FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución ás ecuacións diferenciais de orde fraccionaria

Iago Villanueva Doforno

Xullo, 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

Introdución ás ecuacións diferenciais de orde fraccionaria

Iago Villanueva Doforno

Xullo. 2024

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Análise matemática
Título: Introdución ás ecuacións diferenciais de orde fraccionaria
Breve descrición do contido
Introdución ao cálculo fraccionario. Diferentes tipos de integral e derivadas fraccionarias. Ecuacións diferenciais lineais de orde fraccionario. A ecuación diferencial loxística fraccionaria. Outras ecuacións non lineais.
Recomendacións
Outras observacións

Índice

Resumo **IX**

Introdución **XI**

1. Breve disertación sobre a historia do cálculo fraccionario **1**

1.1. Nacemento do cálculo fraccionario 1

1.2. Século XVIII 2

1.3. Século XX 4

2. Preliminares **7**

2.1. A función Gamma 7

2.1.1. Definición 7

2.1.2. Propiedades 8

2.1.3. Meroforfía e residuos 9

2.1.4. Función poligamma 10

2.2. A ecuación integral de Abel 10

2.2.1. Resultados previos e ecuación a resolver 10

2.2.2. Existencia e unicidade de solución 11

2.3. Función de Mittag-Leffler 12

2.3.1. Definición e algunhas propiedades 12

2.3.2. Casos particulares 13

3. Calculo fraccionario **15**

3.1. Integración fraccionaria 15

3.1.1. Definición de Riemann-Liouville 15

3.1.2. Propiedades e resultados 16

3.2. Derivación fraccionaria 17

3.2.1. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville 17

3.2.2. Derivada fraccionaria de Marchaud 20

3.2.3. Derivada fraccionaria de Caputo 20

3.2.4. Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio 21

3.2.5. Xeneralización de Atangana-Baleanu 23

3.3. Relación entre a integral e derivada fraccionarias de Riemann-Liouville 23

4. Ecuacións diferenciais de orde fraccionaria. **27**

4.1. Derivada de Caputo Fabrizio 28

4.1.1. Ecuacións diferenciais lineais 28

4.1.2. Ecuacións diferenciais non lineais 29

4.2. Estabilidade de Hyers-Ulam 29

4.2.1. Ecuacións diferenciais lineais 31

4.2.2. Ecuacións diferenciais non lineais 32

4.3. Derivada de Caputo 33

4.3.1. Solucións atractoras 34

5. Proposta de resolución práctica **37**

5.1. Metodoloxía 37

5.2. Exemplificación 39

6. Aplicación práctica e utilidade **43**

A. Código da Figura 3.1 **47**

B. Código da figura 2.1 **49**

Bibliografía **51**

Resumo

Este traballo fai un percorrido polo cálculo fraccionando, pormenorizando as diversas definicións de derivadas fraccionarias e os seus usos. Por outra parte introdúcense resultados correspondentes ás ecuacións diferenciais de orde fraccionaria, ás súas aplicacións e á súa utilidade.

Abstract

This dissertation is dedicated to an introduction to calculus of fractional order, detailing the various definitions of fractional derivatives and their uses. On the other hand, results corresponding to differential equations of fractional order are introduced as well as some applications and their utility.

Introdución

O cálculo fraccionario é unha extensión do cálculo clásico que permite operar con derivadas e integrais de orde non enteira. Aínda que os seus inicios remóntanse ao século XVII, non foi ata o século XIX que se desenvolveu de forma máis rigorosa e sistemática. Este traballo céntrase na introdución e desenvolvemento das ecuacións diferenciais de orde fraccionaria, unha área de estudo que combina técnicas e conceptos de análise matemática cun enfoque innovador e xeneralizado.

A primeira parte do traballo ofrece unha visión histórica do cálculo fraccionario, destacando as contribucións de figuras clave como Leibniz, Euler, Liouville e Caputo. A continuación, preséntanse os fundamentos teóricos, incluíndo as diferentes definicións de derivadas e integrais fraccionarias. O estudo avanza cara á formulación e resolución de ecuacións diferenciais de orde fraccionaria, tanto lineais como non lineais, e explora as súas aplicacións prácticas en diversos campos científicos.

Capítulo 1

Breve disertación sobre a historia do cálculo fraccionario

1.1. Nacemento do cálculo fraccionario

A historia do cálculo fraccionario comezou de maneira máis ben tardía en comparación con outras disciplinas destacadas das matemáticas e mesmo da análise. En particular, podemos establecer como data de nacemento da idea o 1695, ano no que Leibniz publica coa notación $\frac{d^n y}{dx^n}$ referindo á derivada de n da función y.

Seguidamente daríase un intercambio postal entre Guillaume François Antoine de L'Hôpital e o propio Leibniz, onde o primeiro comezaría postulando a seguinte pregunta:

Que pasaría se $n = 1/2$?

Ao que o segundo respondería o seguinte:

" Isto conduciría a unha paradoxa da que un día extraeranse consecuencias útiles ".

Dous anos despois, en 1697, Leibniz fará referencia ao produto de Wallis para π; este afirmará que pode utilizar o cálculo diferencial para obter o mesmo resultado, empregando $d^{\frac{1}{2}}$ como a derivada de orde $\frac{1}{2}$.

No século XVIII non haberá apenas avances nesta área, o único que pode ser destacable é a publicación en 1730 dun texto de Leonard Euler acerca de interpolacións entre órdes enteiras dunha derivada.

1.2. Século XVIII

Unha vez entrado o século XIX, en particular no ano 1812, Laplace definiría unha derivada fraccional; non obstante, a primeira discusión ao respecto chegaría no ano 1819 da man de S.F.Lacroix que a consideraría como un simple exercicio matemático que tan só ocuparía dous de setecentas páxinas dun texto que publicou. Este partiría de $y = x^m$ con $m \in \mathbb{N}$ e calcularía a derivada n-ésima:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} \cdot x^{(m-n)}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} \cdot x^{m-n}$$

Agora substituímos $n = \frac{1}{2}$ e $m = a$, e obtemos:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} \cdot x^{a-\frac{1}{2}}$$

Intercambiando, finalmente $y = x$, chegamos ao seguinte:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

A continuación, en 1822, Fourier as mencionaría sen maior trascendendencia; e non sería ata 1823 que Niels Henrik Abel aplicaría o cálculo fraccionario na resolución integral do problema da tautócrona. Este problema tiña como obxectivo achar a forma da curva sobre un plano vertical, de tal forma que un obxecto ao escorregar por ela sen rozamento chegue ao final nun tempo que sexa independente da posición inicial que ocupaba.

A idea de Abel resoaría na cabeza de Liouville, facendo que este publicara tres memorias en 1832 e algunha outra en 1855 acerca do tema. A este debémoslle en gran medida a primeira definición formal e lóxica da derivada fraccionaria, en particular:

$$\frac{d^v}{dx^v} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^v e^{a_n x}, \quad \text{Sendo } v \text{ un valor arbitrario}$$

Seguidamente, presentaría o coñecido como "segundo método de Liouville", aplicado a funciones da forma x^{-a} con $(a > 0)$. Neste chegaría ao que se presenta a continución:

$$\frac{d^v}{dx^v} \cdot x^{-a} = \frac{(-1)^v \cdot \Gamma(a+v)}{\Gamma(a)} \cdot x^{-a-v}$$

Aquí, o termo $(-1)^n$ suxire a inclusión dos números complexos. Concretamente, sería o propio Liouville o que os consideraría e aplicase o cálculo fraccionario á teoría do potencial; intentando, así, a resolución de ecuacións diferenciais.

Así e todo, entre os anos 1835 e 1850 Peacock e outros investigadores atoparían certas controversias nas definicións presentadas. Algún destes, como A. Morgan, defenderon que ambas definicións podían ser correctas e pertencer a unha máis xeral.

Sería W. Center o que observaría que as discrepancias entre ambas correntes centrábanse no resultado da derivada fraccionaria dunha función constante. A corrente Peacock-Lacroix mantiña a idea de que o resultado tiña que ser distinto de cero, salvo que a constante fora o propio cero. Pola outra banda, a corrente Kelland-Liouville aseguraba que o resultado debía de ser igual a 0, posto que $\Gamma(0) = \infty$, e consecuentemente $\frac{1}{\Gamma(0)} = 0$.

Así, Center sería quen calcularía o valor de $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \cdot x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$, mais non coincidiría con Liouville na súa segunda definición. Isto levaría ao primeiro a recitar a seguinte afirmación: .A cuestión é sobre a identidade de $\frac{d^v}{dx^v} \cdot x^0$. No momento que isto sexa determinado, nós seremos quen de determinar ao mesmo tempo cal é o sistema correcto".

En 1847, B. Riemann, ao tempo que era estudante, desenvolvería unha teoría de operacións fraccionais que sería publicada tra-la súa morte en 1876. Nesta chegaba ao seguinte resultado:

$$\frac{d^{-v}}{dx^{-v}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \cdot \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t)dt + \psi(x)$$

En referencia a este resultado, A.Cayley pronunciaríase sobre a función $\psi(x)$. O matemático británico diría que esta é dunha natureza indeterminada, pois contén unha cantidade infinita de constantes escollidas de forma arbitraria.

Cara a segunda metade do século, en 1869, N. Y. Sonin traballaría na definición denominada de Riemann-Liouville e "Na diferenciación con índice arbitrario". Por outra parte, Letnikov, escribiría catro textos que versaban sobre a mesma idea recollidos baixo o título: Ünha explicación dos principais conceptos da teoría da diferenciacioón de índices arbitrarios". Ao redor destes anos, a definición da integral fraccionaria que traballou o último autor mencionado tamén vería a luz e sería coñecida como a integral fraccionaria de Gründwald-Letnikov.

1.3. Século XX

H. Laurent marcaría o derradeiro fito no desenvolvemento desta área do cálculo, posto que en 1884 publicaría escritos que contribuirían de maneira substancial ao cálculo de derivadas de orde arbitraria. A súa teoría, analizada dende o plano complexo, sería a primeira en ser aceptable para moitos matemáticos modernos.

Anos máis tarde, en 1936, H. T. Davis utlizaría unha novedosa notación para referirse á integral e derivada fraccionaria:

1. $\mathbf{{}^{c}D_{x}^{-v}f(x)}$: A integral de orde $v \geq 0$ de $f(x)$ ao longo de $\mathbb{R}$ con c e x como límites de integración.
2. $\mathbf{{}^{c}D_{x}^{v}f(x)}$: Refire á diferenciación de orde $v \geq 0$.

Retomando a Laurent, este partiría da fórmula de Cauchy:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Onde $\mathcal{C}$ fai referencia ao contorno de integración, agora coñecido como Lazo de Laurent.

Observación 1.1. O lazo de Laurent refire á representación que é posible observar na Figura 1.1.

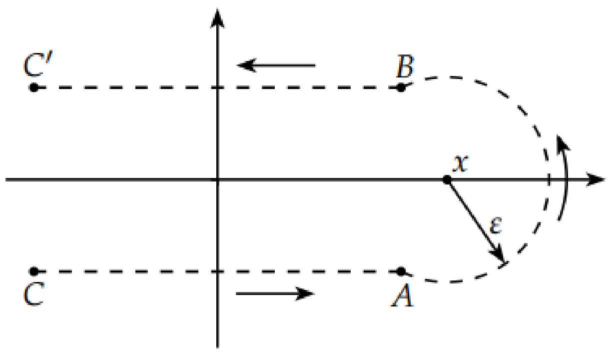

Figura 1.1: Lazo de Laurent

Este chegaría á seguinte definición de integración de orde arbitraria, escrita coa notación previamente introducida:

$${}^{c}D_{x}^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{c}^{x} (x-t)^{v-1} f(t) dt$$

A derradeira expresión denomínase como "Fórmula de Riemann Lioville", posto que se $c = 0$ ou $c = -\infty$ obtemos as expresións obtidas por Riemann e Liouville, respectivamente. A única diferencia é que Laurent non considera a función $\psi(x)$ que Riemann si que considerou na súa definición.

En 1917 , H. Weyl presentou unha definición de integral fraccionaria para funcións periódicas:

$$ {}^{x}W_{\infty}^{-p} f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{p-1} f(t) dt, $$

sendo $p \in \mathbb{C} \quad Re(p) > 0$

En 1936, M. Riesz trataría a integral fraccionaria de variables múltiples como un operador de tipo potencial.

En España, D.Maravall sería o primeiro en publicar sobre o cálculo fraccionario. Nunha serie de textos, presentados a partir de 1959, sobre enxeñería das oscilacións na súa maioría; mencionaría unhas particulares oscilacións modelizadas mediante sistemas de ecuacións diferenciais non enteiros.

De vital importancia sería o ano 1967 cando Michele Caputo desenvolvería a súa definición de derivada fraccionaria buscando solucionar un problema á hora da aplicación práctica dos resultados. O problema residía na imposibilidade de interpretación física de condicións iniciais nos problemas cada vez máis frecuentes.

Finalmente, pechando xa o percorrido histórico, cabe destacar as conferencias sobre cálculo fraccionario. Estas foron celebradas en Conneticut, Escocia e Tokio e marcan o asentamento deste tipo de cálculo como unha disciplina en si mesma dentro das matemáticas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. A función Gamma

Como xa puidemos observar no derradeiro apartado, a función Gamma será de vital importancia no cálculo fraccionario. Esta terá especial relevancia no eido das solucións e do resultado de derivadas de orde fraccionaria. É por iso que dedicaremos unhas liñas á introdución desta función e exposición de información de interese acerca dela.

2.1.1. Definición

A idea subxacente baixo a función Gamma é a de extender o concepto de factorial presente nos números enteiros aos números reais e complexos. Unha idea que cobrará especial relevancia nos campos da estadística e probabilidade, posto que aparece en varias distribucións de probabilidade; así como na combinatoria.

Definición 2.1. Sexa z $\in \mathbf{C}$, defínese a función Gamma da forma seguinte:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$$

A notación para esta función foi proposta por Adrien-Marie Legendre no ano 1814.

Proposición 2.2. *Sexa $z \in \mathbf{C}$, se $Re(z) > 0$ entón, a integral impropia previamente introducida converxerá de maneira absoluta.*

Un feito interesante é que pode ser estendida a todo $\mathbf{C}$, excepto se $z \in \mathbf{Z}^- \cup 0$.

Vexamos agora outras tres definicións alternativas para o tema a tratar: a definición de Gauss, a defınción de Weierstrass e definición en termos dos polinomios xeralizados de Laguerre.

Definición 2.3. Sexa z un enteiro non negativo, defínese a función Gamma segundo Gauss da forma seguinte:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^z}{1+\frac{1}{n}}$$

Definición 2.4. Sexa $z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z} \cup 0$, defínese a función Gamma segundo Weierstrass da forma seguinte:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

2.1.2. Propiedades

Antes de enumerar as súas propiedades esenciais e de maior utilidade, introducimos dous resultado teórico que aclaran a relación da función Gamma co factorial.

Proposición 2.5. *Sexa $n \in \mathbf{Z}^+$, logo $\Gamma(n) = (n-1)!$.*

Teorema 2.6. ***Bohr-Mollerup, 1922.*** *A función Gamma é a única función definida para os reais positivos $x > 0$ que cumpre simultaneamente as seguintes tres propiedades.*

1. $f(x+1) = xf(x)$.
2. $f(1) = 0$.
3. *$logf$ é unha función convexa.*

Pódense ver a demostración deste teorema e análise máis detallado da xeneralización do factorial en [18].

Vexamos agora un listado de propiedades de interese teórico-práctico:

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(1) = 0$

3. $|\Gamma(a+bi)|^2 = |\Gamma(a)|^2 \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{b^2}{(a+k)^2}}$

4. Fórmula de reflexión de Euler:

$$\Gamma(1-z)\cdot\Gamma(z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}, \quad z \notin \mathbb{Z}$$

5. Teorema de multiplicación:

$$\prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(z+\frac{k}{m}\right) = \Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\,\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$= (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-mz}\,\Gamma(mz).$$

6. Fórmula de duplicación de Lagrange:

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z).$$

7.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)n^{\alpha}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n-\beta)\Gamma(n+\beta)} = 1; \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

8.
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

2.1.3. Meroforfía e residuos

Lembremos o concepto de función meromorfa antes de nada:

Definición 2.7. Sexa f unha función definida sobre un conxunto aberrto D do plano complexo, esta dirase meromorfa se é holomorfa en todo $z \in D$, excepto nun conxunto de puntos illados chamados polos.

Para o caso que nos perturba, a función $\Gamma(z)$ é meromorfa en todo $z \in \mathbf{C}$, salvo en $z=-n$ (con $n = 0,1,2,3,4,...$). Cada un deses puntos $z=-n$ será onde $\Gamma(z)$ presente un polo simple, con residuo:

$$\operatorname{Res}(\Gamma,-n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

2.1.4. Función poligamma

Un dos grandes intereses dos matemáticos ao longo da historia foi a derivación e ás súas aplicacións. En particular, no caso da función Gamma, empregarase a función digamma, que será a que se derive:

$$\psi_0(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Esta é comunmente utilizada posto que supón unha simplificación para os problemas nos que habitualmente é empregada.

As derivadas de ψ_0 coñeceranse como funcións poligamma e serven á súa vez para expresar as derivadas de $\Gamma(z)$. Vexamos como se expresa a primeira derivada e un resultado relacionado:

Lema 2.8. *Definimos a derivada da función Gamma como segue*

$$\Gamma^{'}(z) = \Gamma(z)\psi_0(z)$$

Proposición 2.9. *Para un enteiro positivo m, a derivada da función Gamma pode calcularse como segue:*

$$\Gamma'(m+1) = m!\left(-\gamma + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right)$$

onde γ denota a constante de Euler-Mascheroni.

2.2. A ecuación integral de Abel

Lembremos que na breve disertación histórica introducida anteriormente, presentábamos o problema da tautócrona e informábamos acerca de que Niels Henrik Abel propuxo unha solución para este, moi relacionada co cálculo fraccionario.

2.2.1. Resultados previos e ecuación a resolver

Para a introdución da coñecida como "ecuación integral de abel"primeiro debemos lembrar algún resultado sobre continuidade que precisaremos para asegurar a existencia de solución desta ecuación. En particular, introducimos o concepto de continuidade absoluta dunha función.

Teorema 2.10. *Sexa $\mathbf{I}$ un intervalo da recta real $\mathbb{R}$ e sexa $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$; diremos que f é absolutamente continua sobre $\mathbf{I}$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que calquera sucesión de subintervalos disxuntos dous a dous (x_k, y_k) de $\mathbf{I}$ (con $k \in \mathbb{N}$ e $x_k, y_k \in \mathbf{I}$), que cumpre:*

$$\sum_{n=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

satisfai, entón:

$$\sum_{n=1}^{n}(f(b_k) - f(a_k)) < \epsilon.$$

Notación 2.11. Notamos f absolutamente continua en $[a, b]$ como $f \in AC([a, b])$

Observación 2.12. Cabe destacar que o espazo de funcións absolutamente continuas en $[a, b]$ coincide co espazo das primitivas de funcións do espazo de Lebesgue. Isto quere dicir:

$$f \in AC([a, b]) \Longleftrightarrow f(x) = C + \int_a^x \psi(t)dt, \psi \in \mathcal{L}^1(a, b), C \in \mathbb{R}$$

Tras a introdución dos conceptos teóricos aos que recorreremos máis adiante, estamos en posición de introducir *a ecuación integral de Abel.*

Problema 2.13. Sexa $\alpha \in (0, 1)$, denominamos ecuación integral de Abel á seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \psi(t)(x - t)^{\alpha-1} = f(x), \quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

onde f é coñecida e ψ é a incógnita a determinar.

2.2.2. Existencia e unicidade de solución

Agora, preguntámonos sobre a existencia de solución ψ para a ecuación previa. Introduzamos primeiramente a seguinte función á que recurriremos no teorema próximo:

$$f_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)(x - t)^{-\alpha}dt.$$

Teorema 2.14. *$\psi(x)$ admite solución en $\mathcal{L}^1$ se, e soamente se, $f_{1-\alpha} \in AC([a, b])$ e $f_{1-\alpha}(0) = 0$.*

Vexamos, agora, un resultado que será útil para reformular o teorema precedente.

Proposición 2.15. *Se $f \in AC([a, b])$ cúmprese, entón, $f_{1-\alpha} \in AC([a, b])$ e*

$$f_{1-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha)}[f(a)(x - a)^{1-\alpha} + \int_a^x f'(t)(x - t)^{1-\alpha}dt].$$

Así, vemos que o feito de que f sexa absolutamente continua leva á continuidade absoluta de $f_{1-\alpha}$, que era unha condición suficiente para a existencia de solución para a ecución de Abel. Logo,

Proposición 2.16. *Sexa $f \in AC([a,b])$, logo a ecuación integral de Abel admite solución única en $\mathcal{L}^1(a,b)$, sendo esta:*

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha}[\frac{f(a)}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(s)}{(x-s)^\alpha}ds], x \in [a,b].$$

2.3. Función de Mittag-Leffler

Un grupo de funcións de sumo interese no cálculo fraccionario son as funcións de Mittag-Leffler. Estas teñen múltiples aplicacións, aparecendo de maneira común á hora de resolver ecuacións diferenciais de orde fraccionaria, en determinados procesos estocásticos da teoría da probabilidade ou na física, para a modelización do comportamento de certos meteriais viscoelásticos ou con memoria posicional.

Unha extensión do contido desta sección pódese atopar en [19].

2.3.1. Definición e algunhas propiedades

A función de Mittag-Leffler é unha función complexa e biparamétrica, posto que depende de α e β que se define da seguinte forma:

Definición 2.17. A función de Mittag Leffler, $E_{\alpha,\beta}(z)$, vén dada polo seguinte sumatorio:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

onde $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$.

En particular, este tipo de función é de gran interese posto que supón unha xeralización do concepto de función exponencial. Como é obvio, dada a importancia da función exponencial e a súa recorrente aparición na resolución de ecuacións de tipo diferencial, ten sentido que existan dunha maneira similar no campo do cálculo fraccionario.

Por outra parte, no caso que αeβ sexan valores reais positivos cúmprese a converxencia da serie a través da que se define. Consecuentemente, teremos que $E_{\alpha,\beta}(z)$ representa unha función complexa enteira.

Outra propiedade a termos en conta é que, para valores grandes dos parámetros, a función pode mostrar un comportamento asintótico.

2.3.2. Casos particulares

A continuación, veremos unha serie de casos particulares que poden exemplificar a importancia e transversalidade do concepto:

- Se $\alpha = \mathbf{1}$ e $\beta = \mathbf{1}$, estaremos ante unha función exponencial:
$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = exp(z).$$
- Se $\alpha = \mathbf{0}$ e $\beta = \mathbf{1}$, estaremos ante a o valor dunha progresión geométrica:
$$E_{0,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$
- Se $\alpha = \mathbf{0}$ e $\beta = \mathbf{1}$, estaremos ante a o coseno hiperbólico:
$$E_{2,1}(z) = cosh(\sqrt{z}).$$

Exemplo 2.18. Será de interese ver unha representación gráfica dalgunhas das funcións desta familia. Na figura 2.1 podemos apreciar o comportamento exponencial destas funcións e así comprender por que a consideramos a xeneralización da función exponencial.

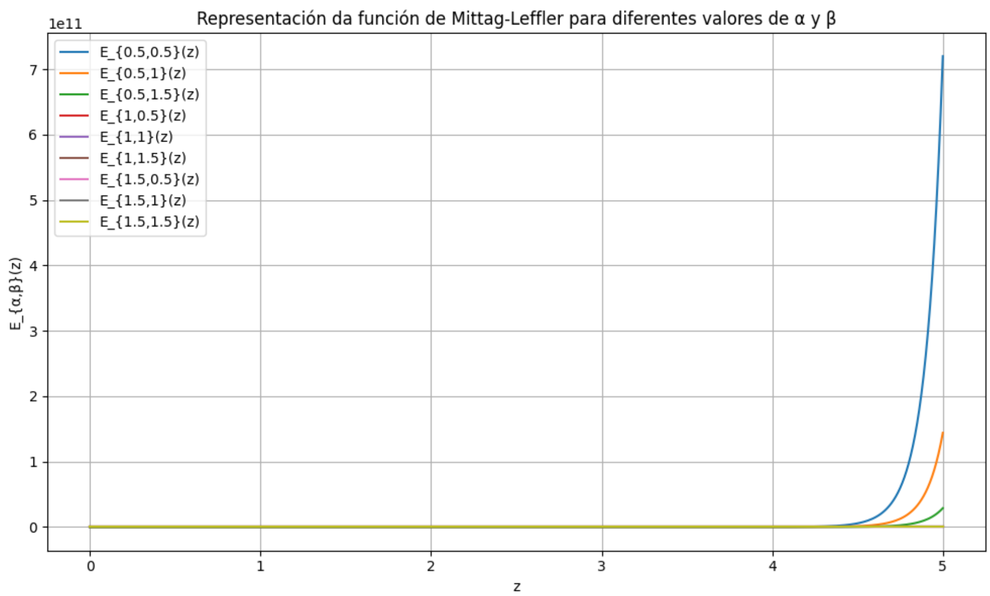

Figura 2.1: Gráfica da familia de funcións de Mittag- Leffler

No Anexo C pódese ver o código en Python empregado para xenerar a Figura 2.1.

Capítulo 3

Calculo fraccionario

3.1. Integración fraccionaria

Nesta primeira sección abordaremos o concepto de integral fraccionaria, este é un paso previo e un pilar no que basearemos a construción das diversas definicións de derivadas fraccionarias que empregaremos. Moitos dos conceptos e resultados que se amosan son probados en [2], [11], [12] onde tamén se poden atopar resultados relacionados.

3.1.1. Definición de Riemann-Liouville

Para chegar á definición que empregaremos de integral fraccionaria, cómpre primeiro introducir a fórmula de Cauchy para unha integral n veces iterada ($n \in \mathbb{N}$). Sexa $\phi \in \mathcal{L}[a, b]$, logo:

$$\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x \phi(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\phi(t)\,dt$$

Notemos que $(n-1)! = \Gamma(n)$, isto nos leva ás ideas introducidas nos preliminares sobre a función Gamma, onde presentamos a existencia de $\Gamma(\alpha)$ para un $\alpha \in \mathbb{C}$. Así, xorde a tentación de substituír a integral iterada n veces, por unha interada α veces; concepto exposto orixinalmente por Riemann e Liouville.

Definición 3.1. Sexa $f \in \mathcal{L}^1(a, b)$ e $\alpha > 0$, defínese como **integral fraccionaria de Riemann-Liouville** de orde α de f:

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(x)(x-t)^{\alpha-1}\,dt, \quad x > 0.$$

En termos da notación utilizada, é preciso mencionar que segundo o autor consultado é posible observar diversas formas de referirse a esta integral fraccionaria. Algúns exemplos son $I_a^\alpha f(x)$ ou ${}_aI_x^\alpha f(x)$.

Exemplo 3.2. Tomemos como exemplo desta definición unha das funcións máis simples como é $f(x) = x$, a orde de integración será $\alpha = \frac{1}{2}$ e o intervalo de definición da función será $[0, b]$ con $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
I_0^{\frac{1}{2}} x &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x x(x-t)^{\frac{1}{2}-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x x(x-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{2\cdot(t+2x)\sqrt{x-t}}{3} \right]_0^x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

3.1.2. Propiedades e resultados

Enumeramos, a continuación, certas propiedades de interese acerca da integral fraccionaria definida anteriormente:

1. **Propiedade de semigrupo:** $I_a^\alpha I_a^\beta f = I_a^{\alpha+\beta} f$
2. A integral fraccionaria de Riemann-Liouville de $f \in \mathcal{L}^1$ pode obterse como convolución das seguintes funcións:

$$F(x) = \begin{cases} \text{f(x)}, & \text{se } x \in [a, b], \\ 0, & \text{se } x \notin [a, b], \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } x \in (0, b-a], \\ 0, & \text{se } x \in (-\infty, 0] \cup (b-a, \infty). \end{cases}$$

Observación 3.3. Convolución: Operador que transforma dúas funcións F e G nunha terceira que representa a magnitude na que se superpoñen F e unha versión trasladada e invertida de G

Como é lóxico, a integral de Riemann-Liouville e o seu comportamento dependen en gran medida da función f integrada. Logo, vexamos algúns resultados que relacionan o concepto integral coa continuidade, derivabilidade e integrabilidade segundo Lebesgue da función f.

Proposición 3.4. *Sexa f unha función pertencente a $\mathcal{C}^1[a, b]$; consecuentemente*

$$\lim_{\alpha \to 0} I_a^\alpha f(x) = f(x).$$

Proposición 3.5. *Sexa $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$; logo, cúmprese $I_a^\alpha f(x) \in \mathcal{L}^1[a,b]$.*

Ata agora só temos considerado as integrais en compactos do tipo $[a,b]$, mais estas poden ser estendidas ou xeneralizadas para aquelas funcións que estean definidas en toda a recta real. Desta forma, tomando unha función $\phi : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ podemos falar do seguinte operador integral de Riemann Liouville, para $\alpha > 0$:

$$I_+^\alpha \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \phi(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Exemplo 3.6. Será interesante ilustrar este concepto integral mediante un exemplo para unha función dada. Tomemos a función $f(x) = 17x$:

$$\begin{aligned}
I_+^\alpha \exp(17x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \exp(17t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(17(x-t))\, dt \\
&= \frac{\exp(17x)}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-17t)\, dt \\
&= 17^{-\alpha} \exp(17x) \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} \exp(-t)\, dt \\
&= 17^{-\alpha} \exp(17x).
\end{aligned}$$

Tomando un valor particular como $\alpha = \frac{2}{3}$ obteríamos o seguinte resultado:

$$I_+^\alpha \exp(17x) = 17^{-\frac{2}{3}} \exp(17x).$$

3.2. Derivación fraccionaria

Unha vez tratada a integral fraccionaria, cómpre tratar tamén o concepto de derivada fraccionaria. Se ben, xa o introducimos na breve historia do cálculo fraccionario, vexamos con máis profundidade o concepto e algunhas das definicións máis coñecidas e empregadas. Estas son tratadas na súa maioría en [2], [4] e [12].

3.2.1. Derivada fraccionaria de Riemann-Liouville

Definición 3.7. Tomemos f unha función definida no intervalo $[a,b]$ e $0 < \alpha < 1$, defínese a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt.$$

Podemos observar que na forma que temos contruída a derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, correspóndese coa derivada ordinaria da integral fraccionaria de f segundo Riemann Liouville; é dicir, $D_a^\alpha = D^1 I_a^{1-\alpha}$. Aquí observamos a estreita relación que gardan os conceptos de integral e derivada fraccionaria coa *ecuación integral de Abel.*

Vexamos un resultado que nos garante a existencia da devandita derivada.

Proposición 3.8. *Sexa $f \in AC([a,b])$, logo existe D_a^α para todo $x \in [a,b]$ e todo $0 < \alpha < 1$. Ademais, $D_a^\alpha \in \mathcal{L}^r(a,b)$ para $1 \le r < \frac{1}{\alpha}$, e*

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}[\frac{1}{(x-a)^\alpha} + \int_a^x \frac{f'(x)}{(x-t)^\alpha} dt].$$

Notación 3.9. Sexa $\alpha \in \mathbb{R}$, empregaremos $[\alpha]$ para denotar a parte enteira e α para denotar a parte fraccionaria.

Segundo a natureza de α a expresión da derivada variará. En concreto:

1. Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, D_a^α corresponde co operador derivada usual iterado $[\alpha]$ veces.
2. Noutro caso, temos:
$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]+1}} D_a^\alpha f$$

Así pois, para $n = [\alpha] + 1$ temos que

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}}$$

Como podemos observar, a idea intuitiva da definición presentada reside en derivar ata o enteiro seguinte á orde que tratamos e despois integrar fraccionariamente para chegar ata a orde desexada. Cómpre, entón, preguntarse pola existencia de dita derivada cando α é maior que 0, posto que a *Proposición 3.6*, asegura a existencia para $\alpha \in (0,1)$.

Proposición 3.10. *Sexa $\alpha > 0$,*

$$\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt \in AC^{[\alpha]}([a,b]) \Rightarrow \textit{Existe} \quad D_a^\alpha.$$

Lema 3.11. *O espazo de funcións $AC^n([a,b])$ está formado polas funcións tales que:*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \psi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x-a)^k$$

onde $\psi \in \mathcal{L}^1(a,b)$ e para $k \in [1, n-1]$, C_k son constantes reais.

En relación con este lema previo, vexamos un resultado sobre existencia para este conxunto.

Proposición 3.12. *Sexa $\alpha > 0$, se $n = [\alpha] + 1$ e $f \in AC^n([a,b])$; entón, existe $D_a^\alpha f$ en casi todo punto de $[a,b]$ e, tense:*

$$D_a^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}.$$

Exemplo 3.13. Vexamos, agora, un exemplo de cálculo dunha derivada fraccionaria coa definición de Riemann-Liouville. Tomemos a orde $\alpha = \frac{1}{2}$ e a función $f(x) = x$ definida no intervalo $[0,b]$ con $b \in \mathbb{R}$, que é unha das máis sinxelas que existen.

$$D_0^{1/2} x = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \left[-\frac{2 \cdot (t+2x)\sqrt{x-t}}{3} \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[-\frac{6x \cdot 0}{3} + \frac{4x \cdot x^{1/2}}{3} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\frac{4x \cdot x^{1/2}}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \left[\frac{4x^{3/2}}{3} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Observemos que na expresión inicial podemos atopar a integral fraccionaria de Riemann-Liouville de orde $\frac{1}{2}$ da función x. Intuitivamente, o que estamos facendo é calcular a dita integral para, despois, cando derivemos chegar á orde desexada. Fagamos fincapé, tamén, no feito de que os resultados coinciden empregando calquera das definicións.

Da mesma maneira que sucede para a integral, temos tratado unicamente aqueles casos para os que a función está definida nun intervalo compacto, pero, que pasaría se consideramos toda a recta real? Tomemos unha función $\phi : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ e vexamos como se define a extensión da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville para toda a recta real, en función do valor α.

Tomemos $0 < \alpha < 1$, logo

$$D_+^\alpha \phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Sexa, agora, un $\alpha > 0$ arbitrario, entón

$$D_{+}^{\alpha}\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

con $n = [\alpha] + 1$.

3.2.2. Derivada fraccionaria de Marchaud

A extensión da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville pode resultar certamente incómoda á hora de realizar cálculos. É por isto que nace a derivada fraccionaria de Marchaud, unha definición que ten como obxectivo expresar a derivada anterior de forma máis conveniente para unha función definida en toda a recta real.

Definición 3.14. Sexa $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ unha función $\mathcal{C}^1$, tal que $f'(x)$ decrece suficientemente rápido cando $|x|$ tende a infinito e $\alpha 0 < \alpha < 1$. Logo definiremos a derivada fraccionaria de Marchaud como segue:

$$\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt.$$

En particular, para funcións suficientemente regulares, ambas definicións coincidirán

$$\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f(x) = D_{+}^{\alpha} f(x).$$

Non obstante, a igualdade $D_{+}^{\alpha} f = I_{+}^{\alpha} f$ será unicamente válida para funcións $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$; mentres que, $\mathbf{D}_{+}^{\alpha} f = I_{+}^{\alpha} f$ será válida para funcións $f \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R})$ con $0 \leq r < \frac{1}{\alpha}$. Polo tanto, a derivada fraccionaria de Marchaud será máis interesante para aplicar sobre funcións definidas en $\mathbb{R}$, xa que permite un maior grado de liberdade para o comportamento da función no infinito.

3.2.3. Derivada fraccionaria de Caputo

Proximamente falaremos de ecuacións diferenciais de orde fraccionaria, agora ben, para garantir a existencia e unicidade de solucións empregando o operador diferencial de Riemann-Liouville precisamos introducir condicións iniciais que carecen de intepretabilidade de física ou xeométrica. Inspirado nisto mesmo, o matemático e físico italiano M.Caputo propuxo unha definición máis sinxela para a derivada fraccionaria dunha función f.

Os conceptos que levan ata esta definición e resultados anexos poden ser observados e expandidos na obra de Caputo [14] e [15].

Definición 3.15. A derivada fraccionaria de Caputo de orde $\alpha > 0$ para unha función f defínese como

$${}^{C}D_{a}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \quad t > a,$$

con $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$.

Notemos que para definir esta derivada, estamos asumindo a existencia da derivada usual de orde $n \geq \alpha$ da función f.

Observación 3.16. Obsérvese que a derivada fraccionaria de Caputo obtense como a integral fraccionaria de derivada; xusto ao contrario que na derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, onde se obtiña mediante a derivada de orde enteiro da integral fraccionaria.

Lema 3.17. *Sexa $\alpha > 0$ e $n = [\alpha] + 1 \in \mathbb{N}$, logo,*

$$^{C}D_a^{\alpha} f(t) = 0 \Leftrightarrow f(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j (t-a)^{n-j},$$

onde para $0 \leq j \leq n$, $c_j \in \mathbb{R}$

Exemplo 3.18. Vexamos o mesmo caso que estudamos no Exemplo 3.13 pero utilizando o operador de Caputo. Tomemos a función $f(x) = x$, a orde de derivación $\alpha = \frac{1}{2}$ e analicémolo no compacto $[0, b]$ con $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
^{C}D_0^{\frac{1}{2}} x &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} f'(x)\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-2\sqrt{x-t}\right]_0^x \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-2\sqrt{0} + 2\sqrt{x}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}
\end{aligned}$$

Observemos que neste caso, diferindo coa derivada de Riemann-Liouville, realizamos a integral fracionaria da derivada usual. É dicir, neste caso primeiro derivamos e despois integramos.

3.2.4. Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio

M. Caputo e M. Fabrizio propuxeron dous cambios con respecto á primeira definición presentada por Caputo. Primeiramente fixeron a substitución do núcleo integral $(t-s)^{-\alpha}$, pola función $\exp\left(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right)$; Por outro lado, cambiaron o factor multiplicativo $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ por $M(\alpha) \in \mathbb{R}$; sendo este último un parámetro tal que $M(0) = M(1) = 1$. Grazas a esas transformacións, concebiron o que hoxe coñecemos como a derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio.

Os resultados que aquí se poden observar, poden ser extendidos e pormenorizados en [2], [13] e son orixinarios das publicacións de Caputo e Fabrizio [14], [15] e [16].

Definición 3.19. Tomemos $\alpha \in (0,1)$ e $f : [0,\infty) \longleftrightarrow \mathbb{R}$ unha función suficientemente regular. Entón a derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio, defínese do seguinte xeito:

$$^{CF}D_0^{\alpha} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(s) \exp\left(-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right) ds, \quad t \geq 0.$$

Observación 3.20. Esta nova definición para o concepto de derivada fraccionaria presenta unha vantaxe con respecto á derivada de Caputo; esta é a supresión da singularidade do núcleo integral en t=s.

A continuación vexamos como expresar a definición anterior dunha maneira máis sinxela. Tomemos, primeiramente, $\sigma = \frac{1-\alpha}{\alpha}$, logo:

$$^{CF}D_0^{\alpha} f(t) = \frac{N(\sigma)}{\sigma} \int_a^t f'(s) \exp\left(\frac{s-t}{\sigma}\right) ds, \quad t \geq 0.$$

Observemos que $\sigma \in (0,\infty)$ e que $N(\sigma)$ é a normalización do termo $M(\alpha)$, cumplindo que $N(0) = N(1) = 1$. Por outro lado, é de interese capital mencionar a converxencia do seguinte límite:

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(t-s)}{\sigma}\right) = \delta(t-s),$$

onde $\delta(x)$ é a distribución Delta de Dirac, centrada en $x \in \mathbb{R}$.

Baseándonos neste resultado previo, pódense extraer conclusións interesantes acerca da converxencia de $^{CF}D_a^{\alpha} f(t)$, en función do valor ao que tenda α.

Proposición 3.21. *Sexa $\alpha \in (0,1)$ e sexa $f : [a,\infty) \longleftrightarrow \mathbb{R}$ unha función suficientemente regular. Logo,*

- $\lim_{\alpha \to 1} {^{CF}D_a^{\alpha}} f(t) = f'(t),$
- $\lim_{\alpha \to 0} {^{CF}D_a^{\alpha}} f(t) = f(t) - f(0).$

Xa temos introducida a derivada de Caputo-Fabrizio para valores de α no intervalo $(0,1)$; pero é de gran importancia definir a devandita derivada para valores superiores de α. Intuitivamente, para realizalo derivarase de forma usual ata o menor enteiro máis próximo e despois aplicarase a derivada de Caputo-Fabrizio.

Proposición 3.22. *Sexa $\alpha = n + \beta$, onde $n \in \mathbb{R}$ e $\beta \in (0,1)$ e sexa $f : [a,\infty) \longleftrightarrow \mathbb{R}$ unha función suficientemente regular. Logo, $^{CF}D_a^{\alpha} f(t) = {^{CF}D_a^{\beta}} f^{(n)}(t)$.*

Como xa vimos antes, as derivadas fraccionarias adoitan contar cunha integral fraccionaria asociada. Neste caso defínese da maneira seguinte:

Definición 3.23. Sexa $\alpha \in (0,1)$ e sexa $f : [a,\infty) \longleftrightarrow \mathbb{R}$, defínese a integral fraccionaria de Caputo-Fabrizio como:

$$^{CF}I_0^{\alpha} f(t) = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} M(\alpha) f(t) + \frac{2\alpha}{2-\alpha} M(\alpha) \int_0^t f(s)\, ds, \quad t \geq 0$$

Para chegar ata esta definición empregouse o concepto de *Transformada de Laplace*, que ten un rol importante no cálculo fraccionario, como podemos apreciar en [1]

3.2.5. Xeneralización de Atangana-Baleanu

A función de Mittag-Leffler corresponde cunha xeneralización do concepto de exponencial e é habitualmente utilizada no cálculo fraccionario. Isto levou a Atangana e Baleanu a redefinir a derivada de Caputo-Fabrizio substituíndo o termo exponencial pola citada función.

Esta xeneralización foi feita en dous sentidos: no sentido de Riemann-Liouville e no sentido de Caputo.

- **Derivada fraccional de Atangana-Baleanu no sentido de Riemann-Liouville:**

$$^{ABR}D_0^{\alpha} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t f(s) E_{\alpha}\left(\frac{-\alpha(t-s)^{\alpha}}{1-\alpha}\right) ds \tag{3.1}$$

- **Derivada fraccional de Atangana-Baleanu no sentido de Caputo:**

$$^{ABC}D_0^{\alpha} f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) E_{\alpha}\left(\frac{-\alpha(t-s)^{\alpha}}{1-\alpha}\right) ds, \tag{3.2}$$

Observemos que a diferenza entre as dúas expresións reside na aparición da función ou da derivada da función dentro da integral tratada.

3.3. Relación entre a integral e derivada fraccionarias de Riemann-Liouville

A identidade inversa da integral con respecto á derivada, sempre que apliquemos a derivada no último lugar é un concepto ben coñecido no campo da análise,

$$\frac{d}{dt} \int_a^x f(t) = f(t),$$

mais, podemos dicir o mesmo cando tratamos o cálculo fraccionario?

Usualmente, o comportamento será similar. De feito teremos que $I_a^\alpha D_a^\alpha f = f$, mais non será necesariamente certo que $D_a^\alpha I_a^\alpha f = f$; diferenciándose as dúas funcións resultantes nunha combinación lineal de $(x-a)^{\alpha-k}$, con $k \in \{1,2,3,\dots,[\alpha]+1\}$.

Definición 3.24. Sexa $1 \leq p < \infty, \alpha > 0$; chámase $I_a^\alpha(\mathcal{L}^p)$ ao conxunto formado por aquelas funcións para as que existe $\phi \in \mathcal{L}^P(a,b)$, tal que $f = I_a^\alpha \phi$.

Presentemos unha condición necesaria e suficiente para a pertenza a dito conxunto.

Teorema 3.25. *$f \in I_a^\alpha(\mathcal{L}^p)$, se e só se $I_a^{n-\alpha} \in AC^n([a,b])$ e $f_{n-\alpha}^{(k)}(a) = 0$, con $0 \leq k \leq n+1$ e $n = [\alpha]+1$.*

Non obstante, estamos buscando que a relación de seren inversas estea cumprida no eido fraccionario.

Proposición 3.26. *Sexa $\alpha > 0$ e $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$, diremos que f ten derivada fraccionaria de orde α integrable, se $I_a^{n-\alpha} f \in AC^n([a,b])$, con $n = [\alpha]+1$.*

Vistas as ideas introdutorias, podemos mostrar un teorema de clasificación que amose a relación entre os operadores de integración e derivación fraccionaria.

Teorema 3.27. *(Teorema de clasificación)*

1. *f integrable $\Rightarrow D_a^\alpha I_a^\alpha f(x) = f(x)$.*
2. *$f \in I_a^\alpha(\mathcal{L}^1) \Rightarrow I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x)$.*
3. *Se $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ é unha función con derivada fraccionaria de orde α integrable, entón*

$$I_a^\alpha D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{a-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} (I_a^{n-\alpha} f)^{(n-k-1)}(a).$$

Como puidemos observar, cumpridas certas condicións sobre a función f podemos asegurar a identidade inversa dos dous operadores.

Corolario 3.28. *Sexa $\alpha > 0, n \in \ltimes$ e f unha función con derivada fraccionaria de orde $\alpha+n$ integrable, logo*

$$f(x) = \sum_{j=-[\alpha]-1}^{n-1} \frac{D_a^{\alpha+j} f(a)}{\Gamma(\alpha+j+1)} (x-a)^{\alpha+j} + R_n(x),$$

con $R_n(x) = I_a^{\alpha+n} D_a^{\alpha+n} f(x)$.

O corolario previamente introducido non é outra cousa que unha xeneralización da fórmula de Taylor para ordes fraccionarias. De feito, basta facer un pequeno exercicio de substitución para ver que se tomamos $\alpha \in \mathbb{N}$ obtemos a fórmula de Taylor usual.

Exemplo 3.29. Para pechar esta sección observaremos unha representación gráfica das distintas funcións que calculamos nalgúns dos exemplos previos. En particular, veremos unha gráfica coa función $f(x)$, a súa derivada fraccionaria no sentido de Riemann-Liouville e a súa integral fraccionaria de Riemann-Liouville, ambas de orde $\alpha = \frac{1}{2}$.

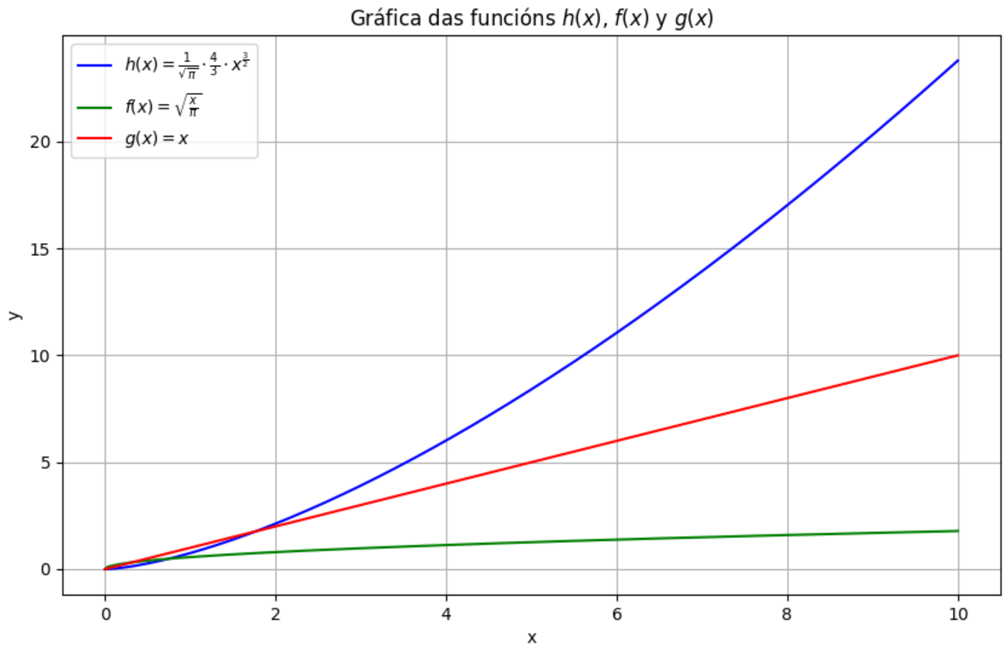

Figura 3.1: Gráfica comparativa

O código de Python utilizado para a creación desde documento gráfico (Figura 3.1) pode atoparse no Anexo A.

Capítulo 4

Ecuacións diferenciais de orde fraccionaria.

Unha ecuación diferencial é un tipo de ecuación que relaciona unha función coas súas derivadas. En particular adoitan ser do tipo:

$$f'(t) = g(t),$$

aínda que esta forma variará dependendo da variable ou variables coas que se traballe, a orde dos termos, a linearidade, a homoxeneidade, etc.

Observación 4.1. Habitualmente, traballamos con ecuacións diferenciais ordinarias ou de tipo enteiro, onde a orde de derivación dos termos que aparecen na ecuación é sempre de tipo enteiro.

Non obstante; para obter resultados de existencia e unicidade de solucións, menester usual da disciplina, debemos tratar o coñecido como *problema de valor inicial* ou *problema de Cauchy.* Este tipo de problema, engade á ecuación previamente presentada unha restrición respecto ó valor que toma a solución nun punto *inicial.*

- O problema, para un orde de derivación $\alpha = 1$ é do tipo:

$$\begin{cases} f'(t) = g(t), \\ f(x_0) = f_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.1}$$

- O problema, para un orde de derivación de orde $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} a_n(t)\frac{d^n f}{dt^n} + \cdots + a_1(t)\frac{df}{dt} + a_0(t)f = g(t), \\ f(x_0) = f_0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(f_0) = f_{n-1}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Tras realizar o estudo do calculo fraccionario e ter tratado diferentes tipos de derivadas fraccionarias, ten xeito que xorda a seguinte dúbida: que sucedería se tomamos unha orde $\alpha \in \mathbb{Q}$? A resposta é sinxela, estaríamos ante unha ecuación diferencial de orde fraccionaria, mais quedaría outra incógnita que despexar: que definición de derivada fraccionaria debemos empregar para plantexar as ecuacións?

Esta última ten unha resposta máis complexa, xa que se ben é certo que podemos definir unha ecuación diferencial de orde fraccionaria a través de calquera definición de derivada non todas permiten establecer un problema de valor inicial. Se lembramos, cando falábamos da derivada fraccionaria de Riemann-Liouville facíamos fincapé na problemática que xurdía entorno ás condicións iniciais, posto que non era posible establecer un número non enteiro destas cunha interpretación clara. Así, terá sentido utilizar, para a tarefa de contruír un problema de Cauchy, as definicións de Caputo ou de Caputo Fabrizio.

4.1. Derivada de Caputo Fabrizio

Por norma xeral, o estudo das ecuacións diferenciais pon especial énfase na búsqueda de solucións e na estabilidade das mesmas. É por isto que, a continuación, plantexaremos resultados de interese sobre a existencia, unicidade e estabilidade de solucións de ecuacións que empregan o operador de Caputo-Fabrizio.

Os resultados principais desta sección son probados en [2].

4.1.1. Ecuacións diferenciais lineais

Vexamos, primeiramente, unha caracterización das funcións con derivada nula.

Proposición 4.2. *Sexa $0 < \alpha < 1$ arbitrario e f unha solución da seguinte ecuación diferencial:*

$$^{CF}D_0^\alpha f(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Logo f será unha función constante.

Así, introduzamos o resultado de existencia e unicidade de solución para o problema que nos atañe.

Teorema 4.3. *Sexa $0 < \alpha < 1$ unha orde arbitraria. A única solución do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} {}^{CF}D_0^\alpha f(t) = \sigma(t), \quad t \geq 0, \\ f(0) = f_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.3}$$

virá dada por:

$$f(t) = f_0 + a_\alpha(\sigma(t) - \sigma(0)) + b_\alpha \int_0^t \sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0,$$

onde a_α e b_α son constantes reais dadas por:

$$a_\alpha = \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)M(\alpha)}, \quad b_\alpha = \frac{2\alpha}{(2-\alpha)M(\alpha)}.$$

Os devanditos resultados son demostrados en [2].

4.1.2. Ecuacións diferenciais non lineais

Será interesante, tamén, tratar aqueles problemas que conten con ecuacións non lineais. En particular atopámonos con problemas da seguinte índole:

$$\begin{cases} {}^{CF}D_0^\alpha f(t) = \phi(t, f(t)), \quad t \in [0, T], \\ f(0) = f_0 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Logo, será bo contar con algún resultado que nos asegure existencia ou unicidade da solución para o problema de valor inicial presentado.

Teorema 4.4. *Sexan $0 < \alpha < 1$ e $\tau > 0$ valores arbitrarios e $\phi : [0, \tau] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unha función continua para a que existe $L > 0$ de forma que, para todo $t \in [0, \tau]$,*

$$|\phi(t, s_1) - \phi(t, s_2)| \leq L|s_1 - s_2|, \quad \textit{para todo } s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Se $(a_\alpha + b_\alpha \tau)L < 1$, entón o problema de Cauchy (4.4) admite unha única solución no espazo $\mathbf{C}([0, \tau], \mathbb{R})$ formado polas funcións continuas en $[0, \tau]$ que toman valores reais.

A proba deste teorema podémola atopar en [2].

4.2. Estabilidade de Hyers-Ulam

Un campo de estudo frecuente no ámbito das ecuacións diferenciais é a estabilidade. Particularmente, esta refire ao comportamento das solucións ante perturbacións nas condicións iniciais, se estas permanecen preto da solución primeira diremos que a esta solución é estable.

A estabilidade de Hyers-Ulam é un concepto no campo da análise funcional que refire á estabilidade das solucións de ecuacións funcionais. Foi introducido por Donald H. Hyers en 1941 en resposta a unha pregunta formulada por Stanislaw Ulam en 1940 sobre a estabilidade dos homomorfismos. Vexamos, a continuación, unha serie de definicións que precisaremos despois sobre este concepto.

As demostracións dos resultados sobre a estabilidade, así como un estudo de maior extensión poden ser atopados en [3].

Definición 4.5. A ecuación diferencial de orde fraccionaria

$$({}^{CF}D_a^\alpha f)(t) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

é estable no sentido de Hyers-Ulam se existe unha función continuamente diferenciable $u : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ que satisfai a seguinte desigualdade:

$$\left|({}^{CF}D_a^\alpha u(t)) - g(t)\right| \leq \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

entón existe unha solución ($u : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$) da ecuación diferencial (4.5) con

$$|u(t) - u_\alpha(t)| \leq K\epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\epsilon > 0$ e $K > 0$ é a constante de estabilidade de Hyers-Ulam.

Definición 4.6. A ecuación (4.5) é estable no sentido xeralizado de Hyers–Ulam se existe unha función continuamente diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de tal maneira que, dada calquera solución $u : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ que poida satisfacer a desigualdade (4.8), existe unha solución $u_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ da ecuación considerada tal que:

$$|u(t) - u_\nu(t)| \leq \varphi(\epsilon), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.7. A ecuación diferencial (4.5) é estable no sentido de Hyers–Ulam–Rassias suxeita a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se existe $K_\varphi \in \mathbb{R}$ de tal maneira que, dado calquera $\epsilon > 0$ e calquera solución $u : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ que poida satisfacer a seguinte desigualdade:

$$\left|{}^{CF}D_a^\alpha u(t) - g(t)\right| \leq \epsilon\varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

existe unha solución única $u_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{F}$ con respecto ao problema considerado (4.5), tal que

$$|u(t) - u_\alpha(t)| \leq K_\varphi\epsilon\varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.8. Unha ecuación diferencial fraccional (4.5) é estable no sentido xeneralizado de Hyers-Ulam-Rassias, suxeita a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se existe $K_\varphi \in \mathbb{R}$ tal que para calquera solución $u : \mathbb{R} \to F$ que satisfaga a seguinte desigualdade:

$$\left|{}^{CF}D_a^\alpha u(t) - g(t)\right| \leq \varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

existe unha única solución $u_\nu : \mathbb{R} \to F$ da ecuación diferencial (4.5), na que

$$|u(t) - u_\alpha(t)| \leq K_\varphi \varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Intuitivamente, o concepto de estabilidade de Hyers-Ulam busca que as solucións aproximadas da ecuación diferencial estean preto da solución exacta. Estas solucións aproximadas son aquelas que satisfán a ecuación diferencial dentro dun pequeno marxe de erro. Este concepto, ao non reducirse a perturbacións nas condicións iniciais, trata a estabilidade das solucións dunha maneira máis xeneralizada.

4.2.1. Ecuacións diferenciais lineais

O estudo da estabilidade de Hyers-Ulam para ecuacións diferenciais lineais realízase en [3]. Empréganse, principalmente, resultados relacionados coa transformada fraccional de Fourier.

Neste subapartado, cando falemos de ecuación diferencial de orde fraccionaria, estaremos a tratar un problema do seguinte tipo:

$$({}^{CF}D_a^\alpha f)(t) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Teorema 4.9. *Sexa $0 < \alpha \leq 1$ e sexa $g(t)$ unha función real e continua. Supoñamos que existe unha función $u : \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ que satisfai a seguinte desigualdade:*

$$\left|({}^{CF}D_a^\alpha u(t)) - g(t)\right| \leq \epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e algún} \quad \epsilon > 0,$$

logo, existirá unha solución da ecuación diferencial de orde fraccionaria $u_\alpha : \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$|u(t) - u_\alpha(t)| \leq K\epsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observemos que se tomamos $\varphi(\epsilon) = K\epsilon$, estaremos nas condicións da definición 4.6. Logo a solución xeral da ecuación diferencial fraccionaria será estable no sentido de Hyers-Ulam. Como consecuencia, podemos destacar que a solución presentada no Teorema 4.3 será estable no mesmo sentido, xa que esta é unha solución particular para un problema de valor inicial concreto sobre a mesma ecuación diferencial de orde fraccionaria.

Da mesma maneira podemos tratar a estabilidade segundo Hyers-Ulam-Rassias. Vexámolo:

Proposición 4.10. *Sexa* $0 < \alpha \leq 1$ *e sexa* $g(t)$ *unha función real e continua. Existe unha función continua* $\varphi(t)$ *e unha función continuamente diferenciable* $u : \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$ *que satisfai a seguinte desigualdade:*

$$\left|({}^{CF}D_a^\alpha u(t)) - g(t)\right| \leq \epsilon\varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente, existe unha solución da ecuación diferencial de orde fraccionaria, u_α*, tal que*

$$|u(t) - u_\alpha(t)| \leq K\epsilon\varphi(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Destaquemos que bastará escoller $\epsilon = 1$ para ter o as condicións expostas na Definición 4.8. Logo, afirmamos que a solución xeral da ecuación diferencial será estable no sentido de Hyers-Ulam-Rassias e da mesma maneira sucederá coa solución particular dada no Teorema 4.3, como xa explicamos no caso anterior.

4.2.2. Ecuacións diferenciais non lineais

A discusión sobre a estabilidade das ecuacións diferenciais non lineais segundo os conceptos expostos realízase en [3].

Neste subapartado, cando falemos de ecuación diferencial de orde fraccionaria, estaremos a tratar un problema do seguinte tipo:

$$({}^{CF}D_a^\alpha f)(t) = \phi(t, f(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Consideremos a seguinte ecuación diferencial non linear:

$${}^{CF}D_0^\alpha f(t) = \phi(t, f(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e partamos das seguintes hipóteses, que precisaremos para enunciar os resultados:

H_1: u é continua en intervalo $[\breve{}T, T] \times \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{F} \subset \mathbb{R}$.

H_2: Existe unha constante $\mathbb{L} \in (0, 1)$ tal que $\|\phi(t, u_1) - \phi(t, u_2)\| \leq \mathbb{L}\|U_1 - U_2\|$ para todas $U_1, U_2 \in \mathbb{R}$.

H_3: Existe unha constante $\mathbb{R}$ tal que $|\phi(t, u)| \leq \mathbb{L}_u(1 + |u|)$ para todo $u \in R$.

Supoñamos, ademais, que o espazo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ten definida a norma

$$\|u\| = sup\{|u(t)|, t \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que no caso de que se cumpran as hipóteses $[H_1]$ e $[H_2]$ estaremos nas condicións do Teorema 4.4 e poderemos asegurar a existencia de solución para a ecuación diferencial de orde fraccionaria exposta. A solución particular para o problema de valor inicial será, ademais, única.

Trataremos a estabilidade de Hyers-Ulam-Rassias xereneralizada tendo en conta a seguinte condición:

D_4 : Supoñamos que ϕ é unha función e existe $K_\lambda > 0$ tal que

$$\int_{-t}^{t} (\mathcal{C}_1 \cos(\alpha m\pi/2) + i\mathcal{C}_2 \operatorname{sign}(t-\tau)\operatorname{sen}(\alpha m\pi/2)) \operatorname{sign}(t-\tau)|t-\tau|^{1-\alpha m}\phi(\tau)\,d\tau \leq K_\lambda \phi(t),$$

onde $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \tau \in \mathbb{R}$

Observación 4.11. A función signo, denotada como $\operatorname{sign}(x)$, defínese como:

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Teorema 4.12. *Supoñamos que se cumpren as hipóteses* $[H_1]$, $[H_2]$ *e* $[H_4]$. *Se* $\frac{(2T)^{-\alpha m}}{\alpha m} < 1$, *entón a ecuación* $(4{,}1)$ *é estable no sentido de Hyers-Ulam-Rassias con respecto a* ϕ.

4.3. Derivada de Caputo

Neste apartado trataremos as ecuacións diferenciais fraccionarias que empregan o operador de Caputo, as súas solucións e algunhas propiedades. Consideraremos o seguinte problema de valor inicial cunha ecuación diferencial funcional de orde fraccionaria,

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}u(t) = \sum_{i=1}^{m} {}^{C}D^{\alpha_i} f_i(t, u_t) + f_0(t, u_t), \quad t > t_0, \\ u(t) = \varphi(t). \end{cases} \tag{4.7}$$

Onde a derivada fraccionaria que se emprega é a de Caputo, $\alpha \in (0,1)$, $i \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{C}([t_0 - \sigma], \mathbb{R})$ con $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Por outra parte $\alpha_i \in (0, \alpha)$, f_i unha función dada e a función

$$u_t : [-\sigma, 0] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

está definida como $u_t(s) = u(t+s)$ para cada $s \in [-\sigma, 0]$. Notemos que as solucións de (4.7) estarán definidas en $[t_0 - \sigma, \infty)$.

4.3.1. Solucións atractoras

Será de interese capital tratar a existencia de solucións para o problema exposto que satisfagan certas propiedades de atracción. Este tipo de estudo e definicións de atracción son tratadas por diversos autores en [2], [5] e [6].

Definición 4.13. Sexa $u = u(t)$ unha solución do problema (4.7), esta dirase atractora se verifica a existencia dunha constante b_0 tal que se $|\varphi| \leq b_0$ para todo $[t_0 - \sigma, t_0]$, logo

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

Definición 4.14. Sexa $u = u(t)$ unha solución do problema (4.7), esta dirase globalmente atractora se verifica que

$$\lim_{t \to +\infty} (u(t) - v(t)) = 0.$$

para toda solución $v = v(t)$ do problema de Cauchy (4.7).

Para ver a existencia de solucións e a identidade atractora das mesmas, debemos presentar primeiro o Teorema do punto fixo de Schauder e algunha condicións adicionais que máis adiante empregaremos.

Teorema 4.15 (Teorema do punto fixo de Schauder)**.** *Sexa E un subconxunto non baleiro, pechado, acotado e convexo dun espazo normado X. Se $f : E \to E \subseteq X$ é una función continua e compacta, entón existe un punto fixo para f en E.*

A demostración deste teorema pódese atopar en [7].

Como xa foi mencionado, precisaremos certas condicións para probar a existencia de solucións atractoras para o problema 4.7. Estas son as que seguen:

(C_1) : Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq i \leq m$, a función $f(t, \psi)$ é Lebesgue-medible respecto da variable $t \in [0, \infty)$ e $f(t, \psi)$ é unha función continua respecto de $\psi \in \mathcal{C}([-\sigma, 0], \mathbb{R})$;

(C_2) : Existe unha función $\mathcal{H} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ estritamente decrecente e que se anula no infinito de maneira que, para todo $t \in [0, \infty)$,

$$\left| \varphi(t_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha - \alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t - s)^{\alpha - \alpha_i - 1} f_i(s, u_s)\, ds \right| \leq \mathcal{H}(t - t_0);$$

(C_3) Existe unha constante $\beta \in \mathbb{R}$ tal que para cada $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$, tense que $f_i \in \mathcal{L}^{1/\beta}(I, \mathcal{C}([-\sigma, 0]), \mathbb{R})$, con

$$0 < \beta < \min_{0 \leq i \leq m} \alpha - \alpha_i.$$

Desta maneira, con C_1 poderemos reformular o problema de Cauchy exposto en (4.7), de forma que

$$u(t) = \begin{cases} \varphi(t_0) + \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s, u_s)\, ds, & t > t_0, \\ \varphi(t), & t_0 - \sigma \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{4.8}$$

onde $\alpha_0 = 0$ e $0 < \alpha_i < \alpha$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Definamos, agora, o operador $\mathcal{T}$:

$$(\mathcal{T}u)(t) = \begin{cases} \varphi(t_0) + \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha_i)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\alpha-\alpha_i-1} f_i(s, u_s)\, ds, & t > t_0, \\ \varphi(t), & t_0 - \sigma \leq t \leq t_0. \end{cases} \tag{4.9}$$

Elementalmente, temos que (4.8) é unha solución de (4.7) se é un punto fixo do operador $\mathcal{T}$. Se sumamos esta idea ás condicións enumeradas anteriormente, podemos chegar ata o próximo enunciado.

Lema 4.16. *Se para todo $i \in \mathbb{N} \cup 0$, con $1 \leq i < m$, as funcións f_i do problema de valor inicial (4.7) satisfan as condicións C_1, C_2 e C_3, logo dito problema admite polo menos unha solución no espazo $\mathcal{C}([t_0 - \sigma, \infty), \mathbb{R})$.*

A demostración deste resultado pode atoparse en [2].

Presentaremos a continuación a pedra angular desta sección, o resultado que amosa a existencia dunha solución atractora para o problema dado.

Teorema 4.17. *Supoñamos que están satisfeitas as condicións C_1 e C_2. Entón, o problema de Cauchy admite polo menos unha solución atractora no xeito da Definición 4.13.*

Demostración. En base ao lema anterior temos a existencia dunha solución para a ecuación diferencial 4.8 pertencente ao conxunto S, onde

$$S = \{u : u \in \mathcal{C}([t_0 - \sigma, \infty), \mathbb{R}) \text{ y } |u(t)| \leq \mathcal{H}(t - t_0) \text{ para todo } t \geq t_0\}.$$

Por outro lado, para ver que a solución é atractora, partindo da condición C_2 da función $\mathcal{H}$, chegamos a que todas as funcións de S deben anularse no infinito. Así, a solución $u \in S$ cumprirá

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0.$$

e, polo tanto, será atractora. $\square$

Capítulo 5

Proposta de resolución práctica

Nesta sección abordaremos unha forma de resolver as ecuacións diferenciais de orde fraccionaria, en particular, aquelas que empregan o operador de Caputo. Esta foi exposta en [8].

5.1. Metodoloxía

O método proposto polos autores, Elif Demirci e Nuri Ozalp, para resolver ecuacións diferenciais fraccionarias de tipo Caputo implica os seguintes pasos:

Transformación da ecuación diferencial fraccionaria

Primeiro, a ecuación diferencial fraccionaria orixinal, que ten a forma ${}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t))$ con $0 < \alpha < 1$, é transformada nunha ecuación integral de Volterra fraccionaria equivalente. Esta transformación é fundamental xa que as ecuacións integrais de Volterra son máis manexables matematicamente.

Observación 5.1. Unha ecuación integral de Volterra é un tipo de ecuación integral na que o límite superior da integral é unha variable libre. Este tipo de ecuación pode representarse da seguinte maneira:

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, \tau)x(\tau)\, d\tau$$

onde:

- $x(t)$ é a función descoñecida que se quere atopar,

- $f(t)$ é unha función dada,
- $K(t, \tau)$ é o núcleo da ecuación, unha función dada de dúas variables,
- a é o límite inferior da integración.

As ecuacións integrais de Volterra son amplamente utilizadas na modelización de fenómenos en diversas áreas como a física, a bioloxía e a enxeñaría, debido á súa capacidade para describir sistemas dinámicos onde o estado presente depende dos estados pasados.

Uso da solución da ecuación de orde enteira

Unha vez transformada a ecuación fraccionaria nunha ecuación integral, os autores empregan as solucións das ecuacións diferenciais de orde enteira correspondentes para atopar solucións exactas da ecuación fraccionaria. Esencialmente, trátase de relacionar a solución dunha ecuación diferencial de orde fraccionaria coa solución dunha ecuación de orde enteira.

En particular , empregarase o seguinte resultado exposto en [8]:

Teorema 5.2. *Consideremos o problema de valor inicial (PVI) coa ecuación diferencial de orde fraccionaria de tipo Caputo dada por*

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

onde $f \in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $0 < \alpha < 1$. *Dado que* f *é asumida como unha función continua, cada solución do PVI dado por (5.1) tamén é unha solución da seguinte ecuación integral fraccionaria de Volterra:*

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{5.2}$$

Ademais, cada solución de (5.2) é unha solución do PVI (5.1). Observamos que o PVI (5.1) é equivalente ao PVI

$$\begin{cases} D^\alpha (x(t) - x_0) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Xeneralización a Sistemas Finitos

O método tamén se xeneraliza para sistemas finitos de ecuacións diferenciais fraccionarias. Isto significa que non só se pode aplicar a ecuacións individuais, senón tamén a conxuntos de ecuacións interrelacionadas.

Esta derradeira característica é de gran importancia, posto que a modelización en determinados campos require de máis dunha ecuación. Un exemplo disto poden ser os modelos epidemiolóxicos.

5.2. Exemplificación

A fin de contas, a maneira máis eficaz de amosar un método ou proceso e mostralo a través de exemplos. Polo tanto, no que segue veremos algún exemplo de resolución de ecuacións diferenciais de orde fraccionario.

Non obstante, antes de comezar coa resolución, introduciremos algúns resultados que serán de necesidade para a comprensión do que se está a facer. Estes resultados son demostrados en [8]

Proposición 5.3. *Considérase o problema de valor inicial dado por (5.1) e sexa*

$$g(v, x_*(v)) = f\left(t - (t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1))^{1/\alpha}, x\left(t - (t^\alpha - v\Gamma(\alpha+1))^{1/\alpha}\right)\right)$$

e asumimos que se cumpre $f \in \mathcal{C}[R_0, \mathbb{R}]$ *con* $R_0 = \{(t,x) : 0 \le t \le a \in \mathbb{R}\, e |x - x_0| \le b \in \mathbb{R}\}$ *e* $|f(t,x)| \le M$ *(función limitada) . Entón, unha solución de (1),* $x(t)$*, está dada por*

$$x(t) = x_* \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

onde $x_*(v)$ *é unha solución da ecuación diferencial de orde enteira*

$$\frac{dx_*(v)}{dv} = g(v, x_*(v))$$

coas condicións iniciais

$$x_*(0) = x_0.$$

Proposición 5.4. *Sexa* $\|\cdot\|$ *unha norma calquera adecuada en* $\mathbb{R}^n$*. Supoñamos que* $f \in \mathcal{C}[R_1, \mathbb{R}^n]$*, onde* $R_1 = \{(t, X) : 0 \le t \le a \;\; e \;\; \|X - X_0\| \le b\}$*,* $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$*,* $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

e $\|f(t,X)\| \leq M$ *en* R_1. *Entón, existe polo menos unha solución para o sistema de ecuacións diferenciais de orde fraccionaria dado por*

$$D^{\alpha}X(t) = f(t, X(t)) \tag{5.4}$$

con condicións iniciais

$$X(0) = X_0 \tag{5.5}$$

en $0 \leq t \leq \beta$, *onde* $\beta = \text{mín}\left(a, \left[\frac{b}{M}\Gamma(\alpha+1)\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $0 < \alpha < 1$.

Proposición 5.5. *Consideremos o problema de valor inicial dado por (5.4) e (5.5) de orde* α, $0 < \alpha < 1$. *Sexa*

$$g\left(v, X_*(v)\right) = f\left(t - \left(t^{\alpha} - v\Gamma(\alpha+1)\right)^{1/\alpha}, X\left(t - \left(t^{\alpha} - v\Gamma(\alpha+1)\right)^{1/\alpha}\right)\right)$$

e supoñamos que se cumpren as condicións do Teorema 6. Entón, unha solución de (5.4), $X(t)$, *pode ser dada por*

$$X(t) = X_*\left(t^{\alpha}/\Gamma(\alpha+1)\right)$$

onde $X_*(v)$ *é unha solución do sistema de ecuacións diferenciais de orde enteira*

$$\frac{d\left(X_*(v)\right)}{dv} = g\left(v, X_*(v)\right)$$

coas condicións iniciais

$$X_*(0) = X_0.$$

Exemplo 5.6. Consideremos o PVI de orde fraccionaria dado por

$$\begin{cases} D^{\frac{1}{2}}x(t) = t, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Para este exemplo,

$$g(v) = 2\sqrt{t}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)v - v^2\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right).$$

A solución do PVI correspondente de orde enteira dado no Teorema 5.2 é

$$x_1(v) = \sqrt{t}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)v^2 - \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{3}v^3 + x_0.$$

Así, a solución do problema de Cauchy plantexado vén dada por

$$x(t) = x_1 \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right) = \frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} + x_0. \tag{5.7}$$

Este é un problema moi sinxelo e xenérico. Normalmente traballarase cun x_0 que tome valores particulares da recta real.

Capítulo 6

Aplicación práctica e utilidade

As ecuacións diferenciais de orde fraccionaria representan unha extensión lóxica e natural das ecuacións diferenciais clásicas. Estas últimas son comunmente empregadas en múltiples ramas á hora de modelar e explicar todo tipo de fenómenos que nos rodean. A súa importancia é tal que están presentes en todas as disciplinas científicas e teñen unha implicación directa na explicación de todo aquelo que marca a nosa vida diaria. Exemplos máis concretos aos que nos podemos referir son a termorregulación de edificios, a variación de concentración de disoluciones en procesos químicos e industriales, análises sobre a elasticidade de materiais ou, mesmo, poden servir para estudar o crecemento e decrecemento dunha poboación como a humana.

Todas estas aplicacións máis usuales habitúan ser explicadas e traballadas a través de ecuacións diferenciais de orde enteiro, dada a súa facilidade para seren traballadas e a simple interpretación física das súas condicións iniciais. Agora ben, a flexibilidade e precisión das ecuacións diferenciais de orde fraccinaria permiten modelar sistemas con comportamentos anómalos e con memoria a largo plazo, entre outras características que non poden ser capturadas e ilustradas mediante as ecuacións de orde enteira das que falábamos.

Grazas a estas carecterísticas e moitas outras, as ecuacións diferenciais de orde fraccionaria son utilizadas en diversas áreas científicas con obxecto de mellorar e ampliar as técnicas de estudo ata agora empregadas. O seu uso xa ten axudado en moitos campos para sortear obstáculos ou impedimentos que coas "ferramentas máis tradicionais"non se podían tratar. Veremos a continuación unha serie de ramas onde estas ecuacións diferencais e o cálculo fraccionario están sendo empregados.

Diversas das aplicacións que a continuación son mencionadas poden ser atopadas en [9], [10].

Circuitos eléctricos

Un dos usos que se lles pode dar a este tipo de ecuacións é a modelización e estudo de circuitos eléctricos. As ecuacións diferenciais de orde fraccionaria aportan unha maior precisión na análise do circuito ao ter unha maior capacidade para facer énfase nos efectos de memoria (isto refire a ter en conta non só condicións presentes, senón tamén do pasado que teña sufrido o sistema analizado) e os comportamentos inusuais de certas compoñentes eléctricas. Vexamos dous exemplos máis concretos.

- **Circuitos RLC fraccionarios:** Este tipo de circuito conta con resistencias (R), bobinas (L) e condensadores (C) e ao incluirmos a orde fraccionaria podemos modelalo de maneira máis precisa. Un condensador "fraccionario", por exemplo, permite un almacenamento de enerxía cuxa modelización é máis sinxela que ao facelo de forma enteira, capturando os efectos de perdas e dispersións que non serían observados nos modelos tradicionais.
- **Filtros eléctricos y resonadores electromagnéticos:** O uso de ecuacións diferenciais de orde fraccionaria permite optimizar o diseño deste tipo de compoñentes con mellores características de rendemento, como unha meior selectividade e menor atenuación fóra de banda.

Control de sitemas dinámicos

A enxeñería de control é unha disciplina que emprega a teoría de control para diseñar, planificar e desenvolver dispositivos e sistemas con comportamentos desexados. En particular, un enxeñeiro deste tipo busca mellorar os procesos en termos de calidade, custo, impacto ambiental... Así, neste campo, os controladores baseados en derivadas fraccionarias ofrecen unha maior flexibilidade na sintonización dos parámetros do controlador, mellorando o rendemento xeral.

Observación 6.1. Un controlador é un dispositivo ou algoritmo que axusta as entradas a un sistema dinámico para obter a salida desexada.

- **Controladores PID fraccionarios:** Estes permiten axustar os parámetros proporcional (P), integral (I) e derivativo (D) nun rango continuo, mallorando a resposta transitoria e o rexeitamento a perturbacións. Este tipo de controladores Son especialmente eficaces en sistemas cun comportamento non linear e con variacións temporais.
- **Estabilidade e rendemento:** Aplicar técnicas de optimización baseadas no cálculo fraccionario pode minimizar o Erro Cuadrátrico Integral (ISE), que é unha medida do desempeño dun sistema de control, e mellora-la estabilidade do sistema controlado.

Un caso particular onde é de gran interese a optimización dos controladores e a mellora da estabilidade dos procesos é a enxeñería robótica. Aquí búcase constantemente a mellora no control dos movementos, sobre todo en robots de ensamblaxe ou de ciruxía robótica, e a precisión e adaptabilidade das máquinas ao entorno no que traballan. Para todas istas tarefas o cálculo fraccionario supón unha ferramenta de gran utilidade.

Modelado e análise de sistemas mecánicos

A enxeñería mecánica é outro dos campos nos que actualmente é frecuente atopar ecuacións diferenciais de orde fraccnionaria. Estas aportan rigor e precisión á hora de modelar sistemas que non poden ser descritos de maneira adecuada por ecuacións diferenciais ordinarias. Xeralmente aplícanse en análises de materiais para ver a súa resistencia a tensións, flexións e rozamentos.

- **Materiais viscoelásticos:** Os modelos fraccionarios teñen a habilidade de reter a viscoelasticidade dos materiais, describindo a relación entre o esforzo e a deformación ao longo do tempo. Este tipo de modelos son especialmente útiles para predicir o comportamento a longo prazo de materiais poliméricos e biolóxicos.
- **Sistemas de fricción non linear:** As ecuacións diferenciais de orde fraccionaria serven tamén para modela-la fricción en sistemas mecánicos, onde a forza da fricción depende da historia do movemento. Isto permite mellora-la precisión en análises de vibracións e no diseño de sistemas de amortiguación.

Procesamento de sinais e telecomunicacións

O cálculo fraccionario está sendo aplicado no procesamento de sinais e telecomunicacións para mellorar a calidade das transmisións e a análise de sinais complexas. Algunhas aplicacións máis concretas nos campos mencionados son as que seguen.

- **Modelado de canais de comunicación:** Cando os canais de comunicación presentan dispersión e retrasos non lineis remodelalos en base ecuacións diferenciais de orde fraccionaria pode proporcionar unha descrición máis precisa da transmisión de sinais, solventando os primeiros obstáculos descritos. Este menester é crucial para mellora-la capacidade e calidade das redes de comunicación.
- **Diseño de filtros de sinais:** Os filtros de tipo fraccionario son máis eficaces á hora de procesar sinais con comportamentos anómalos e caóticos, así como as sinais que teñen ruído

de fondo complexo. Este tipo de filtros optimizan a capacidade de extracción de sinais útiles en aplicacións como a detección de erros e a monitorización de sistemas.

Modelos epidemiolóxicos

A modelización matemática en epidemioloxía axuda a comprender a propagación de enfermidades e suxire estratexias de control para as mesmas. Os modelos SEIR (Susceptible, Exposto, Infectado, Recuperado) de orde fraccionaria son unha extensión dos modelos que ata agora resultaron eficaces na descrición de fenómenos de diversos campos. En particular, estes empregan ecuacións diferenciais de orde fraccionaria para modelar o suceso epidemiolóxico.

En [10] observamos que o modelo SEIR de orde fraccionaria cunha taxa de mortalidade dependente da densidade presenta unha unha representación máis realista da dinámica da enfermidade e a súa propagación na poboación.

Deep Learning

O cálculo fraccionario e, en particular, as ecuacións diferenciais de orde fraccionaria son utilizadas tamén nos desenvolvementos tecnolóxicos e de investigación máis punteiros. Un claro exemplo disto pode ser o Deep Learning ou aprendizaxe profundo como podemos observar en [17], onde se propón unha rede neuronal multicapa baseada neste tipo de ecuacións.

Anexo A

Código da Figura 3.1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir las funciones
def h(x):
    return (1 / np.sqrt(np.pi)) * (4 / 3) * (x ** (3 / 2))

def f(x):
    return np.sqrt(x / np.pi)

def g(x):
    return x

# Crear un array de valores x
x = np.linspace(0, 10, 400)

# Crear la grafica
plt.figure(figsize=(10, 6))

plt.plot(x, h(x), label='$h(x) = \\frac{1}{\\sqrt{\\pi}} \\cdot \\frac{4}{3} \\
    cdot x^{\\frac{3}{2}}$', color='blue')
plt.plot(x, f(x), label='$f(x) = \\sqrt{\\frac{x}{\\pi}}$', color='green')
plt.plot(x, g(x), label='$g(x) = x$', color='red')

# Anadir titulo y etiquetas
plt.title('Grafica de las funciones $h(x)$, $f(x)$ y $g(x)$')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()

# Mostrar la grafica
```

```
plt.grid(True)
plt.show()
```

Anexo B

Código da figura 2.1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import gamma

# Implementacion de la funcion de Mittag-Leffler
def mittag_leffler(alpha, beta, z, n_terms=100):
    sum_ml = np.zeros_like(z, dtype=np.float64)
    for k in range(n_terms):
        sum_ml += z**k / gamma(alpha * k + beta)
    return sum_ml

# Definir un rango de valores para z
z = np.linspace(0, 5, 400)

# Definir diferentes valores para los parametros alpha y beta
alpha_values = [0.5, 1, 1.5]
beta_values = [0.5, 1, 1.5]

# Crear la grafica
plt.figure(figsize=(12, 8))

for alpha in alpha_values:
    for beta in beta_values:
        y = mittag_leffler(alpha, beta, z)
        plt.plot(z, y, label=f'E_{{{alpha},{beta}}}(z)')

plt.xlabel('z')
plt.ylabel('E_{alpha,beta}(z)')
plt.title('Representacion da funcion de Mittag-Leffler para diferentes valores de
    alpha e beta')
plt.legend()
```

```
plt.grid(True)
plt.show()
```

Bibliografía

[1] J. Losada y J. J. Nieto. *Properties of a new fractional derivative without singular kernel.* Progr. Fract. Differ. Appl, 1(2):87-92, 2015.

[2] J. Losada, Tese de doutoramento, *ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN FRACCIONARIO Y APLICACIONES.*, https://investigacion.usc.gal/documentos/5d1ffb2b2999521e412dda7b, 2018.

[3] Hammachukiattikul, P., Mohanapriya, A., Ganesh, A., Rajchakit, G., Govindan, V., Gunasekaran, N., y Lim, C. P. (2020). *A study on fractional differential equations using the fractional Fourier transform.* Advances in Difference Equations, 2020(691).

[4] Walter Legnani and Terry E. Moschandreou (Eds.), *Nonlinear Systems - Theoretical Aspects and Recent Applications*, IntechOpen, 2023.

[5] J. Banás y K. Goebel.*Measures of noncompactness in Banach spaces*, volume 60 of *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.

[6] F. Chen, J. J. Nieto y Y. Zhou. *Global attractivity for nonlinear fractional differential equations. Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 13(1):287-298, 2012.

[7] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalrdumen*, Studia Math.2 (1930) 171-180.

[8] Elif Demirci y Nuri Ozalp *A method for solving differential equations of fractional order.* Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 236, Issue 11, 2012, Pag. 2754-2762

[9] L. Debnath, *Recent applications of fractional calculus to science and engineering*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 54 (2003) 3413–3442

[10] E. Demirci, A. Unal, N. Özalp, *A fractional order SEIR model with density dependent death rate*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40 (2) (2011) 287–295.

[11] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas y J. J. Trujillo. *Fractional calculus, volume 5 of Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos.* World Scientic Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017.

[12] S. G. Samko, A. A. Kilbas y O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives.* Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[13] María I. Troparevsky y Marcela A. Fabio *LA NUEVA DERIVADA DE CAPUTO: CÁLCULO APROXIMADO DE PRIMITIVAS UTILIZANDO UNA FAMILIA DE WAVELETS DE BANDA LIMITADA*, Mecánica Computacional, Vol XXXV (2017), págs. 2547-2557.

[14] M. Caputo. *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent.* Geophysical Journal International, 13(5):529539, 1967.

[15] M. Caputo. *Elasticità e dissipazione.* Zanichelli, 1969.

[16] M. Caputo y M. Fabrizio. *A new definition of fractional derivative without singular kernel.* Progr. Fract. Differ. Appl, 1(2):113, 2015.

[17] Wei, JL., Wu, GC., Liu, BQ. , Nieto, J.J., *An optimal neural network design for fractional deep learning of logistic growth. Neural Computing and Applications.* 35, 10837–10846 (2023).

[18] BOHR, H. and MOLLERUP, J.: *Lærebog i matematisk Analyse III*, Grænseprocesser. Jul. Gjellerup, København, 1922.

[19] H. J. Haubold, A. M. Mathai y R. K. Saxena *Mittag-Leffler Functions and Their Applications*, Journal of Applied Mathematics, Volume 2011, Article ID 298628