



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

# Triangulaciones, el lema de Sperner y el teorema de punto fijo de Brouwer

Lucía Domínguez Carballo

2019/2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA



GRAO DE MATEMÁTICAS

**Traballo Fin de Grao**

# Triangulaciones, el lema de Sperner y el teorema del punto fijo de Brouwer

Lucía Domínguez Carballo

Julio, 2020

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA





# Trabajo propuesto

<b>Área de Coñecemento:</b> Geometría y Topología
<b>Título:</b> Triangulaciones, el lema de Sperner y el teorema del punto fijo de Brouwer.
<b>Breve descripción do contido:</b>
<p>Triangulamos un simplex <math>S=[0, 1, \dots, n]</math> e imponemos la siguiente regla de Sperner a los nuevos <math>n</math>-símplices que aparezcan: si tienen algún vértice en una <math>(n-1)</math>-cara de <math>S</math>, el nombre de ese vértice debe estar entre los <math>n-1</math> dígitos que determinan la cara. Entonces alguno de los nuevos <math>n</math>-símplices tiene todos los dígitos <math>0, 1, \dots, n</math> como vértices. De aquí se obtiene una demostración elemental del teorema del punto fijo de Brouwer: Si <math>A</math> es un abierto acotado y convexo de <math>\mathbb{R}^n</math> y <math>B</math> es la clausura de <math>A</math>, entonces toda aplicación continua de <math>B</math> en <math>B</math> posee algún punto fijo, es decir, algún punto <math>p</math> de <math>B</math> verifica <math>f(p) = p</math>. De este teorema de Brouwer se derivan varias propiedades topológicas importantes de las esferas euclidianas, que se examinarán brevemente.</p>
<b>Recomendacións</b>
<b>Outras observacións</b>

# Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Preliminares	1
2. Símplices en $R^n$	5
3. Subdivisión baricéntrica	11
4. Lema de Sperner	19
5. Teorema del punto fijo de Brouwer	25
6. Aplicaciones	29
7. Conclusión	33
Bibliografía	35



## Resumen

El objetivo de este trabajo es proporcionar una demostración elemental y poco conocida del teorema del punto fijo de Brouwer, que se basa esencialmente en el lema de Sperner (un resultado puramente combinatorio sobre triangulaciones de un  $n$ -símplex, fácil de probar) y en una sencilla propiedad sobre recubrimientos cerrados de un  $n$ -símplex, debida a Knaster, Kuratowski y Mazurkiewich. A su vez, señalemos que el teorema de Brouwer implica el lema de Sperner.

## Abstract

The aim of this work is to provide a quite elementary proof of Brouwer's Fixed Point Theorem, which is mainly based on a combinatorial simple result known as Sperner's Lemma, dealing with triangulations of a non degenerated  $n$ -simplex and on a property of closed coverings of the  $n$ -simplex, due to Knaster, Kuratowski and Mazurkiewickz. It's worth mentioning that Brouwer's Theorem implies Sperner's Lemma.



# Introducción

Desde sus orígenes, la Topología (Topologie, neologismo creado por Listing, uno de los escasos discípulos de Gauss) ha tratado y trata de explicar propiedades geométricas, analíticas o combinatorias muy básicas pero difíciles de establecer, como puede ser el teorema de la curva de Jordan. Así la Topología Algebraica (antiguamente conocida como Topología Combinatoria) es el estudio de los métodos algebraicos y combinatorios que permiten obtener resultados topológicos. Por ejemplo, los grupos de homología  $H_n(|K|, \mathbb{Z})$  de un espacio topológico  $|K|$  conexo por caminos y asociado a un complejo simplicial finito  $K$ , ( $n \geq 0$ ), son grupos que revelan a veces propiedades distintivas de ese espacio, en el siguiente sentido: dados dos espacios topológicos  $X = |K|$  e  $Y = |L|$ , si para algún  $n \geq 0$  sus respectivos grupos de homología NO son isomorfos, entonces  $X$  e  $Y$  NO son homeomorfos.

La incorporación progresiva a la Topología de métodos extraídos del análisis (como el teorema de multiplicadores de Lagrange, el teorema de aproximación de Stone-Weierstrass, el teorema de Stokes, el teorema de Fubini...) o de la geometría diferencial (variedades de Riemann, fibrados, acciones de grupos...) ha dado paso a lo que actualmente se conoce como Topología Diferencial o Topología de Variedades (que incluye el estudio de la integración en variedades y la llamada Teoría de Morse) la cual aporta razonamientos alternativos a los de la Topología Algebraica y métodos completamente nuevos. Todo ello ha sumido en el olvido muchos métodos combinatorios que han sido substituidos o simple y llanamente ignorados.

Nuestro objetivo en este trabajo es retomar y poner en valor uno de esos métodos: el Lema de Sperner y su uso para probar el celeberrimo teorema del punto fijo de Brouwer, que junto con otros teoremas similares (de Banach, Schauder-Tychonoff, Lefschetz, Kakutani, Poincaré-Miranda,...) han creado un núcleo teórico muy heterogéneo, conocido ahora como «Fixed Point Theory», a caballo entre el análisis funcional, la topología y la Programación Lineal. Desgraciadamente, la mayoría de estos textos no mencionan el lema de Sperner [13], que sin embargo va ganando popularidad en tiempos recientes [21].

Aunque lo había remitido para publicar en julio de 1910, el matemático holandés L. E. J. Brouwer no vió publicado el artículo que contenía su más conocido resultado hasta 1912 [5]. En cambio Hadamard [12] publicó una demostración diferente en 1910, citando y reconociendo a Brouwer su prioridad como autor. El célebre enunciado dice (en lenguaje moderno):

**Teorema 0.1** (Brouwer). *Sea  $X$  un espacio topológico homeomorfo a  $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$  la bola cerrada euclidiana de centro 0 y radio 1. Para toda función continua  $f : X \rightarrow X$  existe al menos un  $x \in X$  tal que*

$$f(x) = x$$

*(un punto así es denominado un punto fijo de  $f$ ).*

Actualmente se sabe que en 1886 Poincaré [22] formuló y probó un teorema equivalente.

En Topología Algebraica este resultado suele obtenerse recurriendo a herramientas como lo son los grupos de Homología simplicial o singular, lo cual requiere un considerable número de preparativos y de tiempo. Sin embargo no es preciso apelar a estos métodos para obtener el teorema del punto fijo y vamos a exponer cómo dicho resultado es esencialmente consecuencia del lema de Sperner, implementado luego con un teorema elemental sobre recubrimientos de un simplex.

En 1928 E. Sperner [25] prueba un resultado combinatorio sobre las subdivisiones simpliciales de los  $n$ -símplices que después se conocería como lema de Sperner. El topólogo polaco W. Hurewicz lo expuso en un encuentro de la *Polish Mathematical Society* en Varsovia poniendo énfasis en que tal lema permite dar pruebas simples de resultados difíciles como el teorema de invarianza de la dimensión de un espacio métrico compacto o el famoso teorema de Brouwer de «invarianza del dominio», que literalmente dice que si  $A$  es un dominio de  $R^n$  (es decir un abierto conexo de  $R^n$ ) y  $f : A \rightarrow R^n$  una aplicación inyectiva y continua entonces  $f$  es abierta. Entre sus oyentes se encontraban B. Knaster, K. Kuratowski y S. Mazurkiewicz, quienes se apoyaron en este resultado para demostrar el llamado teorema KKM a partir del cual dedujeron el teorema del punto fijo de Brouwer [15]. Finalmente, en 1974 Yoseloff [29] probó que el lema de Sperner es consecuencia del teorema de Brouwer.

Pese a su sencillez, este camino (lema de Sperner + KKM) para probar el teorema del punto fijo de Brouwer es muy raramente utilizado o citado. Señalemos que aparece en unos pocos libros de Topología, de escasa popularidad todos ellos (pese a que algunos de sus

autores fueron destacados matemáticos), entre los cuales se cuentan los siguientes: [2], [1], [8], [23], [17], [19], [3], [10] (en estos dos últimos con variaciones apreciables). En español, el método de Sperner-KKM sólo aparece canónicamente en [17] y en obras de divulgación (pero sólo en dimensión 2).

En este trabajo estableceremos los conceptos básicos sobre convexidad, los símlices y las subdivisiones simpliciales (en particular las baricéntricas) que nos permitirán demostrar el lema de Sperner y el teorema de KKM, deduciendo finalmente el teorema del punto fijo de Brouwer. Para terminar mencionaremos brevemente la relación de este resultado con otros teoremas bien conocidos de la Topología.



# Capítulo 1

## Preliminares

Revisaremos a continuación algunas nociones respecto a la convexidad, un concepto que incluye el de simplex  $n$ -dimensional.

**Definición 1.1.** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se dice convexo si para cada par de puntos  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ , el segmento lineal

$$[x, y] := \{x + (1 - t)y; \quad 0 \leq t \leq 1\}$$

está contenido en  $A$ .



Figura 1.1: A la izquierda un conjunto convexo, a la derecha un conjunto no convexo.

Ejemplos de conjuntos convexos son un punto, una recta, un disco en  $\mathbb{R}^2$  o los sólidos platónicos en  $\mathbb{R}^3$ . También lo son  $\mathbb{R}^n$  y  $\emptyset$ . La siguiente propiedad nos permite construir nuevos conjuntos convexos a partir de otros dados:

**Lema 1.2.** *La intersección de una familia arbitraria de conjuntos convexos es un convexo.*

*Demostración.* Claramente si un segmento lineal está contenido en cada conjunto de la colección estará contenido también en su intersección.  $\square$

Luego dado un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $A$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene a  $A$ .

En lo que sigue definiremos un tipo de combinaciones afines que tienen especial interés en el tema que nos ocupa. Recordemos entonces que un punto  $x$  es una combinación afín de  $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  si existen números reales  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$  tales que:

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \quad (1.1)$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1 \quad (1.2)$$

**Definición 1.3.** Diremos que un punto  $x$  es una combinación convexa de  $x_0, x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$  si existen  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$  verificando las condiciones (1.1) y (1.2) y, además,

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 0, \dots, r$$

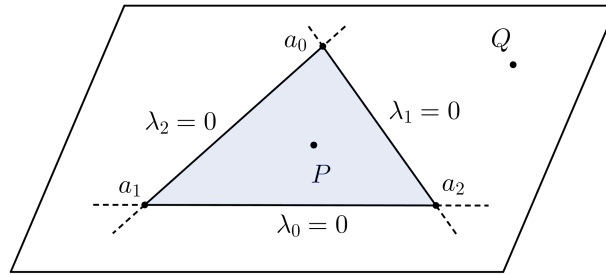


Figura 1.2: El punto  $Q$  es combinación afín de los puntos del plano  $a_0, a_1$  y  $a_2$ , pero no es una combinación convexa de estos. El punto  $P$  sí lo es.

**Definición 1.4.** El conjunto de todas las combinaciones convexas de los elementos de un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  se denomina envolvente convexa de  $A$  y la denotaremos por  $\text{conv}(A)$ . En particular  $\text{conv}(\emptyset) = \emptyset$ . Análogamente el conjunto de todas las combinaciones afines de elementos de  $A$  recibe el nombre de envolvente afín y la designaremos por  $\text{aff}(A)$ .

*Observación 1.5.* Evidentemente  $A \subset \text{conv}(A) \subset \text{aff}(A)$ .

**Teorema 1.6.** Dado un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,

- $A$  es convexo si y sólo si contiene a todas sus combinaciones convexas, es decir, si y sólo si  $A = \text{conv}(A)$
- La envolvente convexa de  $A$  es el conjunto convexo más pequeño que contiene a  $A$ , es decir, si  $A \subset A'$  y  $A'$  es convexo entonces  $\text{conv}(A) \subset A'$ .

*Demostración.* a) “ $\implies$ ” Sean  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r$  verificando las condiciones (1.2) y (1.3), veamos que dados  $x_0, x_1, \dots, x_r \in A$  entonces  $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \in A$  por inducción en  $r$ .

Para  $r = 0$  el resultado es trivial y por la convexidad de  $A$  también se verifica para  $r = 1$ . Supongamos que la afirmación es cierta para  $r$  y veamos que entonces lo es también para  $r + 1$ . Así pues, consideremos la combinación convexa  $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r + \lambda_{r+1} x_{r+1}$  de  $r + 2$  elementos de  $A$ . Definamos  $\Lambda := \sum_{i=0}^r \lambda_i$  de modo que

$$1 - \Lambda = \sum_{i=0}^{r+1} \lambda_i - \sum_{i=0}^r \lambda_i = \lambda_{r+1}$$

y por consiguiente

$$\left( \sum_{i=0}^r \lambda_i x_i \right) + \lambda_{r+1} x_{r+1} = \Lambda \left( \sum_{i=0}^r \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i \right) + (1 - \Lambda) x_{r+1}. \quad (1.3)$$

Notemos que  $\sum_{i=0}^r \frac{\lambda_i}{\Lambda} = 1$  y así en virtud de nuestra hipótesis de inducción  $\sum_{i=0}^r \left( \frac{\lambda_i}{\Lambda} \right) x_i \in A$ .

Puesto que  $x_{r+1} \in A$  se sigue que (1.3) es una combinación convexa de dos puntos de  $A$  y por esta razón pertenece a  $A$ .

“ $\impliedby$ ” Veamos en primer lugar que  $\text{conv}(A)$  es convexo. Si  $x, y \in \text{conv}(A)$  existen  $x_0, x_1, \dots, x_r, y_0, y_1, \dots, y_s \in A$  y números reales  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s$  tales que:

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1, \quad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 0, \dots, r$$

y

$$y = \mu_0 y_0 + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_s y_s, \quad \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_s = 1, \quad \mu_j \geq 0 \quad \forall j = 0, \dots, s.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que  $r = s$  (si no fuese así basta con añadir un cierto número de coeficientes nulos) y que  $y_j = x_j$  para  $j = 0, 1, \dots, r$ . Dado  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} tx + (1 - t)y &= t(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r) + (1 - t)(\mu_0 y_0 + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_r y_r) \\ &= [t\lambda_0 + (1 - t)\mu_0]x_0 + [t\lambda_1 + (1 - t)\mu_1]x_1 + \dots + [t\lambda_r + (1 - t)\mu_r]x_r. \end{aligned}$$

Puesto que todos los coeficientes son no negativos y

$$t\lambda_0 + (1 - t)\mu_0 + t\lambda_1 + (1 - t)\mu_1 + \dots + t\lambda_r + (1 - t)\mu_r = t + 1 - t = 1$$

se infiere que  $tx + (1 - t)y$  es una combinación convexa de  $x_0, x_1, \dots, x_r$ . Por consiguiente  $\text{conv}(A)$  es convexo luego si  $A = \text{conv}(A)$  deducimos que  $A$  es convexo.

- b) Basta con ver que  $\text{conv}(A)$  es la intersección de todos los conjuntos convexos de  $R^n$  que contienen a  $A$ . Sea  $\{X_i\}_{i \in I}$  la familia de subconjuntos de  $R^n$  que contienen a  $A$  y  $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ . Como  $A \subset \text{conv}(A)$  y  $\text{conv}(A)$  es convexo entonces  $X \subset \text{conv}(A)$ . Recíprocamente sea  $C \subset R^n$  un conjunto convexo tal que  $A \subset C$ . Tomando envolventes convexas,  $\text{conv}(A) \subset \text{conv}(C) = C$  (por el apartado anterior), y como  $C$  es cualquier conjunto convexo conteniendo a  $A$  concluimos que  $\text{conv}(A) \subset X$ .

□



Figura 1.3: Envolverte convexe de un conjunto de 10 puntos en el plano.

## Capítulo 2

# Símplices en $R^n$

Un concepto estrechamente relacionado con el de símplex m-dimensional es el de independencia afín. Recordemos que los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k \in R^n$  se dicen afínmente independientes si para cualquier secuencia  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$  de números reales,

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0 \end{array} \right\} \implies \lambda_j = 0 \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

No es difícil ver que los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_k \in R^n$  son afínmente independientes si, y sólo si, los vectores  $\overrightarrow{x_0 x_1}, \overrightarrow{x_0 x_2}, \dots, \overrightarrow{x_0 x_k}$  son linealmente independientes.

**Definición 2.1.** Sean  $a_0, a_1, \dots, a_m$  un conjunto finito no vacío de  $m + 1$  puntos afínmente independientes de  $R^n$ , el subconjunto  $\text{conv}\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$  de  $R^n$  formado por los puntos:

$$x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \tag{2.1}$$

tales que:

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 \quad y \quad \lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 0, \dots, m \tag{2.2}$$

se llama símplex m-dimensional cerrado generado por los puntos  $a_0, a_1, \dots, a_m$  y se denota por  $[a_0 a_1 \dots a_m]$ . Claramente el símplex  $[a_0 a_1 \dots a_m]$  no depende del orden de los puntos  $a_0, a_1, \dots, a_m$ , tan sólo depende del conjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ . El conjunto de todos los puntos del símplex  $[a_0 a_1 \dots a_m]$  tales que  $\lambda_j > 0 \quad \forall j$  se llama interior<sup>1</sup> del símplex y a veces se le denomina símplex abierto .

Notemos que  $m + 1$  puntos son afínmente independientes si no están en un mismo hiperplano (m-1)-dimensional. Esto significa que en el caso m=2 los puntos  $a_0, a_1, a_2$  no

---

<sup>1</sup>Esta definición no coincide en general con la definición topológica de interior (pero sí cuando  $m = n$ ) si no que es el interior de  $S$  en la topología relativa del m-plano generado por los puntos  $a_0, a_1, \dots, a_m$  (de forma que es un abierto en la topología relativa de ese m-plano).

están alineados, o que el 2-símplice  $[a_0a_1a_2]$  es un triángulo (interior y frontera). De un modo similar cuando  $m=3$  el 3-símplice  $[a_0a_1a_2a_3]$  es un tetraedro (interior y frontera), es decir, los puntos  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$  no son coplanarios (Figura 2.1). Los correspondientes símlices abiertos son el interior de un triángulo y de un tetraedro, respectivamente.

**Definición 2.2.** Consideremos un símplex  $[a_0a_1\dots a_m] \in R^n$ , para cualesquiera  $k+1$  números naturales distintos  $j_0, j_1, \dots, j_k$ , siendo  $k \leq m$ , los puntos  $a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_k}$  son afinmente independientes. Luego el símplex  $k$ -dimensional  $[a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_k}]$  está bien definido y se llama cara  $k$ -dimensional del símplex  $[a_0a_1\dots a_m]$ . Las caras 0-dimensionales  $a_0, a_1, \dots, a_m$  se llaman vértices y las caras 1-dimensionales se llaman aristas de  $[a_0a_1\dots a_m]$ . Además el propio  $[a_0a_1\dots a_m]$  se considera una cara suya.

Se comprueba fácilmente que la cara  $k$ -dimensional del símplex  $[a_{j_0}a_{j_1}\dots a_{j_k}]$  consiste en todos los puntos de la forma (2.1) satisfaciendo (2.2) y tales que  $\lambda_j = 0 \ \forall j \neq j_i, i = 0, \dots, k$ .

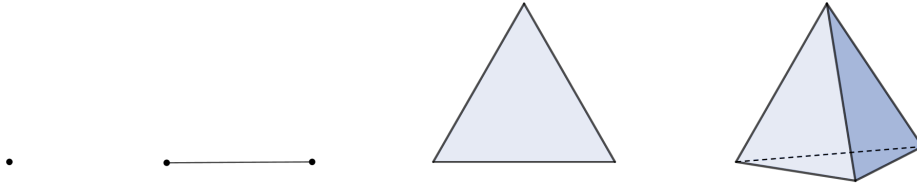


Figura 2.1: Símlices cerrados de dimensiones 0, 1, 2 y 3.

*Observación 2.3.* Cualquier punto de un símplex  $S$  pertenece al interior de una única cara de  $S$ . En efecto, sean  $a_0, a_1, \dots, a_m$  los vértices de  $S$  y  $x \in S$ . Entonces  $x = \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i$  donde

$0 \leq \lambda_i \leq 1$  para  $i = 0, 1, \dots, m$  y  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ . En consecuencia la única cara de  $S$  que contiene a  $x$  en su interior es la generada por aquellos vértices  $a_i$  para los cuales  $\lambda_i > 0$ .

*Observación 2.4.* Sea  $S = [a_0a_1\dots a_m]$  un símplex  $m$ -dimensional, tal como se han definido podemos dar una expresión para el número de caras  $k$ -dimensionales de  $S$ . Claramente  $S$  tiene  $m+1$  vértices,  $a_0, a_1, \dots, a_m$ . El número de caras 1-dimensionales de  $S$  no es más que el número de formas de tomar 2 puntos de los  $m+1$  vértices de  $S$  sin repeticiones y sin tener en cuenta el orden, de forma que

$$\text{n}^\circ \text{ de aristas de } S = C_{m+1}^2 = \binom{m+1}{2} = \frac{(m+1)!}{2!(m+1-2)!} = \frac{m(m+1)}{2}$$

En general contar el número de caras  $k$ -dimensionales de  $S$  no es más que contar el número de formas de tomar  $k + 1$  vértices del total de vértices de  $S$  sin importar el orden ni contemplar repeticiones, lo cual viene dado por el número combinatorio:

$$C_{m+1}^{k+1} = \binom{m+1}{k+1} = \frac{(m+1)!}{(k+1)!}$$

Por la independencia lineal de los vértices cada punto  $x \in [a_0 a_1 \dots a_m] \in R^n$  admite una única representación de la forma (2.1) bajo las condiciones (2.2). En efecto, supongamos que  $x \in [a_0 a_1 \dots a_m]$  admite dos representaciones de esta forma,

$$x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = \mu_0 a_0 + \mu_1 a_1 + \dots + \mu_m a_m$$

Entonces:

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i - \sum_{i=0}^m \mu_i a_i = 0 \implies \sum_{i=0}^m (\lambda_i - \mu_i) a_i = 0$$

Por otro lado, por ser  $x$  un punto de  $[a_0 a_1 \dots a_m]$ ,

$$\sum_{i=0}^m (\lambda_i - \mu_i) = \sum_{i=0}^m \lambda_i - \sum_{i=0}^m \mu_i = 1 - 1 = 0$$

Así, teniendo en cuenta que los puntos  $a_0, a_1, \dots, a_m$  son afinmente independientes, deducimos que  $\lambda_j - \mu_j = 0 \forall j$ , es decir,  $\lambda_j = \mu_j \forall j$ . Una vez comprobado esto tiene sentido dar la siguiente definición.

**Definición 2.5.** Los coeficientes  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  en (2.1) se llaman coordenadas baricéntricas del punto  $x$  y las denotaremos también por  $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x)$ .

**Teorema 2.6.** Para cualesquiera  $m+1$  puntos afinmente independientes  $a_0, a_1, \dots, a_m$  en  $R^n$  el simplex  $S = [a_0 a_1 \dots a_m]$  es un subespacio compacto de  $R^n$  y las coordenadas baricéntricas  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  son funciones continuas de  $T$  en el intervalo  $I = [0, 1]$ .

*Demostración.* Sea  $\delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ . Los puntos  $E_0, E_1, \dots, E_m \in R^{m+1}$  con

$E_j = \{\delta_i^{j+1}\}$  son afinmente independientes luego el simplex  $T = [E_0 E_1 \dots E_m] \subset R^{m+1}$  está bien definido. Además las coordenadas baricéntricas de los puntos de  $T$  coinciden con sus coordenadas en  $R^{m+1}$ : dado  $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in T$ ,

$$x = \mu_0 E_0 + \mu_1 E_1 + \dots + \mu_m E_m \implies (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$$

de donde se deriva que  $x_{j+1} = \mu_j \quad \forall j = 0, \dots, m$ .

Si además de esto tenemos en consideración las condiciones (2.2) verificadas por las coordenadas baricéntricas deducimos que  $T$  es cerrado y acotado en  $R^{m+1}$ .

Dado  $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in T$  se verifican las relaciones:

$$x_1 + \dots + x_{m+1} = 1 \quad \text{y} \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m+1$$

lo que significa que  $x_i \in [0, 1] \quad \forall i = 1, \dots, m+1$ . Pero como esto es cierto para todo punto del simplex  $T$  podemos escribir  $T \subset B_{R^{m+1}}[0, 1]$ .

Por otro lado, puesto que  $x_1 + \dots + x_{m+1} = 1$ , el punto  $x$  pertenece al hiperplano  $H = \{x \in R^{m+1} / \sum_{i=1}^{m+1} x_i = 1\}$ . Observemos que  $H$  es un subconjunto cerrado de  $R^{m+1}$ , pues  $R^{m+1} \setminus H = \{x \in R^{m+1} / \sum_{i=1}^{m+1} x_i > 1\} \cup \{x \in R^{m+1} / \sum_{i=1}^{m+1} x_i < 1\}$  es abierto. Denotemos por  $H_i$  el hiperplano determinado por  $\{x \in R^{m+1} / x_i = 0\}$  y por  $H_i^+ = \{x \in R^{m+1} / x_i \geq 0\}$  y  $H_i^- = \{x \in R^{m+1} / x_i \leq 0\}$  los subespacios cerrados superior e inferior de  $R^{m+1}$  asociados. Como además  $x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m+1$  se tiene que  $x \in \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i^+$ , que es un subconjunto cerrado de  $R^{m+1}$  como intersección de cerrados.

En consecuencia  $T = H \cap (\bigcap_{i=1}^{m+1} H_i^+)$  es cerrado además de acotado y, por ende, compacto.

Veamos ahora que la expresión dada por  $f(x) = x_1 a_0 + x_2 a_1 + \dots + x_{m+1} a_m$ , en la cual  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$  es un punto de  $T \subset R^{m+1}$ , define una aplicación continua  $f : T \rightarrow R^n$ . Esto equivale a ver que la composición  $p_i \circ f$  es continua, siendo  $p_i$  la aplicación proyección sobre el eje  $i$ .

La aplicación  $p_i \circ f : T \subset R^{m+1} \rightarrow R^n \rightarrow R$  definida por

$$x \mapsto f(x) = x_1 a_0 + \dots + x_{m+1} a_m \mapsto x_1 E_i^*(a_0) + \dots + x_{m+1} E_i^*(a_m)$$

es continua ya que para cada punto  $x \in T$  dado  $\epsilon > 0$  existe un entorno  $U$  de  $x$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  para todo  $y \in U$ . En efecto dado  $x \in T$  basta tomar  $U = B_{R^{m+1}}(x, \delta) \cap T$  siendo  $\delta \leq \frac{\epsilon}{|E_i^*(a_0) + E_i^*(a_1) + \dots + E_i^*(a_m) + 1|}$ , pues dado  $y \in U$  y si denotamos  $E_i^*(a_k) \equiv a_k^i$  se

tiene:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |x_1 a_0^i + x_1 a_1^i + \dots + x_{m+1} a_m^i - y_1 a_0^i - y_1 a_1^i - \dots - y_{m+1} a_m^i| = \\
&= |a_0^i(x_1 - y_1) + a_1^i(x_2 - y_2) + \dots + a_m^i(x_{m+1} - y_{m+1})| \leq \\
&\leq \left| \max_{i=1, \dots, m+1} (x_i - y_i) \right| |a_0^i + a_1^i + \dots + a_m^i| < \delta |a_0^i + a_1^i + \dots + a_m^i| \leq \\
&\leq \frac{\epsilon}{|a_0^i + a_1^i + \dots + a_m^i + 1|} |a_0^i + a_1^i + \dots + a_m^i| < \epsilon
\end{aligned}$$

La aplicación  $f : T \rightarrow f(T)$  es sobreyectiva y por ser los puntos  $a_0, a_1, \dots, a_m$  afínmente independientes resulta que es también inyectiva, pues dados  $x, y \in T$ ,

$$\begin{aligned}
f(x) = f(y) &\implies x_1 a_0 + x_2 a_1 + \dots + x_{m+1} a_m = y_1 a_0 + y_2 a_1 + \dots + y_{m+1} a_m \implies \\
&\implies a_0(x_1 - y_1) + a_1(x_2 - y_2) + \dots + a_m(x_{m+1} - y_{m+1})
\end{aligned}$$

Por otra parte como  $f(E_j) = a_j$  para  $j = 0, 1, \dots, m$  tenemos que  $f(T) = S$ . Así, como toda aplicación continua y biyectiva de un espacio compacto en un espacio Hausdorff es un homeomorfismo, se deduce que  $f : T \rightarrow S$  es un homeomorfismo y por lo tanto  $S$  es un subespacio compacto de  $R^n$ .

Además las coordenadas baricéntricas  $\lambda_j$  son continuas para  $j = 0, 1, \dots, m$  por ser  $\lambda_j(x) = (p_{j+1} \circ f^{-1})(x)$ . Esto es cierto puesto que dado un punto  $x$  de  $f(T) = S$  podemos escribir  $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$  con  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$  y  $\lambda_i \geq 0 \forall i = 0, 1, \dots, m$ , de forma que  $f^{-1}(x) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in R^{m+1}$  y  $p_{j+1}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_j = \lambda_j(x)$ . □

**Corolario 2.7.** *Dos símlices  $m$ -dimensionales son homeomorfos.*

*Demostración.* Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos símlices  $m$ -dimensionales generados por los  $m+1$  puntos afínmente independientes  $a_0, a_1, \dots, a_m$  y  $b_0, b_1, \dots, b_m$  de  $R^n$  respectivamente.

Las aplicaciones

$$\begin{aligned}
f: T &\longrightarrow S_1 \\
x &\longmapsto f(x) = x_1 a_0 + x_2 a_1 + \dots + x_{m+1} a_m \\
g: T &\longrightarrow S_2 \\
x &\longmapsto f(x) = y_1 b_0 + y_2 b_1 + \dots + y_{m+1} b_m
\end{aligned}$$

son homomorfismos y por consiguiente  $g \circ f^{-1} : S_1 \rightarrow S_2$  es un homomorfismo. □

**Definición 2.8.** Una subdivisión simplicial de un símplex  $S \subset R^n$  es una familia finita  $\mathcal{P} = \{S_i\}_{i=1}^k$  de símlices en  $R^n$  satisfaciendo las siguientes tres condiciones:

1. La familia  $\mathcal{P}$  es un recubrimiento de  $S$ , i.e.,  $\cup \mathcal{P} = S$ .
2. Para cualesquiera  $i, j \leq k$ , la intersección  $S_i \cap S_j$  es vacía o una cara común a  $S_i$  y  $S_j$ .
3. Para  $i = 1, 2, \dots, k$  todas las caras de  $S_i$  están en  $\mathcal{P}$ .

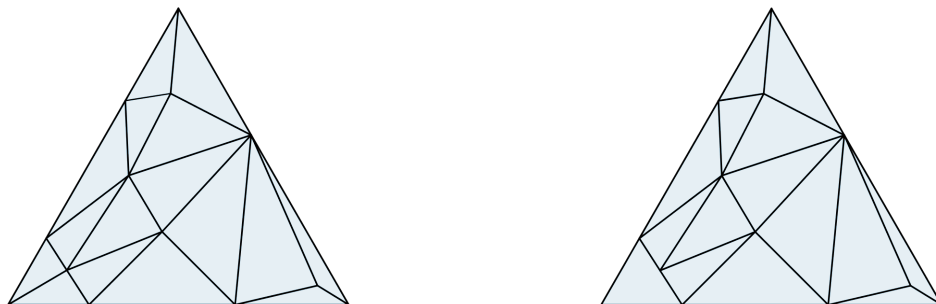


Figura 2.2: Dos subdivisiones de un símplex 2-dimensional, la primera de ellas es una subdivisión simplicial mientras que la segunda no lo es.

**Definición 2.9.** La malla de una subdivisión simplicial  $\{S_i\}_{i=1}^k$  de un símplex  $S$  se define como el mayor de los números  $\delta(S_1), \delta(S_2), \dots, \delta(S_k)$ .

## Capítulo 3

# Subdivisión baricéntrica

Introducimos en este capítulo la subdivisión baricéntrica de un simplex, un tipo de subdivisión simplicial cuyas propiedades la convierten en una herramienta bastante recurrida en la teoría de homología simplicial. En el trabajo que nos ocupa nos interesa especialmente porque proporciona una técnica que permite subdividir sucesivamente un simplex obteniendo en cada iteración una subdivisión “más fina” que la anterior (conteniendo los simplices de la subdivisión original, es decir, está formada por más simplices) de tal manera que podemos conseguir una subdivisión cuya malla sea tan pequeña como queramos.

**Definición 3.1.** Para todo simplex  $S = [a_0 a_1 \dots a_m] \subset R^n$  el punto

$$b(S) = \frac{1}{m+1}a_0 + \frac{1}{m+1}a_1 + \dots + \frac{1}{m+1}a_m$$

se llama baricentro del simplex  $S$ .

Notemos que  $\frac{1}{m+1} > 0$  y  $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m+1} = 1$ , luego  $b(S) \in S$ ; y  $b(S)$  no pertenece a ninguna cara  $(m-1)$ -dimensional.

**Teorema 3.2.** Sea  $S = [a_0 a_1 \dots a_m]$  un simplex  $m$ -dimensional no degenerado. Para toda secuencia estrictamente decreciente  $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_k$  de caras distintas del simplex  $S$  los puntos  $b(S_0), b(S_1), \dots, b(S_k)$  son afinmente independientes. La familia  $\mathcal{P}$  formada por todos los simplices de la forma  $[b(S_0)b(S_1)\dots b(S_k)]$  es una subdivisión simplicial del simplex. Todo simplex  $(m-1)$ -dimensional  $T \in \mathcal{P}$  es una cara de un o dos simplices  $m$ -dimensionales de  $\mathcal{P}$  dependiendo de si el simplex  $T$  está contenido o no en una cara  $(m-1)$ -dimensional de  $S$  respectivamente.

*Demostración.* Toda secuencia decreciente de caras distintas de  $S$  puede completarse a una secuencia  $S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_m$  de  $m+1$  caras de  $S$  sin más que tomar:

$$S_0 = a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_m} = S, S_1 = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}, \dots, S_m = a_{i_m}$$

donde  $i_0, i_1, \dots, i_m$  es una permutación de  $0, 1, \dots, m$ .

Para verificar la primera parte del teorema basta con ver que los puntos  $b(S_0), b(S_1), \dots, b(S_m)$  son afinmente independientes. Consideremos una combinación lineal:

$$\mu_0 b(S_0) + \mu_1 b(S_1) + \dots + \mu_m b(S_m) \quad (3.1)$$

Aplicando la definición de baricentro podemos escribir (3.1) como una combinación lineal de los puntos  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ . Se tiene que:

$$b(S_0) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{m+1} a_k, \quad b(S_1) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} a_k, \quad b(S_2) = \sum_{k=2}^m \frac{1}{m-1} a_k, \dots, \quad b(S_m) = a_m$$

de forma que los coeficientes que acompañan a  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  son  $\frac{1}{m+1}\mu_0, \frac{1}{m+1}\mu_0 + \frac{1}{m}\mu_1, \frac{1}{m+1}\mu_0 + \frac{1}{m}\mu_1 + \frac{1}{m-1}\mu_2, \dots, \frac{1}{m+1}\mu_0 + \frac{1}{m}\mu_1 + \frac{1}{m-1}\mu_2 + \dots + \frac{1}{m+1-(m-1)}\mu_m + \frac{1}{m+1-m}\mu_m$  respectivamente.

Teniendo en cuenta lo anterior podemos escribir (3.1) como  $\lambda_{i_0} a_{i_0} + \lambda_{i_1} a_{i_1} + \dots + \lambda_{i_m} a_{i_m}$ , donde para cada  $j = 0, 1, \dots, m$ :

$$\lambda_{i_j} = \sum_{k=0}^j \frac{1}{(m+1)-k} \mu_k \quad (3.2)$$

Así tomadas estas coordenadas baricéntricas verifican la siguiente relación:

$$\sum_{j=0}^m \lambda_{i_j} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^j \frac{1}{(m+1)-k} \mu_k = \sum_{i=0}^m \sum_{j=i}^m \frac{1}{(m+1)-i} \mu_i = \sum_{i=0}^m \mu_i \quad (3.3)$$

Supongamos que  $\mu_0 b(S_0) + \mu_1 b(S_1) + \dots + \mu_m b(S_m) = 0$  y que  $\sum_{i=0}^m \mu_i = 0$ . De esta última igualdad se sigue por (3.3) que  $\sum_{j=0}^m \lambda_{i_j} = 0$  y como los puntos  $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  son afinmente independientes se obtiene que  $\lambda_{i_j} = 0$  para  $j = 0, 1, \dots, m$ . Pero por (3.2) esto implica que  $\mu_i = 0$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ .

Por tanto los puntos  $b(S_0), b(S_1), \dots, b(S_m)$  son afinmente independientes y el simplex  $[b(S_0)b(S_1)\dots b(S_m)]$  está bien definido.

Claramente todo símplex en  $\mathcal{P}$  es una cara de un símplex  $m$ -dimensional de la forma  $[b(S_0)b(S_1)\dots b(S_m)]$ . Aplicando (3.1) y (3.3):

$$x \in [b(S_0)b(S_1)\dots b(S_k)] \implies \begin{cases} x = \mu_0 b(S_0) + \mu_1 b(S_1) + \dots + \mu_m b(S_m) = \lambda_{i_0} a_{i_0} + \lambda_{i_1} a_{i_1} + \dots + \lambda_{i_m} a_{i_m} \\ \sum_{j=0}^m \lambda_{i_j} = \sum_{i=0}^m \mu_i = 1 \end{cases}$$

de forma que  $[b(S_0)b(S_1)\dots b(S_m)]$  es un subconjunto de  $S$ .

Veamos ahora que  $[b(S_0)b(S_1)\dots b(S_m)]$  es igual al conjunto

$$\{x \in S / \lambda_{i_0}(x) \leq \lambda_{i_1}(x) \leq \dots \leq \lambda_{i_m}(x)\} \quad (3.4)$$

En virtud de (3.2) cada punto de  $[b(S_0)b(S_1)\dots b(S_m)]$  pertenece al conjunto (3.4). Por ello basta comprobar que todo punto  $x$  del conjunto (3.4) puede escribirse en la forma  $\mu_0 b(S_0) + \mu_1 b(S_1) + \dots + \mu_m b(S_m)$  con  $\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_m = 1$  y  $\mu_j \geq 0$  para  $j = 0, 1, \dots, m$ , lo cual se sigue directamente de lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lambda_{i_0} &= \frac{1}{m+1} \mu_0 \implies \mu_0 = (m+1) \lambda_{i_0} \\ \lambda_{i_1} &= \frac{1}{m+1} \mu_0 + \frac{1}{m} \mu_1 \implies \mu_1 = (\lambda_{i_1} - \frac{1}{m+1} \mu_0) m = (\lambda_{i_1} - \lambda_{i_0}) m \\ \lambda_{i_2} &= \frac{1}{m+1} \mu_0 + \frac{1}{m} \mu_1 + \frac{1}{m-1} \mu_2 \implies \mu_2 = (\lambda_{i_2} - \frac{1}{m+1} \mu_0 - \frac{1}{m} \mu_1) (m-1) = \\ &= (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_0} - \lambda_{i_1} + \lambda_{i_0}) (m-1) = (\lambda_{i_2} - \lambda_{i_1}) (m-1) \\ &\vdots \\ \lambda_{i_m} &= \frac{1}{(m+1)} \mu_0 + \frac{1}{(m+1)-1} \mu_1 + \dots + \frac{1}{(m+1)-m} \mu_m \implies \\ \implies \mu_m &= (\lambda_{i_m} - \frac{1}{(m+1)} \mu_0 - \frac{1}{(m+1)-1} \mu_1 - \dots - \frac{1}{m+1-(m-1)} \mu_{m-1}) (m+1-m) = \\ &= (\lambda_{i_m} - \lambda_{i_{m-1}}) (m+1-m) \end{aligned}$$

Se deduce así que los coeficientes  $\mu_j$  vienen dados por:

$$\mu_0 = (m+1) \lambda_{i_0} \quad \text{y} \quad \mu_j = [(m+1) - j] (\lambda_{i_j}(x) - \lambda_{i_{j-1}}(x)) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

De estas expresiones se infiere que las caras del símplex  $[b(S_0)b(S_1)\dots b(S_m)]$  se obtienen añadiendo a las condiciones que definen el conjunto (3.4) un cierto n ımero de condiciones

del tipo  $\lambda_{i_j}(x) = \lambda_{i_{j-1}}(x)$ , siendo  $1 \leq j \leq m$  o también la condición  $\lambda_{i_0}(x) = 0$ .

Como la intersección de una cara determinada por tal conjunto de condiciones con una cara de otro simplex  $[b(S'_0)b(S'_1)\dots b(S'_m)]$  correspondiente a otra permutación  $i'_0, i'_1, \dots, i'_m$  de  $0, 1, \dots, m$  sigue determinada por un conjunto de condiciones similar o es vacía, la familia  $\mathcal{P}$  verifica la segunda condición de subdivisión simplicial. La primera condición también se satisface porque cualquier punto de  $S$  pertenece a un conjunto de la forma (3.4) y la tercera condición se tiene por cómo hemos definido  $\mathcal{P}$ .

Consideremos ahora un simplex  $(m-1)$ -dimensional  $T = [b(S_0)b(S_1)\dots b(S_{m-1})]$ . Supongamos que el simplex  $T$  está contenido en una cara  $(m-1)$ -dimensional de  $S$ , lo que equivale a que  $S_0 \neq S$  pues:

- Si el simplex  $T$  está contenido en una cara  $(m-1)$  dimensional de  $S$ , en particular  $b(S_0)$  pertenece a dicha cara y además se sabe que  $b(S)$  no está contenido en ninguna cara  $(m-1)$ -dimensional de  $S$ . En consecuencia  $b(S) \neq b(S_0)$  y por ser  $b(S) \in S$ ,  $b(S_0) \in S_0$  y  $S_0 \subset S$  se obtiene que  $S \neq S_0$ .
- Recíprocamente, si  $S_0 \neq S$  y puesto que se tiene la cadena de caras estrictamente decreciente  $S \supset S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_{m-1}$  siendo  $S$  una cara  $m$ -dimensional, se deduce que  $S_0$  es una cara  $(m-1)$ -dimensional de  $S$ . En particular

$$b(S_0) \in S_0, b(S_1) \in S_1 \subset S_0, \dots, b(S_{m-1}) \in S_{m-1} \subset S_0,$$

de modo que  $T$  está contenido en una cara  $(m-1)$ -dimensional de  $S$ .

Entonces  $T$  es una cara de exactamente un simplex  $m$ -dimensional de  $\mathcal{P}$ , a saber  $[b(S)b(S_0)\dots b(S_{m-1})]$ . En efecto, si  $T$  fuese una cara del simplex  $[b(S_0)\dots b(S_m)]$  se tendría que  $b(S_0) \in S_0, b(S_1) \in S_1 \subset S_0, \dots, b(S_m) \in S_m \subset S_0$ . Así  $[b(S_0)\dots b(S_m)] \subset S_0$  de forma que  $S_0$  es un simplex  $m$ -dimensional y además  $S_0$  es una cara de  $S$ . Por lo tanto  $S = S_0$ , lo cual contradice lo supuesto.

Por otro lado, si  $T$  no está contenido en ninguna cara  $(m-1)$ -dimensional de  $S$ , es decir,  $S = S_0$ ; entonces existe al menos un  $j \leq m - 1$  tal que el simplex  $S_j$  se obtiene de  $S_{j-1}$  eliminando dos vértices o  $S_{m-1}$  es un simplex 1-dimensional. Se comprueba fácilmente que en ambos casos  $T$  es una cara de exactamente dos simpleses  $m$ -dimensionales de  $\mathcal{P}$ .  $\square$

**Definición 3.3.** La subdivisión simplicial de un simplex  $S$  definida en el teorema anterior recibe el nombre de subdivisión baricéntrica de  $S$ . Podemos definir de forma inductiva la

$l$ -ésima subdivisión baricéntrica de un símplex  $S$  para cada número natural  $l$ : la subdivisión baricéntrica de  $S$  es su primera subdivisión baricéntrica, y definida la  $j$ -ésima subdivisión baricéntrica  $\{S_i\}_{i=1}^k$  de  $S$  se define la  $(j+1)$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $S$  como la unión  $\cup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$ , donde  $\mathcal{P}_i$  es la subdivisión baricéntrica de  $S_i$  (Figura 3.1).

Aplicando el hecho de que para cada cara  $S'$  de  $S_i$  y cada miembro  $S''$  de  $\mathcal{P}_i$  la intersección  $S' \cap S''$  es vacía o una cara de  $S''$  y un miembro de la subdivisión baricéntrica de  $S'$ , se comprueba fácilmente que la unión  $\cup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$  es una subdivisión simplicial de  $S$ .

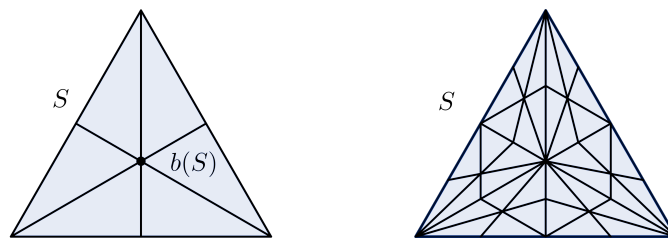


Figura 3.1: Primera y segunda subdivisiones baricéntricas de un símplex 3-dimensional.

Observemos que al tomar la primera subdivisión baricéntrica de un símplex, los símplexes que la conforman tienen un tamaño estrictamente menor que el inicial. De hecho, los tamaños de estos símplexes se aproximan a cero a medida que hacemos más y más subdivisiones, veamos esto de forma más precisa.

Consideremos un símplex  $S = [a_0 a_1 \dots a_m] \subset \mathbb{R}^n$ , un punto  $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ , donde  $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$  y  $\lambda_j \geq 0$  para  $j = 0, 1, \dots, m$ , i.e, un punto  $x \in S$ , y un punto arbitrario  $y \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que:

$$\rho(x, y) \leq \max_{j \leq m} \rho(a_j, y).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= |x - y| = \left| \sum_{j=0}^m \lambda_j a_j - \sum_{j=0}^m \lambda_j y \right| = \left| \sum_{j=0}^m \lambda_j (a_j - y) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^m \lambda_j |a_j - y| \leq \max_{j \leq m} |a_j - y| \sum_{j=0}^m \lambda_j = \max_{j \leq m} \rho(a_j, y) \end{aligned}$$

**Lema 3.4.** *El diámetro de un símplex  $[a_0 a_1 \dots a_m] \subset \mathbb{R}^n$  es igual al diámetro del conjunto  $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$  de sus vértices.*

*Demostración.* Sean  $x, y \in [a_0 a_1 \dots a_m]$ , entonces  $\rho(x, y) \leq \sum_{j \leq m} \rho(a_j, y)$ . Por otro lado  $\rho(a_j, y) \leq \sum_{i \leq m} \rho(a_j, a_i)$ , de donde se infiere que  $\rho(x, y) \leq \sum_{j, i \leq m} \rho(a_j, a_i)$ , o, lo que es lo mismo,  $\delta([a_0 a_1 \dots a_m]) = \delta(\{a_0, a_1, \dots, a_m\})$ .  $\square$

**Lema 3.5.** *La malla de la subdivisión baricéntrica de un símplex  $m$ -dimensional  $S = [a_0 a_1 \dots a_m]$  es menor o igual que  $\frac{m}{m+1} \delta(S)$ .*

*Demostración.* En virtud del lema anterior es suficiente probar que la distancia entre cualesquiera dos puntos de la forma

$$b(S_j) = \frac{1}{j+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \dots + a_{i_j}) \quad \text{y} \quad b(S_k) = \frac{1}{k+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \dots + a_{i_k}),$$

donde  $k \leq j \leq m$  e  $i_0, i_1, \dots, i_m$  es una permutación arbitraria de  $0, 1, \dots, m$ , es menor o igual que  $\frac{m}{m+1} \delta(S)$ .

Se tiene que  $\rho(b(S_k), b(S_j)) \leq \rho(a_{i_l}, b(S_j))$  para algún  $l \leq k \leq j$ . Así,

$$\begin{aligned} \rho(b(S_k), b(S_j)) &\leq \rho(a_{i_l}, b(S_j)) = |b(S_j) - a_{i_l}| = \left| \frac{1}{j+1}(a_{i_0} + a_{i_1} + \dots + a_{i_j}) - a_{i_l} \right| = \\ &= \frac{1}{j+1} \left| \sum_{h=0}^j (a_{i_h} - a_{i_l}) \right| \leq \frac{1}{j+1} \sum_{h=0}^j |a_{i_h} - a_{i_l}| \leq \frac{j}{j+1} \delta(S) \leq \frac{m}{m+1} \delta(S) \end{aligned}$$

$\square$

Probamos ahora el hecho que antes notábamos intuitivamente.

**Teorema 3.6.** *Para cada símplex  $S$ , dado  $\epsilon > 0$  existe un número natural  $l$  tal que la malla de la  $l$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $S$  es menor que  $\epsilon$ .*

*Demostración.* Sea  $S$  un símplex  $m$ -dimensional y  $\{S_i\}_{i=1}^k$  su subdivisión baricéntrica. Por el resultado anterior se tiene la relación  $\max\{\delta(S_i), i = 1, \dots, k\} \leq \frac{m}{m+1} \delta(S)$ , y entonces:

- La malla de la segunda subdivisión baricéntrica de  $S$ ,  $\max\{\delta(S'_i), i = 1, \dots, k\}$  siendo  $S'_i$  la subdivisión baricéntrica de  $S_i$ , es menor o igual que  $\frac{m}{m+1} \delta(S_i)$ . Pero por lo anterior podemos escribir:

$$\frac{m}{m+1} \delta(S_i) \leq \frac{m}{m+1} \frac{m}{m+1} \delta(S) = \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \delta(S)$$

- La malla de la tercera subdivisión baricéntrica de  $S$  es menor o igual que  $\left(\frac{m}{m+1}\right)^3 \delta(S)$ .

$\vdots$

· La malla de la  $n$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $S$  es menor o igual que  $(\frac{m}{m+1})^n \delta(S)$

Observemos que  $\delta(S) > 0$  y  $\frac{m}{m+1} < 1$  de forma que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{m}{m+1})^n \delta(S) = 0$ . Luego existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que  $(\frac{m}{m+1})^l \delta(S) < \epsilon$ , i.e., existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que la malla de la  $l$ -ésima subdivisión baricéntrica de  $S$  es menor que  $\epsilon$ . □



## Capítulo 4

# Lema de Sperner

Con los resultados vistos hasta este punto estamos en condiciones de probar el lema de Sperner, que establece lo siguiente. Consideremos un símplex 2-dimensional  $S = [a_0a_1a_2]$  (para facilitar la visualización) y una subdivisión simplicial<sup>1</sup>  $\mathcal{P}$  de  $S$ . Asignaremos a cada vértice un número según las siguientes reglas de etiquetado:

- Para  $0 \leq i \leq 2$  al vértice  $a_i$  se le asigna el valor  $i$ .
- Para  $1 \leq i < j \leq 3$  a cualquier vértice que se encuentre en la arista  $[a_ia_j]$  se le asigna o bien el valor  $i$  o bien el valor  $j$ .

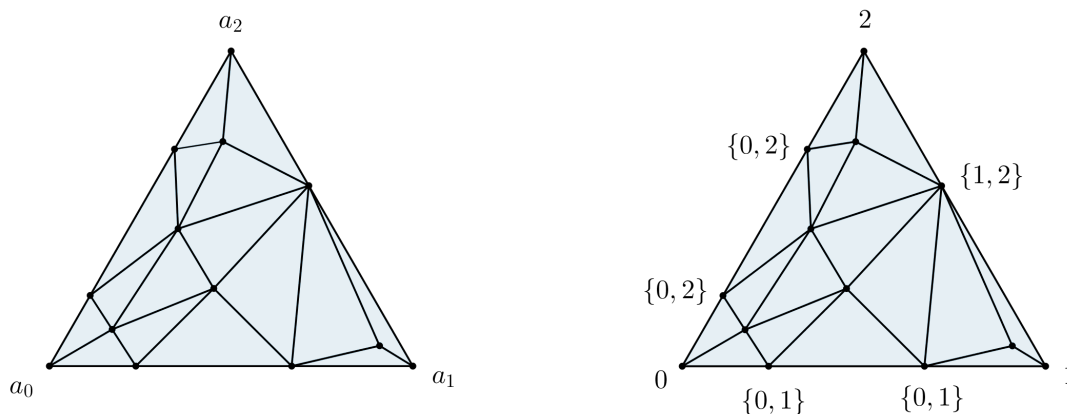


Figura 4.1: Una subdivisión simplicial de  $S$  y los posibles valores que se pueden asignar a los vértices de la frontera.

---

<sup>1</sup>El resultado se enunciará para una subdivisión baricéntrica del símplex para simplificar la demostración siguiendo [8]. En [3] ó [17] puede encontrarse el lema de Sperner enunciado y probado para una subdivisión simplicial en general.

Entonces existe al menos un simplex en  $\mathcal{P}$  totalmente etiquetado, es decir, en cuyos vértices aparezcan los valores 0, 1 y 2.

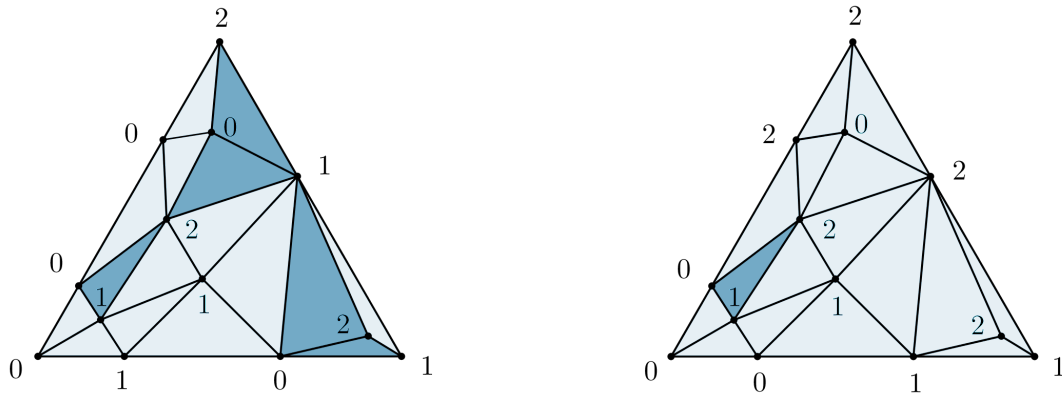


Figura 4.2: Dos etiquetados distintos que verifican las condiciones requeridas.

En el caso general de un simplex  $n$ -dimensional esta propiedad se enuncia formalmente como sigue.

**Lema 4.1** (de Sperner). *Sea  $\mathcal{P}$  la  $l$ -ésima subdivisión baricéntrica de un simplex  $m$ -dimensional  $[a_0 a_1 \dots a_m]$ , y sea  $V$  el conjunto de todos los vértices de los simplices de  $\mathcal{P}$ . Si una función  $h: V \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$  satisface la condición*

$$h(v) \in \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \quad \forall v \in [a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_k}]$$

*entonces existe un simplex en  $\mathcal{P}$  en cuyos vértices  $h$  toma todos los valores de 0 a  $m$ .*

*Demostración.* Probaremos una aserción más fuerte: que el número de simplices en  $\mathcal{P}$  en cuyos vértices  $h$  toma todos los valores de 0 a  $m$ , digamos  $c$ , es un número impar. Efectuaremos la demostración por inducción en  $m$ .

- Para  $m = 0$  es evidente pues en tal caso  $S = \{a_0\}$  y  $c = 1$ .
- Supongamos que la propiedad es válida para  $m - 1$  y veamos que también lo es para  $m$ . Consideremos la familia de todos los simplices de dimensión  $(m - 1)$  que aparecen en la subdivisión baricéntrica de  $S$  tomada. Entre ellos distinguimos aquellos simplices en cuyos vértices la función  $h$  toma todos los valores de 0 a  $m - 1$ , designemos por  $\mathcal{P}'$  la familia de estos simplices (claramente la única cara  $(m - 1)$  dimensional de  $S$  que contiene simplices de  $\mathcal{P}'$  es la cara  $[a_0 a_1 \dots a_{m-1}]$ ). Finalmente en la familia  $\mathcal{P}'$  consideremos aquellos simplices que están en la cara  $[a_0 a_1 \dots a_{m-1}]$ . Denotemos por  $u$

el número de estos símlices, que por hipótesis es impar.

Escribamos la sucesión  $S_1, S_2, \dots, S_t, S_{t+1}, \dots, S_w$  de todos los símlices que aparecen en la subdivisión baricéntrica considerada; supongamos que los símlices  $S_1, \dots, S_t$  tienen dimensión  $m$  y que los restantes la tienen  $< m$ .

Designemos por  $v_j$  para  $j \leq t$  el número de caras del símplex  $S_j$  pertenecientes a  $\mathcal{P}'$ . Si denotamos por  $W_j$  el conjunto de valores que toma la función  $h$  en los vértices de  $S_j$  se pueden dar cualquiera de las siguientes situaciones:

1. Si  $W_j = \{0, 1, \dots, m\}$  entonces  $v_j = 1$ . Basta considerar la cara  $(m-1)$ -dimensional de  $S_j$  generada por los vértices de  $S_j$  en los que la función  $h$  toma los valores  $0, 1, \dots, m-1$ .
2. Si  $\{0, 1, \dots, m-1\} \subset W_j \neq \{0, 1, \dots, m\}$ , entonces  $v_j = 2$ . En este caso la función  $h$  toma el mismo valor en dos vértices distintos de  $S_j$ . De esta forma hay dos caras  $(m-1)$ -dimensionales de  $S_j$  en las cuales  $h$  toma todos los valores de  $0$  a  $m-1$ , pues hay dos formas de tomar  $m-1$  vértices de  $A_j$  cuyos valores por  $h$  sean distintos (según se tome un vértice de los mencionados u otro).
3. Si  $\{0, 1, \dots, m-1\} \not\subset W_j$ , entonces  $v_j = 0$ .

Por tanto podemos escribir  $c \equiv (v_1 + v_2 + \dots + v_t) \pmod{2}$ , i.e.,

$$\exists d_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } c = (v_1 + v_2 + \dots + v_t) + 2d_1. \quad (4.1)$$

En efecto escribamos la sucesión  $S_1, S_2, \dots, S_t$  como  $S_1, \dots, S_m, S_{m+1}, \dots, S_q, S_{q+1}, \dots, S_t$  y supongamos que los símlices  $S_1, \dots, S_m$  están en la situación 1),  $S_{m+1}, \dots, S_q$  están en la situación 2) y  $S_{q+1}, \dots, S_t$  están en la situación 3). Observemos que siendo así,  $c = m$  y de este manera:

$$\begin{aligned} c = m &= 1 + \dots + 1 = v_1 + \dots + v_m = v_1 + \dots + v_m + v_{m+1} + \dots + v_q - 2q = \\ &= v_1 + \dots + v_m + v_{m+1} + \dots + v_q - 2q + v_{q+1} + \dots + v_t = v_1 + \dots + v_t + (-2q) \end{aligned}$$

y basta tomar  $d_1 = -q$ , siendo  $q$  el número de símlices  $m$ -dimensionales de la subdivisión baricéntrica considerada que se encuentran en la situación 2).

Si asignamos a cada símplex  $S_j$ ,  $j \leq t$ , sus  $v_j$  caras pertenecientes a  $\mathcal{P}'$ , entonces cualquier símplex  $T \in \mathcal{P}'$  será asignado (tal y como se ha probado en la última parte

del Teorema 3.2) a uno o dos símlices  $S_j$  dependiendo de si el símplex  $T$  está contenido o no en una cara  $(m - 1)$ -dimensional de  $S$ .

Teniendo esto en cuenta se deduce que  $u \equiv (v_1 + v_2 + \dots + v_t) \pmod{2}$ , i.e.,

$$\exists d_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } u = (v_1 + v_2 + \dots + v_t) + 2d_2. \quad (4.2)$$

En efecto, si  $s$  es el número de símlices de  $\mathcal{P}'$  que no están contenidos en una cara  $(m - 1)$ -dimensional de  $S$ , basta tomar  $d_2 = -s$ .

Las fórmulas (4.1) y (4.2) implican que  $c - u = 2(d_1 - d_2)$ , luego  $c$  es un número impar.

□

Además de proporcionar una prueba elegante y sencilla para el teorema del punto fijo de Brouwer, en los últimos años el lema de Sperner ha demostrado tener múltiples aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas. Tanto es así que 50 años después de su publicación, Sperner [26] ha hecho un estudio sobre el desarrollo, la influencia y las aplicaciones de este lema combinatorio como lo son la invarianza de la dimensión y la invarianza de la región. Además han aparecido múltiples generalizaciones del lema que han permitido desarrollar teoremas antipodales y una demostración constructiva del teorema fundamental del Álgebra, entre otros.

Nos interesa especialmente el resultado que obtuvieron Kuratowski, Knaster y Mazurkiewicz a partir del lema de Sperner y que ha dado lugar a una de las pruebas más directas del teorema de Brouwer. Para demostrarlo utilizaremos el lema de recubrimiento de Lebesgue,

**Teorema 4.2** (de recubrimiento de Lebesgue). *Si  $\mathcal{U}$  es un recubrimiento abierto de un espacio métrico compacto  $(M, d)$ , existe  $\epsilon > 0$ , llamado número de Lebesgue de  $\mathcal{U}$ , tal que todo subconjunto de diámetro menor que  $\epsilon$  está contenido en algún elemento de  $\mathcal{U}$ .*

*Demostración.* Sea entonces  $(M, d)$  un espacio métrico compacto y  $\mathcal{U}$  un recubrimiento abierto de este. Por ser  $M$  compacto podemos suponer que  $\mathcal{U}$  es finito, i.e.,  $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  siendo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  tomemos los conjuntos cerrados  $F_i := M \setminus U_i$ , y consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f: M &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, F_i) \end{aligned}$$

que es continua por serlo  $d$ .

Dado  $x \in M$  entonces  $x \in U_i$  para algún  $i \leq n$ , y por lo tanto existe un número  $r > 0$  tal que  $B(x, r) \subset U_i$ . De esto se infiere que  $d(x, F_i) \geq r$  y por consiguiente  $f(x) \geq \frac{r}{n} > 0$ . Basta tomar  $\epsilon = \min f(x) > 0$ . En efecto, si  $A$  es un subconjunto de  $M$  con diámetro  $< \epsilon$  y  $x_0$  es un punto de  $A$ , se tiene que:

$$\epsilon \leq f(x_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x_0, F_i) \leq \max d(x_0, F_i) = d(x_0, F_j) \text{ para algún } j \leq n,$$

debido a lo cual:

$$x_0 \in A \implies A \subset B(x_0, \epsilon) \subset B(x_0, d(x_0, F_j)) \subset U_j.$$

□

**Teorema 4.3** (de Kuratowski-Knaster-Mazurkiewicz<sup>2</sup>). *Sea  $\{F_i\}_{i=0}^m$  una familia de subconjuntos cerrados de un simplex  $S = [a_0 a_1 \dots a_m]$ . Si para cada cara  $[a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_k}]$  de  $S$  se tiene que*

$$[a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_k}] \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_k}$$

entonces  $F_0 \cap F_1 \cap \dots \cap F_m \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Supongamos  $F_0 \cap F_1 \cap \dots \cap F_m = \emptyset$ . La familia  $\{U_i\}_{i=0}^m$  donde  $U_i = S \setminus F_i$  es un recubrimiento de  $S$  pues  $\cup_{i=0}^m U_i = \cup_{i=0}^m S \setminus F_i = S \setminus \cap_{i=0}^m F_i = S$ .

Por la compacidad de  $S$  y el lema de recubrimiento de Lebesgue, existe un  $\epsilon > 0$  tal que cada subconjunto de  $S$  de diámetro menor que  $\epsilon$  está contenido en un conjunto  $U_i$ , es decir, su intersección con algún conjunto  $F_i$  es el vacío.

Por el Teorema 3.6 existe  $l \in \mathbb{N}$  tal que la malla de la  $l$ -ésima subdivisión baricéntrica  $\mathcal{P}$  del simplex  $S$  es menor que  $\epsilon$ . Denotemos por  $V$  el conjunto de todos los vértices de los

---

<sup>2</sup>del teorema KKM se deriva el concepto de funciones KKM y el estudio de sus propiedades y aplicaciones dá lugar a la conocida como teoría KKM. Como parte de su desarrollo se han obtenido muchos resultados equivalentes al teorema de Brouwer, especialmente en análisis de funciones no lineales y en economía matemática.

símplices en  $\mathcal{P}$ . Para cada  $v \in V$  la intersección de todas las caras de  $S$  que contienen a  $v$  es una cara de  $S$ , i.e., es de la forma  $[a_{i_0}a_{i_1}\dots a_{i_k}]$ .

Puesto que  $v \in [a_{i_0}a_{i_1}\dots a_{i_k}]$  por hipótesis existe un  $j \leq k$  tal que  $v \in F_{i_j}$ . Tomando  $h(v) = i_j$  definimos en  $V$  una función  $h$  que se encuentra en las condiciones del lema de Sperner, luego existe al menos un simplex  $T = v_0v_1\dots v_m \in \mathcal{P}$  tal que  $h(v_i) = i$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ . Así pues, para  $i = 0, 1, \dots, m$  se tiene que  $v_i \in F_i$  y en consecuencia  $T \cap F_i \neq \emptyset$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ , lo cual supone una contradicción por ser  $\delta(T) < \epsilon$ .  $\square$

## Capítulo 5

# Teorema del punto fijo de Brouwer

La siguiente propiedad nos permite enunciar y probar el teorema de Brouwer con más comodidad. Sean  $B_n = B[0, 1] = \{x \in R^n, \|x\| \leq 1\}$  la bola cerrada euclidiana  $n$ -dimensional,  $B(0, 1) = \{x \in R^n, \|x\| < 1\}$  su interior y  $S^{n-1} = \{x \in R^n, \|x\| = 1\}$  su frontera.

**Teorema 5.1.** Sean  $W \subset R^n$  un abierto acotado y convexo,  $\bar{W}$  su clausura,  $\partial W$  su frontera.

- a) Para todo  $w \in W$  y todo  $p \in R^n - \{0\}$  la semirrecta  $L = \{a + tp \text{ con } t \geq 0\}$  interseca a  $\partial W = \bar{W} - W$  en un punto, y sólo en uno.
- b) Existe un homeomorfismo  $F : \bar{W} \rightarrow B_n$  que verifica  $F(\partial W) = S^{n-1}$  y que induce un homeomorfismo entre  $W$  y la bola abierta  $B(0, 1)$ .

*Demostración.* El enunciado y la siguiente demostración están extraídos de [20] página 6. Un enunciado y prueba similares puede encontrarse en [7] página 55.

- a) Sea  $w$  un punto de  $W$  y consideremos la semirrecta  $L = \{w + tp; t \geq 0\}$ , siendo  $p \in R^n$  un punto fijado de  $R^n - \{0\}$ . Notemos que  $L \cap W$  es convexo como intersección de convexos y es abierto en  $L$ . Además por ser  $W$  acotado se tiene que  $L \cap W \subset W$  es también acotado, de forma que  $\exists a \in R$  tal que  $t \leq a$ . Entonces  $L \cap W$  está formado por los puntos de la forma  $w + tp$  con  $t$  perteneciente a un intervalo de la forma  $[0, a)$ . Siendo así  $L$  interseca a  $\partial W = \bar{W} - W$  en el punto  $x = w + ap$ , veamos que no hay más puntos en tal intersección.

Supongamos que  $L$  interseca  $\partial W$  en otro punto, digamos  $y$ , de forma que  $x$  se encuentra entre  $w$  e  $y$  en la semirrecta  $L$  (en caso contrario podríamos encontrar una bola abierta

centrada en  $y$  y completamente contenida en  $W$  y por tanto  $y \in W$ , lo cual supone una contradicción). De este modo  $y = w + bp$  para algún  $a > b$  y tenemos:

$$x = (1 - t)w + ty$$

donde  $t = a/b$ . Podemos describir esta ecuación de la forma

$$w = (x - ty)/(1 - t).$$

Tomemos una sucesión de puntos  $\{y_n\}$  de puntos de  $W$  convergente a  $y$  (Figura 5.1), y definamos

$$w_n = (x - ty_n)/(1 - t).$$

La sucesión  $\{w_n\}$  converge a  $w$ , de modo que  $w_n \in W$  para algún  $n$ . Pero puesto que  $x = tw_n + (1 - t)y_n$ , el punto  $x$  pertenece a  $W$  por ser este un conjunto convexo, lo cual supone una contradicción por cómo tomamos  $x$ .

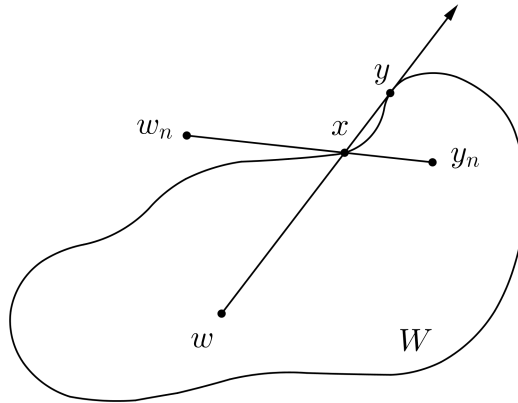


Figura 5.1

- b) Las translaciones son homeomorfismos luego podemos suponer que  $0$  pertenece al abierto  $W$ . La función  $f : R^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  dada por  $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$  es continua. Ahora por a) la restricción  $f|_{\partial W}$  es una biyección de  $\partial W$  en  $S^{n-1}$  que además es un homeomorfismo por ser una aplicación biyectiva de un espacio compacto en un espacio Hausdorff.

Sea  $g : S^{n-1} \rightarrow \partial W$  su inversa, podemos extender  $g$  a una biyección  $G : B_n \rightarrow \bar{W}$  que lleva el segmento lineal que une  $0$  con un punto  $u \in S^{n-1}$  linealmente en el segmento que une  $0$  y  $g(u)$  (Figura 5.2). Formalmente esto se define como sigue:

$$G(x) = \begin{cases} \|g(\frac{x}{\|x\|})\|x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Comprobar la continuidad de  $G$  en  $x \neq 0$  es inmediato. Sea  $x = 0$ , dado  $\epsilon > 0$  queremos ver que  $\exists \delta > 0$  tal que  $\|x - 0\| < \delta \implies \|G(x) - G(0)\| < \epsilon$ . Notemos que por ser  $W$  acotado  $\exists M > 0$  tal que  $\|g(\frac{x}{\|x\|})\| \leq M$ . Además:

$$\|G(x)\| = \|g(\frac{x}{\|x\|})\| \|x\| < \|g(\frac{x}{\|x\|})\| \delta \leq M\delta$$

y en consecuencia basta tomar  $\delta \leq \frac{\epsilon}{M}$ .

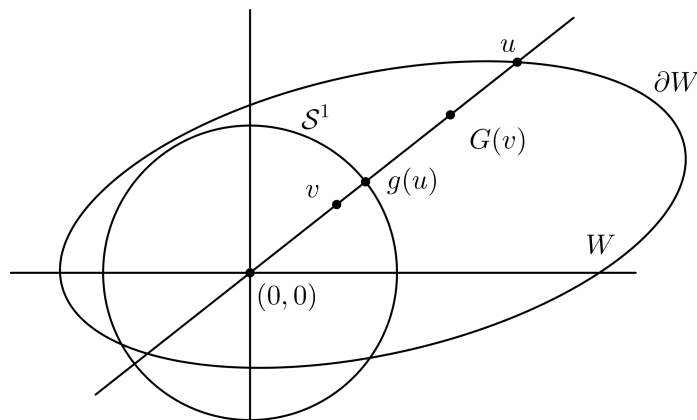


Figura 5.2

□

**Teorema 5.2** (del punto fijo de Brouwer). *Para cada  $n \in \mathbb{N}$  y para cada función continua  $f : B_n \rightarrow B_n$  existe un punto  $x \in B_n$  tal que  $f(x) = x$ .*

*Demostración.* Sea  $T = [a_0 a_1 \dots a_n] \subset \mathbb{R}^n$  el simplex  $n$ -dimensional de vértices  $a_0 = (0, \dots, 0)$ ,  $a_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $a_n = (0, \dots, 0, 1)$ .

Por ser  $T$  clausura de un abierto convexo y acotado, en virtud del teorema anterior  $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$  y  $T$  son homeomorfos. En consecuencia es suficiente probar que para cada aplicación continua  $\bar{f} : T \rightarrow T$  existe un punto  $x \in T$  tal que  $\bar{f}(x) = x$ . Para cada  $x \in T$  tenemos:

$$x = \lambda_0(x)a_0 + \lambda_1(x)a_1 + \dots + \lambda_n(x)a_n \tag{5.1}$$

donde

$$\lambda_0(x) + \lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1 \tag{5.2}$$

y  $\lambda_j(x) \geq 0$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

La imagen del punto  $x \in T$  por  $\bar{f}$  puede escribirse como:

$$\bar{f}(x) = \lambda_0(\bar{f}(x))a_0 + \lambda_1(\bar{f}(x))a_1 + \dots + \lambda_n(\bar{f}(x))a_n \quad (5.3)$$

donde

$$\lambda_0(\bar{f}(x)) + \lambda_1(\bar{f}(x)) + \dots + \lambda_n(\bar{f}(x)) = 1 \quad (5.4)$$

y  $\lambda_j(\bar{f}(x)) \geq 0$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Para cada  $i = 0, 1, \dots, n$  el conjunto

$$F_i = \{x \in T : \lambda_i(\bar{f}(x)) \leq \lambda_i(x)\}$$

es cerrado ya que  $\lambda_i$  y  $\bar{f}$  son funciones continuas. Veamos que la familia  $\{F_i\}_{i=0}^n$  está en las condiciones del Teorema 4.3.

Sea  $[a_{i_0}a_{i_1}\dots a_{i_k}]$  una cara de  $T$  y consideremos un punto  $x \in [a_{i_0}a_{i_1}\dots a_{i_k}]$ . Se tiene

$$\lambda_{i_0}(x) + \lambda_{i_1}(x) + \dots + \lambda_{i_k}(x) = 1$$

de forma que por (5.4):

$$\lambda_{i_0}(\bar{f}(x)) + \lambda_{i_1}(\bar{f}(x)) + \dots + \lambda_{i_k}(\bar{f}(x)) \leq \lambda_{i_0}(x) + \lambda_{i_1}(x) + \dots + \lambda_{i_k}(x)$$

luego existe al menos un  $j \leq k$  para el cual  $\lambda_{i_j}(\bar{f}(x)) \leq \lambda_{i_j}(x)$ , lo que significa que  $x \in F_{i_j}$ . Hemos probado así que

$$[a_{i_0}a_{i_1}\dots a_{i_k}] \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_k} \quad (5.5)$$

Por el Teorema 4.3 existe un punto  $x \in F_0 \cup F_1 \cup \dots \cup F_n$  y tal como están definidos los conjuntos  $F_i$  esto se traduce en que

$$\lambda_0(\bar{f}(x)) \leq \lambda_0(x), \lambda_1(\bar{f}(x)) \leq \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(\bar{f}(x)) \leq \lambda_n(x) \quad (5.6)$$

Pero teniendo en cuenta las igualdades (5.2) y (5.4) se infiere que no puede darse la desigualdad estricta  $\lambda_j(\bar{f}(x)) < \lambda_j(x)$  para ningún  $j$ . Por consiguiente,

$$\lambda_0(\bar{f}(x)) = \lambda_0(x), \lambda_1(\bar{f}(x)) = \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(\bar{f}(x)) = \lambda_n(x) \quad (5.7)$$

y por (5.1) y (5.3) obtenemos  $\bar{f}(x) = x$ .  $\square$

**Corolario 5.3.** *Sea  $X$  un espacio topológico homeomorfo a  $B_n$ . Toda función continua de  $X$  en sí mismo tiene al menos un punto fijo.*

*Demostración.* En efecto, si  $f : X \rightarrow X$  es una función continua y  $g : X \rightarrow B_n$  es un homeomorfismo entonces la aplicación  $h := g \circ f \circ g^{-1} : B_n \rightarrow B_n$  es continua. Por el Teorema del punto fijo de Brouwer existe  $x \in B_n$  tal que  $h(x) = x$ , luego  $y = g^{-1}(x)$  es un punto fijo de  $f$ .  $\square$

## Capítulo 6

# Aplicaciones

El teorema del punto fijo de Brouwer es uno de los más importantes y conocidos teoremas de existencia y sus muchas generalizaciones y formulaciones equivalentes en topología, análisis no lineal, teoría de juegos y otros campos de las matemáticas lo convierten en una potente herramienta para probar la existencia de soluciones en numerosos problemas tanto de matemáticas puras como aplicadas. Haremos a continuación un breve recorrido por las conexiones con algunos resultados que se han estudiado recientemente (se puede consultar una extensa lista en [21]).

En primer lugar estudiaremos cómo se deduce el teorema de la no retracción, que habitualmente se demuestra utilizando resultados concernientes a la homología de las esferas, a partir del teorema de Brouwer.

**Definición 6.1.** Diremos que un espacio topológico  $X$  tiene la propiedad del punto fijo si toda aplicación continua  $f : X \rightarrow X$  tiene al menos un punto fijo, i.e, si  $\exists x_0 \in X$  tal que  $f(x_0) = x_0$ .

En general no es fácil decidir cuando un espacio topológico tiene la propiedad del punto fijo, aunque el teorema de Brouwer permite dar respuesta afirmativa en numerosos casos.

**Ejemplo 6.2.** El intervalo cerrado  $[0, 1]$  es un subconjunto compacto y conexo de  $\mathbb{R}$  y por tanto tiene la propiedad del punto fijo. Sin embargo esto no es cierto para el intervalo abierto  $(0, 1)$ , basta considerar la función  $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  dada por  $x \mapsto f(x) = x^2$ , que es continua y no admite puntos fijos.

**Ejemplo 6.3.** Las traslaciones en  $\mathbb{R}^2$  son funciones continuas que no tienen puntos fijos y en consecuencia  $\mathbb{R}^2$  no tiene la propiedad del punto fijo.

**Ejemplo 6.4.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S^n$  no tiene la propiedad del punto fijo ya que la función antipodal  $a : S^n \rightarrow S^n$  dada por  $x \mapsto a(x) = -x$  es continua pero no admite un punto fijo.

**Teorema 6.5** (de la no retracción). *Dado  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , entonces  $S^{n-1}$  no es retracto de  $B_n$ .*

*Demostración.* Supongamos por reducción al absurdo que  $S^{n-1}$  es un retracto de  $B_n$  y sea  $r : B_n \rightarrow S^{n-1}$  una retracción de  $B_n$  en  $S^{n-1}$ . Se tiene que  $r$  es una aplicación continua tal que  $r(x) = x \ \forall x \in S^{n-1}$ , es decir,  $r \circ i = Id_{S^{n-1}}$  siendo  $i : S^{n-1} \hookrightarrow B_n$  la aplicación inclusión.

Sea  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  una función continua. En virtud del teorema de Brouwer,  $B_n$  tiene la propiedad del punto fijo y por otro lado la función  $i \circ f \circ r : B_n \rightarrow B_n$  es continua como composición de funciones continuas. Entonces  $\exists x_0 \in B_n$  tal que  $i \circ f \circ r(x_0) = x_0$  y por consiguiente,

$$f(r(x_0)) = r \circ i \circ f \circ r(x_0) = r(x_0)$$

de modo que  $f$  tiene un punto fijo.

Como esto se tiene para una función continua de  $S^{n-1}$  en  $S^{n-1}$  arbitraria se concluye que  $S^{n-1}$  tiene la propiedad del punto fijo, lo cual supone una contradicción con lo visto en el Ejemplo 6.4.  $\square$

El propio Brouwer [6] deriva los siguientes dos resultados de su teorema de punto fijo:

**Teorema 6.6** (de invarianza del dominio de Brouwer). *Sean  $U$  un suconjunto abierto de  $R^n$  y  $f : U \rightarrow R^n$  una función continua e inyectiva. Entonces  $V = f(U)$  es abierto y  $f$  es un homeomorfismo de  $U$  en  $V$ .*

**Corolario 6.7** (invarianza de la dimensión topológica). *Si  $n > m$  y  $U$  es un subconjunto abierto y no vacío de  $R^n$ , entonces no existe una función continua e inyectiva de  $U$  en  $R^m$ . En particular  $R^n$  y  $R^m$  no son homeomorfos.*

El teorema de Brouwer tiene también cabida en espacios de dimensión no finita, tal como mostraron algunas de sus generalizaciones. Entre ellas cabe mencionar los teoremas del punto fijo de Schauder [24] y Tychonoff [28], que datan de 1930 y 1935 respectivamente:

**Teorema 6.8** (del punto fijo de Schauder). *Sean  $X$  un espacio de Banach y  $C \subset X$  un subconjunto no vacío, acotado, cerrado y convexo de  $X$ . Entonces toda aplicación  $f : C \rightarrow C$  compacta, es decir, continua y tal que  $f(C)$  es relativamente compacto (i.e., la clausura*

de  $f(A)$  en  $C$ ,  $\overline{f(A)}$ , es compacta) para todo subconjunto acotado  $A \subset C$ , tiene un punto fijo en  $C$ .

**Teorema 6.9** (del punto fijo de Tychonoff). *Sean  $X$  un espacio vectorial topológico localmente convexo y  $C \subset X$  un subconjunto compacto, convexo y no vacío de  $X$ . Entonces toda aplicación continua  $f : C \rightarrow C$  tiene un punto fijo en  $C$ .*

Ambos resultados se usan a la hora de estudiar la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones no lineales, sistemas de desigualdades, ecuaciones integrales, ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfacen la condición de Lipschitz... En el ámbito del análisis funcional se destaca que en 1973 Victor Lomonosov dió una prueba de la existencia de subespacios invariantes basándose en el teorema de punto fijo de Schauder.

Otra generalización destacable es la que expone S. Kakutani en 1941 en [14] para funciones multivariantes (funciones que llevan puntos a conjuntos) y aunque su utilidad se acentúa en teoría de juegos y economía matemática<sup>1</sup> también se ha empleado en programación matemática y teoría de ecuaciones diferenciales:

**Teorema 6.10** (de Kakutani). *Sea  $K$  un subconjunto compacto y convexo de  $R^m$ . Sea  $F : K \rightarrow \mathcal{P}(K)$  una multifunción de un grafo cerrado y con valores convexos. Entonces  $F$  tiene un punto fijo, es decir, existe  $x \in K$  tal que  $x \in F(x)$ .*

Además en 1984 Maehara [18] expone cómo el teorema de la curva de Jordan es consecuencia del teorema que nos ocupa (para  $n = 2$ ).

**Teorema 6.11** (de Jordan). *Sea  $C$  una curva cerrada simple (i.e., es la imagen por un homeomorfismo de la circunferencia) en el plano euclídeo. Entonces  $R^2 \setminus C$  no es conexo y consta de exactamente dos componentes conexas que tienen a  $C$  como frontera común. Además una y sólo una de ellas es acotada.*

Para terminar recientemente W. Kulpa [16] dedujo una generalización del teorema de Brouwer valiéndose del teorema de Fubini y el teorema de aproximación de Weierstrass, la cual que le sirvió para dar una prueba simple del teorema fundamental del álgebra.

---

<sup>1</sup>Tal vez la aplicación más importante fue la descubierta por Nash probando la existencia de equilibrio en un juego finito. Después de esto se sobrevivieron muchas otras aplicaciones en teoría de juegos y economía (como probar la existencia de equilibrio económico).



## Capítulo 7

# Conclusión

El teorema del punto fijo de Brouwer fue uno de los primeros logros de la Topología Algebraica y, aunque en un principio su estudio estaba enfocado al trabajo con ecuaciones diferenciales, tiene ramificaciones en diversas áreas de las matemáticas y tal vez por esto es un resultado de especial renombre entre la familia de teoremas que conforman la Teoría del punto fijo.

A lo largo de este trabajo hemos querido relacionar este conocido teorema de carácter topológico con el que se podría considerar un resultado análogo en términos combinatorios no muy conocido: el lema de Sperner. Para deducir el primero de ellos del segundo hemos necesitado introducir y examinar las propiedades de algunos conceptos fundamentales de la teoría simplicial como lo son el de subdivisión simplicial y el de subdivisión baricéntrica. Esta última proporciona una construcción que nos permite subdividir un simplex en otros simplexes cuyos diámetros sean tan pequeños como queramos, propiedad que no es indispensable para establecer el lema de Sperner pero que ha resultado ser crucial a la hora de probar el teorema KKM (apoyándonos también en el teorema de recubrimiento de Lebesgue y el lema de Sperner). De este resultado obtuvimos finalmente el teorema de Brouwer sin apelar a procedimientos avanzados de homología simplicial.

La elegante prueba del teorema del punto fijo de Brouwer en términos de homología pone de manifiesto que a pesar de que el lema de Sperner presenta un enunciado fácil de comprender no es tan inocente como podría parecer. El procedimiento seguido a lo largo de esta exposición muestra que aunque el teorema KKM combinado con el lema de Sperner no es un método muy conocido para establecer el teorema de Brouwer es un camino fácil de seguir que tal vez no ha encontrado aún la popularidad que merece.

Finalmente era necesario señalar que este teorema ha sido el punto de partida de numerosos resultados y generalizaciones repasando brevemente algunas de sus múltiples aplicaciones más recientes. Su relación con teoremas como el de la curva de Jordan, el teorema fundamental del Álgebra, la invarianza del dominio o de la dimensión topológica es una clara evidencia de la trascendencia que a tenido y tendrá el teorema más famoso de Brouwer.

# Bibliografía

- [1] P. S. Alexandrov, *Combinatorial Topology, Part 2, Chapter V, Pags. 155-169*. Dover Publications Inc. Mineola, New York, (1998).
- [2] P. Alexandroff, H. Hopf, *Topologie, I*. Julius Springer Verlag, Berlin, 1935.
- [3] C. Berge, *Topological Spaces, Chapter VIII, Pags. 158-176*. Dover Publications Inc. Mineola, New York, (1997) .
- [4] C. Bidard, *Le lemme de Sperner nu*. RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 32, no.2 (1998) 193-210.
- [5] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. **71** (1912), 97-115.
- [6] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz des  $n$ -dimensionalen Gebietes*. Math. Ann. **71** (1912), 305-315.
- [7] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1972.
- [8] R. Engelking, *General Topology, 2nd ed*. Sigma Series in Pure Mathematics, 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [9] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, 1st ed., Graduate Texts in Mathematics, 168, Springer, New York, 1996.
- [10] W. Franz, *Topología general y algebraica*. Selecciones Científicas, Madrid (1978).
- [11] T. W. Gamelin, R. E. Greene, *Introduction to Topology, 2nd. ed*. Dover Publications Inc. Mineola, New York (1999).
- [12] J. Hadamard, *Sur quelques applications de l'indice de Kroneker*. Apéndice en el libro de Jules Tannery *Introduction a la Théorie des Fonctions d'une Variable - Tome Deuxième*. A. Hermann et Fils, Paris (1910).

- [13] V. I. Istratescu, *Fixed Point Theory. An Introduction*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, (1981).
- [14] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8**(3) (1941), 457-459.
- [15] B. Knaster, K. Kuratowski y S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für  $n$ -dimensionale Simplexe*. Fund. Math. **14** (1929), 132-137.
- [16] W. Kulpa, *An integral criterion for coincidence property*. Radovi Mat. **6** (1990), 313-321.
- [17] K. Kuratowski, *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología*, 1<sup>a</sup> edición, Vicens Vives, Barcelona, 1966.
- [18] R. Maehara, *The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), 641-643.
- [19] J. Mayer, *Algebraic Topology, Chapter 1*. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1972).
- [20] J. Munkres, *Algebraic Topology, Chapter 1*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. Menlo Park Ca. (1984).
- [21] S. Park, *Ninety years of the Brouwer fixed point theorem*, Vietnam J. Math. **27** (1999), 187-222.
- [22] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par les equations différentielles*, J. Math. Pures et Appliquées **2** (1886), 151-218.
- [23] W. Rinow, *Lehrbuch der Topologie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. **27** (1975), 187-222.
- [24] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. **2** (1930), 171--180.
- [25] E. Sperner, *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **6** (1928), 265-272.
- [26] E. Sperner, *Fifty years of further development of a combinatorial lemma. Numerical solution of highly nonlinear problems*, W. Foster ed., North-Holland, Amsterdam-New York, 1980, 183-197, 199-217.

- [27] Y. Tanaka, *Constructive Proof of Brouwer's Fixed Point Theorem for Sequentially Locally Non-constant and Uniformly Sequentially Continuous Functions*, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 42-1, Advance online publication, 27 February (2012).
- [28] A. Tychonoff, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. **111** (1935), 767—776.
- [29] M. Yoseloff, *Topological proofs of some combinatorial theorems*, J. Comb. Theory (A) **17** (1974), 95-111.