $\{\alpha_m\}$

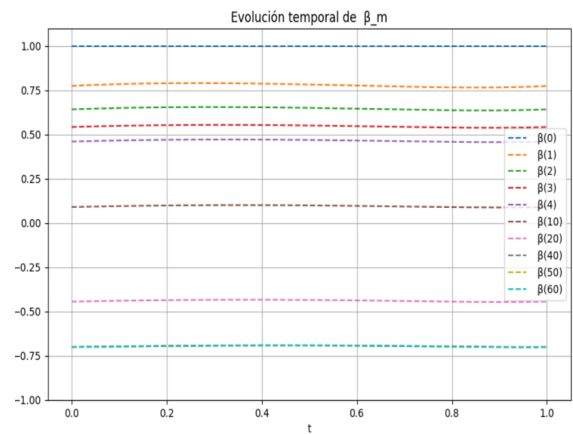


Figura 3.7: Evolución de $\{\beta_m\}$

En las siguientes Figuras (3.8 y 3.9) se representan los iterantes 20 y 30 de las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$. Se observa que, a medida que ambas sucesiones convergen, la diferencia entre

ellas disminuye progresivamente, lo que indica la aproximación hacia una solución común del problema.

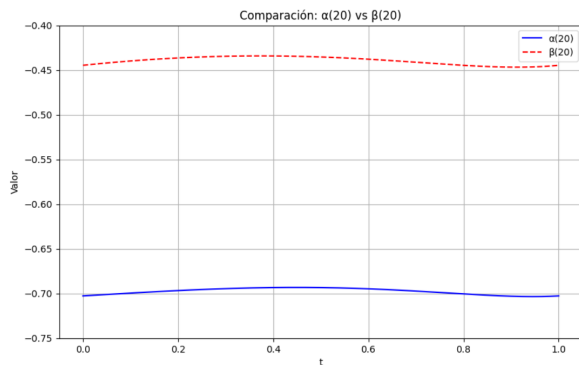


Figura 3.8: Representación de α_{20} y β_{20}

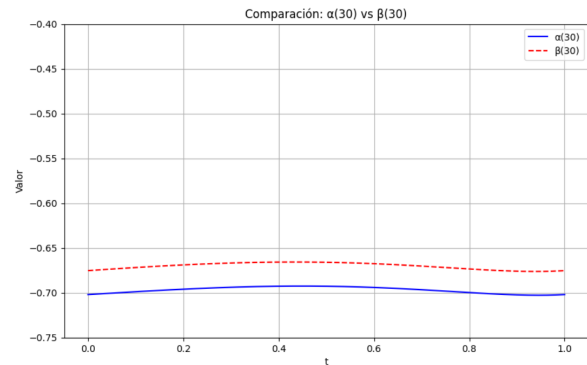


Figura 3.9: Representación de α_{30} y β_{30}

En la Figura 3.10 se representa el iterante 40 de las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$, que permite intuir la forma que adoptarán las soluciones del problema.

Finalmente, al representar los iterantes 60 (véase la Figura 3.11), se observa que α_{60} y β_{60} prácticamente coinciden, lo cual parece indicar que la solución del problema (3.25) es única, en el sector $[-1, 1]$. Este hecho no podía deducirse directamente del método monótono, sino que parece concluirse a partir del comportamiento gráfico de las sucesiones.

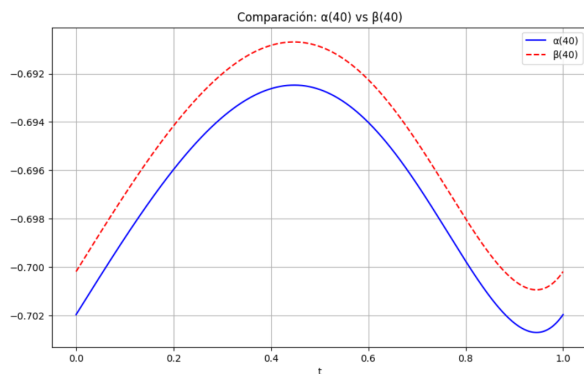


Figura 3.10: Representación de α_{40} y β_{40}

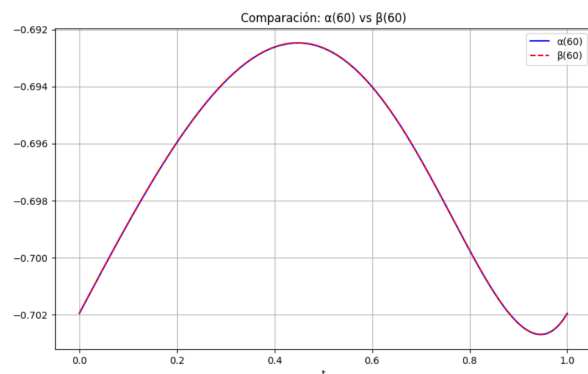


Figura 3.11: Representación de α_{60} y β_{60}

Por tanto, podemos conjeturar que el problema (3.25) tiene solución única en el sector $[-1, 1]$ y es la representada en la Figura 3.11.

Una vez resuelto el problema para el caso $k = \sqrt{3}$, valor óptimo que satisface la condición $k \geq \sqrt{3}$, procedemos a estudiar el comportamiento del método monótono para valores mayores de k . En concreto consideramos $k = 2$ y $k = 3$, y observamos cómo varía la velocidad de convergencia del método.

A continuación, analizamos el caso $k = 2$. En la situación previamente estudiada, el método monótono alcanzaba la convergencia en la iteración número 60 (véase Figura 3.11). No obstante, para $k = 2$, se observa que en la iteración 60 el método no ha logrado aún la convergencia, tal como se evidencia en la Figura 3.12. Sin embargo, al continuar con el proceso iterativo hasta la iteración 80 (Figura 3.13), el método finalmente converge. Es importante señalar que la solución obtenida coincide con la solución previa, exceptuando un pequeño error numérico consecuencia del cálculo mediante la integral de Riemman, que al aumentar los iterantes también aumenta. Una posible solución sería utilizar otro método de integración numérica, como la regla del trapecio o la regla de Simpson.

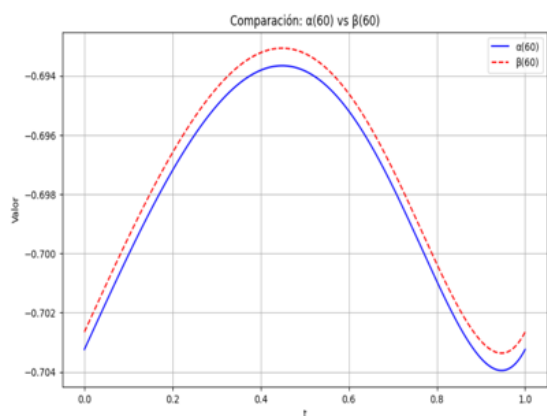


Figura 3.12: Representación de α_{60} y β_{60} con $k = 2$

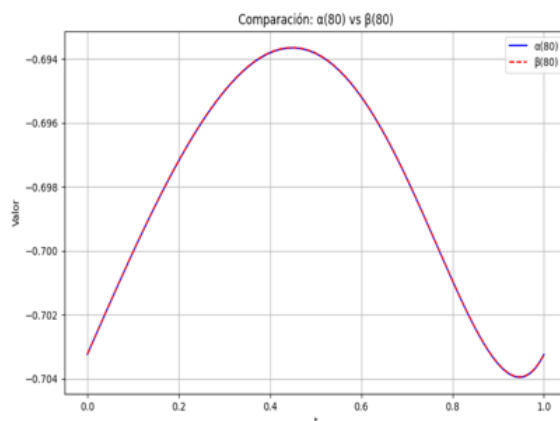


Figura 3.13: Representación de α_{80} y β_{80} con $k = 2$

Nuevamente, incrementamos el valor de k a $k = 3$ y constatamos que, en la iteración 80, donde para $k = 2$ el método ya había alcanzado la convergencia, el proceso todavía se encuentra lejos de converger, como se muestra en la Figura 3.14. De hecho, es necesario continuar con la iteración hasta aproximadamente el paso 180 para que se alcance la convergencia, tal y como se observa en la Figura 3.15. En este caso, el error cometido parece mayor que en el caso anterior.

Como se muestra tanto en este ejemplo como en el siguiente, al incrementar el valor de k el número de iteraciones necesarias para que las sucesiones converjan aumenta significativamente, lo que indica un enlentecimiento del proceso iterativo. Así pues, es fundamental obtener el valor óptimo del parámetro k para el cual se cumplen todas las hipótesis del Teorema 3.14.

Mostremos ahora un ejemplo en el que aplicamos este mismo método, pero a un problema con condiciones de contorno tipo Neumann.

Ejemplo 3.17. Vamos a centrarnos ahora en resolver el problema de segundo orden con condi-

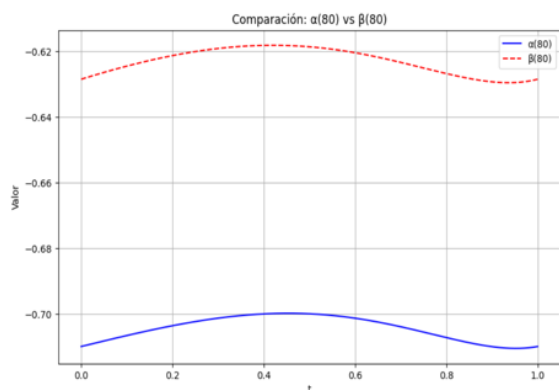


Figura 3.14: Representación de α_{80} y β_{80} con $k = 3$

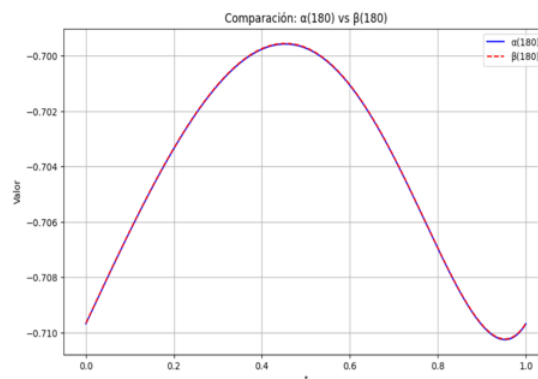


Figura 3.15: Representación de α_{180} y β_{180} con $k = 3$

ciones de contorno tipo Neumann:

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, 1] \quad u'(0) = 0, u'(1) = 0. \quad (3.26)$$

Volvamos a tomar $\alpha = -1$ y $\beta = 1$ como nuestro par de sub y sobresoluciones, que al ser constantes cumplen la condición de contorno.

Tomemos ahora una función f de forma que α y β cumplan la definición correspondiente. Una posible opción sería $f(t, x) = t^2 \cdot x^5 + x + t$ (véase la Figura 3.16), ya que:

$$f(t, -1) = -t^2 - 1 + t \leq 0 \quad \text{para todo } t \in [0, 1],$$

$$f(t, 1) = t^2 + 1 + t \geq 0 \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

De nuevo, el operador $T_n[-k^2]u(t)$ se define como

$$T_n[-k^2]u(t) = L_n u(t) - k^2 u(t) = u''(t) - k^2 u(t).$$

y, como expusimos antes, por el Teorema 3.9 sabemos que este operador va a ser inverso negativo si y solo si la función de Green asociada al problema toma solo valores menores o iguales a 0. En este caso, con las condiciones de contorno tipo Neumann, la función de Green viene dada por la siguiente expresión (véase [5, Appendix B.2]):

$$G_k(t, s) = \begin{cases} -\frac{e^{-k(s+t)} (1 + e^{2ks}) (e^{2k} + e^{2kt})}{2(-1 + e^{2k})k}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ -\frac{e^{-k(-2+s+t)} (1 + e^{2k(-1+s)}) (1 + e^{2kt})}{2(-1 + e^{2k})k}, & \text{si } 0 < t < s \leq 1. \end{cases}$$

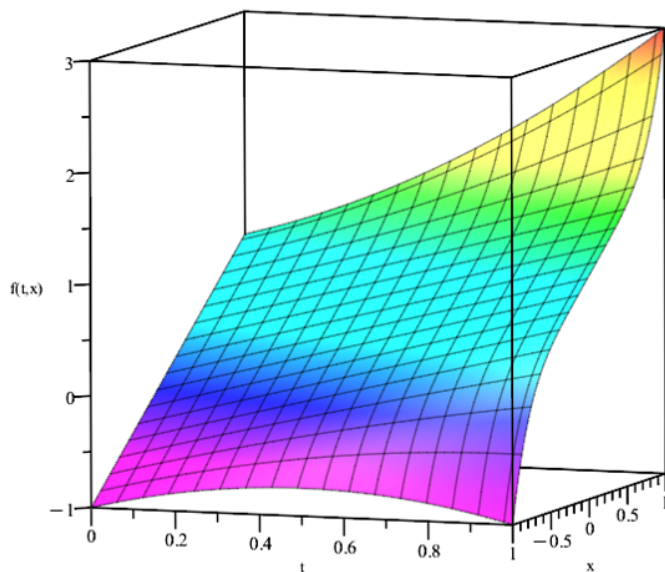


Figura 3.16: Representación de $f(t, x) = t^2 \cdot x^5 + x + t$

Esta función va a ser negativa para cualquier $k > 0$, por tanto nuestra elección para esta constante dependerá únicamente de que la función f cumpla la condición (3.14):

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(t, u) - k^2 u) = 5tu^4 + 1 - k^2 \leq 0, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [-1, 1] \Leftrightarrow k^2 \geq 6.$$

Ejecutamos el código en Python tomando $k = \sqrt{6}$ y obtenemos las Figuras 3.17 y 3.18 que representan la convergencia de $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ respectivamente.

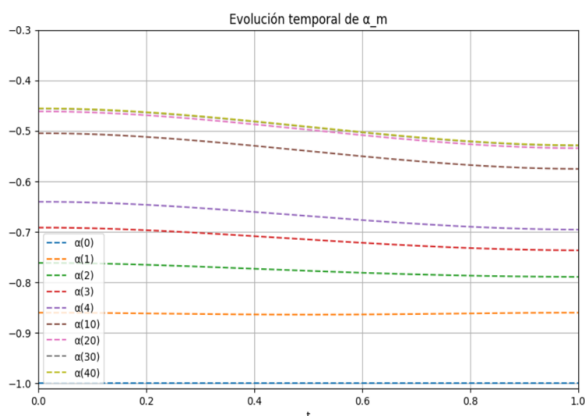


Figura 3.17: Evolución de $\{\alpha_m\}$

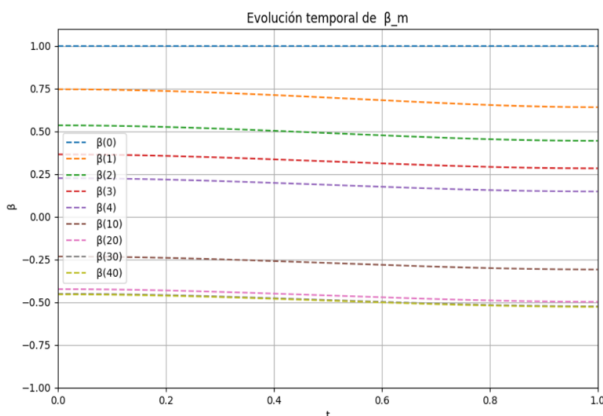


Figura 3.18: Evolución de $\{\beta_m\}$

Si vamos comparando sus iterantes a medida que aumenta el valor de m observamos que

en, aproximadamente, 45 iteraciones el método converge, obteniendo así la solución (véanse las Figuras 3.19 y 3.20).

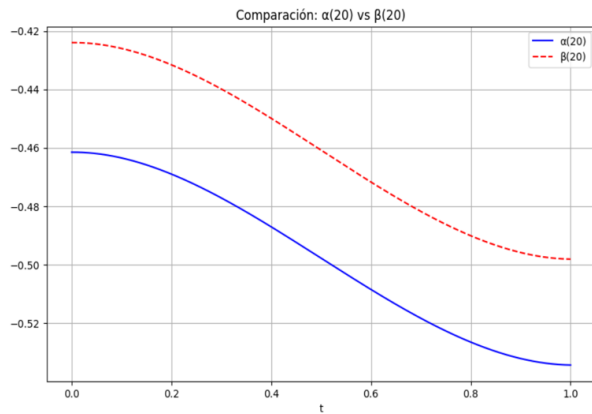


Figura 3.19: Representación de α_{20} y β_{20}

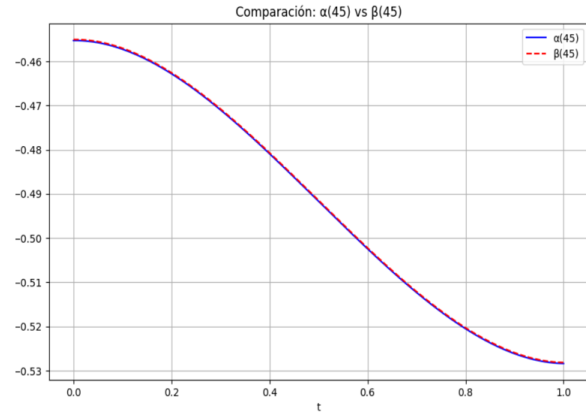


Figura 3.20: Representación de α_{45} y β_{45}

En este ejemplo parece que vuelven a coincidir las soluciones extremales en el sector $[-1, 1]$, por lo que podemos conjeturar la existencia de solución única en $[-1, 1]$. Volvamos a variar ahora el valor de la constante k , tomando $k = 3$. Es de esperar que, como en el ejemplo anterior, al aumentar k se ralentice la convergencia del método. Veamos que ocurre en las Figuras 3.21 y 3.22.

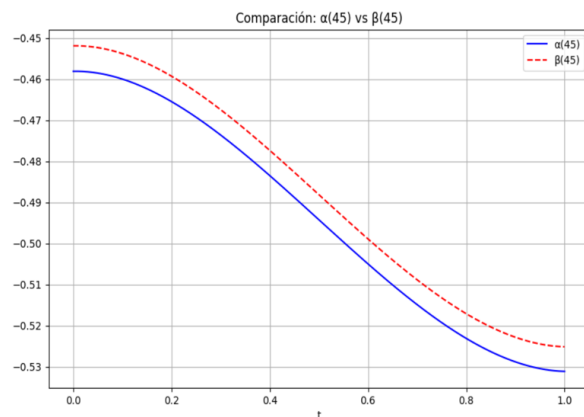


Figura 3.21: Representación de α_{45} y β_{45}

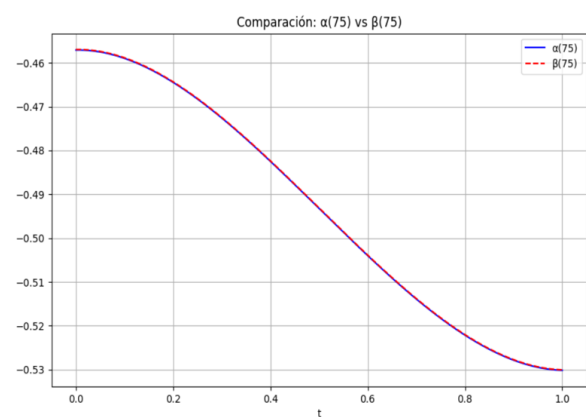


Figura 3.22: Representación de α_{75} y β_{75}

De nuevo podemos observar que no converge en el mismo iterante que para su k óptima, en nuestro caso en el iterante 45, si no que hay que continuar iterando hasta aproximadamente el 75 para obtener la solución. Por este motivo es importante utilizar el valor de k óptimo, ya que, no solo ahorraremos cálculos si no que también disminuirémos el error producido por la integración numérica.

Por último vamos a proponer un ejemplo en el que se ilustra la existencia de múltiples soluciones.

Ejemplo 3.18. Una vez más, vamos a resolver el problema de segundo orden con condiciones de contorno tipo Neumann:

$$u''(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, 1] \quad u'(0) = 0, u'(1) = 0, \quad (3.27)$$

y tomemos, por ejemplo, $f(t, x) = \frac{1}{4}(x^5 - x^3 - x \cdot t + t^2)$ (véase la Figura 3.23).

Un posible par de sub y sobresoluciones para este problema es $\alpha = -1,4$ y $\beta = 1,2$, que al ser constantes cumplen con las condiciones de contorno, y además:

$$f(t, -1,4) = \frac{1}{4}((-1,4)^5 - (-1,4)^3 + 1,4t + t^2) \leq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1],$$

y

$$f(t, 1,2) = \frac{1}{4}(1,2^5 - 1,2^3 - 1,2t + t^2) \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

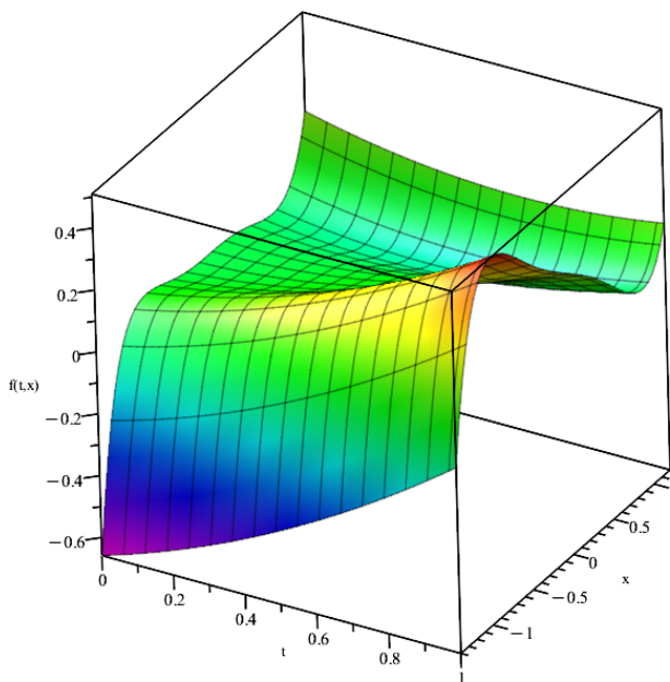


Figura 3.23: Representación de $f(t, x) = \frac{1}{4}(x^5 - x^3 - x \cdot t + t^2)$

Procedemos como en el ejemplo anterior, definiendo el operador

$$T_n[-k^2]u(t) = L_n u(t) - k^2 u(t) = u''(t) - k^2 u(t).$$

y la función de Green:

$$G_k(t, s) = \begin{cases} -\frac{e^{-k(s+t)} (1 + e^{2ks}) (e^{2k} + e^{2kt})}{2(-1 + e^{2k})k}, & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ -\frac{e^{-k(-2+s+t)} (1 + e^{2k(-1+s)}) (1 + e^{2kt})}{2(-1 + e^{2k})k}, & \text{si } 0 < t < s \leq 1, \end{cases}$$

negativa para cualquier $k > 0$. Calculemos ahora nuestra k óptima para que f cumpla la condición (3.14).

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(t, u) - k^2 u) = \frac{1}{4}(5u^4 - 3u^2 - t) - k^2 \leq 0, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [-1, 4, 1, 2] \Leftrightarrow k^2 \geq \frac{5}{4}(1, 4)^4.$$

Al aplicar el método al problema en cuestión, se obtienen las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$, representadas en las Figuras 3.24 y 3.25, respectivamente. Se observa que ambas sucesiones son convergentes; sin embargo, no convergen al mismo valor. Esta discrepancia nos indica la posible existencia de múltiples soluciones del problema dentro del intervalo $[-1, 4, 1, 2]$.

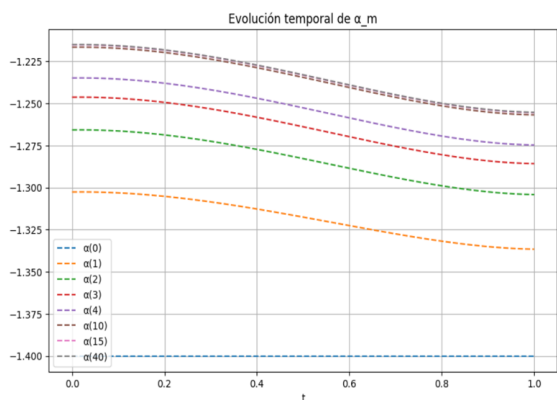


Figura 3.24: $\{\alpha_m\}$ con múltiples soluciones.

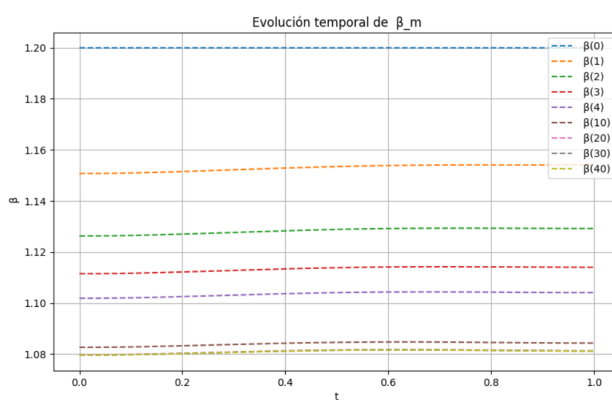
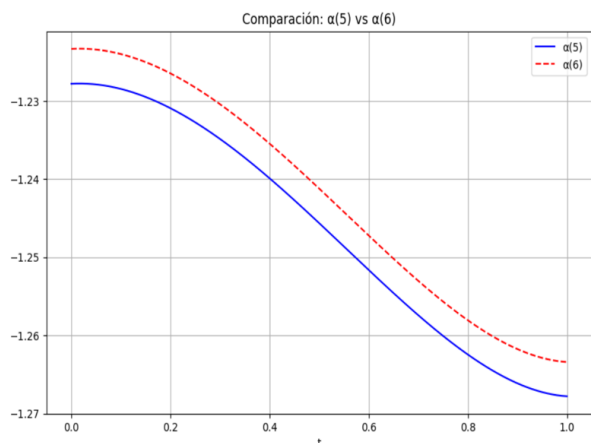
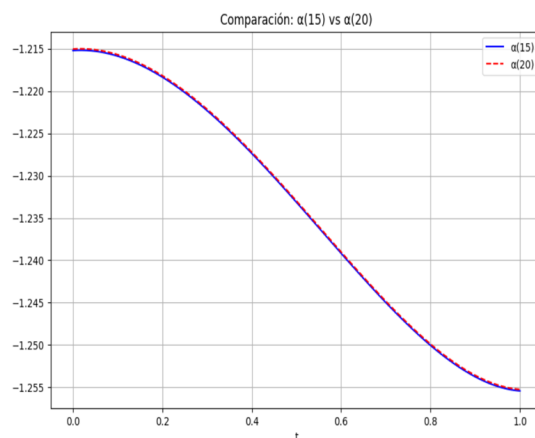
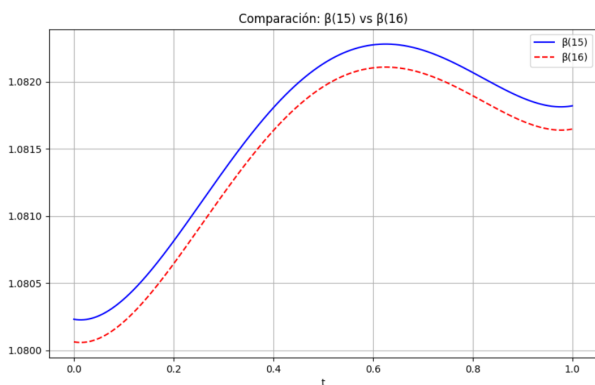
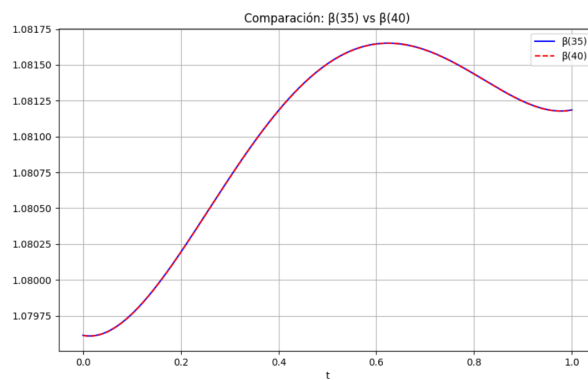


Figura 3.25: $\{\beta_m\}$ con múltiples soluciones.

Procedamos a analizar la convergencia de ambas sucesiones por separado, con el fin de identificar el iterante aproximado para el cual cada una converge. Comenzaremos con el estudio de la sucesión $\{\alpha_m\}$. Como se observa en las Figuras 3.26 y 3.27, la sucesión parece presentar un comportamiento convergente, y a partir del iterante 15 las soluciones permanecen prácticamente constantes. Esto indica que la sucesión $\{\alpha_m\}$ converge a partir del iterante 15.

Realizando el mismo análisis para la sucesión $\{\beta_m\}$, se observa en las Figuras 3.28 y 3.29 que esta también presenta un comportamiento convergente. En particular, a partir del iterante 35 los términos de la sucesión permanecen estables, lo cual indica que la convergencia se alcanza aproximadamente a partir de dicho iterante.

Figura 3.26: Comparación de α_5 y α_6 .Figura 3.27: Comparación de α_{15} y α_{20} .Figura 3.28: Comparación de β_{15} y β_{16} .Figura 3.29: Comparación de β_{35} y β_{40} .

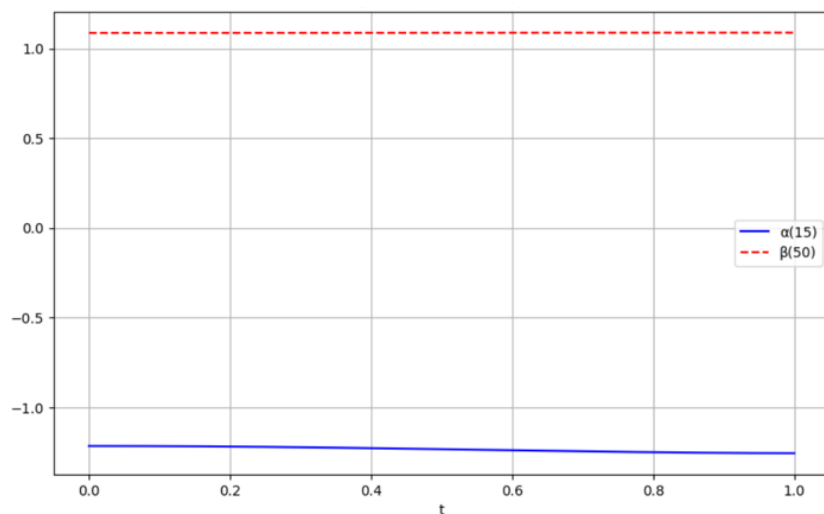
A pesar de que ambas sucesiones no convergen a la misma solución, proporcionan información relevante acerca del comportamiento del método aplicado. La convergencia de la sucesión $\{\alpha_m\}$ muestra la existencia de una solución minimal del problema, mientras que la convergencia de $\{\beta_m\}$ indica la existencia de una solución maximal. Además, se puede concluir que todas las soluciones del problema en el intervalo $[-1, 4, 1, 2]$ se encuentran comprendidas entre los valores alcanzados por α_{15} y β_{35} (véase la Figura 3.30).

Llegados a este punto, surge de forma natural la pregunta de si es posible obtener más información de las distintas soluciones del problema. Obsérvese que los valores $\alpha = 1$ y $\beta = -1$ también satisfacen las definiciones de subsolución y sobresolución, respectivamente:

$$f(t, 1) = -t + t^2 \leq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1],$$

y

$$f(t, -1) = t + t^2 \geq 0 \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Figura 3.30: Comparación de α_{15} y β_{35}

Procedamos ahora a analizar las soluciones que se encuentran en distintos subintervalos de $[-1,4, 1,2]$, utilizando diferentes pares de sub y sobresoluciones. En primer lugar, consideraremos el intervalo definido por $\alpha = -1,4$ y $\beta = -1$, donde $\alpha < \beta$. A continuación analizaremos el intervalo $\alpha = 1$ y $\beta = 1,2$, que también satisface la condición $\alpha < \beta$. Por último, estudiaremos el caso en el que el orden se invierte, tomando $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, es decir, el caso en que $\alpha > \beta$. Cada uno de estos pares permite explorar la existencia de soluciones en diferentes regiones del intervalo $[-1,4, 1,2]$.

CASO 1 ($\alpha = -1,4$, $\beta = -1$):

Se mantiene el mismo operador $T_n[-k^2]u(t) = L_n u(t) - k^2 u(t) = u''(t) - k^2 u(t)$ y, en consecuencia, la misma función de Green, negativa para todo k . También se mantiene la misma elección óptima de k :

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(t, u) - k^2 u) = \frac{1}{4}(5u^4 - 3u^2 - t) - k^2 \leq 0, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [-1,4, -1] \Leftrightarrow k^2 \geq \frac{5}{4}(1,4)^4.$$

Al aplicar el método monótono en el subintervalo considerado, parece nuevamente que las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ convergen, como se muestra en las Figuras 3.31 y 3.32. Esta convergencia nos permite deducir la existencia de una solución del problema en dicho subintervalo.

Nótese que, en este intervalo, ambas sucesiones parecen converger a una misma solución. Esta observación se confirma al comparar sus comportamientos en las Figuras 3.33 y 3.34, donde se aprecia claramente que ambas convergen a la misma solución. Por tanto, podemos conjeturar que en este subintervalo existe una única solución del problema.

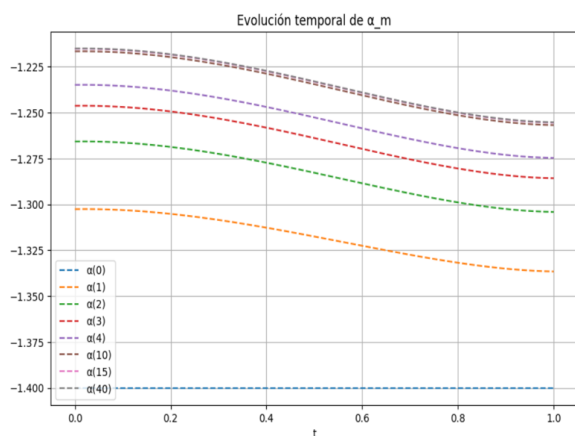


Figura 3.31: Convergencia de $\{\alpha_m\}$ en $[-1, 4, -1]$.

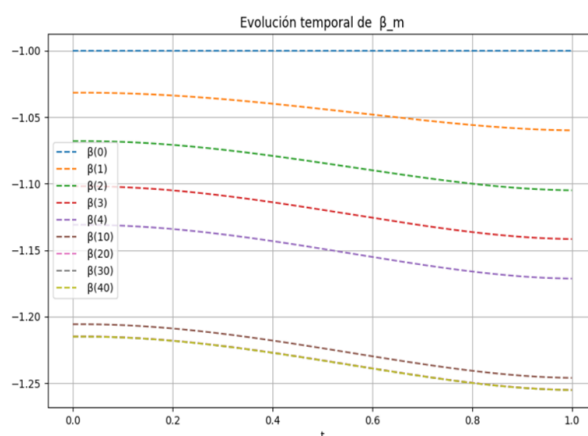


Figura 3.32: Convergencia de $\{\beta_m\}$ en $[-1, 4, -1]$.

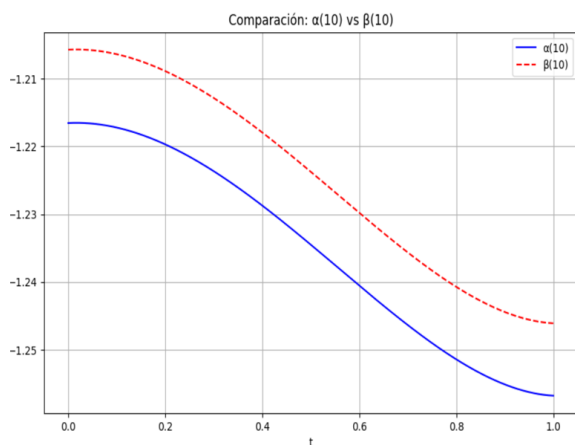


Figura 3.33: Comparación de α_{10} y β_{10} .

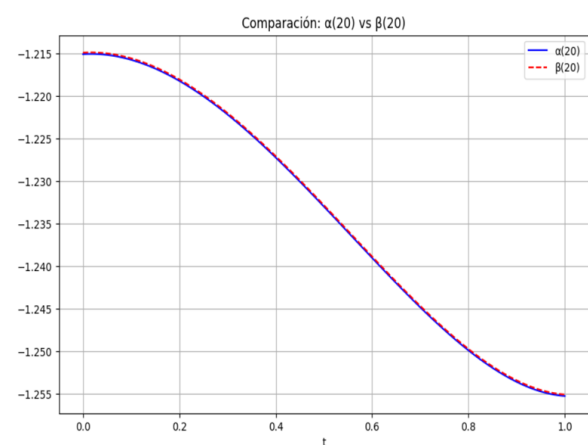


Figura 3.34: Comparación de α_{20} y β_{20} .

Obsérvese que la solución obtenida en este subintervalo coincide con la solución a la que convergía la sucesión $\{\alpha_m\}$ en el caso general (véase Figura 3.27). Esta coincidencia se explica por el hecho de que la solución encontrada en este subintervalo corresponde a la solución mínima del problema en el intervalo original $[-1, 4, 1, 2]$.

CASO 2 ($\alpha = 1$ y $\beta = 1, 2$):

De nuevo contamos con el mismo operador y la misma función de Green, pero en este caso cambiamos a elección óptima de k :

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(t, u) - k^2 u) = \frac{1}{4}(5u^4 - 3u^2 - t) - k^2 \leq 0, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [1, 1, 2] \Leftrightarrow k^2 \geq \frac{5}{4}(1, 2)^4.$$

En este segundo subintervalo, la aplicación del método monótono da lugar nuevamente a

sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ que muestran un comportamiento convergente y permite afirmar la existencia de solución (véanse las Figuras 3.35 y 3.36).

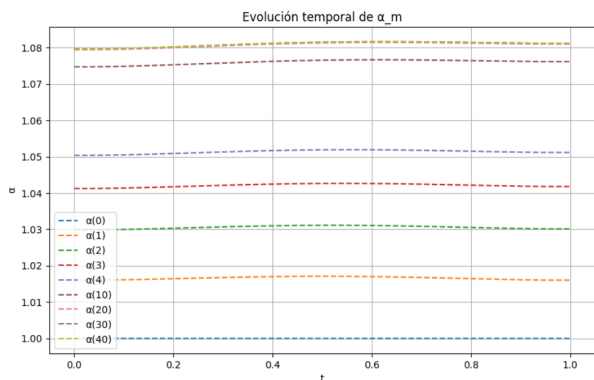


Figura 3.35: Convergencia de $\{\alpha_m\}$ en $[1, 1,2]$.

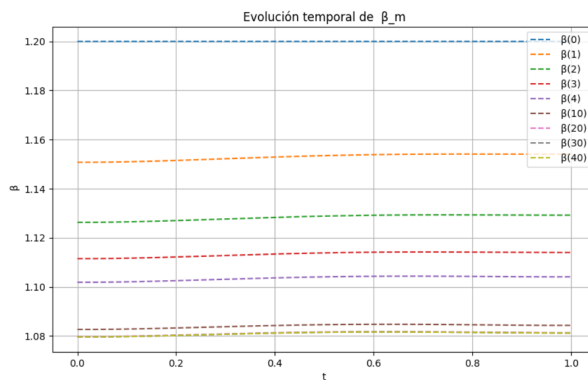


Figura 3.36: Convergencia de $\{\beta_m\}$ en $[1, 1,2]$.

Volvemos a encontrarnos en un subintervalo que parece tener unicidad de solución, dicha solución se puede observar en la Figura 3.38.

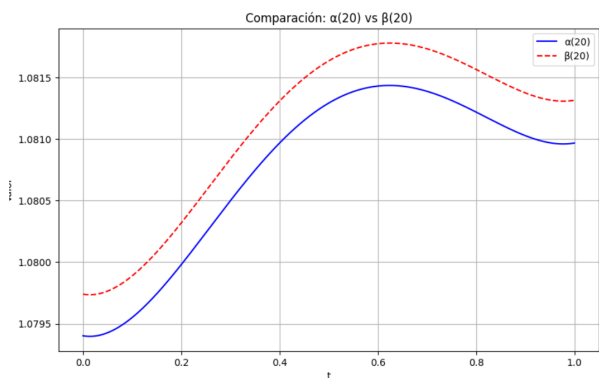


Figura 3.37: Comparación de α_{20} y β_{20} .

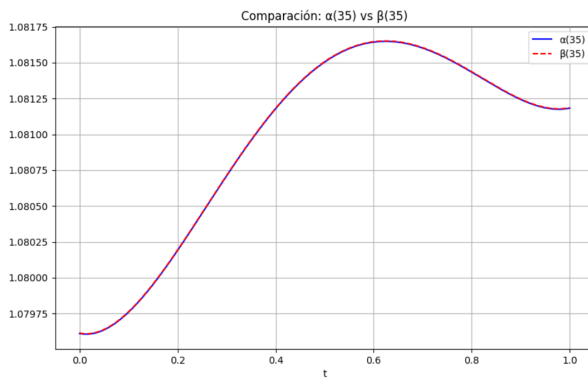


Figura 3.38: Comparación de α_{35} y β_{35} .

La solución representada en la Figura 3.38 es la solución maximal del problema en el intervalo $[-1,4, 1,2]$, ya que parece coincidir con la representada en la Figura 3.29.

CASO 3 ($\alpha = 1, \beta = -1$):

Nos encontramos en la situación $\alpha > \beta$ y, por tanto, necesitamos aplicar la Observación 3.15. Para ello, definimos el siguiente operador:

$$T_n[k^2]u(t) = L_n u(t) + k^2 u(t) = u''(t) + k^2 u(t).$$

Para poder aplicar el método necesitamos que dicho operador sea inverso positivo, y por la Proposición 3.10 necesitamos encontrar un $k > 0$ para el cual la función de Green tome solo valores

mayores o iguales a 0. En [5, Appendix B.2] se obtiene que la función de Green correspondiente en este caso es la siguiente:

$$G(t, s, k) = \begin{cases} \frac{\cos(ms) \cos(m - mt)}{m \sin(m)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{\cos(m - ms) \cos(mt)}{m \sin(m)} & \text{si } 0 < t < s \leq 1. \end{cases}$$

Esta función de Green es positiva si y solo si $k \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Además, necesitamos buscar un k para que la función f cumpla la condición (3.20), con $M = k^2$. Veamos para que valores de k se cumple:

$$\frac{\partial}{\partial u} (f(t, u) - k^2 u) = \frac{1}{4}(5u^4 - 3u^2 - t) + k^2 \geq 0, \quad t \in [0, 1], \quad u \in [-1, 1] \Leftrightarrow k^2 \geq 1.$$

Tomemos $k = 1$ que cumple tanto la condición, como que la función de Green sea positiva.

Ahora, veamos como se comportan las sucesiones $\{\alpha_m\}$ y $\{\beta_m\}$ en este subintervalo (véanse las Figuras 3.39 y 3.40).

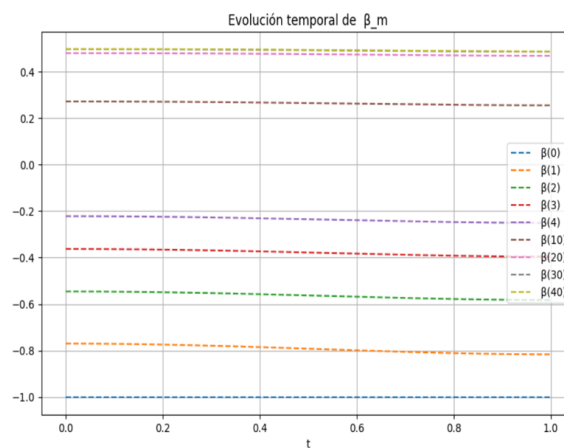
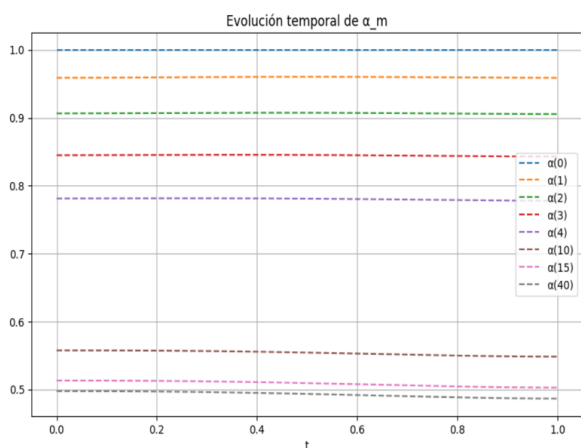
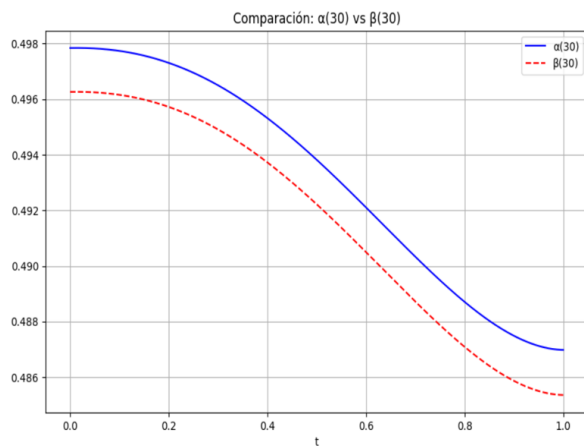
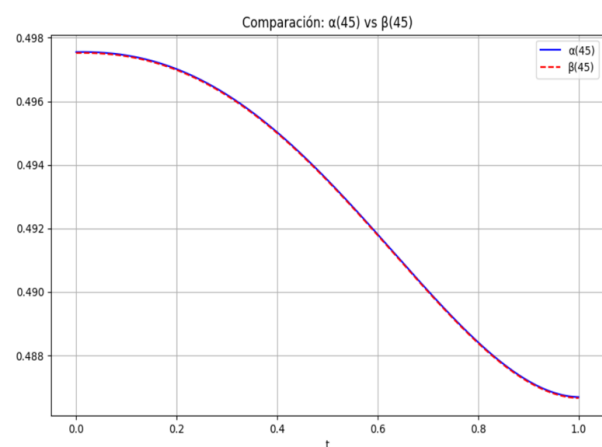


Figura 3.39: Convergencia de $\{\alpha_m\}$ en $[-1, 1]$. Figura 3.40: Convergencia de $\{\beta_m\}$ en $[-1, 1]$.

Podemos observar que ambas sucesiones convergen de forma monótona, aunque en este caso $\{\alpha_m\}$ es decreciente y $\{\beta_m\}$ creciente. Además el intervalo parece tener solución única ya que ambas convergen a la misma solución (véase la Figura 3.42).

Vimos que en cada uno de los tres subintervalos existe una solución y que además esta parece ser única en dicho subintervalo. Por tanto podemos afirmar que esas son tres soluciones distintas del problema inicial en el intervalo $[-1, 4, 1, 2]$, que, como vimos anteriormente, tiene múltiples soluciones.

Figura 3.41: Comparación de α_{30} y β_{30} .Figura 3.42: Comparación de α_{45} y β_{45} .

Nótese que no podemos afirmar que esas sean las tres únicas soluciones del problema, ya que puede existir alguna que no se encuentre en ninguno de los tres subintervalos pero si en el inicial.

Anexo I

Método monótono en Python

En el siguiente anexo se proporciona una adaptación del código utilizado para la resolución de problemas mediante el método monótono realizados en otros lenguajes de programación (véase [Anexo 1][1])

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import math
4
5 # Parámetros
6 n1 = 800 # número de nodos en el espacio
7 N_steps = 60 # número de pasos temporales
8
9
10 # Definición de funciones
11 def f(t, u):
12     return t * u**3 + t**5
13
14 # Parámetros m de la función G
15 m=math.sqrt(3)
16
17 # Función de Green G(t, s, m)
18 def G(t, s, m):
19
20     if 0 <= s <= t <= 1:
```

```

21     term1 = np.exp(m + m*s - m*t)
22     term2 = np.exp(-m*s + m*t)
23     numerator = term1 + term2
24     denominator = 2*m-2*np.exp(m)*m
25     return (numerator / denominator).real
26
27     elif 0 <= t < s <= 1:
28         term1 = np.exp(m*s - m*t)
29         term2 = np.exp(m - m*s + m*t)
30         numerator = term1 + term2
31         denominator = 2*m-2*np.exp(m)*m
32         return (numerator / denominator).real
33
34     else:
35         return 0
36
37     # Discretización del espacio y tiempo
38     x_vals = np.linspace(0, 1, n1 + 1)
39     dt = 1 / N_steps
40
41     # Inicialización: x[n][j] representa x en paso n y posición j
42     alpha=-1
43     x = np.full((N_steps + 1, n1 + 1), alpha, dtype=float)
44
45     # Evolución temporal
46     for n in range(1, N_steps + 1):
47         for k_ in range(n1 + 1):
48             t_k = k_ / n1
49             acc = 0
50             for j in range(n1 + 1):
51                 s_j = j / n1
52                 acc += G(t_k, s_j, m) * (f(s_j, x[n - 1, j])-m**2*x[n - 1, j])
53             z=(1/n1)*acc
54             x[n, k_] = z
55
56
57     # Gráficos
58     def plot_alpha(n_list, x_array):

```

```
59 plt.figure(figsize=(10, 6))
60 for n in n_list:
61     plt.plot(x_vals, x_array[n], label=f"({n})", linestyle='--')
62 plt.ylim(-1.01, -0.5)
63 plt.xlabel("t")
64 plt.ylabel("")
65 plt.title("Evolución temporal de  $m$ ")
66 plt.legend()
67 plt.grid(True)
68 plt.show()
69
70 # Dibujar los distintos pasos
71 plot_alpha([0, 1, 2, 3, 4, 10, 20, 40, 50, 60], x)
72 #beta
73 y_vals = np.linspace(0, 1, n1 + 1)
74 dt = 1 / N_steps
75 beta = 1
76 y = np.full((N_steps + 1, n1 + 1), beta, dtype=float)
77
78
79 # Evolución temporal
80 for n in range(1, N_steps + 1):
81     for k_ in range(n1 + 1):
82         t_k = k_ / n1
83         acc = 0
84         for j in range(n1 + 1):
85             s_j = j / n1
86             acc += G(t_k, s_j, m) * (f(s_j, y[n - 1, j]) - m**2*y[n - 1, j])
87         y[n, k_] = (1 / n1) * acc
88
89 # Gráficos
90 def plot_beta(n_list, y_array):
91     plt.figure(figsize=(10, 6))
92     for n in n_list:
93         plt.plot(y_vals, y_array[n], label=f"({n})", linestyle='--')
94     plt.ylim(-1, 1.1)
95     plt.xlabel("t")
96     plt.ylabel(" ")
```

```

97     plt.title("Evolución temporal de  $m$ ")
98     plt.legend()
99     plt.grid(True)
100    plt.show()
101
102    # Graficar la evolución
103    plot_beta([0, 1, 2, 3, 4, 10, 20, 40, 50, 60], y)
104    #Dibujar iteraciones concretas
105    def plot_alpha_beta(alpha_array, beta_array, alpha_n, beta_n, x_vals):
106        plt.figure(figsize=(10, 6))
107        plt.plot(x_vals, alpha_array[alpha_n], label=f"({alpha_n})", color='blue')
108        plt.plot(x_vals, beta_array[beta_n], label=f"({beta_n})", color='red', linestyle='--')
109
110
111        plt.xlabel("t")
112        plt.ylabel("Valor")
113        plt.title(f"Comparación:  $\alpha$  vs  $\beta$ ")
114        plt.legend()
115        plt.grid(True)
116        plt.show()
117        plot_alpha_beta(x, y, 20, 20, x_vals)
118        plot_alpha_beta(x, y, 30, 30, x_vals)
119        plot_alpha_beta(x, y, 40, 40, x_vals)
120        plot_alpha_beta(x, y, 60, 60, x_vals)

```

El código expuesto anteriormente es el utilizado para nuestro Ejemplo 3.16. Para cambiar de problema, simplemente sería necesario editar la función de Green, el valor de k (en el código m), la función f y las correspondientes sub y sobresolución.

Además para el caso $\alpha \geq \beta$ también necesitaríamos editar el cálculo de la evolución temporal de las sucesiones al siguiente:

```

1    # Evolución temporal para alpha
2    for n in range(1, N_steps + 1):
3        for k_ in range(n1 + 1):
4            t_k = k_ / n1
5            acc = 0
6            for j in range(n1 + 1):

```

```
7         s_j = j / n1
8         acc += G(t_k, s_j, m) * (f(s_j, x[n - 1, j])+m**2*x[n - 1, j])
9         z=(1/n1)*acc
10        print("z=",z)
11        x[n, k_] = z
12
13
14 # Evolución temporal para beta
15 for n in range(1, N_steps + 1):
16     for k_ in range(n1 + 1):
17         t_k = k_ / n1
18         acc = 0
19         for j in range(n1 + 1):
20             s_j = j / n1
21             acc += G(t_k, s_j, m) * (f(s_j, y[n - 1, j])+m**2*y[n - 1, j])
22         y[n, k_] = (1 / n1) * acc
```

Bibliografía

- [1] Álvarez Costas, C., (2023), *Modelización matemática de puentes es suspensión. Trabajo de fin de Grado*. Universidade de Santiago de compostela.
- [2] Amann, H., (1972), *On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces*. J. Funct. Anal. **11**, 346–384.
- [3] Arrieta, F., Scazzola, L., (2021), *Teoremas del punto fijo*. <https://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/AF/34.%20Teoremas%20del%20Punto%20Fijo%20-%20Arrieta%20&%20Scazzola.pdf>, (visitado el 12 de abril de 2025).
- [4] Appell, Jürgen, Zabrejko, Petr., P., (1990), *Nonlinear superposition operators*. Cambridge Tracts in Math, **95** Cambridge University Press, Cambridge, viii+311 pp.
- [5] Cabada, A., (2014), *Green's functions in the theory of ordinary differential equations*. SpringerBriefs Math. Springer, New York, xiv+168 pp.
- [6] Cañada, A., Drabek, P., Fonda, A., (2004), *Handbook of Differential equations: Ordinary Differential equations (Volume 1)*. North-Holland.
- [7] Cárdenas Álzate, P.P., Cardona Toro, J.G., Rojas Duque, L.M., (2012), *Aplicación del teorema de Leray-Schauder a un problema de borde*. Departamento de Matemáticas, Universidad tecnológica de Pereira, Colombia.
- [8] Chang, K.C., (1983), *Variational methods and sub- and super-solutions*. Scientia Sinica (Ser. A) **26**, 1256–1265.
- [9] Chang, K.C., (1983), *A variant mountain pass lemma*. Scientia Sinica (Ser. A) **26**, 1241–1255.
- [10] Cid, J. A., (2004), *On extremal solutions in Schauder's theorem with applications to differential equations*. Bull. Belgian Math. Soc. **11**, 15-20.
- [11] De Coster, C., Habets, P., (2006), *Mathematics in Science and Engineering 205 (Eds.) - Two-Point Boundary Value Problems Lower and Upper Solutions*. Elsevier Science, 31-37.

- [12] Climent Vidal, J., (2010), *Teoría de conjuntos*. Universidad de Valencia, 111-123. <https://www.uv.es/~jkliment/> (visitado el 20 de mayo de 2025)
- [13] de Figueiredo, D. G., Solimini, S., (1984), *A variational approach to superlinear elliptic problems*. Comm. Partial Differential Equations **9**, 699–717.
- [14] Galaz Fontes, F., (2021), *Apuntes del curso de Análisis II, Clase 22*. CIMAT. <https://www.cimat.mx/~galaz/An2-21/clase22-An2-21.pdf>, (visitado el 28 de abril de 2025).
- [15] Habets, P., Pouso, R., (2003), *Examples of non existence of solution in presence of upper and lower solutions*. ANZIAM J. **44**, 591–594.
- [16] Izquierdo Buenrostro, G. N., (s.f), *Derivadas Débiles y Espacios de Sobolev en la recta*. Universidad Autónoma Metropolitana, Campus Iztapalapa. <http://mat.izt.uam.mx/mat/documentos/coloquios/6to%20Coloquio/Notas%20Coloquio/derivadas%20de%CC%81biles.pdf>, (visitado el 7 de abril de 2025).
- [17] Ladde, G. S., Lakshmikantham, V., Vatsala, A. S., (1985), *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*. Pitman, Boston.
- [18] Marrero, I., (2024), *Medida e integración- Tema 3: Espacios L^p* . Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna. [https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/22127/mod_resource/content/6/3.%20Espacios%20Lp.pdf](https://campusvirtual ull.es/ocw/pluginfile.php/22127/mod_resource/content/6/3.%20Espacios%20Lp.pdf), (visitado el 3 de mayo de 2025).
- [19] Maximenko, E., (s.f), *Derivadas de Dini*. Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional de México. https://esfm.egormaximenko.com/analysis/Dini_derivatives_es.pdf, (visitado el 6 de abril de 2025).
- [20] Müller, M., (1926), *Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Math. Z. **26**, 619–649.
- [21] Perron, O., (1915), *Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$* . Math. Ann. **76**, 471-484.
- [22] Picard, E., (1890), *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, J. Math. **6**, 145–210.
- [23] Picard, E., (1893), *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*, J. Math. **9**, 217–271.
- [24] Ramírez, A., (s.f), *Apuntes de Análisis Real – Curso de Postgrado, Parte 9*, Pontificia Universidad Católica de Chile. <https://www.mat.uc.cl/~aramirez/clases/analisis-postgrado-07-1/parte9.pdf>, (Visitado el 27 de junio de 2025).

-
- [25] Scorza Dragoni, G., (1931), *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine*. Giornale Mat. (Battaglini) **69**, 77–112.
- [26] Scorza Dragoni, G., (1931), *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*. Math. Ann. **105**, 133–143.