AGORA —Papeles de Filosofía— (1995), 14/1: 53-75 *ISSN 0211-6642*

HISTORIA Y EPISTEMOLOGIA DE LOS CAMBIOS DE SIGNIFICADO DE *PROBABILIDAD*[*]

Andrés Rivadulla

1. Introducción

> «A pesar de que el concepto de probabilidad es una parte tan común y natural de nuestra experiencia, no existe una única interpretación científica del término probabilidad aceptada por todos los estadísticos, filósofos y demás autoridades científicas. A través de los años, cada interpretación de la probabilidad propuesta por unos expertos ha sido criticada por otros. De hecho, el verdadero significado de la probabilidad es todavía un tema muy conflictivo y surge en muchas discusiones filosóficas actuales sobre los fundamentos de la estadística».

Estas palabras proceden del *§ 1.2 Interpretaciones de la probabilidad*, de Morris H. DeGroot, *Probabilidad y Estadística*[1]. Aunque DeGroot considera que las interpretaciones en cuestión son: la *frecuencialista*, la *clásica* y la *subjetiva*, nosotros vamos a tratar de hacer historia de la tercera y primera interpretaciones, pues consideraremos la definición clásica de probabilidad como una especie de subproducto original de la concepción subjetiva.

Hay no obstante una tercera concepción de la probabilidad que apenas ha superado nunca los límites de la investigación filosófica. Se trata de la *interpretación lógica de la probabilidad*. En esta concepción *probabilidad* no designa más que una relación lógica objetiva, una relación de implicación lógica parcial, existente entre una serie de premisas evidenciales e y una hipótesis h que actúa a modo de conclusión. No vamos a relatar aquí ni su historia ni su epistemología, pues, por haber sido objeto de estudio preferentemente en ambientes filosóficos, es ampliamente ignorada entre los teóricos del cálculo matemático de probabilidades y los estadísticos. Además, el intento de Carnap, que fue uno de los más ardientes defensores contemporáneos de la teoría de la probabilidad lógica, por basar la teoría matemática de la inferencia estadística en el concepto lógico de probabilidad, resultó un completo fracaso[2]. Digamos pues, muy brevemente, que, en una fecha tan sor-

---

[*] Este trabajo es resultado de una investigación en la Universidad de Londres, realizada durante el curso académico 1992-1993, y financiada por la DGICYT, cuya ayuda agradezco muy sinceramente.

[1] DeGroot (1988) suele emplearse como manual universitario.

[2] Véase al respecto Rivadulla (1995). Sobre la teoría carnapiana de la lógica inductiva puede consultarse Rivadulla (1986, Cap. III), así como (1991*a*, Cap. II).

 Aceptación: VI/1995

prendentemente temprana como 1837, Bernard Bolzano en su *Wissenschaftslehre* había ya concebido la probabilidad como una relación puramente lógica entre enunciados. El enfoque lógico de Bolzano no cuajó empero en una corriente, como tampoco la propuesta pocos años después de George Boole (1854, p. 247) de aplicar la probabilidad a enunciados:

> «... hay otra manera de contemplar todas las cuestiones de la teoría de probabilidades, a saber: sustituyendo los sucesos por las proposiciones que afirman que éstos han ocurrido u ocurrirán, y considerando que la probabilidad numérica hace referencia a la *verdad* de estas *proposiciones*, y no a la *ocurrencia* de los *sucesos* acerca de los que tratan las proposiciones».

Hubo que esperar hasta 1921, año en que John Maynard Keynes publicó su *Treatise on Probability* y Ludwig Wittgenstein[3] su *Tractatus*, así como a la publicación por Harold Jeffreys en 1939 de su *Theory of Probability,* para que la teoría de la *probabilidad lógica* alcanzase su máxima expresión con la gran contribución de Rudolf Carnap a la *lógica inductiva.*

2. En el principio era la *proporción*

La probabilidad empieza siendo una noción estrechamente ligada al concepto de la *proporción* del número de casos matemáticamente favorables a la ocurrencia de un resultado en los juegos de azar respecto del total de casos matemáticamente posibles. De manera que en los primeros decenios del desarrollo de los cálculos en los juegos de azar no tiene sentido intentar establecer una separación entre el *significado* de *probabilidad* —un término que apenas se utiliza— y la *medida* de *probabilidad.*

El primer libro publicado sobre probabilidades fue *De Ratiociniis in Ludo Alae* de Christiaan Huygens, aparecido en 1657. No obstante el primero escrito sobre el tema fue *Liber de Ludo Alae*[4] de Girolamo Cardano, quien lo compuso hacia 1564, si bien no fue publicado hasta cien años después, con la edición de su *Opera Omnia*, en Lyon, 1663. En su obra, dedicada a los cálculos en los juegos de azar, Cardano no emplea el término *probabilidad*, pero implícitamente concibe la *probabilidad de un suceso* como la *proporción* de casos favorables a la aparición del suceso respecto del total de los casos posibles. En el capítulo IX, titulado «Del lanzamiento de un dado», entiende que para que un dado sea justo debe ser *igual*, es decir, que se pueda obtener tanto uno, tres o cinco, como dos, cuatro o seis[5]. El uso de las proporciones como probabilidades se observa muy claramente en el capítulo XII, «Del

[3] Leibniz, Bolzano, Boltzmann y el propio Keynes estarían en la raíz del desarrollo por Wittgenstein de su teoría lógica de la probabilidad, un análisis crítico de la cual puede encontrarse en Rivadulla (1993).

[4] Cardano (1663). Una traducción española de este libro aparece en la edición de Marisol de Mora Charles (1989).

[5] tam possum proiicere unum tria quinque, quàm duo quatuor sex.

lanzamiento de tres dados». Tras calcular que el número de resultados posibles en este caso es de 216, Cardano se dedica a estudiar la proporción de tripletas (6), dobletes (90) y ternas con tres valores distintos (120) en el circuito completo (216) de todos ellos. Del conocimiento de las proporciones, afirma Cardano en el capítulo XIV, depende que se hagan las apuestas en condiciones equitativas.

Hasta que no se publica póstumamente en Basilea en 1713 el *Ars conjectandi* de Jakob Bernoulli[6], el término *probabilidad* apenas aparece en los análisis matemáticos de los juegos de azar, o en los cálculos estadísticos de probabilidades de vida, o en los estudios actuariales sobre rentas vitalicias. En efecto, ni en *Natural and Political Observations*, 1662, de John Graunt; ni en *De Ratiociniis in Ludo Alae*, 1657, de Christiaan Huygens; ni en *Reeckening van Kanssen*, 1687, de Baruch Spinoza; ni en *Valeur des Rentes Viagères en Proportion des Rentes Amortissables* (la *Waerdye)*, 1671, de Jan de Witt; ni en los trabajos de Edmund Halley de 1693 sobre probabilidades de vida y rentas vitalicias, aparece el término *probabilidad*. Los términos empleados en su lugar son *apparence, chance, expectatio, hasard, odds.*

Entre las excepciones a esta situación merece la pena destacar en primer lugar que *probabilidad* se aplica en sentido matemático en la obra *La logique, ou l'Art de Penser*, 1662, de Antoine Arnauld y Pierre Nicole, también llamada *Ars cogitandi* o *Lógica de Port-Royal*. En efecto, en el capítulo XVI de la Parte Cuarta, p. 468, leemos:

> «Il y a des jeux où dix personnes mettant chacun un écu, il n'y en a qu'un qui gagne le tout, & tous les autres perdent: ainsi chacun n'est au hazard que de perdre un écu, & en peut gagner neuf. Si l'on ne consideroit que le gain & la perte en soy, il sembleroit que tous y ont de l'avantage: mais il faut de plus considerer que si chacun peut gagner neuf écus, & n'est au hazard que d'en perdre un, il est aussi neuf fois plus probable à l'égard de chacun qu'il perdra son écu, & ne gagnera pas les neuf. Ainsi chacun a pour soy neuf écus à esperer, un écu à perdre, neuf degrez de probabilité de perdre un écu, & un seul de gagner les neuf écus: Ce qui met la chose dans une parfaite égalité.
>
> Tous les jeux qui sont de cette sorte sont équitables autant que les jeux le peuvent estre, & ceux qui sont hors de cette proposition sont manifestement injustes».

El uso que Arnauld y Nicole hacen de la expresión *degrez de probabilité* es comparable a lo que los probabilistas posteriores designan por medio de *número de posibilidades (chances)*, y está estrechamente ligado al concepto de probabilidad como proporción. Los conceptos de *probabilidad* y *chance* aparecen pues expresados por el mismo término *probabilité*. De todas maneras estos autores emplean también el término *apparence*, como sinónimo de *probabilidad*, cuando afirman (*op. cit.*, p. 469) que un *juego igual* es aquel «où il y a autant d'apparence de gain que de perte».

[6] La Parte Cuarta de esta obra, que es la que contiene el famoso *Teorema de Bernoulli* o *Ley (débil) de los grandes números*, está traducida al español como Jakob Bernoulli: «Teoría de Probabilidades», 1993.

En segundo lugar merece ser considerado Gottfried W. Leibniz, quien en *De incerti aestimatione*[7], 1678, concibe la *probabilidad* como *gradus possibilitatis* y define también *Spes* como *probabilitas habendi*. En base a estos conceptos propone el siguiente Teorema:

> «Si plures sint eventus aeque faciles, et uno eventu rem habebo, aliis omnibus non habebo, spes valebit partem rei aliquotam pro numero eventuum.
>
> Sit numerus eventuum n, res ipsa R, spes erit S aequ. R/n ; (...) Nempe si eventus sint aeque faciles, potestas habendi rem in unum eventum est portio aliquota aestimationis rei pro numero eventuum».

La *medida* de la probabilidad tiene lugar, pues, en términos de la *proporción* de casos favorables en el total de casos posibles. Su *significado* parece coincidir con el de la proporción misma.

3. Interpretación subjetiva y medida de probabilidad

El concepto *subjetivo* de probabilidad aparece claramente expuesto por vez primera en el *Ars conjectandi* de Jakob Bernoulli, quien entiende la *probabilidad* del modo siguiente:

> «La probabilidad es un grado de certeza y se diferencia de ella como la parte del todo».

Así, «*moralmente cierto* es aquello cuya probabilidad equivale casi a la certeza total», mientras que «*moralmente imposible* es aquello que sólo tiene tanta probabilidad como la que le falta a lo moralmente cierto para ser totalmente cierto».

Como *grado de certeza*, la probabilidad debe ser medible. Su medida viene dada, según Bernoulli, a la manera al uso, o sea, en términos de la proporción de *razones* favorables al acaecimiento de un suceso respecto del total de ellas, favorables o no. Ahora bien, para él no sólo es el *número* de razones lo que hay que tener en cuenta para el cálculo de las probabilidades, sino también su *peso*, es decir, su fuerza demostrativa. El modelo a seguir para el sopesamiento de las razones lo ofrece la noción de *expectativa media* de ganancia en los juegos de azar; calculada ésta, la confianza depositada en las cosas será proporcional a su grado de certeza, o sea, a su probabilidad.

El paso siguiente en el afianzamiento del concepto *subjetivo* de probabilidad lo ofrece el inglés Thomas Bayes, quien en su *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* de 1763, Sección I, Definición 5, entiende la probabilidad $P(A)$ de ocurrencia de un suceso A, como la razón entre el valor de la esperanza depositada en la ocurrencia de un suceso y la ganancia esperada. En la *Proposición 2* aclara esta idea:

[7] Véase Kurt-R. Biermann & Margot Faak (1957). Fragmentos de este trabajo se encuentran transcritos también en Louis Couturat (ed.), *Opuscules et Fragments Inedits*, París, 1903, pp. 569-571.

«Si una persona espera el acaecimiento de un suceso, la probabilidad de su ocurrencia es a la de su ausencia como lo que se pierde, si el suceso no acaece, es a lo que se gana, si tiene lugar».

Su interpretación es la siguiente: $P(A)$ es a $1-P(A)$, la probabilidad de su contrario $\neg A$, como lo que se pierde, la cantidad a, si A falla, es a lo que se gana, la cantidad $N-a$, si A ocurre:

$$\frac{P(A)}{1-P(A)}=\frac{a}{N-a}.$$

Obviamente,

$$P(A)(N-a)=a[1-P(A)],$$

y

$$P(A)=\frac{a}{N}.$$

N es pues la cantidad total en juego que se recibe, y equivale a la suma de las cantidades *apostadas*: $N-a$ en favor de $\neg A$, y a en favor de A. Si confío en la ocurrencia de A estaré dispuesto a correr el riesgo de perder una cantidad a, caso de que A no acontezca.

A primera impresión parece que Bayes define una *medida* de probabilidad. Ahora bien, como concibe la probabilidad de un suceso aleatorio A en términos de apuesta previa a su ocurrencia, es decir, previa evaluación *subjetiva* de lo que arriesga en función de lo que espera ganar, el carácter *subjetivo* de la probabilidad resulta más que evidente.

Ahora bien, la contribución decisiva de este reverendo inglés a la desde él denominada corriente bayesiana en la teoría de probabilidades y de la inferencia científica es la solución que ofrece al siguiente problema:

«... dado el número de casos en que un suceso desconocido ha ocurrido y ha estado ausente, se desea conocer la probabilidad de que la probabilidad de su ocurrencia en un único ensayo se sitúe entre dos grados dados de probabilidad».

Para Laplace (1820, Introducción, p. 148 *et passim*), esta cuestión se vincula con la «probabilidad de las causas y de los sucesos futuros en base a sucesos observados», y, gracias a la solución que Bayes aporta: su famosísimo Teorema,

«... cada una de las causas a las que puede ser atribuido un fenómeno observado puede ser indicada con tanta más fiabilidad cuanto mayor es la probabilidad de que, supuesto que esta causa exista, el suceso tendrá lugar. La probabilidad de la existencia de alguna de estas causas es, pues, una fracción, cuyo numerador es la probabilidad del acontecimiento resultante de esta causa y cuyo denominador es la suma de las probabilidades análogas relativas a todas las causas. Pero si estas distintas causas, consideradas *a priori*, son desigualmente probables, es preciso emplear, en lugar de la probabilidad del suceso resultante de cada causa, el producto de esta probabilidad por la de la causa misma».

En efecto, si B es el suceso observado, y para su explicación hay n hipótesis probabilistas $A_1, \ldots, A_n$ distintas, entonces el Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{p(B|A_i) \times p(A_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} p(B|A_i) \times p(A_i)}$$

permite, por primera vez en la historia de la teoría de probabilidades, el cálculo *inverso* de la probabilidad del suceso, a partir de los resultados observados B, al destacar como mejor explicación de B aquella hipótesis A_i con la mayor probabilidad *a posteriori*. Desde Laplace este Teorema se constituye en la piedra clave de la concepción subjetiva de la probabilidad.

También Laplace (1776, pp. 145-146) propugna un concepto *subjetivo* de probabilidad, más próximo esta vez al de Bernoulli, cuyo *significado* establece, antes de fijar cómo se *mide*, en los siguientes términos:

> «Azar (...) no es más que un término propio para designar nuestra ignorancia acerca del modo en que las diferentes partes de un fenómeno se coordinan entre sí y con el resto de la Naturaleza. La noción de probabilidad hace referencia a esta ignorancia».

Por su parte, la *medida* de la *probabilidad de un suceso*, es para Laplace la siguiente:

> «La probabilidad de la existencia de un suceso no es pues más que la razón del número de casos que le son favorables respecto del número de todos los casos posibles, siempre que no veamos ninguna razón en favor de que acontezca uno de ellos en lugar de otro».

Esta *medida* de la probabilidad, claramente emparentada con el concepto de probabilidad como proporción, pasaría luego a la historia como concepto o *definición clásica de probabilidad*. En efecto, a partir de Laplace no sólo se extiende la idea de la conveniencia de distinguir entre *concepto* y *medida* de probabilidad, sino que también empieza a generalizarse la costumbre de identificar la *medida* de probabilidad con la llamada *probabilidad* matemática.

Así, Siméon-Dennis Poisson (1837, pp. 30-31) distingue claramente entre la *probabilidad* y la *medida de probabilidad* de un suceso:

> «La *probabilidad* de un suceso es la razón que tenemos para creer que ha de ocurrir o que ya ha ocurrido (...). La probabilidad depende del conocimiento que tenemos de un fenómeno, por lo que puede ser diferente para un mismo suceso pero personas distintas».

Siendo pues relativa a nuestro conocimiento, Poisson sostiene un *concepto* puramente *subjetivo* de probabilidad[8]. De éste distingue su *medida*, que

[8] No obstante podríamos ver en Poisson una temprana referencia a la existencia de pro-

define, *modo laplaceano*, de la siguiente manera:

> «La medida de la probabilidad de un suceso es la razón del número de casos que le son favorables respecto del número total de casos, favorables o contrarios, y todos igualmente posibles».

También Augustus de Morgan (1838) distingue entre ambos aspectos de la probabilidad; el capítulo I de su obra lleva por título «On the Notion of Probability and its Measurement», y en él afirma, *modo bernoulliano*, que

> «... nuestras certidumbres sólo son grados muy altos de probabilidad» (p. 3),
> «... la impresión llamada certeza tiene el carácter de grado muy alto de probabilidad» (p. 5),
> «Probabilidad es la sensación de la mente (*the feeling of the mind*), no la propiedad inherente de un conjunto de circunstancias» (p. 7);

mientras que *modo laplaceano* asevera que:

> «... la probabilidad de un suceso se mide por medio del cociente entre el número de casos favorables y el de todos los que pueden ocurrir» (p. 30).

Silvestre François Lacroix, se sitúa entre los primeros que deciden denominar *probabilidad matemática* a la *medida* de probabilidad. Siguiendo a Hume, Lacroix (1816, § 6) considera que la probabilidad (subjetiva) tiene su origen en nuestra ignorancia sobre las causas verdaderas de los sucesos y expresa un grado de *esperanza* o de *confianza* en la ocurrencia de un suceso. Su *medida* es la *proporción* de casos favorables respecto de la suma total de casos igualmente posibles. Esta proporción, concluye Lacroix, se denomina *probabilidad matemática*. Por su parte, Adolphe Quetelet (1846, p. 11) en su carta número 2, de mayo de 1837, que titula precisamente *De la probabilité mathématique d'un événement simple*, defiende su cálculo del modo siguiente:

> «*On estime la probabilité mathématique en divisant le nombre des chances favorables à l'événement, par le nombre total des chances.* D'après ce principe, le tirage d'une figure dans un jeu de 32 cartes aurait, pour probabilité, la fraction $^{12}/_{32}$; on a, en effet, 12 chances favorables sur un nombre total de 32 chances».

Antoine Augustin Cournot (1843, p. 24) hace uso igualmente de esta expresión:

> «... *le rapport du nombre des chances favorables à l'événement au nombre total des chances* ... on l'appelle la *probabilité mathématique,* ou simplement la *probabilité* de l'événement».

babilidades objetivas basada en el uso diferenciado de los términos *chance* y *probabilité*. En efecto, en p. 31 Poisson anticipa el concepto de Cournot de probabilidad como medida de la posibilidad física:

> «Dans le langage ordinaire les mots chance et probabilité sont à peu prés synonymes. Le plus souvent nous emploierons indifféremment l'un et l'autre; mais lorsqu'il sera nécessaire de mettre une différence entre leurs acceptions, on rapportera, dans cet ouvrage, le mnot chance aux évènements en eux-mêmes et indépendamment de la connaissance que nous en avons, et l'on conservera au mot probabilité sa définition précédente. Ainsi, un évènement aura, par sa nature, une chance plus ou moins grande, connue ou inconnue; et sa probabilité sera relative à nos connaissances en ce qui le concerne».

Así, la denominación *probabilidad matemática* para la medida de probabilidad acaba haciéndose general y la probabilidad matemática, como medida de probabilidad, identificándose con la probabilidad misma.

George Boole (1854, p. 253) es un ejemplo muy claro de esta nueva tradición que identifica la *probabilidad* con su *medida*. En el capítulo XVII de su *Laws of Thought* afirma:

> «Se ha definido que 'la medida de la probabilidad de un suceso es la razón entre el número de casos favorables o desfavorables, y el de todos los casos igualmente posibles'. En esta investigación el término probabilidad será empleado en el sentido arriba expuesto de 'medida de probabilidad'».

Y John Venn (1866, 1888 pp. 79-80) afirma también que:

> «... la probabilidad de un suceso se mide por medio de la razón del número de casos favorables al suceso respecto del número total de casos posibles».

A finales del XIX la fusión entre ambos aspectos de la probabilidad ya está plenamente establecida; Joseph L. F. Bertrand (1889, pp. 1-2) por ejemplo es rotundo:

> *«La probabilidad de un suceso es la razón del número de casos favorables respecto del número total de casos posibles».*

Con ello el peso se desplaza del concepto (subjetivo) de probabilidad a la noción matemática de probabilidad. La dura crítica a que serán sometidas tanto la noción subjetiva de probabilidad como el concepto matemático de probabilidad correrán simultáneas con el desarrollo de la concepción frecuencial u objetivista de probabilidad.

4. La interpretación frecuencialista de la probabilidad

Siguiendo la costumbre de la época, el matemático inglés Robert Leslie Ellis (1843, p. 2) presenta la probabilidad *matemática* de un suceso como

> «el número de formas igualmente posibles en que puede tener lugar, dividido por el número total de tales formas que pueden ocurrir en el ensayo en cuestión».

Pero Ellis es también quien por vez primera relaciona la probabilidad de un suceso con la frecuencia de su ocurrencia *a la larga*:

> «... la definición verdadera de probabilidad se basa en una referencia a las proporciones desarrolladas a la larga».

En coherencia con este enfoque frecuencialista, Ellis rechaza que la probabilidad tenga algo que ver con estados mentales subjetivos, como resulta evidente en el siguiente párrafo de la Sección 11 de su artículo:

> «Los resultados de la teoría de probabilidades expresan los números de formas en que un suceso dado puede ocurrir, o el número proporcional de veces en que

ocurrirá a la larga: pero no deben ser tomados como medida de ningún estado mental...».

La consistencia del enfoque frecuencial de Ellis exige también su rechazo de cualquier tipo de probabilidades *a priori*, ya que éstas dependen necesariamente de la mente que las contempla. Consiguientemente, Ellis afirma «que las estimaciones que proporciona la llamada teoría *a posteriori* de la fuerza de los resultados inductivos son ilusorias». Para él la medida de la confianza en una inferencia inductiva depende exclusivamente «del número de casos particulares de los que se deduce»; y se apoya en la creencia en la regularidad de la naturaleza, en la semejanza general del futuro al pasado.

La concepción frecuencial de la probabilidad fue también defendida por John Stuart Mill, que confiesa[9] haber mantenido en la primera edición de 1843 de su *System of Logic Ratiocinative and Inductive* en contra de Laplace, que:

> «Para poder afirmar que dos sucesos son igualmente probables,... la experiencia debe haber mostrado que ambos ocurren con la misma frecuencia».

En efecto, en el Libro III, capítulo XVIII, «Of the Calculation of Chances», de la primera edición de 1843 de su *System of Logic*, Stuart Mill (1973, Apéndice *F*, pp. 1142-1143) afirma que la fundación de la teoría de probabilidades (*doctrine of chances*) por los grandes maestros era seriamente discutible, ya que las

> «Conclusiones relativas a la probabilidad de un hecho no se apoyan... en nuestra ignorancia, sino en nuestro conocimiento. Conocimiento obtenido por experiencia de la proporción entre los casos en que el hecho ocurre, y aquellos en que no ocurre».

Consiguientemente,

> «... donde la observación y el experimento no proporcionan un número de ejemplos suficientemente numeroso para la eliminación del azar, y suficientemente diverso para la eliminación de todas las circunstancias contingentes, tratar de calcular probabilidades es convertir la mera ignorancia en error peligroso, al disfrazarla con ropaje de conocimiento».

La idea de que en definitiva probabilidad es proporción, se mantiene vigente ahora en la concepción frecuencial, con la particularidad de que debe ser una proporción empíricamente constatable. Pero desde la segunda edición de su obra, Stuart Mill (1973, pp. 534-535) asevera haberse convencido

> «... de que la teoría de probabilidades (*theory of chances*), tal como la concibieron Laplace y los matemáticos en general, no adolece de la falacia fundamental que le adscribí».

Así, en una vuelta sorprendente al enfoque genuinamente subjetivo de la probabilidad, Mill (*op. cit.*, p. 535) afirma que

---

[9] Mill, *System of Logic*, Cap. XVIII «Of the Calculation of Chances», p. 534.

«... la probabilidad de un suceso no es una cualidad del suceso mismo, sino un mero nombre del grado de razón que tenemos para esperar su acaecimiento. La probabilidad de un suceso para una persona es una cosa distinta de la probabilidad del mismo evento para otra, o incluso para la misma persona después de haber adquirido evidencia adicional. (...) su probabilidad quiere decir para nosotros el grado de esperanza en su ocurrencia, que la evidencia presente nos autoriza a mantener».

No obstante, Mill deseaba que su conversión a la concepción subjetiva fuera compatible con la idea de que, para la aplicación de la teoría de probabilidad en ciencia

«las conclusiones relativas a la probabilidad de un hecho de un tipo particular se apoyan en nuestro conocimiento de la proporción entre los casos en que ocurren hechos de este tipo, y aquéllos en que no ocurren. Este conocimiento debe derivarse o bien de experimentos específicos, o bien deducirse de nuestro conocimiento de las causas operantes que tienden a producirlo, comparadas con las que tienden a impedir el hecho en cuestión».

A lo que parece, pues, Mill no se desprendió completamente del enfoque frecuencial; una sospecha confirmada por la siguiente cita de Mill (*o. c.*, p. 542):

«Las probabilidades de vida a diferentes edades, o en climas distintos, las probabilidades de recuperación de una enfermedad particular; las probabilidades de nacimiento de niño o niña; las de destrucción de casas o propiedades por el fuego; las de naufragio en un viaje determinado, se deducen de los partes de mortalidad, regreso de los hospitales, registros de nacimientos, de naufragios, etc., es decir, de la frecuencia observada, no de las causas, sino de los efectos».

Por esta época el concepto frecuencialista de probabilidad surgió en la Europa continental con la publicación en Francia, en 1843 de la obra de Antoine Augustin Cournot, *Exposition de la théorie des chances et des probabilités.* Cournot (1843, p. 24) define la probabilidad de un suceso, que él identifica, como Ellis, con la probabilidad matemática, como

«la razón del número de posibilidades favorables al suceso respecto del número total de posibilidades».

Esta probabilidad matemática no es para él sino simplemente la medida de su *posibilidad*, es decir, de la facilidad de su ocurrencia, pero se decanta por una concepción objetivista y no subjetiva de la probabilidad. En efecto, para Cournot (1843, pp. 437-438)

«la probabilidad matemática expresa una razón existente fuera de la mente que la concibe, una ley a la que se subordinan los fenómenos, y cuya existencia no depende ni de la amplitud ni de la limitación de nuestros conocimientos acerca de las circunstancias de su producción».

Siendo pues independiente de la mente, la probabilidad objetiva de un suceso sólo puede ser determinada empíricamente a partir de las frecuencias observadas, y tanto más precisamente cuanto mayor es el número del observaciones del evento considerado. Esto es lo que se sigue de sus siguientes palabras (1843, p. 439):

«Objetivamente considerada, es decir, concebida como medida de la posibilidad de los sucesos producidos por la concurrencia de causas independientes, en casos de sucesos naturales, físicos o morales la probabilidad matemática sólo puede ser determinada en general por medio de la experiencia. Si el número de ensayos aleatorios creciera indefinidamente, esta probabilidad podría ser determinada de modo exacto, o sea, con una certeza comparable a la del suceso cuyo contradictorio es físicamente imposible».

Resulta interesante observar que la expresión *probabilidad matemática*, originariamente derivada de la medida de probabilidad *subjetiva*, pasa ahora a convertirse en medida de la posibilidad *física* u *objetiva* de ocurrencia de los fenómenos.

Como Ellis, Cournot (pp. 154-155) rechaza también la teoría de Bayes-Laplace de las probabilidades *a posteriori*, pues dependiendo la aplicación del Teorema de Bayes de una asunción *a priori* de la distribución uniforme de los valores posibles del parámetro desconocido, este Teorema es fuente de serios errores. No participaba desde luego de esta opinión ya mucho antes su compatriota Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marqués de Condorcet, quien en su *Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions Rendues à la pluralité des voix*, *Analyse de la troisième Partie*, 1785, destaca las ventajas del método bayesiano frente al intento de Bernoulli de inferir probabilidades a partir de frecuencias observadas[10].

Aunque Ellis fue el primer matemático que relacionó las nociones de *probabilidad* y *frecuencia a la larga*, George Boole también fue el primero, que yo sepa, que definió la *probabilidad* como el *límite de una frecuencia observada*. En efecto, en el § 2 del capítulo XIX de su *Investigation of the Laws of Thought*, 1854, Boole afirma, contra el enfoque subjetivista de la probabilidad de Poisson, que:

«En cuanto derivada de una experiencia real, la probabilidad de un suceso (...) es el límite de la razón del número de casos en que se ha observado su ocurrencia, en relación al número total de casos igualmente posibles recopilados observacionalmente, —un límite al que nos acercamos tanto más cuanto más crece el número de observaciones».

Boole es efectivamente escéptico respecto de la posibilidad de evaluar numéricamente la esperanza subjetiva. Esto lo deja claro en *op. cit.*, capítulo XVI, § 3 *et passim*, donde asevera que

«... no sería filosófico afirmar que la fuerza de esta esperanza, considerada como una emoción de la mente, es capaz de ser designada numéricamente de forma típica».

En el capítulo XX de su libro, Boole investiga los «Problemas relativos a

---

[10] «L'idée de chercher la probabilité des évènemens futurs d'après la loi des évènemens passés, paroît s'être présentée à Jacques Bernoulli & à Moivre, mais ils n'ont donné dans leurs ouvrages aucune méthode pour y parvenir.

M^{rs}. Bayes & Price en ont donné une dans les *Transactions Philosophiques*, années 1764 & 1765, & M. de la Place est le premier qui ait traité cette question d'une manière analytique».

la conexión de causas y efectos». Aquí se opone a la forma especial de subjetivismo supuestamente implícita en el *principio laplaceano de razón insuficiente*. En el § 23 Boole apunta hacia una supuesta arbitrariedad en el método de asignar grados iguales de probabilidad a diferentes estados de cosas por la simple razón de no saber nada acerca de ellos. En particular, el cómputo de la probabilidad de la próxima salida del sol, bajo el supuesto de equiprobabilidad de todas las descripciones de estado lógicamente posibles, debería conducir, contradiciendo los valores que proporciona la famosa *Regla de Sucesión* de Laplace, al resultado de que *la experiencia pasada no afecta para nada a las expectativas futuras*. Un modelo de urna para este problema nos ayudará a resolver el problema. Supongamos una urna que contiene un número infinito μ de bolas blancas y negras. ¿Cuál es la probabilidad de que, si se han extraído m bolas blancas en m extracciones consecutivas, se obtendrá también una bola blanca en la extracción m+1-ésima? Si aplicamos el principio de razón insuficiente aceptaremos a priori que $p(blanca) = 1/2 = p(negra)$, y las 2^{μ} descripciones de estado posibles del sistema son *equiprobables*. Una de éstas es la que afirma que todas las bolas de la urna son blancas. Si con $p(m)$ denotamos las probabilidad de m extracciones consecutivas de bolas blancas y con h designamos la hipótesis de que la extracción m+1-ésima también será una bola blanca, obviamente $p(m) = 1/2^m$ y $p(h) = 1/2$. Consiguientemente, $p(h|m) = 1/2^{m+1} : 1/2^m = 1/2$. Así pues, los presupuestos nos impiden hacer uso del Teorema de Bayes como un procedimiento para aprender de la experiencia.

Por lo expuesto hasta ahora resulta más que evidente que cuando John Venn publicó en 1866 su *Logic of Chance*, la noción de probabilidad como límite de una frecuencia relativa ya no constituía ninguna novedad. En todo caso Venn (1866, p. 18) también afirma, que si cierta proporción empieza a prevalecer a la larga entre los sucesos, entonces podemos

> «introducir el concepto de un límite hacia el que los números tienden, asumiendo que estas circunstancias no cambian».

Contra la definición clásica de la probabilidad de un suceso, Venn propone (p. 80) apelar a la proporción de casos en que el suceso acontece realmente, en lugar de apelar a la proporción de casos favorables al mismo. De manera muy clara Venn (pp. 89-90. Cursivas mías) afirma:

> «... entre la irregularidad de nacimientos individuales encontramos que a la larga el número de niños es al de niñas como 106 a 100. Ahora bien, si se nos dijera que esto no es más que 'el desarrollo de sus respectivas probabilidades' ¿no sería esta frase sino una reformulación pedante del hecho ya afirmado? *La probabilidad no es nada más que esta proporción, y* en este caso incuestionablemente *no se deriva de otra fuente que las estadísticas mismas*».

De acuerdo con esto, Venn (pp. 162-164) propone:

> «... podemos definir la probabilidad (...) de esta ocurrencia particular del suceso como la fracción numérica que representa la proporción a la larga entre las dos

clases diferentes (...). Esto supone que las series son indefinidamente largas (...). Cuantos más términos de la serie tomemos (...) la proporción se aproximará efectivamente hacia un valor numérico fijo, que los matemáticos denominan su *límite*. El valor de esta fracción es el mencionado antes».

La identificación de la probabilidad con una proporción empíricamente constatable, parece definitivamente reinstalada, lo que aproxima la concepción frecuencialista de la probabilidad a la época anterior a su interpretación subjetiva.

Como John Venn es un claro exponente de la concepción frecuencial de la probabilidad, en el punto de mira de sus críticas se encuentran: el propio concepto subjetivo de probabilidad, la teoría bayesiano-laplaceana de la probabilidad inversa, y su corolario, la regla de sucesión. En contra del primero Venn sostiene que no parece posible obtener adecuadamente una medida de nuestra creencia en una proposición determinada. Contra la segunda afirma que, cuando se dispone de estadísticas apropiadas, la distinción entre los métodos inversos y directos se desvanece, por lo que sería mejor abandonarla. La siguiente reconstrucción del argumento de Venn (*op. cit.*, p. 180 y ss.) pretende poner de manifiesto la arbitrariedad de los supuestos en que se basa la aplicación del método de la probabilidad inversa, lo que aconseja su abandono.

Observamos que una bola blanca ha sido extraída de una bolsa que contiene diez bolas, y preguntamos por la probabilidad de que ésta sea la única bola blanca que hay en la bolsa. A fin de analizar esta cuestión podemos suponer que disponemos de diez bolsas, una de las cuales contiene una bola blanca y nueve negras, otra contiene dos bolas blancas y ocho negras, una tercera contiene tres blancas y siete negras,..., y finalmente la décima bolsa sólo contiene diez bolas blancas. Si en ausencia de más información asumimos que estas diez bolsas son equiprobables, el Teorema de Bayes nos permite concluir que:

$$\mathrm{P(bolsa\text{-}con\text{-}1\text{-}sóla\text{-}bola\text{-}blanca} \mid \mathrm{blanca\text{-}extraída)} =$$

$$= \frac{P(bolsa-con-1-bola-blanca) \times P(blanca-extraída \mid bolsa-con-1-blanca)}{\sum_{i=1}^{i=10} P(bolsa-con-i-blancas) \times P(bola-blanca \mid bolsa-con-i-blancas)}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.1}{0.1 \times \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{10}} = \frac{0.01}{0.55} = 0.01818 = \frac{1}{55}.$$

Esta es en efecto la probabilidad *a posteriori*, calculada por medio del Teorema de Bayes, de que la bola blanca observada proceda de una bolsa que sólo contiene una única bola blanca.

Ahora bien, siguiendo a William A. Whitworth en *Choice and Chance*, pp. 123-124, Venn asevera que el supuesto de partida podría haber sido diferente, por ejemplo, que las diferentes formas de extraer cualquier número de bolas blancas sean equiprobables. En este caso, la probabilidad *a posteriori* de haber llevado a cabo la extracción a partir de una bolsa con diez formas diferentes de obtener una bola blanca será distinta a la calculada bajo el supuesto anterior, a saber: $1/512$ en lugar de $1/55$. En efecto, hay $\binom{10}{1}=10$ diferentes formas de extraer 1 bola blanca, $\binom{10}{2}=45$ diferentes formas de extraer 2 bolas blancas,..., $\binom{10}{5}=252$ diferentes formas de extraer 5 bolas blancas,..., $\binom{10}{10}=1$ única forma de extraer 10 bolas blancas. En total, hay $2^{10}=1024$ formas diferentes, lógicamente posibles y equiprobables de combinar 10 bolas, blancas y negras. Con este nuevo supuesto, la probabilidad *a priori* de extraer a partir de una bolsa con 1 única bola blanca equivale a la probabilidad *a priori* de extraer a partir de una bolsa con 10 formas diferentes de obtener 1 bola blanca, a saber: $10/1024$. Por otra parte, la probabilidad *a priori* de extraer 1 bola blanca es igual a la probabilidad *a priori* de extraer 1 bola negra, o sea: $1/2$. Finalmente, la probabilidad de extraer 1 bola blanca de una bolsa que contiene sólo 1 bola blanca y 9 de un color distinto es $1/10$.

Consiguientemente,

$$P(bolsa - con - una - bola - blanca \mid observ.) = \frac{\frac{10}{1024} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = 0.001953 = \frac{1}{512}.$$

La introducción del concepto de *colectivo* en relación con la probabilidad con el cambio de siglo contribuyó decisivamente a la consolidación del concepto frecuencial de probabilidad. En el § 1 de su *Kollektivmasslehre*, Leipzig 1897, Gustav T. Fechner define la noción de *objeto colectivo* (K.-G.) de la forma siguiente:

> «Entiendo como objeto colectivo al que consta de un número indefinido de especímenes que varían aleatoriamente y se mantienen unidos por medio de un concepto de género o especie».

La temperatura el 1 de enero medida en cierto lugar durante un número de años, o la totalidad de las tallas de los reclutas de una región determinada, pueden ser consideradas ejemplos de objetos colectivos. De la definición de K.-G. se sigue fácilmente que las leyes generales de la probabilidad se pueden aplicar a él. Por tanto, la cuestión más importante que surge en relación a la teoría de los objetos colectivos es, según Fechner, la de la *ley de distribución* de los especímenes de los K.-G.

En «Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Collectivbegriffe», 1902, Georg Helm se propone verificar el marco teórico del cálculo de probabilidades, que él consideraba necesitado de una fundamentación que justificara sus aplicaciones en investigaciones estadísticas. Según Helm, p. 365,

> «Cada *concepto colectivo* unifica en un todo una serie de objetos individuales, los especímenes del objeto colectivo».

Consideremos las diferencias individuales entre los objetos del concepto colectivo y unifiquémoslos en los subconceptos mutuamente exclusivos (*A*), (*B*), (*C*),..., que conjuntamente constituyen el concepto original como término genérico (*A*+*B*+*C*+...). Sea, pues, *a* el número de objetos individuales unificados en el concepto (*A*), *b* el número de los representados en el concepto (*B*), etc., de forma que a+b+c... equivale al número total de todos los especímenes unificados en el concepto genérico (*A*+*B*+*C*+...). Obviamente, $a/_{a+b+c+\cdots} = \alpha$, $b/_{a+b+c+\cdots} = \beta, \cdots$ son las *proporciones disyuntivas de* (*A*), (*B*),... en relación al concepto genérico (*A*+*B*+*C*+...). Helm denomina a estas frecuencias observadas *probabilidades*, si las relaciones conceptuales correspondientes se han encontrado repetidamente realizadas. α es pues la probabilidad de que un individuo pertenezca a *A* tras conocer que pertenece al concepto genérico (*A*+*B*+*C*+...). Los juegos de azar y las extracciones de una urna constituyen modelos muy apropiados para la denominación de probabilidades de estas proporciones disyuntivas.

Según Helm (pp. 367-368), la expresión *probabilidad de ocurrencia de un suceso E* es incorrecta, pues

> «la probabilidad nunca es una propiedad de individuos, sino únicamente la *propiedad de un concepto colectivo* que abarca a los individuos».

Así pues el concepto de «lanzamiento de un dado» es un concepto colectivo que abarca a seis objetos individuales semejantes, las seis caras del dado. La probabilidad de obtener 1 bola negra y 1 bola blanca en una extracción simultánea de dos bolas de una urna que contiene *s* bolas negras y *w* bolas blancas es una propiedad del concepto «extracción (1 | 1) de la mezcla (*s* | *w*)»; la probabilidad de mortalidad de una persona de ochenta años de edad no es una propiedad de este individuo particular, sino del concepto de *octogenario*, etc.

En un paso nuevo, Helm (pp. 379-381) identifica el concepto de proba-bilidad con el valor *límite* de una frecuencia observada, es decir, de una proporción disyuntiva. Supongamos en efecto que contamos repetidamente *A* especímenes del concepto colectivo, y que sucesivamente encontramos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ especímenes de una cierta propiedad. Las proporciones disyuntivas observadas son

$$\frac{a_1}{A}, \frac{a_2}{A}; \frac{a_3}{A}, \ldots, \frac{a_n}{A}.$$

Como el conocimiento adquirido acerca de estas proporciones disyuntivas viene dado por las fracciones

$$\frac{a_1}{A}, \frac{a_1 + a_2}{2A}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3A}, \ldots, \frac{\sum_n a}{nA},$$

la diferencia entre dos proporciones disyuntivas consecutivas es

$$\frac{\sum_{n} a}{nA} - \frac{\sum_{n+1} a}{(n+1)A} = \frac{\sum_{n} a}{nA} - \frac{\sum_{n} a + a_{n+1}}{(n+1)A} = \frac{\sum_{n} a - na_{n+1}}{n(n+1)A}.$$

na_{n+1} puede ser mayor o menor que $a_1+a_2+a_3+...a_n$, en cuyo caso $\sum_{n} a - na_{n+1}$ sería respectivamente un número negativo o positivo; pero como cada a se encuentra entre 0 y A, sucede que

$$-nA < \sum_{n} a - na_{n+1} < nA,$$

y la diferencia de dos proporciones disyuntivas sucesivas se sitúa entre $\pm 1/_{n+1}$, es decir, converge hacia 0, si n es arbitrariamente grande. Las proporciones disyuntivas se acercan siempre al valor *límite* $\sum_{n} a / _{nA}$, al que Helm denomina *probabilidad*.

También Heinrich Bruns, en *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre*, 1906, §§ 8-9, define directamente la *probabilidad matemática* de un suceso *E*, *W(E)*, como la frecuencia relativa *(rH)* de los casos favorables a *E*,

> «así, el cálculo de probabilidades *(W.-R.)* es meramente, según su contenido matemático, un cálculo frecuencial».

O, como afirma explícitamente en el § 10,

> «si entre *c* posibilidades *a* son favorables a cierto suceso *E*, entonces la *rH* observada de este suceso convergerá a $a/_c$, o *W(E)*».

La justificación de esta proposición es, según Bruns, puramente empírica, ya que se debe considerar una generalización, por inducción, de hechos observados. A este respecto Bruns (*op. cit.*, § 150) afirma i) que la validez, independientemente de la experiencia, de los teoremas obtenidos deductivamente del cálculo frecuencial puramente matemático, ha de ser seriamente separada de ii) la justificación inductiva de la aplicación de estos teoremas a sucesos observados.

El punto culminante de la teoría probabilista de los colectivos se alcanza con la publicación por Richard von Mises en 1919 de «Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung». Pero von Mises, que concede gran importancia a este artículo suyo en el Prefacio a la tercera edición alemana de su libro *Probability, Statistics and Truth*, originalmente publicada en alemán en 1928, reconoce aquí, al igual que hizo en su artículo mencionado de 1919, que la definición de probabilidad como la frecuencia relativa de sucesos en colectivos ya había sido anticipada en cierta medida por Cournot en Francia, Venn en Inglaterra, y Helm y Bruns en Alemania.

Muy brevemente von Mises señala en este artículo el punto débil de la definición laplaceana de probabilidad, a saber: que, como *igualmente posible* sólo puede querer decir *igualmente probable*, esta definición implica una *petitio principii*. En 1928 (pp. 75-76) von Mises afirma además, que esta definición es una consecuencia de la «errónea» teoría subjetiva de la probabilidad. No le falta razón a von Mises, pues como hemos visto en la Sección anterior, la comúnmente conocida como *definición clásica* de probabilidad originariamente no es sino la *definición de la medida* de nuestro conocimiento *subjetivo* acerca de la ocurrencia de un fenómeno.

Von Mises (1919) presenta la definición frecuencial de probabilidad en el *§ 1 Grundbegriffe* (Conceptos fundamentales). Su propósito es mostrar que, en tanto el cálculo de probabilidades se ocupa de «fenómenos de masas y sucesos repetitivos», la probabilidad es una propiedad física genuina, cuya medida la da la frecuencia relativa observada en un colectivo de datos que satisfacen los axiomas indicados más abajo. Von Mises enraíza este nuevo enfoque de la probabilidad en el *hecho de experiencia* de que toda frecuencia relativa observada deviene prácticamente constante a medida que aumenta el número de datos recogidos; de manera que si estos crecen indefinidamente, la frecuencia relativa se aproxima a un valor límite. Este valor es denominado por von Mises la *probabilidad* del suceso en cuestión. El *hecho de experiencia* en cuestión, del que von Mises (1919, p. 91) afirma que no es matemáticamente demostrable, es la *Ley de los grandes números* de Poisson, la cual no debe ser confundida con el resultado puramente matemático conocido como *Teorema de Bernoulli*, posteriormente generalizado por Poisson mismo y Tchebycheff.

Formulada de una manera simple, la definición frecuencial de *probabilidad en un colectivo* de von Mises's (1919, § 1) es:

> «Una serie indefinidamente larga *(e)* de objetos o sucesos $e_1, e_2, e_3,\ldots$, que son sus elementos, se denomina un *colectivo* (es decir, un objeto colectivo) K, si satisface la siguiente condición (axioma):
>
> *Condición I. Existencia de límite.* Sea A una propiedad de los elementos de K, y N_A el número observado, entre los primeros N elementos, que son A; entonces existe para A el valor límite
>
> $$\lim_{N=\infty} \frac{N_A}{N} = W_A ,$$
>
> o *probabilidad en el colectivo* K del atributo A, si se satisface también el siguiente requisito:
>
> *Condición II. Principio de Aleatoriedad.* Sean A y B dos propiedades incompatibles de los elementos de K, y W_A and W_B sus correspondientes valores límite positivos; si en la serie *(e)* de elementos de K seleccionamos, de acuerdo con una regla previamente fijada, un subconjunto de *(e)*, entonces los valores límite correspondientes W'_A y W'_B de A y B deberían satisfacer respectivamente
>
> $$W'_A : W'_B = W_A : W_B .$$

La condición I no es para von Mises (1928, pp. 115-116) más que la Ley empírica de los grandes números de Poisson, o sea, el hecho empírico de que las frecuencias relativas observadas en series indefinidamente prolongadas de observaciones tienden hacia valores límites constantes. Por su parte, la Condición II no es sino el *Principio de imposibilidad de un sistema de juego* (von Mises, 1928, pp. 28-29), que impide a cualquier jugador mejorar sus posibilidades. En «Über kausale und statistische Gesetzmäßigkeit», 1930, von Mises explica así esta condición: imaginemos un jugador que apuesta por el número 6 en un juego de dados con una expectativa de ganar de $\frac{1}{6}$, es decir, el valor límite del cociente de apuesta es $n_6{:}n$. Si la sucesión de los resultados del lanzamiento del dado mostrase cierta regularidad, el jugador podría elegir los juegos en los que pensara que podría mejorar sus posibilidades. El requisito de aleatoriedad precisamente impide la existencia de sistemas de juegos.

El discípulo de von Mises, Hans Reichenbach, comparte también este concepto de probabilidad. En efecto, en «Kausalität und Wahrscheinlichkeit», 1930, p. 163, Reichenbach sostiene que

> «el significado de una frase probabilista consiste en una proposición frecuencial».

La razón de esto es que la experiencia enseña que la medida de la probabilidad de un suceso concuerda con la frecuencia de su ocurrencia. Como en opinión de Reichenbach la concepción subjetiva no puede dar cuenta de este hecho, ha sido abandonada en las ciencias naturales, en las que toda frase probabilista se traduce como una proposición frecuencial.

5. La restauración de la interpretación subjetiva de la probabilidad

Tras un paréntesis de aproximadamente medio siglo, durante el que, como acabamos de ver, la concepción frecuencialista de la probabilidad experimenta un desarrollo importante, debido *(i)* a las críticas a que es sometida la definición laplaceana y sus consecuencias: el *principio de razón insuficiente*, la *regla de sucesión*, el *teorema de Bayes*, y el propio concepto subjetivo de probabilidad; y *(ii)* al desarrollo de métodos estadísticos en las ciencias humanas y naturales, la concepción subjetiva de la probabilidad comienza a atraer de nuevo el interés de los teóricos de probabilidades a partir de comienzos del siglo presente. Su renacimiento se inicia, en el ámbito de la filosofía de la probabilidad, principalmente por obra de John Maynard Keynes, quien *modo bernoulliano* sostiene (1921, p. 15) que:

> «De la probabilidad no podemos decir más que constituye un grado de creencia racional menor que la certeza; y podemos añadir, si queremos, que trata con grados de certeza».

A éste le siguen Ludwig Wittgenstein *(Tractatus 5.156)*:

> «Sólo en ausencia de certeza hacemos uso de la probabilidad...».

y Friedrich Waismann (1930, pp. 236-237):

> «La incompletud de nuestro conocimiento es la única razón para la introducción del concepto de probabilidad...».

Su rehabilitación matemática tuvo lugar empero *modo bayesiano*, es decir, recurriendo al concepto de apuesta; lo que, ligado al uso que vuelve a hacerse del *Teorema de Bayes* como instrumento para la *inferencia inversa de probabilidades* a partir de datos de experiencia, permitió el desarrollo de la moderna teoría *subjetiva, personalista* o (neo) *bayesiana* de probabilidades. Responsables de este relanzamiento en los primeros decenios del siglo XX fueron, entre otros, Ramsey y de Finetti.

Ramsey concibe la teoría de probabilidades como lógica de la creencia parcial, cuya tarea consiste en el cálculo de grados de creencia en (o valores de probabilidad de) la verdad de las proposiciones. El modelo *bayesiano* de apuesta es el que le parece a Ramsey (1926, p. 73) el más razonable al respecto:

> «La manera tradicional de medir la creencia de una persona es proponerle una apuesta a fin de observar cuáles son las apuestas mínimas que está dispuesto a aceptar. Este procedimiento me parece fundamentalmente saludable».

También Bruno de Finetti concibe la probabilidad (subjetiva) en términos de apuesta. Así asevera (1936, p. 36):

> «La probabilidad (subjetiva) atribuida por el individuo O a un suceso A es el precio p al que considera justo cambiar una suma pS por una cantidad S, cuya posesión está subordinada a la realización de A (...). La probabilidad expresa pues las condiciones en que se considera justo apostar».

Y en (1937, p. 101) insiste que:

> «... el grado de probabilidad atribuido por un individuo a un suceso dado lo ponen de manifiesto las condiciones en que éste estaría dispuesto a apostar a favor del suceso».

Para Ramsey y de Finetti el cumplimiento de las leyes del cálculo de probabilidades es un requisito imprescindible para garantizar la *consistencia* de los grados de creencia o la *coherencia* de las apuestas, a fin de que no suceda que sea posible apostar con un individuo de tal forma que la ganancia o la pérdida estén garantizadas.

6. El enfoque frecuencialista de la probabilidad en estadística matemática

Los estadísticos contemporáneos no bayesianos se preocupan menos de la definición de la probabilidad, sobre la que descansan los métodos estadísticos, que los teóricos de probabilidades. En general se contentan con adscribirse a la concepción frecuencial heredada. Así, el fundador de la actual estadística teórica, Sir Ronald A. Fisher, apenas dedica unas páginas a caracterizar el concepto de probabilidad que él mismo sostiene. En su artículo fundacional de 1922, «On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics», Sección 2, afirma que la probabilidad no representa más que la razón frecuencial que muestra una hipotética población infinita. Así, decir que la probabilidad de obtener un 5 con un dado es $1/6$, quiere decir que, en una población hipotética de un número infinito de lanzamientos con el dado, y sin que se alteren sus condiciones originarias, el número de 5 obtenidos será exactamente $1/6$. Y en el capítulo II, Sección 4, de su *Statistical Methods and Scientific Inference*, 1956, equipara «razón límite» con «probabilidad». En *op. cit.*, p. 15, Fisher reprocha a la definición laplaceana de probabilidad la ausencia de una explicación de la diferencia entre *posible* y *probable.*

Por lo que a Jerzy Neyman respecta, desarrollador consecuente, junto con Egon S. Pearson, de los métodos estadísticos de Fisher, éste, Neyman (1952)[11], dedica las primeras lecturas de este libro tanto a presentar las ideas básicas de la teoría de probabilidades que tenía *in mente* cuando investigaba los métodos estadísticos de contraste (test) de hipótesis y de estimación paramétrica, como a resolver el problema de la aplicabilidad de la teoría matemática de probabilidades a cuestiones prácticas. Pues bien, según Neyman (*op. cit.*, p. 2 y ss.)

> «... la probabilidad de que un objeto *A* tenga la propiedad *B* se define como la proporción de objetos *A* que poseen la propiedad *B*».

Con la sola diferencia de que Neyman no hace la menor referencia a «casos igualmente posibles» en la totalidad de objetos *A* que forman el llamado *conjunto fundamental de probabilidad*, la estadística matemática contemporánea no bayesiana cierra el ciclo del desarrollo del concepto de probabilidad, volviendo claramente de nuevo a los orígenes, al concebir la probabilidad en términos de proporción.

7. Conclusión

La historia recién concluida sobre los cambios de significado del término probabilidad muestra efectivamente la existencia de dos interpretaciones principales de este concepto radicalmente diferentes, aunque su cálculo matemático subyacente es el mismo, pues ambas se reclaman de la axiomática de la probabilidad debida a Kolmogorov en 1933. Esto evita ciertamente que, aunque podemos hablar de la existencia de dos paradigmas enfrentados, no podamos decir que la situación en que se encuentra actualmente la teoría de probabilidades sea de crisis. La proliferación de paradigmas en competencia no es pues una condición necesaria ni suficiente para declarar en crisis una ciencia determinada.

[11] Estas *Lectures and Conferences* estaban ya disponibles desde 1938 en una versión multicopiada.

En cualquier caso resulta obvio que los argumentos esgrimidos por los frecuencialistas en contra de la interpretación clásico-subjetiva de la probabilidad, o de sus elementos nucleares: el concepto subjetivo mismo de probabilidad, el Teorema de Bayes, la Regla de Sucesión, la teoría de la probabilidad inversa, etc., algunos de los cuales hemos presentado aquí, no han hecho mella suficiente entre los subjetivistas, quienes arguyen —nada de esto ha sido dicho en las páginas precedentes— que, o bien estas razones no son procedentes, que la propia interpretación de probabilidad como límite de una frecuencia observada es tan legítima como la otra, que la asunción de independencia representa una opción tan discutible como la de dependencia, que la estadística teórica frecuencialista no es una teoría genuina de la inferencia científica[12], etc. Pero la discusión de todas y cada una de estas cuestiones excedería con mucho los límites naturales de este trabajo, por lo que no pueden por menos que ser simplemente mencionadas aquí. En cualquier caso la teoría de probabilidades no se encuentra, ni mucho menos, en condiciones de optar racionalmente por uno de los dos paradigmas presentados en este trabajo.

Bibliografía

Arnauld, Antoine & Nicole, Pierre (1662): *La Logique, ou l'Art de Penser*, París.

Bayes, Thomas (1763): «An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London 53*, pp. 370-418. Reimpreso a partir de *Biometrika 45*, 1958, pp. 293-315, en E. S. Pearson & M. Kendall (eds.), *Studies in the History of Statistics and Probability*, Vol. 1. Charles Griffin & Co. Ltd., Londres, 1970.

Bernoulli, Jakob: *Ars Conjectandi*, Basel, 1713. Nueva edición en *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Vol. 3, editada por la Naturforschende Gesellschaft in Basel. Birkhäuser Verlag, Basel, 1975. Versión española: «Teoría de Probabilidades». *Llull*, Vol. 16, 1993, pp. 389-418.

Bertrand, Joseph Louis (1889): *Calcul des Probabilités*, París.

Biermann, Kurt-R. & Faak, Margot (1957): «G. W. Leibniz' 'De incerti aestimatione'». *Forschungen und Fortschritte 31*, Heft 2, pp. 45-50.

Boole, George (1854): *Investigation of the Laws of Thought*, Londres.

Bruns, Heinrich (1906): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre*. B. G. Teubner, Leipzig.

Cardano, Girolamo (1663): *Hyeronimus Cardanus Opera Omnia*, Lyon, Vol. 1 de la edición facsímil introducida por August Buck. Friedrich Frommann Verlag (Günther Holboog), Stuttgart-Bad Cannstatt, 1966.

[12] Sobre las posibilidades y límites de la estadística frecuencialista de Fisher y Neyman-Pearson, puede consultarse Rivadulla (1991*a*, Estudios IV y V) y (1991*b*).

Caritat, Marie Jean (1785): *Essai sue l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions Rendues à la pluralité des voix*, París.

Cournot, Antoine Augustin (1843): *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités*, París, 1843.

De Mora Charles, Marisol (comp.) (1989): *Los inicios de la teoría de la probabilidad. Siglos XVI y XVII*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

De Morgan, Augustus (1838): *An Essay on Probabilities*, Londres.

De Finetti, Bruno (1936): «La logique de la probabilité». *Actualités Scientifiques et Industrielles 391*, pp. 31-39.

De Finetti, Bruno (1937): «Foresight: its logical laws, its subjective sources». *Annales de l'Institut Henri Poincaré, 7.* Reimpreso en H. E. Kyburg & H. E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*. John Wiley & Sons, New York, Londres, 1964.

DeGroot, Morris H. (1988): *Probabilidad y Estadística.* Addison-Wesley Iberoamericana, México. Título original, *Probability and Statistics*, Segunda edición, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass, 1986.

Ellis, Robert Leslie (1842): «On the Foundations of the Theory of Probability». En *The Mathematical and Other Writings of Robert Leslie Ellis*, ed. by William Walton. Cambridge: Deighton, Bell and Co., 1863.

Fechner, Gustav Theodor (1897): *Kollektivmasslehre.* Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig.

Fisher, Ronald (1922): «On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A, 222, pp. 309-368.

Fisher, Ronald (1956): *Statistical Methods and Scientific Inference*. Oliver and Boyd, Edimburgo.

Helm, Georg (1902): «Die Wahrscheinlichkeitslehre als Theorie der Collectivbegriffe». *Annalen der Naturphilosophie 1*, pp. 364-38.

Keynes, John Maynard (1921): *A Treatise on Probability*. MacMillan & Co., Londres.

Lacroix, Silvestre François (1816): *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, París.

Laplace, Pierre Simon (1776): «Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards». En *Oeuvres complètes de Laplace*, Vol. 8, París, 1891.

Laplace, Pierre Simon (1820): *Théorie Analytique des Probabilités*, 3ª edición, París. 1ª edición, 1812.

Mill, John Stuart (1843): *A System of Logic Ratiocinative and Inductive*. Routledge & Kegan Paul, Londres.

Neyman, Jerzy (1952): *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability*. Graduate School, U. S. Department of Agriculture, Washington.

Quetelet, Adolphe (1846): *Lettres sur la Théorie des Probabilités*, Bruselas.

Ramsey, Frank Plumpton (1926): «Truth and Probability», en *The Founda-*

tions of Mathematics and Other Logical Essays. Routledge & Kegan Paul, Londres, 1931. Reimpreso en H. E. Kyburg & H. E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, John Wiley & Sons, New York, Londres, 1964.

Reichenbach, Hans (1930): «Kausalität und Wahrscheinlichkeit». *Erkenntnis 1*, pp. 158-188.

Rivadulla, Andrés (1986): *Filosofía Actual de la Ciencia*, Editorial Tecnos, Madrid.

Rivadulla, Andrés (1991*a*): *Probabilidad e Inferencia Científica*, Ed. Anthropos, Barcelona.

Rivadulla, Andrés (1991*b*): *«Mathematical Statistics and Metastatistical Analysis». Erkenntnis 34*, pp. 211-236.

Rivadulla, Andrés (1993): «Wahrscheinlichkeitsaussagen, statistische Inferenz und Hypothesenwahrscheinlichkeit in L. Wittgensteins Schriften der Übergangsperiode». En Klaus Puhl (ed.), *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Part 2, Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Viena.

Rivadulla, Andrés (1995): «Probabilidad bayesiana, probabilidad frecuencial y la teoría carnapiana de la inferencia estadística». En R. Cirera *et. al.* (comps.), *El programa de Carnap. Ciencia, lenguaje, filosofía*, Ed. Anthropos, Barcelona, 1995.

Venn, John (1866): *The Logic of Chance*, MacMillan and Co., Londres.

von Mises, Richard (1919): «Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung». *Mathematische Zeitschrift 5*, pp. 52-99.

von Mises, Richard (1928): *Probability, Statistics and Truth*. George Allen and Unwin LTD. 2ª ed. rev., Londres 1957 (1ª edición alemana, 1928).

von Mises, Richard (1930): «Über kausale und statistische Gesetzmässigkeit». *Erkenntnis 1*, 1930, pp. 189-210.

Waismann, Friedrich (1930): «Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs». *Erkenntnis 1*, pp. 228-248.

Whitworth, William Allen (1867): *Choice and Chance*, Cambridge.

Wittgenstein, Ludwig (1921): *Tractatus logico-philosophicus*. Aparecido en *Annalen der Naturphilosophie*. Edición bilingüe en Routledge & Kegan Paul, Londres, 1922.

Andrés RIVADULLA
Universidad Complutense de Madrid

NOTA: por razones editoriales se publica en este número de la Revista el presente artículo que forma parte de las ponencias del *Symposium* sobre **Problemas semánticos de los lenguajes científicos**, publicadas en *AGORA* 13/2.